

01163



DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

METODO DEL ELEMENTO FINITO ESTOCASTICO
EN GEOTECNIA
ANALISIS NO LINEAL

SANDRA GRACIELA ORLANDI MOROZ

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISION DE
ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA
(MECANICA DE SUELOS)

DIRECTOR DE TESIS: DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD

CIUDAD UNIVERSITARIA
JUNIO, 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Osvaldo Román Laskowski, mi esposo, quien día a día dá todo por mí...y por quien doy todo...

...horas, meses, años, tiempo,
...tristezas, lágrimas, ausencias, silencio.
Todo ha pasado, todo es recuerdo
vuelvo a mi tierra, allá muy lejos.
Mi corazón hoy late, voy a tu encuentro
mi esposo querido, mi compañero...

Largos inviernos de la Patagonia
tristes y solitarios días en México,
pasaron dos años que fueron eternos
pero estamos juntos y así seguiremos...
porque el amor lo puede todo,
porque juntos podemos...
porque estás a mi lado aunque estemos lejos...
y la vida hoy empieza porque a tu lado vuelvo
juntos lo logramos, juntos hoy de nuevo...

Junio de 1996

A...

...mi familia con quien siempre cuento y que tanto quiero: mamá, papá, Marcelo, Guillermo, Andrea, Pedro, y de quienes he aprendido el valor del estudio y del trabajo arduo;

...mi segunda familia Teresa, Cacho, Ricardo;

...mis amores chiquitos Leo y Cami, y su mamá Nelly;

...toda esa gente que creyó en mí más que yo misma, y por que nó, a esa otra que jamás creyó en mí...

...mis amigos de la comunidad latinoamericana: Ernesto (Chiapas), René (Venezuela), Clara (Colombia), Celestino (Tixla), Fredy (Venezuela), quienes compartieron conmigo horas de risas, lágrimas, sueños, alegrías y enojos; quienes siempre estarán en mi corazón y en mi mente por su presencia en horas difíciles y por su amistad incondicional;

...mis dos más grandes profes, el Dr. Gabriel Auvinet y el Dr. Efraín Ovando, que logran sacar de cada uno lo mejor... y a veces lo peor...

...a mi lejana Universidad Nacional de la Patagonia, por estos dos años de apoyo incondicional.

Junio de 1996

Gracias...

...al Dr. Gabriel Auvinet, por las toneladas de paciencia y buen humor con que me dió ánimos en cada una de las setenta y siete depresiones de los últimos cinco meses.

ÍNDICE

MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO ESTOCÁSTICO. ANÁLISIS NO LINEAL

Índice.	i
Introducción.	ii
1- Descripción probabilista de los medios geotécnicos.	1
1.1- Estadística y bancos de datos.	1
1.2- Nociones de probabilidad.	2
1.2.1- Distribuciones discretas de probabilidad.	3
1.2.2- Distribuciones continuas de probabilidad.	4
1.2.3- Distribuciones de probabilidad multivariantes.	5
1.2.4- Campos aleatorios.	8
1.3- Aplicación a medios geotécnicos.	10
2- Método de los elementos finitos estocásticos.	11
2.1- Bases del MEF lineal y no lineal.	11
2.1.1- Método del elemento finito lineal.	11
2.1.1.1- Principio general del método de los residuos ponderados.	11
2.1.1.2- Aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales.	12
2.1.1.3- Aplicación al análisis de esfuerzos y deformaciones en medios continuos.	16
2.1.2- Método del elemento finito no lineal.	21
2.1.2.1- Método de Newton Raphson.	21
2.1.2.2- Método de Newton Raphson modificado.	23
2.1.2.3- Método incremental de secantes de cuasi Newton.	23
2.1.2.4- Consideraciones generales sobre los métodos incrementales y aplicación.	24
2.2- Análisis de Incertidumbre.	25
2.2.1- Método de Monte Carlo.	25
2.2.2- Análisis de Incertidumbre de segundos momentos-primer orden.	26
2.2.3- Método de las perturbaciones.	31
2.2.4- Método de los cocientes polinomiales.	34
2.3- Algoritmos para aplicación de segundos momentos en elasticidad lineal.	37
2.3.1- Programas MEFISTO y RAPOL.	37
2.3.2- Aplicación a un sólido elemental.	38
2.3.3- Problema típico de mecánica de suelos.	42
3- Aplicación al análisis de deformaciones en terrapienes.	44
3.1- Análisis no lineal de esfuerzos y deformaciones en terrapienes.	44
3.2- Implementación del análisis de incertidumbre.	47
3.3- Características principales en cuanto a la ejecución del programa.	52
3.4- Ejemplos de aplicación.	54
3.4.1- Primer ejemplo.	54
3.4.2- Presa El Infiernillo.	64
3.4.2.1- Introducción.	64
3.4.2.2- Construcción.	66
3.4.2.3- Comportamiento.	66
3.4.2.4- Propiedades de los materiales.	66
3.4.2.5- Discretización por medio de elementos finitos.	68
3.4.2.6- Análisis de resultados.	71
Conclusiones.	77
Bibliografía.	79

INTRODUCCIÓN

La amplia difusión que ha tenido el empleo del método del elemento finito en todas las ramas de la Ingeniería no ha sido indiferente a la mecánica de suelos ni a la mecánica de rocas. El método se ha vuelto una herramienta común para el análisis de problemas geotécnicos.

Es necesario reconocer sin embargo que generalmente los resultados obtenidos no son totalmente confiables debido principalmente a las incertidumbres que afectan los parámetros del modelo constitutivo con el que se representa el comportamiento de los materiales. Estas incertidumbres pueden tener su origen en la falta de información sobre dichos parámetros, a la variación espacial de los mismos y en las imprecisiones en las que se incurre en las pruebas de campo y de laboratorio.

La incertidumbre en las propiedades de los materiales se refleja directamente en los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos calculados. De ahí el interés que presenta para los ingenieros geotécnicos el poder contar con una metodología que permita evaluar la incertidumbre sobre los resultados a partir de la incertidumbre sobre las propiedades de los materiales, es decir con el método del elemento finito "estocástico".

En la presente tesis, se desarrolla una metodología simplificada que permite precisamente alcanzar el objetivo anterior.

Se recurre a una técnica de segundos momentos-primer orden. Es decir que para describir la incertidumbre sobre los parámetros, se usa exclusivamente su valor medio, su desviación estándar, y una matriz de coeficientes de correlación entre los parámetros de todos los materiales considerados. Cada uno de los anteriores elementos mencionados influye de un modo directo sobre los resultados, de modo tal que los mismos se obtienen asimismo como un valor esperado, una desviación estándar o coeficiente de variación y coeficientes de correlación entre los diferentes resultados.

El modelo con el cual se define el comportamiento de los materiales puede ser tanto lineal, como no lineal. El considerar un modelo no lineal involucra generalmente mayor número de parámetros. Así, en el presente trabajo se recurre al modelo hiperbólico de Kondner-Duncan que requiere la determinación de nueve parámetros, en tanto que el modelo lineal solo requiere la determinación de dos: el módulo de elasticidad E y la relación de Poisson ν . Se implementa un análisis de incertidumbre en un programa desarrollado con base en la técnica del elemento finito que puede ser utilizado tanto para materiales cuyo comportamiento es lineal como para materiales cuyo comportamiento no es lineal, pero se da un énfasis especial a la interpretación de resultados para materiales con comportamiento netamente no lineal por ser éste un caso anteriormente no tratado en programas de análisis estocástica.

Dentro del método del elemento finito estocástico basada en un enfoque de primer orden, se requiere del cálculo de funciones como la esperanza, la varianza y la covarianza a partir de las derivadas de la función de comportamiento que define los asentamientos, los desplazamientos y los esfuerzos en los nodos y elementos. Tomando en cuenta que en el caso de materiales con comportamiento no lineal, esta función no es explícita, para calcular las derivadas se utiliza en este trabajo un método numérico que data del siglo pasado, denominado "Método de los Cocientes Polinomiales".

El tema que se aborda a lo largo del presente escrito es por tanto el método del elemento finito estocástico considerando la no linealidad de la relación esfuerzo deformación. No se busca validar el modelo de Kondner-Duncan sino implementar un método numérico que permita calcular en forma externa a un programa preexistente la desviación estándar de los desplazamientos y sus respectivos coeficientes de variación y eventualmente realizar un análisis de cuales son los parámetros que influyen más directamente sobre los resultados obtenidos. El algoritmo desarrollado podría adaptarse fácilmente a programas basados en otras leyes constitutivas.

Cabe finalmente subrayar que, dado que son muchos los factores que introducen incertidumbre en los parámetros y por tanto en los resultados, es necesario definir con claridad en el momento de realizar un análisis de este tipo cual o cuales de ellos se están tomando en cuenta. Por otra parte, la incertidumbre que se atribuye a cada parámetro puede variar de un analista a otro en función de su experiencia y de los esfuerzos que haya realizado para obtener datos experimentales fidedignos. El método del elemento finito estocástico es por tanto una herramienta de empleo delicado pero potencialmente muy útil para introducir un grado mayor de realismo en los análisis hasta hoy deterministas.

CAPÍTULO 1

DESCRIPCIÓN PROBABILISTA DE MEDIOS GEOTÉCNICOS.

1.1- ESTADÍSTICA, BANCOS DE DATOS Y PROBABILIDAD.

La incertidumbre sobre las propiedades de los materiales geotécnicos se debe a tres factores principales: la ausencia de información que conduce a estimaciones subjetivas, la variación espacial que solamente puede evaluarse a través de un número limitado de pruebas y la falta de precisión en las determinaciones tanto de campo como de laboratorio.

Siempre se ha buscado describir las incertidumbres relativas a las propiedades de los materiales geotécnicos en un sitio u obra determinado recurriendo a la estadística y a la teoría de la probabilidad.

Así, para describir las variaciones espaciales de las propiedades, se ha utilizado la estadística descriptiva (tablas, histogramas, gráficos, correlaciones) que permite presentar de modo compacto un gran número de datos o información recolectada sobre las propiedades geotécnicas de un sitio o de una obra geotécnica particular. Un ejemplo extremo de este enfoque lo constituye el libro de Marsal y Mazari sobre el subsuelo de la ciudad de México (1959) que ha sido utilizado por los ingenieros de varias generaciones para definir los programas de exploración de sitios dentro de la citada ciudad con el fin de diseñar las fundaciones.

La versión moderna de la presentación y almacenamiento de resultados la constituyen las bases de datos. Estas bases han tenido amplia difusión en varias partes del mundo, aunque existe diversidad de criterios en cuanto a la información que debe almacenarse en ellas, a riesgo de excederse en la misma, y debido al hecho de encontrarse no sólo a disposición de especialistas y sino también del público en general.

Las bases de datos son de este modo, verdaderos sistemas de datos para la aplicación al diseño de obras por medio de expertos en el tema, donde el óptimo empleo está aún por definirse.

Los métodos avanzados de análisis de datos que se aplican en la actualidad en geotecnia (análisis factorial y en componentes principales en particular), constituyen una extensión de la estadística descriptiva.

La estadística descriptiva no implica necesariamente suponer la existencia de un modelo probabilista. Aceptar un modelo de este tipo y considerar las propiedades del suelo como variables aleatorias es no obstante necesario si se ha de recurrir a la inferencia estadística. Esto último constituye un punto de controversia.

De acuerdo a lo destacado por Malheron (1965), el concepto de variable aleatoria implica las siguientes dos condiciones:

- a) la posibilidad teórica de repetir la experiencia por medio de la cual la variable ha sido definida,
- b) la independencia entre las relaciones sucesivas de la experiencia.

Estas dos condiciones no se satisfacen estrictamente cuando la experiencia consiste en determinar las propiedades geotécnicas de un suelo, dado que la prueba no puede ser repetida en un mismo punto de la masa de suelo. Pero por otra parte puede admitirse que la determinación realizada en puntos distintos constituye una

misma experiencia, reconociendo que existe cierta dependencia entre los resultados obtenidos en puntos vecinos. Por mucho tiempo ha sido ignorada esta dependencia.

El número de resultados, la posición relativa y la dimensión de las muestras son factores importantes. Uno de los campos de aplicación de la modelación de las propiedades geotécnicas por medio de variables y campos aleatorios en los que se ha empezado a tomar en cuenta la dependencia espacial es el seguimiento en el control de la compactación en obras de tierra (Auvinet y Abaziou, 1993).

En forma general, para la representación de las incertidumbres sobre los parámetros del material se utilizan uno de los dos modelos siguientes:

- a) Modelación por medio de variables aleatorias.
- b) Modelación por medio de campos aleatorios.

A continuación se presentará una pequeña reseña sobre la teoría de la probabilidad con el fin de recordar las ecuaciones y conceptos a utilizar. En la misma se hace referencia a las propiedades de las variables aleatorias y campos aleatorios.

1.2- NOCIONES DE PROBABILIDAD.

La teoría de la probabilidad considera el problema de un experimento que puede originar varios resultados. A la lista de todos los resultados posibles y mutuamente excluyentes de un experimento se le llama *espacio muestral*. Un evento es cualquier subconjunto de un espacio muestral.

La idea intuitiva de probabilidad se relaciona con la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento. Por tanto las probabilidades deben ser fracciones entre "0" y "1". Entonces supóngase que un experimento tiene asociado un espacio muestral S . Una probabilidad es una función de valor numérico que asigna un número $P(A)$ a cada evento A de tal manera que son válidos los siguientes axiomas:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. Si A_1, A_2, \dots , es una sucesión de eventos mutuamente excluyentes, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (1)$$

De acuerdo con el axioma (3) se llega a la conclusión de que si A y B son eventos mutuamente excluyentes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2)$$

Las variables aleatorias son valores numéricos asociados a los resultados de los experimentos; en términos formales una variable aleatoria es una función de valor real cuyo dominio es un espacio muestral. Se las puede dividir en dos categorías para simplificar el trabajo. Los resultados que se originan en datos de conteos se llaman variables aleatorias discretas. En tanto que las que no son discretas con frecuencia pueden clasificarse como continuas. Representaremos una variable aleatoria por medio de una letra mayúscula como por ejemplo X o Y . Los valores numéricos reales que puede asumir una variable aleatoria se representarán mediante minúsculas, como por ejemplo x e y .

1.2.1- DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD

Se dice que una variable aleatoria X es discreta si puede tomar sólo un número finito, o un número infinito contable, de valores posibles x .

En este caso y de acuerdo a los axiomas con anterioridad presentados se tiene lo siguiente:

$$1. P(X=x) = p(x) \geq 0.$$

$$2. \sum P(X=x) = 1, \text{ siendo la suma con respecto a todos los valores posibles de } x.$$

A la función $p(x)$ se le llama *función de probabilidad* de X .

A la función de probabilidad se la llama a veces *función de masa de probabilidad de X* para dar la idea de que se aplica una masa de probabilidad en puntos discretos.

Con frecuencia conviene hacer una lista de las probabilidades de una variable aleatoria discreta, en forma de tabla. Esta lista es un modo de representar la *distribución de probabilidad de X* .

La función de distribución $F(b)$ de una variable X se define como:

$$F(b) = P(X \leq b) \quad (3)$$

Si X es discreta:

$$F(b) = \sum_{x=-\infty}^b p(x) \quad (4)$$

siendo $p(x)$ la función probabilidad. A la función de distribución se le llama a veces *función de distribución acumulada*.

Como antes enunciamos, la probabilidad es la frecuencia relativa a largo plazo de que suceda un evento, entonces se puede interpretar una distribución de probabilidad como la frecuencia relativa a largo plazo de los resultados numéricos asociados con un experimento.

A continuación presentaremos la determinación de medidas numéricas descriptivas (o parámetros) para caracterizar $p(x)$. Definiremos de este modo la esperanza, la varianza, y la desviación estándar de la población.

El *valor esperado* o *esperanza matemática* de una variable aleatoria discreta X que tiene una función $p(x)$ de probabilidad está dada por:

$$E[x] = \sum_x x \cdot p(x) \quad (5)$$

(La suma es con respecto a todos los valores de x para los cuales $p(x) > 0$).

A veces se emplea la notación:

$$E[x] = \mu \quad (6)$$

Si X es una variable aleatoria discreta, cuya función de probabilidad es $p(x)$ y $g(X)$ es cualquier función de X con valor real, entonces el valor esperado de $g(X)$ está definido por:

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot p(x) \quad (7)$$

La varianza de un conjunto de mediciones es la media del cuadrado de las desviaciones de dichas mediciones con respecto a su media. Así, se desea encontrar la esperanza de la función $g(X) = (X - \mu)^2$.

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] \quad (8)$$

a veces se utiliza la notación:

$$E[(X - \mu)^2] = \sigma^2 \quad (9)$$

El valor mínimo que puede tomar σ^2 es cero, y eso sólo sucede si toda la población toma un único valor (esto es, si X toma un valor constante con probabilidad uno). La varianza se hace más grande en la medida que se esparcen más los puntos con probabilidad positiva.

Obsérvese que la varianza eleva al cuadrado las unidades de medida. Una medida de variación que mantiene las unidades originales es la *desviación estándar*. La *desviación estándar* de una variable aleatoria X es la raíz cuadrada de la varianza, y está definida mediante:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{E[(X - \mu)^2]} \quad (10)$$

1.2.2. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD.

Las variables aleatorias antes mencionadas son discretas; cada una sólo puede asumir un número finito, o un número infinito mensurable de valores. Pero muchas de las variables aleatorias parecen tener en la práctica más de un conjunto mensurable de valores positivos. Es decir que no se puede eliminar ningún valor como resultado posible de una observación. Es por ello que se define a la variable aleatoria X como continua si puede tomar el número infinito de valores asociados con intervalos de números reales, y hay una función $f(x)$, llamada *función de densidad de probabilidad*, tal que:

1. $f(x) \geq 0$ toda x .

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$

3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$

Nótese que para una variable aleatoria continua X :

$$P(X = a) = \int_a^a f(x) \cdot dx \quad (11)$$

para cualquier valor específico de a . No debe preocupar el hecho de que se deba asignar probabilidad cero a cualquier valor específico, ya que hay un número infinito de valores posibles que puede asumir X .

La asignación de probabilidad cero a un evento no lo elimina como posible sino sólo dice que la probabilidad de ocurrencia de ese valor exacto es extremadamente pequeña.

La función de distribución de un variable aleatoria X se define como:

$$F(b) = P(X \leq b) \quad (12)$$

$$F(b) = \int_{-\infty}^b f(x) \cdot dx \quad (13)$$

Nótese que la derivada de F es: $F'(x) = f(x)$.

Presentaremos a continuación el modo de determinación de medidas numéricas descriptivas (o parámetros) para caracterizar a $p(x)$. Definiremos de este modo la esperanza, la varianza, y la desviación estándar de la población.

Como en el caso discreto, con frecuencia se desea resumir la información contenida en una distribución de probabilidad calculando los valores esperados de la variable aleatoria y determinadas funciones de la misma.

Así el valor esperado de una variable aleatoria continua X que tiene una función de densidad de probabilidad $f(x)$, está dada por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \quad (14)$$

Si X es una variable aleatoria continua cuya distribución de probabilidad es $f(x)$, y si $g(x)$ es cualquier función X de valor real, entonces:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx \quad (15)$$

Las definiciones de varianza y de desviación estándar son válidas también para el caso continuo, razón por la cual no serán mencionadas.

1.2.3- DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD MULTIVARIABLES.

Se pueden definir diversas variables aleatorias en el mismo espacio muestral. Por ejemplo en el caso de las propiedades de un suelo, podemos trabajar con dos: el módulo de deformabilidad E y el coeficiente de Poisson ν . En este caso estamos frente a una distribución de probabilidad bivariable o distribución de probabilidad multivariada.

Entonces, sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias discretas. La *distribución de probabilidad conjunta* de X_1 y X_2 está representada por:

$$p(x_1, x_2) = P(X_1=x_1, X_2=x_2) \quad (16)$$

definida por los números reales x_1 y x_2 . A la función $p(x_1, x_2)$ se le llama *función de probabilidad conjunta* de x_1 y x_2 .

Las *funciones de probabilidad marginal* de X_1 y X_2 , respectivamente, están representadas por:

$$p_1(x_1) = \sum_{x_2} p(x_1, x_2) \quad (17)$$

$$p_2(x_2) = \sum_{x_1} p(x_1, x_2) \quad (18)$$

Para estudiar el caso continuo, primero recordaremos que para el caso de una dimensión si $f(x)$ representa la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X , entonces $f(x)$ representa a la curva de frecuencia relativa, y las probabilidades del tipo $P(a \leq X \leq b)$ quedan representadas por áreas bajo esta curva.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \cdot dx \quad (19)$$

Supóngase que se desea conocer el comportamiento conjunto de dos variables aleatorias continuas, por ejemplo, X_1 y X_2 . El comportamiento de la frecuencia relativa de esas dos variables aleatorias se puede modelar mediante una función bivariada, $f(x_1, x_2)$, que forma una superficie de probabilidad, p frecuencia relativa, en tres dimensiones. En la figura siguiente se ilustra dicha superficie.

La probabilidad de que X_1 quede en algún intervalo de X_2 se representa entonces como un volumen bajo tal superficie. Así,

$$P(a_1 \leq X_1 \leq a_2, b_1 \leq X_2 \leq b_2) = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \quad (20)$$

Obsérvese que la integral anterior simplemente es el volumen bajo la superficie de la figura siguiente:

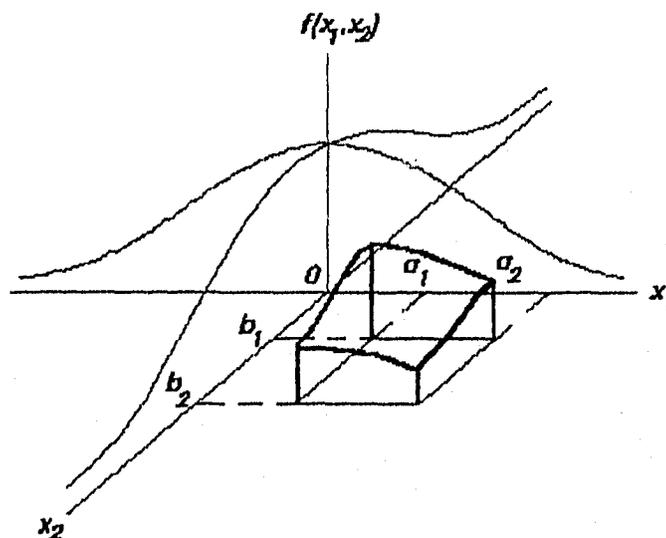


fig 1.1 - Probabilidad de que X_1 quede en un intervalo de X_2

Así como se calcularon las probabilidades univariadas, o marginales, para variables discretas, se puede determinar la función de densidad univariada para X_1 en el caso continuo, si se integran los valores de X_2 . Así la función de densidad marginal de X_1 , que es $f_1(x_1)$ está dada por :

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \cdot dx_2 \quad (21)$$

Igualmente, la función de densidad marginal de X_2 , que es $f_2(x_2)$ está representada por:

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \cdot dx_1 \quad (22)$$

Se dice que dos variables aleatorias son independientes si:

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\} = P\{X_1 = x_1\} \cdot P\{X_2 = x_2\} \quad (23)$$

para todos los números reales x_1 y x_2 . Una idea semejante se aplica al caso de variables aleatorias continuas:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \dots f_n(x_n) \quad (24)$$

para cualesquiera números reales x_1, x_2, \dots, x_n .

¿Cómo calcular valores esperados de funciones de más de una variable aleatoria? Supóngase que las variables aleatorias discretas (X_1, X_2) tienen una función de probabilidad conjunta dada por $p(x_1, x_2)$. Si $g(X_1, X_2)$ es cualquier función de valor real de X_1, X_2 , entonces:

$$E\{g(X_1, X_2)\} = \sum_{x_1} \sum_{x_2} g(x_1, x_2) \cdot p(x_1, x_2) \quad (25)$$

La suma es en todos los valores de (x_1, x_2) para los cuales $p(x_1, x_2) > 0$. Si (X_1, X_2) son variables aleatorias continuas con función de densidad de probabilidad $f(x_1, x_2)$, entonces:

$$E\{g(X_1, X_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \quad (26)$$

Si X_1 y X_2 son independientes, entonces, según la definición anterior se deduce fácilmente que:

$$E\{g(X_1) \cdot h(X_2)\} = E\{g(X_1)\} \cdot E\{h(X_2)\} \quad (27)$$

Una función de dos variables que tiene mucho interés en problemas probabilísticos y estadísticos es la covarianza.

La *covarianza* entre dos variables aleatorias X_1 y X_2 se define como:

$$COV(X_1, X_2) = E\{(X_1 - \mu_1) \cdot (X_2 - \mu_2)\} \quad (28)$$

siendo:

$$\mu_1 = E\{X_1\} \quad \text{y} \quad \mu_2 = E\{X_2\} \quad (29)$$

Otro modo de calcular la covarianza a través de la esperanza es el siguiente:

$$COV(X_1, X_2) = E\{X_1 X_2\} - \mu_1 \mu_2 \quad (30)$$

Es difícil utilizar la covarianza como una medida absoluta de la dependencia porque su valor depende de la escala de medición y por consiguiente es difícil determinar si una covarianza en particular es grande a simple vista. Se puede eliminar este problema al estandarizar su valor, utilizando el coeficiente simple de correlación lineal. El *coeficiente de correlación* lineal de población, ρ , se relaciona con la covarianza y se define como:

$$\rho = \frac{COV[X_1, X_2]}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad (31)$$

donde σ_1 y σ_2 son las desviaciones estándar de X_1 y X_2 , respectivamente. Puede demostrarse que el coeficiente de correlación ρ satisface la desigualdad $-1 \leq \rho \leq +1$. Así, -1 ó $+1$ implica una correlación perfecta, con todos los puntos de la muestra sobre una línea recta. El valor $\rho=0$ implica covarianza igual a cero y ninguna correlación.

Por lo tanto si X_2 y X_1 son dos variables aleatorias independientes:

$$COV[X_2, X_1] = 0 \quad (32)$$

El signo del coeficiente de correlación depende del signo de la covarianza. Así, un coeficiente de correlación positivo indica que X_2 crece cuando X_1 crece. Un coeficiente de correlación negativo implica que X_2 decrece cuando X_1 crece.

1.2.4- CAMPOS ALEATORIOS.

Un modelo útil para representar las variaciones aleatorias espaciales de determinada variable es el proceso estocástico espacial, también conocido como campo aleatorio (Alonso, 1979; Auvinet, 1991; Honjo, 1991). Los valores tomados para una variable $G(X)$ en puntos X de un dominio de R^p ($p=1, 2$ ó 3) en estudio se consideran como una realización o función-muestra de una función aleatoria que puede ser descrita por parámetros ya definidos como son la esperanza, la varianza, la autocovarianza, el coeficiente de autocorrelación y la función de distribución de probabilidades (Auvinet, Bouayed, Mrabet, 1995):

Por simplicidad, se acepta a menudo que el valor esperado es constante en el dominio (eventualmente después de remover alguna tendencia determinista) y que la autocovarianza depende solamente de la distancia τ vectorial entre los dos puntos X_1 y X_2 (campo estacionario en el sentido amplio).

$$C(X_1, X_2) = C(X_1 - X_2) = C(\tau) \quad (33)$$

Si esta hipótesis es aceptada, la varianza de $G(X)$ es constante a_n todo el dominio y el coeficiente de autocorrelación puede ser escrito del modo siguiente:

$$\rho_F(X_1, X_2) = \rho_F(\tau) \quad (34)$$

Los anteriores parámetros y funciones pueden ser estimados de los resultados de sondeos continuos o de muestras discretas. En el primer caso el valor esperado se evalúa utilizando el estimador μ_c :

$$\mu_F = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L F(X) \cdot dX \quad (35)$$

donde L es la longitud de la perforación.
Del mismo modo, el estimador de autocovarianza es:

$$C(\lambda u) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L F(X) \cdot F(X + \lambda u) \cdot dX - \mu_F^2 \quad (36)$$

donde ν es un vector unitario en la dirección de la perforación y λ es un escalar.

