103
2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIO

P R E S E N T A :

JAVIER OCTAVIO VÁZQUEZ SALAS

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Universidad Nacional
Autónoma de
México

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: " Introducción a la programación dinámica".

realizado por Javier Octavio Vázquez Salas.

con número de cuenta 8233497-6 , pasante de la carrera de Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M en C.	Juan González Hernández.
Propietario	Act.	Guillermo Calderón Fabela.
Propietario	Doctor.	Joaquín Curiel Cañedo.
Suplente	Act.	Maximino Gómez Mendoza.
Suplente	Act.	José Guadalupe Vázquez Vázquez.

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. César Guevara Bravo.

A MIS PADRES:

ARTURO VÁZQUEZ CAMACHO ✝
ROSA SALAS VDA. DE VÁZQUEZ

MI ETERNO AGRADECIMIENTO POR SU AMOR Y APOYO, SIN EL CUAL NO ESTARÍA COMPLETA ESTA ETAPA DE MI VIDA.

CON RESPETO Y GRATITUD

Al M. en C. JUAN GONZÁLEZ HERNÁNDEZ

POR SU DIRECCIÓN, LA CUAL FUÉ MUY VALIOSA PARA LA REALIZACIÓN DE ESTE TRABAJO.

INDICE.

INTRODUCCION.

INTRODUCCION.

DEBIDO A LOS COMPLEJOS PROBLEMAS DE DECISION QUE TRAE CONSIGO EL GRAN CRECIMIENTO Y DESARROLLO DE LAS ORGANIZACIONES (EMPRESARIALES, GUBERNAMENTALES, SOCIALES, INTERNACIONALES, ETC.). EL HOMBRE HA TENIDO QUE HACER USO EXTENSIVO DE UNA VARIEDAD DE TECNOLOGIAS BLANDAS EN TODOS LOS NIVELES DENTRO DE LAS ORGANIZACIONES QUE LE PERMITAN INCREMENTAR LA PROBABILIDAD DE TOMAR MEJORES DECISIONES.DENTRO DE ESTAS TECNOLOGIAS BLANDAS SE ENCUENTRA LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.

LA INVESTIGACION DE OPERACIONES ES UN CONJUNTO DE HERRAMIENTAS MODERNAS QUE SE USAN EN SITUACIONES MUY DIVERSAS EN LA TOMA DE DECISIONES DE TODO TIPO DENTRO DE LAS ORGANIZACIONES.BASTE SEÑALAR ALGUNAS DE DICHAS HERRAMIENTAS COMO SON: LA PROGRAMACION LINEAL, PROGRAMACION ENTERA, TEORIA DE COLAS, REDES DE OPTIMIZACION, PROGRAMACION DINAMICA, TEORIA DE INVENTARIOS, TEORIA DE JUEGOS, ENTRE OTRAS. ESTAS HERRAMIENTAS SE UTILIZAN MUY FRECUENTEMENTE EN TODAS LAS RAMAS DE LA INGENIERIA, ECONOMIA, ADMINISTRACION, EN LAS CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS, ETC.

CUANDO NO SE EMPLEAN DENTRO DE LAS ORGANIZACIONES TECNICAS COMO LA INVESTIGACION DE OPERACIONES, SE PUEDE DECIR QUE LAS DECISIONES QUE SE TOMAN SON DE CARACTER INTUITIVO, IGNORANDO LA MAYORIA DE LAS INTERRELACIONES QUE EXISTEN ENTRE LAS COMPONENTES DEL SISTEMA, LO CUAL ES LOGICO YA QUE PUEDEN EXISTIR EN EL SISTEMA CIENTOS O MILES DE INTERRELACIONES LAS CUALES EL SER HUMANO NO PUEDE VISUALIZAR Y MUCHO MENOS ANALIZAR DE UNA MANERA EFICIENTE. SIN EMBARGO, CON LA AYUDA DE UNA TECNOLOGIA MAS APROPIADA COMO LA INVESTIGACION DE OPERACIONES Y DEL USO DE UN INSTRUMENTO COMO LA COMPUTADORA SI ES POSIBLE ANALIZAR LA MAYORIA DE LAS POSIBLES ALTERNATIVAS SIGNIFICATIVAS GENERADAS POR LAS INTERRELACIONES QUE EXISTEN DENTRO DEL SISTEMA.

EN MEXICO CON EL TRATADO DE LIBRE COMERCIO, LAS ORGANIZACIONES MEXICANAS ESTAN EN COMPETENCIA YA CON ORGANIZACIONES ESTADOUNIDENSES Y CANADIENSES QUE USAN TECNOLOGIAS BLANDAS, LO QUE HACE NECESARIO QUE LAS ORGANIZACIONES MEXICANAS SE ADECUEN YA A ESTAS TECNOLOGIAS.

COMO MENCIONAMOS ANTERIORMENTE DENTRO DE LAS HERRAMIENTAS USADAS EN LA INVESTIGACION DE OPERACIONES SE ENCUENTRA LA PROGRAMACION DINAMICA QUE ES EL TEMA QUE ABORDA EL PRESENTE TRABAJO. LA PROGRAMACION DINAMICA TIENE COMO FIN EL DE RESOLVER CIERTOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACION QUE SOLO PUEDEN SER RESUELTOS CUANDO SE LES DESCOMPONE EN UNA SERIE DE ETAPAS.

ESTE CARACTER SECUENCIAL QUE CARACTERIZA A CIERTOS FENOMENOS JUSTIFICA EL EMPLEO DE UN METODO APROPIADO COMO LO ES LA PROGRAMACION DINAMICA. ESTE METODO ES EFICIENTE EN LA MEDIDA QUE NOS PERMITE NO SOLO LLEVAR A CABO LOS CALCULOS DE OPTIMIZACION, SINO QUE TAMBIEN NOS ACLARA EL PROBLEMA MEDIANTE LA INTRODUCCION DE CONCEPTOS PRECISOS Y NOS DA METODOS DE APROXIMACION A LA SOLUCION OPTIMA COMO UNA ITERACION DE VALORES E ITERACION DE POLITICAS.POR

LO TANTO, EL CRITERIO DE DECISION, LAS POLITICAS O ESTRATEGIAS, Y LA INFLUENCIA DE LA INFORMACION SOBRE LA CALIDAD DE LAS DECISIONES, DEBEN QUEDAR DEFINIDAS CON TANTA PRECISION COMO SEA POSIBLE.

LA PROGRAMACION DINAMICA ES UTILIZADA COMO METODO DE OPTIMIZACION EN LOS FENOMENOS SECUENCIALES QUE SE PRESENTAN POR EJEMPLO; EN LOS ESTUDIOS ECONOMICOS SOBRE TODO EN LAS APLICACIONES A LA MICROECONOMIA, YA SEA QUE SE TRATE DE LA REGULACION DE LA PRODUCCION Y LAS EXISTENCIAS, DE LA ADMINISTRACION DE EQUIPOS, DE INVERSIONES ETC. O BIEN, EN LOS PROBLEMAS MACROECONOMICOS COMO LOS DE PLANIFICACION NACIONAL.

EL OBJETIVO DE ESTA TESIS ES EL DE FAMILIARIZAR AL LECTOR CON LA TECNICA DE LA PROGRAMACION DINAMICA, MOSTRAR LOS PRINCIPALES COMPONENTES DE LA ESTRUCTURA DE LA PROGRAMACION DINAMICA, ASI COMO MOSTRAR EL INTERES QUE ESTA TECNICA TIENE COMO METODO DE OPTIMIZACION EN LOS FENOMENOS SECUENCIALES.

ESTA TESIS COMPRENDE EN EL PRIMER CAPITULO DE UNA PERSPECTIVA HISTORICA; NOS DA UNA SEMBLANZA DE LOS ORIGENES TANTO DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES COMO DE LA PROGRAMACION DINAMICA EN PARTICULAR ASI COMO SU DESARROLLO. EN EL SEGUNDO CAPITULO SE EXPONE EL TEMA DE LA PROGRAMACION DINAMICA EN EL CASO DETERMINISTICO, SUS PRINCIPALES COMPONENTES COMO SON ; EL ALGORITMO DE PROGRAMACION DINAMICA, OPTIMIZACION DE UNA ETAPA, OPTIMIZACION DE n ETAPAS, LA FUNCION RECURSIVA ASI COMO UNA CLASIFICACION DE LOS PROGRAMAS DINAMICOS DE ACUERDO A SU ESTRUCTURA. EL CAPITULO TRES TRATA DE LA PROGRAMACION DINAMICA EN EL CASO PROBABILISTICO O ESTOCASTICO. NOS MUESTRA LAS PRINCIPALES CARACTERISTICAS DE ESTA TECNICA ASI COMO EL MODELO DE ETAPA FINITA, EL MODELO DE PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA DE ETAPA INFINITA (METODO DE ENUMERACION EXHAUSTIVA, METODO DE ITERACION DE POLITICA). TANTO EN EL CAPITULO SEGUNDO COMO TERCERO SE PRESENTAN EJEMPLOS CON EL FIN DE ILUSTRAR LA APLICABILIDAD DE LOS METODOS. AL FINAL DE LA PRESENTE TESIS SE PRESENTA UN PEQUEÑO APENDICE DE PROBABILIDAD CON LOS CONCEPTOS USADOS EN LA ELABORACION DE LA MISMA.

I

ORIGENES Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.

PARECE QUE EL TERMINO INVESTIGACION DE OPERACIONES SE USO POR PRIMERA VEZ EN EL AÑO DE 1939, PERO TAL COMO SUCEDIO CON OTRAS DISCIPLINAS CIENTIFICAS, UNA VEZ QUE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES SE ESTABLECIO Y DENOMINO, SE PUDO LOCALIZAR SU ORIGEN REMONTANDOSE HASTA EPOCAS MUY LEJANAS DE LA HISTORIA DE LA CIENCIA Y SOCIEDAD.

A PESAR DE QUE EL ORIGEN DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES PUEDE CONSIDERARSE ANTERIOR A LA PRIMERA REVOLUCION INDUSTRIAL, FUE PRECISAMENTE DURANTE ESTE MOVIMIENTO CUANDO EMPEZARON A DESARROLLARSE LOS PROBLEMAS QUE IBA A RESOLVER LA INVESTIGACION DE OPERACIONES, SIN EMBARGO, ESTA TARDO EN DESARROLLARSE EN EL CAMPO DE LA ADMINISTRACION INDUSTRIAL. LA FALTA DE DESARROLLO DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES PUDO HABERSE PROLONGADO INDEFINIDAMENTE DE NO HABER SURGIDO NOTABLES PROGRESOS EN LAS ORGANIZACIONES MILITARES AL PRINCIPIO DE LA SEGUNDA GUERRA MUNDIAL.

LAS ORGANIZACIONES MILITARES ATRAVESARON POR LAS MISMAS ETAPAS DE EVOLUCION ADMINISTRATIVA QUE LAS INDUSTRIAS. EL AVANCE DE LAS NUEVAS TECNOLOGIAS Y LA EXPANSION, HICIERON NECESARIA UNA MAYOR DIVISION Y ESPECIALIZACION DE LAS HABILIDADES ADMINISTRATIVAS.

EN LOS ESTABLECIMIENTOS MILITARES APARECIERON CUATRO FUNCIONES ADMINISTRATIVAS PRINCIPALES LAS CUALES FUERON:

1) ADMINISTRACION. 2) INTELIGENCIA. 3) OPERACIONES Y ENTRENAMIENTO.
4) SUMINISTRO Y LOGISTICA.

CADA UNA DE ELLAS SE DIVIDIO A SU VEZ EN VARIOS TIPOS DE SUBFUNCIONES, E IGUAL QUE EN LAS INDUSTRIAS, CADA VEZ HUBO UNA MAYOR DISPERSION GEOGRAFICA.

PARA MAXIMIZAR EL ESFUERZO DE LA GUERRA, ERA NECESARIO ASIGNAR RECURSOS ESCASOS DE UN MODO EFECTIVO A LAS DIVERSAS OPERACIONES Y ACTIVIDADES MILITARES. PRIMERO FUE LA ADMINISTRACION BRITANICA Y LUEGO LA AMERICANA QUIENES COMISIONARON A UN GRAN NUMERO DE CIENTIFICOS PARA APLICAR EL ENFOQUE CIENTIFICO A MUCHOS PROBLEMAS ESTRATEGICOS Y TACTICOS. ESTOS GRUPOS DE CIENTIFICOS COMPRENDIAN FISICOS, BIOLOGOS, MATEMATICOS, ESTADIGRAFOS, SICOLOGOS, ENTRE OTROS. ELLOS CONFORMARON EL PRIMER EQUIPO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES.

SE PUEDE DECIR QUE LA PRIMERA MISION QUE TUVO EL GRUPO DE CIENTIFICOS FUE CUANDO EMPEZARON LOS ATAQUES AEREOS ALEMANES SOBRE LA GRAN BRETAÑA. ENTONCES LOS EJECUTIVOS Y ADMINISTRADORES MILITARES BRITANICOS RECURRIERON A LOS CIENTIFICOS EN BUSCA DE AYUDA, ESPECIFICAMENTE BUSCABAN COMO INCORPO-

RAR EL ENTONCES NUEVO RADAR A LAS TACTICAS Y ESTRATEGIAS DE LA DEFENSA AEREA. PEQUEÑOS GRUPOS DE CIENTIFICOS DE TODAS LAS DISCIPLINAS TRABAJARON EN ESOS PROBLEMAS CON GRAN EXITO EN LOS AÑOS DE 1939 Y 1940. SU EXITO MOTIVO A UNA MAYOR DEMANDA DE TALES SERVICIOS Y EL USO DE EQUIPOS CIENTIFICOS SE EXTENDIO A LOS ALIADOS OCCIDENTALES (ESTADOS UNIDOS, CANADA, Y FRANCIA). SU TRABAJO SE LLEGO A CONOCER EN GRAN BRETAÑA COMO INVESTIGACION OPERACIONAL Y EN LOS ESTADOS UNIDOS POR VARIOS NOMBRES COMO, ANALISIS OPERACIONAL, EVALUACION DE OPERACIONES Y EL DE INVESTIGACION DE OPERACIONES QUE ES EL MAS USADO.

ALGUNAS DE LAS INVESTIGACIONES REALIZADAS POR LOS BRITANICOS FUERON LA DE LA DETERMINACION DEL TAMAÑO OPTIMO DE UNA CARAVANA PARA MINIMIZAR LAS PERDIDAS POR ATAQUES SUBMARINOS, LA DETERMINACION DEL COLOR ADECUADO DE LOS AVIONES PARA MINIMIZAR LA DETECCION POR SUBMARINOS. ALGUNOS ESTUDIOS REALIZADOS POR LOS AMERICANOS COMPRENDIAN LA INVENCION DE NUEVOS PATRONES DE VUELOS, LA PLANEACION DE COLOCACION DE MINAS MARINAS Y LA UTILIZACION EFECTIVA DE EQUIPO ELECTRONICO..

DESPUES DE LA GUERRA, EL EXITO OBTENIDO POR LOS GRUPOS MILITARES ATRAJO LA ATENCION DE LA INDUSTRIA QUE BUSCABA SOLUCIONES A PROBLEMAS CAUSADOS POR LA COMPLEJIDAD Y ESPECIALIZACION ASCENDENTE EN LAS ORGANIZACIONES LO QUE TRAIA CONSIGO PROBLEMAS COMPLEJOS DE DECISION. ESTOS HECHOS IMPULSARON A LAS ORGANIZACIONES DE NEGOCIOS A UTILIZAR HERRAMIENTAS FORMALES DE INVESTIGACION DE OPERACIONES.

ES POSIBLE IDENTIFICAR POR LO MENOS OTROS DOS FACTORES QUE CONTRIBUYERON SIGNIFICATIVAMENTE AL RAPIDO CRECIMIENTO DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES DURANTE ESTE PERIODO.

UNO FUE EL PROGRESO SUSTANCIAL QUE SE LOGRO AL DESARROLLAR Y MEJORAR LAS TECNICAS DISPONIBLES DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES. UN EJEMPLO ES EL METODO SIMPLEX PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL Y QUE FUE PUBLICADO POR EL MATEMATICO AMERICANO GEORGE DANTZING EN 1947. MUCHAS DE LAS HERRAMIENTAS CONVENCIONALES DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES TALES COMO LA PROGRAMACION LINEAL, LA PROGRAMACION DINAMICA, LA TEORIA DE INVENTARIOS Y LA TEORIA DE COLAS ESTABAN RELATIVAMENTE YA DESARROLLADAS POR ESA EPOCA.

EL SEGUNDO FACTOR EN EL PROGRESO IMPRESIONANTE DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES FUE EL DESARROLLO PARALELO DEL COMPUTADOR DIGITAL. ESTE LE PROPORCIONO AL TOMADOR DE DECISIONES TREMENDA CAPACIDAD EN VELOCIDAD DE COMPUTO Y ALMACENAMIENTO Y RETIRO DE INFORMACION. SI NO FUERA POR ESTO LA INVESTIGACION DE OPERACIONES CON SUS PROBLEMAS DE COMPUTO A GRAN ESCALA NO HUBIERA CRECIDO AL NIVEL DE HOY EN DIA.

¿QUE ES LA INVESTIGACION DE OPERACIONES?

LA INVESTIGACION DE OPERACIONES SE PUEDE CONSIDERAR COMO:

LA APLICACION DEL METODO CIENTIFICO POR EQUIPOS INTERDISCIPLINARIOS A PROBLEMAS QUE COMPRENDEN EL CONTROL DE LAS ORGANIZACIONES O SISTEMAS HOMBRE-MAQUINA PARA DAR SOLUCIONES QUE SIRVAN MEJOR A LOS PROPOSITOS DE LA ORGANIZACION COMO UN TODO.

LA INVESTIGACION DE OPERACIONES SE APLICA TANTO A PROBLEMAS TACTICOS COMO A ESTRATEGICOS DE LA ORGANIZACION. LOS PROBLEMAS TACTICOS TIENEN QUE VER CON LAS ACTIVIDADES DIARIAS DE LA ORGANIZACION. COMO POR EJEMPLO, LOS PROBLEMAS DE LA PROGRAMACION DE LA PRODUCCION Y CONTROL DE INVENTARIOS, EL MANTENIMIENTO Y REPARACION DE LAS INSTALACIONES, PLANES DE INSPECCION PARA EL CONTROL E INTERVENCION DE CALIDAD. LOS PROBLEMAS ESTRATEGICOS TIENEN UNA ORIENTACION Y PLANEACION MAS GLOBAL APOYANDOSE EN LAS OPERACIONES DIARIAS DE LA ORGANIZACION EN FORMA INDIRECTA, COMO POR EJEMPLO EL DESARROLLO DE UN PROGRAMA A LARGO PLAZO PARA LA EXPANSION DE LA PLANTA, LA SELECCION DE SITIOS PARA UNA PLANTA, ASIGNACION DE RECURSOS PARA EXPLORACION DEL ESPACIO, DESARROLLO DE PROGRAMAS PARA AYUDAR AL NECESITADO, ETC.

CARACTERISTICAS DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.

ENFOQUE: EL ENFOQUE PRINCIPAL DE UN ESTUDIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES ES EN LA TOMA DE DECISIONES ES DECIR, EL RESULTADO PRINCIPAL DEL ANALISIS DEBE TENER IMPLICACIONES DIRECTAS PARA LA ACCION GERENCIAL.

AREAS DE APLICACION: LA INVESTIGACION DE OPERACIONES SE APLICA A PROBLEMAS QUE TIENEN QUE VER CON LA CONDUCCION Y COORDINACION DE OPERACIONES Y ACTIVIDADES DE UNA ORGANIZACION. LA NATURALEZA ESPECIFICA DE LA ORGANIZACION NO ES IMPORTANTE. LA INVESTIGACION DE OPERACIONES HA SIDO APLICADA EXTENSAMENTE EN UNA DIVERSIDAD DE AREAS, TALES COMO NEGOCIOS, INDUSTRIAS, HOSPITALES, EN EL GOBIERNO, TAL ES EL CASO DE MEXICO QUE SE UTILIZA EN LAS SECRETARIAS DE OBRAS PUBLICAS, DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES, EN EL INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL, BANCO DE MEXICO, ETC.

OBJETIVO: LA INVESTIGACION DE OPERACIONES INTENTA ENCONTRAR LA SOLUCION MEJOR U OPTIMA DEL PROBLEMA EN CONSIDERACION EN ALGUN SENTIDO ESPECIFICO. PARA HACER ESTO ES NECESARIO DEFINIR UNA MEDIDA DE EFECTIVIDAD QUE TOME EN CUENTA LAS METAS DE LA ORGANIZACION. ESTA MEDIDA SE UTILIZA PARA COMPARAR ACCIONES ALTERNAS Y EVALUARLAS.

ENFOQUE METODOLOGICO: LA INVESTIGACION DE OPERACIONES UTILIZA EL LLAMADO METODO CIENTIFICO. ESPECIFICAMENTE, EL PROCESO COMIENZA CON LA OBSERVACION CUIDADOSA Y LA FORMULACION DEL PROBLEMA. EL SIGUIENTE PASO ES CONSTRUIR UN MODELO CIENTIFICO (TIPICAMENTE MATEMATICO) QUE TRATE DE ABSTRAER LA ESENCIA DEL PROBLEMA REAL. DE ESTE MODELO SE OBTIENEN CONCLUSIONES Y SOLUCIONES QUE TAMBIEN SON VALIDAS PARA EL PROBLEMA REAL.

EQUIPO DE ENFOQUE INTERDISCIPLINARIO: NINGUN INDIVIDUO PUEDE TENER UN CONOCIMIENTO TOTAL DE TODOS LOS ASPECTOS QUE CONTIENE UN PROBLEMA DE INVESTIGACION DE OPERACIONES, POR LO QUE SE REQUIERE DE UN GRUPO DE INDIVIDUOS QUE TENGAN CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES DIVERSAS.

COMPUTADORA: LA COMPLEJIDAD DE UN PROBLEMA MEDIANAMENTE REAL REQUIERE DEL MANEJO DE UN GRAN VOLUMEN DE INFORMACION O DE MODELOS MATEMATICOS COMPLICADOS POR LO QUE SE HACE NECESARIO PARA SU IMPLEMENTACION Y MANEJO EL USO DE LAS COMPUTADORAS.

CONSTRUCCION DEL MODELO.

EN PRINCIPIO EL MODELAJE ES LA ESENCIA DEL ENFOQUE DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES. EL CONSTRUIR UN MODELO AYUDA A COLOCAR LOS ASPECTOS COMPLEJOS E INCIERTOS DE UN PROBLEMA DE DECISION EN UNA ESTRUCTURA LOGICA QUE ES ADECUADA PARA EL ANALISIS FORMAL. ESTE MODELO ESPECIFICA LAS ALTERNATIVAS DE LA DECISION Y SUS CONSECUENCIAS ANTICIPADAS PARA TODOS LOS EVENTOS POSIBLES QUE PUEDAN OCURRIR, INDICA LOS DATOS IMPORTANTES PARA ANALIZAR LAS ALTERNATIVAS Y CONDUCE A CONCLUSIONES GERENCIALES QUE INFORMAN Y TIENEN SENTIDO.

