

01170

11  
Leg

**Control Difuso de Sistemas de Segundo Orden**  
**Vectorial**

**Ricardo Zavala Yoé**

**Abril de 1996**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Dedicatoria:**

*A la Luz: el amor y sabiduría de mis padres:*

*Jorge Zavala Hidalgo y Concepción Yoé de Zavala*

*A mis hermanas Lariza y Erika*

*Por haber nacido con ellos.*

*A quienes ya no están pero siempre han estado conmigo.*

**Zabala:  
Zarrago ta Ikastalago**

**Biotz-biotzez  
Egileak**

**Agradecimientos:**

*Al Dr. Gerardo Espinosa, por su comprensión.*

*Al Dr. Yu Tang, por su interés.*

*"Aprende la forma de preservar mejor que destruir;  
Esquivar es mejor que contener,  
contener es mejor que lastimar,  
lastimar es mejor que herir,  
herir es mejor que matar.  
Porque toda vida es preciosa y no puede ser remplazada."  
(?)*

# Índice

<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>4</b>
2.1 Introducción .....	4
2.2 Control difuso .....	4
2.3 Control deslizante .....	23
2.4 Control deslizante difuso .....	25
2.5 Enfoque entrada - salida de sistemas .....	28
2.6 Criterio del círculo .....	36
2.7 El CLD como una no linealidad .....	38
2.8 Ejemplo de diseño con un CLD .....	41
2.9 Conclusiones .....	47
<b>3 Control difuso de sistemas de segundo orden vectorial</b>	<b>48</b>
3.1 Introducción .....	48
3.2 Formulación del problema .....	48
3.3 Clase de plantas a considerar .....	49
3.4 Solución del problema para el caso general .....	53
3.5 Solución del problema para el caso lineal .....	55
3.6 Solución del problema para el caso no lineal .....	63
3.7 Conclusiones .....	73
<b>4 Trabajos a futuro</b>	<b>75</b>
4.1 Introducción .....	75
4.2 Planteamiento de la solución .....	75
4.3 Conclusiones .....	80

**5 Conclusiones finales**

**81**

**6 Referencias**

**83**

# Capítulo Uno

## Introducción

Es bien sabida la amplia y exitosa aplicación de los controladores lógicos difusos (CLD) en problemas de control reales, los cuales pueden ir desde aplicaciones domésticas como cámaras fotográficas, lavadoras domésticas [20]; hasta plantas no lineales más complicadas como mezcladoras de concreto, brazos robot de varios grados de libertad, motores de corriente directa y sincros, [9], [19], [6]; sistemas de navegación de aviones, helicópteros controlados por voz, péndulos invertidos, etc. [40], [20], [9], [53].

Aunque el progreso práctico ha sido muy claro, la teoría ha avanzado más lentamente -en parte debido a la relativa juventud de esta disciplina de la ingeniería de control- por lo que el establecimiento formal de las bases teóricas ha sido muy reciente [10], [12].

En el estudio de las propiedades cualitativas de los sistemas (controlabilidad, observabilidad, y estabilidad) [5] se han desarrollado herramientas teóricas de esta naturaleza para los sistemas de control difusos (SCD), por ejemplo; la *controlabilidad difusa* basada en ecuaciones de estado difusas [45], [22] o en matrices de composición de funciones que remedan la forma canónica controlable de los sistemas lineales [13]; la estabilidad interna (con funciones de Lyapunov) [42]; estabilidad entrada-salida [8], [54], [55] considerando al CLD como una no linealidad estática, invariante en el tiempo [9]; propiedades de robustez derivadas del estudio anterior etc., [46]. Incluso se habla también de modelado difuso de sistemas, identificación difusa, y sistemas de control difuso (SCD) auto-organizables y adaptables [23], [58].

Es en particular en el estudio de la estabilidad en donde se han obtenido resultados importantes, sobre todo elegantes, por el uso de elementos del análisis funcional, aunque cabe hacer mención que aun falta obtener resultados más fuertes.

Actualmente existen dos tendencias para analizar la estabilidad de los SCD [9], [26]:



- La primera consiste en trabajar con el modelo difuso del proceso y por medio de diversos métodos (estabilidad energética [22], funciones de Lyapunov obtenidas a partir del modelo difuso del proceso [45], principalmente) se analiza la estabilidad del sistema dinámico difuso.
- La segunda considera al CLD como una no linealidad estática, invariante con el tiempo [9], [11]. Aquí existen dos puntos de vista: se puede estudiar la estabilidad entrada - salida (con el teorema de pasividad) y/o la estabilidad interna (con la teoría de Lyapunov).