Por otra parte, en el subdominio A (segmento, superficie, volumen), la esperanza del valor medio de la variable G(X) es (Papoulis, 1985):

$$E[F_A] = \frac{1}{A} \cdot \int_A F(X) \cdot dX \quad (37)$$

y su varianza es:

$$V[F_A] = E[F_A^2] - E^2[F_A] = \frac{1}{A^2} \cdot \left\{ E \left[\int_A F(X) \cdot dX \cdot \int_A F(X) \cdot dX \right] - E^2 \left[\int_A F(X) \cdot dX \right] \right\} \quad (38)$$

$$V[F_A] = \frac{1}{A^2} \cdot \iint_{AA} E[F(X_1) \cdot F(X_2)] \cdot dX_1 \cdot dX_2 - \frac{1}{A^2} \cdot \iint_{AA} E[F(X_1)] \cdot E[F(X_2)] \cdot dX_1 \cdot dX_2 \quad (39)$$

$$\text{y por lo tanto: } V[F_A] = \frac{1}{A^2} \cdot \iint_{AA} C(X_1, X_2) \cdot dX_1 \cdot dX_2 \quad (40)$$

Esta fórmula representa el bien conocido efecto de escala estadístico. La varianza del valor medio de una propiedad aleatoria decrece con el incremento del subdominio A discretas. Este efecto hace importante el especificar las dimensiones de los subdominios donde se presentan los resultados correspondientes a la dispersión de las propiedades. La covarianza entre los valores promedios asociados a dos dominios con o sin superposición es:

$$COV[F_{A_1}, F_{A_2}] = \frac{1}{A_1 \cdot A_2} \cdot \iint_{A_1 A_2} C(X_1, X_2) \cdot dX_1 \cdot dX_2 \quad (41)$$

El modelado de una propiedad utilizando un campo de variables aleatorias definidas en un dado dominio A hace posible el estimar el valor medio de esta propiedad en un subdominio A_2 (discreto o continuo) para los valores obtenidos por muestreo en otro subdominio A_1 discretas. Considerando los valores medios F_{A_1} y F_{A_2} , respectivamente en A_1 y A_2 , y aceptando que su distribución de probabilidad conjunta sea Gaussiana se obtiene:

$$E[F_{A_1}|F_{A_2}] = E[F_{A_1}] + \rho_F \cdot \frac{\sigma_{F_{A_2}}}{\sigma_{F_{A_1}}} \cdot [F_{A_2} - E[F_{A_2}]] \quad (42)$$

$$V[F_{A_1}|F_{A_2}] = V[F_{A_1}] \cdot (1 - \rho_F^2) \quad (43)$$

donde ρ_V es el coeficiente de correlación de F_{A_1} y F_{A_2} que puede ser obtenido utilizando las ecuaciones antes mencionadas.

Puede verse que en general, el conocimiento del campo en un subdominio A_1 conduce a la corrección del valor esperado y a la reducción de la varianza del valor medido en el dominio A_2 . En la práctica, dependiendo de la estructura de la correlación del campo y de la posición relativa de A_1 y A_2 , la situación es generalmente intermedia entre los siguientes casos extremos:

- si F_{A_1} y F_{A_2} no se encuentran correlacionados, entonces $\rho_V=0$ y la información recolectada en A_1 no reduce las incertidumbres en F_{A_2} ,
- si F_{A_1} y F_{A_2} se hallan totalmente correlacionados, entonces $\rho_V=1$ y $F_{A_1} = F_{A_2}$.

1.3- APLICACIÓN A MEDIOS GEOTÉCNICOS.

Los conceptos anteriores pueden aplicarse a medios geotécnicos. Conviene subrayar lo siguiente:

a) El modelo de variable aleatoria simple o múltiple puede ser adecuado cuando se pretende describir la incertidumbre asociada a falta de información o baja confiabilidad de los datos experimentales.

b) Por el contrario, para describir la variación espacial de las propiedades de un material dentro de un dominio dado, el modelo más adecuado es el de campo aleatorio puesto que permite tomar en cuenta la dependencia entre valores de las propiedades en punto distintos. Si existen datos obtenidos mediante observaciones de campo, es conveniente en este caso trabajar con un campo aleatorio *condicional* respecto a estos valores medidos. Lo anterior se puede llevar a cabo fácilmente si se acepta la hipótesis de que el campo es gaussiano. En este caso, las esperanzas y varianzas que se asignan a subdominios del medio (por ejemplo elementos finitos o grupos de ellos) se pueden obtener por fórmulas análogas a las ecuaciones (42) y (43).

En un caso u en otro, se podrá definir la incertidumbre sobre las propiedades de diferentes zonas del medio geotécnico estudiado mediante una matriz de covarianza que contendrá en la diagonal la varianza de las diferentes propiedades aleatorias consideradas y fuera de la diagonal las covarianzas entre estas diferentes variables.

CAPÍTULO 2

MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO ESTOCÁSTICO.

2.1- BASES DEL MEF LINEAL Y NO LINEAL.

2.1.1- MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO LINEAL.

El método del elemento finito es una extensión de los métodos matriciales de análisis estructural. Históricamente, esta fue la forma en la que se desarrolló el método y es la que resulta más atractiva para los ingenieros civiles. Sin embargo, es posible considerar el método del elemento finito, desde un punto de vista mucho más general, como un caso particular del llamado *método de los residuos ponderados* que se plantea a continuación. Esta generalización permite la aplicación del método del elemento finito a una mayor variedad de problemas. Entre estos los muchos que vienen expresados en términos de ecuaciones diferenciales y acompañados de condiciones de contorno impuestas a las funciones incógnitas (Zienkiewicz y Morgan, 1983).

2.1.1.1 Principio general del método de los residuos ponderados.

Sea una función Φ definida en una región Ω cuya frontera es una curva cerrada Γ . Para evaluar en forma aproximada la variación de esta función en el dominio de interés, se intenta encontrar una función $\hat{\Phi}$ definida como:

$$\hat{\Phi} = \Psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \cong \Phi \quad (44)$$

tal que en la frontera $\Psi/\Gamma = \Phi/\Gamma$ y $N_m/\Gamma = 0$ y escogiendo los parámetros a_m de tal manera que se logre la mejor aproximación a Φ .

Las funciones N_m , llamadas *funciones básicas* deben seleccionarse de tal manera que la aproximación mejore conforme aumenta el número M de funciones. Una condición obvia de convergencia es que el conjunto de funciones básicas sea tal que la ecuación anterior pueda representar adecuadamente cualquier función cuando $M \rightarrow \infty$. El estudio de las condiciones en las que puede darse esta condición es uno de los temas principales del análisis funcional.

Definiendo al residuo o error R_Ω como :

$$R_\Omega = \Phi - \hat{\Phi} \quad (45)$$

El método de los residuos ponderados consiste en minimizar la función error imponiendo que un número apropiado de integrales de error, ponderadas de diferentes maneras, sean nulas, es decir:

$$\int_{\Omega} W_l (\Phi - \hat{\Phi}) d\Omega = \int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (46)$$

donde W_l ; $l = 1, 2, 3, \dots, M$ es un conjunto de funciones de ponderación independientes.

Sustituyendo la expresión de $\hat{\Phi}$ en la ecuación (44), se obtiene un conjunto de M ecuaciones lineales simultáneas con los coeficientes a_m como incógnitas, es decir:

$$[K](a) = (f) \quad (47)$$

donde:

$$(a)^T = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m) \quad (48)$$

$$k_{lm} = \int_{\Omega} W_l N_m d\Omega \quad 1 \leq l, m \leq M \quad (49)$$

$$f_l = \int_{\Omega} W_l (\Phi - \Psi) d\Omega \quad 1 \leq l \leq M \quad (50)$$

Una vez calculadas las integrales anteriores, la resolución del sistema de ecuaciones lineales planteado permite definir la aproximación buscada.

Las funciones de ponderación pueden escogerse en muchas maneras. Una de las más sencillas consiste en tomar:

$$W_l = N_l \quad (51)$$

En este caso, el método se conoce como de *Galerkin* y se tiene:

$$k_{lm} = \int_{\Omega} N_l N_m d\Omega \quad 1 \leq l, m \leq M \quad (\text{matriz simétrica}) \quad (52)$$

$$f_l = \int_{\Omega} N_l (\Phi - \Psi) d\Omega \quad 1 \leq l \leq M \quad (53)$$

La selección de las N_l como funciones de ponderación lleva a un planteamiento particularmente sencillo cuando se trata de funciones *ortogonales*, en el sentido del análisis funcional, es decir funciones tales que:

$$\int_{\Omega} N_l N_m d\Omega = 0 \quad \text{para } l \neq m \quad (54)$$

2.1.1.2 Aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales

El planteamiento anterior parece de utilidad limitada puesto que solamente permite obtener una aproximación para una función *conocida*. Sin embargo

puede ser también de gran utilidad para evaluar funciones desconocidas que han de satisfacer determinada ecuación diferencial.

Si se considera la expresión siguiente sobre Ω :

$$A(\Phi) = \mathcal{L} \cdot \Phi + p = 0 \quad (55)$$

donde \mathcal{L} es un operador diferencial lineal y p es una función independiente de Φ . La ecuación anterior está sujeta a las condiciones de frontera sobre Γ (por ejemplo condición de Dirichlet o de Neuman):

$$B(\Phi) = \mathcal{M} \cdot \left(\psi + \sum_{m=1}^M a_m \cdot N_m \right) + r = 0 \quad (56')$$

$$B(\Phi) = \mathcal{M} \cdot \psi + 0 + r = 0 \quad (56'')$$

$$B(\Phi) = \mathcal{M} \cdot \Phi + r = 0 \quad (56)$$

donde \mathcal{M} es un operador lineal y r es independiente de Φ .

Nuevamente, se buscará una aproximación del tipo:

$$\hat{\Phi} = \Psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \cong \Phi \quad (57)$$

Si la función Ψ y las funciones básicas N_m se escogen de tal forma que, sobre Γ :

$$B(\Phi) = \mathcal{M} \cdot \Phi + r = 0 \quad (58')$$

$$\mathcal{M} \cdot \Phi + r = 0 \quad (58'')$$

$$\mathcal{M} \cdot \Psi = -r \quad (58''')$$

$$\mathcal{M} \cdot N_m = 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad (59)$$

entonces $\hat{\Phi}$ satisface automáticamente las condiciones de frontera.

Por otra parte, si las funciones N_m son continuas sobre W , y todas sus derivadas existen, es posible escribir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cong \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial N_m}{\partial x} \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cong \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \quad (61)$$

y así sucesivamente.

Se buscará que $\hat{\Phi}$ satisfaga aproximadamente la ecuación diferencial. Sustituyendo Φ por $\hat{\Phi}$ en esta ecuación queda un residuo :

$$R_{\Omega} \equiv A(\hat{\Phi}) \equiv \mathcal{L}\hat{\Phi} + p \equiv \mathcal{L}\Psi + \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m + p \quad (62)$$

Si se aplica el método de los residuos ponderados buscando hacer $R_{\Omega} = 0$ en todo el dominio Ω , se escribirá:

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} W_l \left\{ \mathcal{L}\Psi + \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m + p \right\} d\Omega = 0 \quad (63)$$

lo cual da, para $l = 1, 2, 3, \dots, M$:

$$[K](a) = (f) \quad (64)$$

donde ahora:

$$k_{lm} = \int_{\Omega} W_l \mathcal{L}N_m d\Omega \quad 1 \leq l, m \leq M \quad (65)$$

$$f_l = -\int_{\Omega} W_l p d\Omega - \int_{\Omega} W_l \mathcal{L}\Psi d\Omega \quad 1 \leq l \leq M \quad (66)$$

Después de estimar las integrales anteriores, el sistema de M ecuaciones puede ser resuelto para determinar las incógnitas a_m .

Se cuenta en esta forma con una metodología para estimar la función Φ en el dominio de interés.

Si las condiciones de frontera no son satisfechas automáticamente, es posible generalizar el planteamiento anterior e incluir en el residuo global el residuo de la ecuación diferencial sobre la frontera escribiendo:

$$\int_{\Omega} W_l A(\hat{\Phi}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l B(\hat{\Phi}) d\Gamma = 0 \quad (67)$$

donde W_l y \bar{W}_l pueden escogerse o no en forma independiente. Este planteamiento conduce asimismo a un sistema de ecuaciones lineales que permite satisfacer en forma aproximada tanto la ecuación diferencial en W como la correspondiente a las condiciones sobre la frontera Γ .

El mismo procedimiento puede aplicarse a sistemas de ecuaciones diferenciales. En términos generales, se buscará entonces una función desconocida $(\Phi)^T = (\Phi_1, \Phi_2, \dots)$ tal que se satisfagan en una región Ω ciertas ecuaciones diferenciales:

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} A_1(\Phi) = 0 \\ A_2(\Phi) = 0 \\ \dots \end{bmatrix} \quad \text{sobre } \Omega \quad (68)$$

sujetas a las condiciones de frontera :

$$B(\Phi) = \begin{bmatrix} B_1(\Phi) = 0 \\ B_2(\Phi) = 0 \\ \dots \end{bmatrix} \quad \text{sobre } \Gamma \quad (69)$$

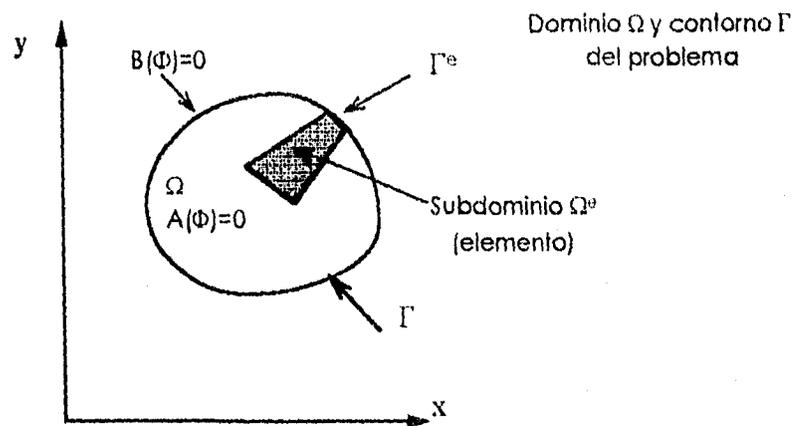


fig 2.1 (Zienkiewicz & Taylor, 1968)

Para cada elemento del vector $(\Phi)^T = (\Phi_1, \Phi_2, \dots)$ se buscará una aproximación:

$$\hat{\Phi}_1 = \Psi_1 + \sum_{m=1}^M a_{m,1} N_{m,1} \cong \Phi_1 \quad (70)$$

$$\hat{\Phi}_2 = \Psi_2 + \sum_{m=1}^M a_{m,2} N_{m,2} \cong \Phi_2 \quad (71)$$

....

Aplicando el método de los residuos ponderados simultáneamente a los residuos de las ecuaciones diferenciales sobre el dominio y sobre la frontera, se puede escribir el siguiente conjunto de ecuaciones :

$$\int_{\Omega} W_{1,1} A_1(\hat{\Phi}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_{1,1} B_1(\hat{\Phi}) d\Gamma = 0 \quad (72)$$

$$\int_{\Omega} W_{1,2} A_2(\hat{\Phi}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_{1,2} B_2(\hat{\Phi}) d\Gamma = 0 \quad (73)$$

....

La resolución de este sistema permite obtener la aproximación deseada.

2.1.1.3 Aplicación al análisis de esfuerzos y deformaciones en medios continuos elásticos

Como aplicación de lo visto en el inciso anterior, se considerará el problema del análisis de esfuerzos y deformaciones en un medio elástico bidimensional. Este problema requiere la solución de un par de ecuaciones diferenciales acopladas.

Las incógnitas básicas en este caso son los desplazamientos u y v en las direcciones x e y respectivamente, es decir:

$$(\Phi) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (74')$$

$$(\Phi)^T = (u, v) \quad (74)$$

Las deformaciones, y por tanto, los esfuerzos, pueden expresarse en función de estos desplazamientos.

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \mathcal{L}(\Phi) \quad (75)$$

donde:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (76)$$

y, en el caso particular del estado plano de esfuerzos :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (77)$$

$$(\sigma) = [D](\varepsilon) \quad (78)$$

donde E y ν son el módulo de elasticidad y la relación de Poisson del material.

El sistema de ecuaciones de equilibrio puede escribirse :

$$\mathbf{A}(\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y \end{bmatrix} = \mathcal{L}^T[\mathbf{D}]\mathcal{L}(\Phi) + (\mathbf{X}) = \mathcal{L}^T(\sigma) + (\mathbf{X}) = 0 \quad (79)$$

en el dominio bidimensional Ω , donde X e Y son fuerzas volumétricas unitarias.

Las condiciones de frontera para un problema de este tipo son esfuerzos o desplazamientos impuestos. Se puede tener por tanto:

$$\mathbf{B}(\Phi) = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y - \bar{t}_x \\ \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y - \bar{t}_y \end{bmatrix} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_\sigma \quad (80)$$

y

$$\mathbf{B}(\Phi) = \begin{bmatrix} u - \bar{u} \\ v - \bar{v} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_\Phi \quad (81)$$

donde n_x y n_y son los cosenos directores de la normal a Γ orientada hacia afuera y \bar{t}_x , \bar{t}_y , \bar{u} y \bar{v} son respectivamente los esfuerzos y desplazamientos especificados.

Se adoptarán ahora como funciones básicas unas funciones M_i iguales a 1 en el nodo i , a cero en los demás vértices del elemento y nula fuera de los elementos no conectados con el nodo i , tanto para u como para v . El uso de este tipo de función básica conduce a que el parámetro q asociado a la función de forma M_i sea igual a la aproximación del valor de Φ en el nodo i . Las condiciones de frontera sobre Γ_Φ se cumplen automáticamente y por otra parte no es necesario introducir la función Ψ . La aproximación global puede entonces escribirse :

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^M N_m(\Phi_m) \quad (82)$$

donde

$$(\Phi_m) = \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} \quad (83)$$

Las deformaciones en un punto cualquiera son :

$$(\varepsilon) = \mathcal{L}(\Phi) \quad (84')$$

$$(\varepsilon) = \mathcal{L} \sum_{m=1}^M N_m(\Phi_m) = \sum_{m=1}^M [B_m](\Phi_m) \quad (84)$$

donde:

$$[B_m] = \mathcal{L} N_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (85)$$

La anulaci3n de residuos para las ecuaciones de equilibrio en t3rminos de las fuerzas puede escribirse :

$$\int_{\Omega} A_1 W_{1,1} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} B_1 \bar{W}_{1,1} d\Gamma = 0 \quad (86)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial y} + X \right) W_{1,1} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (n_x \hat{\sigma}_x + n_y \hat{\tau}_{xy} - i_x) \bar{W}_{1,1} d\Gamma = 0 \quad (87)$$

$$\int_{\Omega} A_2 W_{1,2} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} B_2 \bar{W}_{1,2} d\Gamma = 0 \quad (88)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_y}{\partial y} + Y \right) W_{1,2} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (n_x \hat{\tau}_{xy} + n_y \hat{\sigma}_y - i_y) \bar{W}_{1,2} d\Gamma = 0 \quad (89)$$

donde:

$$\hat{\sigma} = [\mathbf{D}] \cdot (\epsilon) \quad (90')$$

$$\hat{\sigma} = [\mathbf{D}] \cdot \mathcal{L}(\hat{\Phi}) \quad (90)$$

Usando el teorema de Green estas ecuaciones se vuelven :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left(\hat{\sigma}_x \frac{\partial W_{1,1}}{\partial x} + \hat{\tau}_{xy} \frac{\partial W_{1,1}}{\partial y} - W_{1,1} X \right) d\Omega + \int_{\Gamma_{\phi} + \Gamma_{\sigma}} (\hat{\sigma}_x n_x + \hat{\tau}_{xy} n_y) \bar{W}_{1,1} d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_{\sigma}} (\hat{\sigma}_x n_x + \hat{\tau}_{xy} n_y - \bar{i}_x) \bar{W}_{1,1} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left(\hat{\tau}_{xy} \frac{\partial W_{1,2}}{\partial x} + \hat{\sigma}_y \frac{\partial W_{1,2}}{\partial y} - W_{1,2} Y \right) d\Omega + \int_{\Gamma_{\phi} + \Gamma_{\sigma}} (\hat{\tau}_{xy} n_y + \hat{\sigma}_y n_y) \bar{W}_{1,2} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\hat{\tau}_{xy} n_x + \hat{\sigma}_y n_y - \bar{i}_y) \bar{W}_{1,2} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (92)$$

Si las funciones de ponderación se escogen de tal forma que

$$W_{1,1} = W_{1,2} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{\phi} \quad (93)$$

$$\bar{W}_{1,1} = -W_{1,1}/\Gamma_{\sigma} \quad (94)$$

$$\bar{W}_{1,2} = -W_{1,2}/\Gamma_{\sigma} \quad (95)$$

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma compacta :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L} W_1)^T \hat{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} W_1 X d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{W}_1 \bar{i} d\Gamma = 0 \quad (96)$$

donde:

$$\bar{i}^T = (\bar{i}_x \quad \bar{i}_y) \quad (97)$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} W_{1,1} & 0 \\ 0 & W_{1,2} \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$\bar{W}_1 = \begin{bmatrix} \bar{W}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{W}_{12} \end{bmatrix} \quad (99)$$

En particular, si se adopta :

$$W_{1,1} = W_{1,2} = N_1 \quad (100)$$

$$\bar{W}_{1,1} = \bar{W}_{1,2} = -N_{1/\Gamma_\sigma} \quad (101)$$

Las condiciones anteriores se cumplen y el sistema se escribe :

$$\sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega} [B_1]^T [D] [B_m] d\Omega \right] \Phi_m = \int_{\Omega} N_1 X d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} N_1 \bar{t} d\Gamma \quad (102)$$

y puede escribirse también bajo la forma de un sistema de ecuaciones lineales :

$$[K](\Phi) = (f) \quad (103)$$

donde la matriz $[K]$ y el vector (f) se obtienen. Sumando las contribuciones de las matrices y vectores de los diferentes elementos cuyos componentes se definen como :

$$k_{lm} = \int_{\Omega^e} [B_1^e]^T [D] [B_m^e] d\Omega \quad 1 \leq l, m \leq M \quad (104)$$

$$f_{l1} = \int_{\Omega^e} N_1^e X d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma^e} N_1^e \bar{t} d\Gamma \quad 1 \leq l \leq M \quad (105)$$

en esta última expresión, la integral sobre Γ_σ^e solamente existirá para los lados de elementos que forman parte de Γ_σ^e .

Lo anterior se aplica a elementos bidimensionales poligonales de cualquier forma. Se verifica fácilmente que la matriz $[K]$ coincide en este caso con la matriz obtenida por análisis de rigidez.

2.1.2- MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS NO LINEAL.

Los problemas que pueden tratarse por el método de los elementos finitos lineal están regidos por ecuaciones diferenciales lineales. En la mecánica de sólidos elásticos esto estaba implícito en la forma lineal de las relaciones deformación desplazamiento: $\varepsilon = S \cdot u$, siendo S un operador lineal apropiado (Zienkiewicz, 1968).

Para el caso de problemas de tensión plana, las deformaciones se expresan del modo siguiente:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (106)$$

$$\sigma = D \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (107)$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (108)$$

En diversos problemas no se preserva tal linealidad, y para ello se requiere utilizar procedimientos numéricos que permitan tratar dichos problemas.

Cuando la relación esfuerzo deformación es no lineal y dependiente de la historia de esfuerzos, se han de utilizar procesos incrementales en pasos pequeños, siendo estos esenciales para obtener resultados que tengan sentido físico.

Son muchos los procedimientos generales de solución y muchos más los de aplicación a casos particulares. Por ello solamente se hará referencia a aquellos que se encuentran dentro del contexto del presente trabajo.

Para la solución de los problemas no lineales se requiere de alguna forma de iteración. Las técnicas que las involucran serán a continuación brevemente mencionadas.

2.1.2.1- El método de Newton-Raphson.

Es el método de más rápida convergencia para la solución de problemas no lineales, siempre que la solución inicial esté dentro de la llamada "zona de atracción". De hecho es el único procedimiento en que la convergencia es cuadrática.

Nótese que para una iteración se puede aproximar hasta el primer orden, de la forma:

$$\psi(a_{n+1}^{i+1}) \approx \psi(a_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)_{n+1}^i \cdot da_n^i = 0 \quad (109)$$

donde i es el contador de iteraciones, que comienza de la forma: $a_{n+1}^i = a_n$ y $\frac{\partial \psi}{\partial a} = \frac{\partial P}{\partial a} = K_T$, siendo ésta última la matriz de rigidez correspondiente a la dirección tangente. La corrección que se aplica a cada iteración surge de la primera de las ecuaciones presentadas en el actual inciso, y corresponde a:

$$K_T^i \cdot da_n^i = -\psi_{n+1}^i \quad (110)$$

$$da_n^i = -\left(K_T^i\right)^{-1} \cdot \psi_{n+1}^i \quad (111)$$

Una serie de aproximaciones sucesivas da:

$$a_{n+1}^{i+1} = a_n + \Delta a_n^i = a_{n+1}^i + da_n^i \quad (112)$$

$$\Delta a_n^i = \sum_{k=1}^i da_n^k \quad (113)$$

El proceso es el que se muestra en la figura siguiente. Puede observarse que la convergencia es rápida.

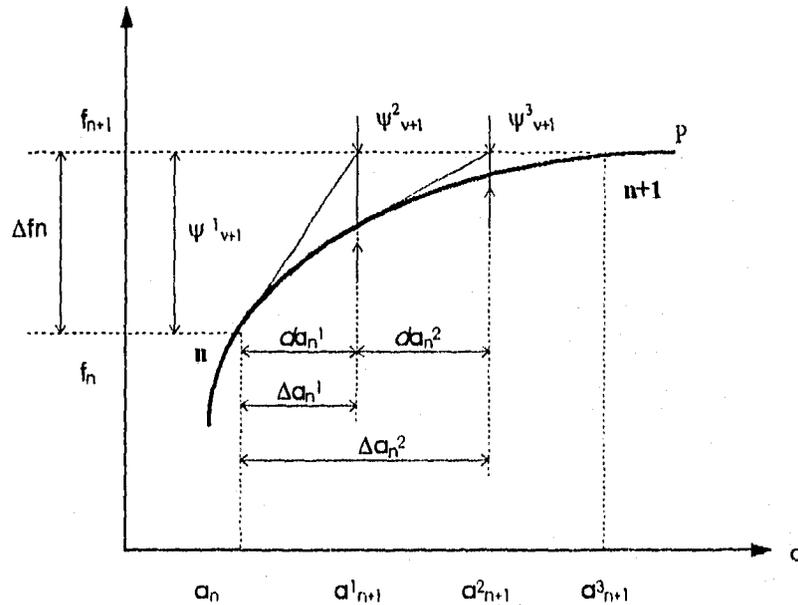


fig 2.2 - Método de Newton-Raphson

La necesidad de introducir el incremento total Δa_n^i y su almacenamiento quizá no sea obvia aquí, pero de hecho es esencial si la no linealidad es dependiente de la trayectoria.

Las principales características de éste método son las siguientes:

1. Se debe formar y resolver una nueva matriz K_T para cada iteración;
2. En algunas ocasiones se requiere utilizar procedimientos de solución para ecuaciones asimétricas, a pesar de que inicialmente la matriz K_T sea simétrica.

2.1.2.2- El método de Newton-Raphson modificado.