SINTETIZANDO PODEMOS DECIR, QUE UN MODELO EN INVESTIGACION DE OPERACIONES ES UN VEHICULO PARA LOGRAR UNA VISION BIEN ESTRUCTURADA DE UN PROBLEMA REAL. EL PROPOSITO DEL MODELO ES PROPORCIONAR UN MEDIO PARA ANALIZAR EL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA CON EL FIN DE MEJORAR SU DESEMPEÑO. O SI EL SISTEMA AUN NO EXISTE PARA DEFINIR SU ESTRUCTURA IDEAL FUTURA INDICANDO LAS RELACIONES FUNCIONALES ENTRE SUS ELEMENTOS.

LA APLICABILIDAD DE LA SOLUCION OBTENIDA DEL MODELO DEPENDE DE LA VALIDEZ DE EL PARA REPRESENTAR EL SISTEMA REAL.

UN MODELO MATEMATICO COMPRENDE PRINCIPALMENTE TRES CONJUNTOS BASICOS DE ELEMENTOS QUE SON LOS SIGUIENTES:

1) VARIABLES Y PARAMETROS DE DECISION: LAS VARIABLES DE DECISION SON LAS INCOGNITAS (O DECISIONES) QUE DEBEN DETERMINARSE RESOLVIENDO EL MODELO. LOS PARAMETROS SON LOS VALORES CONOCIDOS QUE RELACIONAN A LAS VARIABLES DE DECISION CON LAS RESTRICCIONES Y LA FUNCION OBJETIVO. LOS PARAMETROS DEL MODELO PUEDEN SER DETERMINISTICOS O PROBABILISTICOS.

2) RESTRICCIONES: PARA TENER EN CUENTA LAS LIMITACIONES TEGNOLOGICAS, ECONOMICAS Y OTRAS DEL SISTEMA, EL MODELO DEBE INCLUIR RESTRICCIONES QUE RESTRINJAN A LAS VARIABLES DE DECISION A UN RANGO DE VALORES FACTIBLES.

3) FUNCION OBJETIVO: LA FUNCION OBJETIVO DEFINE LA MEDIDA DE EFECTIVIDAD DEL SISTEMA COMO UNA FUNCION MATEMATICA DE LAS VARIABLES DE DECISION. UNA DECISION OPTIMA DEL MODELO SE OBTIENE CUANDO LOS VALORES DE LAS VARIABLES DE DECISION PRODUCEN EL MEJOR VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO SUJETA A RESTRICCIONES.

DE TODO LO ANTERIOR SE PUEDE DEDUCIR QUE EL OBJETIVO PRIMORDIAL QUE SE PERSIGUE AL HACER USO DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES ES EL DE INCREMENTAR LA PROBABILIDAD DE TOMAR MEJORES DECISIONES EN CUALQUIER ORGANIZACION, YA QUE GENERA UN MAYOR NIVEL DE ORDENACION MEJORANDO EL CONTROL DEL SISTEMA AL INSTITUIR PROCEDIMIENTOS SISTEMATICOS QUE SUPERVISAN POR UN LADO LAS OPERACIONES QUE SE LLEVAN A CABO EN LA ORGANIZACION Y POR EL OTRO EVITA EL REGRESO A OTRO ESTADO DEL SISTEMA MENOS EFICIENTE.

PROGRAMACION DINAMICA.

LOS CREADORES DE LA PROGRAMACION DINAMICA FUERON RICHARD BELLMAN Y GEORGE D. DANTZIG, SUS IMPORTANTES CONTRIBUCIONES A ESTA TECNICA CUANTITATIVA SE PUBLICARON POR VEZ PRIMERA EN LA DECADA DE 1950.

INICIALMENTE LA PROGRAMACION DINAMICA SE LLAMO PROGRAMACION LINEAL ESTOCASTICA, O BIEN, PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL RELACIONADOS CON LA INCERTIDUMBRE.

EL NOMBRE DE PROGRAMACION DINAMICA PROBABLEMENTE EVOLUCIONO DEBIDO A SU USO EN APLICACIONES EN QUE INTERVENIA LA TOMA DE DECISIONES RELACIONADAS CON EL TIEMPO. (COMO LOS PROBLEMAS DE INVENTARIO).

LA PROGRAMACION DINAMICA TAMBIEN SE OCUPA DE LOS PROBLEMAS EN LOS QUE EL TIEMPO NO ES UNA VARIABLE SIGNIFICATIVA. POR EJEMPLO, CUANDO HAY QUE TOMAR UNA DECISION QUE REQUIERA LA DISTRIBUCION DE UNA CANTIDAD FIJA DE RECURSOS ENTRE CIERTO NUMERO DE USOS ALTERNATIVOS. ESTE TIPO DE PROBLEMAS PUEDE RESOLVERSE DESCOMPONIENDOLOS EN VARIAS ETAPAS Y DE ESE MODO LA DECISION FINAL SE MANEJA COMO SI FUERA UNA SERIE DE DECISIONES DEPENDIENTES EN EL TRANSCURSO DEL TIEMPO. AUNQUE ESTE TIPO DE PROBLEMAS NO SE OCUPA DEL FACTOR TIEMPO POR SI MISMO, SE APEGA SIN EMBARGO, A LA CARACTERISTICA FUNDAMENTAL DE LA PROGRAMACION DINAMICA, UN PROCESO DE TOMA DE DECISIONES DE ETAPAS MULTIPLES.

¿ QUE ES LA PROGRAMACION DINAMICA ?

LA PROGRAMACION DINAMICA ES UN PROCEDIMIENTO MATEMATICO ESPECIALMENTE DISEÑADO PARA RESOLVER CIERTOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACION QUE SOLO PUEDEN SER RESUELTOS CUANDO SE LES DESCOMPONE EN UNA SERIE DE ETAPAS.

LA TEORIA UNIFICADORA FUNDAMENTAL DE LA PROGRAMACION DINAMICA ES EL PRINCIPIO DE "OPTIMALIDAD DE BELLMAN", ESTE NOS DICE COMO PUEDE SER RESUELTO UN PROBLEMA ADECUADAMENTE DESCOMPUESTO EN ETAPAS (EN VEZ DE UNA SOLA ETAPA) A TRAVES DEL USO DE CALCULOS RECURSIVOS."LA SOLUCION SECUENCIAL DE LOS PROBLEMAS DE DECISION ASOCIADOS CON CADA ETAPA ES EQUIVALENTE A LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE DECISION DEL SISTEMA ORIGINAL".LOS CALCULOS EN LAS DIFERENTES ETAPAS SE ENLAZAN A TRAVES DE CALCULOS RECURSIVOS DE MANERA QUE SE GENERE UNA SOLUCION OPTIMA FACTIBLE A TODO EL PROBLEMA.ES DECIR, LOS CALCULOS SE REALIZAN EN ETAPAS DIVIDIENDO EL PROBLEMA EN SUBPROBLEMAS, DESPUES SE CONSIDERA POR SEPARADO CADA SUBPROBLEMA CON EL FIN DE REDUCIR EL NUMERO DE OPERACIONES DE CALCULO.

DE HECHO LA PARTE MEDULAR DE LA PROGRAMACION DINAMICA ES LA RELACION DE RECURRENCIA. ESTA RELACION SE CONSTRUYE COMO UNA FUNCION QUE INDICA LA ETAPA Y EL ESTADO DEL PROBLEMA.
LA ETAPA INDICA LA UBICACION DE UN PROBLEMA PARTICULAR EN LA SECUENCIA DE DECISIONES. UNA ETAPA EN PROGRAMACION DINAMICA SE DEFINE COMO LA PARTE DEL PROBLEMA QUE POSEE UN CONJUNTO DE ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUYENTES DE LAS CUALES SE SELECCIONARA LA MEJOR.

POR SU PARTE EL ESTADO RESUME TODA LA INFORMACION NECESARIA PARA REALIZAR UNA DECISION FACTIBLE PARA LA ETAPA ACTUAL. UN ESTADO EN PROGRAMACION DINAMICA SE DEFINE NORMALMENTE COMO AQUEL QUE REFLEJA LA CONDICION (O ESTADO VALGA LA REDUNDANCIA) DE LAS RESTRICCIONES QUE ENLAZAN A LAS ETAPAS. REPRESENTA LA LIGA ENTRE ETAPAS (SUBSECUENTES) DE TAL MANERA QUE CUANDO CADA ETAPA SE OPTIMIZA POR SEPARADO LA DECISION RESULTANTE ES AUTOMATICAMENTE FACTIBLE PARA EL PROBLEMA COMPLETO. EL ESTADO DEBE SINTETIZAR EL FUNCIONAMIENTO DE TODAS LAS ETAPAS PREVIAS.

CALCULOS RECURSIVOS.

SE LES NOMBRA CALCULOS RECURSIVOS, PORQUE LOS CALCULOS DE UNA ETAPA ACTUAL UTILIZAN INFORMACION DE RESUMEN DE LA ETAPA INMEDIATA ANTERIOR. ESTE RESUMEN PROPORCIONA LAS OPTIMIZACIONES DE TODAS LAS ETAPAS CONSIDERADAS ANTES. AL UTILIZAR ESTE RESUMEN NUNCA NOS INTERESAN LAS DECISIONES ESPECIFICAS TOMADAS EN TODAS LAS ETAPAS ANTERIORES. EN REALIDAD LAS DECISIONES FUTURAS SE SELECCIONAN EN FORMA OPTIMA SIN RECURRIR A DECISIONES TOMADAS ANTES.

CARACTERISTICAS DE LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACION DINAMICA.

1) EL PROBLEMA SE PUEDE DIVIDIR EN ETAPAS QUE REQUIEREN UNA POLITICA DE DECISION EN CADA UNA DE ELLAS.

2) CADA ETAPA TIENE UN CIERTO NUMERO DE ESTADOS ASOCIADOS A ELLA.(LOS ESTADOS SON LAS DISTINTAS CONDICIONES POSIBLES EN LAS QUE SE PUEDE ENCONTRAR EL SISTEMA EN CADA ETAPA DEL PROBLEMA).

3) EL EFECTO DE LA POLITICA DE DECISION EN CADA ETAPA, ES TRANSFORMAR EL ESTADO ACTUAL EN UN ESTADO ASOCIADO CON LA SIGUIENTE ETAPA.

4) EL PROCEDIMIENTO DE SOLUCION ESTA DISEÑADO PARA ENCONTRAR UNA POLITICA OPTIMA PARA EL PROBLEMA COMPLETO.

5) SE REQUIERE LA FORMULACION DE UNA RELACION RECURSIVA APROPIADA PARA CADA PROBLEMA INDIVIDUAL.

6) DADO EL ESTADO ACTUAL, UNA POLITICA OPTIMA PARA LAS ETAPAS RESTANTES ES INDEPENDIENTE DE LA POLITICA ADOPTADA EN ETAPAS ANTERIORES..

EN GENERAL EN LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACION DINAMICA, SE TIENE LA PROPIEDAD DE QUE EL CONOCIMIENTO DEL ESTADO ACTUAL DEL SISTEMA EXPRESA TODA LA INFORMACION SOBRE SU COMPORTAMIENTO ANTERIOR, Y ESTA INFORMACION ES NECESARIA PARA DETERMINAR LA POLITICA OPTIMA DE AHI EN ADELANTE. UN PROBLEMA QUE CAREZCA DE ESTA PROPIEDAD NO SE PUEDE FORMULAR COMO UN PROBLEMA DE PROGRAMACION DINAMICA.

PROGRAMACION DINAMICA DETERMINISTICA.

EN LA PROGRAMACION DINAMICA DETERMINISTICA EL ESTADO DE LA SIGUIENTE ETAPA ESTA COMPLETAMENTE DETERMINADO POR EL ESTADO Y LA POLITICA DE DECISION DE LA ETAPA ACTUAL Y DE LAS ANTERIORES.

PROGRAMACION DINAMICA PROBABILISTICA.

EN LA PROGRAMACION DINAMICA PROBABILISTICA O ESTOCASTICA, EL ESTADO DE LA SIGUIENTE ETAPA NO ESTA COMPLETAMENTE DETERMINADO SINO QUE EXISTE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD PARA DETERMINAR CUAL SERA EL ESTADO EN LA SIGUIENTE ETAPA.

COMO SE PUEDE APRECIAR LA PROGRAMACION DINAMICA ES UNA DE LAS TECNICAS USADAS DENTRO DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES, Y RESULTA DE MUCHA UTILIDAD CUANDO SE DESEA RESOLVER PROBLEMAS DE SECUENCIA DE DECISIONES EN LOS QUE HAY QUE TOMAR UNA SERIE DE DECISIONES QUE AFECTEN LAS DECISIONES FUTURAS.
SE BASA EN EL USO DE RELACIONES RECURSIVAS O DE RECURRENCIA, ESTA RELACION SE CONSTRUYE COMO UNA FUNCION QUE INDICA LA ETAPA Y EL ESTADO DEL PROBLEMA. EN REALIDAD LAS DECISIONES FUTURAS SE SELECCIONAN EN FORMA OPTIMA SIN RECURRIR A DECISIONES TOMADAS ANTES. ESTA PROPIEDAD ESPECIAL CONSTITUYE EL PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD, QUE ES LA BASE DE LA VALIDEZ DE LOS CALCULOS DE PROGRAMACION DINAMICA.

A CONTINUACION, EN EL CAPITULO SIGUIENTE SE MOSTRARAN LOS ASPECTOS DE LA PROGRAMACION DINAMICA EN EL CASO DETERMINISTA COMO SON, LA OPTIMIZACION DE UNA ETAPA, OPTIMIZACION DE n ETAPAS, FUNCION DE RECURRENCIA, CLASIFICACION DE LOS PROBLEMAS DE ACUERDO A SUS CARACTERISTICAS ASI COMO EJEMPLOS.

CAPITULO SEGUNDO.

PROGRAMACION DINAMICA DETERMINISTICA.

II

PROGRAMACION DINAMICA DETERMINISTICA.

EN LA PROGRAMACION DINAMICA EN EL CASO DETERMINISTA, EL ESTADO DE LA SIGUIENTE ETAPA ESTA COMPLETAMENTE DETERMINADO POR EL ESTADO Y LA POLITICA DE DECISION DE LA ETAPA ACTUAL.

ALGORITMO DE PROGRAMACION DINAMICA.

EN LA PROGRAMACION DINAMICA, LOS CALCULOS SE REALIZAN EN ETAPAS, DIVIDIENDO EL PROBLEMA EN SUBPROBLEMAS.DESPUES SE CONSIDERA POR SEPARADO CADA SUBPROBLEMA CON EL FIN DE REDUCIR EL NUMERO DE OPERACIONES DE CALCULO.
SIN EMBARGO COMO LOS SUBPROBLEMAS SON INDEPENDIENTES, DEBE IDEARSE UN PROCEDIMIENTO PARA ENLAZAR LOS CALCULOS DE MANERA QUE GARANTIZE QUE UNA SOLUCION FACTIBLE PARA CADA ETAPA SEA ASIMISMO FACTIBLE PARA TODO EL PROBLEMA, ESTO SE LOGRA A TRAVES DEL USO DE CALCULOS RECURSIVOS.
LA RELACION DE RECURRENCIA SE CONSTRUYE COMO UNA FUNCION QUE INDICA LA ETAPA Y EL ESTADO DEL PROBLEMA.
CADA ETAPA TIENE SUS ALTERNATIVAS ASOCIADAS (VARIABLES DE DECISION) Y EL ESTADO DEL SISTEMA RESUME TODA LA INFORMACION NECESARIA PARA HACER UNA DECISION FACTIBLE PARA LA ETAPA ACTUAL.
LA IDEA BASICA DE LA PROGRAMACION DINAMICA CONSISTE PRACTICAMENTE EN ELIMINAR EL EFECTO DE LA INTERDEPENDENCIA ENTRE ETAPAS ASOCIANDO UNA DEFINICION DE ESTADO CON CADA ETAPA.
EL ESTADO DEL SISTEMA ES QUIZA EL CONCEPTO MAS IMPORTANTE EN UN MODELO DE PROGRAMACION DINAMICA.NO EXISTE UNA MANERA FACIL DE DEFINIR EL ESTADO EN UN PROBLEMA DE PROGRAMACION DINAMICA, PERO SE PUEDEN ENCONTRAR PISTAS HACIENDO LAS SIGUIENTES PREGUNTAS:

1) QUE ES LO QUE CAMBIA DE UNA ETAPA A OTRA ?

2) QUE INFORMACION ES NECESARIA PARA TOMAR DECISIONES FACTIBLES EN LA ETAPA ACTUAL, SIN VERIFICAR LA FACTIBILIDAD DE DECISIONES HECHAS EN ETAPAS ANTERIORES. ?

UN PROBLEMA MUY COMUN DENTRO DE LA PROGRAMACION DINAMICA, ES EL LLAMADO DE DISTRIBUCION DE ESFUERZO.EN ESTE TIPO DE PROBLEMAS EXISTE SOLO UNA CLASE DE RECURSO Y

DEBE ASIGNARSE A UN CIERTO NUMERO DE ACTIVIDADES (ETAPAS). EL OBJETIVO ES DETERMINAR COMO DISTRIBUIR EL ESFUERZO (RECURSO) ENTRE LAS ACTIVIDADES DE LA MANERA MAS OPTIMA.
LA DEFINICION DE ESTADO DEL SISTEMA PARA TODOS LOS PROBLEMAS DE ESTE TIPO GENERALMENTE ES EL MISMO, A SABER, LA CANTIDAD DE RECURSO ASIGNADO A UN NUMERO SUCESIVO DE ETAPAS.

ALGUNOS OTROS TIPOS DE PROBLEMAS NO CAEN DENTRO DE ESTA CATEGORIA COMO LOS SIGUIENTES:

EJEMPLO 1:

UN CONTRATISTA DESEA DETERMINAR EL TAMAÑO DE UNA FUERZA DE TRABAJO DURANTE CADA UNA DE LAS CINCO SEMANAS SIGUIENTES. SABE EL NUMERO MINIMO DE TRABAJADORES NECESARIOS PARA CADA SEMANA. HAY UN COSTO ADICIONAL CUANDO CONTRATA O DESPIDE TRABAJADORES. SE CONOCEN LOS COSTOS UNITARIOS DE CONTRATAR, DESPEDIR Y TENER OCIOSOS A LOS TRABAJADORES. EL OBJETIVO ES DECIDIR CUANTOS DE ELLOS DEBERAN CONTRATARSE O DESPEDIRSE CADA SEMANA A FIN DE MINIMIZAR EL COSTO TOTAL.

PRIMERO TRATAMOS DE IDENTIFICAR LAS ETAPAS DEL PROBLEMA, PUESTO QUE HA DE TOMARSE UNA DECISION CADA SEMANA, ENTONCES CADA SEMANA REPRESENTA UNA ETAPA. EL SEGUNDO ELEMENTO QUE DEBE DEFINIRSE ES LA DETERMINACION DE LAS ALTERNATIVAS ASOCIADAS A CADA ETAPA, ES DECIR, LAS VARIABLES DE DECISION. EN ESTE EJEMPLO, LA VARIABLE DE DECISION ES EL NUMERO DE TRABAJADORES CONTRATADOS O DESPEDIDOS EN EL PERIODO. ASIMISMO LA FUNCION DE RENDIMIENTO ESTA REPRESENTADA POR EL COSTO DE CONTRATAR, DESPEDIR O MANTENER OCIOSO AL PERSONAL. EL TERCER ELEMENTO ES EL ESTADO DEL SISTEMA EN UNA ETAPA DADA. SI ANALIZAMOS EL PROBLEMA OBSERVAMOS QUE EL NUMERO DE TRABAJADORES DISPONIBLES AL FINAL DE LA ETAPA ANTERIOR PROPORCIONA INFORMACION SUFICIENTE PARA DECIDIR CUANTOS CONTRATAR O DESPEDIR EN EL PERIODO ACTUAL, ES DECIR, LA UNICA INFORMACION IMPORTANTE ES CUANTOS TRABAJADORES SE TIENEN ACTUALMENTE ANTES DE TOMAR UNA DECISION. CONSECUENTEMENTE, EL NUMERO DE TRABAJADORES AL FINAL DEL PERIODO ANTERIOR DEFINE EL ESTADO DEL SISTEMA EN EL PERIODO ACTUAL. CON ESTO SE CUMPLE QUE EL ESTADO DEL SISTEMA RESUME TODA LA INFORMACION NECESARIA PARA HACER UNA DECISION FACTIBLE PARA LA ETAPA ACTUAL.

EJEMPLO 2:

CONSIDEREMOS UNA SITUACION DE REEMPLAZO DE EQUIPO DONDE AL FINAL DE CADA AÑO SE TOMA LA DECISION DE CONSERVAR UNA MAQUINA OTRO AÑO O REEMPLAZARLA INMEDIATAMENTE. SI UNA MAQUINA SE RETIENE SU BENEFICIO DISMINUYE. POR OTRA PARTE, AL REEMPLAZAR UNA MAQUINA SE INCURRE EN EL COSTO DE REEMPLAZO. EL PROBLEMA ES DECIDIR CUANDO DEBERA REEMPLAZARSE UNA MAQUINA A FIN DE MAXIMIZAR EL BENEFICIO NETO TOTAL.

EN ESTE PROBLEMA, LA ETAPA j REPRESENTA EL AÑO j. LAS ALTERNATIVAS EN CADA ETAPA SON MANTENER LA MAQUINA O REEMPLAZARLA.

AHORA ¿ CUAL ES LA RELACION ENTRE DOS ETAPAS SUCESIVAS?.

¿ QUE INFORMACION ES NECESARIA DE LAS ETAPAS ANTERIORES PARA TOMAR UNA DECISION (MANTENER O REEMPLAZAR) LA MAQUINA EN LA ETAPA ACTUAL ?.

LA RESPUESTA ES LA EDAD DE LA MAQUINA, POR LO TANTO, EL ESTADO DEL SISTEMA EN UNA ETAPA SE DEFINE COMO LA EDAD DE LA MAQUINA AL INICIO DEL PERIODO ASOCIADO.

OPTIMIZACION DE UNA ETAPA.

A CONTINUACION SE ANALIZARA EL PROBLEMA DE DECISION QUE PUDIERA SURGIR EN CUALQUIERA DE LAS ETAPAS EN LAS QUE SE DESCOMPUSO EL SISTEMA ORIGINAL.

SUPONGAMOS QUE UNA ETAPA CUALQUIERA DEL SISTEMA SE REPRESENTA POR LOS SIGUIENTES CINCO ELEMENTOS:

1) UN VECTOR DE ENTRADA X, QUE NOS PROPORCIONA TODA LA INFORMACION RELEVANTE RESPECTO A LAS COMPONENTES IMPORTANTES DEL SISTEMA. (ESTADOS Y VARIABLES DE DECISION) ANTES DE TOMAR UNA DECISION.

