UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

CLASES CARACTERISTICAS Y SINGULARIDADES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

L.M. MARTIN EDUARDO FRIAS ARMENTA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARCELO AGUILAR GONZALES

México, D.F. 1996

Agradezco al Dr. Marcelo Aguilar González por su mucha ayuda en la realización del presente trabajo, a mi jurado por el tiempo dedicado a leer y corregir mi tesis: Dr. Federico Sánchez Bringas, Dr. Eugenio Garnica Vigil, Dra. Laura Hidalgo Solís, Dr. Daniel Juan Pineda, M. C. Ana Irene Ramírez Galarza y Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta. A Conacyt que sin su apoyo economico no hubiera podido realizar mi maestría. Al Intituto de Matemáticas por las facilidades para realizar este trabajo. Agradezco también a todos mis amigos por aguantarme. A mis padres por a haberme ayudado a llegar hasta aquí.

A Martha Frías.

A Egla.

Contenido

TESIS

COMPLETA

Introducción

La teoría de clases características se originó en los trabajos de Hassler Whitney y Eduard Stiefel en 1935. Dado un haz vectorial ξ de dimensión n sobre un espacio B, ellos estudiaron el problema de determinar cuantas secciones linealmente independientes admite ξ. Por ejemplo ξ es isomorfo al haz trivial si y sólo si ξ admite n secciones linealmente independientes. Si suponemos que B es un complejo CW (en particular un poliedro) entonces la i–ésima clase de Stiefel-Whitney de ξ, $\omega_i(\xi) \in H^i(B, \mathbf{Z}_2)$ se define como la obstrucción a la existencia de $n-i+1$ secciones linealmente independientes sobre el i–ésimo esqueleto de B, esto implica que si se tienen $n-i+1$ secciones linealmente independientes, entonces $\omega_i(\xi) = 0$. La definición de las clases por este método utiliza las herramientas de la topología algebraica, en particular, la cohomología con coeficientes locales que es donde están las obstrucciones.

Existen otros tres métodos para definir las clases, uno a través de operaciones cohomológicas, otro calculando la cohomología de espacios clasificantes, y otro calculando la cohomología del haz de proyectivos asociado al haz vectorial. Todas estos métodos son de carácter algebraico.

El propósito de este trabajo es el dar una construcción de las clases de Stiefel-Whitney más geométrica, utilizando las herramientas de la topología diferencial, y siguiendo la idea de la definición original.

Sea ξ un haz vectorial suave sobre una variedad diferenciable M, la existencia de $n-i+1$ secciones linealmente independientes en ξ es equivalente a la existencia de un morfismo de haces $h : \varepsilon^{n+1-i} \to \xi$, donde ε^{n-i+1} es el haz producto $M \times \mathbf{R}^{n-i+1}$ sobre M, tal que h es inyectivo en cada fibra. Con esta formulación la obstrucción a la existencia de las secciones está representada por el subconjunto de puntos de M sobre los cuales h no es inyectivo. Denotaremos a este subconjunto como $\bar{Z}_1(h)$. En general $\bar{Z}_1(h)$ no es una variedad pero si h es genérico, $\bar{Z}_1(h)$ es una variedad estratificada y por lo tanto, al igual que variedades, tiene una clase fundamental. Esta clase fundamental nos da un elemento en la homología de M y el resultado principal (Teorema 3.3) es que el dual de Poincaré de esta clase es precisamente la i-ésima clase de Stiefel-Whitney de ξ.

Utilizando una construción de Porteous [15] se da una desingularización de $\bar{Z}_1(h)$ de manera que se obtiene una representación de las clases en términos de variedades. Para esto consideramos la subvariedad de $M \times \mathbf{R}P^{n-i}$ formada por todas las parejas (x, L) donde L es una línea contenida en el nucleo de

h restringida a la fibra sobre el punto x. En el teorema 3.6 se prueba que esta variedad representa a $\omega_i(\xi)$.

Finalmente con el teorema 3.18 se muestra que esta construcción de las clases se puede utilizar para definir las clases de Stiefel-Whitney de cualquier haz vectorial (sobre espacios paracompactos). La idea es que cualquier haz vectorial se obtiene como haz inducido del haz universal y a su vez este haz universal está filtrado por haces sobre variedades para las cuales podemos aplicar nuestra consrucción.

El material está repartido en tres capítulos. Los capítulos 1 y 2 son de teoría conocida por lo que en su mayoría no hay demostraciones. El capítulo 1 trata sobre generalidades de haces, en el capítulo 2 estudiamos otros aspectos que son preliminares y necesarios para nuestro trabajo que es esencialmente el capítulo 3, donde se encuentra lo descrito anteriormente.

Capítulo 1

Haces

1.1 Haces Fibrados

Las definiciones y resultado enuciados en esta sección se harán para haces suaves sobre variedades, sin embago pidiendo solo continuidad se obtienen haces sobre cualquier espacio topológico. Las demostraciones de la presente sección y las dos siguientes pueden ser encontradas en [9] o [7].

Definición 1.1 ***Propiedad del Producto Local.*** *Sea $\pi : E \to B$ una aplicación suave de variedades. La aplicación π se dice que tiene la propiedad del producto local con respecto a una variedad F si existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de B y una familia $\{\psi_\alpha\}$ de difeomorfismos*

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

tal que $\pi\psi_\alpha(x, y) = x$, $x \in U_\alpha$, $y \in F$.

El sistema $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ será llamada una descomposición local de π. Claramente una aplicación con producto local es suprayectiva y abierta.

Definición 1.2 *Un haz fibrado suave es una cuarteta $\xi = (E, \pi, B, F)$ donde $\pi : E \to B$ es una aplicación suave que tiene la propiedad del producto local con respecto a F. Una descomposición local para π es llamada una representación coordenada para el haz fibrado.*

Llamaremos a E el espacio total o espacio haz, B el espacio base, F la fibra típica, para cada $x \in B$, el conjunto $F_x = \pi^{-1}(x)$ sera llamado la fibra sobre x. Toda fibra es un subconjunto cerrado de E, y E es la unión disjunta de fibras.

Definición 1.3 *Una sección suave de un haz fibrado $\xi = (E, \pi, B, F)$ es una aplicación suave $\sigma : B \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = i_B$.*

Si $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ es una representación coordenada para el haz, obtenemos biyecciones $\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$, $x \in U_\alpha$, definida por

$$\psi_{\alpha,x}(y) = \psi_\alpha(x, y), \; y \in F$$

en particular, si $x \in U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, obtenemos aplicaciones $\psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x} : F \to F$. Estas son difeomorfismos. De hecho, como ψ_α y ψ_β definen difeomorfismos de $U_{\alpha\beta} \times F$ sobre $\pi^{-1}(U_{\alpha\beta})$, ellos determinan difeomorfismos $\psi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$ de $U_{\alpha\beta} \times F$ sobre sí mismo. Pero

$$\psi_{\beta\alpha}(x, y) = (x, \psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x}(y)) \; . \; x \in U_{\alpha\beta}, \; y \in F,$$

y así $\psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x}$ es un difeomorfismo de F. Supongamos ahora que (E', π', B', F') es un segundo haz fibrado. Entonces una aplicación suave $\varphi : E \to E'$ se dice que preserva fibras si, cuando $\pi(z_1) = \pi(z_2)$, $(z_1, z_2 \in E)$, entonces $\pi'(\varphi(z_1)) = \pi'(\varphi(z_2))$. Cualquier aplicación que preserva fibras determina una aplicación de conjuntos $\varphi_B : B \to B'$ con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi & & \\ & E & \rightarrow & E' & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \pi' \\ & B & \rightarrow & B' & \\ & & \varphi_B & & \end{array}$$

Mostraremos ahora que φ_B es suave. De hecho, si $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ es una descomposición local para π y tomando $y \in F$ fijo, entonces

$$\varphi_B(x) = (\pi' \circ \varphi \circ \psi_\alpha)(x, y)\ ,\ x \in U_\alpha.$$

Así φ_B es suave sobre cada miembro U_α de la cubierta de B.

Proposición 1.4 *Sean B, F variedades y sea E un conjunto. Asumimos que una aplicación de conjuntos suprayectiva $\pi : E \to B$ es dada con las siguientes propiedades:*

1. *Hay una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de B y una familia $\{\psi_\alpha\}$ de biyecciones*

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha).$$

2. *Para toda $x \in U_\alpha$, $y \in F$, $\pi\psi_\alpha(x,y) = x$.*

3. *Las aplicaciones $\psi_{\beta\alpha}(x,y) = (\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha)(x,y)$ son difeomorfismos.*

Entonces existe exactamente una estructura de variedad sobre E para la cual (E,π,B,F) es un haz fibrado con representación coordenada $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}$.

1.2 Haces Vectoriales

Definición 1.5 *Un haz vectorial suave es una cuarteta $\xi = (E,\pi,B,F)$ donde*

1. *(E,π,B,F) es un haz fibrado suave.*

2. *F, y las fibras $F_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in B$, son espacios vectoriales reales, complejos o cuaterniones (estaremos interesados únicamente en los reales)*

3. *Hay una representación coordenada $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}$ tal que las aplicaciones*

$$\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$$

son isomorfismos lineales.

La dimensión de F es llamada el *rango* de ξ. Una representación coordenada para el haz que satisface (3) es llamada representación coordenada para el haz vectorial ξ. Con frecuencia denotaremos a ξ por su espacio total E. Si $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}$ es una representación coordenada para ξ, entonces las aplicaciones $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(F)$ dadas por

$$g_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha x}^{-1} \circ \psi_{\beta x}$$

son suaves. Estas serán llamadas funciones de transición o transformaciones de coordenadas para ξ correspondiente a $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$.

Un *subhaz* ξ' de un haz vectorial ξ es un haz vectorial con la misma base tal que cada una de sus fibras F'_x es un subespacio de F_x, y para la cual la aplicación inducida $i : E' \to E$ es suave.

Definición 1.6 *Si $\xi = (E, \pi, B, F)$ y $\xi' = (E', \pi', B', F')$ son haces vectoriales, una aplicación de haces (también llamado homorfismo de haces vectoriales) $\varphi : \xi \to \xi'$ es una aplicación suave que preserva fibras $\varphi : E \to E'$ tal que las restricciones*

$$\varphi_x : F_x \to F'_{\phi(x)} \ , \ x \in B,$$

son lineales ($\phi : B \to B'$ denota la aplicación suave inducida).

Definición 1.7 *Una aplicación fuerte de haces entre dos haces vectoriales con la misma base es una aplicación de haces vectoriales que induce la identidad en la base.*

Consideremos una variedad B y un espacio vectorial F de dimensión r. Asumimos que a todo punto $x \in B$ tiene asignado un espacio vectorial F_x de dimensión r. Consideremos la unión disjunta $E = \cup_{x \in B} F_x$ y la proyección natural $\pi : E \to B$. Asumimos dada una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de B, junto con isomorfismos lineales

$$\psi_{\alpha,x} : F \to F_x \ , \ x \in U_\alpha$$

Sujeto a la siguiente condición:

Condición S: Las aplicaciones $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(F)$ dadas por

$$g_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha,x}^{-1} \circ \psi_{\beta,x}$$

son suaves. Definimos las biyeciones $\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ vía

$$\psi_\alpha(x, y) = \psi_{\alpha,x}(y)$$

Entonces la condición S implica que las biyecciones $\psi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$ de $U_{\alpha\beta} \times F$ son suaves. Por la proposición 1.4 hay una única estructura de variedad suave sobre E que hace a (E, π, B, F) un haz con representación coordenada $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$, es claro que el haz así obtenido es un haz vectorial.