Éstas tendencias sólo resuelven el problema de sistemas SISO o MIMO<sup>1</sup> [9], [11], [14], [38], [25] dejando abierto el problema MISO.

Una ventaja de la segunda tendencia, para estabilidad interna es que puede diseñarse al control difuso con las características de un control de modo deslizante (llamándose entonces *controlador lógico difuso deslizante* o CLDD), es decir, las reglas de decisión del CLD se diseñan de manera que cumplan con la condición de deslizamiento de un controlador de estructura variable [12], [9], [19], [6] logrando así las bondades de éste [42].

El objetivo de la tesis es proporcionar un criterio de estabilidad  $L_2$  para SCD monovariantes -cuyo CLD sea de dos entradas y una salida, y el proceso a regular pertenezca a una clase muy particular de plantas (*sistemas de segundo orden vectorial* [41], lineales o no lineales) - por medio del control deslizante. Esta configuración nos permite igualar entre sí las dimensiones de los vectores de entrada y salida del CLD (logrando así la simplificación del problema MISO a uno SISO o MIMO). Así, se está haciendo una aportación al presentar ésta alternativa como solución del problema de estabilidad en SCD con CLD MISO.

El presente trabajo se estructura como sigue: el segundo capítulo contiene los preliminares en que se fundamenta la tesis. Dicho capítulo está dividido en nueve partes: la primera de ellas da una introducción al presente capítulo; la segunda, contiene las definiciones y propiedades más importantes de la lógica difusa, así como las partes de un CLD y la manera de sintonizarlo; la tercera, describe brevemente al control de estructura variable o de modo deslizante, la cuarta, relaciona a las dos partes anteriores hablando del control difuso en modo deslizante -cualidad fundamental en el planteamiento de la solución al problema propuesto en esta tesis- así como de sus propiedades principales; la quinta, da un bosquejo general del enfoque entrada - salida de sistemas; la sexta, cita al criterio del círculo; la séptima, explica porqué un CLD puede concebirse como una no linealidad estática, invariante con el tiempo; la octava, muestra un ejemplo de diseño de un CLD para una planta lineal; finalizando con las conclusiones en la parte nueve.

---

<sup>1</sup> De las siglas en inglés.

En el capítulo tercero es donde se resuelve el objetivo de la tesis. Primeramente, se comienza con la introducción del capítulo; para posteriormente - en la segunda parte- hacer la formulación del problema; explicando - en la tercera parte- la clase de plantas a considerar, en su forma no lineal y en su forma lineal. Dejado este punto, se explica la solución para el caso general de la familia de plantas considerada. En seguida, se da la solución para el problema en su versión lineal (parte cinco) y luego en su versión no lineal (parte seis). El capítulo termina con las conclusiones correspondientes en la parte siete.

Los trabajos a futuro se tratan en el capítulo cuarto. Aquí, se plantea el problema de estabilidad de los SCD MISO de una manera inversa, es decir; *se propone añadir una salida artificial al CLD para convertir al SCD MISO en MIMO.*

Las conclusiones finales están contenidos en el capítulo quinto.

# Capítulo Dos

## Preliminares

### 2.1 Introducción

En este capítulo se darán los preliminares necesarios para el desarrollo de la tesis. Dichos preliminares son de Control Difuso, del Criterio del Círculo y de Pasividad.

Para el primero de ellos se comienza por dar una breve revisión de la Teoría Clásica<sup>1</sup> de Conjuntos y del concepto de función de pertenencia para posteriormente definir el concepto de conjunto difuso, el cual es fundamental para el estudio de los CLD. Posteriormente se dan otras definiciones básicas en el estudio de la lógica difusa, como variable lingüística, variable difusa, etc. En seguida se describe la configuración básica de un CLD y se da una breve explicación para su sintonía.

Posteriormente se da una breve revisión del Criterio del Círculo-enunciándolo y citando los conceptos relacionados más importantes.

En seguida, se da una breve revisión del concepto de Pasividad citando algunos teoremas útiles.

Finalmente, se da un ejemplo de diseño de un controlador lógico difuso.

### 2.2 Preliminares de Control Difuso [52], [3], [4], [9].

El objetivo de esta sección es explicar muy brevemente el *cómo* y el *porqué* surgió la necesidad de la lógica difusa -cuyo creador es Lotfi A. Zadeh- y de ahí, el control difuso.