2) UN VECTOR DE SALIDA Z, QUE PROPORCIONA TODA LA INFORMACION RELEVANTE RESPECTO A LAS COMPONENTES IMPORTANTES DEL SISTEMA, DESPUES QUE SE HA TOMADO UNA DECISION.

3) UN VECTOR D, DONDE SE AGRUPAN LAS DECISIONES. LAS DECISIONES SON LOS INSTRUMENTOS QUE PUEDEN EMPLEARSE PARA ALCANZAR LOS OBJETIVOS DEL SISTEMA.
EL ESTADO DETERMINA EL CONJUNTO DE DECISIONES QUE ESTAN DISPONIBLES.

4) UNA TRANSFORMACION F, QUE RELACIONA LA SALIDA Z EN FUNCION CON LA ENTRADA X Y LAS DECISIONES.

$$Z = F\,[X,D].$$

5) UN VECTOR DE MEDIDA DE EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD DEL SISTEMA REPRESENTADO POR R.
ESTE VECTOR PUEDE SER POSITIVO POR EJEMPLO, CUANDO SE TRATA DE UTILIDAD, SALUD, ETC. Y NEGATIVO EN EL CASO DE COSTOS, TIEMPO, ETC.
ESTE VECTOR ES UNA FUNCION r° DE LA ENTRADA, SALIDA Y LA DECISION QUE SE TOMA.

$$R = r^{\circ}[X,Z,D]$$

PERO $Z = F\,[X,D]$

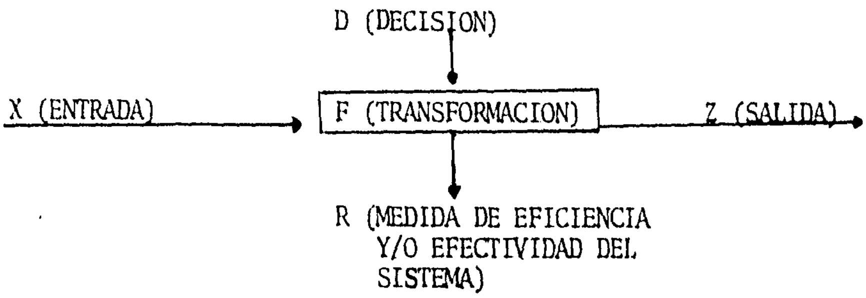
ENTONCES $R = r^{\circ}[X,D,F(X,D)]$

POR COMPOSICION DE FUNCIONES DE r° Y F, EN OTRA FUNCION r, TENEMOS:

$$R = r(X,D)$$

POR LO QUE PODEMOS OBSERVAR QUE EL VECTOR R, DEPENDE SOLO DE LA ENTRADA Y DE LA DECISION QUE SE TOMA.

GRAFICAMENTE.



Y LOS VECTORES X,D,Z,R, CON m COMPONENTES:

$$X=\begin{bmatrix} X \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_m \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} D \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_m \end{bmatrix} \quad Z=\begin{bmatrix} Z \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_m \end{bmatrix} \quad R=\begin{bmatrix} R \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_m \end{bmatrix}$$

DE LO ANTERIOR SE PUEDE DEDUCIR QUE X,Y D, SON VECTORES INDEPENDIENTES Y TANTO R COMO Z, SON VECTORES DEPENDIENTES DE X, Y DE D.
ES DECIR, DADO UN PAR DE VALORES DE LOS VECTORES X Y D, SE OBTIENE UNA MEDIDA DE EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD DEL SISTEMA R Y UNA SALIDA Z.

EN TODO PROBLEMA DEBE EXISTIR POR LO MENOS UN VALOR DEL VECTOR DE DECISION QUE OPTIMICE LA EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD DEL SISTEMA EN CUESTION.

SEA ESTE VALOR OPTIMO G(X). MATEMATICAMENTE SE TIENE PARA EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES POSITIVAS:

$$G(X) = \max_{D} r(X,D)$$

Y PARA EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES NEGATIVAS:

$$G(X) = \min_{D} r(X,D)$$

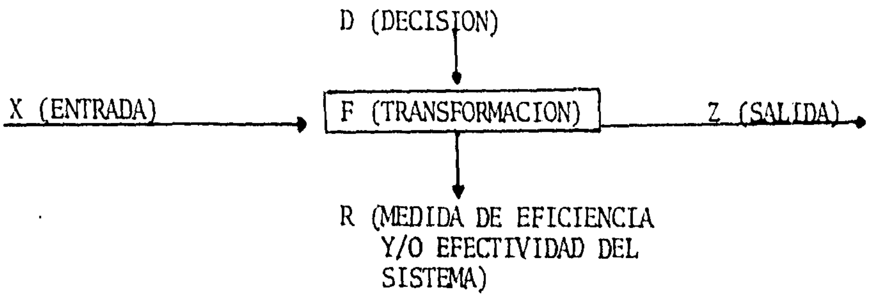
AHORA, SUPONIENDO QUE D* ES EL VALOR DEL VECTOR DE DECISION QUE

TENEMOS:

$$R = r(X,D)$$

POR LO QUE PODEMOS OBSERVAR QUE EL VECTOR R, DEPENDE SOLO DE LA ENTRADA Y DE LA DECISION QUE SE TOMA.

GRAFICAMENTE.



Y LOS VECTORES X,D,Z,R, CON m COMPONENTES:

$$X=\begin{bmatrix} X \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_m \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} D \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_m \end{bmatrix} \qquad Z=\begin{bmatrix} Z \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_m \end{bmatrix} \qquad R=\begin{bmatrix} R \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_m \end{bmatrix}$$

DE LO ANTERIOR SE PUEDE DEDUCIR QUE X,Y D, SON VECTORES INDEPENDIENTES Y TANTO R COMO Z, SON VECTORES DEPENDIENTES DE X, Y DE D.
ES DECIR, DADO UN PAR DE VALORES DE LOS VECTORES X Y D, SE OBTIENE UNA MEDIDA DE EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD DEL SISTEMA R Y UNA SALIDA Z.

EN TODO PROBLEMA DEBE EXISTIR POR LO MENOS UN VALOR DEL VECTOR DE DECISION QUE OPTIMICE LA EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD DEL SISTEMA EN CUESTION.

SEA ESTE VALOR OPTIMO G(X). MATEMATICAMENTE SE TIENE PARA EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES POSITIVAS:

$$G(X) = \max_{D} r(X,D)$$

Y PARA EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES NEGATIVAS:

$$G(X) = \min_{D} r(X,D)$$

AHORA, SUPONIENDO QUE D* ES EL VALOR DEL VECTOR DE DECISION QUE

GENERA EL VALOR OPTIMO, SE TIENE QUE PARA EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES POSITIVAS:

$$G[X] = r[X,D^*] = \max_{D} r[X,D] \geq r[X,D]$$

Y PARA EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES NEGATIVAS SE TIENE:

$$G[X] = r[X,D^*] = \min_{D} r[X,D] \leq r[X,D]$$

ES IMPORTANTE NOTAR LO SIGUIENTE:

1) SI X Y D SON ESCALARES (VECTORES CON UNA SOLA COMPONENTE) ENTONCES NO EXISTE PROBLEMA PUESTO QUE SOLO EXISTE UNA DECISION QUE TOMAR.

2) SI X ES UN VECTOR QUE SOLO TOMA UN VALOR Y D ES UN VECTOR CON VARIAS COMPONENTES, ENTONCES POR CADA VALOR DE D, G[X] ES UN NUMERO.

3) SI X ES UN VECTOR QUE TOMA VARIOS VALORES Y D UN VECTOR CON VARIAS COMPONENTES ENTONCES LA EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD OPTIMA G[X] ES UNA FUNCION QUE GENERARA UN NUMERO POR CADA VALOR DE X Y LA D OPTIMA ASOCIADA. EN RESUMEN, LA DETERMINACION DE G[X] ES UNA SERIE DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACION UNO POR CADA VALOR DE X.

A CONTINUACION SE PRESENTA UN EJEMPLO SENCILLO, CON EL FIN DE ILUSTRAR LOS ASPECTOS MAS IMPORTANTES EN LA OPTIMIZACION DE UNA ETAPA.

EJEMPLO:

UNA PERSONA VIVE A 10Km DE SU TRABAJO Y TIENE QUE PRESENTARSE A TRABAJAR A LAS 8:00A.M DE LUNES A VIERNES. SALE DE SU TRABAJO A LAS 4:00 P.M Y REGRESA INVARIABLEMENTE A SU CASA. LA PERSONA GANA AL DIA N$ 100.00, Y SI LLEGA TARDE AL TRABAJO 10 MINUTOS LE DESCUENTAN EL DIA.
ESTA PERSONA TIENE TRES ALTERNATIVAS PARA DIRIGIRSE DE SU CASA AL TRABAJO QUE SON LAS SIGUIENTES:

1) MANEJANDO SU AUTOMOVIL DE SU CASA AL TRABAJO, LO ESTACIONA EL TIEMPO QUE ESTA TRABAJANDO Y REGRESA A SU CASA MANEJANDO. TOMANDO EN CUENTA TODOS LOS GASTOS QUE IMPLICA EL USAR UN AUTOMOVIL, MAS LOS GASTOS DE ESTACIONAMIENTO, ESTA ALTERNATIVA LE CUESTA AL INDIVIDUO N$ 10.00 DIARIOS.
Y EL TIEMPO DE RECORRIDO DE SU CASA AL TRABAJO ES DE 30 MINUTOS.

2) ESTA ALTERNATIVA QUE ES USANDO EL METRO Y LUEGO UN CAMION LE CUESTA

N$3.00 Y EL TIEMPO QUE TARDA EN LLEGAR A SU TRABAJO ES DE 1 HORA, Y LO MISMO DE REGRESO DE SU TRABAJO A SU CASA.

3) TOMAR UN TAXI DE SU CASA AL TRABAJO Y VICEVERSA LE CUESTA N$15.00 POR VIAJE Y LE LLEVA UN TIEMPO DE 45 MINUTOS.

LA PERSONA DESEA SABER QUE OPCION LE CONVIENE MAS, EN RELACION A MINUTOS VIAJADOS POR PESO GASTADO, PUES ALGUNAS VECES SALE DE SU CASA A LAS 7:00 A.M Y CUANDO SE LE HACE TARDE A LAS 7:20 A.M.
EL PROBLEMA DE DECISION PARA ESTA PERSONA DE ACUERDO A SU MANERA DE DEFINIR SU EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD, SE TRATA DE UNA MEDIDAD POSITIVA POR QUE TRATA DE VIAJAR MAS POR MENOS, ENTONCES:

$$G(X)= r(X,D^*) = \max_{D1,D2,D3} r(X,D) \geq r(X,Di),\ i=1,2,3.$$

EL VECTOR DE ENTRADA X SE SUPONE QUE TIENE DOS COMPONENTES: X1 QUE INDICA LA CANTIDAD DE DINERO CON EL QUE LA PERSONA SALE DE SU CASA Y X2 QUE ES LA HORA EN QUE SALE DE SU CASA PARA IRSE AL TRABAJO.
ENTONCES PARA EL CASO 1 CUANDO LA PERSONA SALE DE SU CASA A LAS 7:00 A.M TENEMOS:

$$X= \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N\$100.00 \\ 7:00\ A.M \end{bmatrix}$$

LA DECISION D1 LE CUESTA N$10.00 Y LLEGA AL TRABAJO A LAS 7:30 A.M ENTONCES:

$$r[X,D1] = 30/10 = 3\text{min/peso.}$$

LA DECISION D2 LE CUESTA N$3.00 Y LLEGA AL TRABAJO A LAS 8:00 A.M POR LO QUE TENEMOS:

$$r[X,D2] = 60/3 = 20 \text{ min/peso.}$$

Y POR ULTIMO LA DECISION D3 LE CUESTA N$15.00 Y EL TIEMPO DE RECORRIDO ES DE 45 MINUTOS POR LO QUE TENEMOS:

$$r[X,D3] = 45/15 = 3 \text{ min/peso.}$$

POR LO QUE $G(X) = MAX(3,20,3) = 20$

ENTONCES LA DECISION OPTIMA DADOS X1=N$100.00 Y X2 = 7:00 A.M, ES D* = D2, QUE GENERA UNA EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD OPTIMA DE 20 MINUTOS POR PESO GASTADO.

AHORA PARA EL CASO 2, CUANDO LA PERSONA SALE DE SU CASA A LAS 7:20 A.M:

$$X= \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N\$100.00 \\ 7:20\ A.M \end{bmatrix}$$

ENTONCES PARA D1 TENEMOS:

$$r[X,D1] = 30/10 = 3 \text{ min/peso.}$$

PARA D2 SE TIENE QUE AGREGAR UN COSTO ADICIONAL DE N$100.00, PUESTO QUE EL INDIVIDUO LLEGA TARDE AL TRABAJO.ES DECIR, SALE DE SU CASA A LAS 7:20 A.M Y LLEGA AL TRABAJO A LAS 8:20 A.M, POR LO QUE TENEMOS:

$r[X,D2] = 60/103 = 0.58$ min/peso.

POR ULTIMO PARA D3 SE TIENE:

$r[X,D3] = 45/15 = 3$ min/peso.

POR LO QUE $G(X) = MAX [3, 0.58, 3] = 3$

ENTONCES SE CONCLUYE QUE LA DECISION OPTIMA PARA EL CASO 2, ES DECIR DADOS X1=N$100.00 Y X2=7:20 A.M ES D*=D1=D3, QUE GENERAN UNA EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD OPTIMA DE TRES MINUTOS POR PESO.

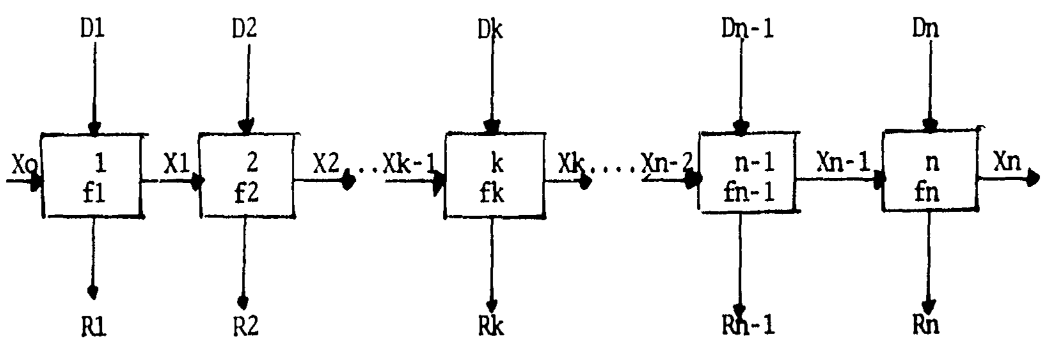
LA DIFERENCIA ENTRE EL PRIMER Y SEGUNDO CASO, ESTRIBA EN LA INFORMACION DEL VECTOR X, DE LO ANTERIOR PODEMOS NOTAR QUE SI CAMBIA EL VECTOR DE ENTRADA X PUEDE CAMBIAR LA DECISION OPTIMA D*, Y POR CONSIGUIENTE TAMBIEN CAMBIA LA SATISFACCION OPTIMA G(X).

OPTIMIZACION DE n ETAPAS.

SUPONGAMOS AHORA QUE TENEMOS UN PROBLEMA DE DECISION DE n ETAPAS, POR LO TANTO TENEMOS QUE ENCONTRAR LAS DECISIONES D1....Dn OPTIMAS EN CADA UNA DE LAS ETAPAS 1,2....n QUE GENEREN EL VALOR OPTIMO DE R1,R2....Rn, Y ASI PODER OPTIMIZAR LA EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD TOTAL DEL SISTEMA Gn(Xo).COMO UNA FUNCION DEL VECTOR DE ENTRADA DEL MISMO, ES DECIR DE Xo.

EN ESTE CASO SE TIENEN n ETAPAS NUMERADAS 1,2....n CADA ETAPA k, k=1,2....n TIENE UN VECTOR DE ENTRADA Xk-1, UN VECTOR DE SALIDA Xk, UNA TRANSFORMACION fk, QUE RELACIONA A LA SALIDA CON LA ENTRADA, UN VECTOR DE DECISION Dk, Y UN VECTOR DE EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD DE LA ETAPA Rk.

GRAFICAMENTE.



(DIAGRAMA 1).

ENTONCES TENEMOS:

$$Xn = fn(Xn-1,Dn)$$
$$Rn = rn(Xn-1,Dn)$$

PERO,

$$Xn-1 = fn-1(Xn-2,Dn-1)$$

$$R_{n-1}=r_{n-1}(X_{n-2},D_{n-1})$$

POR LO QUE:

$$X_n=f_n[f_{n-1}(X_{n-2},D_{n-1}),D_n]$$
$$R_n=r_n[r_{n-1}(X_{n-2},D_{n-1}),D_n]$$

SI CONTINUAMOS ASI HASTA LLEGAR A LA ETAPA 1, TENEMOS:

$$\begin{array}{ll} X_n=f_n(X_{n-1},D_n), & R_n=r_n(X_{n-1},D_n) \\ X_{n-1}=f_{n-1}(X_{n-2},D_{n-1}), & R_{n-1}=r_{n-1}(X_{n-2},D_{n-1}) \\ \vdots & \vdots \\ X_2=f_2(X_1,D_2), & R_2=r_2(X_1,D_2) \\ X_1=f_1(X_o,D_1), & R_1=r_1(X_o,D_1) \end{array}$$

ENTONCES:

$$X_n=f_n(f_{n-1}(\ldots(f_2(f_1(X_o,D_1)D_2)D_3)\ldots)D_{n-1})D_n)$$

Y

$$R_n=r_n(r_{n-1}(\ldots(r_2(r_1(X_o,D_1)D_2)D_3)\ldots)D_{n-1})D_n)$$

COMPONIENDO TODAS LAS FUNCIONES $f_n,f_{n-1},\ldots f_1$ Y $r_n,r_{n-1},\ldots r_1$ EN UNA SOLA FUNCION f_n Y r_n RESPECTIVAMENTE TENEMOS:

$$X_n=f_n[X_o,D_1,D_2,\ldots D_n]$$

$$R_n=r_n[X_o,D_1,D_2,\ldots D_n]$$

LAS DOS EXPRESIONES ANTERIORES INDICAN QUE TANTO LA SALIDA DEL SISTEMA (X_n), COMO LA SATISFACCION DE LA ULTIMA ETAPA (R_n), DEPENDEN UNICAMENTE DE LA ENTRADA DEL SISTEMA (X_o), Y DE LAS DECISIONES PARCIALES DE CADA UNA DE LAS ETAPAS ($D_1,D_2,..D_n$).

AHORA PARA RESOLVER NUESTRO PROBLEMA DE OPTIMIZACION DE n ETAPAS, TENEMOS QUE OPTIMIZAR UNA COMPOSICION DE TODOS LOS VECTORES $R_1,R_2,\ldots R_n$. ESTA COMPOSICION PUEDE SER DE LA FORMA DE SUMA, PRODUCTO, U OTRA OPERACION.POR LO GENERAL SE REPRESENTA A ESTA COMPOSICION POR MEDIO DEL SIMBOLO *.

PARA LOGRAR ESTA OPTIMIZACION, TENEMOS QUE ENCONTRAR LAS DECISIONES $D_1,D_2\ldots D_n$ QUE OPTIMIZEN LA COMPOSICION $R_1*,R_2*,\ldots R_n*$. ES DECIR:

$$G_n(X_o)=\underset{D_1,..D_n}{OPT}(R_1*,R_2*,\ldots R_n*)$$

ENTONCES:

$$G_n(X_o)=[r_1(X_o,D_1^*)*\ldots*r_n(X_{n-1},D_n^*)]$$

ESTA EXPRESION NOS DICE, QUE LA COMBINACION DE LAS DECISIONES OPTIMAS EN CADA ETAPA 1,2,...n, O SEA, $D_1^*,D_2^*,\ldots D_n^*$, GENERA LA EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD OPTIMA DE TODO EL SISTEMA, ES DECIR, $G_n(X_o)$.COMO UNA FUNCION DEL VECTOR DE ENTRADA X_o DEL MISMO.

MATEMATICAMENTE:

$$Gn(Xo) = \underset{D1 \ldots Dn}{OPT} [r1(Xo,D1)*,r2(X1,D2)*,\ldots *rn(Xn-1,Dn)] \ldots\ldots (1)$$

SUJETO A:

$$Xk = fk(Xk-1,Dk) \qquad k = 1,2,\ldots n$$

CUANDO SE TIENEN n VECTORES VARIABLES X1,X2,...Xn Y n VECTORES DE DECISION D1,D2,...Dn.

Y CUANDO SE TIENEN SOLAMENTE n VECTORES DE DECISION TENEMOS:

$$Gn(Xo) = \underset{D1 \ldots Dn}{OPT} [r1(Xo,D1)*,r2(Xo,D1,D2)*\ldots *rn(Xo,D1,D2,\ldots Dn)].$$

LA FUNCION RECURSIVA.

EL DESCUBRIDOR DE LA FUNCION RECURSIVA FUE EL ESTADOUNIDENSE RICHARD BELLMAN. Y CONSTITUYE LA PARTE MEDULAR DE LA PROGRAMACION DINAMICA. LA FUNCION RECURSIVA TIENE LA PROPIEDAD QUE SU DESCUBRIDOR LLAMO COMO "PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD" QUE DICE:

> "UNA POLITICA OPTIMA, TIENE LA PROPIEDAD DE QUE CUALQUIERA QUE SEA EL ESTADO INICIAL Y LA PRIMERA DECISION, LAS DECISIONES RESTANTES CONSTITUYEN UNA POLITICA OPTIMA EN RELACION A LOS EFECTOS RESULTANTES DE LA PRIMERA DECISION."

ES DECIR, LOS CALCULOS DE UNA ETAPA ACTUAL UTILIZAN INFORMACION DE RESUMEN DE LA ETAPA INMEDIATA ANTERIOR. ESTE RESUMEN PROPORCIONA LAS OPTIMIZACIONES DE TODAS LAS ETAPAS CONSIDERADAS ANTES, POR LO QUE LAS DECISIONES FUTURAS SE SELECCIONAN EN FORMA OPTIMA SIN RECURRIR A DECISIONES ESPECIFICAS TOMADAS EN ETAPAS ANTERIORES.

ESPECIFICAMENTE, LA FUNCION RECURSIVA RESUELVE EN CADA ETAPA UN PROBLEMA DE OPTIMIZACION ASOCIADO A UN SUBSISTEMA DEL SISTEMA ORIGINAL. SE OPTIMIZAN LAS DECISIONES DE ESE SUBSISTEMA TOMANDO EN CUENTA LA POSIBLE VARIACION DE LA ENTRADA A ESE SUBSISTEMA, CUANDO SE TERMINA LA OPTIMIZACION SE AÑADE UNA ETAPA ADICIONAL AL SUBSISTEMA CREANDO UN SUBSISTEMA MAYOR, Y ASI SE CONTINUA EL PROCESO DE OPTIMIZACION HASTA QUE EL SUBSISTEMA ABARQUE AL SISTEMA ORIGINAL.