Ejemplos

1) El haz producto $B \times \mathbf{R}^n$ (denotaremos este haz por ε^n y lo llamaremos *trivial*).
2) El haz lineal γ_n^1 sobre el proyectivo real $\mathbf{R}P^n$ definido como sigue:

consideremos el $\mathbf{R}P^n$ como el conjunto de antípodas $\{x, -x\}$ sobre $\mathbf{S}^n$. El espacio total E es el conjunto de todas las parejas $\{\{x, -x\}, \lambda x\}$ con $\lambda \in \mathbf{R}$.

Haz Inducido

Sea $\xi = (E, \pi, B, F)$ un haz vectorial y sea $\sigma : B' \to B$ una aplicación suave asignaremos a cada $x \in B'$ el espacio vectorial

$F_{\sigma(x)}$. Sea $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ una representación coordenada para ξ y $U_\alpha = \sigma^{-1}(V_\alpha)$. Definimos el isomorfismo lineal

$$\psi_{\alpha,x} : F \to F_{\sigma(x)} \ , \ x \in U_\alpha$$

por $\psi_{\alpha,x} = \varphi_{\alpha,\sigma(x)}$. Entonces la aplicación $x \mapsto \psi_{\alpha,x}^{-1} \circ \psi_{\beta,x}$ $(x \in V_\alpha \cap V_\beta)$ puede ser escrita:

$$x \mapsto g_{\alpha\beta}(\sigma(x)),$$

donde $g_{\alpha\beta}$ son las transformaciones de coordenas para ξ, por ello suaves. Así hay un haz vectorial $\sigma^*\xi = (E', p, B', F)$, con $E' = \cup_{x \in B'} F_{\sigma(x)}$ y con representación coordenadas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$. $\sigma^*\xi$ es llamado *haz inducido* de ξ sobre σ.

$$\begin{array}{ccc} & \tau & \\ E' & \to & E \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ B' & \to & B \\ & \sigma & \end{array}$$

La aplicación identidad $F_{\sigma(x)} \to F_{\sigma(x)}$ define una aplicación de haces

$$\tau : \sigma^*\xi \to \xi$$

que induce $\sigma : B' \to B$. τ se restringe a un isomorfismo lineal en cada fibra. Si $\eta = (E'', p', B', F')$ es un segundo haz vectorial sobre

B' y $\varphi : \eta \to \xi$ es una aplicación de haces induciendo $\sigma : B' \to B$. Entonces podemos restringir φ a la aplicación lineal

$$\varphi_x : F'_x \to F_{\sigma(x)} \ , \ x \in B'.$$

Así definimos una aplicación fuerte de haces $\hat{\varphi} : \eta \to \sigma^*\xi$, y el diagrama

$$\begin{tikzcd} \eta \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \sigma^*\xi \arrow[d, "\tau"] \\ & \xi \end{tikzcd}$$

conmuta. En particular, si cada φ_x es un isomorfismo lineal, entonces $\hat{\varphi}$ es un isomorfismo fuerte de haces, es decir η es isomorfo al haz inducido de ξ sobre σ.

Suma de Whitney.

Dado un m–haz vectorial $\zeta = (E, B, \pi, \mathbf{F}^m)$ y un n–haz vectorial $\eta = (E', B, \pi', \mathbf{F}^n)$ sea E'' el subconjunto de $E \times E'$ que consiste de todos los pares (e, e') tal que $\pi(e) = \pi'(e')$ definimos $\pi''(e, e') = \pi(e)$.

Como π, π' son proyecciones de m, n–haces vectoriales respectivamente, π'' es la proyección de un $(m+n)$–haz vectorial, llamado *suma de Whitney*, $\zeta \oplus \eta = (E'', B, \pi'', \mathbf{F}^{m+n})$.

Otra manera de definir la suma de Whitney es considerar el haz $E \times E' \to B \times B$ y la función diagonal $\Delta : B \to B \times B$, la suma de Whithey será el haz inducido $\Delta^*(E \times E')$.

1.3 Haces Principales

Definición 1.8 *Sea G un grupo de Lie. Un haz principal suave con estructura de grupo G es un par (ρ, T), donde,*

1. *$\rho = (P, \pi, B, G)$ es un haz fibrado suave.*
2. *$T : P \times G \to P$ es una acción suave por la derecha de G sobre P.*
3. *ρ admite una representación coordenada $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ tal que*

$$\psi_\alpha(x, ab) = \psi_\alpha(x, a) \cdot b \ , \ x \in U_\alpha, \ a, b \in G.$$

$$\begin{array}{ccc} & \psi_\alpha & \\ U_\alpha \times G & \to & \pi^{-1}(U_\alpha) \\ & \searrow & \downarrow \\ \pi & & U_\alpha \end{array}$$

(observación escribimos $T(z, a) = z \cdot a$).

La acción T es llamada la *acción principal* y una representación coordenada que satisface la condición (3) es llamada *coordenada de representación principal.* La condición (3) implica que $\pi(z \cdot a) = \pi(z)$, $z \in P$, $a \in G$. Más aún, se sigue que la acción T es libre y que la órbita de G a través de un punto $z \in P$ es la fibra que contiene z. En particular las órbitas son subvariedades de P. Ellas serán denotadas por $G_x = \pi^{-1}(x)$ $(x \in B)$, (como la acción es libre no hay confusión con la notación para subgrupos de isotropía). Nótese que $G_x \mapsto x$ define una biyección de conjuntos entre las órbitas y B. Sea $\hat{p} = (\hat{p}, \hat{\pi}, \hat{B}, G)$ un segundo haz principal con acción $\hat{T}$. Una aplicación equivariante suave $\varphi : P \to \hat{P}$ es llamado homomorfismo de haces (una aplicación equivariante es la que hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P \times G & \xrightarrow{T} & P \\ {\scriptstyle \varphi \times id} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \varphi} \\ \hat{P} \times G & \xrightarrow[\hat{T}]{} & \hat{P} \end{array} \qquad \begin{aligned} \varphi \cdot T(z, a) &= \hat{T} \circ \varphi \times id(z, a) \\ &= \hat{T}(\varphi(z), a) \end{aligned}$$

conmute).

Tal homorfismo preserva órbitas y así se induce una aplicación suave $\psi : B \to \hat{B}$ tal que $\hat{\pi} \circ \varphi = \psi \circ \pi$, es decir que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ P & \rightarrow & \hat{P} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \hat{\pi} \\ B & \rightarrow & \hat{B} \\ & \psi & \end{array}$$

Más aún, φ se restringe a una aplicación suave $\varphi_x : G_x \to G_{\varphi(x)}$ $(x \in B)$. Las relaciones

$$\varphi_x(z, a) = \varphi_x(z) \cdot a, \; z \in G_x, \; a \in G,$$

implica que cada φ_x es difeomorfismo. Se sigue que φ es difeomorfismo si y sólo si ψ lo es. En este caso φ^{-1} es también un homomorfismo de haces principales, φ y φ^{-1} son llamados isomorfismos de haces principales. Si $B = \hat{B}$ y $\psi = id$, entonces φ es llamado isomorfismo fuerte de haces principales.

Ejemplos:

1. El haz *trivial*:

$$(B \times G, \pi, B, G),$$

junto con la acción por la derecha

$$(x, a) \cdot b = (x, ab), \; x \in B, \; a, b \in G$$

es un haz principal, llamado trivial o haz producto.

2. Haces *marcos*: Sea $\xi = (E, p, B, F)$ un haz vectorial, y, para $x \in B$, sea G_x denota el conjunto de isomorfismos lineales de F a F_x. Construimos un haz principal $(P, \pi, B, GL(F))$, donde $P = \bigcup_x G_x$ y π es la proyección que manda G_x a x.

Para lo que sigue $\rho = (P, \pi, B, G)$ denota un haz principal fijo con acción principal T. Más aún

$$S : G \times F \to F$$

denotará una acción fija por la izquierda de G sobre una variedad F. Consideremos la acción derecha Q, de G sobre la variedad producto $P \times F$ dada por

$$\begin{aligned} Q(z, y, a) &= (z, y) \cdot a = (za, a^{-1}y), \\ z &\in P, y \in F, a \in G. \end{aligned}$$

Q será llamada acción cociente de G. El conjunto de órbitas para la acción cociente será denotado por $P \times_G F$ y

$$q : P \times F \to P \times_G F$$

denotará la correspondiente proyección, es decir $q(z, y)$ es la órbita de (z, y). La aplicación q determina una aplicación p :

$P \times_G F \to B$ vía el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{cccc} & P \times F & \xrightarrow{q} & P \times_G F & \\ \pi_P & \downarrow & & \downarrow & p \\ & P & \xrightarrow[\pi]{} & B & \end{array}$$

donde π_P es la proyección obvia. Denotaremos por $p^{-1}(x)$ por F_x, $x \in B$.

Proposición 1.9 *Existe una única estructura suave sobre $P \times_G F$ tal que*

$$\xi = (P \times_G F, p, B, F)$$

es un haz fibrado.

Corolario 1.10 *Si (E, π, B, F) es un haz vectorial de fibra F y F' es un subespacio vectorial. Entonces vía el haz de marcos y la proposición anterior $(P \times_{GL(F)} F', p, B, F')$ es un subhaz vectorial de E.*

1.4 Propiedad de Levantamiento de Homotopía (CHP)

Definición 1.11 *Sea $p : E \to B$ un espacio sobre B y $\tilde{H} : X \times I \to B$ una homotopía. Diremos que p tiene la CHP para X si lo siguiente se cumple.*

Dado $h : X \to E$ con $ph = \bar{H}(x,0)$ dado $\tau : X \to I$ y $H' : \tau^{-1}(0,1] \times I \to E$ con $pH'(x,t) = \bar{H}(x,t)$, $H'(x,0) = h(x)$, $x \in \tau^{-1}(0,1]$, $t \in I$, existe $H : X \times I \to E$ tal que:

$$
\begin{aligned}
&pH = \bar{H}\\
&H|_{\tau^{-1}(1)} = H'|_{\tau^{-1}(1)}\\
&H(x,0) = h(x)\\
&x \in X
\end{aligned}
$$

esto se puede ver en el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[d] & X \arrow[l, "h"'] \arrow[r, "\tau"] & I \\
B & X \times I \arrow[l, "\bar{H}"] \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
$$

Teorema 1.12 *[11]Si $p : E \to B$ tiene la CHP para todo conjunto V_λ de una cubierta numerable (es decir una cubierta con una partición de la unidad subordinada) de B, entonces p tiene la CHP para todos los espacios X.*

Definición 1.13 *Un haz fibrada ζ es llamado numerable si B_ζ, la base de ζ, admite una cubierta numerable $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $\zeta|_{V_\lambda}$, la parte de ζ sobre V_λ, es trivial para toda λ.*

Teorema 1.14 *Sean ζ, η G–haces principales numerables, $\varphi : \zeta \to \eta$, una aplicación de haces, y $D : B_\zeta \times [0,1] \to B_\eta$ una deformación de B_φ (es decir, $D(b,0) = B_\varphi(b)$). Entonces existe una aplicación de haces $\Phi : \zeta \times [0,1] \to \eta$ tal que $B_\Phi = D$ y $\Phi(z,0) = \varphi(z)$, $z \in E_\zeta$.*

Antes de probar el teorema notemos:

Lema 1.15 *Si $p : E \to X \times I$ tiene la CHP, entonces toda sección s de p sobre $X \times \{0\}$ tiene una extensión sobre toda $X \times I$.*

Demostración. Es necesario, $\bar{H} = id_{X\times I}$ es una deformación de ps, y una homotopía H la cual cubre $\bar{H}$ y empieza en s, es una sección como la requerida.