Cuando se desea modelar o controlar algún sistema es necesario primero disponer de un modelo matemático lo cual implica considerar ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias. Sin embargo existen sistemas<sup>2</sup> en los cuales el precio que se

---

<sup>1</sup> Ver sección 2.2.1.1

<sup>2</sup> Sobre todo sistemas biológicos y humanísticos.

paga por obtener modelos basados en tales ecuaciones es que se tienen que hacer muchas simplificaciones, lo cual implica pérdida de información en su comportamiento dinámico.

Una gran ventaja del pensamiento humano es que resume, a partir de grandes volúmenes de información, lo que considera más importante, usando el mínimo necesario para realizar de manera adecuada las tareas que se propone; ya que dichas tareas no requieren un grado de precisión elevado. El cerebro humano saca ventaja de esta tolerancia a la imprecisión codificando la "tarea relevante" o "decisión relevante" en etiquetas de conjuntos difusos (informalmente entendidos ahora como concepciones burdas de variables que pueden ser precisas).

Así, la habilidad de manejar grandes volúmenes de información bajo una sola etiqueta y la consecuente habilidad de resumir, constituyen las características más importantes de la mente humana.

Como puede verse, el modo de pensar humano es más bien vago o *difuso*. Por ejemplo, para alcanzar una taza de café, equilibrarla y llevarla a la boca, no se requiere que el cerebro piense algo como:

*Llevar la mano a 25 grados y 0.24 metros desde la referencia inicial*  
*Tomar la taza apretando con 0.26 newtons*  
*Llevar la taza a la boca (a 25 grados y 0.24 metros desde la nueva referencia)*  
*Verificar que la temperatura del café esté entre 31.5 y 36.23 grados centígrados para poder beberlo*

Más bien, el cerebro piensa:

*Llevar la mano cerca de la taza para poder alcanzarla*  
*Tomar la taza con suficiente fuerza*  
*Llevar la taza cerca de la boca*  
*Verificar que la temperatura del café sea un poco caliente*

Ésta misma forma de manipular o controlar se lleva a cabo en procesos complejos o pobremente definidos en donde el experto humano es imprescindible. De hecho el control difuso "razona" de esta manera para producir la señal que regula el comportamiento de la planta que está bajo su control. Esto significa que se está implantando la experiencia del experto humano en un controlador. *Una manera de capturar la sabiduría o experiencia de una persona y ponerla en términos de lógica matemática es la lógica difusa, y el modo de manipular a nuestro antojo sistemas complejos, pobre o nulamente definidos (humanísticos o no) es por medio del control difuso.* De hecho, la premisa fundamental del control difuso es la suposición de que se

carece del modelo matemático de la planta (y en el mejor de los casos el modelo es incompleto).

## 2.2.1 Antecedentes Teóricos

### 2.2.1.1 Teoría Clásica de Conjuntos.

La llamada Teoría Clásica de Conjuntos<sup>3</sup> fue establecida por el matemático alemán Georg Cantor [24]. Dicha teoría se basa en el concepto de conjunto. Este concepto de *conjunto clásico* si bien primitivo (por no definirse términos de otros conceptos) es entendido como una colección de elementos de cualquier naturaleza.

### 2.2.1.2 Repaso del concepto de Función de Pertenencia.

Sea  $U$  un conjunto y  $A$  un subconjunto de  $U$ , esto es:

$$A \subset U$$

Sea ahora  $x$  un elemento de  $U$ . El hecho de que  $x$  pertenezca a  $A$  se simboliza como:

$$x \in A$$

Para indicar esta pertenencia se puede utilizar la siguiente

#### Definición 2.1

*Función de pertenencia o función de membresía  $\mu_A$ .*

$\mu_A: U \rightarrow [0, 1]$  es una función de pertenencia o función característica del conjunto  $A$  si y solo si para toda  $x$  se cumple que

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Como puede verse, la pertenencia del elemento  $x$  al conjunto  $A$ , es total o nula (abrupta). Entonces podemos entender también como conjunto clásico al que posee una función de pertenencia de esta naturaleza a la cual llamaremos abrupta, y por ende abrupto podrá ser también llamado el conjunto al que aquélla hace referencia.

### 2.2.1.3 El concepto de Subconjunto Difuso o Subconjunto Borroso

<sup>3</sup> Debería decirse "teoría de subconjuntos ordinarios" pues la teoría de conjuntos clásica describe las propiedades de los subconjuntos; no obstante en este trabajo no se hará distinción a menos que se indique lo contrario.