POR LO QUE EL OBJETIVO RADICA EN DESCOMPONER UN PROBLEMA DE OPTIMIZACION DE n ETAPAS, EN n PROBLEMAS DE OPTIMIZACION DE UNA SOLA ETAPA.

DE LA SECCION ANTERIOR TENEMOS:

$$Gn(Xo) = \underset{D1..Dn}{OPT}[r1(Xo,D1)*r2(X1,D2)*...*rn(Xn-1,Dn)] \quad ...(1)$$

SUJETO A $Xk=fk(Xk-1,Dk)$, $k=1,2,...n$

PARA CLARIFICAR IDEAS SUPONDREMOS QUE EN LA EXPRESION ANTERIOR LA COMPOSICION * DE TODAS LAS EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES PARCIALES TOMA LA FORMA DE LA ADICION, Y QUE LA OPTIMIZACION SIGNIFICA MAXIMIZACION.

UTILIZANDO EL ANALISIS MATEMATICO TENEMOS QUE LA IGUALDAD SIGUIENTE, ES VALIDA PARA CUALQUIER PAR DE FUNCIONES REALES:

SEAN LAS FUNCIONES $h1(u1)$, $h2(u1,u2)$

ENTONCES: $$\underset{u1,u2}{MAX}[h1(u1) + h2(u1,u2)] = \underset{u1}{MAX}[h1(u1)+\underset{u2}{MAX}h2(u1,u2)]$$

POR LO QUE APLICANDO ESTE TEOREMA AL PROBLEMA DE OPTIMIZACION TENEMOS QUE (1) PUEDE ESCRIBIRSE DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$Gn(Xo) = \underset{D1}{MAX}[r1(Xo,D1)] + \underset{D2..Dn}{MAX}[r2(X1,D2)+...+rn(Xn-1,Dn)]$$

SUJETO A, $Xk=fk(Xk-1,Dk)$, $k=1,2...n$

HACIENDO EL SIGUIENTE CAMBIO DE NOTACION TENEMOS:

$$Gn-1(X1) = \underset{D2..Dn}{MAX}[r2(X1,D2)+...+rn(Xn-1,Dn)]$$

POR LO QUE:

$$Gn(Xo) = \underset{D1}{MAX}[r1(Xo,D1) + Gn-1(X1)]$$

PERO, $X1=f1(Xo,D1)$

ENTONCES FINALMENTE TENEMOS:

$$Gn(Xo) = \underset{D1}{MAX}[r1(Xo,D1) + Gn-1(f1(Xo,D1))] \ldots\ldots (2)$$

CON $n=n,n-1,...2,1$ Y $Go(.)=0$ QUE ES UNA CONDICION INICIAL DE LA FUNCION RECURSIVA.

ESTA FUNCION RECURSIVA RESUELVE EL PROBLEMA ORIGINAL, RESOLVIENDO n PROBLEMAS DE OPTIMIZACION DE UNA ETAPA CADA UNO. EN ESTE CASO LA SOLUCION SECUENCIAL RECURSIVA SE HACE DEL VECTOR DE ENTRADA AL VECTOR DE SALIDA. (VER DIAGRAMA 1).

AHORA VEAMOS CUANDO LA SOLUCION SECUENCIAL RECURSIVA SE LLEVA A CABO DEL VECTOR DE SALIDA AL VECTOR DE ENTRADA.

GRAFICAMENTE,

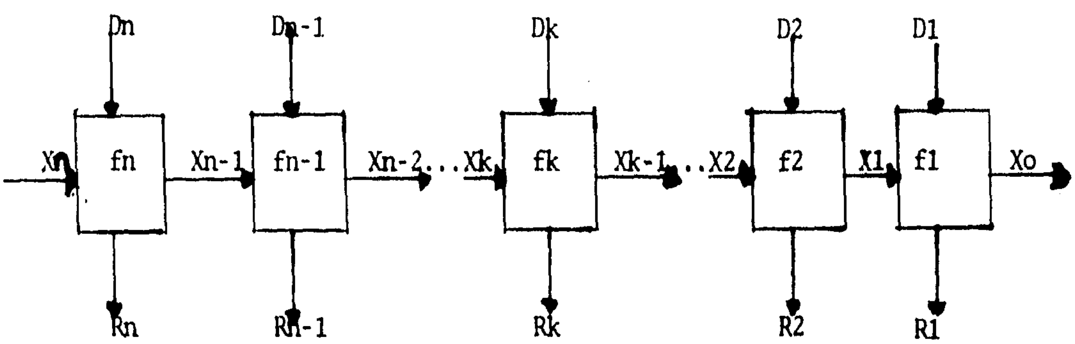


DIAGRAMA 2.

ENTONCES OBTENEMOS LA SEGUNDA FUNCION RECURSIVA QUE ES EQUIVALENTE A LA PRIMERA.

$$Gn(Xn) = \underset{Dn..D1}{OPT}[rn(Xn,Dn) + rn-1(Xn-1,Dn-1)+...+r1(X1,D1)]$$

SUJETO A $Xk-1=fk(Xk,Dk)$, $k=n,n-1,...1$
HACIENDO:

$$Gn-1(Xn-1) = \underset{Dn-1..D1}{OPT}[rn-1(Xn-1,Dn-1)+...+r1(X1,D1)]$$

TENEMOS QUE:

$$Gn(Xn) = \underset{Dn}{OPT}[rn(Xn,Dn) + Gn-1(Xn-1)], \quad n=n,n-1,...1$$

PERO $Xn-1=fn(Xn,Dn)$

POR LO QUE FINALMENTE TENEMOS:

$$Gn(Xn) = \underset{Dn}{OPT}[rn(Xn,Dn) + Gn-1(fn(Xn,Dn))], \quad ......(3)$$

CON $Go(Xo)=0$ COMO CONDICION INICIAL. Y $n=n,n-1,...2,1$.

ESTA FUNCION RECURSIVA RESUELVE EL PROBLEMA POR EL METODO DE SALIDA A ENTRADA. CABE SEÑALAR QUE MUCHOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACION SECUENCIAL PUEDEN RESOLVERSE EN AMBAS DIRECCIONES, PERO EXISTEN ALGUNOS QUE POR SU ESTRUCTURA SOLO PUEDEN SER RESUELTOS EN UNO DE ESOS SENTIDOS. LO QUE ES MAS, ES MUY DIFICIL DAR UNA REGLA GENERAL QUE NOS DIGA CUAL ES EL METODO MAS APROPIADO PARA RESOLVER LA FUNCION RECURSIVA DE UN PROBLEMA DINAMICO. LO QUE ES RECOMENDABLE HACER, ES QUE SI RESULTA MUY COMPLICADO HACERLO EN UNA DIRECCION ENTONCES TRATEMOS CON LA OTRA.

EXISTEN OTROS TIPOS DE COMPOSICION DE EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES DE UN SISTEMA QUE PUEDEN UTILIZARSE EN LAS FUNCIONES RECURSIVAS.

MITTEN INDICO CUALES SON LAS CONDICIONES SUFICIENTES QUE UNA COMPOSICION DE FUNCIONES DEBE SATISFACER PARA QUE LAS FUNCIONES RECURSIVAS (2) Y (3) TRABAJEN.

LA PRIMERA CONDICION DE MITTEN DICE QUE SI [R1*,R2*...*Rn] ES UNA FUNCION MONOTONA NO DECRECIENTE DE r1,r2,...rn, LA POSICION DEL OPERADOR MAXIMIZACION (MINIMIZACION) CON RESPECTO A D1,D2,..Dn, PUEDE CAMBIARSE SIN NINGUNA ALTERACION DEL RESULTADO OPTIMO.

LA SEGUNDA CONDICION SE REFIERE A LA SEPARABILIDAD DE LA COMPOSICION [R1*,...*Rn]=[r1(X1,D1)*,...*rn(Xn,Dn)].

POR SEPARABILIDAD SE ENTIENDE:

[R1*,R2*,....*Rn] = R1*[R2*,....*Rn]

BAJO ESTAS DOS CONDICIONES DE MONOTONICIDAD Y SEPARABILIDAD, SE TIENE QUE LAS SIGUIENTES COMPOSICIONES DE EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES DE UN SISTEMA SON VALIDAS PARA LAS FUNCIONES RECURSIVAS (2) Y (3).

1) *= ADICION (+)

   [R1*,R2*,....*Rn] = [R1 + R2 +....+ Rn]

2) *= MULTIPLICACION (.)

   [R1*,R2*,....*Rn] = [R1 . R2.....Rn]

3) *= MAXIMIZACION O MINIMIZACION DE LAS EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES.

   [R1*,R2*,....*Rn] = MAX[R1,R2,...Rn]

O

MIN[R1,R2,...Rn]

CLASIFICACION DE LOS PROGRAMAS DINAMICOS DE ACUERDO A SU ESTRUCTURA.

SE HA VISTO UNA CLASIFICACION DE LOS PROGRAMAS DINAMICOS EN CUANTO A LA FORMA COMO SE COMBINAN LAS EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES PARCIALES DEL SISTEMA. ESTA PUEDE SER EN FORMA DE ADICION, MULTIPLICACION O SE PUEDE CALCULAR EL MAXIMO O EL MINIMO DE LAS MISMAS.

LOS PROGRAMAS DINAMICOS SE PUEDEN TAMBIEN CLASIFICAR EN FUNCION DE LA OPTIMIZACION TOTAL DE LAS EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES. CUANDO ESTAS SON POSITIVAS, ES DECIR, CUANDO SE TRATA DE UTILIDADES, SALUD, RENDIMIENTO, ETC. LA FUNCION RECURSIVA DE LAS n ETAPAS SE MAXIMIZA. POR EL CONTRARIO CUANDO SE TRATA DE EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES NEGATIVAS COMO SON COSTOS, PROBABILIDAD DE FRACASO, ETC. LA FUNCION RECURSIVA DE LAS n ETAPAS SE MINIMIZA.

OTRAS CLASIFICACIONES ADICIONALES SON:

1) LA FUNCION DE EFECTIVIDAD Y/O EFICIENCIA DEL SISTEMA PUEDE SER DISCRETA O CONTINUA.
   SE DICE QUE UNA FUNCION DE EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES DEL SISTEMA ES DISCRETA CUANDO EXISTE UNA CANTIDAD FINITA O INFINITA DENUMERABLE DE VALORES.
   SE DICE QUE UNA FUNCION DE EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES DEL SISTEMA ES CONTINUA SI EXISTE UN CONTINUO DE VALORES.

2) EL NUMERO DE ETAPAS PUEDE SER FINITO O INFINITO.

3) LA CERTEZA DE LA FUNCION DE EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD DEL SISTEMA PUEDE SER DETERMINISTICA O PROBABILISTICA.

4) EL SISTEMA QUE SE ESTA OPTIMIZANDO PUEDE TENER RESTRICCIONES O NO TENERLAS.

5) LA MANERA DE RESOLVER EL PROBLEMA, YA SEA POR EL METODO DE ENTRADA A SALIDA O POR EL METODO DE SALIDA A ENTRADA.

ALGUNAS APLICACIONES DE LA PROGRAMACION DINAMICA.

1) PROGRAMACION CRONOLOGICA DE LA PRODUCCION.

UNA INSTALACION DE PRODUCCION CON CAPACIDAD LIMITADA TIENE QUE PROGRAMARSE CRONOLOGICAMENTE. EL OBJETIVO ES CUMPLIR DEMANDAS ESPECIFICAS POR PERIODO DURANTE UN HORIZONTE DADO DE PLANEACION DE MANERA QUE SE MINIMICEN LOS COSTOS TOTALES DE PRODUCCION Y DE INVENTARIO. ENTONCES EL PROGRAMA TENDRIA LA SIGUIENTE ESTRUCTURA: LAS ETAPAS SERIAN CADA PERIODO, EL ESTADO ESTARIA REPRESENTADO POR EL NIVEL DE INVENTARIO Y LA DECISION SERIA LA CANTIDAD A PRODUCIR EN CADA PERIODO.

2) PROBLEMAS DE SURTIDO. (O DE AJUSTE).

SE REQUIERE DE UN PRODUCTO PARA UTILIZARLO EN UN CIERTO NUMERO DE TAMAÑOS, ANCHOS O RESISTENCIAS. SE PRODUCE O SOLO PUEDE OBTENERSE EN UN NUMERO LIMITADO DE TAMAÑOS ESTANDAR Y_i, DONDE $i=1,2,3,\ldots.I$. SI SE NECESITA EL PRODUCTO EN UN TAMAÑO X DIFERENTE DE LOS TAMAÑOS ESTANDAR Y_i, ENTONCES TENDRA QUE OBTENERSE A PARTIR DEL SIGUIENTE MAYOR TAMAÑO (ANCHO, RESISTENCIA) ESTANDAR, LO CUAL PROVOCA UN DESPERDICIO. EL PROBLEMA CONSISTE EN ENCONTRAR UN SURTIDO DE $N < I$ TAMAÑOS ESTANDAR DE MANERA QUE SE MINIMICE EL DESPERDICIO O EL COSTO TOTAL DE SATISFACER LA COMBINACION DADA NECESARIA.
EL PLANTEAMIENTO DE PROGRAMACION DINAMICA PARA ESTE PROBLEMA SERIA: ETAPA; UNA PARA CADA TAMAÑO ESTANDAR UTILIZADO, EL ESTADO SERIA LA LONGITUD, ANCHO O RESISTENCIA DEL TAMAÑO ESTANDAR Y LA DECISION LA LONGITUD, ANCHO O RESISTENCIA DEL SIGUIENTE MENOR TAMAÑO ESTANDAR UTILIZADO.

3) OPERACIONES DE PROCESO DE MULTIPLES ETAPAS.

UN PRODUCTO DEBE PROCESARSE EN UNA SECUENCIA PREESTABLECIDA A TRAVES DE UN CIERTO NUMERO DE MAQUINAS, CADA UNA DE LAS CUALES REALIZA DIFERENTES CANTIDADES DEL PROCESAMINETO. UN EJEMPLO CON ESTAS CARACTERISTICAS ES EL DEL MANEJO DE RECURSOS RENOVABLES DESDE EL PUNTO DE VISTA BIOLOGICO, TALES COMO, CRIADEROS DE PESCADO, BOSQUES, ETC. POR EJEMPLO EN LA ADMINISTRACION DE BOSQUES, CADA GRUPO DE ARBOLES PUEDE SOMETERSE A UN CIERTO NUMERO DE OPERACIONES EN EL TRANSCURSO DEL TIEMPO, COMO SON LA TALA CONTROLADA, LIMPIEZA, CORTE SELECTIVO Y CORTE DE DESPEJE.LA CANTIDAD Y CALIDAD DE LA MADERA DEPENDEN DE LA INTENSIDAD Y DEL TIEMPO DE ESTAS OPERACIONES. EL OBJETIVO ES MAXIMIZAR EL VALOR DE LA ZONA FORESTAL. LA ETAPA SERIA LA EDAD DE LOS ARBOLES, EL ESTADO EL VOLUMEN DE ARBOLES EN PIE, Y LA DECISION SERIA LA INTENSIDAD DE LA OPERACION,POR EJEMPLO TALA CONTROLADA.

4) PROBLEMAS DE DISTRIBUCION DE ESFUERZO.

LOS PROBLEMAS DE DISTRIBUCION DE ESFUERZO SIEMPRE INCLUYEN LA ASIGNACION DE UN TIPO DE RECURSO A CIERTO NUMERO DE ACTIVIDADES, SIEMPRE TIENE LA SIGUIENTE FORMULACION DE PROGRAMACION DINAMICA.
ETAPA n = ACTIVIDAD n (n= 1,2....N)
ESTADO, ESTA DADO POR LA CANTIDAD DE RECURSO QUE TODAVIA ESTA DISPONIBLE PARA ASIGNARSE A LAS ACTIVIDADES RESTANTES.
LA DECISION ES IGUAL A LA CANTIDAD DE RECURSO ASIGNADO A LA ACTIVIDAD n.

EL PROBLEMA DE LA DIMENSIONALIDAD EN LA PROGRAMACION DINAMICA.

LA DIFICULTAD DE RESOLVER UN PROGRAMA DINAMICO AUMENTA EXPONENCIALMENTE CON EL NUMERO DE COMPONENTES DE LOS VECTORES DE ENTRADA Y SALIDA AL SISTEMA.POR DIFICULTAD, SE ENTIENDE EL TIEMPO Y MEMORIA REQUERIDA EN UNA COMPUTADORA PARA PODER RESOLVER LA FUNCION RECURSIVA.EN GENERAL SI EXISTEN k COMPONENTES EN UN VECTOR DE ENTRADA Y ESTOS PUEDEN TOMAR w VALORES DIFERENTES Y EXISTEN n ETAPAS, EL NUMERO TOTAL DE ALTERNATIVAS A ANALIZAR ES nw^k.
ESTO REPRESENTA UN OBSTACULO SERIO AL RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACION DINAMICA DE TAMAÑO MEDIANO Y GRANDE.

A CONTINUACION SE PRESENTAN ALGUNOS EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACION RESUELTOS POR MEDIO DE LA PROGRAMACION DINAMICA.

EJEMPLO 1. DISCRETO, DETERMINISTICO, FINITO, CON PRODUCTO DE EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES, CON METODO DE SOLUCION DE SALIDA A ENTRADA.

SUPONGASE QUE LA CADENA DE TIENDAS DE AUTOSERVICIO "LA MEXICANA" EN SU ETAPA DE REESTRUCTURACION HA CONTRATADO LOS SERVICIOS DE TRES COMPAÑIAS DE CONSULTORIA DEL PAIS CON EL PROPOSITO DE QUE LE ASESOREN EN TODOS LOS PROBLEMAS ASOCIADOS A DICHO PROYECTO DE REESTRUCTURACION. SEAN ESAS COMPAÑIAS DE ASESORIA LA A, B Y C. SE HA ESTIMADO QUE LA PROBABILIDAD DE QUE ESTAS COMPAÑIAS FRACASEN EN SU ESTUDIO ES DE 0.40, 0.60 Y 0.80 RESPECTIVAMENTE. ENTONCES LA PROBABILIDAD TOTAL DE FRACASO ES 0.40 X 0.60 X 0.80 = 0.192.
LA CADENA DE AUTOSERVICIO CONSIDERA QUE LA PROBABILIDAD TOTAL DE FRACASO ES MUY ALTA, POR LO QUE HA DECIDIDO ADEMAS CONTRATAR LOS SERVICIOS DE DOS COMPAÑIAS DE CONSULTORIA EXTRANJERAS PARA QUE SIRVAN COMO ASESORAS A LAS COMPAÑIAS NACIONALES. POR LA ESTRUCTURA DEL PROYECTO, LAS COMPAÑIAS EXTRANJERAS NO PUEDEN ASESORAR DE TIEMPO PARCIAL A LAS COMPAÑIAS MEXICANAS, SINO QUE SE DEBEN DEDICAR DE TIEMPO COMPLETO A UNA Y SOLO UNA DE LAS TRES COMPAÑIAS. ES DECIR, SE PUEDE ASIGNAR UNA COMPAÑIA EXTRANJERA A UNA NACIONAL Y LA OTRA EXTRANJERA A OTRA NACIONAL, O SE PUEDEN ASIGNAR LAS DOS COMPAÑIAS EXTRANJERAS A UNA SOLA COMPAÑIA MEXICANA.
EL PROBLEMA A TRATAR ES COMO ASIGNAR LAS COMPAÑIAS EXTRANJERAS A FIN DE REDUCIR LA PROBABILIDAD TOTAL DE FRACASO.

SE TIENE LA ESTIMACION DE LAS PROBABILIDADES DE FRACASO QUE SE LOGRARA CON LA ASIGNACION DE LAS COMPAÑIAS EXTRANJERAS COMO SE MUESTRA EN LA SIGUIENTE TABLA:

		COMPAÑIAS CONSULTORAS MEXICANAS.		
		A	B	C
ASIGNACION DE CIAS.	0	0.40	0.60	0.80
CONSULTORAS EXTRANJERAS.	1	0.20	0.40	0.50
	2	0.15	0.20	0.30

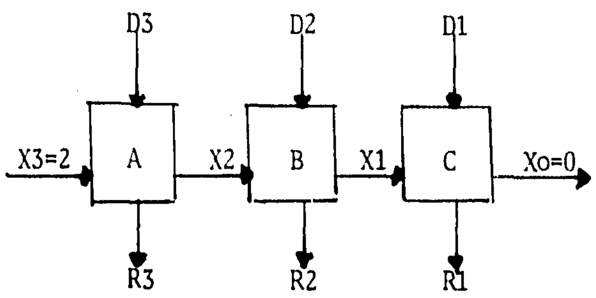
LA INTERPRETACION DE LA TABLA ES LA SIGUIENTE; SI LAS DOS COMPAÑIAS EXTRANJERAS ASESORAN A LA COMPAÑIA NACIONAL A. SE REDUCE LA PROBABILIDAD DE FRACASO DE 0.40 A 0.15. POR OTRA PARTE SI SOLO UNA COMPAÑIA EXTRANJERA ASESORA A LA COMPAÑIA A, LA PROBABILIDAD DE FRACASO SE REDUCE A 0.20.

COMO PODEMOS OBSERVAR TENEMOS UN PROBLEMA DE MINIMIZACION, PUES SE TRATA DE REDUCIR LA PROBABILIDAD TOTAL DE FRACASO. PARA LOGRAR ESTO SE DEBE ENCONTRAR LA FORMA DE ASIGNAR DE LA MANERA MAS EFICAZ A LAS COMPAÑIAS EXTRANJERAS.

RESOLVIENDO:

SE TIENE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACION DE TRES ETAPAS, PUESTO QUE CADA COMPAÑIA DE CONSULTORIA MEXICANA ES UNA ETAPA. EL ESTADO ESTA DADO POR EL NUMERO DISPONIBLE TODAVIA DE COMPAÑIAS EXTRANJERAS QUE VAN ASIGNARSE EN LAS DEMAS ETAPAS. LA DECISION Dk ES EL NUMERO DE COMPAÑIAS EXTRANJERAS QUE SE ASIGNAN A LA COMPAÑIA CONSULTORA MEXICANA k, k= A,B,C. MIENTRAS QUE LA EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD DEL SISTEMA, Rk, ES LA PROBABILIDAD DE FRACASO DE LA COMPAÑIA MEXICANA k. (CON ASESORES O SIN ELLOS.). EL VECTOR DE ENTRADA X3 = 2, REPRESENTA A LAS COMPAÑIAS EXTRANJERAS QUE SE DEBEN ASIGNAR A CUALQUIERA DE LAS ETAPAS A,B, Y C. EL VECTOR DE SALIDA Xo = 0 REPRESENTA QUE LAS COMPAÑIAS EXTRANJERAS HAN SIDO ASIGNADAS.