Demostración del teorema 1.14

Sean ξ, η G–haces principales y $f : B_\xi \to B_\eta$ una aplicación. Definimos un nuevo haz $Hom(\xi, \eta, f)$ sobre B_ξ cuya fibra sobre $x \in B_\xi$ consiste de todas las aplicaciones $\xi_x \to \eta_{f(x)}$. La trivialización local de estructuras en ξ y η provee de una trivialización local a $Hom(\xi, \eta, f)$, y si ξ, η son numerables, entonces también lo es $Hom(\xi, \eta, f)$. Una sección de $Hom(\xi, \eta, f)$ sobre $V \subset B$ es una aplicación de haces $\xi|_V \to \eta$ que sobre la base, induce $f|_V$. Con los datos del teorema tomemos $\xi = \zeta \times [0,1]$ y consideremos el haz $Hom(\xi, \eta, D)$. La aplicación φ puede ser vista como una sección de $Hom(\xi, \eta, D)$ sobre $X \times \{0\}$. Por el lema 1.15 esta sección se extiende sobre todo $X \times I$, es decir φ se extiende a una aplicación Φ como se requiere. ■

Corolario 1.16 *Si η es un haz numerable y $f_0, f_1 : X \to B_\eta$ son aplicaciones homotópicas, entonces los haces inducidos $f_0^*(\eta), f_1^*(\eta)$ son equivalentes.*

Demostración. Sea $\varphi : f_0^*(\eta) \to \eta$ la aplicación de haces inducida. Como $B_\varphi = f_0 \simeq f_1$, exite por el teorema 1.14 una aplicación de haces
$\varphi' : f_0^*(\eta) \to \eta$ con $B_{\varphi'} = f$, así $f_1^*\eta \simeq f_0^*\eta$. ■

Corolario 1.17 *Sea $\xi = (E, \pi, M, F)$ es un haz vectorial $f, g : M' \to M$ funciones homotópicas entonces $f^*E \cong g^*E$.*

Demostración. Sea P_E el haz principal asociado a E entonces, por el corolario anterior:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \cong & & & \\
g^*P_E & \to & f^*P_E & \to & P_E \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & M' & \to & M \\
 & & & f, g &
\end{array}
$$

si hacemos cociente con la acción de $G = GL(n)$ entonces

$$\begin{array}{ccccccc}
(g^*P_E) \times_G F & \to & (f^*P_E) \times_G F & \to & P_E \times_G F & = E \\
& \searrow & \downarrow & & \downarrow & \\
& & M' & \to & M &
\end{array}$$

y se tiene el resultado. ■

Capítulo 2

Singularidades

2.1 Variedades de Grassmann

Denotaremos por $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ la variedad de grassmannianos de n-planos a través del 0 en el espacio vectorial $\mathbf{R}^{n+k}$. Es decir $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ es el conjunto de todos los planos de dimensión n que pasan por el cero. Por ejemplo $G_1(\mathbf{R}^{n+1}) = \mathbf{R}P^n$.

Un n-marco en $\mathbf{R}^{n+k}$ es una n-tupla de vectores linealmente independientes de $\mathbf{R}^{n+k}$. La colección de todos los n-marcos en $\mathbf{R}^{n+k}$ forman un subconjunto abierto del producto cartesiano de n- hojas $\mathbf{R}^{n+k} \times ... \times \mathbf{R}^{n+k}$ llamado variedad de Stiefel y se denota por $V_n(\mathbf{R}^{n+k})$. Hay una función canónica

$$q : V_n(\mathbf{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbf{R}^{n+k})$$

que manda a cada n-marco el n-plano que genera. Daremos a $G_n(\mathbf{R}^{n+k}$) la topología cociente: Un subconjunto $U \subset G_n(\mathbf{R}^{n+k}$

) es un abierto si y sólo si su imagen inversa $q^{-1}(U) \subset V_n(\mathbf{R}^{n+k})$ es abierto.

Para cada descomposición en suma directa $v' \oplus v''$ de $\mathbf{R}^{n+k}$ con $v' \in G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ la aplicación

$$Hom(v', v'') \to G_n(\mathbf{R}^{n+k})$$

que asigna a cada f su gráfica, es una carta sobre $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$, llamada *carta estándar.* Como la dimensión del $Hom(v', v'')$ es nk la dimensión de $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ es nk.

El haz vectorial canónico k–dimensional γ^n_{nk} sobre $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ es el subhaz del haz producto $(G_n(\mathbf{R}^{n+k}) \times \mathbf{R}^{n+k}, p, G_n(\mathbf{R}^{n+k}), \mathbf{R}^{n+k})$ con el espacio total consistente del subespacio de pares $(V, x) \in G_n(\mathbf{R}^{n+k}) \times \mathbf{R}^{n+k}$, con $x \in V$. Un caso especial de este ejemplo es $n = 1$, el haz vectorial canónico γ^1_k sobre $\mathbf{R}P^k = G_1(\mathbf{R}^{k+1})$ es llamado el *haz lineal canónico.*

La función $\pi : G_n(\mathbf{R}^{n+k}) \times \mathbf{R}^{n+k} \to \mathbf{R}^{n+k}$, donde $\pi(V, x)$ es la proyección ortogonal de x en V, es aplicación. Para $H \subset \{1, 2, ..., n+k\}$, un subconjunto de n elementos, tenemos una aplicación lineal $u_h : F^n \to F^{n+k}$ que en cada coordenada, que no aparezca en H, se inserta un cero. Con estas aplicaciones, probaremos que $\gamma^n_{n+k} = (E, p, G_n(\mathbf{R}^{n+k}), \mathbf{R}^n)$ es localmente trivial. Como E es el subespacio de $G_n(\mathbf{R}^{n+k}) \times \mathbf{R}^{n+k}$ consistente de todos los pares (V, x) $x \in V$, la fibra sobre V es $\{V\} \times V$, y la estructura de espacio vectorial es determinada por el subespacio V. Sea U_H un subespacio abierto de $G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ consistente de $V \in G_n(\mathbf{R}^{n+k})$ tal que $\pi(V, -) : U_H(\mathbf{R}^n) \to V$ es una biyección. Así $h_H : U_H \times \mathbf{R}^n \to p^{-1}(U_H)$

es definido por la relación $h_H(V,x) = (V,\pi(V,x))$, y h_H es un isomorfismo que es lineal sobre cada fibra.

Si en lugar de $\mathbf{R}^{n+k}$ tomamos un ε^{n+k} haz vectorial trivial y hacemos esta misma construcción obtenemos el haz Grassmanniano $G_n(\varepsilon^{n+k})$ con su correspondiente haz universal γ^n. $BO(n)$ sera el Grassmaniano de n planos sobre $\mathbf{R}^\infty$: $G_n(\mathbf{R}^\infty) = \lim_{k\to\infty} G_n(\mathbf{R}^{n+k})$, y a su haz universal lo denotaremos por γ^n.

2.2 Clases de Stiefel-Whitney

En lo que sigue $H^i(X)$ significa $H^i(X,\mathbf{Z}_2)$ cohomología singular con coeficientes en $\mathbf{Z}_2$ y $H^*(X)$, la suma directa $H^0(X)\oplus H^1(X)\oplus\cdots$ [3]

Las *clases de Stiefel-Whitney* son objetos algebraicos que cumplen lo siguiente:

Sω1) A cada n–haz vectorial ζ sobre una base B paracompacta, le corresponde

$$W(\zeta) = 1 + W_1(\zeta) + \ldots + W_n(\zeta)$$

elemento de $H^*(B)$ donde $W_i \in H^i(B)$, tal que

Sω2) Para una aplicación de haces $f = (f_E, f_B) : \zeta \to \eta$ tenemos $f_B^*(W(\eta)) = W(\zeta)$

Sω3) $W(\zeta\oplus\eta) = W(\zeta)W(\eta)$ es decir $W_k(\zeta\oplus\eta) = \sum_{i+j=k} W_i(\zeta)\cup W_j(\eta)$.

4)Para el haz lineal no-trivial sobre $\mathbf{S}^1$ (que podemos representar como la banda de möebius abierta, ó como γ_1^1 del ejemplo

2)

$$W_1(\gamma_1^1) \neq 0$$

Llamaremos a $W_i(\zeta)$ la $i-$ ésima clase de Stiefel-Whitney, y a $W(\zeta)$ la clase total de Stiefel-Whitney.

En la página 66 teorema 3.22 probamos que los axiomas Sω3') y Sω4') junto con Sω1) y Sω2) son equivalentes a Sω1), Sω2), Sω3) y Sω4):

Sω3') $W(\zeta \oplus \varepsilon^n) = W(\zeta)$ **es decir** $W_i(\zeta \oplus \varepsilon^n) = W_i(\zeta)$.

Sω4') Para toda n **existe** ζ^n tal que $W_n(\zeta^n) \neq 0 \in H^n(B)$.

De aquí en adelante la base de el espacio será denotada por M, si se trata de una variedad y por B, si se trata de un espacio topológico. Denotaremos por ω si estamos hablando de la clase de Stiefel-Whitney y por W si se trata de las clases que cumplen Sω1) Sω2) Sω3') y Sω4').

2.3 Transversalidad

Sean M y N variedades diferenciables, $f : M \to N$ una función suave. Si $f(x) = y$ denotaremos df_x la diferencial del T_xM en T_yN.

Definición 2.1 *Se dice que f es transversa a la subvariedad $Z \subseteq N$, y se denota $f \pitchfork Z$ si*

$$imagen(df_x) + T_y(Z) = T_y(N)$$

para toda $y \in imagen(f) \cap Z$ y $x \in f^{-1}(y)$.