La variante que presenta respecto al método ya explicado consiste en reemplazar a la rigidez variable K_T^i por una aproximación constante $\overline{K_T}$, con ello se obtiene la siguiente expresión:

$$da_n^1 = -\overline{K_T}^{-1} \cdot \psi_{n+1}^1 \quad (114)$$

Así $\overline{K_T}$ puede ser la matriz de la primer iteración o puede corresponder incluso a la de algún paso previo (inicial) K^0 .

De este modo el procedimiento convergerá en general a una velocidad más lenta. En este procedimiento la zona de "atracción" suele ser mayor.

2.1.2.3- Método incremental de secantes de cuasi Newton.

Una vez que se ha realizado la primer iteración con el método de Newton Raphson normal o modificado se obtiene:

$$da_n^1 = -\overline{K_T}^{-1} \cdot \psi_{n+1}^1 \quad (115)$$

se puede encontrar una pendiente secante, como se muestra en la siguiente figura, de tal modo que :

$$da_n^1 = -\left(K^2\right)^{-1} \cdot \left(\psi_{n+1}^1 - \psi_{n+1}^2\right) \quad (116)$$

Expresión que puede ser utilizada para calcular da_n^2 por medio de:

$$da_n^2 = -\left(K_s^2\right)^{-1} \cdot \left(\psi_{n+1}^2\right) \quad (117)$$

para $i > 1$ se puede escribir $da^i = -\left(K_s^i\right)^{-1} \cdot \left(\psi^i\right)$ (118)

donde $\left(K_s^i\right)^{-1}$ se determina de tal forma que se tiene:

$$da_n^{i-1} = -\left(K_s^i\right)^{-1} \cdot \left(\psi^{i-1} - \psi^i\right) = -\left(K_s^i\right)^{-1} \cdot \gamma^{i-1} \quad (119)$$

Para el sistema presentado en la figura, la determinación de K_s^1 es trivial y la convergencia es casi tan rápida como con el proceso de Newton Raphson.

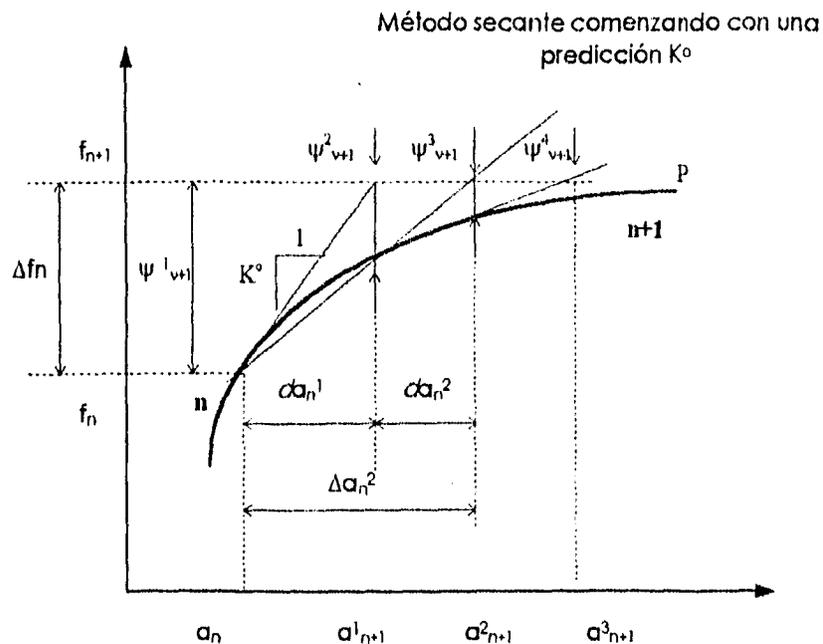


fig 2.3 - Método incremental de secantes de cuasi Newton.

2.1.2.4- Consideraciones generales sobre los métodos incrementales y aplicación.

Algunos de todos los métodos iterativos que existen fueron presentados en los incisos anteriores. Los mismos proporcionan las herramientas esenciales para la solución de todos los problemas no lineales en los que se utiliza la discretización por medio de elementos finitos. No nos hemos referido a los métodos iterativos directos tales como el de gradiente conjugado y los métodos de relajación dinámica en los que se realiza un análisis transitorio explícito para llegar a la solución estática.

De los métodos que se han presentado, el utilizado en el programa FEADAM84 (Duncan *et al*, 1984) usado en la presente tesis es el incremental de Newton-Raphson en el cual se introduce la variante de utilizar dos iteraciones para cada incremento de carga. La primera utiliza un valor del módulo tangente correspondiente al del inicio del incremento. La segunda utiliza el módulo consecuencia de considerar el valor medio de los esfuerzos durante el incremento en cuestión.

Forzando al segundo módulo a ser el correspondiente al valor medio de los esfuerzos para el incremento se adopta una especie de módulo secante, con lo cual, dentro de dicho incremento se considera al suelo como de comportamiento lineal. Por ello en la medida que se adopte un mayor número de estratos para representar al proceso constructivo, más se acercará el comportamiento modelado al real.

2.2- ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE.

A continuación se presentan técnicas que permiten estimar, en primera aproximación, la incertidumbre que afecta los resultados del método del elemento finito.

Introduciendo en el método del elemento finito parámetros caracterizados por sus valores esperados y por alguna medida de las incertidumbres que los afectan como sus varianzas, se busca obtener los valores medios y la dispersión de los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos en el problema en cuestión.

Este problema tiene particular interés para la mecánica de suelos y rocas debido a las grandes incertidumbres que afectan generalmente a las propiedades de estos materiales.

2.2.1- MÉTODO DE MONTE CARLO.

Este método también denominado "simulación de Monte Carlo" utiliza técnicas de simulación y estadística con el fin de cuantificar la incertidumbre de la respuesta.

El procedimiento empleado es el siguiente:

Seleccionando por muestreo aleatorio unos juegos (X_1, X_2, \dots, X_n) de los parámetros que rigen un determinado fenómeno es posible evaluar la función un número de veces tal que, del análisis estadístico de los resultados surja la densidad de probabilidad a través de un histograma. La principal limitación de este método es su convergencia extremadamente lenta. Sin embargo, si el número de variables es pequeño, es posible aumentar su eficiencia recurriendo a la aproximación multipuntual de Rosenblueth (Rosenblueth, 1975). Esta aproximación deja sin embargo de ser práctica para un número grande de variables.

La aplicación del método de Monte Carlo consiste en principio en resolver reiteradamente el sistema de ecuaciones del método del elemento finito:

$$(v) = [K]^{-1} \cdot (F) \quad (120)$$

Dado que la resolución de este sistema para un gran número de incógnitas es difícil, es conveniente recurrir al desarrollo de Neumann para acelerar estos cálculos. Para ello, se triangulariza la matriz K utilizando el procedimiento de Cholesky (Flores Macías, 1995).

$$[K] = [L] \cdot [L]^T \quad (121)$$

Donde la matriz L es triangular.

Llamando:

$$(X) = [L]^T (v) \quad (122)$$

se tiene

$$(F) = [L](X) \quad (123)$$

Como la matriz K es la que contiene los parámetros sujetos a una variación aleatoria, la misma puede ser descompuesta del modo siguiente:

$$[K] = [K_0] + [\Delta K] \quad (124)$$

donde K_0 representa a la matriz de rigidez en la que los parámetros aleatorios han sido reemplazados por valores representativos. De este modo se tiene que

$$[\Delta K] = [K] - [K_0] \quad (125)$$

La solución de v_0 correspondiente a K_0 se obtiene de:

$$(F) = [K_0] \cdot (v_0) \quad (126)$$

$$(v_0) = [K_0]^{-1} \cdot (F) \quad (127)$$

Desarrollando en series a la matriz K^{-1} se tiene:

$$[K]^{-1} = ([K_0] + [\Delta K])^{-1} \quad (128)$$

$$[K]^{-1} = ([I] - [P] + [P]^2 - [P]^3 + \dots) \cdot [K_0]^{-1} \quad (129)$$

siendo $[P] = [K_0]^{-1} \cdot [\Delta K]$ y reemplazando $[K]^{-1}$ en la expresión $(v) = [K]^{-1} \cdot (F)$, la solución de (v) está dada por la serie siguiente:

$$(v) = (v_0) - [P] \cdot (v_0) + [P]^2 \cdot (v_0) - [P]^3 \cdot (v_0) + \dots = (v_0) - (v_1) + (v_2) - (v_3) + \dots \quad (130)$$

Equivalente a la expresión siguiente:

$$[K_0] \cdot (v_i) = [\Delta K] \cdot (v_{i-1}) \quad (131)$$

Siendo las (v_i) y (v_{i-1}) los vectores de desplazamiento consecutivos pertenecientes a un proceso de iteración en el que se busca determinar (v) .

Este algoritmo permite por tanto acelerar el método de Monte Carlo; sin embargo, el método sigue resultando laborioso.

2.2.2- ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE DE SEGUNDOS MOMENTOS-PRIMER ORDEN.

Si, conociendo la distribución de probabilidad de una probabilidad de una o varias variables, se trata de definir la distribución de una función de las mismas, o por lo menos sus segundos momentos, es posible recurrir al análisis de segundos momentos-primer orden expuesto a continuación (Benjamin y Cornell, 1970).

Sea una función de una sola variable:

$$Y = g(x) \quad (132)$$

Si esta función es lineal, es decir si $Y = a + bX$, se tiene:

$$E[Y] = a + b.E[X] \quad (133)$$

$$V[Y] = b^2.V[X] \quad (134)$$

$$f_Y(y) = \left| \frac{1}{b} \right| \cdot f_X\left(\frac{y-a}{b}\right) \quad (135)$$

Del mismo modo, si:

$$Y = g(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i \quad (136)$$

$$E[Y] = \sum_{i=1}^n a_i \cdot E[X_i] \quad (137)$$

$$V[Y] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot V[X_i] + 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_i \cdot a_j \cdot COV[X_i, X_j] \quad (138)$$

Cuando la función no es lineal, es posible obtener una aproximación lineal de la misma y aplicar las expresiones anteriores.

A) CASO DE UNA VARIABLE.

Sea una función de una sola variable:

$$Y = g(x) \quad (139)$$

En la vecindad del valor medio de x , el desarrollo en serie de Taylor de la función $g(x)$ es:

$$g(x) = g(m_x) + (x - m_x) \cdot \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{m_x} + \frac{(x - m_x)^2}{2} \cdot \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{m_x} + \dots \quad (140)$$

donde: $\left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{m_x}$ es la derivada respecto a x de $g(x)$ evaluada en el valor medio de $x = m_x$.

Si el coeficiente de variación de x y el grado de no linealidad de la función $g(x)$ son pequeños puede ser aceptable conservar solamente los dos primeros términos de la expresión de la serie de Taylor. Si se toma la esperanza matemática de ambos miembros de la igualdad, notando que $E(x - m_x) = 0$, se tiene:

$$E[Y] = E[g(x)] \cong g(E[x]) \quad (141)$$

Asimismo, notando que $V(g(x - m_x)) = 0$, se tiene:

$$V[g(x)] = V \left[\left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{m_x} \cdot (x - m_x) \right] = \left[\left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{m_x} \right]^2 V[x] \quad (142)$$

Estas ecuaciones son rigurosamente exactas cuando $g(x)$ es función lineal de x .

B) CASO DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES.

Se pueden hacer las mismas aproximaciones utilizando el desarrollo de Taylor en varias dimensiones. Sea:

$$Y = g(x_i) \quad (143)$$

Las aproximaciones de primer orden del valor medio y de las varianzas serán:

$$E[Y] = g(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) \quad (144)$$

donde $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$ son los valores medios de x_1, x_2, \dots, x_n y:

$$V[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{m_{x_i}} \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|_{m_{x_j}} \cdot COV[x_i, x_j] \quad (145)$$

Si no hay correlación entre los x_i :

$$V[Y] = \sum_{i=1}^n \left[\left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{m_{x_i}} \right]^2 \cdot V[x_i] \quad (146)$$

o, con notación más compacta:

$$E[g(X)] = g(\bar{X}) \quad (147)$$

$$V[g(X)] = \nabla g^T \cdot COV[X] \cdot \nabla g \quad (148)$$

Debe hacerse notar que, en esta forma, solo se definen el valor medio y la varianza de la función $g(x_i)$. Estos parámetros son suficientes para definir la distribución de probabilidad de la función solo cuando tiene alguna forma particular conocida (distribución normal, por ejemplo). En el caso general, la distribución de $g(x_i)$ depende de las formas de las distribuciones de los parámetros x_i .

Sin embargo, pueden destacarse dos casos particulares:

- cuando $g(x_i)$ depende linealmente de un solo parámetro, la distribución de $g(x_i)$ tiene la misma forma que la distribución del parámetro considerado;
- si $g(x_i)$ depende linealmente de un gran número de parámetros independientes se puede considerar, con base en el teorema del límite central, que la distribución de $g(x_i)$ es aproximadamente normal. Los dos parámetros mencionados serán entonces suficientes para definir la distribución de $g(x_i)$, independientemente de las distribuciones de los diversos parámetros x_i .

Así, para valores de la relación de Poisson v muy cercanos a los valores límites, esto es 0 o 0,5, es evidente que la distribución de este parámetro será asimétrica.

Sin embargo si en un estudio se consideran, por ejemplo, tres materiales diferentes, los resultados del análisis dependerán en forma aproximadamente lineal de 6 parámetros independientes y se podrá considerar en primera aproximación que tienen una distribución normal a pesar de la asimetría de la distribución de la relación de Poisson.

C) CASO DE VARIAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

El método se generaliza fácilmente a múltiples funciones de varias variables. Se tiene para cada función y_k :

$$E[y_k] = g_k[E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)] \quad (149)$$

$$V[y_k] = \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i} / E \right) \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_j} / E \right) \text{COV}[X_i, X_j] \quad (150)$$

En este caso, también puede estimarse la covarianza entre los valores de las diferentes funciones.

$$\text{COV}[y_k, y_l] = \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i} / E \right) \left(\frac{\partial g_l}{\partial x_j} / E \right) \text{COV}[X_i, X_j] \quad (151)$$

D) APLICACIÓN AL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

En el caso de elasticidad lineal se definirá la matriz global de rigidez, siendo el fin último el obtener la solución en forma de un sistema de ecuaciones lineales:

$$[K] \cdot \{v\} = \{P\} \quad (152)$$

donde los términos presentes en la ecuación son:

$\{P\}$: vector de fuerzas actuantes en los nodos;

$[K]$: matriz de rigidez;

$\{v\}$: vector de desplazamientos nodales, v_i

La influencia de la incertidumbre de las propiedades de los materiales o de los parámetros que se utilizan para modelar su comportamiento puede ser modelada a través de diferentes métodos.

Recurriendo al análisis de segundos momentos-primer orden, el sistema puede escribirse del modo siguiente:

$$\{v\} = \{g(m_1, m_2, \dots, m_n)\} = [K^{-1}(m_1, m_2, \dots, m_n)] \quad (153)$$

$$\{v\} = \{g(m_1, m_2, \dots, m_n)\} = [K^{-1}(m_1, m_2, \dots, m_n)] \{P(m_1, m_2, \dots, m_n)\} \quad (154)$$

donde m_1, m_2, \dots, m_n son los valores que representan las características de los "n" materiales del medio. El análisis de incertidumbre de primer orden da como resultado las expresiones ya presentadas:

$$E[y_k] = g_k[E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)] \quad (155)$$

$$V\{y_k\} = \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i} / E \right) \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_j} / E \right) \text{COV}\{X_i X_j\} \quad (156)$$

$$\text{COV}\{y_k y_l\} = \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i} / E \right) \left(\frac{\partial g_l}{\partial x_j} / E \right) \text{COV}\{X_i X_j\} \quad (157)$$

donde $\frac{\partial g_k}{\partial m_j} / E$ es la derivada de g_k con respecto a m_j evaluada para el

valor medio de m_j .

La incertidumbre sobre los desplazamientos puede determinarse resolviendo el sistema de ecuaciones (152) y evaluando las derivadas con respecto a los parámetros del material m_i . Diferenciando con respecto a m_i :

$$\frac{\partial [K]}{\partial m_i} \cdot (v) + [K] \cdot \frac{\partial (v)}{\partial m_i} = \frac{\partial (P)}{\partial m_i} \quad (158)$$

$$[K] \cdot \frac{\partial (v)}{\partial m_i} = \frac{\partial (P)}{\partial m_i} - \frac{\partial [K]}{\partial m_i} \cdot (v) \quad (159)$$

Si se introducen fuerzas y desplazamientos ficticios (Cambou, 1974) definidos como:

$$(P_f) = \frac{\partial (P)}{\partial m_i} - \frac{\partial [K]}{\partial m_i} \cdot (v) \quad (160)$$

$$(v_f) = \frac{\partial (v)}{\partial m_i} \quad (161)$$

La expresión (152) puede ser escrita del modo siguiente:

$$[K] \cdot (v_f) = (P_f) \quad (162)$$

Este sistema y el (152) pueden ser resueltos utilizando el mismo algoritmo. La incertidumbre de los esfuerzos en cada elemento puede obtenerse a través de la incertidumbre de los desplazamientos. Así, para un determinado elemento se tiene:

$$(s)^e = [D] \cdot [B] \cdot (v)^e \quad (163)$$

$(s)^e$: tensor de esfuerzos;
 $[D]$: matriz de elasticidad;
 $(v)^e$: vector de desplazamientos nodales;
 $[B]$: matriz de propiedades geométricas;

Diferenciando con respecto a m_i se tiene:

$$\frac{\partial (s)^e}{\partial m_i} = \frac{\partial [D] \cdot [B]}{\partial m_i} \cdot (v)^e + [D] \cdot [B] \cdot \frac{\partial (v)^e}{\partial m_i} \quad (164)$$

donde: $\frac{\partial(v)^e}{\partial m_i}$ es un factor conocido por lo que es posible obtener $\frac{\partial(S)^e}{\partial m_i}$ y

luego por medio del empleo de las expresiones del método de los segundos momentos obtener la incertidumbre sobre los esfuerzos.

Diversos autores (Cambou, 1974 ; Magnan, 1987; Bouayed, 1993) han desarrollado programas para la aplicación de este método; sin embargo, han sido poco usados en la práctica de la ingeniería.

2.2.3- MÉTODO DE LAS PERTURBACIONES.

Otro procedimiento también basado en el desarrollo en series de Taylor es el método de las perturbaciones (Mathews, 1964). Nuevamente, el comportamiento del suelo es estudiado en términos de la esperanza matemática y la varianza.

El método del elemento finito consiste en resolver el sistema:

$$(v) = [K]^{-1} \cdot (F) \quad (165)$$

Si a la matriz de rigidez se la escribe como

$$[K] = [K^0] + \sum_{k=1}^N [K_k^I] \cdot x_k + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N [K_{kl}^{II}] \cdot x_k \cdot x_l + \dots \quad (166)$$

donde

[K]: matriz de rigidez;

x_i : variables aleatorias que representan la incertidumbre del sistema;

$i: 1, \dots, N$;

N: número de variables aleatorias;

[K⁰]: matriz de rigidez evaluada en $x = [x_1, x_2, \dots, x_n] = 0$;

$$[K_k^I] = \left. \frac{\partial[K]}{\partial x_k} \right|_{x=0} \quad (167)$$

$$[K_{kl}^{II}] = \left. \frac{\partial^2[K]}{\partial x_k \cdot \partial x_l} \right|_{x=0} \quad (168)$$

El vector de fuerzas externas es para nuestro caso un vector de elementos no acompañados de incertidumbre, por tanto, de carácter determinista.

El vector de desplazamientos puede ser descompuesto de modo similar:

$$(v) = (v^0) + \sum_{k=1}^N (v_k^I) \cdot x_k + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (v_{kl}^{II}) \cdot x_k \cdot x_l + \dots \quad (169)$$

donde (v^0) , (v_k^I) y (v_{kl}^{II}) pueden ser obtenidos a través de las siguientes expresiones:

$$(v^o) = [K^o]^{-1} \cdot (F^o) \quad (170)$$

$$(v_k^I) = [K^o]^{-1} \cdot \left((F_k^I) - [K_k^I] \cdot (v^o) \right) \quad (171)$$

$$(v_{kl}^{II}) = [K^o]^{-1} \cdot \left((F_{kl}^{II}) - \left([K_k^I] \cdot (v_k^I) + [K_l^I] \cdot (v_l^I) + [K_{kl}^{II}] \cdot (v^o) \right) \right) \quad (172)$$

El empleo de estas expresiones presenta la ventaja de utilizar el K^o para determinar el valor de v^o , v_k^I y v_{kl}^{II} . Las deformaciones y los esfuerzos para un elemento pueden ser calculados del modo siguiente.

De acuerdo a la teoría de elementos finitos se sabe que:

$$(\varepsilon) = [B] \cdot (v) \quad (173)$$

donde [B] es la matriz que representa la geometría y las características del material.

Por lo tanto para obtener el i -ésimo vector de deformaciones [ε] se aplica:

$$(\varepsilon) = (\varepsilon^o) + \sum_{k=1}^N (\varepsilon_k^I) \cdot x_k + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (\varepsilon_{kl}^{II}) \cdot x_k \cdot x_l + \dots \quad (174)$$

donde:

$$(\varepsilon^o) = [B] \cdot (v^o) \quad (175)$$

$$(\varepsilon_k^I) = [B] \cdot (v_k^I) \quad (176)$$

$$(\varepsilon_{kl}^{II}) = [B] \cdot (v_{kl}^{II}) \quad (177)$$

El vector de tensiones de acuerdo a la ley de Hooke es:

$$(\sigma) = [D] \cdot (\varepsilon) \quad (178)$$

donde la matriz de elasticidad [D] puede escribirse como:

$$[D] = [D^o] + \sum_{k=1}^N [D_k^I] \cdot x_k + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N [D_{kl}^{II}] \cdot x_k \cdot x_l + \dots \quad (179)$$

donde D^o corresponde a la matriz de elasticidad evaluada en $\xi=0$ y:

$$[D_k^I] = \left. \frac{\partial [D]}{\partial x_k} \right|_{x=0} \quad (180)$$

$$[D_{kl}^{II}] = \left. \frac{\partial^2 [D]}{\partial x_k \cdot \partial x_l} \right|_{x=0} \quad (181)$$

Además se tiene:

$$(\sigma) = (\sigma^o) + \sum_{k=1}^N (\sigma_k^I) \cdot x_k + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (\sigma_{kl}^{II}) \cdot x_k \cdot x_l + \dots \quad (182)$$

donde:

$$(\sigma^o) = [D^o] \cdot (\varepsilon^o) \quad (183)$$

$$(\sigma_k^I) = [D^o] \cdot (\varepsilon_k^I) + [D_k^I] \cdot (\varepsilon^o) \quad (184)$$

$$(\sigma_{kl}^{II}) = [D^o] \cdot (\varepsilon_{kl}^{II}) + [D_k^I] \cdot (\varepsilon_l^I) + [D_l^I] \cdot (\varepsilon_k^I) + [D_{kl}^{II}] \cdot (\varepsilon^o) \quad (185)$$

Uno de los objetivos del método de los elementos finitos estocástico es el cálculo del primer y segundo momento de la respuesta (media y covarianza). Si se utilizan los primeros dos términos de la expresión de (v) se obtiene una aproximación de primer orden. Se tiene de este modo:

$$(v) = (v^o) + \sum_{k=1}^N (v_k^I) \cdot \alpha_k \quad (186)$$

Siendo la esperanza y la covarianza:

$$E^I[v] = v^o \quad (187)$$

$$COV^I[v, v] = E\left[\left((v) - E^I[v]\right)\left((v) - E^I[v]\right)\right] = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N v_k^I \cdot v_l^I \cdot E\{\alpha_k \alpha_l\} \quad (188)$$

Si se considera un término adicional en el vector de desplazamientos considerado, se obtendrán las siguientes expresiones para la esperanza y la covarianza:

$$(v) = (v^o) + \sum_{k=1}^N (v_k^I) \cdot x_k + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (v_{kl}^{II}) \cdot x_k \cdot x_l \quad (189)$$

$$E^{II}[v] = E^I[v] + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (v_{kl}^{II}) \cdot E\{x_k \cdot x_l\} \quad (190)$$

$$COV[v, v] = E\left[\left((v) - E^I[v]\right)\left((v) - E^I[v]\right)\right] + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (v_{kl}^{II}) (v_{ij}^{II}) \cdot \left\{ E\{x_k \cdot x_j\} \cdot E\{x_l \cdot x_i\} + E\{x_k \cdot x_i\} \cdot E\{x_l \cdot x_j\} \right\} \quad (191)$$

En la obtención de la covarianza se supone una distribución normal para los ξ . La esperanza y la covarianza para los esfuerzos se obtiene de un modo análogo al seguido para obtener los correspondientes a los desplazamientos.

2.2.4 MÉTODO DE LOS COCIENTES POLINOMIALES.

El cálculo explícito de las derivadas de los desplazamientos para aplicar el método de los segundos momentos requiere de laboriosos cálculos. Una interesante alternativa consiste en estimar dichas derivadas utilizando un método numérico conocido como técnica de cocientes polinomiales (Chowdury, 1993; Nechnech, 1994). El análisis de incertidumbre puede ser de este modo facilitado, implementándolo a programas preexistentes con escasa a nulas modificaciones por tratarse de un procedimiento externo, que además puede fácilmente ser extendido a análisis no lineales.

Por ende, el método de los cocientes polinomiales es de utilidad tanto si las funciones sobre las que trabajan son implícitas o explícitas, lineales o no lineales.

Una relación polinomial se define como el cociente de dos polinomios. La técnica numérica basada en éste concepto no es nueva, a pesar de que los textos suelen no incluirla en sus contenidos aunque sí incluyen el método de interpolación por medio de cocientes polinomiales.

La técnica de cocientes polinomiales puede ser utilizada como herramienta para aproximar funciones, aproximar sus derivadas e integrales, y para interpolación de funciones multivariadas.

Como vimos en los incisos anteriores, el valor medio y la varianza de una función de comportamiento pueden estimarse por linealización de la función en el centroide medio. El valor medio y la varianza de una función $g(X)$, en que X es el vector de variables aleatorias del suelo, pueden ser escritos en forma compacta como sigue:

$$E[g(X)] = g(\bar{X}) \quad (192)$$

$$V[g(X)] = \nabla G^T \cdot \text{COV}[X] \cdot \nabla G \quad (192')$$

donde \bar{X} es el vector de valores medios de las propiedades del suelo; ∇G es el vector de derivadas parciales de la función de comportamiento calculada con los valores medios de las variables aleatorias, y $\text{COV}(X)$ es la matriz de covarianza de las variables aleatorias. Las ecuaciones (192) corresponden a las ecuaciones (148).

El cálculo del vector de derivadas parciales es esencial para evaluar las ecuaciones (192) y, por lo tanto, debe utilizarse un método numérico apropiado.

Considérese la función "g" de "n" variables:

$$g = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (193)$$

Las derivadas de g en el punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ pueden ser obtenidas por medio de la técnica de relaciones polinomiales. Primeramente, se toman los valores de x_2 a x_n iguales a $(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)$ respectivamente y considerando m juegos de valores de $x_1^{(i)}$ dados por $i=1, 2, \dots, m$. Esto significa que m valores discretos son asignados a la variable x_1 y esos valores deben hallarse entre valores límites tanto máximos como mínimos de dicha variable (solamente si el valor medio y la desviación estándar de la variable son conocidos, los m valores nodales pueden ser seleccionados considerando a los valores mayores y menores a partir del valor medio sumando y restando k veces el valor de la desviación estándar, siendo en este caso un valor de k razonable 3). Una vez asumidas o especificadas las condiciones límite, los valores discretos deben tomarse cercanos al valor medio dado que el cálculo de las derivadas en los valores medios a menudo es

requerido. Así se tienen m juegos de valores de funciones parciales con respecto a x_1 , que pueden ser escritas del siguiente modo:

$$\begin{aligned} g_{11} &= g(x_1^{(1)}, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ g_{12} &= g(x_1^{(2)}, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ g_{1m} &= g(x_1^{(m)}, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \end{aligned} \quad (194)$$

El número m no necesita ser grande, siendo un valor de 3 a 5 a menudo suficiente.