ESQUEMATICAMENTE:



TENEMOS QUE LA EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD TOTAL ESTA DADA POR:

$$R1.R2.R3 = r1(X1,D1).r2(X2,D2).r3(X3,D3)$$

LA FUNCION RECURSIVA ES:

$$Gk(Xk) = \min_{Dk} [rk(Xk,Dk) \;.\; Gk\text{-}1(Xk\text{-}1)]$$

SUJETO A:

$$Xk\text{-}1 = fk(Xk,Dk) = Xk\text{-}Dk, \quad K=A,B,C.$$

CON $G0(Xo) = 1$ COMO CONDICION INICIAL.

OPTIMIZACION DE UNA ETAPA.

$$G1(X1) = \min_{D1}[\, r1(X1,D1).Go(Xo)]$$

$$Go(Xo) \equiv 1 \qquad X1=D1, \text{ PARA QUE } Xo = 0.$$

EN FORMA TABULAR:

X1 \ D1	0	1	2		
	r1(X1,D1).1			G1(X1)	D1*
0	0.80	-------	-------	0.80	0
1	-------	0.50	-------	0.50	1
2	-------	------	0.30	0.30	2

OPTIMIZACION DE DOS ETAPAS:

$$G2(X2)=\underset{D2}{MI}[r2(X2,D2)\ .\ G1(X1)]$$

SUJETO A, $X1 = X2-D2$

ENTONCES:

$$G2(X2) = \underset{D2}{MIN}[r2(X2,D2)\ ,\ G1(X2-D2)]$$

EN FORMA TABULAR:

X2 \ D2	0	1	2		
	r2(X2,D2) . G1(X2-D2)			G2(X2)	D2*
0	(.6)(.8)= 0.48	---------	----------	0.48	0
1	(.6)(.5)= 0.30	(.4)(.8)= 0.32	---------	0.30	0
2	(.6)(.3)= 0.18	(.4)(.5)= 0.20	(.2)(.8)= 0.16	0.16	2

OPTIMIZACION DE TRES ETAPAS:

$$G3(X3) = \underset{D3}{MIN}[\ r3(X3,D3)\ .\ G2(X2)]$$

SUJETO A, $X2= X3-D3$

ENTONCES:

$$G3(X3) = \underset{D3}{MIN}\ [r3(X3,D3)\ .\ G2(X3-D3)]$$

EN FORMA TABULAR:

X3 \ D3	0	1	2		
	r3(X3,D3) . G2(X3-D3)			G3(X3)	D3*
2	(.4)(.16)= 0.064	(.2)(.3)= 0.06	(.15)(.48)= 0.072	0.06	1

DE LOS RESULTADOS TABULADOS PODEMOS CONCLUIR QUE LA SOLUCION OPTIMA SE OBTIENE CON 0.06 COMO PROBABILIDAD MINIMA TOTAL DE FRACASO.ANALIZANDO LAS TABLAS PODEMOS APRECIAR QUE ESTA PROBABILIDAD SE OBTIENE CUANDO D3* =1, ESTO QUIERE DECIR QUE HAY QUE ASIGNAR UNA COMPAÑIA EXTRANJERA A LA COMPAÑIA MEXICANA "A".ENTONCES SOLO NOS QUEDA UNA COMPAÑIA EXTRANJERA PARA ASIGNARLA A LAS DOS RESTANTES COMPAÑIAS NACIONALES.PERO SI ANALIZAMOS LA TABLA 2, PODEMOS APRECIAR QUE CUANDO TENEMOS UNA COMPAÑIA EXTRANJERA (X2=1) PARA ASIGNAR A LA COMPAÑIA MEXICANA "B",LA D2*=0, LO QUE NOS RESUME QUE HAY QUE ASIGNAR LA COMPAÑIA EXTRANJERA RESTANTE A LA COMPAÑIA MEXICANA "C".

POR LO QUE LA SOLUCION OPTIMA CONSISTE EN ASIGNAR UNA COMPAÑIA EXTRANJERA A LA COMPAÑIA NACIONAL "A" Y OTRA A LA COMPAÑIA MEXICANA "C".CON ESTO LA PROBABILIDAD TOTAL DE FRACASO SE REDUCE DE 0.192 A 0.06.

EJEMPLO 2. DISCRETO, DETERMINISTICO, FINITO, CON SUMA DE EFICIENCIAS Y/O EFECTIVIDADES PARCIALES, Y CON METODO DE SOLUCION DE ENTRADA A SALIDA.

(PRESUPUESTO DE CAPITAL).

UNA CORPORACION RECIBE PROPUESTAS DE SUS TRES PLANTAS RESPECTO A LA POSIBLE EXPANSION DE LAS INSTALACIONES.LA CORPORACION TIENE UN PRESUPUESTO DE N$5 MILLONES, PARA ASIGNARLO A LAS TRES PLANTAS.

A CADA PLANTA SE LE SOLICITA QUE SOMETA SUS PROPUESTAS INDICANDO EL COSTO TOTAL Y EL INGRESO TOTAL PARA CADA ALTERNATIVA.PARA LA PLANTA "A"" EXISTEN DOS ALTERNATIVAS, PARA LA PLANTA "B" HAY TRES ALTERNATIVAS Y PARA LA PLANTA "C" UNA ALTERNATIVA.

LA META DE LA CORPORACION ES LA DE MAXIMIZAR EL INGRESO TOTAL RESULTANTE DE LA ASIGNACION DE LOS N$5 MILLONES ENTRE LAS TRES PLANTAS. EN LA SIGUIENTE TABLA SE RESUMEN LOS COSTOS Y LOS INGRESOS (EN MILLONES DE PESOS). SIENDO EL COSTO ESTIMADO POR EXPANSION DE LA PLANTA i, UTILIZANDO LA ALTERNATIVA j, Cij.MIENTRAS QUE LOS INGRESOS ESTIMADOS SON Rij. LAS PROPUESTAS DE COSTO CERO SE INTRODUCEN PARA DAR CABIDA A LA POSIBILIDAD DE NO ASIGNAR FONDOS A PLANTAS INDIVIDUALES.A CONTINUACION SE PRESENTA LA TABLA CON LOS VALORES DE LOS COSTOS Y LOS INGRESOS DE LAS DISTINTAS ALTERNATIVAS QUE PRESENTAN LAS PLANTAS .

ALTERNATIVA	PLANTA "A"		PLANTA "B"		PLANTA "C"	
	C1	R1	C2	R2	C3	R3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-----	-----
4	-----	-----	4	12	-----	------

(EN MILLONES DE PESOS).

RESOLVIENDO:

CADA ETAPA REPRESENTA A CUALQUIERA DE LAS PLANTAS (A,B,C), POR LO QUE TENEMOS UN PROBLEMA DE OPTIMIZACION DE TRES ETAPAS. EL ESTADO ES LA CANTIDAD DE DINERO AUN DISPONIBLE PARA ASIGNARLO A LAS PLANTAS RESTANTES.

LA DECISION EN CADA ETAPA CONSISTE EN SABER CUANTO DINERO SE ASIGNA A ESA ETAPA. LA EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD DEL SISTEMA ES EL INGRESO QUE SE GENERA AL ASIGNARLE CIERTA CANTIDAD A LA ETAPA k, k= A,B,C. EL VECTOR DE ENTRADA $X_o=5$ REPRESENTA LOS CINCO MILLONES QUE SE QUIEREN ASIGNAR. Y EL VECTOR DE SALIDA $X_3=0$ NOS DICE QUE SE HAN ASIGNADO LOS N$5 MILLONES.

EL INGRESO PARCIAL DE CADA ETAPA SE PRESENTA EN FUNCION DEL COSTO DE INVERSION Y SE DENOTA POR:

$$r_{ij}(c_{ij}),\ i=A,B,C.\quad j=1,2,3,4.$$

LA FUNCION DE TRANSFERENCIA RELACIONA AL CAPITAL DISPONIBLE ANTES Y DESPUES DE TOMAR LA DECISION, Y ES IGUAL A LO SIGUIENTE:

CAPITAL DISPONIBLE EN LA ETAPA k. = (CAPITAL DISPONIBLE EN LA ETAPA k-1 ANTES DE TOMAR UNA DECISION) menos (COSTO DE LA INVERSION QUE SE ASIGNA A LA ETAPA k-1, k=A,B,C.)

USANDO LA FUNCION RECURSIVA:

$$G_i(X_i) = \max_{D_i} [r_{ij}(c_{ij}) + G_{i-1}(X_{i-1})]$$

SUJETO A, $X_{i-1} = X_i - c_{ij}$ CON $i= A,B,C.$ $j= 1,2,3,4.$

ENTONCES:

$$G_i(X_i) = \max_{D_i} [r_{ij}(c_{ij}) + G_{i-1}(X_i - c_{ij})]$$

ADEMAS UNA PROPUESTA ES FACTIBLE SI SU COSTO (c_{ij}), NO EXCEDE EL ESTADO DEL SISTEMA EN LA ETAPA i, POR LO QUE:

$0 \leq c_{ij} \leq X_i$ Y $G_o(X_o) = 0$ COMO CONDICION INICIAL.

OPTIMIZACION DE UNA ETAPA.

$$G_A(X_A) = \max_{D_A} [r_{Aj}(c_{Aj}) + G_o(X_o)]$$

SUJETO A, $0 \leq c_{Aj} \leq X_A$ Y, $j=1,2,3$ $G_o(X_o) = 0$

EN FORMA TABULAR:

ALTERNATIVA / XA	1	2	3	GA(XA)	DA*
	rA1(cA1=0)	rA2(cA2=1)	rA3(cA3=2)		
0	0	-------	------	0	1
1	0	5	------	5	2
2	0	5	6	6	3
3	0	5	6	6	3
4	0	5	6	6	3
5	0	5	6	6	3

(XA = CAPITAL DISPONIBLE PARA INVERTIR EN LA ZONA "A", EN MILLONES DE PESOS).

OPTIMIZACION DE DOS ETAPAS.

$$GB(XB) = \max_{DB} [rBj(cBj) + GA(XB - cBj)]$$

SUJETO A, $0 \leq cBj \leq XB \qquad j=1,2,3,4.$

(LA FORMA TABULAR SE PRESENTA EN LA SIGUIENTE PAGINA)

OPTIMIZACION DE TRES ETAPAS.

$$GC(XC) = \max_{DC} [rCj(cCj) + GB(XC - cCj)]$$

SUJETO A, $0 \leq cCj \leq XC \qquad j= 1,2.$

(LA FORMA TABULAR SE PRESENTA EN LA SIGUIENTE PAGINA).

TABLA DE LA OPTIMIZACION DE DOS ETAPAS.

XB \ ALTERNATIVA	1	2	3	4		
	rB1(cB1=0) +GA(XB-cB1)	rB2(cB2=2) +GA(XB-cB2)	rB3(cB3=3) +GA(XB-cB3)	rB4(cB4=4) +GA(XB-cB4)	GB(XB)	DB*
0	0 + 0=0	----------	-----------	-----------	0	1
1	0 + 5=5	----------	-----------	-----------	5	1
2	0 + 6=6	8 + 0=8	-----------	-----------	8	2
3	0 + 6=6	8 + 5=13	9 + 0=9	-----------	13	2
4	0 + 6=6	8 + 6=14	9 + 5=14	12 + 0=12	14	263
5	0 + 6=6	8 + 6=14	9 + 6=15	12 + 5=17	17	4

(XB= CAPITAL DISPONIBLE PARA INVERTIR EN LA ZONA " B ", EN MILLONES DE PESOS.)

TABLA DE LA OPTIMIZACION DE TRES ETAPAS.

XC \ ALTERNATIVA	1	2		
	rC1(cC1=0) +GB(XC-cC1)	rC2(cC2=1) +GB(XC-cC2)	GC(XC)	DC*
5	0 + 17=17	3 + 14=17	17	162

(XC= CAPITAL DISPONIBLE PARA INVERTIR EN LA ZONA " C ", EN MILLONES DE PESOS.)

DE LOS DATOS APORTADOS POR LAS TABLAS DE OPTIMIZACION DE LAS DISTINTAS ETAPAS, PODEMOS CONCLUIR, QUE LA CORPORACION PUEDE ALCANZAR UN MAXIMO DE N$17 MILLONES DE INGRESOS AL ASIGNAR LOS N$5 MILLONES A SUS PLANTAS, SI ESTA ASIGNACION LA REALIZA DE LAS SIGUIENTES MANERAS:

1) ASIGNANDOLE N$4 MILLONES A LA PLANTA "B" POR LO QUE OBTIENE N$12 MILLONES, Y ASIGNANDOLE N$1 MILLON A LA PLANTA "A" POR LO QUE OBTIENE N$5 MILLONES.

2) ASIGNANDOLE N$2 MILLONES A LA PLANTA "B" OBTENIENDO N$8 MILLONES, ASIGNANDOLE N$2 MILLONES A LA PLANTA "A" OBTENIENDO N$6 MILLONES, Y EL MILLON QUE SOBRA ASIGNARLO A LA PLANTA "C" OBTENIENDO N$3 MILLONES, Y EN TOTAL SUMAN LOS N$17 MILLONES DE INGRESOS.

3) ASIGNANDOLE N$3 MILLONES A LA PLANTA "B" OBTENIENDO N$9 MILLONES, ASIGNANDOLE N$1 MILLON A LA PLANTA "A" OBTENIENDO N$5 MILLONES, Y ASIGNANDO N$1 MILLON A LA PLANTA "C" OBTENIENDO N$3 MILLONES, POR LO QUE TOTAL TAMBIEN SE OBTIENEN LOS N$17 MILLONES.

EJEMPLO 3. CONTINUO, DETERMINISTICO, FINITO, CON METODO DE SOLUCION DE SALIDA A ENTRADA.

(PROBLEMA DE INVENTARIO).

EN UNA FABRICA, SE DEBE ESTABLECER UNA CALENDARIZACION DE LA PRODUCCION DE UN CIERTO ARTICULO PARA LOS PROXIMOS CUATRO MESES. SE CONOCEN TANTO EL COSTO UNITARIO DE PRODUCCION (Pn), COMO LA DEMANDA dn, PARA EL PERIODO n, n=1,2,3,4. LOS CUALES SE RESUMEN EN LA SIGUIENTE TABLA:

MES n	1	2	3	4
DEMANDA (dn)	3	2	7	4
COSTO UNITARIO DE PRODUCCION (Pn)	13	17	20	10

LA CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO EN CADA PERIODO ES DE 9 UNIDADES. Y AL PRINCIPIO DEL PRIMER MES SE TIENE UN INVENTARIO DE 2 UNIDADES Y SE DESEA QUE EL INVENTARIO, AL FINAL DEL CUARTO MES, SEA NULO. ADEMAS NO SE PERMITE SATISFACER LA DEMANDA DEL PERIODO t EN LOS PERIODOS t+1, t+2, ..., Y LA PRODUCCION ES INSTANTANEA.
EL OBJETIVO ES SABER CUANTO SE DEBE PRODUCIR AL PRINCIPIO DE CADA MES PARA SATISFACER LA DEMANDA MENSUAL CON UN COSTO DE PRODUCCION MINIMO.

RESOLVIENDO.

SEAN X_{j-1}: INVENTARIO AL PRINCIPIO DEL PERIODO j, j=1,2,3,4. ANTES DE PRODUCIR.

Y_j: EL INVENTARIO AL PRINCIPIO DEL PERIODO j, CON j=1,2,3,4. DESPUES DE PRODUCIR.

a_j: LA PRODUCCION DEL MES j, j=1,2,3,4.

ENTONCES SE TIENE QUE:

$$Y_j - X_{j-1} = a_j, \quad j=1,2,3,4.$$

$$Y_j - X_j = d_j, \quad j=1,2,3,4.$$

ENTONCES, TENEMOS UN PROBLEMA DE OPTIMIZACION DE CUATRO ETAPAS REPRESENTADAS POR LOS CUATRO MESES QUE DURA LA CALENDARIZACION. LA ENTRADA AL SISTEMA EN LA ETAPA j ES X_{j-1}. LA DECISION EN LA ETAPA j ES a_j, ES DECIR CUANTO PRODUCIR. PERO a_j ES UNA FUNCION DE X_{j-1} Y DE Y_j, POR LO QUE SE PUEDE REPRESENTAR POR X_{j-1}. LAS TRANSFORMACIONES ENTRE LA ENTRADA X_{j-1} EN LA ETAPA j, Y SU SALIDA X_j ESTAN DADAS POR LAS IGUALDADES ANTERIORES. LA EFICIENCIA Y/O EFECTIVIDAD DEL SISTEMA EN CADA ETAPA LA CONSTITUYE EL COSTO DE PRODUCCION.

ANALIZANDO EL PROBLEMA OBSERVAMOS QUE TIENE LAS SIGUIENTES RESTRICCIONES:

$$0 \leq X_j \leq 9, \quad j=1,2,3,4.$$

$$0 \leq Y_j \leq 9, \quad j=1,2,3,4.$$

$$X_{j-1} \leq Y_j, \quad j=1,2,3,4. \qquad \text{PERO} \quad Y_j = X_j + d_j$$

ENTONCES,

$$X_{j-1} \leq X_j + d_j \leq 9$$

$$X_{j-1} - d_j \leq X_j \leq 9 - d_j$$

ADEMAS,

$$X_j \leq Y_{j+1} = X_{j+1} + d_{j+1}$$

POR LO QUE FINALMENTE SE TIENE:

$$\text{MAX}(0, X_{j-1} - d_j) \leq X_j \leq \text{MIN}(9 - d_j, X_{j+1} + d_{j+1}), \quad j=1,2,3,4.$$

QUE REPRESENTA EL RANGO DE VARIACION CONTINUA DE LA VARIABLE X_j.

AHORA LA PRODUCCION a_j, SE EXPRESA COMO:

$$a_j = d_j + X_j - X_{j-1}, \quad j=1,2,3,4. \qquad \text{PUESTO QUE: } \begin{array}{l} a_j = Y_j - X_{j-1} \\ Y_j = d_j + X_j \end{array}$$

OPTIMIZACION DE UNA ETAPA (MES CUATRO).

$$\text{MAX } (0, X_2 - d_3) \leq X_3 \leq \text{MIN } (9 - d_3, X_4 + d_4)$$

$$\text{MAX } (0, X_2 - 7) \leq X_3 \leq \text{MIN } (9 - 7, 0 + 4)$$

$$\text{MAX } (0, X_2 - 7) \leq X_3 \leq 2$$

EL COSTO DE PRODUCCION PARA EL MES CUATRO ES:

$$G4(a4) = P4a4 = P4(X4 + d4 - X3) = 10(0 + 4 - X3) = 40 - 10X3$$

OPTIMIZACION DE DOS ETAPAS (MESES CUATRO Y TRES).

$$MAX\ (0,\ X1 - d2) \leq X2 \leq MIN\ (9 - d2,\ X3 + d3)$$

$$MAX\ (0,\ X1 - 2\ ) \leq X2 \leq MIN\ (9 - 2,\ X3 + 7)$$

$$MAX\ (0,\ X1 - 2\ ) \leq X2 \leq 7$$

LA DESIGUALDAD ANTERIOR, EN CONJUNTO CON LA QUE PRESENTA EL RANGO DE VARIACION DE X3, NOS DA EL SIGUIENTE RESULTADO:

$$0 \leq X3 \leq 2$$

EL COSTO OPTIMO PARA LOS DOS MESES ES:

$$G3(a3) = \min_{0 \leq X3 \leq 2} [P3a3 + G4(a4)] = \min_{0 \leq X3 \leq 2} [P3a3 + 40 - 10X3]$$

$$= \min_{0 \leq X3 \leq 2} [P3(X3 + d3 - X2) + 40 - 10X3]$$

$$= \min_{0 \leq X3 \leq 2} [20(X3 + 7 - X2) + 40 - 10X3]$$

$$= \min_{0 \leq X3 \leq 2} [180 - 20X2 + 10X3]$$

LA EXPRESION EN PARENTESIS SE INCREMENTA A MEDIDA QUE X3 AUMENTA.POR LO QUE LA X3*=0 POR QUE MINIMIZA LA EXPRESION, Y ENTONCES G3(a3) = 180 - 20X2.

OPTIMIZACION DE TRES ETAPAS (MESES CUATRO, TRES, Y DOS).

$$MAX\ (0,\ Xo - d1) \leq X1 \leq MIN\ (\ 9 - d1,\ X2 + d2)$$

$$MAX\ (0,\ 2 - 3) \leq X1 \leq MIN\ (9 - 3,\ X2 + 2)$$

$$0 \leq X1 \leq MIN\ (6,\ X2 + 2)$$

EL COSTO OPTIMO DE PRODUCCION PARA LOS TRES ULTIMOS MESES ES:

$$G2(a2) = \min_{MAX(0,X1-2) \leq X2 \leq 7} [\ P2(a2) + G3(a3)\ ] = \min_{MAX(0,X1-2) \leq X2 \leq 7} [\ P2(a2) + 180 - 20X2\ ]$$

$$G2(a2) = \min_{MAX(0,X1-2)\leq X2\leq 7} [17(X2 + d2 - X1) + 180 - 20X2]$$

$$= \min_{MAX(0,X1-2)\leq X2\leq 7} [17(X2 + 2 - X1) + 180 - 20X2]$$

$$= \min_{MAX(0,X1-2)\leq X2\leq 7} [214 - 17X1 - 3X2]$$

LA EXPRESION DEL PARENTESIS DISMINUYE MONOTONICAMENTE A MEDIDA QUE X2 AUMENTA, POR LO QUE LA X2 OPTIMA, ES DECIR, X2*, QUE MINIMIZA LA EXPRESION ANTERIOR ES X2*=7 Y G2(a2) =193 - 17X1.

OPTIMIZACION DE CUATRO ETAPAS (MESES CUATRO, TRES, DOS Y UNO).

DE LA ETAPA ANTERIOR TENEMOS:

$0\leq X1\leq MIN\ (6,\ X2 + 2)$ PERO X2*=7

ENTONCES, $0\leq X1\leq MIN\ (6,\ 7 + 2)$

$$0\leq X1\leq 6$$

EL COSTO OPTIMO DE PRODUCCION PARA LOS ULTIMOS CUATRO MESES ES:

$$G1(a1) = \min_{0\leq X1\leq 6} [\ P1(a1) + G2(a2)\ ]$$

$$= \min_{0\leq X1\leq 6} [\ P1(X1 + d1 - Xo) + 193 - 17X1]$$

$$= \min_{0\leq X1\leq 6} [\ 13(X1 + 3 - 2) + 193 - 17X1]$$

$$= \min_{0\leq X1\leq 6} [\ 206 - 4X1]$$

LA EXPRESION ANTERIOR SE MINIMIZA PARA X1=6, ENTONCES X1*=6 Y G1(a1)=182.