Teorema 2.2 *Si la aplicación $f : M \to N$ es transversa a una subvariedad $Z \subset N$, entonces la preimagen $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de M. Más aún, la codimensión de $f^{-1}(Z)$ en M es igual a la codimensión de Z en N.*

Demostración. Sea (V, ψ) una carta en $f(m_0) \in Z$ en N con la propiedad subvariedad para Z es decir:

$$\begin{gathered}\psi(V) = V_1 \times V_2 \subset F_1 \oplus F_2 \\ F_1 = \mathbf{R}^k,\ F_2 = \mathbf{R}^{n-k},\ n = \dim N,\ k = \dim Z \\ \psi(V \cap Z) = V_1 \times \{0\} \\ \psi(f(m_0)) = (0, 0).\end{gathered}$$

denotemos por $p_2 : V_1 \times V_2 \to V_2$ la proyección canónica. Sea (U, φ) una carta en m_0 en M, tal que $\varphi(m_0) = 0$, $\varphi : U \to \varphi(U) \subset E = \mathbf{R}^m$ y $f(U) \subset V$. Para $m \in U \cap f^{-1}(Z)$,

$$\begin{aligned} T_m(p_2 \circ \psi \circ f|_U) &= T_{\psi(f(m))} p_2 \circ T_{f(m)} \psi \circ T_m f \\ T_m(\psi \circ f)(T_m M) + F_1 &= F_1 \oplus F_2 \end{aligned}$$

(por transversalidad de f sobre Z), el siguiente diagrama conmutativo muestra lo anterior:

$$\begin{array}{ccccc} & M & \xrightarrow{f} & N & \\ \varphi & \downarrow & & \downarrow & \psi \\ & \varphi(U) & \searrow & V & \\ & & & \downarrow & p_2 \\ & & & V_1 \times V_2 & \end{array}$$

Así $T_m(p_2 \circ \psi \circ f|_U) : T_mU = T_mM \to F_2$ es sobre. Su nucleo es $(T_mf)^{-1}(T_{f(m)}Z)$ como $\ker p_2 = F_1$ y $(T_{f(m)}\psi)^{-1}(F_1) = T_{f(m)}Z$, y así es descompuesto en $T_m(M)$. En otras palabras, 0 es un valor regular de $p_2 \circ \psi \circ f|_U : U \to F_2$ y así tenemos

$$(p_2 \circ \psi \circ f|_U)^{-1}(0) = f^{-1}(Z \cap V)$$

es una subvariedad de U, y de M cuyo espacio tangente en $m \in U$ es igual $\ker(T_m(p_2 \circ \psi \circ f|_U)) = (T_mf)^{-1}(T_{f(m)}Z)$ por el teorema de submersión. Por lo tanto $f^{-1}(Z \cap V)$ es una subvariedad de M para cualquier carta V con la propiedad de subvariedad; es decir, $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de M. Además de nuevo por el teorema de submersión se tiene

$$\operatorname{codim}(f^{-1}(Z)) = \operatorname{codim}(f^{-1}(Z \cap V)) = \dim F_2 = \operatorname{codim}(Z)$$

■

Teorema 2.3 (de Homotopía de Transversalidad) *[2] Para cualquier aplicación suave $f : M \to N$ y una subvariedad sin frontera Z de una variedad sin frontera N, existe una aplicación suave $g : M \to N$ homotópica a f tal que $g \pitchfork Z$.* ∎

Teorema 2.4 (Transversalidad para Secciones) *[2] Sea $f : E \to M$ una aplicación entre variedades diferenciables y $s : M \to E$ una sección diferenciable de f (es decir, $f \circ s = Id_M$). Si $N \subset E$ es una subvariedad diferenciable, entonces una existe una sección $t : M \to E$ arbitrariamente cercana a s transversa a N.* ∎

2.4 Clase Fundamental

Sea M una $n-$variedad topológica. Sea R un anillo con unitario, para cada $x \in M$, recordemos que

$$H_i(M, M - x; R) \doteq H_i(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - 0; R)$$

es isomorfo a R para $i = n$ y cero para $i \neq n$.

Definición 2.5 *Una orientación local μ_x para M en x es una elección de un generador para $H_n(M, M - x; R)$.*

Nótese que tal μ_x determina orientaciones locales μ_y para para todos los puntos y en una vecindad abierta de x. Para ser más preciso, si B es una bola alrededor de x (en términos de una sistema local de coordenadas), entonces para cada $y \in B$

los isomorfismos

$$H_*(M, M - x) \xleftarrow{\rho_x} H_*(M, M - B) \xrightarrow{\rho_y} H_*(M, M - y)$$

determina una orientación local μ_y.

Definición 2.6 *Una orientación para M es una función que asigna a cada $x \in M$ una orientación local μ_x que "varía continuamente" con x, en el siguiente sentido: Para cada x exite un vecindad compacta N y una clase $\mu_N \in H_n(M, M - N)$ tal que $\rho_y(\mu_N) = \mu_y$ para cada $y \in N$. El par consistente de variedad y orientación es llamada variedad orientada.*

Teorema 2.7 *Para cualquier variedad M y cualquier compacto $\mathbf{k} \subset M$, hay una sola clase $\mu_{\mathbf{k}} \in H_n(M, M - \mathbf{k})$ que satisface $\rho_x(\mu_{\mathbf{k}}) = \mu_x$ para cada $x \in \mathbf{k}$.*

2.5 Dualidad de Poincaré

Sea $\mathbb{K} = \{\mathbf{k} \subset M : \mathbf{k}$ es compacto conexo $\}$. $\mathbb{K}$ es un sistema dirigido con la inclusión $\mathbf{k} \leq \mathbf{k}'$ si $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{k}'$. Entonces los $H^q(M, M - \mathbf{k})$ forman un sistema dirigido bajo:

$$\begin{array}{ccc} & j_k^{k'} & \\ H^q(M, M - \mathbf{k}') & \rightarrow & H^q(M, M - \mathbf{k}) \\ & \mathbf{k}' \subseteq \mathbf{k} & \end{array}$$

Definimos $H_c^q(M) = \varinjlim_{\mathbf{k}\in\mathbf{K}} H^q(M, M-\mathbf{k})$. Si M es compacto $H_c^q(M) =$

$H^q(M)$.

Por naturalidad del producto cap relativo tenemos:

$$\begin{tikzcd} H^q(M, M-\mathbf{k}) \arrow[r, "\varsigma_{\mathbf{k}}\cap"] \arrow[d, "j^{\mathbf{k}}_{\mathbf{k}'}"'] & H_{m-q}(M) \\ H^q(M, M-\mathbf{k}') \arrow[ur, "\varsigma_{\mathbf{k}'}\cap"'] & \end{tikzcd}$$

con $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{k}'$. Tomando el límite del lado izquierdo tenemos

$$D : H_c^q(M) \to H_{m-q}(M)$$

Teorema 2.8 (Dualidad de Poincaré) *Si M es una $m-$variedad el homomorfismo*

$$D : H_c^q(M) \to H_{m-q}(M)$$

es isomorfismo.

2.6 Variedades Estratificadas

Una variedad estratificada $r-$diferenciable en M^m es la unión $S = S_1 \cup \ldots \cup S_l$, con $l \leq m$, de subvariedades $r-$diferenciables disjuntas de $M^m : S_1, \ldots, S_l$ tales que:

1) $\dim S_k > \dim S_{k+1}$,

2) $S_k \cup S_{k+1} \cup ... \cup S_l$ es cerrado en M^m, para $k = 1, 2, ..., l$.

Los puntos de S_1 serán los puntos regulares de S.

Sea S una variedad estratificada de dimensión k (esto es la dimensión de S_1 es k). Diremos que S tiene una clase fundamental ς si exeste un elemento $\varsigma \in H_k(S)$ (homología con soporte cerrado, no necesariamente compacto[10]) tal que para cada punto regular $x \in S$, la imagen de ς en $H_k(S, S - x)$ es el generador de $H_k(S, S - x)$.

Un abierto de un espacio topológico de dimensión n será llamado denso si su complemento es de dimensión $\leq n - 1$.

Definición 2.9 *Un espacio de tipo VS_n (variedad de dimensión n con singularidades) es un espacio localmente compacto de dimensión n que contiene un abierto denso homeomorfo a una variedad de dimensión n.*

Denotaremos por X_R a los puntos que tienen una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbf{R}^n$, y por X_S el complemento. Una variedad estratificada es obviamente un espacio de tipo VS_n, y $M_R = S_1$, así es que llamaremos a los puntos de X_R puntos regulares y a los puntos que están en X_S puntos singulares.

Proposición 2.10 *[10] Sean X un espacio de tipo VS_n, A un subconjunto de X_R que intersecta a cada componente conexa de X_R, y $c \in H_n(X, \mathbf{Z}_2)$. Para que c sea una clase fundamental es necesario y suficiente que su valor en todo punto de $x \in A$ sea un generador de $H_n(X, X - x; \mathbf{Z}_2)$ y c está completamente determinado por sus valores en los puntos de A.* ■

Proposición 2.11 *Sean X y Y dos espacios de tipo VS_n y f una aplicación propia de X en Y. Supongamos que Y_R contiene un abierto U que intersecta a cada componente conexa de Y_R y tal que f sea un homeomorfismo de $f^{-1}(U)$ sobre U, y sea $c \in H_n(X, \mathbf{Z}_2)$ una clase fundamental de X. Entonces f_*c es una clase fundamental de Y.*

Demostración. Ya que f es propia f_*c está definido, la proposición resulta de la proposición 2.10 y del hecho f_* conmuta con las restricciones a $f^{-1}(U)$ y U. ∎

Lema 2.12 *[10]Sea $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de un espacio X de tipo VS_n y sea $J \subset I$ el conjunto de i para los cuales $\dim U_i = n$, y si U_i $(i \in J)$ posee una clase fundamental en $H_n(U_i; \mathbf{Z}_2)$. Entonces X tiene una y sólo una clase fundamental en $H_n(X; \mathbf{Z}_2)$.* ∎

Lema 2.13 *[10]Sea X un espacio de tipo VS_n, tal que, todo punto de X posee una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbf{R}^k$ con $k \leq n$. Entonces todo punto regular tiene una vecindad que posee una clase fundamental módulo 2.*

∎

Como colorarío de los lema 2.12 y el lema 2.13 tenemos

Teorema 2.14 *Sea X una variedad estratificada Entonces X posee una y solo una clase fundamental módulo 2.*

∎

Teorema 2.15 *[13]Sean M y M' dos variedades diferenciables paracompactas, $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m$ una variedad estratificada de subvariedades diferenciables en M, sea f una aplicación diferenciable de M' en M transversa* *sobre S, y $S' = f^{-1}(S)$ la imagen inversa de S. Supóngase que S' es un ANR y S tiene una clase fundamental α. Entonces S' tiene una clase fundamental β y la imagen por $f^* : H^*(M) \to H^*(M')$ de la clase dual a α es la clase dual a β.*

Demostración. Sean $n = \dim M$, $n' = \dim M'$, $k = \dim S$, $k' = \dim S'$. Puesto que las codimensiones de S y de S' son iguales, $n - k = n' - k' = q$.

Demostraremos el resultado en dos pasos;

(1) existe una clase $\beta \in H_{k'}(S')$ tal que la clase dual en M' es la imagen por f^* de la clase dual en M a α.

Sea W_i' un sistema fundamental de vecindades de S' en M', y sea f_i la restricción de f a W_i'. Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H_{k'}(M') \arrow[r, leftrightarrow, "D'"] & H^{n'-k'}(M') & & & \\
& & H^{n-k}(M) \arrow[ul, "f^*"'] \arrow[dl, "f_i^*"] \arrow[r, leftrightarrow, "D"] & H_k(M) & H_k(S) \arrow[l, "i_*"'] \\
H_{k'}(W_i') \arrow[uu] \arrow[r, leftrightarrow, "D_i'"] & H^{n'-k'}(W_i') \arrow[uu] & & &
\end{tikzcd}$$

donde los soportes de las homologías de M, M' son todos los cerrados, y, en W_i, los cerrados de M'que son contenidos en W_i' ; los signos $\leftrightarrow$ designan los isomorfismos de dualidad y i_*

los homomorfismos inducidos por inclusión. Observemos ahora que los elementos $D_i' f_i^* D_i \alpha$ de $H_{k'}(W_i')$ determinan un elemento de límite proyectivo $\varprojlim H_{k'}(W_i')$, $\beta \in H_{k'}(S')$; porque el homorfismo

$$H_{k'}(S') \to \varprojlim H_{k'}(W_i')$$

es un isomorfismo: S' se supuso ANR.

El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{k'}(S') & \xrightarrow{i'_*} & H_{k'}(M') \\ \downarrow & & \uparrow \\ \varprojlim H_{k'}(W_i') & \to & H_{k'}(W_i') \end{array}$$

donde i'_* es el homomorfismo de inclusión, al juntar con el diagrama precedente, se muestra que β satisface las condiciones de (1): $D' i'_* \beta = f^* D_i . \alpha$ para completar la demostración, es suficiente probar que la clase obtenida es la clase fundamental de S'.