La función parcial sobre el argumento x_1 puede ser aproximada por medio de una relación polinomial expresada en la forma de una fracción continua. Esta fracción continua es la que a continuación se presenta:

$$g_1(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = a_1 + \frac{x_1 - x_1^{(1)}}{a_2 + \frac{x_1 - x_1^{(2)}}{a_3 + \frac{x_1 - x_1^{(3)}}{\dots + \frac{x_1 - x_1^{(m-1)}}{a_m}}} \quad (195)$$

El término de la derecha simplemente consiste en un número de fracciones y coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n . La evaluación de los mismos se discutirá en breve.

La ecuación (195) puede ser escrita en modo compacto como:

$$g_1(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \phi_1(x_1) \quad (196)$$

La relación entre $\phi_i(x_1)$ y $\phi_{i+1}(x_1)$ puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\phi_i(x_1) = a_i + \frac{x_1 - x_1^{(i)}}{\phi_{i+1}(x_1)} \quad (197)$$

El último valor de $\phi(x_1)$, por ejemplo, $\phi_m(x_1)$ está dado por:

$$\phi_m(x_1) = a_m \quad (198)$$

Los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n en la expresión (195) pueden ser calculados utilizando el procedimiento de la tabla 2.1 que a continuación se presenta.

Tabla 2.1 - Coeficientes polinomiales

a_1	a_2	a_3	a_4	...
$a_1 = g_{11}$...
$a_{21} = g_{12}$	$a_2 = \frac{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}}{a_{21} - a_1}$...
$a_{31} = g_{13}$	$a_{32} = \frac{x_1^{(3)} - x_1^{(1)}}{a_{31} - a_1}$	$a_3 = \frac{x_1^{(3)} - x_1^{(2)}}{a_{32} - a_2}$...
$a_{41} = g_{14}$	$a_{42} = \frac{x_1^{(4)} - x_1^{(1)}}{a_{41} - a_1}$	$a_{43} = \frac{x_1^{(4)} - x_1^{(2)}}{a_{42} - a_2}$	$a_4 = \frac{x_1^{(4)} - x_1^{(3)}}{a_{43} - a_3}$...
...

La derivada parcial de g con respecto al argumento x_1 puede ahora ser estimada utilizando el método de relaciones polinomiales. Utilizando las ecuaciones (195), (196) y (197) la derivada parcial de g puede ser aproximada como sigue:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \cong \phi_1'(x_1) \quad (199)$$

Por aplicación de la regla de la diferenciación del cociente repetidamente a (197) con $i=1$, la expresión (199) puede ser escrita:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \cong \phi_1'(x_1) = \frac{\phi_2(x_1) - [x_1 - x_1^{(1)}] \cdot \phi_2'(x_1)}{[\phi_2(x_1)]^2} \quad (200')$$

En general, la diferenciación de (197) dará:

$$\phi_i'(x_1) = \frac{\phi_{i+1}(x_1) - [x_1 - x_1^{(i)}] \cdot \phi_{i+1}'(x_1)}{[\phi_{i+1}(x_1)]^2} \quad (200'')$$

Cuando $i=m$, la diferencial de (196) será:

$$\phi_m'(x_1) = 0 \quad (200''')$$

Sustituyendo x_1 por \bar{x}_1 en (200), obtenemos la derivada parcial de g con respecto a x_1 en el punto $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, por ejemplo:

$$\frac{\partial g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_1} \cong \phi_1'(\bar{x}_1) \quad (201)$$

Por el mismo método, puede obtenerse la derivada parcial de g con respecto a los restantes argumentos (variables aleatorias) en el punto $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

2.3- ALGORITMOS PARA APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE SEGUNDOS MOMENTOS EN ELASTICIDAD LINEAL.

2.3.1 PROGRAMAS MEFISTO y RAPOL

Para obtener por medio del método del elemento finito, el estado de esfuerzos y deformaciones en una masa de suelo y la incertidumbre sobre los resultados, asumiendo un comportamiento elástico lineal se han desarrollado dos algoritmos basados respectivamente en el método explícito del inciso 2.2.2 (Programa MEFISTO; Bouayed, 1993) y en el método de los cocientes polinomiales (Programa RAPOL; Bouayed 1995). El programa MEFISTO se desarrolla según el diagrama de flujo siguiente.

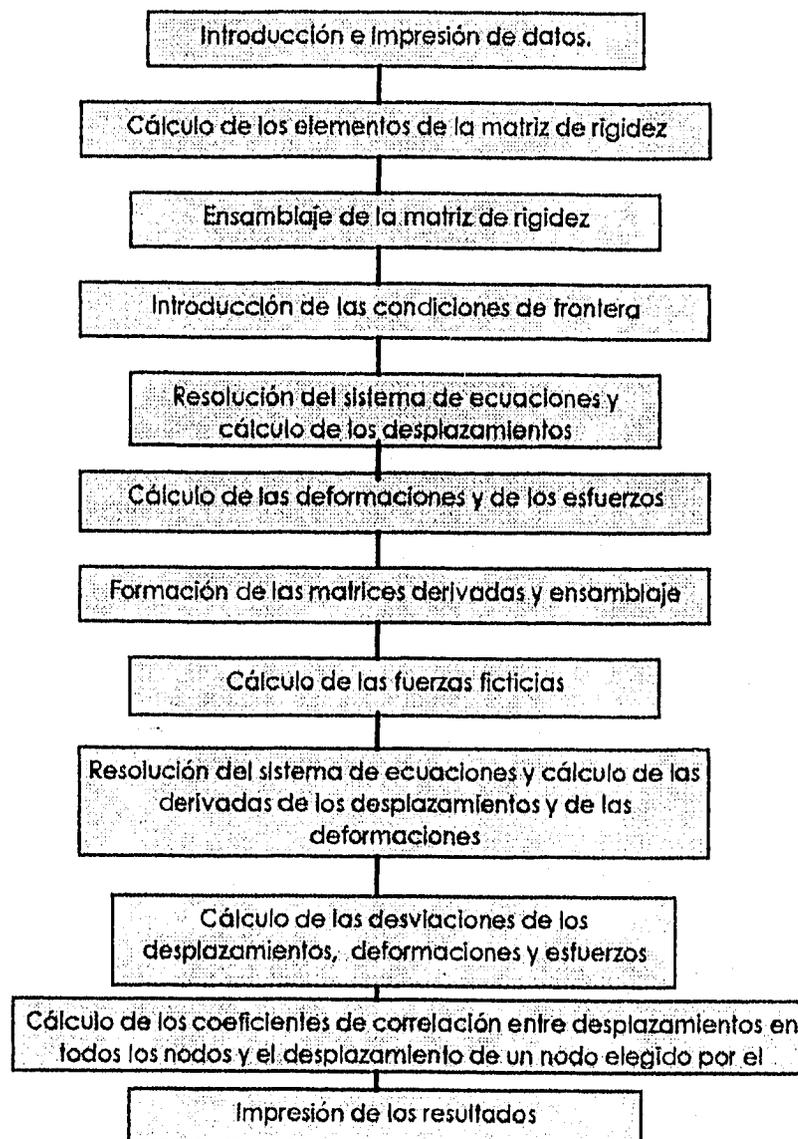


fig 2.4 - Diagrama de flujo programa MEFISTO (Bouayed, 1995)

Para ilustrar los resultados típicos obtenidos con estos programas, se presentan a continuación ejemplos simples de aplicación.

2.3.2- APLICACIÓN A UN SÓLIDO ELEMENTAL .

Se considera un cuerpo prismático con propiedades aleatorias (Fig.3.5) sujeto a una carga axial de 1 kPa. Se supone que existen condiciones de deformación plana. El cuerpo se representa mediante una malla de 64 elementos finitos triangulares.

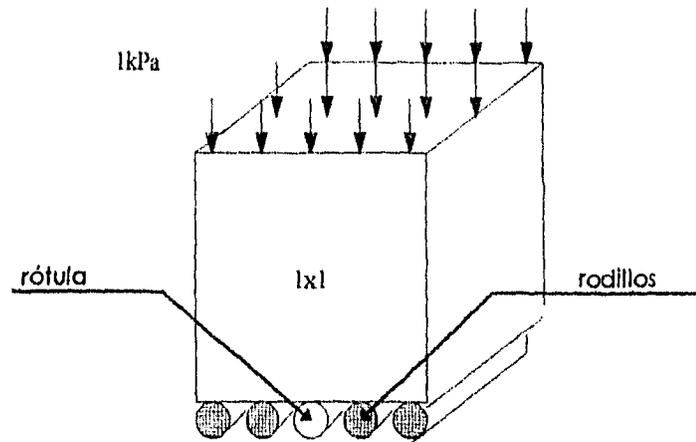


fig 2.5 - Cuerpo prismático con propiedades aleatorias

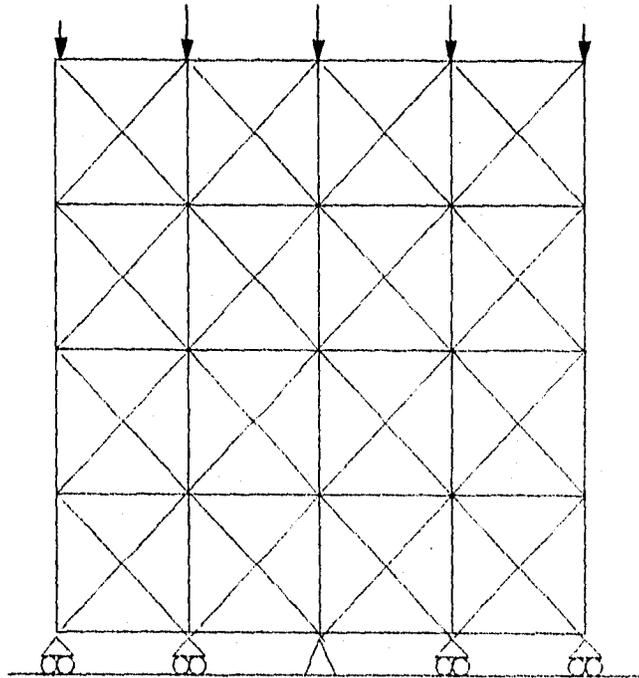


fig 2.6 - Malla de elementos finitos

En los análisis que se presentan a continuación, se hicieron diferentes hipótesis en cuanto a los materiales constitutivos del sólido. Los casos a los que se hará referencia son los que a continuación se ilustran.

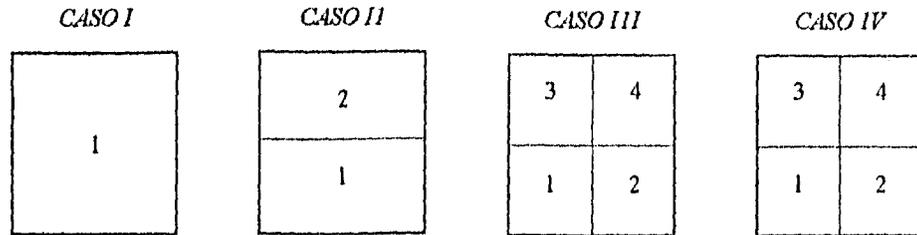


fig 2.7 - Casos estudiados

Los casos I, II, III corresponden a materiales cuyas propiedades aleatorias no se encuentran correlacionadas. En tanto que el caso IV contempla la opción de que las propiedades sí se hallan correlacionadas (coeficiente de correlación de 0.5).

En todos los casos los parámetros estadísticos de las propiedades de los materiales son los siguientes:

$$E[E]=1000 \text{ kPa}$$

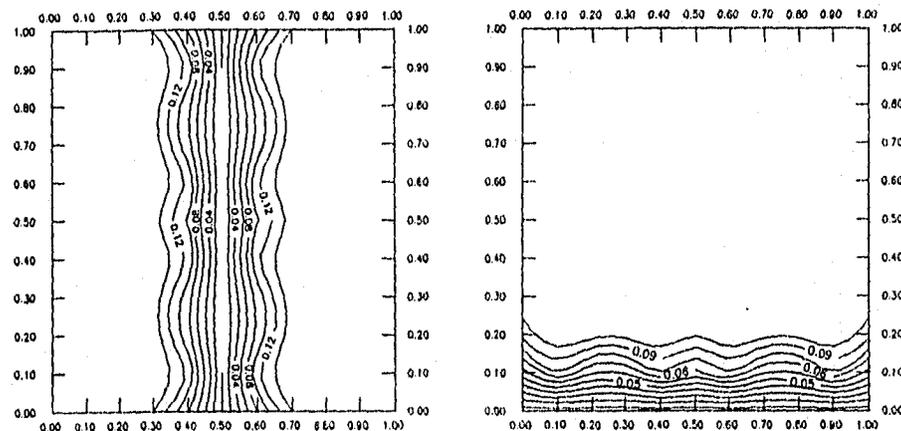
$$CV[E]=0.1$$

$$E[\nu]=0.3$$

$$CV[\nu]=0.1$$

A) Prisma cúbica homogénea.

El contorno de las líneas de CV de los desplazamientos verticales y horizontales se presentan a continuación:



a) Coeficiente de variación del desplazamiento X.

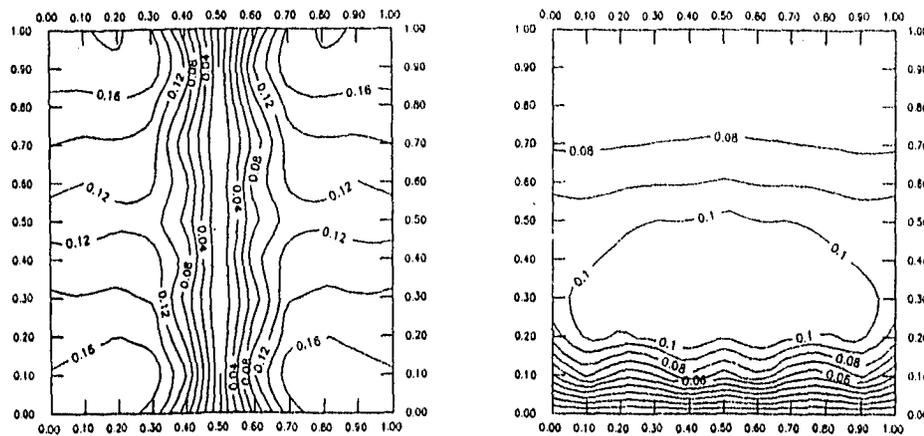
b) Coeficiente de variación del desplazamiento Y.

fig 2.8

Puede observarse que el CV de los desplazamientos verticales es prácticamente constante en la masa del sólido, a excepción del borde inferior donde los desplazamientos fueron impuestos y no existe incertidumbre. Por otro lado, en el caso de los desplazamientos horizontales el coeficiente de variación es nulo sobre el eje de simetría vertical independientemente de los valores específicos de los parámetros del material.

B) Prisma cúbico con dos capas de materiales no correlacionados.

El contorno de las líneas de CV de los desplazamientos verticales y horizontales se presentan a continuación:



a) Coeficiente de variación del desplazamiento X.

b) Coeficiente de variación del desplazamiento Y.

fig 2.9

Puede observarse que el CV del desplazamiento vertical es menor que el presentado para el caso A, especialmente en la parte superior del sólido, donde el efecto de compensación estadística de los desplazamientos aleatorios de los dos materiales es más significativo. Otro punto a destacar es que, dado el efecto preponderante que tiene el módulo de Young sobre la incertidumbre, el CV de los desplazamientos verticales en el borde superior del sólido se reduce aproximadamente

en un factor de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

En el CV correspondiente a los desplazamientos horizontales también pueden observarse efectos de compensación en las caras laterales del sólido, cerca del contacto de los dos materiales.

C) Prisma cúbico con cuatro materiales no correlacionados.

El contorno de las líneas de CV de los desplazamientos verticales y horizontales se presentan a continuación:

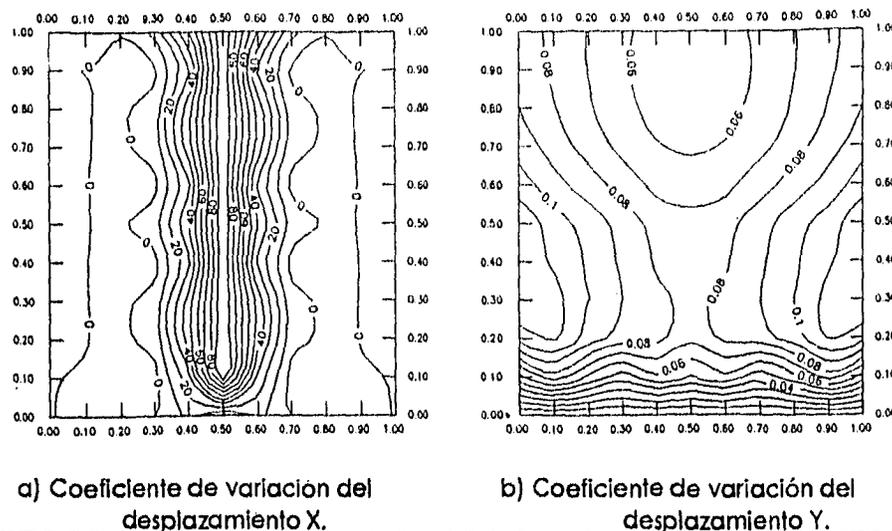


Figura 2.10

Al estudiar los resultados presentados en los casos A, B y C puede concluirse que el aumento en el número de materiales provoca una reducción en el CV resaltando la influencia conjunta de los materiales presentes. Así, de contarse con un número infinito de materiales no correlacionados y con propiedades idénticas, el comportamiento del conjunto tiende a ser igual al de un material de propiedades deterministas. En cuanto a la distribución del CV del desplazamiento horizontal en la sección estudiada se observa que alcanza valores muy grandes en las cercanías del eje de simetría, donde los desplazamientos horizontales poseen un valor esperado nulo pero en los que su desviación estándar es positiva. Lo anterior pone de manifiesto las limitaciones del concepto de coeficiente de variación en este tipo de situaciones.

D) Prisma cúbico con cuatro materiales correlacionados.

Los contornos de isovalores del CV de los desplazamientos verticales y horizontales se presentan a continuación:

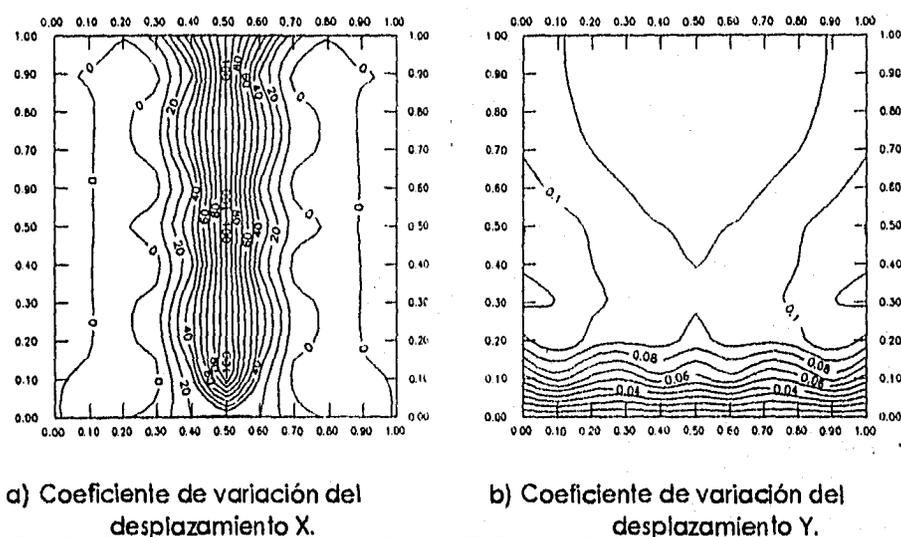


Figura 2.11

Cuando existe cierto grado de correlación entre las propiedades de los materiales se observa que el efecto de compensación estadística es menos pronunciado y la incertidumbre en los desplazamientos es mayor.

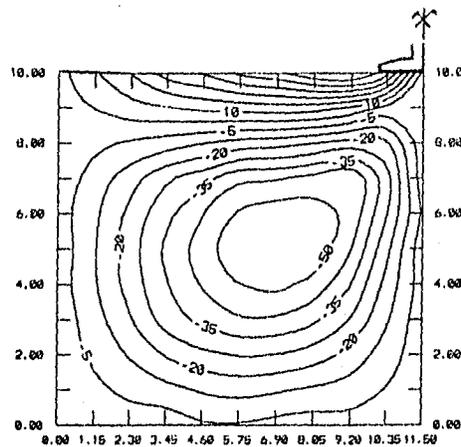
2.3.3- PROBLEMA TÍPICO DE MECÁNICA DE SUELOS.

El problema ilustrativo al que haremos referencia es típico en mecánica de suelos. Se trata del cálculo de asentamientos inmediatos bajo una zapata de fundación (López Fuerte, 1996).

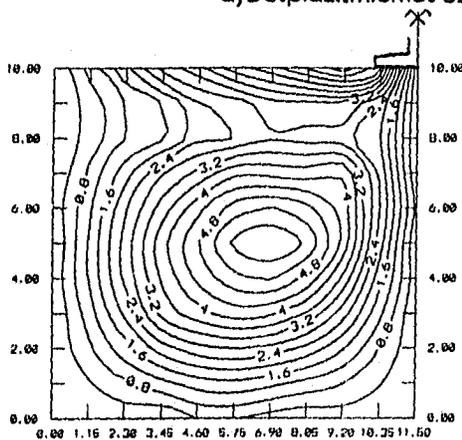
Se considera una zapata apoyada en un suelo homogéneo con las propiedades aleatorias siguientes:

$E[E] = 50 \text{ kPa}$	$E[v] = 0.3$
$CV[E] = 0.1$	$CV[v] = 0.1$

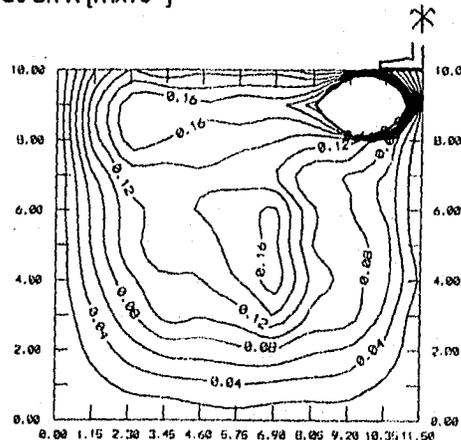
El problema se resolvió tanto para desplazamientos verticales como horizontales. En las figuras se muestran las curvas correspondientes a los desplazamientos horizontales esperados, desviación estándar y coeficiente de variación de los nombrados desplazamientos.



a) Desplazamientos esperados en X [$mx10^{-4}$]



b) Desviación estándar del desplazamiento en X.



c) Coeficiente de variación del desplazamiento en X.

fig 2.12

Puede observarse que, como en el caso del sólido elemental, la incertidumbre decrece en la cercanía de los nodos donde fueron impuestas condiciones de frontera y del eje de simetría. Otra característica es que el CV asume valores muy altos en áreas donde el desplazamiento cambia de signo. Esto es consecuencia de que el valor de dichos desplazamientos es muy cercano a cero en tanto que la desviación estándar permanece positiva. Los resultados obtenidos para los desplazamientos verticales son análogos.

CAPÍTULO 3

APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE TERRAPLENES

3.1- ANÁLISIS NO LINEAL DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN TERRAPLENES. FEADAM84.

El método del elemento finito ha sido adaptado para poder considerar la no linealidad de la relación esfuerzo deformación del suelo. Uno de los modelos de este tipo utiliza un modelo hiperbólico desarrollado inicialmente por Kondner (1968), posteriormente por Duncan, Byrne, Wong y Mabry, y modificado por Seed y Duncan (Programa FEADAM84). Este modelo, que se presenta a continuación es el que se complementa en este trabajo para tomar en cuenta el carácter aleatorio de las propiedades de los materiales.

El programa de cálculo FEADAM84 utiliza el procedimiento de incrementos sucesivos de la carga. Dentro de un dado incremento se considera que las propiedades varían linealmente, pero entre incrementos sucesivos se considera no linealidad. Los valores de los parámetros que se utilizan para modelar el comportamiento de cada elemento de suelo son reevaluados teniendo en cuenta el estado de esfuerzos y la historia de esfuerzos previa del mismo elemento.

La relación de esfuerzo deformación incremental para un material isotrópico bajo la hipótesis de un estado plano de esfuerzo deformación puede expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{3 \cdot B}{9 \cdot B - E} \begin{bmatrix} (3 \cdot B + E) & (3 \cdot B - E) & 0 \\ (3 \cdot B - E) & (3 \cdot B + E) & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (202)$$

$$B = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \quad (203)$$

Las curvas esfuerzo deformación tienen la forma indicada a continuación:

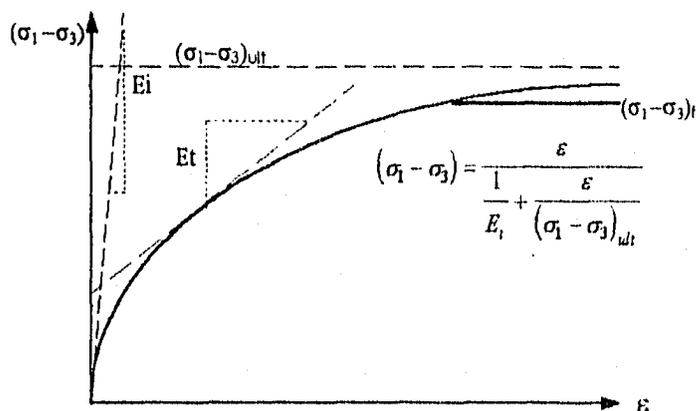


fig 3.1 - Representación hiperbólica de la curva esfuerzo deformación

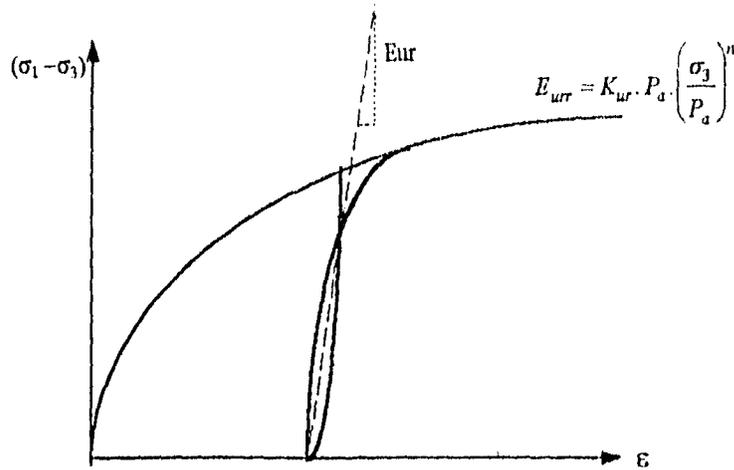


fig 3.2 - Representación lineal de la curva esfuerzo deformación en las etapas de descarga y recarga

donde: E_i = módulo tangente inicial;
 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ = valor asintótico del esfuerzo desviador.