ENTONCES TENEMOS LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

X0*=2, X1*=6, X2*=7, X3*=0, X4*=0

COMO Yj = dj + Xj, j=1,2,3,4. TENEMOS:

Y1*=9, Y2*=9, Y3*=7, Y4*=4

POR OTRO LADO, COMO $a_j = Y_j - X_{j-1}$, $j=1,2,3,4$. TENEMOS QUE LOS NIVELES OPTIMOS DE PRODUCCION PARA LOS PROXIMOS CUATRO MESES SON:

$a_1^*=7, \quad a_2^*=3, \quad a_3^*=0, \quad a_4^*=4.$

EL COSTO TOTAL MINIMO ES:

$$G_1(a_1) = \$182.$$

CAPITULO TERCERO.

PROGRAMACION DINAMICA PROBABILISTICA O ESTOCASTICA.

III

PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA O PROBABILISTICA.

ANDREI ANDREIVICH MARKOV FUE UN MATEMATICO RUSO (1856-1922) EL CUAL POSTULO EL PRINCIPIO DE QUE EXISTEN CIERTOS PROCESOS ESTOCASTICOS CUYO FUTURO DEPENDE UNICAMENTE DE SU PRESENTE Y ES INDEPENDIENTE DE SU PASADO; ESTOS RECIBEN EL NOMBRE DE CADENAS DE MARKOV.

LAS CADENAS DE MARKOV SON PARTE FUNDAMENTAL EN LA APLICACION DE LA PROGRAMACION DINAMICA PROBABILISTICA. MEDIANTE ESTA SE DA SOLUCION A UN PROCESO DE DECISION ESTOCASTICO QUE SE PUEDE DESCRIBIR A TRAVES DE UN NUMERO FINITO DE ESTADOS. LAS PROBABILIDADES DE TRANSICION ENTRE LOS ESTADOS SE DESCRIBEN POR MEDIO DE UNA CADENA DE MARKOV.

LA PROGRAMACION DINAMICA PROBABILISTICA DIFIERE DE LA DETERMINISTICA EN QUE EL ESTADO DE LA SIGUIENTE ETAPA NO ESTA COMPLETAMENTE DETERMINADO POR EL ESTADO Y LA POLITICA DE DECISION DE LA ETAPA ACTUAL. EN ESTE CASO EXISTE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD PARA DETERMINAR CUAL SERA EL ESTADO EN LA SIGUIENTE ETAPA. SIN EMBARGO, ESTA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD SI QUEDA BIEN DETERMINADA POR EL ESTADO Y LA POLITICA DE DECISION EN LA ETAPA ACTUAL.

EL PROCESO DE OPTIMIZACION SE PRESENTA EN UN SISTEMA CUALQUIERA, CUANDO EN CADA PERIODO DE TIEMPO SE DISPONE DE UNA SERIE DE ALTERNATIVAS DE DECISION, CADA UNA CON UN COSTO ASOCIADO Y CUYA INSTRUMENTACION COLOCA AL SISTEMA EN OTRO ESTADO CON UNA DETERMINADA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD. EL PROCESO MARKOVIANO DE DECISION GENERA LAS ACCIONES OPTIMAS QUE MINIMIZAN EL COSTO TOTAL ESPERADO O EN SU CASO MAXIMIZAN LA UTILIDAD, EN TODO EL HORIZONTE DE PLANEACION ESPERADO.

LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACION DINAMICA PROBABILISTICA O ESTOCASTICA SOLO PUEDEN RESOLVERSE HACIA ATRAS. ESTO OCURRE POR LO SIGUIENTE, AL INICIO DE UN PERIODO O TRANSICION, EL PROCESO SE ENCUENTRA EN UN ESTADO CONOCIDO DADO. EN ESTE PUNTO SE ELIGE UNA ACCION QUE LLEVA A UNO DE VARIOS ESTADOS FUTUROS, SE LLEGA A CADA ESTADO CON UNA PROBABILIDAD CONOCIDA. NO ES POSIBLE ELEGIR CUAL SERA EL ESTADO PARTICULAR A QUE SE LLEGUE. LA SOLUCION HACIA ATRAS MANTIENE ESTA SECUENCIA CRONOLOGICA DE UNA DECISION

SEGUIDA POR UN EVENTO ALEATORIO. EN UNA SOLUCION HACIA ADELANTE, LA PREGUNTA SERIA ¿CUAL ES LA MEJOR RUTA PARA LLEGAR A UN ESTADO DADO?; ESTO ES COMO SI EL ESTADO AL QUE SE LLEGA MEDIANTE UN EVENTO ALEATORIO SE FIJARA ARBITRARIAMENTE LO CUAL ES UNA CONTRADICCION.

EN CONTRASTE CON UN PROBLEMA DE PROGRAMACION DINAMICA DETERMINISTA, PARA EL ESPACIO DE ESTADO ESTOCASTICO NO PUEDE DECIRSE CON CERTEZA CUALES SERAN LAS DECISIONES POSTERIORES YA QUE ESTAS DEPENDEN DEL RESULTADO DE EVENTOS ALEATORIOS. LAS REGLAS OPTIMAS DE DECISION SON DE LA FORMA " SI EL ESTADO RESULTANTE DE UNA DECISION ES.....,ENTONCES ELEGIR LA ACCION....". EN OTRAS PALABRAS SE TIENE UNA ESTRATEGIA DE ACCIONES CONDICIONALES, UNA PARA CADA ESTADO EN CADA ETAPA.

ESTACIONARIEDAD.

SE CONSIDERA QUE EL MEDIO AMBIENTE EN EL CUAL TIENEN QUE TOMARSE LAS DECISIONES Y LAS ACCIONES DISPONIBLES PARA QUIEN TOMA LAS DECISION PERMANECEN ESTACIONARIAS DURANTE EL TIEMPO.

POR EJEMPLO, PARA UN PROBLEMA DE CONTROL DE INVENTARIO, ESTO IMPLICA QUE O BIEN LA DEMANDA (EN EL CASO DETERMINISTICO) O BIEN LA DISTRIBUCION PROBABILISTICA DE DEMANDA (EN EL CASO ESTOCASTICO) ES IDENTICA EN CADA PERIODO Y QUE TODOS LOS COSTOS ASOCIADOS CON UNA DECISION DADA Y EL CONJUNTO DE POSIBLES DECISIONES DISPONIBLES EN CADA PERIODO PERMANECEN IGUALES.

DEBE ADMITIRSE QUE POCOS PROCESOS DE LA VIDA REAL PERMANECEN ESTACIONARIOS DURANTE CUALQUIER TIEMPO. SIN EMBARGO, ESTA CONSIDERACION PUEDE RESULTAR UNA APROXIMACION ADECUADA A LA REALIDAD EN MUCHOS PROBLEMAS, TALES COMO LAS DECISIONES RUTINARIAS DE UN DIA A OTRO EN UN MEDIO AMBIENTE DE CAMBIO LENTO O EN LAS DECISIONES DE ESTRATEGIA RECURRENTE A LARGO PLAZO.

EN EL PRIMER CASO, EL INCREMENTO POTENCIAL EN BENEFICIOS DEBIDO A UN ANALISIS NO ESTACIONARIO POR LO GENERAL NO JUSTIFICARA EL MAYOR COSTO DE RECOLECCION DE DATOS. ESTE ES EL CASO PARA LA MAYORIA DE LOS PROBLEMAS DE INVENTARIOS.

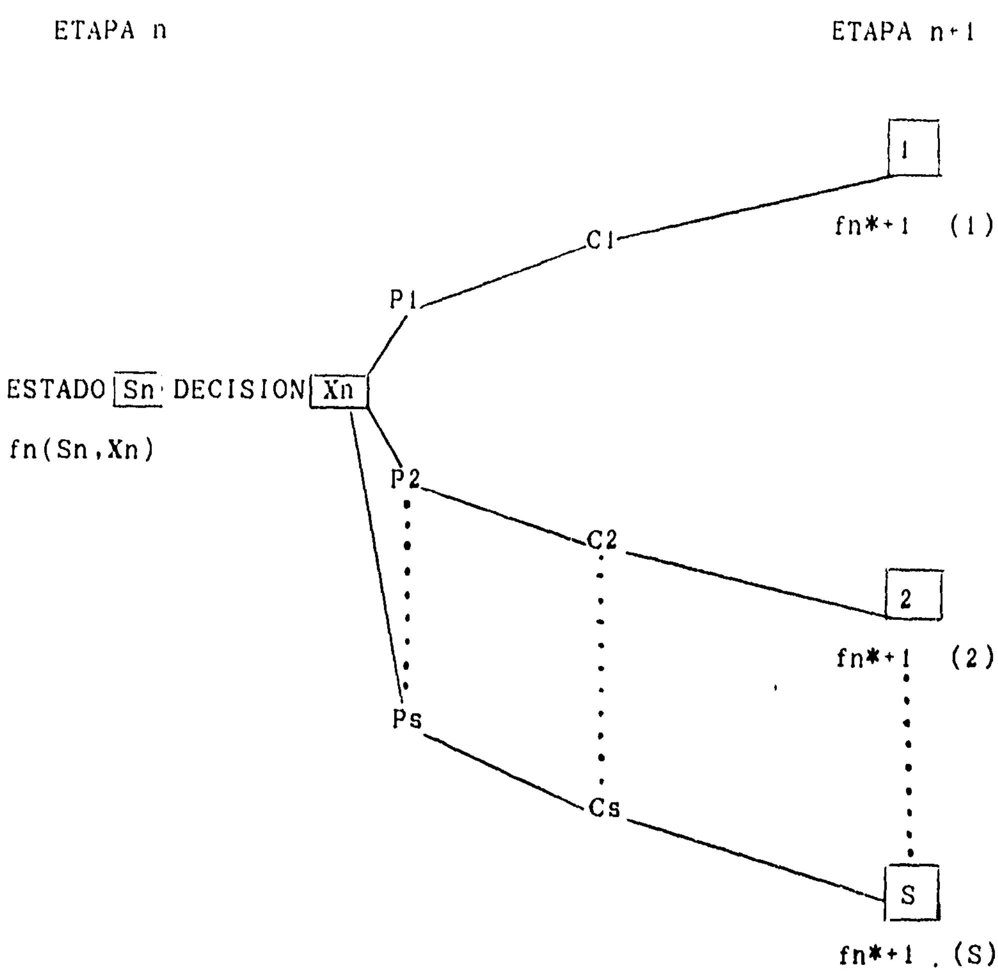
EN EL SEGUNDO CASO, LA INCERTIDUMBRE ACERCA DE LOS EVENTOS Y DE LAS POSIBILIDADES ALTERNATIVAS DE ACCION EN EL FUTURO MAS LEJANO Y EL HECHO DE QUE TENDRAN UN PEQUEÑO IMPACTO EN EL PRESENTE (DEBIDO AL DESCUENTO DE BENEFICIOS Y COSTOS FUTUROS), PUEDE JUSTIFICAR LA CONDICION DE ESTACIONARIEDAD Y DAR COMO RESULTADO MEJORES DECISIONES ACTUALES QUE AQUELLAS OBTENIDAS AL NO TOMAR EN CUENTA EL FUTURO DISTANTE E INCIERTO.

POLITICA ESTACIONARIA.

OCURRE CUANDO SE ESTA INTERESADO EN EVALUAR EL INGRESO O COSTO ESPERADO RESULTANTE DE SEGUIR UN CURSO DE ACCION ESPECIFICO SIEMPRE QUE OCURRA UN ESTADO DADO DEL SISTEMA. CADA POLITICA ESTACIONARIA DEBE ESTAR ASOCIADA CON MATRICES DE TRANSICION Y RENDIMIENTOS DISTINTAS.

UNA POLITICA ESTACIONARIA TIENE LA PROPIEDAD DE QUE SIEMPRE QUE EL PROCESO REGRESA A UN ESTADO DADO, SE TOMA LA MISMA DECISION.

ESTRUCTURA BASICA PARA PROGRAMACION DINAMICA PROBABILISTICA.



DONDE:

S = NUMERO DE ESTADOS POSIBLES EN LA ETAPA n+1 QUE SE ETIQUETAN AL LADO DERECHO POR 1,2,...S.

EL SISTEMA CAMBIA AL ESTADO i CON PROBABILIDAD Pi(i=1,2,...S), DADOS EL ESTADO Sn Y LA DECISION Xn EN LA ETAPA n. SI EL SISTEMA CAMBIA AL ESTADO i, Ci ES LA CONTRIBUCION DE LA ETAPA n A LA FUNCION OBJETIVO.

MODELO DE PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA. ETAPA FINITA.

EN EL CASO DE PERIODO FINITO, LA POLITICA O ESTRATEGIA OPTIMA DEPENDE TANTO DEL ESTADO OCUPADO POR EL SISTEMA COMO DEL NUMERO DE PERIODOS RESTANTES.

COMO MENCIONAMOS EN CAPITULOS ANTERIORES, LA PARTE MEDULAR DE LA PROGRAMACION DINAMICA CONSISTE EN LA RELACION DE RECURRENCIA. LOS CALCULOS RECURSIVOS UTILIZAN INFORMACION DE RESUMEN DE LA ETAPA INMEDIATA ANTERIOR, Y ESTE RESUMEN PROPORCIONA LAS OPTIMIZACIONES DE TODAS LAS ETAPAS CONSIDERADAS ANTERIORMENTE.

LA ECUACION RECURSIVA DE PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA O PROBABILISTICA PUEDE CONSTRUIRSE A PARTIR DE CIERTOS ELEMENTOS:

SEAN:

k= ALTERNATIVAS DISPONIBLES.

P^k= MATRIZ DE PROBABILIDADES DE TRANSICION.

R^k= MATRIZ DE REMUNERACION PARA LA ALTERNATIVA k.

$F_n(i)$= INGRESO ESPERADO OPTIMO DE LAS ETAPAS $n, n+1, \ldots, N$. DADO QUE EL ESTADO DEL SISTEMA AL INICIO DEL AÑO n ES i.

ENTONCES:

$$F_n(i) = \max_k \left\{ \sum_{j=1}^{m} P_{ij}^k \left[r_{ij}^k + F_{n+1}(j) \right] \right\}, \quad n=1,2,\ldots N$$

DONDE $F_{N+1}(j)=0$ PARA TODA j.

ESTA ECUACION NOS DICE QUE EL INGRESO ACUMULADO $r_{ij}^k + F_{n+1}(j)$, QUE RESULTA DE LLEGAR AL ESTADO j EN LA ETAPA $n+1$ DESDE EL ESTADO i EN LA ETAPA n, OCURRE CON PROBABILIDAD P_{ij}^k.

SEA V_i^k = RENDIMIENTO ESPERADO RESULTANTE DE UNA TRANSICION DESDE EL ESTADO i DADA LA ALTERNATIVA k, ENTONCES V_i PUEDE EXPRESARSE COMO:

$$V_i^k = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}^k \, r_{ij}^k$$

POR LO QUE NUESTRA ECUACION RECURSIVA DE PROGRAMACION DINAMICA PUEDE ESCRIBIRSE DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$FN(i) = \underset{K}{MAX}(Vi^{K})$$

$$Fn(i) = \underset{K}{MAX}\{Vi^{K} + \sum_{j=1}^{m} Pi_{j}^{K}\ Fn+1(j)\},\quad n=1,2,\ldots N-1.$$

EJEMPLO:

UN CAMPESINO DESEA OBTENER LA MAYOR COSECHA POSIBLE DE SU TERRENO. TODOS LOS AÑOS AL APROXIMARSE EL PERIODO DE CULTIVO, EL CAMPESINO REALIZA PRUEBAS QUIMICAS A SU PARCELA CON EL FIN DE PERCATARSE DE LA CONDICION ACTUAL DE SU TERRENO. DEPENDIENDO DE ESTAS PRUEBAS Y DE LOS RESULTADOS QUE DE ELLAS OBTENGA, EL CAMPESINO PUEDE CLASIFICAR LA PRODUCTIVIDAD DEL TERRENO PARA LA NUEVA COSECHA COMO BUENA, REGULAR Y MALA.

CON EL PASO DE LOS AÑOS Y LA EXPERIENCIA QUE HA ADQUIRIDO A TRAVES DE OBSERVACIONES, EL CAMPESINO SE HA PERCATADO QUE LA PRODUCTIVIDAD DEL AÑO EN CURSO DEPENDE SOLO DE LA CONDICION DEL TERRENO EN EL AÑO ANTERIOR.

POR LO TANTO, PUEDE REPRESENTAR LAS PROBABILIDADES DE TRANSICION EN UN PERIODO DE UN AÑO DE UN ESTADO DE PRODUCTIVIDAD A OTRO EN TERMINOS DE UNA CADENA DE MARKOV.

		ESTADO DEL SISTEMA PARA EL AÑO PROXIMO.			
		1	2	3	
ESTADO DEL	1	0.2	0.5	0.3	
SISTEMA	2	0.0	0.5	0.5	=P1
ESTE AÑO	3	0.0	0.0	1.0	

DONDE:

PRODUCTIVIDAD (CONDICION DEL TERRENO)	ESTADO DEL SISTEMA
BUENA	1
REGULAR	2
MALA	3

LAS PROBABILIDADES DE TRANSICION EN P1, INDICAN QUE LA PRODUCTIVIDAD DE UN AÑO EN CURSO PUEDE NO SER MEJOR QUE LA DEL AÑO ANTERIOR. ES DECIR, SI OBSERVAMOS LA MATRIZ DE TRANSICION EN EL ESTADO 2, VEMOS QUE LA PRODUCTIVIDAD DEL AÑO SIGUIENTE PUEDE SEGUIR SIENDO REGULAR CON PROBABILIDAD DE 0.5, O VOLVERSE MALA CON PROBABILIDAD DE 0.5 TAMBIEN.

SIN EMBARGO, EL CAMPESINO PUEDE ALTERAR LAS PROBABILIDADES DE TRANSICION DE P1 TOMANDO OTROS CURSOS DE ACCION, ES DECIR, ALTERNATIVAS QUE TENGA A SU ALCANCE. COMO LA DE FERTILIZAR EL TERRENO PARA MEJORAR SU CONDICION DE SIEMBRA. SI EL CAMPESINO DECIDE FERTILIZAR EL TERRENO OBTENDRA LA SIGUIENTE MATRIZ DE TRANSICION P2:

$$P2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix} \end{array}$$

ADEMAS, EL CAMPESINO TIENE UN PARAMETRO QUE EXPRESA LAS GANANCIAS O PERDIDAS DURANTE UN PERIODO DE UN AÑO, DEPENDIENDO DE LOS ESTADOS ENTRE LOS QUE SE HAGA LA TRANSICION. COMO EL CAMPESINO TIENE LAS ALTERNATIVAS DE FERTILIZAR O NO FERTILIZAR EL TERRENO, SE ESPERA QUE SUS GANANCIAS O PERDIDAS VARIEN SEGUN LA DECISION QUE EL TOME.

LAS MATRICES R1 Y R2 RESUMEN LAS FUNCIONES DE RENDIMIENTO EN MILES DE PESOS ASOCIADAS CON LAS MATRICES DE TRANSICION P1 Y P2 RESPECTIVAMENTE. POR LO TANTO R1 SE APLICA CUANDO EL CAMPESINO DECIDE NO USAR FERTILIZANTE; EN CASO CONTRARIO SE UTILIZA R2 EN LA REPRESENTACION DE LA FUNCION DE RENDIMIENTO.

$$R1 = |r_{ij}^{1}| = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{array}{c}
\\ R2 = |rij| = \begin{array}{c} 1. \\ 2 \\ 3 \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{array}\right]
\end{array}
$$

SABEMOS QUE $V_i^k = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}^k r_{ij}^k$. DONDE i ES EL ESTADO DEL SISTEMA Y k LA ALTERNATIVA, ENTONCES:

$$V_1^1 = 0.2 \times 7 + 0.5 \times 6 + 0.3 \times 3 = 5.3$$

$$V_2^1 = 0 \times 0 + 0.5 \times 5 + 0.5 \times 1 = 3$$

$$V_3^1 = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times -1 = -1$$

LAS Vi PARA k=2 ;

$$V_1^2 = 0.3 \times 6 + 0.6 \times 5 + 0.1 \times -1 = 4.7$$

$$V_2^2 = 0.1 \times 7 + 0.6 \times 4 + 0.3 \times 0 = 3.1$$

$$V_3^2 = 0.05 \times 6 + 0.4 \times 3 + 0.55 \times -2 = 0.4$$

POR LO QUE RESUMIENDO TENEMOS:

i	V_i^1	V_i^2
1	5.3	4.7
2	3	3.1
3	-1	0.4

EL CAMPESINO PLANEA RETIRARSE DE SU TRABAJO AL CABO DE 3 AÑOS. POR LO QUE DESEA DETERMINAR SU CURSO DE ACCION PARA CADA AÑO (FERTILIZAR O NO FERTILIZAR) DE MANERA QUE MAXIMICE SUS INGRESOS.

RESOLVIENDO USANDO LA ECUACION RECURSIVA TENEMOS:

$$FN(i) = \max_{K}\{V_i^K\}$$

$$fn(i) = \max_{K}\{V_i^K + \sum_{j=1}^{m} P_{ij}^K fn+1(j)\}, \quad n=1,2,\ldots,N-1$$

ETAPA 3.

	V_i^K		SOLUCION OPTIMA	
i	k=1	k=2	f3(i)	k*
1	5.3	4.7	5.3	1
2	3.0	3.1	3.1	2
3	-1.0	0.4	0.4	2

ETAPA 2.

	$V_i^K + P_{i1}^K f3(1) + P_{i2}^K f3(2) + P_{i3}^K f3(3)$		SOLUCION OPTIMA	
i	k=1	k=2	f2(i)	K*
1	5.3+.2×5.3+.5×3.1+.3×.4 = 8.03	4.7+.3×5.3+.6×3.1+.1×.4 = 8.19	8.19	2
2	3+0×5.3+.5×3.1+.5×.4 =4.75	3.1+.1×5.3+.6×3.1+.3×.4 =5.61	5.61	2
3	-1+0×5.3+0×3.1+1×.4 =-.6	.4+.05×5.3+.4×3.1+.55×.4 =2.13	2.13	2

ETAPA 1.

	$V_i^k + P_{i1}^k f_2(1) + P_{i2}^k f_2(2) + P_{i3}^k f_2(3)$		SOLUCION OPTIMA	
i	k=1	k=2	f1(i)	k*
1	5.3+.2×8.19+.5×5.61+ .3×2.13 = 10.38	4.7+.3×8.19+.6×5.61+ .1×2.13 = 10.74	10.74	2
2	3+0×8.19+.5×5.61+ .5×2.13 = 6.87	3.1+.1×8.19+.6×5.61+ .3×2.13 = 7.92	7.92	2
3	-1+0×8.19+0×5.61+ 1×2.13 = 1.13	.4+.05×8.19+.4×5.61+ .55×2.13 = 4.23	4.23	2

LA SOLUCION OPTIMA INDICA QUE PARA LOS AÑOS 1 Y 2, EL CAMPESINO DEBE FERTILIZAR EL TERRENO (k*=2) SIN IMPORTAR EN QUE ESTADO ESTE EL TERRENO. SIN EMBARGO, EN EL AÑO 3, EL CAMPESINO SOLO DEBE FERTILIZAR SI EL TERRENO SE ENCUENTRA EN EL ESTADO 2 O 3, ES DECIR, SI LA CONDICION DEL TERRENO ES REGULAR O MALA.