Antes de dar la definición formal, partiremos de un ejemplo. Sean  $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  y  $A = \{x_1, x_3, x_5\}$ . Es obvio ver que:

$$\mu_A(x_1) = 1, \mu_A(x_2) = 0, \mu_A(x_3) = 1, \mu_A(x_4) = 0, \mu_A(x_5) = 1$$

De donde podemos representar a  $A$  junto a los elementos de  $U$  con su valor de pertenencia:

$$A = \{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 1)\}$$

Ahora pensemos que esta función de pertenencia pueda tomar valores cualesquiera dentro del intervalo  $[0, 1]$ . De esta manera el elemento  $x_1$  podría pertenecer *totalmente* a  $A$ ,  $\mu_A(x_1) = 1$ ; el elemento  $x_2$  podría pertenecer *bastante* a  $A$ ,  $\mu_A(x_2) = 0.86$ ; el elemento  $x_3$  podría pertenecer *algo* a  $A$ ,  $\mu_A(x_3) = 0.54$ ; *muy poco* el elemento  $x_4$ ,  $\mu_A(x_4) = 0.17$ ; y *nada* el elemento  $x_5$ ,  $\mu_A(x_5) = 0$ , lo cual puede representarse como:

$$A = \{(x_1, 1), (x_2, 0.86), (x_3, 0.54), (x_4, 0.17), (x_5, 0)\}$$

De esta manera el conjunto  $A$  representa a un *subconjunto difuso*.

Esta estructura matemática permite manejar problemas que estén vaga o pobremente definidos, ya que su grado de pertenencia puede jerarquizarse.

Cabe hacer notar que debe decirse "subconjuntos difusos" y no "conjuntos difusos" porque el conjunto de referencia no es difuso. Por ejemplo, podemos citar el subconjunto difuso de *hombres altos, muy altos, bajos, muy bajos, etc.*, con referencia al conjunto no difuso de *hombres*.

Puede ahora verse que los subconjuntos clásicos son un caso particular de los subconjuntos difusos o borrosos, por ello se usará en ocasiones el sinónimo *no borroso* o *no difuso* para subconjuntos clásicos (función de pertenencia igual a uno o a cero). Con esta idea puede darse formalmente la siguiente

## Definición 2.2

*Subconjunto difuso.*

Sea  $U$  un conjunto enumerable o no, y  $x$  un elemento de  $U$ ; entonces un subconjunto difuso  $A$  de  $U$  es una colección de pares ordenados del elemento  $x$  y su grado de pertenencia  $\mu_A(x)$ :

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U\}$$

$$\mu_A(x): U \rightarrow [0, 1]$$

Se dan en seguida otras definiciones útiles para desarrollos posteriores. En ellas se hace referencia a los conjuntos  $A$ ,  $U$ , y al elemento  $x$  de  $A$  recién usados en la definición anterior.

**Definición 2. 3**

*Soporte de un subconjunto difuso.*

El soporte  $S(A)$  de un subconjunto difuso  $A$  es el conjunto (abrupto) de todos los puntos  $x$  en  $U$  tales que  $\mu_A(x)$  es positiva. Es decir

$$S(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\}$$

**Definición 2. 4**

*Singularidad difusa*

Subconjunto difuso cuyo soporte es un punto único en  $U$ . Si  $A$  es una singularidad difusa cuyo soporte es  $x$  escribimos:

$$A = \mu/x$$

Es decir, el conjunto  $A$  está formado por el elemento  $x$ , el cual tiene un grado de pertenencia  $\mu$  en  $A$ . Si hubiese varios puntos pertenecientes al conjunto  $A$ , es claro que el conjunto  $A$  podría expresarse como la *unión* de tales puntos (singularidades). Véase la figura 9.

De lo anterior puede verse que un subconjunto difuso puede verse como la unión de sus singularidades constituyentes. Si el conjunto universo es continuo podemos representar al subconjunto difuso como:

$$A = \int_U \mu_A \cdot (x) / x$$

Si el conjunto universo es discreto se le representa como:

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_i / y_i$$

donde los signos de integral y de sumatoria representan unión.

Definiremos ahora las operaciones principales entre subconjuntos difusos. Dichas operaciones se definirán en términos de funciones de pertenencia por facilitar así el manejo de los conceptos de la Lógica Difusa.