La relación existente entre $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ y $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ es la siguiente:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad (204)$$

siendo, de acuerdo con el criterio de falla de Mohr Coulomb:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sigma_3 \cdot \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (205)$$

El modelo contempla la variación de ϕ con respecto a σ_3 .

$$\phi = \phi_0 - \Delta \phi \cdot \log \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right) \quad (206)$$

Las ecuaciones de las rectas pendientes de la curva de carga primaria y la de descarga y recarga son las siguientes:

$$E_i = \left[1 - (R_f \cdot SL) \right]^2 \cdot K \cdot P_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (207)$$

$$E_{UR} = K_{UR} \cdot P_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (208)$$

donde:

$$SL = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \quad (209)$$

Siendo SL el nivel de esfuerzos. Un índice adicional que incorpora el modelo hiperbólico modificado es el SS o estado de esfuerzos, el cual responde a la siguiente expresión:

$$SS = SL \cdot \sqrt[4]{\frac{\sigma_3}{p_a}} \quad (210)$$

El módulo de carga primaria E_1 es el que debe utilizarse cuando el estado de esfuerzos es mayor o igual al estado de esfuerzos previo máximo. Esto es $SS \geq SS_{\max, pas}$. En caso contrario el módulo utilizado es el E_{UR} . El valor de $SL_{crítico}$ para un dado σ_3 es:

$$SL_{crítico} = \frac{SS_{máx pas}}{\sqrt[4]{\frac{\sigma_3}{p_a}}} \quad (211)$$

Con el fin de evitar inestabilidades en el programa se introdujo una transición en el valor que adopta el módulo. La variación del módulo con el valor de SL puede ser representada gráficamente del siguiente modo:

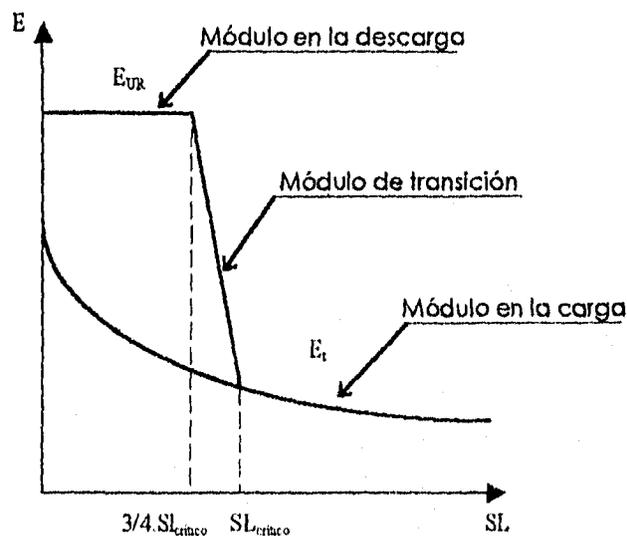


fig 3.3 - Evaluación del módulo SL

El inconveniente que introduce esta modificación es la subestimación del módulo del suelo en la transición entre carga primaria y descarga.

En cuanto al módulo de deformación volumétrica se establecen límites de acuerdo al valor del ϕ :

1. Para $\phi > 2.3^\circ$:

$$v_{mín} = \frac{1 - \text{sen } \phi}{2 - \text{sen } \phi} \quad (212)$$

siendo:

$$v = \frac{1}{2} - \frac{E_t}{6 \cdot B} \quad (212')$$

aunque otros autores utilizan expresiones diferentes de la relación de Poisson (Kulhawy et al):

$$v = \frac{G - F \cdot \log\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)}{\left[1 - \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{K \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \left[1 - \frac{R_f \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot (1 - \text{sen } \phi)}{2 \cdot c \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sigma_3 \cdot \text{sen } \phi}\right]}\right]^2} \quad (212'')$$

además:

$$B_{min} \geq \left(\frac{E_t}{3}\right) \left(\frac{2 - \text{sen } \phi}{\text{sen } \phi}\right) \quad (213)$$

$$B = K_B \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^m \quad (213')$$

2. Para $\phi < 2.3^\circ$:

$$B_{min} = 17 \cdot E_t \quad (214)$$

Por lo tanto para un modelo no lineal los parámetros que se requiere conocer son los siguientes:

1. K, K_{UR} : números de módulo;
2. n : exponente del módulo;
3. c : resistencia no drenada;
4. $\phi, \Delta\phi$: parámetros del ángulo de fricción;
5. R_f : relación de falla;
6. K_B : número de módulo volumétrico;
7. m : exponente del módulo volumétrico.

3.2- IMPLEMENTACIÓN DEL ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE.

El programa de cálculo FEADAM84 (Duncan et al, 1984) utiliza el modelo hiperbólico para representar el comportamiento no lineal del suelo, pero permite trabajar con comportamiento lineal en caso de requerirse. Se implementó el análisis de incertidumbre como complemento de este programa utilizando la técnica de cocientes polinomiales (programa FEADORL96).

La necesidad de calcular el vector de derivadas de la función respecto a las variables aleatorias y su transpuesto, ∇G y ∇G^T respectivamente, para evaluar la covarianza, ver ec. (215), llevó al estudio de técnicas que permitieran realizar dicho cálculo en forma externa a la ejecución del programa a los fines de evitar las modificaciones importantes dentro del mismo.

$$V[g(X)] = VG^T \cdot COV[X] \cdot VG \quad (215)$$

Como puede observarse de la ec.(215) es necesario conocer la matriz de covarianzas. Para su ingreso se cuenta con dos posibilidades. Ellas son:

A) Ingresar la matriz de covarianzas directamente. El principal inconveniente consiste en que el valor de los elementos que la componen no tiene un significado físico manejable, además de que posee las mismas unidades que las variables a las que se refiere pero elevadas al cuadrado.

B) Ingresar la matriz de coeficientes de correlación y el vector de desviaciones estándar.

Conocidos éstos grupos de datos puede ser calculada la matriz de covarianzas utilizando la siguiente expresión:

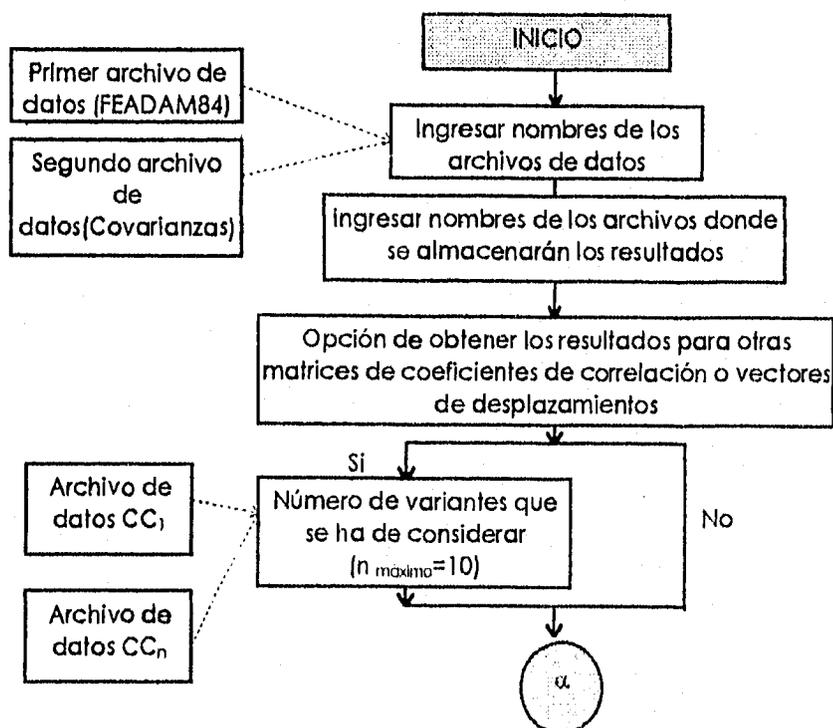
$$\rho_{i,j} = \frac{COV(X_i, X_j)}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \quad (216)$$

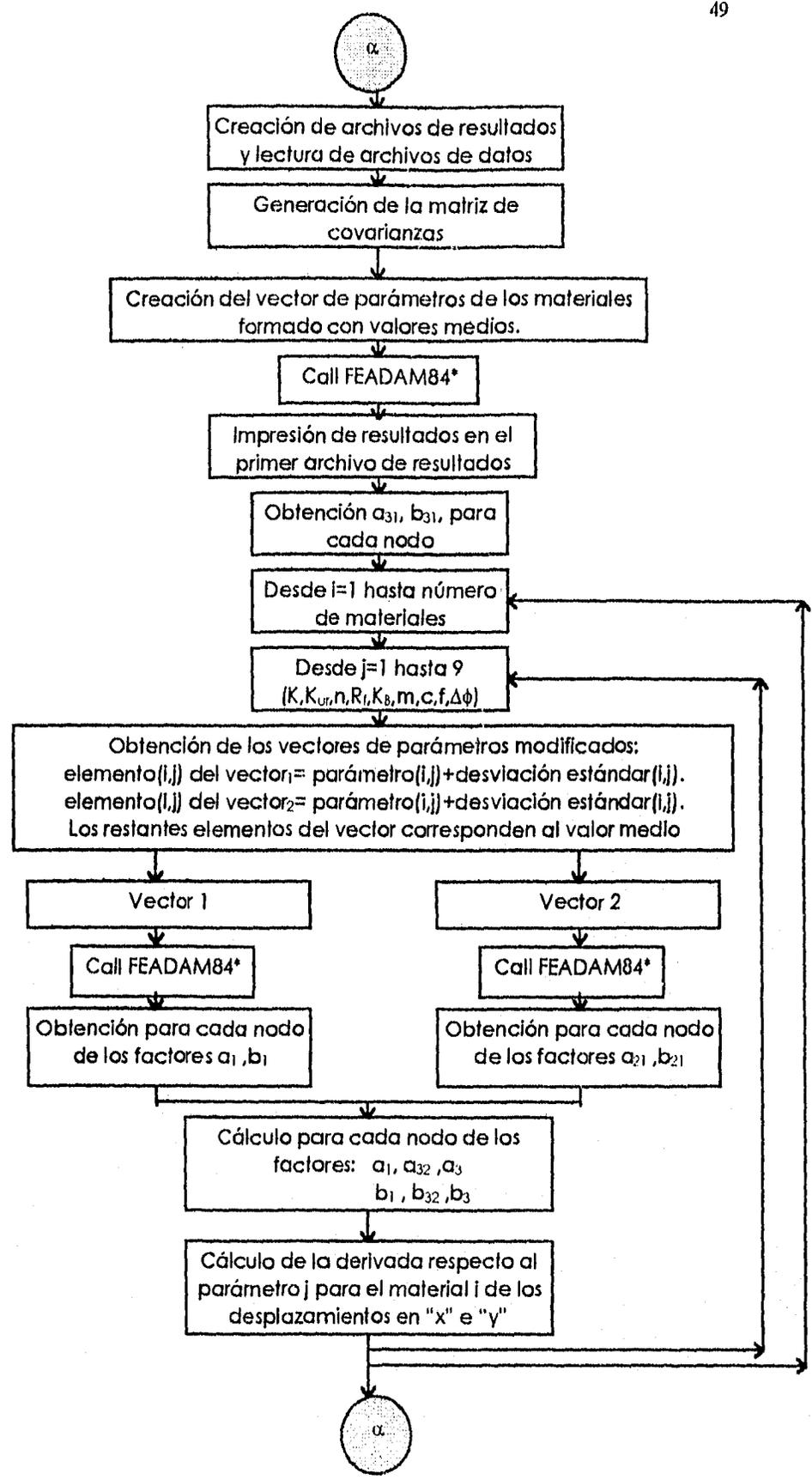
siendo ρ_{ij} el coeficiente de correlación entre las variables aleatorias x_i y x_j ; σ_i y σ_j las desviaciones estándar de las variables x_i y x_j respectivamente.

La principal ventaja consiste en que los coeficientes de correlación poseen valores comprendidos entre 0 y 1, y que reflejan en una manera directa la correlación existente entre las variables en cuestión, en tanto que el vector de desviaciones estándar posee las mismas unidades que las variables a las que se refiere lo cual lo hace un concepto físicamente comprensible.

Esta es la opción por la que se optó en cuanto al ingreso de datos al programa FEADORL96.

Se estructuró el programa a través de un diagrama de flujo como el presentado a continuación.





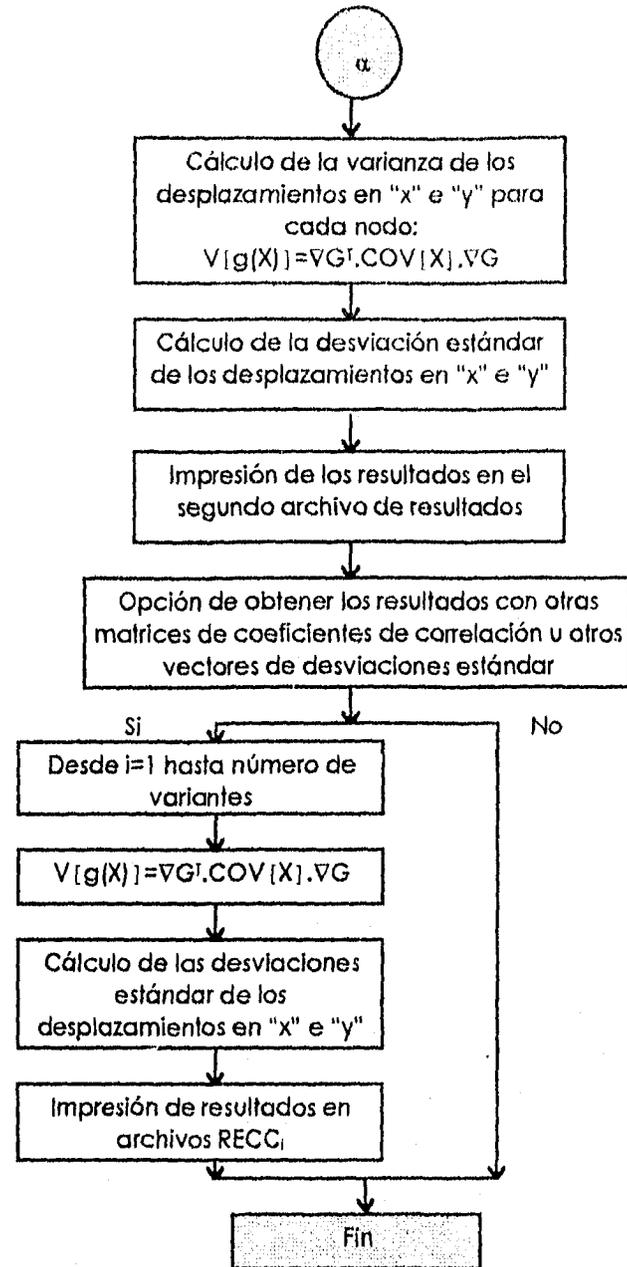


fig 3.4 - Diagrama de flujo programa FEADORL96

- El programa FEADAM84 sufrió pequeñas modificaciones con el fin de lograr el ensamblaje de las subrutinas creadas.

Después de la generación de la matriz de covarianzas se crea el vector de valores medios de los parámetros utilizando los datos ingresados para cada material. Con él se llama a la subrutina FEADAM84, de la que se obtienen los desplazamientos para la etapa final de la construcción. Los desplazamientos para cada nodo en "x" e "y" corresponden a los coeficientes a_{31} y b_{31} para cada nodo respectivamente.

Luego, para cada material, y para cada uno de los nueve parámetros se obtienen dos vectores de parámetros generales. Cada uno de los vectores solo modifica un elemento, correspondiente al parámetro "j" del material "i".

El número total de elementos que cada vector posee es el que surge de multiplicar el número de materiales por nueve (por sumar nueve los parámetros que definen al modelo hiperbólico).

Para obtener los dos vectores se modifica el parámetro en cuestión considerando dos variantes. La primera, suma al valor medio del parámetro "j" la desviación estándar de dicho parámetro para el material "i" al que corresponde, en tanto que la segunda la resta a dicho valor medio.

Una vez obtenidos los dos vectores se ejecuta la subrutina FEADAM84 para cada uno de ellos. Los desplazamientos en "x" e "y" obtenidos, corresponden a los coeficientes:

- a_1 y b_1 para el caso del vector modificado sumando la desviación estándar;
- a_{21} y b_{21} para el caso del vector modificado restando la desviación estándar.

Estos cuatro coeficientes son obtenidos para cada uno de los nodos. Con ellos se procede al cálculo de los coeficientes a_2 , b_2 , a_{32} , b_{32} , a_3 , b_3 , necesarios para evaluar las derivadas.

Las expresiones utilizadas son las (193) a (201).

De este modo, existirán tantos vectores de derivadas de la función de comportamiento de los desplazamientos en x e y, como nodos posea la malla de elementos finitos.

Obtenidos dichos vectores se procede al cálculo de las variancias de los desplazamientos, para lo cual se aplica la ec.(215).

Se destaca el hecho de que el procedimiento descrito es inestable en el caso de que la función de comportamiento se vea poco influenciada por la modificación de uno o varios de los parámetros.

La causa de inestabilidad es que en el proceso de cálculo de las derivadas se tiene un cociente en cuyo denominador se encuentra la diferencia entre los desplazamientos obtenidos para el vector de parámetros medios y los desplazamientos obtenidos para uno de los dos vectores modificados. Si dichos desplazamientos son cercanos o iguales, se tiene un denominador muy pequeño o inclusive igual a cero, con lo cual se genera una fuente de error.

Para eliminar esta inestabilidad se requirió de una condición de salida que limita la precisión de los resultados obtenidos y que anula la derivada de la función respecto a dicho parámetro.

Esta inestabilidad se hace más evidente en el caso de los desplazamientos en la dirección x, por lo que en el momento de evaluar los resultados se ha de contemplar esta circunstancia.

3.3- CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES EN CUANTO A LA EJECUCIÓN DEL PROGRAMA.

Presentados los fundamentos teóricos en los cuales se basó el método de cálculo implementado se describen las características principales del programa FEADORL96 para el análisis de incertidumbre en excavaciones y terraplenes. Para un mayor detalle de los archivos de resultados y de los archivos de datos así como consultar el listado del programa completo se recomienda recurrir al manual FEADORL96.

El compilador utilizado es el FORTRAN VERSIÓN 5.0 para estación de trabajo.

Entre las características que serán descritas en cuanto al programa FEADORL96 se encuentran el tiempo de ejecución, la formación de archivos de datos, los resultados que se obtienen de su empleo y los puntos débiles del mismo.

En cuanto al tiempo requerido para la ejecución del programa se encuentra directamente relacionado con los siguientes factores:

- número de materiales a considerar;
- número de elementos;
- número de nodos.

A los fines prácticos se presenta la tabla 3.1 de tiempos de ejecución requeridos, para el caso de utilizarse una estación de trabajo.

Tabla 3.1- Programa FEADORL96: tiempos de ejecución

Número de elementos	Número de materiales	Número de veces que se ejecuta FEADAM84	Tiempo de ejecución
87	1	19	5 minutos
110	1	19	15 minutos
110	5	91	1,10 horas
87	5	91	40 minutos
207	3	55	54 minutos
207	4	73	1,10 horas
207	5	91	1,35 horas

El factor preponderante en la determinación del tiempo de ejecución del programa lo representa el número de veces que requiere ejecutarse el programa FEADAM84, utilizado como subrutina dentro del principal del FEADORL96.

Los datos necesarios para la ejecución del programa deben establecerse a través de dos archivos formados por propiedades especificadas en un formato prefijado, en un orden preestablecido y con unidades homogéneas.

Entre los datos se encuentran:

- número de materiales;
- número de elementos;
- número de nodos;
- coordenadas de nodos;
- nodos que forman a los diferentes elementos;
- parámetros que definen a los diversos materiales presentes;
- etapas constructivas, sean estas de excavación o terraplenado;
- materiales y zonas preexistentes;
- elementos y nodos preexistentes;
- material de cimentación;
- elementos y nodos de cimentación;
- cargas aplicadas;
- matriz de coeficientes de variación de los parámetros;
- vector de desviaciones estándar de los parámetros.

Los resultados se obtienen en un mínimo de dos archivos en los que se encuentran, entre otros, los siguientes resultados:

- desplazamientos en x e y, así como el desplazamiento total en cada nodo;
- tensiones y deformaciones en las direcciones principales y en los ejes correspondientes al sistema de coordenadas x, y, z;
- relación de Poisson y módulo de elasticidad en cada elemento;
- relación de esfuerzos de cuya evaluación surge cuales elementos se han plastificado y cuales no.

Los hasta mencionados factores son evaluados en cada etapa constructiva.

- Desviación estándar y coeficiente de variación de los desplazamientos en x e y para cada nodo, datos éstos obtenidos en la última etapa constructiva.

Al inicializar el programa se solicitan los nombres de los dos archivos de datos y los nombres de los dos archivos donde se desea guardar los resultados.

Adicionalmente existe la opción de obtener los vectores de desviaciones estándar de los desplazamientos para hasta diez matrices de coeficientes de variación diferentes, acompañadas de los respectivos vectores de desviaciones estándar de los parámetros.

De este modo puede realizarse un estudio de influencia de diferentes factores sobre los resultados obtenidos. Esta opción requiere de la generación previa de archivos de datos bajo el nombre de CC1,...,CCn (n como máximo igual a 10), presentándose los resultados dentro de archivos con el nombre de RECC1,...,RECCn.

Las limitaciones que posee el programa en cuanto a número de nodos y materiales son las siguientes:

- número máximo de nodos = 500;
- número máximo de materiales diferentes = 10.

Fácilmente puede modificarse el algoritmo a los fines de aumentar el número máximo de nodos y de materiales con los que se pueda trabajar.

3.4- EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

Una vez desarrollado el programa de cálculo se presentan dos ejemplos de aplicación.

Con el primero de ellos, un caso hipotético, se muestra como es posible usar el algoritmo desarrollado para estudiar la influencia de cada uno de los nueve parámetros utilizados en el modelo hiperbólico sobre el resultado final de la modelación del comportamiento de un terraplén durante la construcción.

El segundo ejemplo corresponde al análisis de las deformaciones durante la construcción de una presa de materiales graduados ya construida, "El Infiernillo", con evaluación de la precisión de los resultados de la modelación tomando en cuenta la incertidumbre en la selección de los parámetros de los diferentes materiales.

3.4.1- PRIMER EJEMPLO.

Se trata de una presa simétrica de material homogéneo fundada sobre terreno rígido. La misma se discretiza a través de 70 elementos con 87 nodos distribuidos en siete capas, mismas que representan en forma simplificada el proceso constructivo.

Los valores asignados a los parámetros en unidades del sistema internacional, corresponden a los de un material hipotético y son los que a continuación se detallan:

K [-]	K_{ur} [°]	n [-]	R_f [-]	K_b [-]	m [-]	c [kPa]	ϕ [°]	$\Delta\phi$ [°]
120.0	180.0	0.50	0.70	110.0	0.20	13.0	30.0	1.0

La malla utilizada junto con las condiciones de apoyo (fig 3.5), las coordenadas de los nodos (fig 3.6), la numeración de los nodos (fig 3.7) y la numeración de los elementos (fig 3.8) son los ilustrados en las siguientes cuatro figuras.

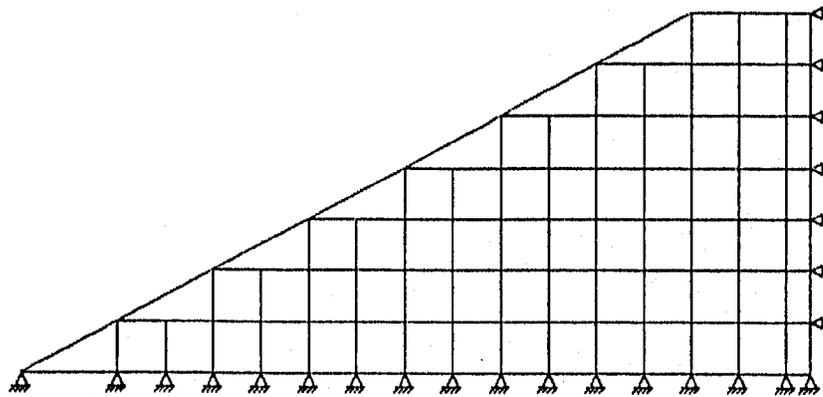


fig 3.5 - Condiciones de apoyo

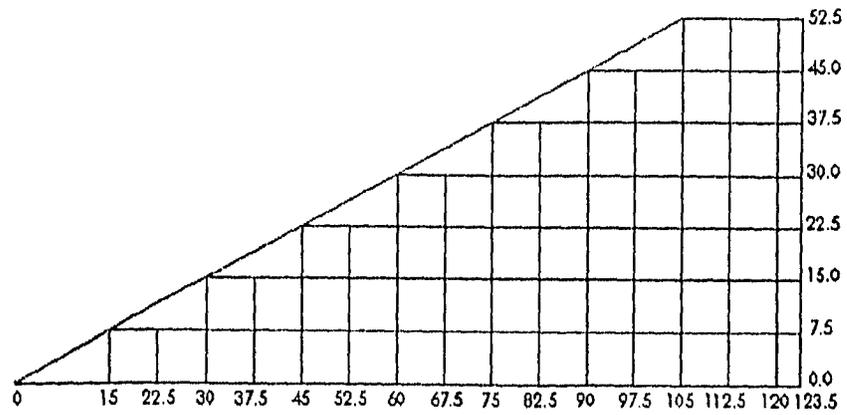


fig 3.6 - Coordenadas de los nodos

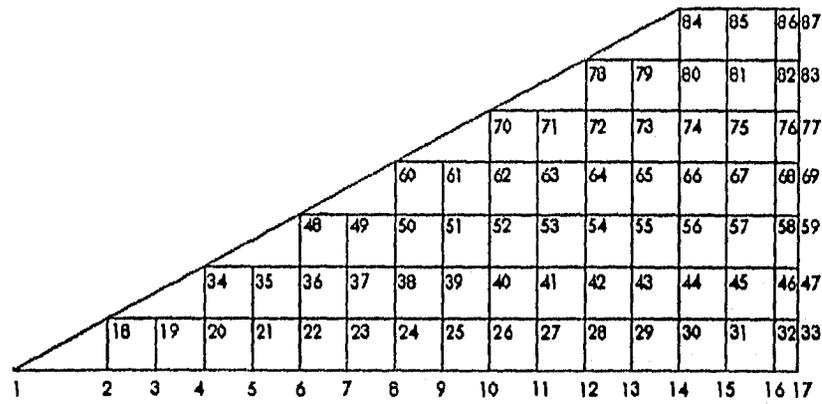


fig 3.7 - Numeración de los nodos

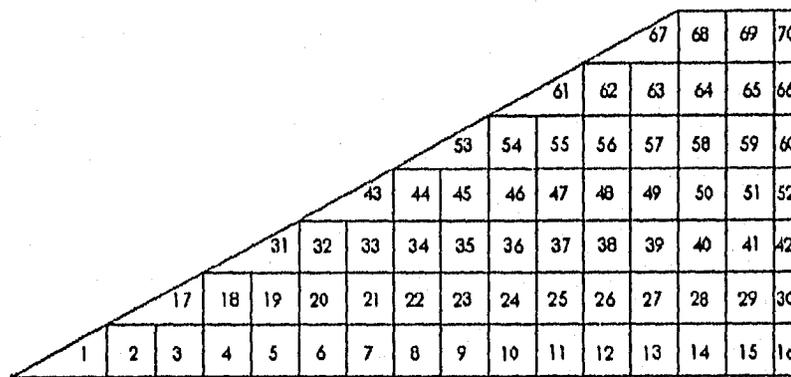


fig 3.8 - Numeración de los elementos.

Para el análisis de la influencia de la incertidumbre sobre cada uno de los parámetros en los desplazamientos se ejecutó el programa nueve veces. En cada aplicación, sólo la incertidumbre sobre un parámetro fue considerada, de tal modo que los restantes se consideraron como de tipo determinista. Para el parámetro considerado en cada aplicación, la desviación estándar asignada fue del 10% del valor medio.

Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 3.2 y la fig 3.9, en la que se muestran los desplazamientos en la dirección "y" de los nodos ubicados sobre el eje de simetría para cada etapa de construcción.