LOS INGRESOS TOTALES ESPERADOS DE LOS TRES AÑOS SON f1(1) =10.74 SI EL ESTADO DEL TERRENO EN EL AÑO 1 ES BUENO, f1(2)=7.92 SI ES REGULAR Y f1(3)=4.23 SI EL ESTADO ES MALO.

MODELO DE PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA. ETAPA INFINITA.

PARA UN HORIZONTE DE PLANEACION NO ACOTADO, EL NUMERO DE PERIODOS RESTANTES NO SE ALTERA DE UN PERIODO A OTRO. POR LO QUE LA POLITICA OPTIMA YA NO DEPENDE DEL NUMERO DE PERIODOS RESTANTES, SINO QUE SE VUELVE EN FORMA UNICA UNA FUNCION DEL ESTADO DEL SISTEMA.

EXISTEN DOS METODOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE ETAPA INFINITA. EL PRIMER METODO CONSISTE EN LA ENUMERACION DE TODAS LAS POLITICAS ESTACIONARIAS POSIBLES DEL PROBLEMA DE DECISION. AL EVALUAR CADA POLITICA SE PUEDE DETERMINAR LA SOLUCION OPTIMA. ESTO ES BASICAMENTE EQUIVALENTE A UN PROCESO DE ENUMERACION EXHAUSTIVA Y SOLO SE PUEDE EMPLEAR SI EL NUMERO TOTAL DE POLITICAS ESTACIONARIAS ES RAZONABLEMENTE PEQUEÑO PARA REALIZAR OPERACIONES DE CALCULO PRACTICAS.

EL SEGUNDO METODO RECIBE EL NOMBRE DE ITERACION DE POLITICA, ESTE ALIGERA LAS DIFICULTADES DE CALCULO QUE PUDIERAN PRESENTARSE EN EL PROCEDIMIENTO DE ENUMERACION EXHAUSTIVA. ESTE METODO ES EFICIENTE EN GENERAL EN EL SENTIDO DE QUE DETERMINA LA POLITICA OPTIMA EN UN NUMERO PEQUEÑO DE ITERACIONES.

METODO DE ENUMERACION EXHAUSTIVA.

SUPONGAMOS QUE EL PROBLEMA DE DECISION TIENE UN TOTAL DE S POLITICAS ESTACIONARIAS Y QUE Ps Y Rs SON LAS MATRICES DE TRANSICION E INGRESO (DE UN PASO) ASOCIADAS CON LA k-ESIMA POLITICA s=1,2,...S. LOS PASOS DEL METODO DE ENUMERACION EXHAUSTIVA SON LOS SIGUIENTES:

1) CALCULE Vi^s EL INGRESO ESPERADO DE UN PASO (UN PERIODO) DE LA POLITICA s DADO EL ESTADO i, i=1,2,....m.

2) CALCULE q_i^s LAS PROBABILIDADES ESTACIONARIAS A LA LARGA DE LA MATRIZ DE TRANSICION P^s ASOCIADA CON LA POLITICA s. ESTAS PROBABILIDADES CUANDO EXISTEN, SE DETERMINAN A PARTIR DE LAS ECUACIONES:

$$q^s\ p^s = q^s$$

$$q1^s + q2^s + \ldots\ldots + qm^s = 1$$

DONDE:

$$q^s = (q1^s, q2^s, \ldots\ldots qm^s).$$

3) DETERMINE E : EL INGRESO ESPERADO DE LA POLITICA s POR PASO (PERIODO) DE TRANSICION, MEDIANTE LA SIGUIENTE FORMULA:

$$E^{s}=\sum_{i=1}^{m} qi^{s}Vi^{s}$$

4) LA POLITICA OPTIMA s* SE DETERMINA TAL QUE:

$$E^{s*}= \underset{s}{MAX}(E^{s})$$

PARA ILUSTRAR EL METODO RESOLVEREMOS EL MISMO PROBLEMA DEL CAMPESINO QUE OCUPAMOS EN LA SECCION DE LA PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA DE ETAPA FINITA, PERO AHORA PARA UN HORIZONTE DE PLANEACION NO ACOTADO.

TENEMOS QUE EL PROBLEMA DEL CAMPESINO TIENE UN TOTAL DE OCHO POLITICAS ESTACIONARIAS.

POLITICA ESTACIONARIA s	ACCION
1	NO FERTILIZAR EN ABSOLUTO.
2	FERTILIZAR INDEPENDIENTEMENTE DEL ESTADO.
3	FERTILIZAR SIEMPRE QUE EL TERRENO ESTE EN EL ESTADO 1.
4	FERTILIZAR SIEMPRE QUE EL TERRENO ESTE EN EL ESTADO 2.
5	FERTILIZAR SIEMPRE QUE EL TERRENO ESTE EN EL ESTADO 3.
6	FERTILIZAR SIEMPRE QUE EL TERRENO ESTE EN EL ESTADO 1 O 2.
7	FERTILIZAR SIEMPRE QUE EL TERRENO ESTE EN EL ESTADO 1 O 3.
8	FERTILIZAR SIEMPRE QUE EL TERRENO ESTE EN EL ESTADO 2 O 3.

TENEMOS DE NUESTRO EJEMPLO DE ETAPA FINITA LAS MATRICES DE TRANSICION Y DE RENDIMIENTO PARA LAS POLITICAS ESTACIONARIAS 1 Y 2. A PARTIR DE ESTAS PODEMOS DETERMINAR LAS MATRICES DE TRANSICION Y DE RENDIMENTO PARA LAS POLITICAS DE LA 3 A LA 8.

TENEMOS:

$$P1=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad R1=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P2=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix} \qquad R2=\begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P3=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad R3=\begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P4=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad R4=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P5=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix} \qquad R5=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P6 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad R6 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P7 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix} \qquad R7 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P8 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix} \qquad R8 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

CALCULAMOS LOS VALORES Vi^5 :

Vi^5

s	i=1	i=2	i=3
1	5.3	3.0	-1.0
2	4.7	3.1	0.4
3	4.7	3.0	-1.0
4	5.3	3.1	-1.0
5	5.3	3.0	0.4
6	4.7	3.1	-1.0
7	4.7	3.0	0.4
8	5.3	3.1	0.4

A CONTINUACION CALCULAREMOS LAS PROBABILIDADES ESTACIONARIAS A LA LARGA DE LA MATRIZ DE TRANSICION P^s ASOCIADA CON LA POLITICA s. ES DECIR LAS qi^s, MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

COMO EJEMPLO, CONSIDEREMOS LA MATRIZ DE TRANSICION DE LA POLITICA ESTACIONARIA 2, O SEA s=2.

LAS ECUACIONES ASOCIADAS CON LA MATRIZ DE TRANSICION DE LA POLITICA 2 SON LAS SIGUIENTES:

$0.3q1 + 0.1q2 + 0.05q3 = q1$

$0.6q1 + 0.6q2 + 0.4q3 = q2$

$0.1q1 + 0.3q2 + 0.55q3 = q3$

$q1 + q2 + q3 = 1$

RESOLVIENDO EL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES MEDIANTE OPERACIONES MATRICIALES TENEMOS:

MULTIPLICAMOS POR 100 EL SISTEMA DE ECUACIONES PARA TRABAJAR CON NUMEROS ENTEROS E IGUALAMOS A 0 LAS ECUACIONES:

$-70q1 + 10q2 + 5q3 = 0$

$60q1 - 40q2 + 40q3 = 0$

$10q1 + 30q2 - 45q3 = 0$

MULTIPLICAMOS EL RENGLON (3) POR -6 Y LO SUMAMOS AL RENGLON 2.

$-70q1 + 10q2 + 5q3 = 0$

$-220q2 + 310q3 = 0$

$10q1 + 30q2 - 45q3 = 0$

DIVIDIMOS EL RENGLON (2) ENTRE 10 Y LO SUMAMOS AL RENGLON (3), OBTENIENDO LO SIGUIENTE:

$-70q1 + 10q2 + 5q3 = 0$

$- 22q2 + 31q3 = 0$

$10q1 + 8q2 - 14q3 = 0$

DESPEJAMOS q2 DE LA ECUACION 2 Y TENEMOS, $q2 = 31/22q3$

DIVIDIMOS LA ECUACION (3) ENTRE 2 Y SUSTITUIMOS q2 EN LA ECUACION PARA OBTENER q1 EN TERMINOS DE q3.

LA ECUACION (3) QUEDA:

$5q1 + 4q2 - 7q3 = 0$

SUSTITUIMOS $q2 = 31/22q3$ Y TENEMOS:

$5q1 + 4(31/22q3) - 7q3 = 0$

$5q1 + 124/22q3 - 154/22q3 = 0$

$5q1 = 30/22q3$ ENTONCES $q1 = 3/11q3$.

SUSTITUIMOS q1 Y q2 EN LA ECUACION $q1 + q2 + q3 = 1$ Y TENEMOS:

$3/11q3 + 31/22q3 + q3 = 1.$

$(6/22 + 31/22 + 22/22)q3 = 1.$

$59/22q3 = 1$ DESPEJANDO q3 TENEMOS, $q3 = 22/59$.

SABEMOS QUE $q1 = 3/11q3$ POR LO QUE SUSTITUIMOS q3 PARA OBTENER EL VALOR DE q1, Y TENEMOS:

$q1 = (3/11)(22/59) = 66/649 = 6/59$

AHORA CALCULAMOS q2, SABEMOS QUE $q2 = 31/22q3$ ENTONCES:

$q2 = (31/22)(22/59) = 31/59$

POR LO QUE NUESTRAS PROBABILIDADES ESTACIONARIAS DE s = 2 SON:

$q1^2 = 6/59$ $q2^2 = 31/59$ $q3^2 = 22/59$

A CONTINUACION CALCULAREMOS EL INGRESO ANUAL ESPERADO PARA LA POLITICA ESTACIONARIA 2.

$$E2 = \sum_{i=1}^{3} qi^2 vi^2$$
$$= 1/59(6X4.7 + 31X3.1 + 22X0.4) = 2.256$$

DE LA MISMA FORMA EN QUE SE CALCULARON LAS PROBABILIDADES ESTACIONARIAS Y EL INGRESO ANUAL ESPERADO PARA s = 2, SE CALCULAN PARA LAS DEMAS POLITICAS. A CONTINUACION SE PRESENTA UNA TABLA QUE RESUME LAS q Y E PARA TODAS LAS POLITICAS ESTACIONARIAS.

s	$q1^{s}$	$q2^{s}$	$q3^{s}$	E^{s}
1	0	0	1	-1
2	6/59	31/59	22/59	2.256
3	0	0	1	-1
4	0	0	1	-1
5	5/154	69/154	80/154	1.724
6	0	0	1	-1
7	5/137	62/137	70/137	1.734
8	12/135	69/135	54/135	2.216

ANALIZANDO LA TABLA ANTERIOR, OBSERVAMOS QUE LA POLITICA 2 GENERA EL MAYOR INGRESO ANUAL ESPERADO, POR LO QUE, LA POLITICA OPTIMA DE LARGO ALCANCE RECOMIENDA QUE SE APLIQUE FERTILIZANTE SIN IMPORTAR EL ESTADO DEL SISTEMA.

CABE SEÑALAR QUE RESOLVIMOS UN PROBLEMA DE DECISION CON 8 POLITICAS ESTACIONARIAS PERO A MEDIDA QUE EL NUMERO DE POLITICAS AUMENTA, NO SOLO ES DIFICIL ENUMERAR TODAS LAS POLITICAS EN FORMA EXPLICITA, SINO QUE TAMBIEN EL NUMERO DE OPERACIONES IMPLICADAS EN LA EVALUACION DE ESTAS POLITICAS PUEDE SER PROHIBITIVAMENTE GRANDE.

METODO DE ITERACION DE POLITICA.

COMO PUDIMOS APRECIAR EL METODO DE ENUMERACION EXHAUSTIVA PRESENTA LAS DESVENTAJAS DE QUE NO SOLO ES DIFICIL ENUMERAR TODAS LAS POLITICAS ESTACIONARIAS EN FORMA EXPLICITA, SINO QUE EL NUMERO DE OPERACIONES IMPLICADAS EN LA EVALUACION DE ESTAS POLITICAS PUEDE TAMBIEN SER PROHIBITIVAMENTE GRANDE.

EL METODO DE ITERACION DE POLITICA ALIGERA LAS DIFICULTADES DE CALCULO QUE PUDIERAN PRESENTARSE EN EL PROCEDIMIENTO DE ENUMERACION EXHAUSTIVA. EL NUEVO METODO ES EFICIENTE EN GENERAL EN EL SENTIDO DE QUE DETERMINA LA POLITICA OPTIMA EN UN NUMERO PEQUEÑO DE ITERACIONES.

EL METODO DE ITERACION DE POLITICA ESTA BASADO PRINCIPALMENTE EN EL DESARROLLO SIGUIENTE.

COMO OBSERVAMOS EN LA SECCION ANTERIOR, NUESTRO OBJETIVO FINAL ES EL DE DETERMINAR LA POLITICA OPTIMA QUE GENERE EL VALOR MAXIMO DE E. SE UTILIZA UN ENFOQUE ITERATIVO QUE COMENZANDO CON UNA POLITICA ESTACIONARIA ARBITRARIA, DETERMINARA ENTONCES UNA NUEVA POLITICA QUE GENERE UN MEJOR VALOR DE E. EL PROCESO ITERATIVO TERMINA CUANDO DOS POLITICAS SUCESIVAS SON IDENTICAS.

EL PROCESO ITERATIVO CONSTA DE DOS COMPONENTES BASICAS LLAMADAS PASO DE DETERMINACION DE VALOR Y PASO DE MEJORA DE POLITICA.

1) DETERMINACION DEL VALOR. ELIJASE UNA POLITICA ARBITRARIA s. MEDIANTE EL USO DE SUS MATRICES ASOCIADAS Ps Y Rs, Y SUPONIENDO ARBITRARIAMENTE QUE $fs(m) = 0$, RESUELVANSE LAS ECUACIONES:

$$E^{s} = Vi^{s} + \sum_{j=1}^{m} Pij^{s} f^{s}(j) - f^{s}(i), \quad i=1,2,\ldots m \quad \ldots\ldots\ldots(1).$$

CON LAS INCOGNITAS E^{s}, $f^{s}(1)\ldots\ldots f^{s}(m-1)$. DIRIJASE AL PASO DE MEJORA DE POLITICA.

2) MEJORA DE POLITICA. PARA CADA ESTADO i, DETERMINESE LA ALTERNATIVA k QUE GENERE:

$$\max_{k} \left[Vi^{k} + \sum_{j=1}^{m} Pij^{k} f^{s}(j) \right], \quad i=1,2,\ldots\ldots m. \quad \ldots\ldots\ldots(2).$$

NOTA: (PARA PROFUNDIZAR SOBRE EL ORIGEN DE LAS ECUACIONES (1) Y (2), CONSULTAR EL LIBRO 2 SECCION 14.3.1 DE LA BIBLIOGRAFIA QUE SE PRESENTA AL FINAL DE ESTA TESIS).

LOS VALORES DE $f^s(j)$, $j=1,2,...m$, SON AQUELLOS QUE SE DETERMINAN EN EL PASO DE DETERMINACION DE VALOR. LAS DECISIONES OPTIMAS RESULTANTES k PARA LOS ESTADOS 1,2,...m CONSTITUYEN LA NUEVA POLITICA t. SI s Y t SON IDENTICOS, DETENGASE; t ES OPTIMO. EN CASO CONTRARIO, HAGASE s=t Y REGRESESE AL PASO DE DETERMINACION DE VALOR.

A CONTINUACION RESOLVEREMOS EL PROBLEMA DEL CAMPESINO QUE SE PRESENTO EN LA SECCION ANTERIOR PERO AHORA CON EL METODO DE ITERACION DE POLITICA.

COMENZAREMOS CON LA POLITICA ARBITRARIA QUE RECOMIENDA NO SE APLIQUE FERTILIZANTE. Y COMO SABEMOS SUS MATRICES ASOCIADAS SON:

$$P=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad R=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

APLICAMOS EL PASO DE DETERMINACION DE VALOR Y NOS DA EL SIGUIENTE SISTEMA DE ECUACIONES:

$$E + f(1) - 0.2f(1) - 0.5f(2) - 0.3f(3) = 5.3$$

$$E + f(2) - 0.5f(2) - 0.5f(3) = 3.0$$

$$E + f(3) - f(3) = -1.0$$

COMO OBSERVAMOS ES UN SISTEMA CON TRES ECUACIONES Y CUATRO INCOGNITAS. SI HACEMOS ARBITRARIAMENTE $f(3)=0$ TENEMOS:

EN LA ECUACION TRES, $E=-1.0$

SUSTITUIMOS EN LA ECUACION DOS Y NOS QUEDA:

$-1.0 + 0.5f(2) = 3.0$

$0.5f(2) = 4$ POR LO TANTO $f(2) = 8$

POR ULTIMO SUSTITUIMOS LOS VALORES DE E Y f(2) EN LA ECUACION UNO Y TENEMOS:

$-1.0 + 0.8f(1) - 4.0 = 5.3$

$0.8f(1) = 10.3$ ENTONCES $f(1) \cong 12.88$

ENTONCES TENEMOS LOS SIGUIENTES VALORES QUE GENERAN LA SOLUCION:

$E = -1, \quad f(1) = 12.88, \quad f(2) = 8, \quad f(3) = 0$

AHORA APLICAMOS EL PASO DE MEJORA DE POLITICA. LOS CALCULOS ASOCIADOS SE PRESENTAN EN LA SIGUIENTE TABLA:

	$V_i^k + P_{i1}^k f(1) + P_{i2}^k f(2) + P_{i3}^k f(3)$		SOLUCION OPTIMA	
i	k=1	k=2	f(i)	k*
1	5.3+0.2x12.88+0.5x8+0.3x0 =11.875	4.7+0.3x12.88+0.6x8+ 0.1x0 = 13.36	13.36	2
2	3+0x12.88+0.5x8+0.5x0 =7	3.1+0.1x12.88+0.6x8+ 0.1x0 = 9.19	9.19	2
3	-1+0x12.88+0x8+1x0 =-1	.4+.05x12.88+0.4x8+ 0.55x0 = 4.24	4.24	2

LA NUEVA POLITICA INDICA QUE SE APLIQUE FERTILIZANTE SIN IMPORTAR EL ESTADO. COMO LA NUEVA POLITICA DIFIERE DE LA ANTERIOR, SE VUELVE A INGRESAR EN EL PASO DE DETERMINACION DE VALOR. LAS MATRICES ASOCIADAS CON LA NUEVA POLITICA SON:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

ESTAS MATRICES GENERAN LAS SIGUIENTES ECUACIONES:

$$E + f(1) - 0.3f(1) - 0.6f(2) - 0.1f(3) = 4.7$$

$$E + f(2) - 0.1f(1) - 0.6f(2) - 0.3f(3) = 3.1$$

$$E + f(3) - 0.05f(1) - 0.4f(2) - 0.55f(3) = 0.4$$

OTRA VEZ HACIENDO QUE $f(3)=0$, OBTENEMOS:

$E=2.26$, $f(1)=6.75$, $f(2)=3.79$, $f(3)=0$.

LOS CALCULOS DEL PASO DE MEJORA DE POLITICA SE DAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

	$V_i^k + P_{i1}^k f(1) + P_{i2}^k f(2) + P_{i3}^k f(3)$		SOLUCION OPTIMA	
i	k=1	k=2	f(i)	k*
1	5.3+.2×6.75+.5×3.79+.3×0 =8.54	4.7+.3×6.75+.6×3.79+.1×0 =8.99	8.99	2
2	3+0×6.75+.5×3.79+.5×0 =4.89	3.1+.1×6.75+.6×3.79+.3×0 =6.05	6.05	2
3	-1+0×6.75+0×3.79+1×0 =-1	.4+.05×6.75+.4×3.79+.55×0 =2.25	2.25	2

LA NUEVA POLITICA QUE RECOMIENDA SE APLIQUE FERTILIZANTE SIN IMPORTAR EL ESTADO, ES IDENTICA A LA ANTERIOR. POR LO TANTO, LA ULTIMA POLITICA ES OPTIMA Y TERMINA EL PROCESO ITERATIVO. NATURALMENTE, ESTA ES LA MISMA CONCLUSION QUE SE OBTUVO A TRAVES DEL METODO DE ENUMERACION EXHAUSTIVA. SIN EMBARGO, PODEMOS OBSERVAR QUE EL METODO DE ITERACION DE POLITICA CONVERGE RAPIDAMENTE A LA POLITICA OPTIMA. NOTESE QUE EL VALOR DE E AUMENTO DE -1 EN LA PRIMERA ITERACION A 2.26 EN LA SEGUNDA. EL ULTIMO VALOR ES IGUAL AL QUE SE OBTUVO PARA LA POLITICA OPTIMA EN EL METODO DE ENUMERACION EXHAUSTIVA.

APENDICE.

APENDICE.

PROBABILIDAD.

EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD ES NECESARIO CUANDO SE OPERA CON FENOMENOS FISICOS, BIOLOGICOS Y SOCIALES QUE GENERAN OBSERVACIONES QUE NO ES FACTIBLE PREDECIR CON EXACTITUD. LOS EVENTOS QUE POSEEN ESTA PROPIEDAD SE DENOMINAN EVENTOS ALEATORIOS O ESTOCASTICOS.
AUNQUE TALES SUCESOS O EVENTOS ALEATORIOS NO SE PUEDEN PREDECIR CON EXACTITUD LA FRECUENCIA RELATIVA CON LA CUAL OCURREN EN UNA GRAN SERIE DE OBSERVACIONES ES A MENUDO ESTABLE. ESTA FRECUENCIA RELATIVA ESTABLE NOS DA UNA MEDIDA INTUITIVA PERO SIGNIFICATIVA DE LA POSIBILIDAD DE OCURRENCIA DE UN EVENTO ALEATORIO EN UNA OBSERVACION FUTURA.

DEFINICIONES BASICAS.

ESPACIO MUESTRAL.

EL ESPACIO MUESTRAL DE UN FENOMENO ALEATORIO, ES EL ESPACIO DE REPRESENTACIONES DE TODOS LOS RESULTADOS POSIBLES DEL FENOMENO. SE DICE QUE OCURRE UN SUCESO E, SI Y SOLO SI, EL RESULTADO OBSERVADO DEL FENOMENO ALEATORIO TIENE UNA REPRESENTACION MUESTRAL EN S.