Sea x' un punto regular de S' y sea $x = f(x')$. Se puede encontrar un sistema de coordenadas x_1, x_2, ... x_n en una vecindad W de x homeomorfa a $\mathbf{R}^{n-q} \times \mathbf{R}^q$, tal que las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sean nulas en el punto x, y tal que $W \cap S$ esté definido por $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_{n-q+1} = 0$. Sea B el subespacio de W definido por $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-q} = 0$, $|x_{n-q+1}| < 1$, ..., $|x_n| < 1$.

Sea T una vecindad abierta de S en M que contiene a B como cerrado.

Sea ahora W' una una vecindad de x' en M' contenida en $f^{-1}(W)$. Puesto que la aplicación f es transversa en el punto x' en M', se puede encontrar en W' un sistema de coordenadas $x'_1, ..., x'_{n'}$ nulo en el punto x' y tal que la restricción de f a W' compuesta con la proyeción de W sobre $\mathbf{R}^n$ sea dada por las ecuaciones $x'_{n'} = x_n, ..., x_{n'-q+1} = x_{n-q+1}$. Sea B' el subconjunto de W' definido por $x'_1 = 0, ..., x'_{n'-q} = 0, |x'_{n'-q+1}| < \epsilon, ..., |x'_{n'}| < \epsilon$, ϵ tan pequeño como para que $f(B') \subset B$, sea al fin T' una vecindad de S' que contiene a B' como cerrado y contenido en $f^{-1}(T)$.

Se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{cccccc}
 & H_{k'}(S') & \overset{m'}{\to} & H_{k'}(S', S'-x) & \\
i'_* & \downarrow & & \downarrow & j'_* \\
 & H_{k'}(T') & \to & H_{k'}(T', T'-B') & \\
D' & \updownarrow & & \updownarrow & D' \\
 & H^q(T') & \to & H^q(B') & \\
f^*_T & \uparrow & & \uparrow & f^*_B \\
 & H^q(T) & \to & H^q(B) & \\
D & \updownarrow & & \updownarrow & D \\
 & H_k(T) & \to & H_k(T, T-B) & \\
i_* & \uparrow & & \uparrow & j_* \\
 & H_k(S) & \overset{m}{\to} & H_k(S, S-x) &
\end{array}$$

donde f_B y f_T son las restricción de f a B' y T' respectivamente, D y D' son los isomorfismos de dualidad; i, i', j, j' son las inclusiones. La homología de T y T' tienen por soporte los cerrados de M, M' respectivamente que estan contenidos en T, T' respectivamente; la cohomología de B y B' es con soporte compacto. Mostraremos, como consecuencia de (1) tenemos $f_T^* D_{i_*}\alpha = D' i'_* \beta$ esto implica por la conmutatividad del diagrama

$$D' j'_* m'_* \beta = f_B^* D j_* m_* \alpha$$

vamos a determinar que es elemento de $H^q(B)$. Por la definición de clase fundamental, $m_*\alpha$ es el generador de $H_k(S, S-x)$. Así $D j_* m_* \alpha$ es el generador de $H^q(B)$ y lo mismo $f_B^* D j_* m_* \alpha$ es de $H^q(B')$, porque f_B es una aplicación homeomorfa de B' en B. Esto implica evidentemente que $m'_*\beta$ es el generador de $H_{k'}(S', S'-x)$, esto es, β es una clase fundamental de S'. ∎

2.7 Haz de Homomorfismos

Sean E y E' haces vectoriales sobre M definimos el *haz de homorfismos* como el conjunto $Hom(E, E') = \{f_x : E_x \to E'_x / x \in M\}$.

Una aplicación (suave) de haces $h : E \to E'$ es equivalente a una sección (suave) de $Hom(E, E')$. Una aplicación de haces $h : E \to E'$ se dice que es *transversa* si la correspondiente sección en $Hom(E, E')$ es transversa al cero.

Teorema 2.16 *Sea $M(k \times n)$ el espacio vectorial de matrices reales de dimensión $m \times n$, y $M_r(k \times n)$ el subconjunto de matrices de rango r. Entonces $M_r(m \times n)$ es una subvariedad de $M(k \times n)$ de codimensión $(k-r)(n-r)$, para $r \leq \min\{k, n\}$.*

Demostración. Una carta de un punto de $M_r(k \times n)$ esta dada por el conjunto $U \subset M(k \times n)$ de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} A & AB \\ D & DB+C \end{pmatrix}$$

$A \in M(r \times r)$, $\det(A) \neq 0$, ya que debe de haber al menos r reglones linealmente independientes. La suma o la resta de múltiplos de columnas a otras columnas no altera el rango así es que la matriz anterior tiene el mismo rango que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & C \end{pmatrix}$$

pero para que ésta tenga exactamente rango r, C debe ser cero de otra manera habría más de r columnas linealmente independientes; y viceversa si C es cero la matriz tiene r columnas linealmente independientes y por tanto es de rango r. Entonces a $M_r(k \times n)$ lo podemos ver como a un euclidiano de entradas (A, D, B) es decir de codimensión $(k-r)(n-r)$. ■

Una función h de haces vectoriales induce una partición de la variedad en subconjuntos $Z_i(h) = \{x \in M / \dim(\ker h_x) = i\}$, sea S la sección inducida por h, entonces tenemos el siguiente terorema:

Teorema 2.17 *El conjunto $S_l = \{h_x : E_x \to F_x / \dim(\ker h_x) = l\}$ es una subvariedad del $Hom(E^k, F^n)$, de codimensión $l(n-k+l)$.*

Demostración. Sobre cada fibra caemos en el teorema anterior, con rango $m-l$, y la codimensión es $l(n-k+l)$, para globalizarlo nos da una variedad de la misma codimensión ya que los abiertos de las cartas tienen la misma dimensión. ■

Lema 2.18 *Si h es transversa a S_l entonces $Z_l(h) = \{x \in M : \dim(\ker h_x) = l\}$ es subvariedad de codimensión $l(n-k+l)$.*

Demostración. Por el teorema 2.2 y el teorema 2.17 las $Z_l(h)$ son subvariedades de codimensión $l(n-k+l)$. ■

Lema 2.19 $\bar{Z}_l(h) = \bigcup_{j \geq l} Z_j(h)$

Demostración. Sea $x \in Z_j(h)$ para alguna $j > l$, y sea U un abierto cualquiera de M^m que contenga x; U es de dimensión m, como la dimensión de todos los $Z_k(h)$ es siempre menor que m entonces U contiene puntos de M que no están en ningún $Z_k(h)$; uniendo cualquiera de esos puntos con x, con una línea totalmente contenida en U, por continuidad de h, uno de los puntos por los que pasa esa línea debe de pertenecer a $Z_l(h)$, de aquí que todos los puntos de $\bigcup_{j\geq l} Z_j(h)$ son puntos de acumulación de $Z_l(h)$, esto implica que

$$Z_l(h) \subseteq \bigcup_{j\geq l} Z_j(h) \subseteq \bar{Z}_l(h)$$

falta probar que la $\bigcup_{j\geq l} Z_j(h)$ es cerrado. Sea $x_0 \in M$ tal que $x_0 \notin \bigcup_{j\geq l} Z_j(h)$ esto implica que $\ker h_{x_0} < l$ y de aquí que, por continuidad, existe un abierto U alrededor de x_0 tal que $\ker h_x < l$, para cada $x \in U$, por tanto $\bigcup_{j\geq l} Z_j(h)$ es cerrado. ∎
de aquí tenemos el teorema:

Teorema 2.20 *$Z = \bigcup_l Z_l(h)$ es variedad estratificada.*

Teorema 2.21 *$Hom(\varepsilon^1, E) \cong E$.*

Demostración. Las cartas de $Hom(\varepsilon^1, E)$ están dadas por:

$$Hom(\varepsilon^1, E^n)\,|_u \to U \times Hom(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$$

pero como $Hom(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ es isomorfo a $\mathbf{R}^n$ y las funciones de transición son las mismas que E, se tiene el resultado. ∎

2.8 Desingularizaciones

Como la cerradura de $Z_l(h)$ es en general singular necesitaremos una resolución o desingularización de ella. Esto es una variedad no singular $\tilde{Z}_l(h)$ y una aplicación φ_l de $\tilde{Z}_l(h)$ a M tal que:

1) La imagen de φ_l es la cerradura de $Z_l(h)$.

2) φ_l es propia.

3)φ_l manda $\varphi_l^{-1}(Z_l(h))$ difeomórficamente a $Z_l(h)$.

Corolario 2.22 *Si se cumplen las condiciones anteriores φ_l, manda la clase fundamental de $\tilde{Z}_l(h)$ en la clase fundamental de $\bar{Z}_l(h)$.*

Una desingularización cumple las hipótesis del teorema 2.11. ∎

Capítulo 3

Resultado Principal

3.1 Enunciado

En la presente sección se enuncia el teorema (3.3) principal.

Definición 3.1 *Se dice que una función $h : E \to F$ es genérica si su sección correspondiente, $Hom(E, F)$, es transversa a cada una de las*

$$S_l = \{f_x : E_x \to F_x : \dim(\ker f_x) = l\}$$

Como consecuencia del teorema 2.4

Proposición 3.2 *El conjunto de funciones genericas es denso.*

■

De aquí en adelante $Z(f)$ significara $Z_1(f)$.

Teorema 3.3 (Principal) *Sean $(E, M^m, p, \mathbf{R}^n)$ un haz vectorial suave, y $h : \varepsilon^{n-i+1} \to E$ una función de haces genérica. Entonces $W_i(E) = J!([\bar{Z}(h)])$*

cumple con los axiomas Sω1), Sω2), Sω3') y Sω4') (2.2), donde J! es la composición de la dualidad de Poincaré con el homomorfismo inducido por la inclusión J_*.

$$\begin{array}{ccc} & J_* & \\ H_{m-i}(\bar{Z}(h)) & \to & H_{m-i}(M) \\ & \searrow & \updownarrow \quad D\cong \\ J! & & H^i(M) \end{array}$$

3.2 Demostración del Axioma Sω1

En esta sección se demuestra que las clases $W_i(E) = J!([\bar{Z}(h)])$ cumplen con el axioma Sω1.

a) Por demostrar que $W_i(E) \in H^i(M)$.

Por el teorema 2.17 tenemos que la codimensión de $Z(h)$ es $1(n-(n-i+1)+1) = i$. Por tanto la dimensión de $Z(h)$ es $m-i$.

b) Por demostrar que $W_0(E) = 1 \in H^0(M)$.

Si $i = 0$ entonces $Z(h) = M$, así que $J!$ se convierte en isomorfismo.

c) Como la construcción no tiene sentido para $i > n$ daremos por hecho que $W_i(E) = 0$, para $i > n$.

3.3 Demostración del Axioma Sω2

En esta sección demostraremos que W_i cumple con Sω2. Es decir por demostrar que si

$$\begin{array}{ccc} & \bar{f} & \\ f^*E^n & \rightarrow & E^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \rightarrow & M \\ & f & \end{array}$$

es una aplicación de haces entonces $W_i(f^*E) = f^*(W_i(E))$.

Sea

$$\begin{array}{ccc} & h & \\ \varepsilon_M^{n-i+1} & \rightarrow & E \\ & \searrow & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

transversa a cada una de las S_l. Por el teorema 2.3 sin pérdida de generalidad , podemos asumir que f es transversa a $\bar{Z}_1(h)$.