Tabla 3.2 - Desplazamientos de los nodos sobre el eje de simetría durante la construcción

nodo	y	desplazamiento en "y" (m)						
		capa 1	capa 2	capa 3	capa 4	capa 5	capa 6	capa 7
17	0	0	0	0	0	0	0	0
33	7.5	0	-0.0618	-0.1142	-0.1616	-0.2055	-0.2463	-0.2793
47	15.0	---	0	-0.1147	-0.2168	-0.3131	-0.4077	-0.4918
59	22.5	---	---	0	-0.1683	-0.3280	-0.4903	-0.6478
69	30.0	---	---	---	0	-0.2374	-0.4832	-0.7374
77	37.5	---	---	---	---	0	-0.3465	-0.7192
83	45.0	---	---	---	---	---	0	-0.508
87	52.5	---	---	---	---	---	---	0

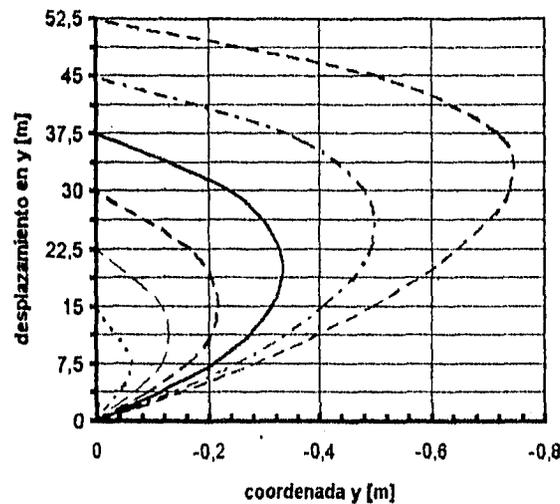


fig 3.9 - Curvas teóricas de asentamiento para cada etapa de construcción.

La matriz de covarianza se consideró diagonal (parámetros no correlacionados entre sí). El vector de desviaciones estándar considerado fue:

σ_k	$\sigma_{k_{ur}}$	σ_n	σ_{Rf}	σ_{k_b}	σ_m	σ_c	σ_s	$\sigma_{\Delta\Delta}$
12.00	18.00	0.05	0.07	11.00	0.02	1.30	3.00	0.10

Los resultados surgidos de considerar aisladamente cada uno de los parámetros son los que figuran en las tablas que se transcriben (Tablas 3.3). A posteriori las gráficas presentadas (fig 3.10 a 3.18) permiten visualizar con mayor facilidad la influencia de cada una de las variables.

Tabla 3.3 - Influencia aislada de cada uno de los parámetros

nodo	y	dy1	σ_1	dy1+ σ_1	dy1- σ_1
17	0	0	0	0	0
33	7,5	-0,2793	0,00368	-0,2756	-0,283
47	15	-0,4919	0,00852	-0,4833	-0,5004
59	22,5	-0,6478	0,01525	-0,6325	-0,663
69	30	-0,7374	0,02303	-0,7143	-0,7604
77	37,5	-0,7192	0,02879	-0,6904	-0,748
83	45	-0,508	0,02572	-0,4823	-0,5337
87	52,5	0	0	0	0

nodo	y	dy2	σ_2	dy2+ σ_2	dy2- σ_2
17	0	0	0	0	0
33	7,5	-0,2793	0,00002	-0,2793	-0,2793
47	15	-0,4919	0,00004	-0,4918	-0,4919
59	22,5	-0,6478	0,00005	-0,6477	-0,6478
69	30	-0,7374	0,00002	-0,7373	-0,7374
77	37,5	-0,7192	0,00006	-0,7191	-0,7192
83	45	-0,508	0,00019	-0,5078	-0,5082
87	52,5	0	0	0	0

nodo	y	dy3	σ_3	dy3+ σ_3	dy3- σ_3
17	0	0	0	0	0
33	7,5	-0,2793	0,00253	-0,2768	-0,2818
47	15	-0,4919	0,00526	-0,4866	-0,4971
59	22,5	-0,6478	0,00755	-0,6402	-0,6553
69	30	-0,7374	0,00857	-0,7288	-0,7459
77	37,5	-0,7192	0,00717	-0,712	-0,7263
83	45	-0,508	0,00251	-0,5055	-0,5105
87	52,5	0	0	0	0

nodo	y	dy4	σ_4	dy4+ σ_4	dy4- σ_4
17	0	0	0	0	0
33	7,5	-0,2793	0,00262	-0,2767	-0,2819
47	15	-0,4919	0,00764	-0,4842	-0,4995
59	22,5	-0,6478	0,0161	-0,6317	-0,6639
69	30	-0,7374	0,02787	-0,7095	-0,7652
77	37,5	-0,7192	0,03966	-0,6795	-0,7588
83	45	-0,508	0,04042	-0,4676	-0,5484
87	52,5	0	0	0	0

nodo	y	dy5	σ_5	dy5+ σ_5	dy5- σ_5
17	0	0	0	0	0
33	7,5	-0,2793	0,02427	-0,255	-0,3036
47	15	-0,4919	0,04071	-0,4511	-0,5326
59	22,5	-0,6478	0,04959	-0,5982	-0,6974
69	30	-0,7374	0,05074	-0,6866	-0,7881
77	37,5	-0,7192	0,04307	-0,6761	-0,7622
83	45	-0,508	0,02491	-0,4831	-0,5329
87	52,5	0	0	0	0

nodo	y	dy6	σ_6	dy6+ σ_6	dy6- σ_6
17	0	0	0	0	0
33	7,5	-0,2793	0,00198	-0,2773	-0,2813
47	15	-0,4919	0,00371	-0,4881	-0,4956
59	22,5	-0,6478	0,0045	-0,6433	-0,6523
69	30	-0,7374	0,00417	-0,7332	-0,7415
77	37,5	-0,7192	0,00289	-0,7163	-0,7221
83	45	-0,508	0,00119	-0,5068	-0,5092
87	52,5	0	0	0	0

nodo	y	dy7	σ_7	dy7+ σ_7	dy7- σ_7
17	0	0	0	0	0
33	7,5	-0,2793	0,00009	-0,2792	-0,2794
47	15	-0,4919	0,00051	-0,4913	-0,4924
59	22,5	-0,6478	0,0015	-0,6463	-0,6493
69	30	-0,7374	0,00318	-0,7342	-0,7405
77	37,5	-0,7192	0,00529	-0,7139	-0,7245
83	45	-0,508	0,00641	-0,5016	-0,5144
87	52,5	0	0	0	0

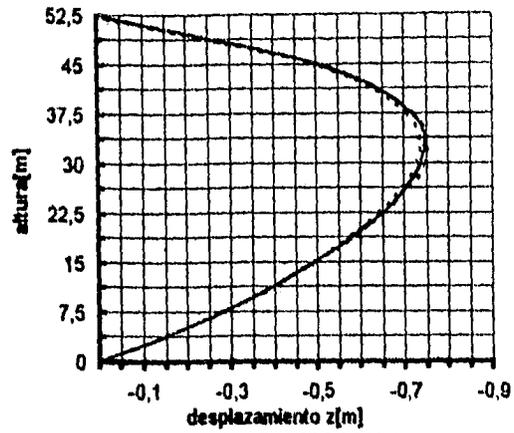
nodo	y	dy8	σ_8	dy8+ σ_8	dy8- σ_8
17	0	0	0	0	0
33	7,5	-0,2793	0,00009	-0,2792	-0,2794
47	15	-0,4919	0,00051	-0,4913	-0,4924
59	22,5	-0,6478	0,0015	-0,6463	-0,6493
69	30	-0,7374	0,00318	-0,7342	-0,7405
77	37,5	-0,7192	0,00529	-0,7139	-0,7245
83	45	-0,508	0,00641	-0,5016	-0,5144
87	52,5	0	0	0	0

nodo	y	dy9	σ_9	dy9+ σ_9	dy9- σ_9
17	0	0	0	0	0
33	7,5	-0,2793	0	-0,2793	-0,2793
47	15	-0,4919	0	-0,4919	-0,4919
59	22,5	-0,6478	0	-0,6478	-0,6478
69	30	-0,7374	0	-0,7374	-0,7374
77	37,5	-0,7192	0	-0,7192	-0,7192
83	45	-0,508	0	-0,508	-0,508
87	52,5	0	0	0	0

dy= desplazamiento en dirección y.

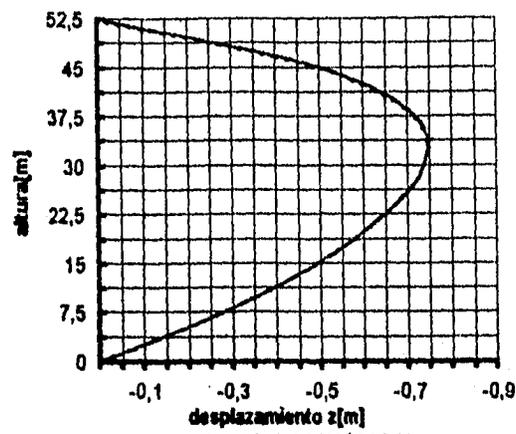
σ = desviación estándar de los desplazamientos en dirección y.

y= coordenada en dirección y.



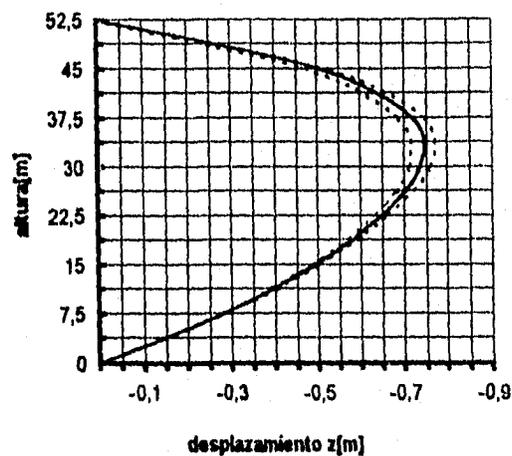
INFLUENCIA DEL PARAMETRO n

Fig. 3.10



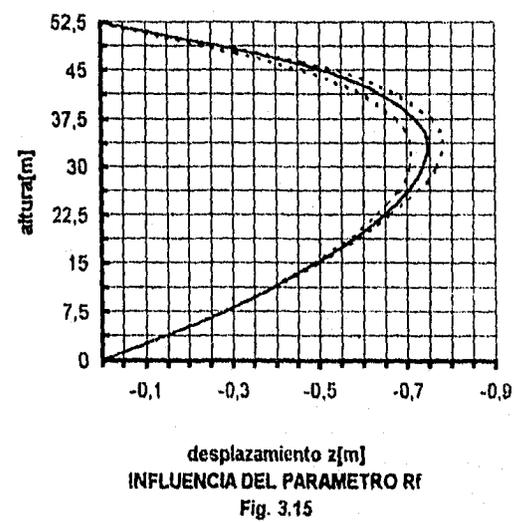
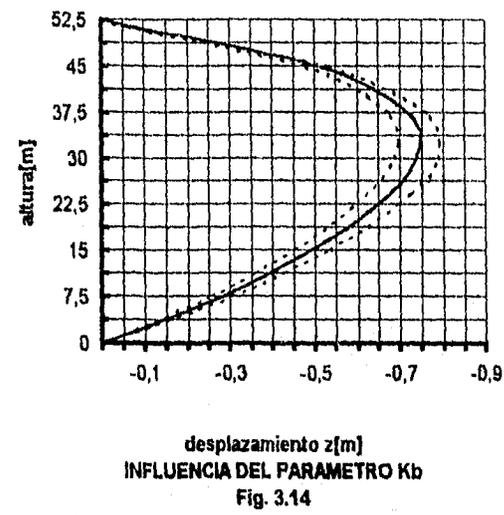
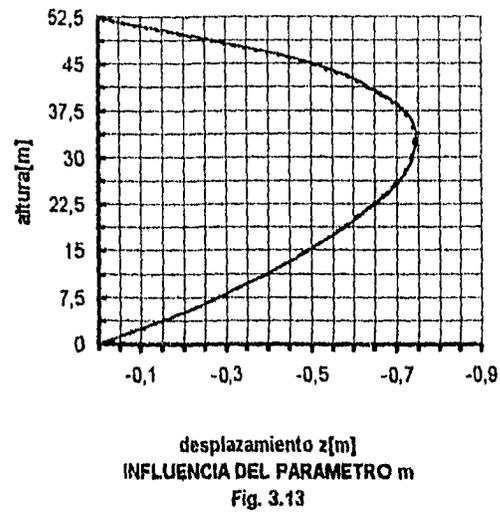
INFLUENCIA DEL PARAMETRO Kur

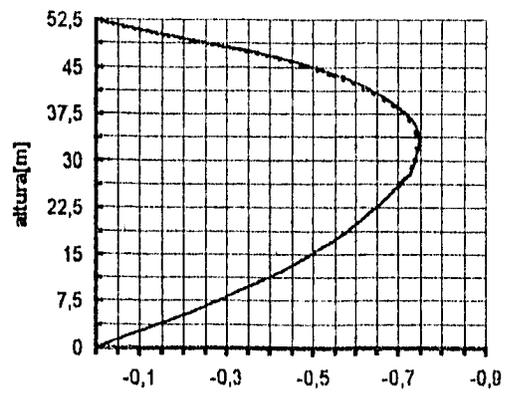
Fig. 3.11



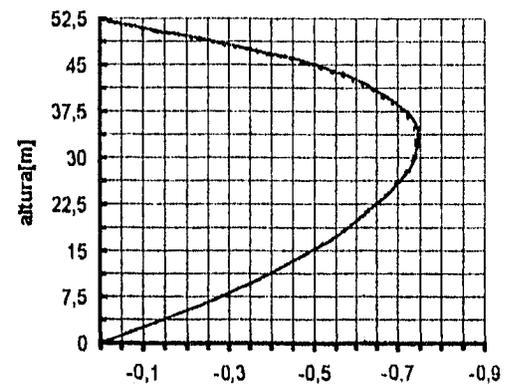
INFLUENCIA DEL PARAMETRO K

Fig. 3.12

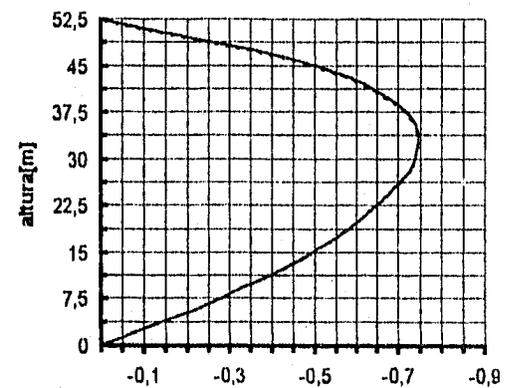




desplazamiento z[m]
INFLUENCIA DEL PARAMETRO c
Fig. 3.16



desplazamiento z[m]
INFLUENCIA DEL PARAMETRO ϕ
Fig. 3.17



desplazamiento z[m]
INFLUENCIA DEL PARAMETRO $\Delta\phi$
Fig. 3.18

Como puede observarse, si se trazan las curvas correspondientes a los desplazamientos en la dirección "y" junto con las curvas resultantes de sumar y restar a la misma la desviación estándar, se obtiene una banda dentro de la cual han de situarse los resultados con una probabilidad que resulta del orden del 67% si se acepta que la distribución es aproximadamente Gaussiana. Comparando los intervalos dentro del cual se encuentran los mismos puede tenerse una idea de los parámetros que poseen más influencia sobre la modelación, y en los que debe ponerse especial cuidado.

Del análisis surge que, en este caso, los parámetros que poseen mayor influencia son K , R_f y K_b . Los parámetros K_{ur} y $\Delta\phi$ son los que menor influencia poseen, en tanto que n , m , ϕ y c poseen un efecto intermedio.

La razón por la que el parámetro K_{ur} presenta escasa incidencia es que muy pocos elementos se descargan y por ende también son pocos los que necesitan de la determinación del módulo E_{ur} de descarga. En el caso de estudiarse una excavación, situación que es posible analizar por medio de éste programa de cálculo, este factor adquiere importancia en tanto que el K es el que pasa a un segundo plano.

El factor K es el que se halla relacionado directamente con el módulo E , por lo cual es previsible que influya sobre los resultados.

El parámetro R_f , para este terraplén construido de material granular con una fracción de finos, es preponderante como consecuencia de que el factor de seguridad del terraplén es bajo (si se considera al material como puramente granular dicho factor es igual a 1.35) por lo que la relación de esfuerzos es grande.

El parámetro K_b o módulo de deformabilidad volumétrica, es también de gran influencia sobre la incertidumbre global, dado que el proceso es puramente de consolidación donde las variaciones de volumen son las que definen los desplazamientos.

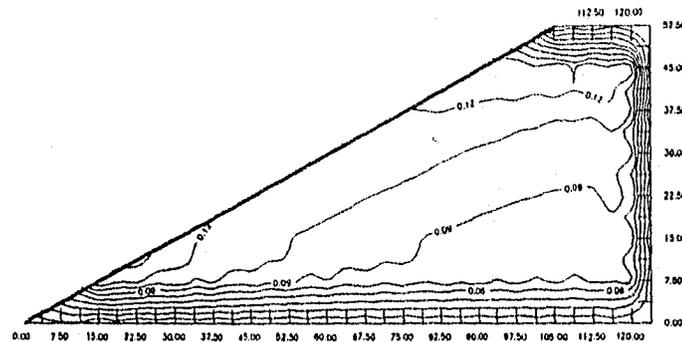


fig 3.19 - Parámetro K. Coeficientes de variación de los desplazamientos en X

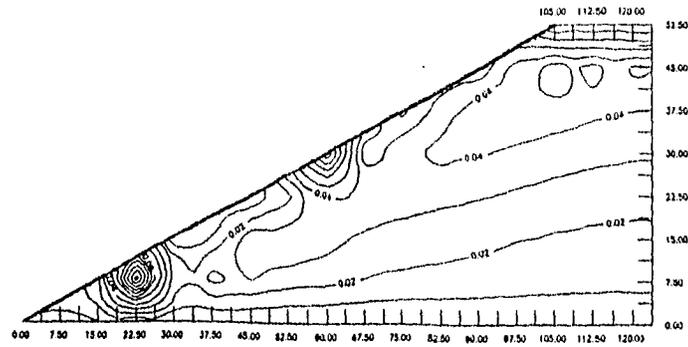


fig 3.20 - Parámetro K. Coeficientes de variación de los desplazamientos en Y

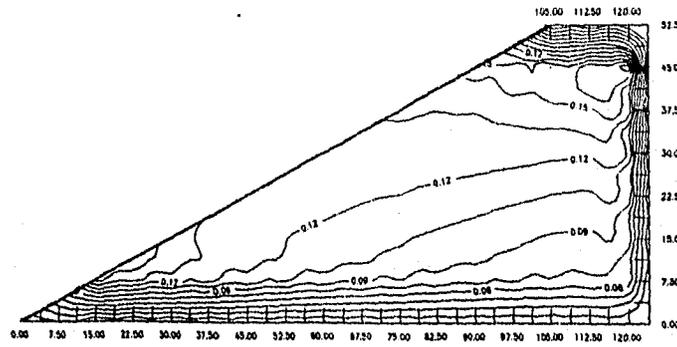


fig 3.21 - Parámetro R₁. Coeficientes de variación de los desplazamientos en X

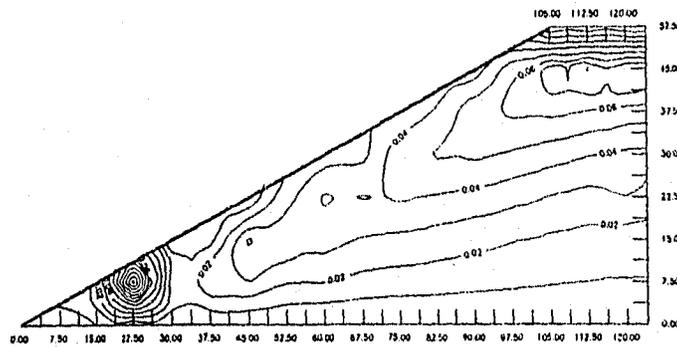


fig 3.22 - Parámetro R₁. Coeficientes de variación de los desplazamientos en Y

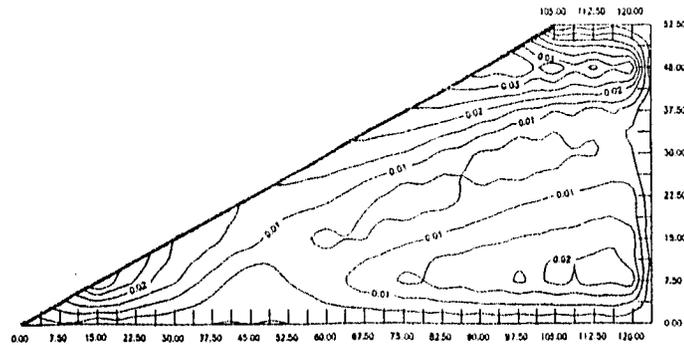


fig 3.23 - Parámetro K_b . Coeficientes de variación de los desplazamientos en X

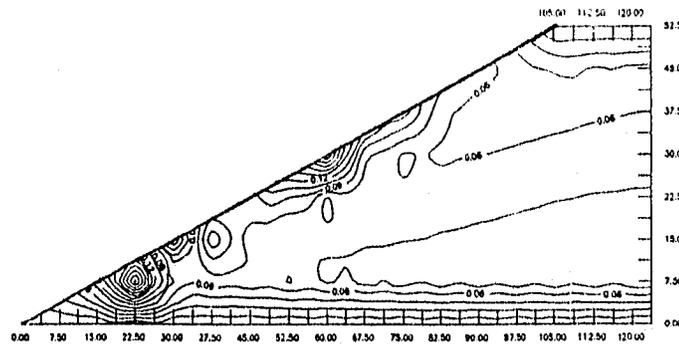


fig 3.24 - Parámetro K_b . Coeficientes de variación de los desplazamientos en Y

Las condiciones de apoyo son fundamentales en la distribución de las curvas de isovalores del coeficiente de variación. Obsérvese que las zonas en las que se presentan los mayores coeficientes de variación corresponden a aquellas alejadas de las fronteras con condiciones impuestas.

Dado que el programa FEADAM84 fija como condición que los desplazamientos en la frontera superior de la última capa construida son nulos, se está imponiendo una frontera con desplazamientos conocidos y por tanto sin incertidumbre. Si se observan las fig. 3.19 a 3.24 puede comprobarse que la cresta del terraplén posee coeficientes de variación nulos como consecuencia de la mencionada característica.

Los puntos ubicados al plé del terraplén poseen coeficientes de variación muy altos como consecuencia de una inversión en el signo de los desplazamientos. Esto es debido a que allí se produce un levantamiento por desplazamiento de los materiales del corazón del terraplén.

3.4.2- PRESA "EL INFIERNILLO".

3.4.2.1- INTRODUCCIÓN.

La presa El Infiernillo de 145 m de altura, cuya capacidad de almacenamiento total es de $12 \times 10^6 \text{ m}^3$, se encuentra ubicada a 70 km. de la desembocadura del río Balsas (Marsal, Alberro, 1979).

Se trata de una presa de enrocamiento con núcleo central de arcilla compactada cuyo volumen es de $5.5 \times 10^6 \text{ m}^3$, mismos que corresponden a $5 \times 10^6 \text{ m}^3$ de enrocamiento, transiciones y filtros, en tanto que $0.5 \times 10^6 \text{ m}^3$ corresponden al corazón.

La cortina del Infiernillo se instrumentó con dispositivos para observar su comportamiento durante la construcción y posteriormente, dándose preferencia a la medición de deformaciones. No se instalaron celdas para registrar esfuerzos. La evolución de la presión de para se observó en un número pequeño de puntos en el corazón impermeable y la cimentación.

Las características geométricas de la presa son las siguientes. El núcleo es vertical y relativamente delgado, con un espesor de 4m en la corona que aumenta a 27m cerca de la base, y desde la elevación 45m por medio de ampliaciones a 45° se tiene en el contacto arcilla - roca un ancho de aproximadamente 50m.

Tanto aguas abajo como aguas arriba, se previeron filtros de arena bien graduada de 2.50m de espesor, así como zonas de transición limitadas por taludes de 0.15:1 desde la elevación 165. Las porciones restantes de la sección se formaron con enrocamiento, siendo los taludes exteriores de pendiente 1.75:1, con dos bermas aguas abajo. Las ataguías quedaron incorporadas a la presa.

Con base en la información de los sondeos de exploración, se decidió tratar los empotramientos y el fondo del cañón con inyecciones de mortero de agua - cemento aplicadas desde la superficie y desde galerías.

El contacto roca - núcleo fue tratado con una redícula de perforaciones de 8m espaciadas a 3m en las que se inyectaron lechadas con proporciones de 3:1 a 6:1, aplicadas a una presión de 1 kg/cm^2 o menor.

La superficie de la cimentación, una vez efectuada la limpieza superficial con herramienta de mano y agua a presión, fue enlucida con mortero o lechada de cemento aplicada con brocha para rellenar las fisuras pequeñas. Los agujeros, fracturas y desplomes descubiertos en el fondo y las laderas se regularizaron con relleno de concreto.

Adicionalmente se construyó una pantalla de drenes, aguas abajo del eje, dentro de las laderas y debajo de la cortina.

En la figura se presenta la sección máxima de la cortina acompañada de las correspondientes referencias (fig 3.25)

- a : pantallas de concreto (pilotes secantes);
 b : tapete de inyecciones;
 c : galería G-4;
 d : perforaciones de inyección;
 e : perforaciones para drenaje;
 Elev: elevación en metros.
 1 : corazones impermeables de la cortina.
 2 : filtros de protección del corazón impermeable de la cortina.
 3 : zona de transición aguas abajo del corazón.
 4 : enrocamiento compacto en ambos respaldos de la cortina.
 5 : enrocamiento a volteo en los taludes exteriores de los respaldos de la cortina.
 6 : enrocamiento de gran tamaño.
 7 : delantal impermeable de las ataguías.
 7' : corazón impermeable de la cortina, entre elevaciones 165 y 176.
 8 : extremo superior del corazón impermeable de la cortina, arriba de elevación 176.
 9 : base para revestimiento de la corona.
 10 : depósitos en el cauce del río.
 11 : roca firme.

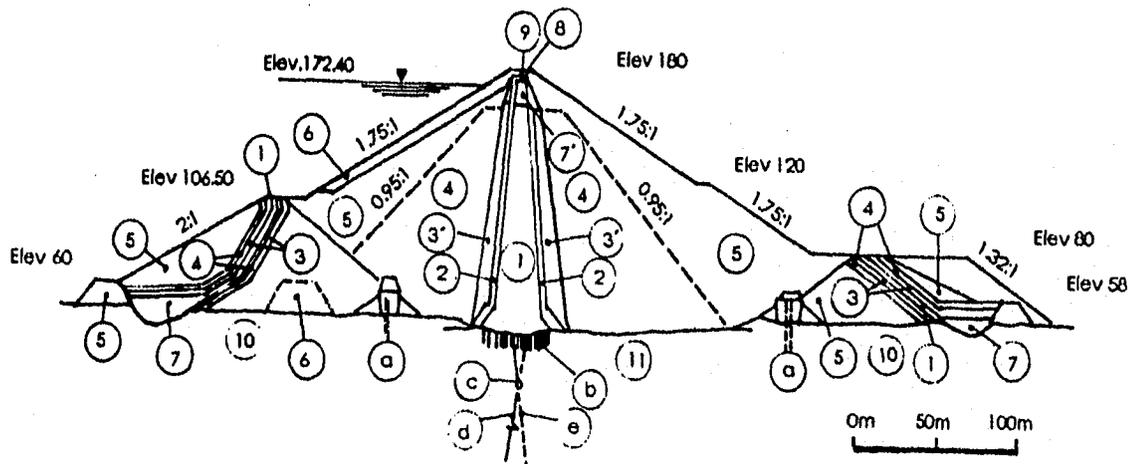


fig 3.25 - (tomado de "Comportamiento de Presas Construidas en México")

3.4.2.2- CONSTRUCCIÓN.