SE DICE QUE UN ESPACIO MUESTRAL ES DISCRETO CUANDO ESTA INTEGRADO POR UN NUMERO FINITO O INFINITO NUMERABLE DE ELEMENTOS.UN EJEMPLO DE ESTE TIPO DE ESPACIO MUESTRAL ES CUANDO ENTREVISTAMOS A 10 AGRICULTORES PREGUNTANDOLES SI UTILIZAN POTASIO EN SU FERTILIZACION. SE REPORTA EL NUMERO DE ELLOS QUE SI USAN POTASIO. LOS RESULTADOS POSIBLES QUE INTEGRAN EL ESPACIO MUESTRAL SON:

$$S = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$$

SE DICE QUE UN ESPACIO MUESTRAL ES CONTINUO CUANDO CONTIENE A TODOS LOS ELEMENTOS EN UNO O VARIOS SEGMENTOS DE LA LINEA REAL. UN EJEMPLO DE ESTE TIPO DE ESPACIO MUESTRAL ESTARIA DADO POR EL EXPERIMENTO DE TOMAR UN LITRO DE LECHE Y DETERMINAR EN EL LABORATORIO EL PORCENTAJE DE AGUA POR VOLUMEN. EL ESPACIO MUESTRAL EN ESTE CASO ES:

$$S = (x/0 < x < 100)$$

DONDE x ES EL PORCENTAJE DE AGUA EN EL LITRO DE LECHE EXAMINADO.

EVENTO

ES UN SUBCONJUNTO DE UN ESPACIO MUESTRAL

PARTICION DE UN ESPACIO MUESTRAL.

SEAN A1,A2,...An, n EVENTOS (SUBCONJUNTOS) DE UN ESPACIO MUESTRAL S. SI $A_i \cap A_j = \emptyset$ PARA CUALQUIER PAR DE EVENTOS Y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$, DIREMOS QUE LOS EVENTOS A1,A2,.....An FORMAN UNA PARTICION DEL ESPACIO MUESTRAL S.

LAS SIGUIENTES PROPIEDADES DEBEN CUMPLIRSE EN CUALQUIER ESPACIO MUESTRAL:

SEA S UN ESPACIO MUESTRAL:

1) $0 \leq P(B) \leq 1$, PARA CUALQUIER $B \subset S$.

2) $P(S) = 1$.

3) SI A1,A2,....ETC. SON EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES EN S, ENTONCES:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

ESTO NOS IMPLICA POR EJEMPLO:

PROBABILIDAD DE LA UNION DE DOS EVENTOS.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

SI A Y B SON MUTUAMENTE EXCLUYENTES, ES DECIR, $A \cap B = \emptyset$ ENTONCES:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

SEA A UN EVENTO DE UN ESPACIO MUESTRAL S. LA PROBABILIDAD DEL CONJUNTO COMPLEMENTO DE A ES:

$P(A^c) = 1 - P(A)$.

PROBABILIDAD CONDICIONAL.

SEAN A Y B DOS EVENTOS CUALESQUIERA ASOCIADOS CON UN ESPACIO MUESTRAL, CON LA UNICA CONDICION DE QUE $P(B) \neq 0$.

ENTONCES LA PROBABILIDAD CONDICIONAL DE A DADO B, $P(A/B)$ ESTA DADA POR:

$P(A / B) = P(AB) / P(B)$.

VARIABLES ALEATORIAS.

UNA VARIABLE ALEATORIA ES UNA FUNCION QUE A CADA RESULTADO POSIBLE DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO LE ASOCIA UN NUMERO REAL. DE TAL FORMA QUE $\{ w;\ X(w) \leq c \}$ SEA UN EVENTO.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

ES AQUELLA QUE PUEDE TOMAR CUANDO MAS UN NUMERO INFINITO NUMERABLE DE VALORES.

FUNCION DE PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

ES EL CONJUNTO DE PARES ORDENADOS $[x,\ FX(x) = P(X=x)]$, DONDE x ES CADA UNO DE LOS VALORES QUE PUEDE TOMAR LA VARIABLE ALEATORIA X, Y FX(x) LA PROBABILIDAD ASOCIADA CON EL VALOR PARTICULAR x.
COMO EL CASO ES EL DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA, LOS VALORES POSIBLES DE X TIENEN CORRESPONDENCIA CON UNA PARTICION DEL ESPACIO MUESTRAL, ES CLARO QUE DEBEN CUMPLIRSE LAS SIGUIENTES PROPIEDADES PARA FX(x).

1) $FX(x) \geq 0$ PARA TODO VALOR x DE X.

2) $\sum FX(x) = 1.$

DONDE LA SUMA ES PARA TODOS LOS VALORES x QUE PUEDE TOMAR LA VARIABLE ALEATORIA X.

ESPERANZA.

SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA CON FUNCION DE PROBABILIDAD FX(x), EL VALOR ESPERADO ESTA DADO POR:

$$E(X) = \sum_{x} xFX(x).$$

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.

ES AQUELLA QUE PUEDE TOMAR CUALQUIER VALOR EN UN INTERVALO DADO. Y TAL QUE $F'(x) = f(x)$.

FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.

LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA X SE DENOTA FX(x) Y TIENE LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

1) LA CURVA SIEMPRE SE ENCUENTRA SOBRE EL EJE DE LAS ABCISAS, ES DECIR, $FX(x) \geq 0$.

2) EL AREA TOTAL BAJO FX(x) ES 1.

3) EL AREA DELIMITADA POR DOS LINEAS VERTICALES LEVANTADAS SOBRE LOS PUNTOS a Y b DONDE $a < b$ Y LA CURVA, ES LA PROBABILIDAD DE QUE X TOME UN VALOR ENTRE a Y b.

DE LO ANTERIOR PODEMOS DECIR QUE PARA UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, LA PROBABILIDAD ASOCIADA A UN PUNTO CUALQUIERA ES CERO, O SEA, $P(X=k)=0$, PARA CUALQUIER VALOR k DE LA VARIABLE ALEATORIA. ESTO SE ENTIENDE SI PARTIMOS DE QUE LAS PROBABILIDADES SON AREAS BAJO LA CURVA Y EL AREA DE UNA LINEA (QUE CORRESPONDERIA A LA PROBABILIDAD DE UN PUNTO) ES CERO. CONSECUENTEMENTE ; SI X ES CONTINUA:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$$

ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.

SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA CON FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD FX(x) SE DEFINE EL VALOR ESPERADO COMO:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xFx(x)\, dx$$

FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULATIVA DE PROBABILIDADES.

LA FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULATIVA DE PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA X (DISCRETA O CONTINUA) SE DENOTARA POR FX(x), Y SE DEFINE COMO:

$$FX(x) = P(X \leq x).$$

ES CLARO QUE, EN EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA EL VALOR DE FX(x) PARA UN VALOR DADO DE x DE LA VARIABLE X SE OBTENDRA SUMANDO LOS VALORES FX(x) PARA TODOS LOS VALORES POSIBLES DE X MENORES O IGUALES DE x, Y EN EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA REALIZANDO LA INTEGRACION DE FX(x) PARA ESOS VALORES.

FUNCION DE DISTRIBUCION CONJUNTA.

SEAN $X1, X2, X3, \ldots Xn$ VARIABLES ALEATORIAS. ENTONCES A LA FUNCION $F(x1, x2, \ldots . xn) = P(X1 \leq x1,\ X2 \leq x2, \ldots Xn \leq xn)$ SE LE LLAMA FUNCION DE DISTRIBUCION CONJUNTA DE LAS VARIABLES $X1, X2, \ldots . Xn$.

FUNCION DE DISTRIBUCION MARGINAL.

A LA FUNCION $Fi(xi) = P(Xi \leq xi)$ SE LE LLAMA FUNCION DE DISTRIBUCION MARGINAL DE LA VARIABLE $i \in [1, 2, \ldots n]$.

VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES.

SEAN $X1, X2, \ldots Xn$ VARIABLES ALEATORIAS. ENTONCES DECIMOS QUE SON INDEPENDIENTES SI $F(x1, x2, \ldots xn) = F1(x1)F2(x2) \ldots . Fn(xn)$.

SEAN $[Xi : i \in I]$ UNA FAMILIA DE VARIABLES ALEATORIAS. ENTONCES DECIMOS QUE SON INDEPENDIENTES SI PARA CUALESQUIERA $i1, i2, \ldots . in$ LAS VARIABLES ALEATORIAS $Xi1, Xi2, \ldots . Xin$ SON INDEPENDIENTES.

PROCESOS ESTOCASTICOS.

CONSIDERE LOS PUNTOS DISCRETOS EN EL TIEMPO (Tk) PARA k= 1,2,..... Y SEA £Tk LA VARIABLE ALEATORIA QUE CARACTERIZA EL ESTADO DEL SISTEMA EN Tk. LA FAMILIA DE VARIABLES ALEATORIAS £Tk FORMA UN PROCESO ESTOCASTICO. LOS ESTADOS EN EL TIEMPO Tk REPRESENTAN LOS RESULTADOS (EXHAUSTIVOS Y MUTUAMENTE EXCLUYENTES) DEL SISTEMA EN ESE TIEMPO. EL NUMERO DE ESTADOS POR CONSIGUIENTE PUEDE SER FINITO O INFINITO.
UN EJEMPLO ESTA REPRESENTADO POR EL JUEGO DEL TIRO DE UNA MONEDA CON k ENSAYOS. CADA ENSAYO PUEDE VERSE COMO UN PUNTO EN EL TIEMPO. LA SECUENCIA RESULTANTE DE ENSAYOS FORMA UN PROCESO ESTOCASTICO. EL ESTADO DEL SISTEMA DE CUALQUIER ENSAYO ESTA REPRESENTADO POR AGUILA O SOL.

PROCESOS DE MARKOV.

UN PROCESO DE MARKOV ES UN SISTEMA ESTOCASTICO PARA EL CUAL LA OCURRENCIA DE UN ESTADO FUTURO DEPENDE DEL ESTADO INMEDIATAMENTE ANTERIOR Y UNICAMENTE DE EL. POR CONSIGUIENTE, SI T0 < T1 < ..... < Tn (n=0,1,2,....) REPRESENTAN PUNTOS EN EL TIEMPO, LA FAMILIA DE VARIABLES ALEATORIAS (£Tn) ES UN PROCESO DE MARKOV SI POSEE LA PROPIEDAD MARKOVIANA SIGUIENTE:

P[£Tn=Xn / £Tn-1=Xn-1,....,£T0=X0] = P[£Tn=Xn / £Tn-1=Xn-1]

PARA TODOS LOS VALORES POSIBLES DE £T0,£T1,....,£Tn

LA PROBABILIDAD Pxn-1,xn = P[£Tn=Xn /£Tn-1=Xn-1], SE CONOCE COMO LA PROBABILIDAD DE TRANSICION. REPRESENTA LA PROBABILIDAD CONDICIONAL DE QUE EL SISTEMA ESTE EN Xn EN Tn DADO QUE ESTUVO EN Xn-1 EN Tn-1. ESTA PROBABILIDAD TAMBIEN SE CONOCE COMO LA PROBABILIDAD DE TRANSICION DE UN PASO YA QUE DESCRIBE AL SISTEMA ENTRE Tn-1 Y Tn. UNA PROBABILIDAD DE TRANSICION DE m PASOS, POR CONSIGUIENTE SE DEFINE POR:

Pxn,xn+m = P[£Tn+m =Xn+m / £Tn = Xn]

CADENAS DE MARKOV.

SEAN E1,E2,....,Ej (j=0,1,2,...) LOS RESULTADOS (ESTADOS) EXHAUSTIVOS Y MUTUAMENTE EXCLUYENTES DE UN SISTEMA EN CUALQUIER TIEMPO. INICIALMENTE, EN EL TIEMPO To EL SISTEMA PUEDE ESTAR EN CUALQUIERA DE ESTOS ESTADOS. SEA aj(o) (j=0,1,2,...) LA PROBABILIDAD ABSOLUTA DE QUE EL SISTEMA ESTE EN EL ESTADO Ej EN To. SUPONGA ADEMAS, QUE EL SISTEMA ES MARKOVIANO.
DEFINASE A:

Pij = P[£Tn = j / £Tn-1 = i]

COMO LA PROBABILIDAD DE TRANSICION DE UN PASO DE IR DEL ESTADO i EN Tn-1 AL ESTADO j EN Tn, Y SUPONGA QUE ESTAS PROBABILIDADES SON ESTACIONARIAS EN EL

TIEMPO. POR CONSIGUIENTE, LAS PROBABILIDADES DE TRANSICION DEL ESTADO Ei AL Ej PUEDEN DISPONERSE DE MANERA MAS CONVENIENTE EN FORMA MATRICIAL COMO SIGUE:

$$P = \begin{bmatrix} P00 & P01 & P02 & P03 & \cdots \\ P10 & P11 & P12 & P13 & \cdots \\ P20 & P21 & P22 & P23 & \cdots \\ P30 & P31 & P32 & P33 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

LA MATRIZ P SE CONOCE COMO MATRIZ DE TRANSICION. LAS PROBABILIDADES Pij SE CONSIDERAN ESTACIONARIAS ES DECIR, QUE NO CAMBIAN EN EL TIEMPO. DE RELAJARSE ESTA CONDICION, SE TENDRIAN PROBABILIDADES DE TRANSICION DEPENDIENTES DEL PARAMETRO TIEMPO, LO CUAL COMPLICARIA EL ANALISIS. LAS PROBABILIDADES Pij DEBEN SATISFACER LAS CONDICIONES:

1) $\sum_{j}$ Pij = 1 PARA TODA i

2) Pij $\geq$ 0, PARA TODA i Y TODA j.

LA DEFINICION DE UNA CADENA DE MARKOV PUEDE DARSE AHORA. UNA MATRIZ DE TRANSICION P JUNTO CON LAS PROBABILIDADES INICIALES aj(o) ASOCIADAS A LOS ESTADO Ej DEFINEN COMPLETAMENTE A UNA CADENA DE MARKOV.

CADENA DE MARKOV IRREDUCIBLE.

UNA CADENA DE MARKOV SE DICE QUE ES IRREDUCIBLE SI CADA ESTADO Ej PUEDE ALCANZARSE A PARTIR DE OTRO ESTADO Ei DESPUES DE UN NUMERO FINITO DE TRANSICIONES: ESTO ES, PARA i = j.

$$Pij(n) > 0, \quad \text{PARA } 1 \leq n < \infty$$

EN ESTE CASO, TODOS LOS ESTADOS DE LA CADENA SE COMUNICAN.

CADENA ABSORBENTE.

PARA QUEDAR CLASIFICADA COMO UNA CADENA DE MARKOV ABSORBENTE UN SISTEMA DEBE CUMPLIR DOS REQUISITOS: DEBE TENER UN ESTADO ABSORBENTE Y DEBE PODER ALCANZAR ESE ESTADO. ES DECIR EL SISTEMA SE BLOQUEA EN UN ESTADO Y NUNCA SE MUEVE DE AHI, DE HECHO EL ESTADO ABSORBE A LA CADENA.
LAS CADENAS ABSORBENTES PUEDEN OBSERVARSE FACILMENTE EN LA MATRIZ DE TRANSICION PORQUE UN ESTADO ABSORBENTE TIENE UNA PROBABILIDAD DE TRANSICION HACIA SI MISMO DE 1 Y DE 0 HACIA TODOS LOS DEMAS ESTADOS, ES DECIR $P_{jj} = 1$. SI EL SISTEMA TIENE SOLO UN ESTADO ABSORBENTE, SE SABE QUE FINALMENTE EL SISTEMA SE ENCERRARA EN ESE ESTADO.

CADENA CICLICA.

OCURRE CUANDO EL SISTEMA ENTRA EN UN CICLO ENTRE CIERTOS ESTADOS SIGUIENDO UN PATRON FIJO. CUANDO ESTO OCURRE LA CADENA SE CONVIERTE EN DETERMINISTA EN LUGAR DE PROBABILISTICA O ESTOCASTICA. EL PATRON DEBE SER UNA TRAYECTORIA CERRADA ENTRE LOS ESTADOS DEL CICLO Y NO PUEDE INCLUIR NINGUN ESTADO QUE NO ESTE EN EL. SUPONGAMOS LA SIGUIENTE MATRIZ DE TRANSICION:

$$\begin{array}{cc} & \text{A} \\ & \begin{array}{ccc} S1 & S2 & S3 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{DE: } S1 \\ S2 \\ S3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{array}\right] \end{array}$$

EN LA MATRIZ DE TRANSICION PUEDE OBSERVARSE QUE S2 SIEMPRE SE MUEVE A S3 Y QUE S3 SIEMPRE VA A S2.

TIEMPOS DE PRIMER REGRESO.

UNA DEFINICION IMPORTANTE EN LA TEORIA DE CADENAS DE MARKOV ES EL TIEMPO DE PRIMER REGRESO. DADO QUE EL SISTEMA ESTA INICIALMENTE EN EL ESTADO E_j , PUEDE REGRESAR A E_j POR PRIMERA VEZ EN EL n-ESIMO PASO, $n \geq 1$. EL NUMERO DE PASOS ANTES DE QUE EL SISTEMA REGRESE A E_j SE LLAMA TIEMPO DE PRIMER REGRESO.

SEA $F_{jj}(n)$ LA PROBABILIDAD DE QUE EL PRIMER REGRESO OCURRA EN EL E_j n-ESIMO PASO. ENTONCES DADA LA MATRIZ DE TRANSICION:

$$P = \| P_{ij} \|$$

PUEDE DETERMINARSE UNA EXPRESION PARA $F_{jj}(n)$ COMO SIGUE:

$$P_{jj} = F_{jj}(1)$$

$$P_{jj}(2) = F_{jj}(2) + F_{jj}(1)P_{jj}$$

O BIEN,

$$F_{jj}(2) = P_{jj}(2) - F_{jj}(1)P_{jj}$$

EN GENERAL,

$$F_{jj}(n) = P_{jj}(n) - \sum_{m=1}^{n-1} F_{jj}(m)P_{jj}(n-m)$$

LA PROBABILIDAD DE AL MENOS UN REGRESO AL ESTADO E_j SE DA ENTONCES COMO:

$$F_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{jj}(n)$$

ENTONCES EL SISTEMA TIENE LA CERTEZA DE REGRESAR A j SI $F_{jj}=1$. EN ESTE CASO SI U_{jj} DEFINE EL TIEMPO MEDIO DE REGRESO,

$$U_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} nF_{jj}(n)$$

SI $F_{jj} < 1$, NO ES SEGURO QUE EL SISTEMA REGRESARA A E_j Y CONSECUENTEMENTE $U_{jj} = \infty$.

CLASIFICACION DE ESTADOS.

LOS ESTADOS DE UNA CADENA DE MARKOV PUEDEN CLASIFICARSE CON BASE EN LA DEFINICION DEL TIEMPO DE PRIMER REGRESO COMO SIGUE:

1) UN ESTADO ES TRANSITORIO SI $F_{jj} < 1$; ESTO ES, $U_{jj} = \infty$.

2) UN ESTADO ES RECURRENTE SI $F_{jj} = 1$.

3) UN ESTADO RECURRENTE ES NULO SI $U_{jj} = \infty$ Y NO NULO SI $U_{jj} < \infty$ (FINITO).

4) UN ESTADO ES PERIODICO CON PERIODO t SI ES POSIBLE UN REGRESO UNICAMENTE EN t,2t,3t,....PASOS. ESTO SIGNIFICA QUE $P_{jj}(n) = 0$ TODA VEZ QUE n NO ES DIVISIBLE ENTRE t.

5) UN ESTADO RECURRENTE ES ERGODICO SI ES NO NULO Y APERIODICO (NO PERIODICO).

DISTRIBUCION LIMITE DE CADENAS IRREDUCIBLES.

EN UNA CADENA DE MARKOV APERIODICA IRREDUCIBLE, 1) SI TODOS LOS ESTADOS SON TRANSITORIOS O TODOS NULOS ENTONCES $Pij(n) \rightarrow 0$ CUANDO $n \rightarrow \infty$ PARA TODA i Y TODA j, Y NO EXISTE DISTRIBUCION LIMITE. 2) SI TODOS LOS ESTADOS SON ERGODICOS ENTONCES:

$$\underset{n \to \infty}{\text{LIMITE}}\ aj(n) = Bj, \quad j=0,1,2,3,\ldots.$$

DONDE Bj ES LA DISTRIBUCION LIMITE (ESTADO ESTABLE). LAS PROBABILIDADES Bj EXISTEN DE MANERA UNICA Y SON INDEPENDIENTES DE aj(o). EN ESTE CASO Bj PUEDE DETERMINARSE DEL CONJUNTO DE ECUACIONES:

$$Bj = \sum_{i} BiPij$$

$$1 = \sum_{j} Bj$$

EL TIEMPO MEDIO DE RECURRENCIA PARA EL ESTADO j ESTA DADO ENTONCES COMO:

$$Ujj = 1/Bj$$

CONSIDEREMOS LA SIGUIENTE CADENA DE MARKOV CON DOS ESTADOS;

$$P= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

PARA DETERMINAR SU DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE ESTADO ESTABLE, SE TIENE:

$$B1 = 0.2B1 + 0.6B2$$

$$B2 = 0.8B1 + 0.4B2$$

$$1 = B1 + B2$$

LA SOLUCION PROPORCIONA B1 = 0.4286 Y B2 = 0.5714

ENTONCES $U11 = 1/B1 = 2.3$

$U22 = 1/B2 = 1.75$

DE TAL MANERA QUE EL TIEMPO MEDIO RECURRENTE PARA EL PRIMERO Y SEGUNDO ESTADOS ES 2.3 Y 1.75 PASOS RESPECTIVAMENTE.

BIBLIOGRAFIA.

BIBLIOGRAFIA.

1) FUNDAMENTOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES.
ACKOFF L. RUSSELL.
SASIENI W. MAURICE.
EDITORIAL LIMUSA.

2) INVESTIGACION DE OPERACIONES.
HAMDY A. TAHA.
EDITORIAL ALFA OMEGA.

3) METODOS Y MODELOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES. (VOL. 1 Y 2).
PRAWDA JUAN.
EDITORIAL LIMUSA.

4) INTRODUCCION A LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.
HILLIER FREDERICK.
LIEBERMAN J. GERALD.
EDITORIAL McGRAW-HILL.

5) INTRODUCCION A TECNICAS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES.
DAELLENBACH G. HANS.
GEORGE A. JOHN.
EDITORIAL C.E.C.S.A.

6) INTRODUCCION A LA TEORIA DE PROBABILIDADES E INFERENCIA ESTADISTICA.
LARSON J. HAROLD.
EDITORIAL LIMUSA.

7) METODOS ESTADISTICOS.
INFANTE GIL SAID.
ZARATE DE LARA GUILLERMO.
EDITORIAL TRILLAS.

8) TOMA DE DECISIONES POR MEDIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES.
THIERAUF, ROBERT J.
EDITORIAL LIMUSA.

9) LA PROGRAMACION DINAMICA.
KAUFMANN A.
CRUON R.
EDITORIAL C.E.C.S.A.

10) METODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN ADMINISTRACION.
GALLAGER A. CHARLES.
HUGH J. WATSON.
EDITORIAL LIMUSA.