Definimos

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ \varepsilon_{M'}^{n-i+1} & \rightarrow & f^*E \\ & \searrow & \downarrow \\ & & M' \end{array}$$

como sigue

$$g:(x,v)\longmapsto(x,\bar{f}_x^{-1}(h_{f(x)}(v)))$$

lo anterior está bien definido porque $\bar{f}$ es un isomorfismo en las fibras.

Tenemos que probar que:

1) g es transversa a cada una de las $S_l' = \{g_y : \varepsilon_y^{n-i+1} \to f^*E_y : \dim(\ker(g_y)) = l\}$.

2) $f^* : H^i(M) \to H^i(M')$, manda la clase dual de $[\bar{Z}_1(h)]$ en la clase dual de $[\bar{Z}_1(g)]$.

1)Sea $h \in Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n)$, y sea $v \in h \cap S_l$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} T_v(Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n) &= T_v(h) \oplus T_v(S_l) \\ &= T_v(h_x) \oplus T_v(S_{lx}) \oplus T_x(Z(M)), \end{aligned}$$

Donde $\pi(v) = x$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} &= T_v(Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n)_x) \oplus T_x(Z(M)) \\ &= T_v(Hom(\mathbf{R}^{n-i+1}, \mathbf{R}^n)) \oplus T_x(Z(M)), \end{aligned}$$

entonces

$$T(Hom(\mathbf{R}^{n-i+1}, \mathbf{R}^n)) = T_v(h_x) \oplus T_v(S_{lx})$$

como sabemos que cuando $f(y) = x$ tenemos que $h_x \doteq g_y$, y $S_{lx} \doteq S'_{ly}$ entonces

$$T(Hom(\mathbf{R}^{n-i+1}, \mathbf{R}^n)) = T_w(g_y) \oplus T_w(S'_{ly})$$

donde $\bar{f}(w) = v$ y $\pi'(w) = y$.

Ahora

$$\begin{aligned} T_w(Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n)) &= T_w(Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n)_y) \oplus T_y(Z(M')) \\ &= T(Hom(\mathbf{R}^{n-i+1}, \mathbf{R}^n)) \oplus T_y(Z(M')) \\ &= T_w(g_y) \oplus T_w(S'_{ly}) \oplus T_y(Z(M')) \\ &= T_w(g) \oplus T_w(S'_l) \end{aligned}$$

con lo que se tiene que $g \bar{\pitchfork} S'_l$.

2)Usando el teorema 2.15 y el siguiente lema se tiene el resultado. ∎

Lema 3.4 $\tilde{Z}_l(g) = f^{-1}(\tilde{Z}(h))$.

Demostración: sabemos que

$$\begin{aligned} Z_l(h) &= \{y \in M / \dim(\ker h_y) = l\} \\ Z_l(g) &= \{x \in M / \dim(\ker g_x) = l\} \end{aligned}$$

por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} Z_l(g) &= \{x \in M / \dim(\ker g_x) = l\} \\ &= \{x \in M / \dim(\ker((x,v) \to (x, \bar{f}_x^{-1}(h_{f(x)}(v))))) = l\} \\ &= \{x \in M / \dim(\ker h_{f(x)}) = l\} \end{aligned}$$

de aquí se sigue que

$$\begin{aligned} & x \in Z_l(g) \\ \Leftrightarrow\ & \dim(\ker h_{f(x)}) = l \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in Z_l(h) \end{aligned}$$

por tanto

$$Z_l(g) = f^{-1}(Z_l(h)) \tag{3.1}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\check{Z}_1(g) &= \cup_{l\geq 1} Z_l(g) && \text{Por el lema 2.19}\\
&= \cup_{l\geq 1} f^{-1}(Z_l(h)) && \text{Por la ecuación 3.1}\\
&= f^{-1}(\cup_{l\geq 1}(Z_l(h)) && \\
&= f^{-1}(\check{Z}_1(h)) && \text{Por el lema 2.19}
\end{aligned}$$

■

3.4 Demostración del Axioma Sω3'

En esta sección probamos que $W_i(E)$ cumple con el axioma Sω3') es decir que $W_i(E^n \oplus \varepsilon^k) = W_i(E^n)$. Sea

$$\begin{array}{ccc}
 & h & \\
\varepsilon^{n-i+1} & \rightarrow & E^n \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & M
\end{array}$$

Transversa a todos los S_l, y tomemos

$$\begin{array}{ccc} & h \times id & \\ \varepsilon^{k+n-i+1} & \to & E^n \oplus \varepsilon^k \\ & \searrow & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} Z_1(h \times id) &= \{x \in M / \dim(\ker(h \times id)_x) = 1\} \\ &= \{x \in M / \dim(\ker h_x) = 1\} \\ &= Z_1(h). \end{aligned}$$

Antes de probar transversalidad probaremos el siguiente lema:

Lema 3.5 *$S_l' \cap h \times id \doteq Z_l(h) = s_h^{-1}(S_l) \doteq S_l \cap h$. Donde $S_l = \{f_x : \varepsilon_x^{n-i+1} \to E_x^n / \dim(\ker f_x) = l\}$ y $S_l' = \{f_x : \varepsilon_x^{n-i+1+k} \to E_x^n \oplus \varepsilon_x^k / \dim(\ker f_x) = l\}$.*

Demostración. Como S_l es transversa a h, Z_l es una variedad y como s_h es uno a uno, suave, tiene inversa suave y Z_l es enviado en $S_l \cap h$, entonces son difeomorfas. También $Z_l = s_{h \times id}^{-1}(S_l')$, y como ya sabemos que es variedad, tenemos que por los mismos argumentos $S_l' \cap h \times id \doteq Z_l$. ∎

Volviendo a nuestra prueba, por el teorema 2.17

$$\dim S_l = n^2 - ni + n + m - l^2 - li + l$$
$$\dim S_l' = n^2 - ni + n + 2nk - ki + k + k^2 + m + l - l^2 - li$$

y entonces

$$\dim S_l' - \dim S_l = 2nk - ki + k + k^2,$$

pero

$$\begin{aligned}\dim T(Hom(\varepsilon^{n-i+1+k}, E^n \oplus \varepsilon^k)) &= \dim T(Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n)) + 2nk - ki + \\ &\quad + k + k^2 \\ &= \dim(T(S_l) + T(h)) + 2nk - ki + k + k^2\end{aligned}$$

probaremos que $\dim(T(S_l') + T(h \times id))$ es igual a esto último:

$$\begin{aligned}\dim(T(S_l') + T(h \times id)) &= \dim(T(S_l')) + \dim(T(h \times id)) \\ &\quad - \dim(T(S_l') \cap T(h \times id))\end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned}\dim(T(S_l')) &= \dim(T(S_l)) + 2nk - ki + k + k^2 \\ \dim(h \times id) &= \dim(T(h))\end{aligned}$$

y

$$\dim(T(S_l') \cap T(h \times id)) = \dim(T(S_l) \cap T(h))$$

esto último es cierto por el lema 3.5. Haciendo la suma

$$\begin{aligned}\dim(T(S_l') + T(h \times id)) &= \dim(T(S_l)) + \dim(T(h)) - \dim(T(S_l) \cap T(h)) \\ &\quad +2nk - ki + k + k^2 \\ &= \dim(T(S_l) + T(h)) + 2nk - ki + k + k^2.\end{aligned}$$

■

3.5 Demostración del Axioma Sω4'

Por demostrar que existe ξ^n tal que $W_n(\xi^n) = g$ cualquier elemento no cero de $H^n(\mathbf{M}^n)$.

Sea $M = \mathbf{R}P^n$ y $\xi^n = (\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^n)/\mathbf{Z}_2$ (este haz es isomorfo a $\gamma_n^1 \oplus \gamma_n^1 \oplus ... \oplus \gamma_n^1$). Entonces definimos $h : \varepsilon^1 \to \xi^n$ como sigue:

$$h : (t, [x_1, ..., x_{n+1}]) \mapsto [tx_1, ...tx_n, x_1, ..., x_{n+1}]$$

la sección equivalente en $Hom(\varepsilon^1, \xi^n) = \xi^n$ es

$$S_h : [x_1, ..., x_{n+1}] \mapsto [x_1, ..., x_n, x_1, ..., x_{n+1}]$$

esta sección intersecta a la sección cero solamente en $x^0 = [0, 0, ..., 0, 1]$.

El tangente a $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^n/\mathbf{Z}_2$ se obtiene identificando los tangentes en puntos antípodas en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^n$. Así tenemos que el tangente a ξ^n es

$$T_{[v,x]}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^n/\mathbf{Z}_2) = \{(w, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n+1} : y \cdot x = 0\}$$

sea $\ddot{S}_h$ la imagen de S_h es decir

$$\ddot{S}_h = \{[x_1, x_2, ..., x_n, x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}] : [x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}] \in \mathbf{S}^n/\mathbf{Z}_2\}$$

entonces

$$T_{(0,x^0)}(\ddot{S}_h) = \{(w, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n+1} : p(y) = w\}$$

donde p es la proyección en las primeras n coordenadas. Sea

$$S_0 = \{[0, x] \in \xi^n : x \in \mathbf{S}^n/\mathbf{Z}_2\}$$

la sección cero, entonces su tangente en el punto $(0, x^0)$ es

$$T_{(0,x^0)}(S_0) = \{(0, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n+1} : y \cdot x^0 = 0\}.$$

Ahora, sea $V_0 = (w_0, y_0) \in T_{(0,x^0)}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^n/\mathbf{Z}_2)$ entonces $y_0 \cdot x^0 = 0$ es decir y_0 tiene la última coordenada nula, así podemos representar a V_0 como sigue

$$V_0 = (w_0, y_0) = (w_0, (w_0, 0)) + (0, y_0 - (w_0, 0))$$

donde

$$\begin{array}{rcl} (w_0, (w_0, 0)) & \in & T_{(0,x^0)}(\ddot{S}_h) \\ \text{y} \quad (0, y_0 - (w_0, 0)) & \in & T_{(0,x^0)}(S_0) \end{array}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{array}{ccc} & J_* & \\ H_0(\{x^0\}) & \rightarrow & H_0(\mathbf{R}P^n) \\ & \searrow & \downarrow \quad \cong D \\ J! & & H^n(\mathbf{R}P^n) \end{array}$$

y sabemos que $[\{x^0\}] \neq 0 \in H_0(\{x^0\})$ y esto implica que $J_*([\{x^0\}]) \neq 0 \in H_0(\mathbf{R}P^n)$ y de aquí que $J!([\{x^0\}]) = D \circ J_*([\{x^0\}]) \neq 0 \in H^n(\mathbf{R}P^n)$. ∎

3.6 Desingularización.

En esta sección encontraremos una variedad de dimensión $m-i$ que es una desingularización de $\bar{Z}_1(h)$, y por lo tanto la clase fundamental es mandada a la clase fundamental de $\bar{Z}_1(h)$.

Sea

$$\tilde{Z}_1(h) = \{(x, L) \in M \times \mathbf{R}P^{n-i} : L \in \ker h_x\}$$

nuestro objetivo es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.6 *Sean $(E, M^m, p, \mathbf{R}^n)$ un haz vectorial, y $h : \varepsilon^{n-i-1} \rightarrow E$ una* *función de haces, genérica. Entonces* $\pi!(1) = W_i(E)$, *donde*

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_* & & \\ & H_{m-i}(\tilde{Z}_1(h)) & \rightarrow & H_{m-i}(M) & \\ D\cong & \updownarrow & & \updownarrow & D\cong \\ & H^0(\tilde{Z}_1(h)) & \rightarrow & H^i(M) & \\ & & \pi! & & \end{array}$$

π *es la proyección canónica restrigida a* $\tilde{Z}_1(h)$.