El corazón impermeable fue construido con arena arcillosa cuyo contenido de agua se encontraba 3.7% arriba del óptimo, siendo los límites de la fracción fina LL: 49% y su LP: 24% (Marsal et al, 1979).

Los filtros se formaron con arena extraída del préstamo Pinzandarán procesada para obtener la granulometría adecuada. De modo similar, el producto de excavaciones subterráneas fue tratado en cribadora primaria a los fines de mejorar su graduación y emplearlo en las zonas de transición.

Para construir los respaldos de enrocamiento se abrieron cuatro canteras, tres en frentes de conglomerado silicificado y la cuarta en un afloramiento de diorita.

3.4.2.3- COMPORTAMIENTO.

La presa El Infiernillo fue una de las primeras presas construidas en México que se instrumentó con un importante número de aparatos dispuestos en dos secciones principales, una paralela al río y la otra aproximadamente en el plano medio del núcleo, de tal modo que pudiesen observarse las deformaciones y los desplazamientos de la estructura en forma global; no se previó la medición de esfuerzos, porque en esa época los equipos disponibles eran poco confiables. Durante la construcción se fueron agregando varios deformómetros en otras zonas de la cortina para verificar diversos aspectos del comportamiento (Alberro, 1972, Marsal , 1979).

3.4.2.4- PROPIEDADES DE LOS MATERIALES.

Para la aplicación del programa se procedió a la estimación de los parámetros del modelo. Dado que no se contaba con los resultados de laboratorio, se emplearon tablas preexistentes incluidas dentro del manual de FEADAM84 así como información presente en diversos artículos referidos a la presa El Infiernillo.

Teniendo en cuenta las características físicas de los materiales utilizados así como algunos datos presentes en publicaciones existentes las propiedades que finalmente fueron asignadas a los parámetros y las desviaciones estándar son los de las tablas mostradas (tabla 3.4 y 3.5).

Tabla 3.4 - Parámetros de los materiales

Material	Parámetros modelo no lineal - Presa El Infiernillo								
	K	K _{ur}	n	R _r	K _b	m	c [kPa]	φ	Δφ
1 (núcleo)	500	800	0.87	0.89	50	0.25	98	0	0
2 (filtros)	900	1350	0.98	0.92	100	0.30	0	35	0
3 (transición)	735	1150	0.96	0.85	387	0.34	0	32	6
4 (enrocam. compacto)	650	1010	0.93	0.80	160	0.33	0	40	9
5 (enrocam. suelo)	600	930	0.91	0.78	100	0.30	0	36.3	7

Tabla 3.5 - Desviaciones estándar de las propiedades de los materiales

Material	Desviación estándar de los parámetros								
	K	K_{ur}	n	R_f	K_b	m	c [kPa]	ϕ	$\Delta\phi$
1 (núcleo)	28.0	42.0	0.11	0.07	7.40	0.00	9.99	0.00	0.00
2 (filtros)	83.0	126.0	0.03	0.06	4.76	0.01	0.00	2.19	0.00
3 (transición)	70.0	105.0	0.05	0.06	29.0	0.12	0.00	1.96	1.56
4 (enrocam. compacto)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5 (enrocam. suelto)	41.4	62.1	0.04	0.00	11.1	0.04	0.00	1.82	1.00

Las desviaciones utilizadas en el cálculo corresponden a las determinadas para la serie de datos presentes en la bibliografía y de los cuales también se obtuvo el valor medio. Se buscó representar a través de estas desviaciones el intervalo de variación posible de los diferentes parámetros de acuerdo con los valores reportados en la literatura para materiales análogos. Cabe destacar que la cantidad de datos con que se contaba variaba mucho dependiendo del tipo de material del que se tratase. Por esta razón las desviaciones estándar varían considerablemente de un parámetro a otro y de un material a otro. En el caso del enrocamiento compactado, para el cual se cuenta con datos de laboratorio, se despreció la incertidumbre.

La matriz de coeficientes de correlación utilizada en el programa para el análisis estocástico es la transcrita en la Tabla 3.6. Esta matriz, refleja, en forma algo subjetiva, la dependencia estimada entre los diferentes parámetros.

El vector de desviaciones y la matriz de coeficientes de correlación son los que le dan su significado a los resultados que se han de obtener. En este caso se observará que la incertidumbre considerada no se refiere a la variación espacial de las propiedades sino exclusivamente a la falta de información o a la representatividad de pruebas realizadas en materiales análogos.

tienden a ser inestables en su comportamiento. Las ocho capas en que se supuso construida la presa son horizontales, en tanto que los elementos fueron trazados de modo tal que siguiesen el perfil de la sección transversal.

Las transiciones, los filtros y el corazón fueron discretizados de modo tal que al menos dos elementos se encontraran en el espesor de los mismos.

En la corona, con el fin de evitar la presencia de elementos triangulares o demasiado esbeltos se optó por trabajar con una discretización un tanto diferente. Por ello se observan elementos triangulares de cuatro nodos, tres en los vértices y el restante sobre uno de los lados. En todo momento se buscó representar del modo más cercano a la realidad la posición de los distintos materiales dentro de la sección de la presa. La sección idealizada de la presa es la presentada en la fig. 3.26.

La irregularidad en la cimentación es tenida en cuenta solamente en aquellos nodos en los que la misma es importante, en tanto que en algunos casos esta era de un orden tan bajo que se optó por no considerarla.

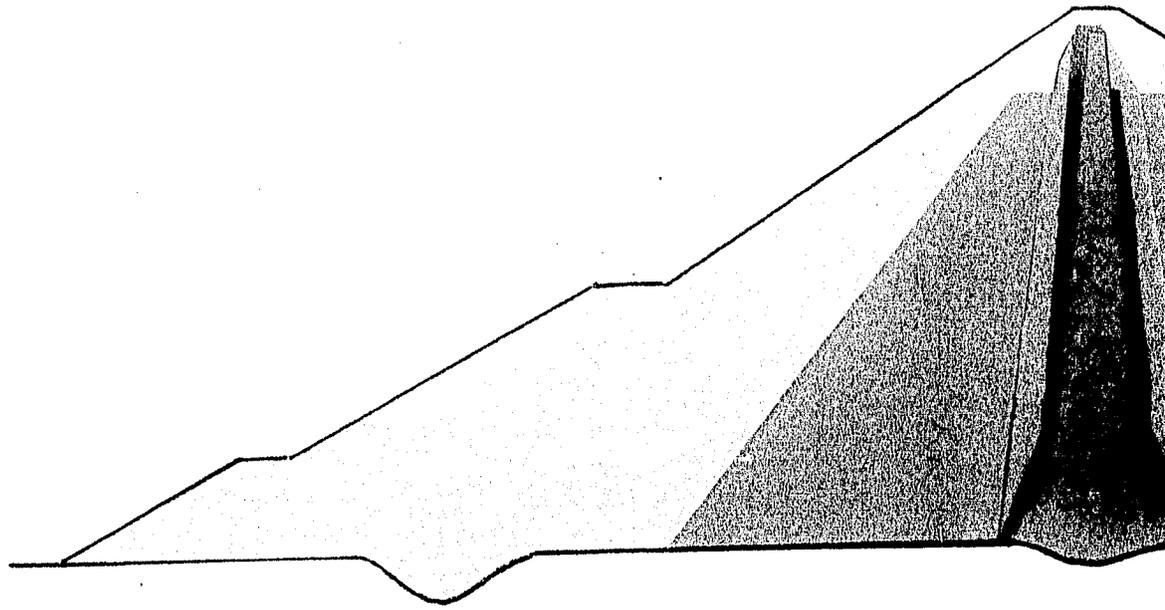


Figura 3.26

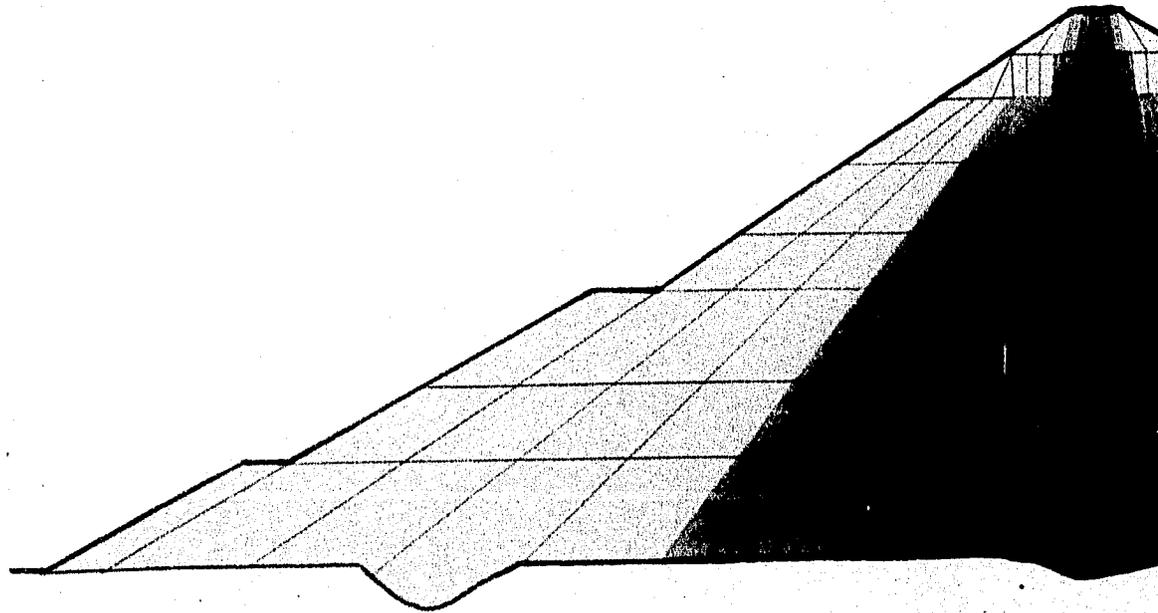


Figura 3.27

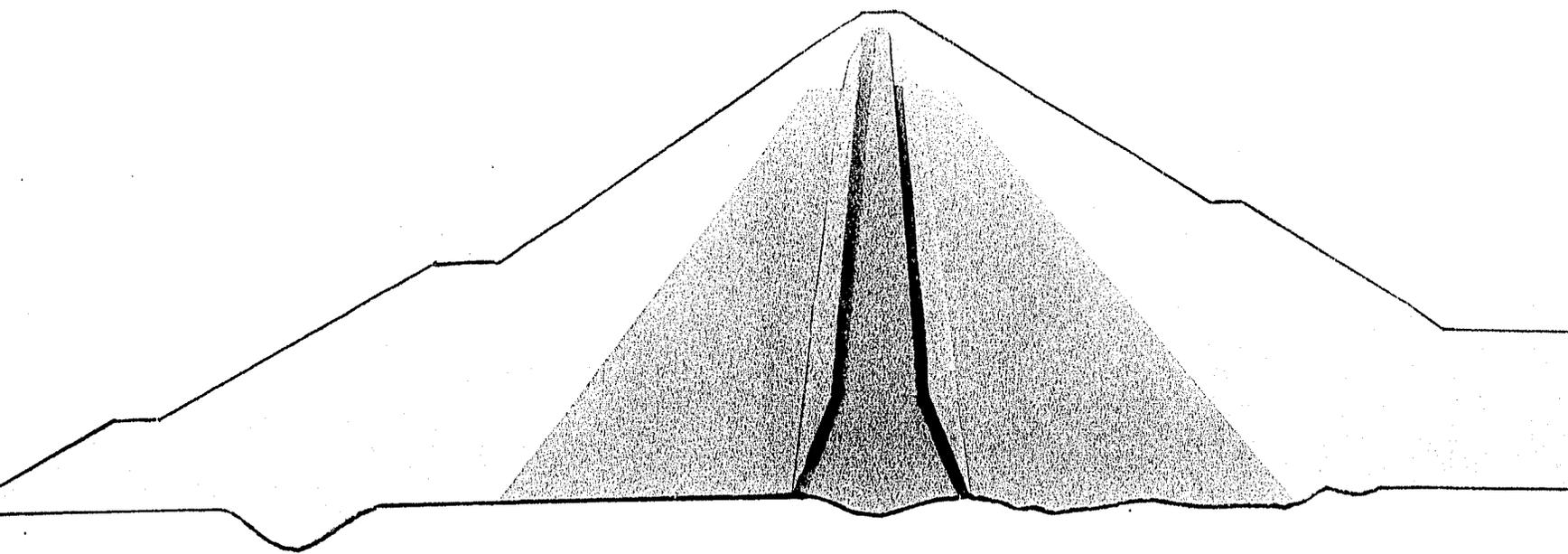


Figura 3.26

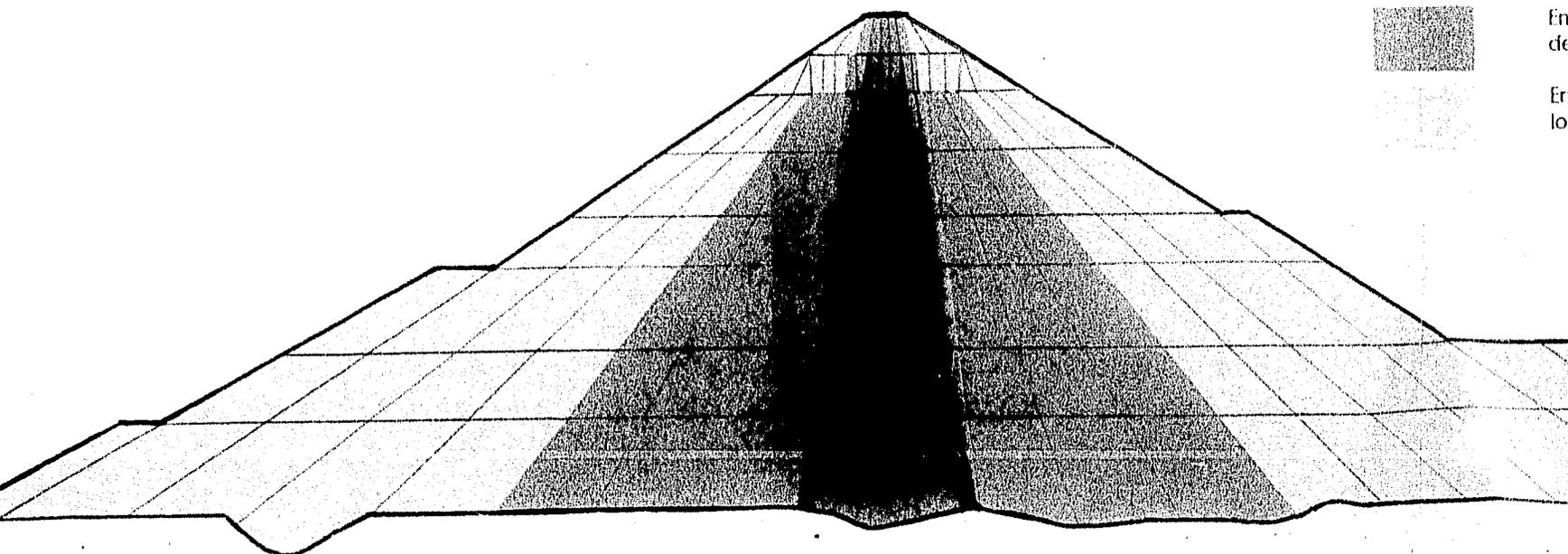
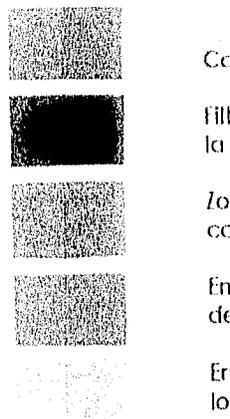


Figura 3.27

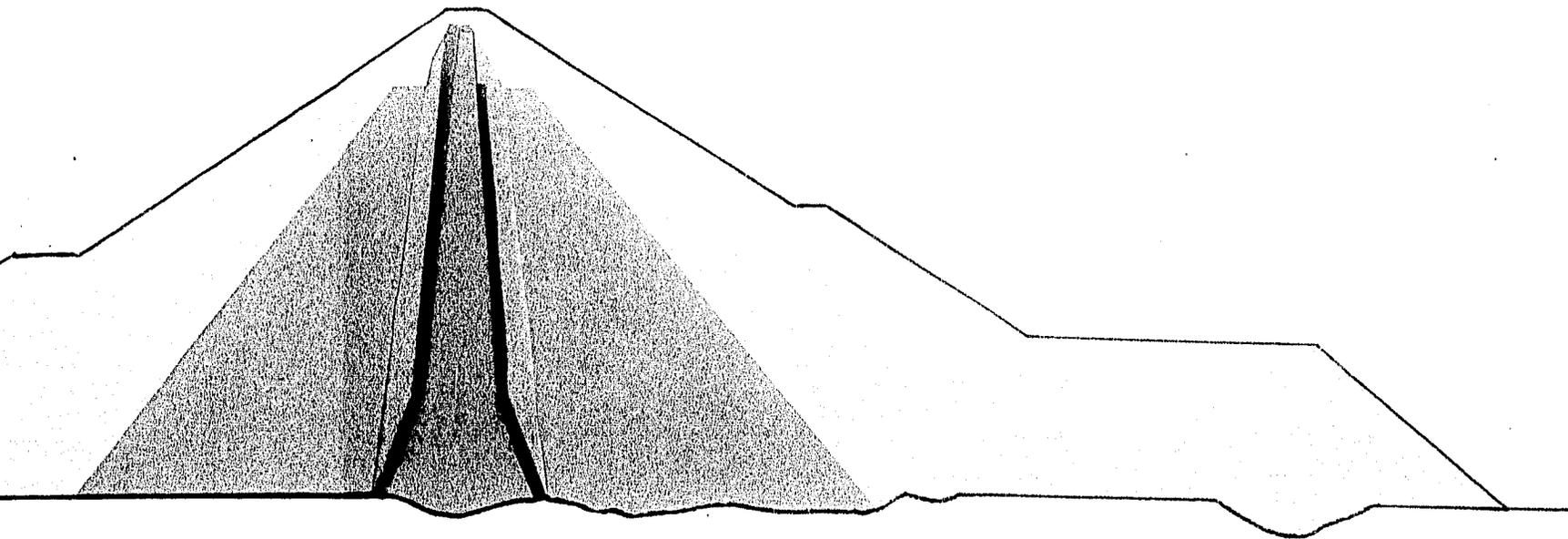


Figura 3.26



REFERENCIAS

Corazón impermeable de la corlina.

Filtros de protección del corazón impermeable de la corlina.

Zona de transición: aguas abajo y aguas arriba del corazón.

Enrocamiento compactado en ambos respaldos de la corlina.

Enrocamiento a volteo en los taludes exteriores de los respaldos de la corlina.

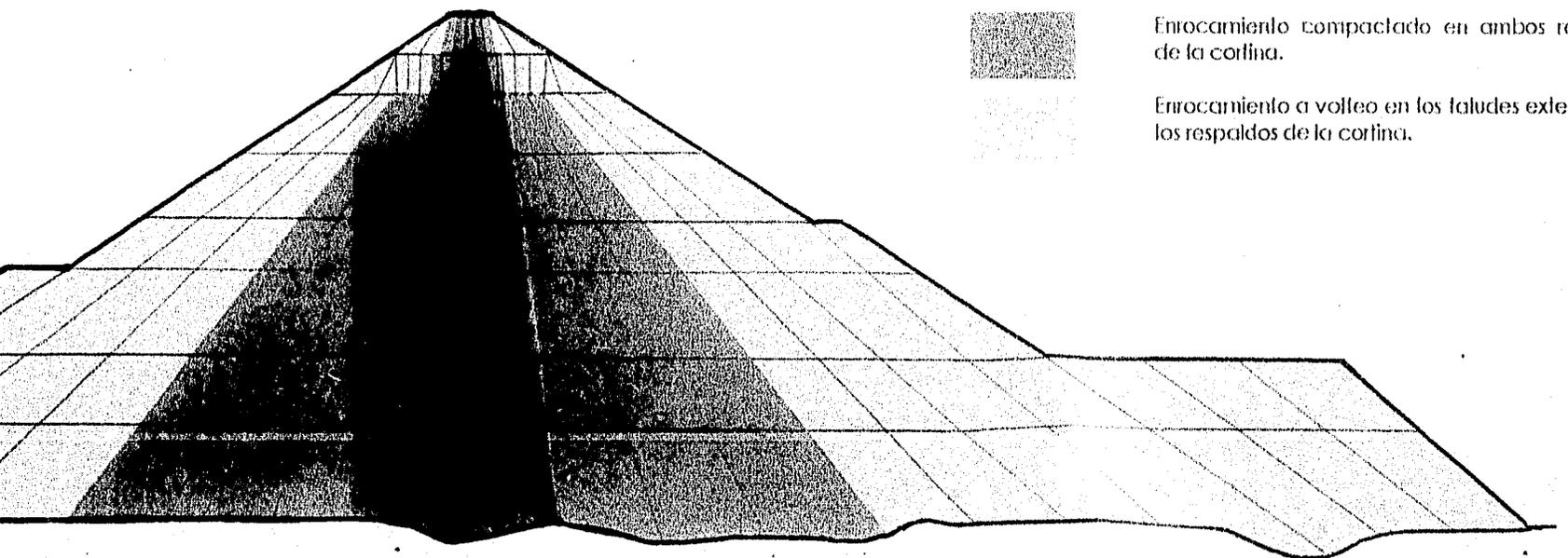


Figura 3.27

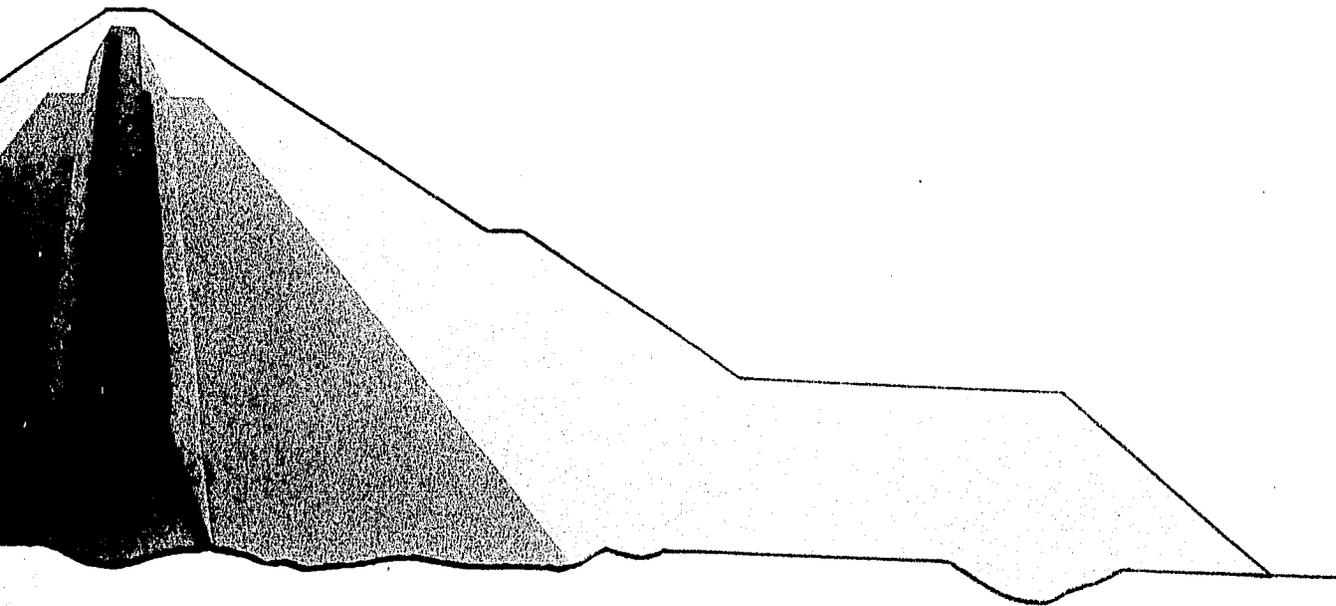


Figura 3.26



REFERENCIAS

Corazón impermeable de la cortina.

Filtros de protección del corazón impermeable de la cortina.

Zona de transición aguas abajo y aguas arriba del corazón.

Enrocamiento compactado en ambos respaldos de la cortina.

Enrocamiento a volteo en los taludes exteriores de los respaldos de la cortina.

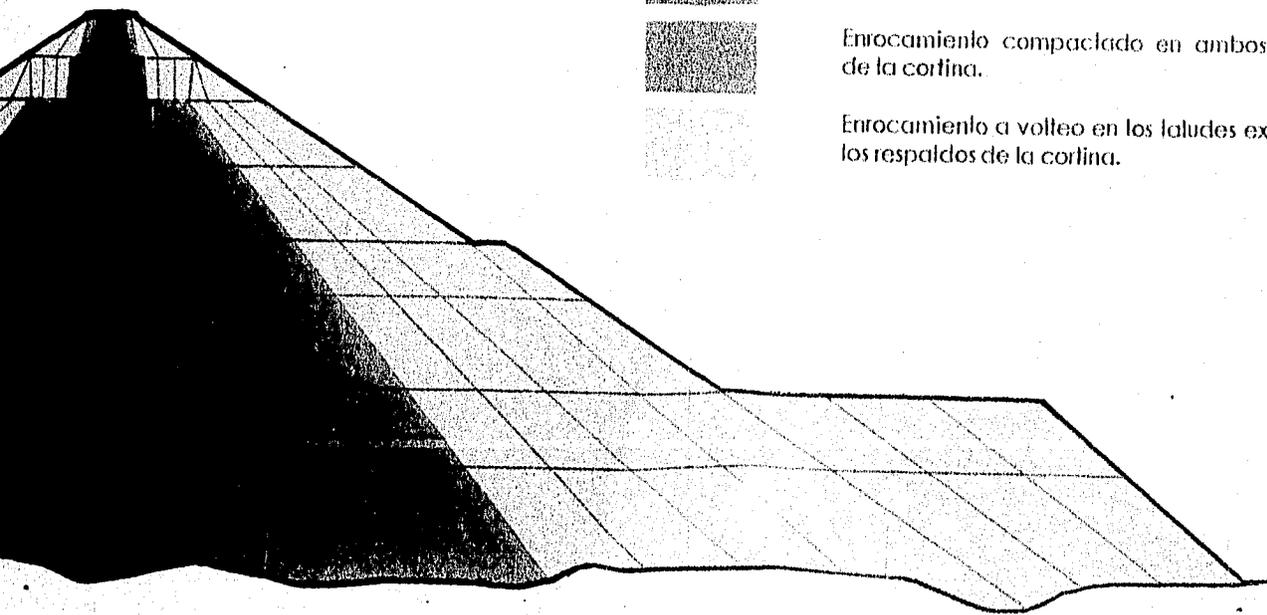


Figura 3.27

3.4.2.5- ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Las figuras siguientes (fig 3.28 a 3.33) muestran algunos de los resultados obtenidos para la presa "El Infiernillo" considerando el comportamiento no lineal de los materiales.

Las curvas de asentamiento para cada etapa de construcción, en los nodos situados sobre la vertical que pasa por el eje de la presa, se encuentran representadas en la fig 3.28. Puede observarse que las mismas tienden a ser parabólicas. La zona en la cual la curva se separa de dicha representación puede explicarse aceptando que el corazón " se cuelga " de los filtros, dada la mayor rigidez de éstos últimos. Junto con las curvas de los desplazamientos en dirección vertical se encuentra la fig 3.29 en la que se representaron para el final de la construcción las curvas de desplazamientos totales, y las curvas inferior y superior entre las cuales existe teóricamente una posibilidad de aproximadamente 67% de encontrar los desplazamientos verticales reales de la presa. Las mismas fueron obtenidas sumando y restando la desviación estándar de los desplazamientos verticales a los correspondientes desplazamientos.