La demostración de este teorema se basa en teorema 2.22, el teorema 3.11 y el teorema 3.10.

Definiremos algunas variedades, conjuntos y funciones entre ellos.

$$\begin{array}{ccccccc} & \tau & & & & h & \\ p^*\varepsilon^{n-i+1} & \rightarrow & p^*E^n & & \varepsilon^{n-i+1} & \rightarrow & E^n \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ & & Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n) & \rightarrow & M^m & & \\ & & & p & & & \end{array}$$

$$p^*E^n = \{(f_x, v_x) \in Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n) \times E^n : x \in M\}$$

$$p^*\varepsilon^{n-i+1} = \{(f_x, v_x) \in Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n) \times \varepsilon^{n-i+1} : x \in M\}$$

$$\tau(f_x, v_x) = (f_x, f_x(v_x))$$

observemos que

$$\begin{aligned} Z_l(\tau) &= \{f_x : p^*\varepsilon_x^{n-i+1} \to p^*E_x^n : \dim(\ker \tau_{f_x}) = l\} \\ &= \{f_x : p^*\varepsilon_x^{n-i+1} \to p^*E_x^n : \dim(\ker f_x) = l\} \\ &= S_l. \end{aligned}$$

(Por ello la definición de genérico de McPherson [14] es equivalente a la dada en este trabajo). Sea

$$\tilde{Z}_1(\tau) = \{(f_x, L) \in Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n) \times \mathbf{R}P^{n-i} : L \subseteq \ker f_x\}$$

es obvio que si proyectamos en la primera coordenada obtenemos la unión de todos los S_l.

Lema 3.7 *$\tilde{Z}_1(\tau)$ es variedad de codimemsión n.*

Demostración. Probaremos que $\tilde{Z}_1(\tau)$ es un fibrado sobre M, sea $\{U_t\}_{t\in T}$ un atlas para M, probaremos que $\tilde{Z}_1(\tau)|_{U_t} = Q \times U_t$ donde Q es una subvariedad de $Hom(\mathbf{R}^{n-i+1}, \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}P^{n-i}$ lo cual es suficiente por la proposición 1.4.

Sea $L \in \mathbf{R}P^k$ donde $k = n - i$, entonces a L lo podemos ver como

$$L = \{(tL_1, tL_2, \ldots, tL_{k+1}) : t \in \mathbf{R}\}$$

y las cartas de $\mathbf{R}P^k$ las podemos ver como (R_r, θ_r) donde

$$R_r = \{L \in \mathbf{R}P^k : L_r \neq 0\}$$

y

$$\theta_r : R_r \to \mathbf{R}^k = \{(\theta_{r1}, \theta_{r2}, ..., \theta_{r(k+1)}) : \theta_{rj}(L) = \frac{L_j}{L_r}, \ con\ j \neq r\}.$$

Definimos entonces

$$Q_r = \{((a_{ij})_{ij}, L) \in Hom(\mathbf{R}^{k+1}, \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}P^k : a_{ir} = \Sigma_{j\neq r} a_{ij}\theta_{rj}(L)\}$$

y

$$\varphi_r : Q_r \to \mathbf{R}^{k+1} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$$

$$\varphi_r : ((a_{ij})_{ij}, L) \mapsto ((a_{ij})_{ij}, (\theta_{ri})_i)$$

hacemos $Q = \cup_{r=1}^{k+1} Q_r$; entonces Q es una variedad con cartas (Q_r, φ_r), de dimensión $k + kn$, y codimensión n.

Falta ver Q es la fibra de $\tilde{Z}_1(\tau)$.

Tomando $(f_x, L) \in \tilde{Z}_1(\tau)|_{U_l}$, es decir $f_x(L) = 0$, $x \in U_l$, y supongamos que para alguna r se tiene $L_r \neq 0$, entonces

$$0 = f_x(L) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(k+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(k+1)} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tL_1 \\ tL_2 \\ \dots \\ tL_{k+1} \end{pmatrix}$$

y esto es lo mismo que

$$(tL_1 a_{i1} + tL_2 a_{i2} + \dots + tL_{i(k+1)} a_{i(k+1)})_i = (0)_i$$

lo cual es equivalente a que

$$a_{ir} = \sum_{j \neq r} a_{ij}\theta_{jr}, \text{ con } \theta_{jr} = \frac{x_j}{x_r} \quad j \neq r$$

por último esto implica que $(f_x, L) \in Q_r$ que es carta de Q. Para probar que si $(f_x, L) \in Q \times U_l$ implica que $(f_x, L) \in \tilde{Z}_1(\tau)|_{U_l}$ se procede exactamente al revés. Por tanto $\tilde{Z}_1(\tau)$ es una variedad de dimensión $m + nk + k$, y codimensión n. ■

Lema 3.8 *Sea S_h la sección que representa h en $Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n)$. Entonces S_h es transversa a ρ, donde $\rho : \tilde{Z}_1(\tau) \to Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n)$ es la proyección canónica en la primera coordenada.*

Demostración. Como S_h es transversa a cada S_l entonces S_h es transversa $\bigcup_{l \geq 1} S_l = \rho(\tilde{Z}_1(\tau))$.

Lema 3.9 *$\tilde{Z}_1(h)$ es la intersección transversa de S_h y ρ.*

Demostración.

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{Z}_1(h) = & M \pitchfork \tilde{Z}_1(\tau) & \to & Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n) \\
& \downarrow & & \downarrow \Delta \\
& M \times \tilde{Z}_1(\tau) & \to & Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n) \times Hom(\varepsilon^{n-i+1}, E^n) \\
& & S_h \times \rho &
\end{array}$$

$$\begin{aligned} M\tilde{\pitchfork}\tilde{Z}_1(\tau) &= \{(x, f_x, L) \in M \times \tilde{Z}_1(\tau) : S_h(x) = \rho(f_x, L)\} \\ &= \{(x, L) \in M \times \mathbf{R}P^{n-i+1} : h_x(L) = 0\} \\ &= \tilde{Z}_1(h) \end{aligned}$$

Teorema 3.10 *$\tilde{Z}_1(h)$ es variedad cerrada de dimensión $m - i$.*

Demostración. Que $\tilde{Z}_1(h)$ es variedad es consecuencia directa de los tres lemas anteriores. Probaremos que $\tilde{Z}_1(h)$ es cerrado. Sea $(x_0, L_0) \in M \times \mathbf{R}P^{n-i}$ tal que $(x_0, L_0) \notin \tilde{Z}_1(h)$ entonces $h_{x_0}(L_0) \neq 0$ de aquí que existe un abierto $V(L_0)$ de L_0 tal que $h_{x_0}(L) = 0$ para cada $L \in V(L_0)$ esto por continuidad, de igual forma existe un abierto $U(x_0)$ tal que $h_x(L) = 0$, para cada $x \in U(x_0)$ y para cada $L \in V(L_0)$ entonces $U(x_0) \times V(L_0)$ es abierto que no intersecta $\tilde{Z}_1(h)$ y contiene a (x_0, L_0) por tanto $\tilde{Z}_1(h)$ es cerrado. ∎

Teorema 3.11 *$\tilde{Z}_1(h)$ junto con $\pi' = \pi|_{\tilde{Z}_1(h)} : \tilde{Z}_1(h) \to \bar{Z}_1(h)$ es una desingularización de $\bar{Z}_1(h)$.*

Demostración. π' es una aplicación.

1)π' es sobreyectiva en $\bar{Z}_1(h)$.

2)Sea C un subconjunto compacto de $\bar{Z}_1(h)$, entonces es compacto en M, $\pi^{-1}(C) = C \times \mathbf{R}P^{n-i}$ es compacto en $M \times \mathbf{R}P^{n-i}$, y $\pi'^{-1}(C) = (C \times \mathbf{R}P^{n-i}) \cap \tilde{Z}_1(h)$ es compacto ya que $\tilde{Z}_1(h)$ es variedad cerrada.

3)$\pi'^{-1}(Z_1(h)) = \{(f_x, L) \in \tilde{Z}_1(h) : \ker f_x = 1, \text{ y } L \in \ker f_x\}$ entonces $\pi'^{-1}(Z_1(h)) = Z_1(h) \times \{punto\}$ y de aquí que π' restringida a $\pi'^{-1}(Z_1(h))$ es un difeomorfismo.

3.7 Generalización

Proposición 3.12 *[9] Sea X un CW−Complejo y sea $X^0 \subset \ldots \subset X^n \subset \ldots \subset X$ subcomplejos con $\bigcup_{n\geq 0} X^n = X$, $j_n^m : X^n \to X^m$, $i_n : X^n \to X$ las inclusiones, $n \geq m$. Entonces $\{H^q(X^n), j_n^{m*}, \mathbf{N}\}$ es un sistema inverso para $q \in \mathbf{Z}$, y existe una sucesión exacta*

$$0 \to \varprojlim_n{}^1 H^{q-1}(X^n) \to H^q(X) \xrightarrow{\{i_n^*\}} \varprojlim_n H^q(X^n) \to 0$$

■

Haciendo $X^l = G_k(\mathbf{R}^{k+l})$, se cumple las hipótesis de la proposición 3.13 y tenemos así

Lema 3.13

$$0 \to \varprojlim_n{}^1 H^{q-1}(G_k(\mathbf{R}^{k+l})) \to H^q(G_k(\mathbf{R}^\infty)) \xrightarrow{\{i_n^*\}} \varprojlim_n H^q(G_k(\mathbf{R}^{k+l})) \to 0$$

■

Lema 3.14 *Si M^m es una varieda compacta $H^k(M^m)$ es finito.*

Demostración.

$H^i(M^m)$	$\cong$	$H^{n-i}(M)$	Por dulidad de Poincaré.
	$\cong$	$H_{n-i}(M)^*$	Por dualidad de Kronecker.
	$\cong$	$(H_i(M)^*)^*$	Repitiendo lospasos anteriores.

Por tanto $H_i(M)$ es finito, y entonces $H^k(M)$ es finito. ■

Lema 3.15 $\lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ l}} H^{q-1}(G_k(\mathbf{R}^{k+l})) = 0.$

Demostración. Como $G_k(\mathbf{R}^{k+l})$ es compacta se cumple el lema 3.14, entonces por la condición de Mittag-Leffler [9], se cumple el lema. ■

Como consecuencia de los lemas 3.13 y 3.15 tenemos

Teorema 3.16 *$H^q(G_k(\mathbf{R}^\infty)) \to \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ l}} H^q(G_k(\mathbf{R}^{k+l}))$ es isomorfismo.*

■

Corolario 3.17 *Sea $\gamma^k_{k+l} = (E_{k+l}, p, G_k(\mathbf{R}^{k+l}), \mathbf{R}^k)$ el haz universal sobre $G_k(\mathbf{R}^{k+l})$. Definimos $W_q(\gamma^k) = \lim\limits_{\substack{\leftarrow \\ l}} W_q(\gamma^k_{k+l})$. $W_q(\gamma^k)$ cumple con los axiomas $S\omega1$), $S\omega2$), $S\omega3'$) y $S\omega4'$).*

Demostración.

$$
\begin{array}{cccc}
i^*(\gamma^k_{k+l+1}) = & \gamma^k_{k+l} & \to & \gamma^k_{k+l+1} \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 & G_k(\mathbf{R}^{k+l}) & \underset{i}{\hookrightarrow} & G_k(\mathbf{R}^{k+l+1})
\end{array}
$$

entonces

$$i^*(W_q(\gamma^k_{k+l+1})) = W_q(\gamma^k_{k+l})$$

por lo que el límite inverso

$$W_q'(\gamma^k) = 1 + W_q(\gamma_{k+1}^k) + W_q(\gamma_{k+2}^k) + W_q(\gamma_{k+3}^k) + \dots$$

cumple los axiomas Sω1), Sω2), Sω3') y Sω4'). ∎

Teorema 3.18 *[9] Sea $\xi^n = (E, p, B, \mathbf{R}^n)$ un haz vectorial cualquiera entonces existen k, f_ξ tal que*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^k \arrow[d] \\ B \arrow[r, "f_\xi"'] & G_k(\mathbf{R}^\infty) \end{tikzcd}$$

donde E es el haz inducido.

Del teorema 3.3, del lema 3.17, y de la naturalidad tenemos como corolarío:

Teorema 3.19 *Sea $\xi = (F, \pi, B, \mathbf{R}^n)$ cualquier haz vectorial, $\gamma^n = (F', \theta, BO(n), \mathbf{R}^n)$ el espacio clasificante y f la función clasificante de ξ. Definimos $W_i(\xi) = f^*(W_i(\gamma^n))$. Entonces $W_i(\xi)$ cumple con los axiomas Sω1), Sω2), Sω3'), y Sω4').*

∎

3.8 Unicidad

Teorema 3.20 (de Gysin) *Para un haz vectorial real de dimensión n,* $\xi^n = (E, p, B, \mathbf{R}^n)$ *se tiene la siguiente sucesión exacta de módulos de cohomología con coeficientes en* $\mathbf{Z}_2$ *:*

$$\ldots \to H^i(B;\mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\cup w_n(\xi)} H^{i+n}(B;\mathbf{Z}_2) \xrightarrow{p^*} H^{i+n}(E_0;\mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\psi} H^{i+1}(B;\mathbf{Z}_2) \to \ldots$$

donde E_0 *es* E *menos la sección cero.*

Demostración. Tenemos la siguiente sucesión exacta de la pareja:

$$\ldots \to H^j(E, E_0;\mathbf{Z}_2) \to H^j(E;\mathbf{Z}_2) \to H^j(E_0;\mathbf{Z}_2) \to H^{j+1}(E, E_0;\mathbf{Z}_2) \to \ldots$$

Usando el isomorfismo de Thom [8]

$$\cup u : H^{j-n}(E;\mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\sim} H^j(E, E_0;\mathbf{Z}_2)$$

Obtenemos

$$\ldots \to H^{j-n}(E;\mathbf{Z}_2) \to H^j(E;\mathbf{Z}_2) \to H^j(E_0;\mathbf{Z}_2) \to H^{j-n+1}(E;\mathbf{Z}_2) \to \ldots$$

pero tenemos canónicamente el isomorfismo

$$H^*(B;\mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\sim} H^*(E;\mathbf{Z}_2)$$

y haciendo $j = i + n$ tenemos

$$\ldots \to H^i(B;\mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\cup w_n(\xi)} H^{i+n}(B;\mathbf{Z}_2) \xrightarrow{p^*} H^{i+n}(E_0;\mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\psi} H^{i+1}(B;\mathbf{Z}_2) \to \ldots$$

∎

Lema 3.21 *Sea $\gamma^k = (E, p', BO(k), \mathbf{R}^k)$ el haz universal sobre $BO(k)$. $p = p'|_{E_0}$. Entonces $p^*(\gamma^k) = \eta^{k-1} \oplus \varepsilon^1$ es decir*

$$\begin{array}{ccccc} \eta^{k-1} \oplus \varepsilon^1 = & p^*(\gamma^k) & \rightarrow & \gamma^k \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & E_0 & \rightarrow & BO(k) \end{array}$$

y por tanto $W(p^*(\gamma^k)) = 0$.

Demostración. Es suficiente probar que existe una sección global distinta de cero, pero ésta se obtiene definiendo:

$$\begin{aligned} s &: E_0 \rightarrow p^*(\gamma^k) \\ s &: (H, v) \mapsto (H, v, v) \end{aligned}$$

claramente esto es una sección global suave y distinta de cero. ∎

Teorema 3.22 *Consideremos un haz $\xi^n = (E^n, \pi, B, \mathbf{R}^n)$, entonces $W_k(\xi) = \omega_k(\xi)$, para toda k, donde B es un espacio paracompacto.*

Demostración. Consideremos

$$\begin{array}{ccccc} \gamma^n & \text{y } f \text{ tal que} & \xi & \rightarrow & \gamma^n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ BO(n) & & B & \xrightarrow[f]{} & BO(n) \end{array}$$

es decir $f^*\gamma^n = \xi$. Sea i_k la función que clasifica a $\gamma^k \oplus \varepsilon^{n-k}$, entonces

$$\begin{array}{ccc} \gamma^k \oplus \varepsilon^{n-k} & \to & \gamma^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ BO(k) & \to & BO(n) \\ & i_k & \end{array} \qquad \text{teorema 3.18}$$

usando el axioma Sω2, sustituyendo y usando estabilidad respectivamente tenemos:

$$\begin{aligned} i_k^*(\omega_r(\gamma^n)) &= \omega_r(i_k^*(\gamma^n)) \\ &= \omega_r(\gamma^k \oplus \varepsilon^{n-k}) \\ &= \omega_r(\gamma^k) \end{aligned}$$

para $r = 0, 1, \ldots, n$. Por tanto

$$i_k^*(\omega_r(\gamma^n)) = \omega_r(\gamma^k) \tag{3.2}$$

por los axiomas Sω2 y Sω3'

$$\begin{aligned} i_k^*(W_k(\gamma^n)) &= W_k(i_k^*(\gamma^n)) \\ &= W_k(\gamma^k \oplus \varepsilon^{n-k}) \\ &= W_k(\gamma^k) \end{aligned} \tag{3.3}$$

y usando la sucesión de Gysin

$$H^o(BO(k); \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega_k(\gamma^k)} H^k(BO(k); \mathbf{Z}_2) \to H^k(E_0^k) \xrightarrow{p^*}$$

Por el Lema 3.21

$$p^*(W_k(\gamma^k)) = 0$$

por lo tanto existe $\alpha_k \in H^0(BO(k))$ tal que

$$\alpha_k \omega_k(\gamma^k) = W_k(\gamma^k) \tag{3.4}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} i_k^*(W_k(\gamma^n)) &= W_k(\gamma^k) \\ &= \alpha_k \omega_k(\gamma^k) \\ &= \alpha_k i_k^*(\omega_k(\gamma^n)) \\ &= i_k^*(\rho_k(\omega_k(\gamma^n))) \end{aligned}$$

donde $i_k^*(\rho_k) = \alpha_k$. Ahora

$$\begin{aligned} i_k^* &: H^*(BO(n)) \to H^*(BO(k)) \\ i_k^* &: \mathbf{Z}_2[\omega_1(\gamma^n), \ \ldots, \ \omega_n(\gamma^n)] \to \mathbf{Z}_2[\omega_1(\gamma^k), \ \ldots, \omega_k(\gamma^k)] \end{aligned}$$

son isomorfismos por la ecuación ecuación 3.2 para dimensiones de cohomología menores o iguales a k, de aquí que

$$W_k(\gamma^n) = \rho_k \omega_k(\gamma^n) \tag{3.5}$$

con $\rho_k \in H^0(BO(n))$.

Por el axioma Sω2)

$$\begin{aligned} W(\xi^n) &= W_k(f^*(\gamma^n)) \\ &= f^*(W_k(\gamma^n)) \\ &= f^*(\rho_k \omega_k(\gamma^n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f^*(\rho_k)f^*(\omega_k(\gamma'')) \\ &= \beta_k\omega_k(f^*(\gamma'')) \\ &= \beta_k\omega_k(\xi) \end{aligned}$$

por tanto

$$W_k(\xi) = \beta_k\omega_k(\xi)$$

donde $\beta_k = f^*(\rho_k) \in H^0(B;\mathbf{Z}_2)$; y $\rho_k \in H^0(BO(n);\mathbf{Z}_2)$.

Queremos ver que β_k no depende del haz. Tenemos que $H^0(BO(n)) \doteq \mathbf{Z}_2$, ahora, dado cualquier espacio B y cualquier función $f : B \to BO(n)$, $f^* : H^0(BO(n)) \to H^0(B;\mathbf{Z}_2)$ es un isomorfismo de anillos, por lo cual, como $\rho_k = 0,1$ para cualquier f, $f^*(\rho_k) = 0,1$ es decir $\beta_k = 0,1$, dependiendo del valor de ρ_k.

Por el axioma Sω4') existe un haz (μ^k, X, π) tal que $W(\mu^k) \neq 0$. Como $W_k(\mu^k) = \beta_k\omega_k(\mu^k)$ implica que $\beta_k \neq 0$, es decir $\beta_k = 1$. por tanto $W_k(\xi) = \omega_k(\xi)$, para todo ξ, y para toda k.

Teorema 3.23 (Unicidad) *Las clases W estan bien definidas.*

Demostración. Si tomamos en el teorema 3.3 otra función g genérica cumple con todo lo anterior entonces también es igual a la clase de Stiefel-Whitney, por lo tanto igual a las que definimos con h. ∎

Bibliografía

[1] G. Bredon . Topology and Geometry. Springer-Verlag. Graduate Text in Mathematics; 139.

[2] Bröcker Th. And Jänich. Introduction to Differential Topology. Cambridge University Press. 1982.

[3] M. Greenberg. Lecture on Algebraic Topology. W. A. Benjamin; New York; 1967.

[4] V. Guillemin and A. Pollack. Differential Topology. Prentice -Hal, inc. Englewood Cliffs, New Jersey. 1974.

[5] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone. Connections, Curvature, and Cohomology. Volumes I, II. Academic Press New York and London. 1972.

[6] M. Hirsch. Differential Topology. Springer-Verlag. 1976. Graduete texts in Mathematics; 35.

[7] D. Husemoller. Fibres Bundles. Springer-Verlag 1966. Graduete text in Mathematics; 20.

[8] J. Milnor and J. Stasheff. Characterisic Classes. Princeton N.J. University 1971.

[9] R. Switzer. Algebraic Topology -Homotopy and Homology. Springer-Verlag New York, Heidelberg Berlin 1975.

[10] A. Borel and A. Haefliger. La Classe d'Homologie Fondamentale d'un Espace Analytique; Bull. Soc. Math. France, 89. 1961 p. 461 a 513.

[11] A. Dold. Partitions of Unity in the Theory of Fibrations; Annals of Mathematics Vol. 78, 1963.

[12] A. Haefliger. Les Singularités des Applications Différentiables. Séminaire H. Cartan, E.N.S. 1956/57.

[13] A. Haefliger and A. Kosinki. Un Théorème de Thom sur les Singularités des Aplications Différentiables. Séminaire H. Cartan, E.N.S. 1956/57.

[14] R. Macpherson. Generic Vector Bundle Maps. Dynamical Systems. Edited by M. M. Peixoto. Proccedings of Symposium held at the University of Bahia, Salvador, Brasil, July 26-August 14, 1971. Academic press 1973.

[15] I. R. Porteous. Simple Singularities of Maps. Lecture Notes in Mathematics 192. Proceedings of Liverpool Singularities-Symposium 1. Springer-Verlag 1971.