Puede observarse que la zona donde se espera se encuentren las lecturas es bastante amplia. La principal causa es que corresponde a la vertical en la sección máxima de la presa que atraviesa los materiales más blandos y con mayor incertidumbre en sus parámetros. Esto puede ser confirmado estudiando las fig 3.30, 3.31 y 3.32.

En las fig 3.30, 3.31 y 3.32 se presentan los desplazamientos en la dirección vertical, las desviaciones estándar y los coeficientes de variación de los mencionados desplazamientos. Del estudio de las mismas pueden sacarse las siguientes conclusiones.

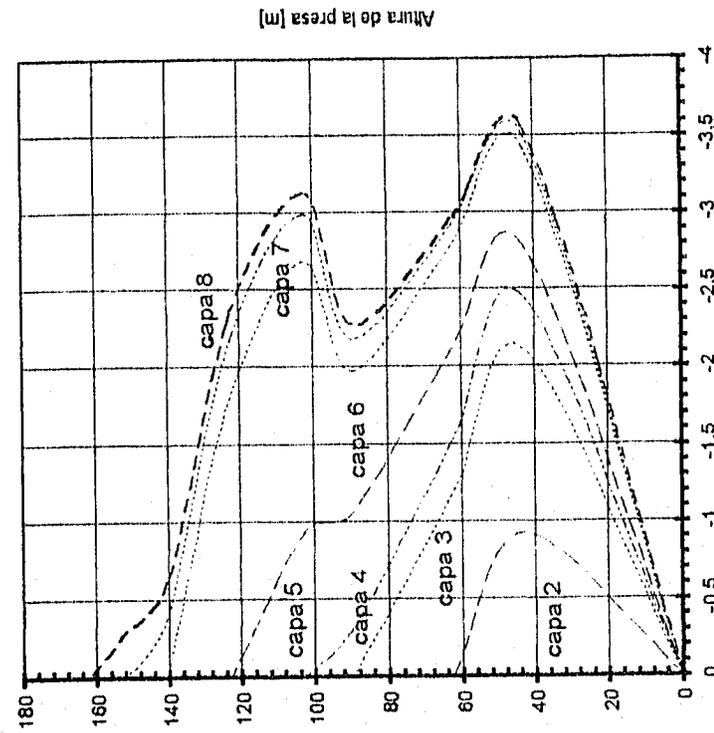
Las zonas de mayores coeficientes de variación corresponden al corazón (material 1). Las curvas de coeficientes de variación toman valores que varían entre 0 y 40%, encontrándose éste último valor solamente en un punto aislado, en tanto que en la mayor parte de la sección de la presa toma valores cercanos al 10%. Si se observa la Tabla 3.5, se ve que las desviaciones estándar de los parámetros de los materiales se encontraban alrededor del 10% (más precisamente variando en un rango del 0% al 17%). A pesar del efecto de compensación estadística, que seguramente debe ser apreciable por la poca correlación existente entre los 45 parámetros en juego, observamos que la no linealidad conduce a amplificaciones locales de la incertidumbre.

La zona de los entrocamientos sueltos, cuyos asentamientos solamente son producto de su peso propio sin que exista incidencia de otros materiales súperyacentes, poseen coeficientes de variación uniformes y del orden del 8%, correspondientes aproximadamente a la variación asignada los parámetros de dicho material.

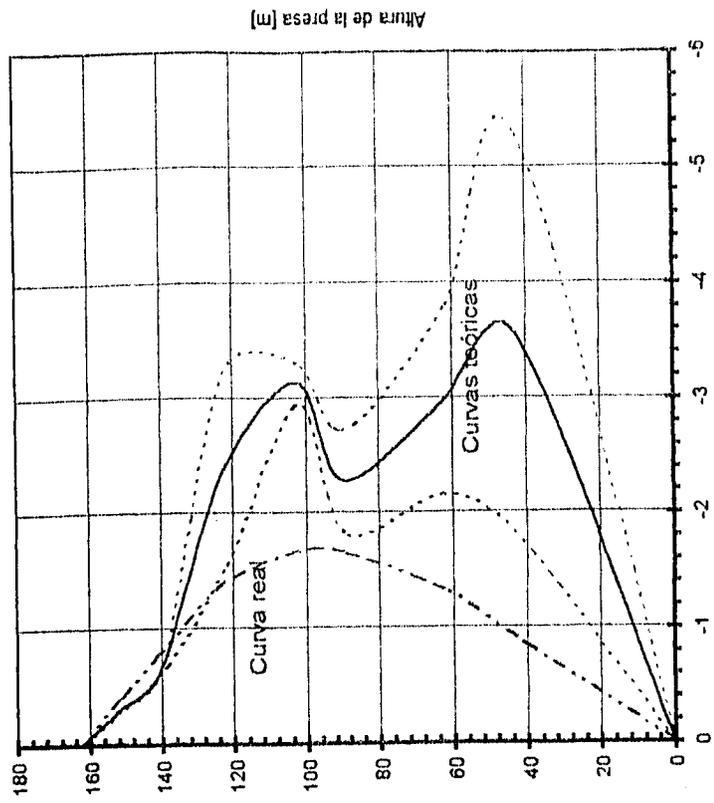
Otro de los puntos destacables es que la influencia de las fronteras con desplazamientos impuestos (contacto con el terreno de fundación y cota superior de la última capa construida) genera zonas donde no existe incertidumbre.

Existen puntos cercanos a las laderas de la presa donde el coeficiente de variación toma valores muy altos. Estos puntos corresponden a zonas donde los desplazamientos son muy pequeños. Esto provoca que el cociente entre la desviación estándar y el desplazamiento vertical (cociente que define al CV) tome un valor muy alto.

La siguiente figura presentada (fig 3.33) corresponde a la zona plastificada de la presa. Puede observarse que dicha zona corresponde a aquella donde los coeficientes de variación son mayores. La causa de la estrecha relación es que al encontrarse cerca de la falla el factor R , adquiere mayor influencia y una pequeña incertidumbre en el mismo conduce a grandes incertidumbres en los resultados (recuérdese el primer caso estudiado del terraplén hipotético).



Asentamientos producidos en cada etapa durante la construcción - Fig. 3.28



Asentamientos +/- desviación estándar para el final de la construcción - Fig. 3.29

Desplazamientos en Y

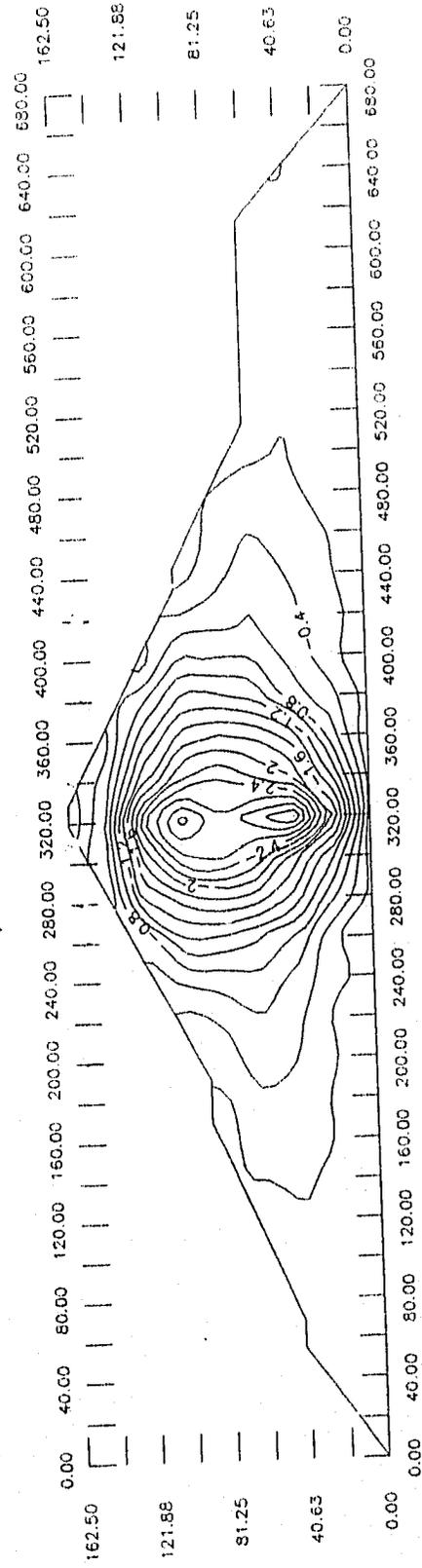


fig 3. 30

Desviación estandar

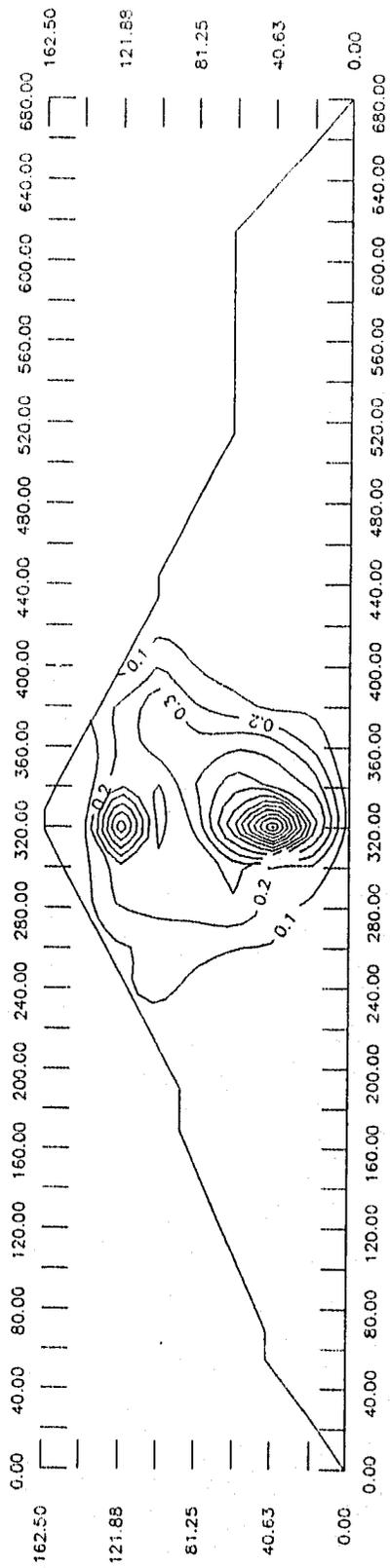
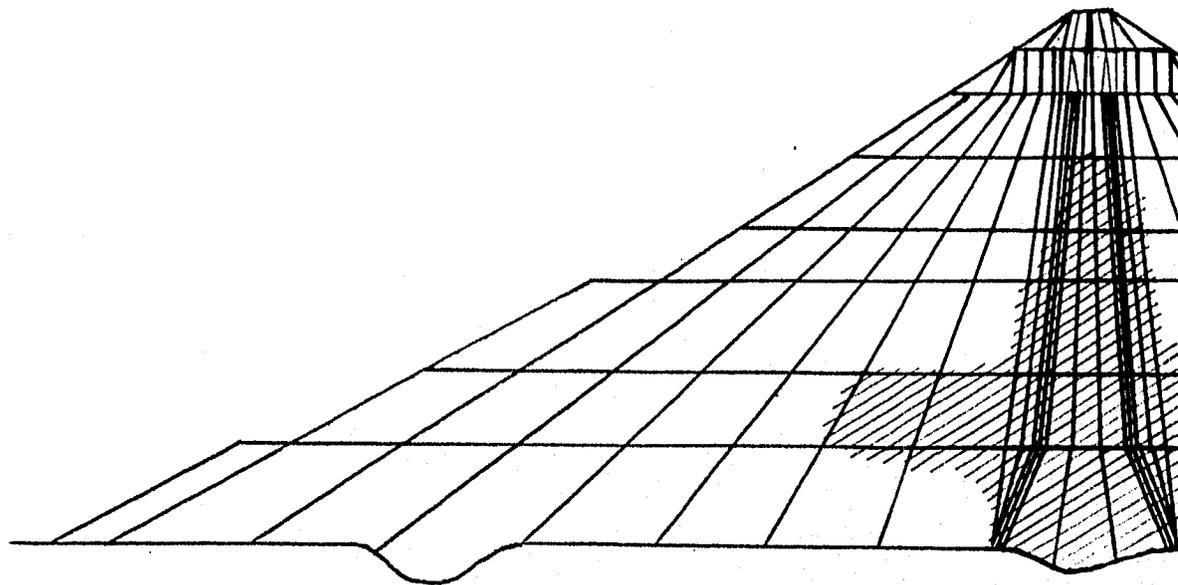
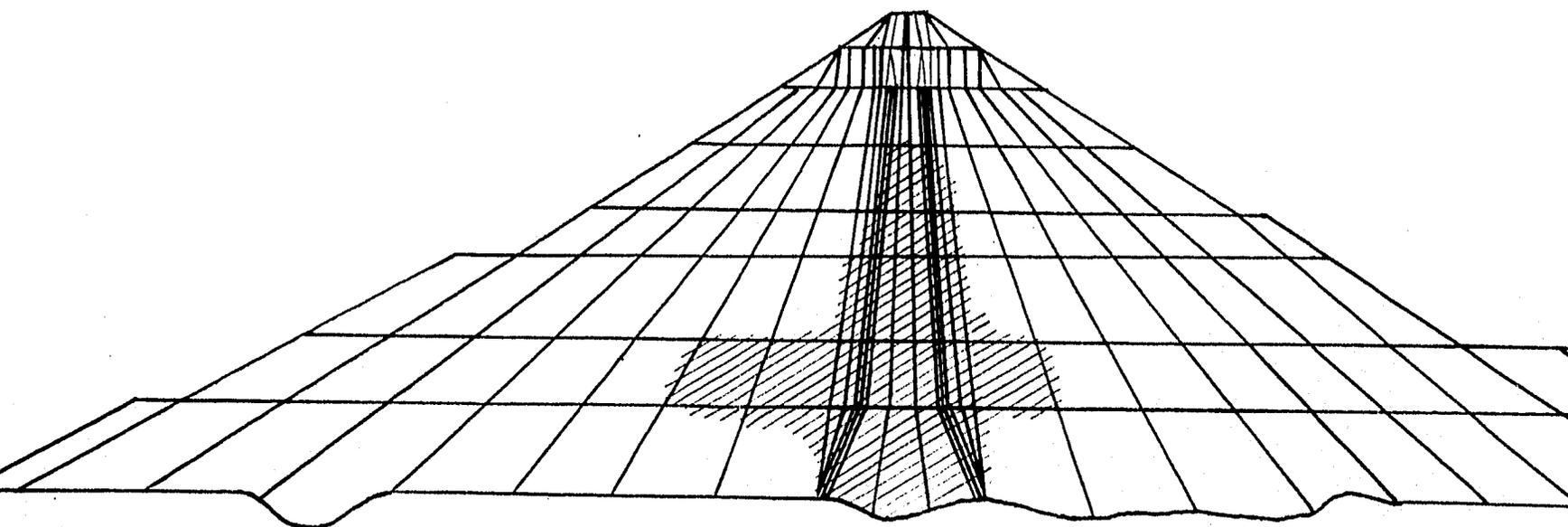


fig 3.31



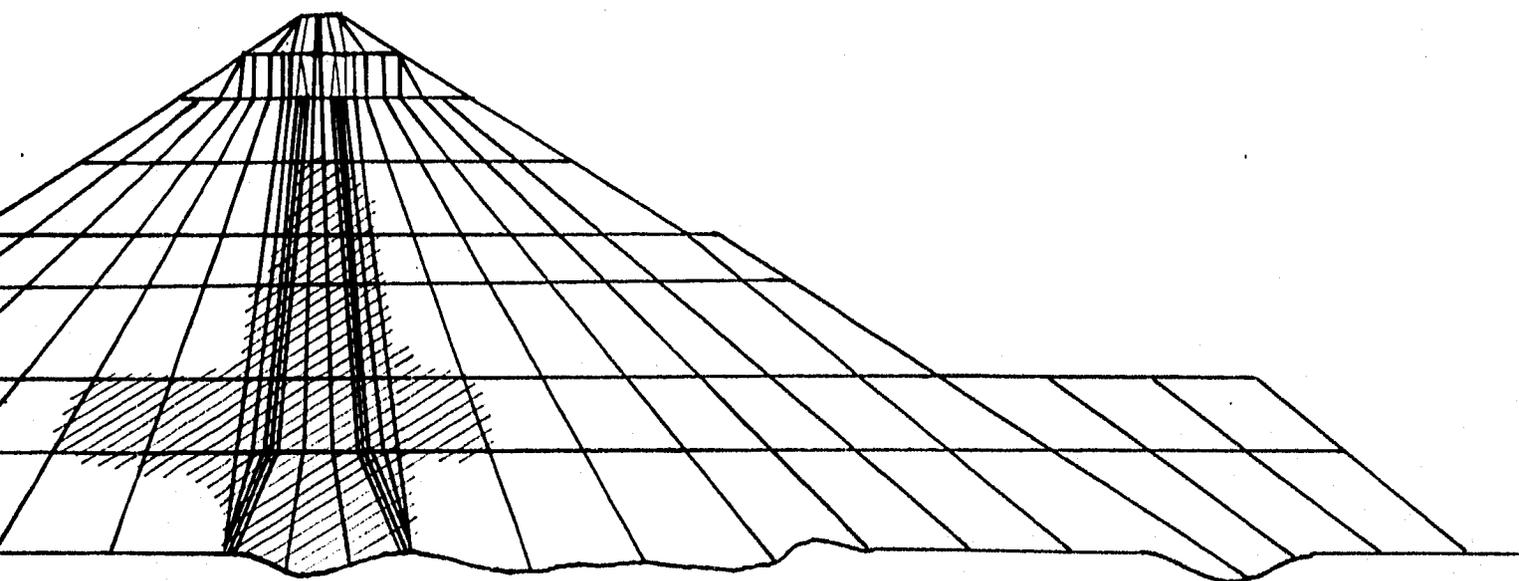
Zona plastificada
de la Presa

Figura 3.33



Zona plastificada en la sección máxima de la Presa "El Infiernillo"

Figura 3.33



Zona plastificada en la sección máxima
de la Presa "El Infiernillo"

Figura 3.33

CONCLUSIONES

Las incertidumbres que afectan los parámetros de los materiales geotécnicos tienen una incidencia sobre los resultados de los análisis numéricos realizados por técnicas como el método del elemento finito. Estas incertidumbres provienen principalmente de la falta de información, de las variaciones espaciales que presentan estas propiedades y de las imprecisiones en la determinación de las mismas en el campo o en el laboratorio.

En el presente trabajo se ha mostrado que es posible evaluar la incertidumbre que afecta a los resultados de un análisis por el método del elemento finito a partir de la que existe sobre los parámetros de los suelos. Este tipo de análisis se conoce como método del elemento finito estocástico.

Se desarrolló un algoritmo que permite resolver el problema anterior en forma aproximada recurriendo a un enfoque de segundos momentos-primer orden. El algoritmo permite obtener la incertidumbre sobre los resultados bajo la forma de una desviación estándar o de un coeficiente de variación. El método desarrollado se aplica a materiales con comportamiento lineal o no lineal (modelo hiperbólico); puede ser fácilmente adaptado a materiales con otras leyes de comportamiento.

Los ejemplos presentados en este trabajo muestran lo siguiente:

- Las fronteras con condiciones impuestas son lugares con incertidumbre nula en la dirección de los desplazamientos restringidos; esto es consecuencia de que los mismos son tomados como de carácter determinista. Es importante subrayar que las incertidumbres estimadas por el método presentado son condicionales y dependen de la validez de estas condiciones.

- Los ejes de simetría conducen también a incertidumbres nulas si la simetría se conserva al variar los parámetros en forma aleatoria.

- Si los parámetros de los materiales involucrados son independientes entre sí, el coeficiente de variación de los resultados tiende a disminuir por efecto de compensación estadística.

- Por lo contrario, una correlación significativa entre los parámetros considerados en el análisis conduce a valores mayores del coeficiente de variación de los resultados.

- En zonas donde los desplazamientos son muy pequeños o invierten su sentido, se encuentran coeficientes de variación muy altos a consecuencia de que la expresión que define a dicho coeficiente es el cociente entre la desviación estándar y el desplazamiento. Lo anterior muestra las limitaciones del concepto de coeficiente de variación.

- Las leyes de comportamiento no lineal pueden conducir a fenómenos de amplificación local de la incertidumbre, especialmente cuando los esfuerzos son próximos a los de falla. En caso de comportamiento altamente no lineal, la aproximación de segundos momentos-primer orden puede ser objetable debido a que solamente se conservan los primeros términos de una serie de Taylor.

•El algoritmo desarrollado puede ser empleado para estudiar la contribución individual de cada uno de los parámetros a la incertidumbre global y evaluar cuales deben determinarse con especial cuidado. En estudios de este tipo, se encuentra lógicamente que en zonas poco solicitadas los parámetros más importantes son los de deformabilidad inicial, mientras que en zonas próximas a la falla los parámetros de resistencia última son los que toman más importancia.

El método del elemento finito estocástico se presenta como una herramienta útil para el ingeniero geotecnista deseoso de introducir cierto grado de realismo en sus análisis. Sin embargo es una herramienta de uso delicado por los siguientes motivos:

a) Su uso solamente se justifica cuando se ha hecho lo posible para incluir en el análisis toda la información determinista existente y para usar los mejores modelos deterministas disponibles. El análisis de incertidumbre complementa pero nunca debe sustituir a un buen análisis determinista.

b) El significado y la validez de los resultados obtenidos dependen del significado y de la validez del contenido de la matriz de covariancia. La definición de esta matriz sobre bases subjetivas (experiencia) u objetivas (geoestadística) constituye por tanto una etapa muy crítica en la aplicación del método.

BIBLIOGRAFÍA

- Alberro J., 1972, "Stress-strain analysis of El Infiernillo dam", ASCE Conference on Earth Structures Performances, Vol 1, Universidad de Purdue, Lafayette.
- Alberro J.- Mendoza M.- Marsal R.- Hiriart G., 1979, "Comportamiento de Suelos Compactados, Segundo Informe", Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Alberro J.- Mendoza M.- Marsal R.- Hiriart G., 1982, "Comportamiento de Suelos Compactados, Cuarto Informe", Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Auvinet G. and Abaziou L., 1993, "Application of random field theory to control of compaction of earth embankments", CODATA Conference on Geomathematics and Geomechanics, Enschede, Holland, Sciences de la Terre, N° 32, France.
- Auvinet G., 1995, "Geostatistics and Reliability Analysis of Earthfills", Proceedings Panamerican Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Guadalajara, México, SMMS, Vol.3, pp 1405-1414.
- Auvinet, G., 1994, "Modélisation stochastique de la répartition spatiale des propriétés des sols et des ouvrages en terre", Comptes rendus, Journées Nationales sur les Applications des Statistiques et Probabilités en Analyse des Matériaux et des Ouvrages, ENS Cachan.
- Auvinet G., "Procesos Estocásticos : apuntes no publicados", Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Auvinet G., Bouayed A., Orlandi S., López F., 1996, "Stochastic Finite Element Method in Geomechanics", GET Specialty conference on uncertainty in the geologic environment: from theory to practice, Wisconsin, ASCE (accepted for publication).
- Auvinet G., Fry J. J. And Rossa O., 1991, "Reliability of homogeneous earthfills", Proceedings, Sixth International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, CERRA-ICASP6, pp. 768-775, México.
- Benjamin, J.R and Cornell., 1972, "Probability, statistics and decision for civil engineers", Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York.
- Bolle A., 1993, "How to Manage the Spatial Variability of Natural Soils", Probabilités et matériaux, Essais, Modeles et Applications, NATO ARW9305201, ENS Cachan, France.
- Bouayed, A., 1993, "Modélisation Stochastique par Eléments Finis en Élasticité Linéaire", ENSG, Mémoire de DEA, ENSG, INPL, Nancy, France.
- Cambou, B., 1974, "Método del Elemento Finito. Análisis de Incertidumbre de Primer Orden", Publicación del Instituto de Ingeniería N° 339, UNAM, México.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

- Carels Patrick, 1982, Tesis de maestría, "Influencia de la Dispersión de los Parámetros del Suelo en la Evaluación del Comportamiento Dinámico de Obras de Tierra", DEPFI .UNAM.
- CFE-UNAM- "Comportamiento de Presas Construidas en México", 1973, Secretaría de Recursos Hidráulicos. Comisión Federal de Electricidad, Instituto de Ingeniería - UNAM.
- Cornell C. A., 1971, "First order uncertainty analysis of soils deformation and stability", Proceedings, First International Conference on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering, Hong Kong.
- Chowdhury R.N., 1993, "Rational polynomial technique in slope-reliability analysis", Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 119 , Nº112, pp 1910-1928. USA.
- Duncan J.M., Seed R.B., Wong K.S. and Ozawa Y., 1984, "FEADAM84: A Computer Program for Finite Element Analysis of Dams", Geotechnical Engineering. Research Report Nº SU/GT/84-03. Department of Civil Engineering Stanford University.
- Duncan J.M., Byrne P., Wong K.S., Mabry P., 1980, "Strength, Stress-strain and Bulk Modulus Parameters for Finite Element Analyses of Stresses and Movements in Soil Masses", Report Nº UCB/GT/80-01. 1980. College of Engineering. Office of Research Services. University of California. Berkeley, California.
- Flores Macías, O. A, 1995, "Modèles fiabilistes et mécaniques: éléments finis stochastiques. Méthodes de couplage et applications.", These doctorale, Université Blaise Pascal - Clermont II .
- Konder, R.L. and Zelasko, J. S, 1963, "A hyperbolic stress-strain formulation of sands", Proceedings of the 2nd Panamerican Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol. 1, Brazil , pp 289.
- Konder R.L., 1963, "Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 89, Nº SM1, February.
- Kulhawy, "Numerical methods in geotechnical engineering", Mc Graw Hill, pp. 84.
- López A., Tesis en preparación, "Método del elemento finito estocástico: análisis lineal", DEPFI, UNAM.
- Magnan J. P., 1987, "Programme de Calcul par la Méthode des Éléments Finis Stochastiques PROBEF", Greco Géomatériaux, Aussois, France.
- Matheron G., 1965, "Les variables régionalisées et leur estimation", Masson éditeur, Paris, France.
- Mathews J., Walker R. L., "Mathematical Methods of physics", 2nd Edition, Benjamin Publishers 1964, pp. 286-298.
- Marsal R., Fuentes A., 1976, "Presa Chicoasén: Propiedades mecánicas de enrocamientos", Instituto de Ingeniería, UNAM.

- Marsal R. J., Reséndiz D., 1979, "Presas de Tierra y Enrocamiento", Editorial Limusa.
- Mendénhall , Scheaffer and Wackerly, 1990, "Estadística Matemática con Aplicaciones", Grupo Editorial Iberoamericana.
- Mrabet G., 1993, "Contrôle Géostatistique du Compactage des Ouvrages en Terre", Mémoire de DEA, ENSG, Nancy, France.
- Nechcech, 1994, "Fiabilité des murs de soutènement", Memoire de DEA, ENSG, Nancy, France.
- Orlandi S. G. y Castellanos J. E., 1996, "Manual FEADORL96", Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Papoulis A., 1985, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", Mac Graw Hill.
- Rosenblueth, E., 1975, "Point Estimates for Probability Moments", Proc. Nat. Academy Sciences - USA - Volumen 72 - Octubre, pp 3812-3814.
- Scheaffer R. L. and Mc Clave J., 1989, "Probabilidad y Estadística para Ingenieros", Grupo Editorial Iberoamérica.
- Vanmarcke E. H., 1977, "Reliability of earth slopes", Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol 103, N° GT11, pp. 1247-1265.
- Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., 1995, "El método de los Elementos Finitos", Volumen 1, MacGraw Hill. 4ª Edición.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor R.L., 1995, "El método de los Elementos Finitos", Volumen 2, MacGraw Hill. 4ª Edición.