### 2.2.1.4 Operaciones Básicas entre Subconjuntos Difusos

Sean A y B dos subconjuntos difusos definidos en el conjunto universo U con funciones de pertenencia  $\mu_A$  y  $\mu_B$  respectivamente como se muestra en la figura 1. Entonces las operaciones de unión, intersección y complemento quedan definidas por medio de sus funciones de pertenencia como sigue:

**Definición 2. 5**

La unión de A y B es un subconjunto difuso  $A \cup B$  cuya función de pertenencia es

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U$$

**Definición 2. 6**

La intersección de A y B es un subconjunto  $A \cap B$  cuya función de pertenencia se define como:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U$$

**Definición 2. 7**

El complemento de A es un subconjunto difuso  $\neg A$  cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

A manera de ejemplo se muestran las siguientes figuras en donde se representan las operaciones principales entre dos conjuntos difusos definidas anteriormente.

Considérense las funciones de pertenencia de dos subconjuntos difusos A y B ilustradas en la figura 1:

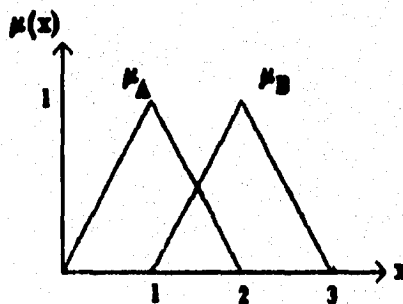


Fig. 1. Funciones de pertenencia de dos subconjuntos: A y B.

Primeramente observemos el efecto en la función de pertenencia de la unión de los subconjuntos A y B



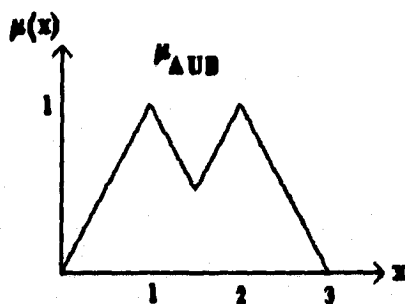


Fig. 2. Función de pertenencia de la unión de los subconjuntos A y B.

Ahora adviértase a la función de pertenencia de la intersección de dos conjuntos difusos:

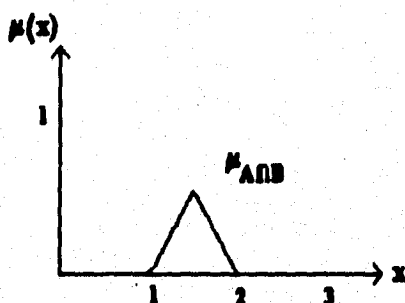


Fig. 3. Función de pertenencia de la intersección de los conjuntos A y B.

Finalmente tenemos el complemento del subconjunto difuso A:

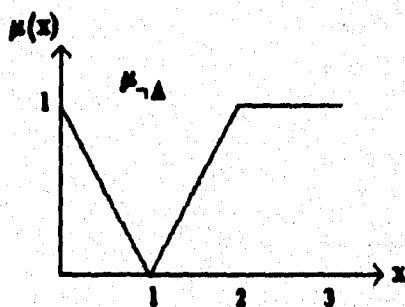


Fig. 4. Función de pertenencia del complemento de A.

A continuación se dan tres definiciones más que serán necesarias para comprender la siguiente sección.

**Definición 2.8**  
Relación difusa

Una relación difusa  $R$  de un subconjunto  $U$  a un subconjunto  $V$  es un subconjunto del producto cartesiano  $U \times V$ .  $R$  está caracterizada por una función de pertenencia bivariada  $\mu_R(u, v)$  que se expresa como

$$R = \int_{U \times V} \mu_R(u, v) / (u, v)$$

$$u \in U, v \in V$$

Es decir, el par  $(u, v)$  tiene un grado de pertenencia  $\mu_R$  en la relación  $R$  o dicho de otra forma, el grado de relación  $R$  del elemento  $u$  con el elemento  $v$  es de  $\mu_R$ .

Por ejemplo, sean  $X$  y  $Y$  dos conjuntos de personas:

$$X = \{\text{Juan, Pedro}\} \quad Y = \{\text{Luis, Paco}\}$$

y tenemos una relación de "amistad" entre los miembros de  $X$  y  $Y$ , lo cual puede expresarse como:

$$\text{"amistad"} = 0.8 / (\text{Juan, Luis}) + 0.6 / (\text{Juan, Paco}) + 0.2 / (\text{Pedro, Luis}) + 0.9 / (\text{Pedro, Paco})$$

Alternativamente, puede expresarse la relación anterior por medio de una *matriz de decisión*:

	Luis	Paco
Juan	0.8	0.6
Pedro	0.2	0.9

**Definición 2.9**

*Composición supremo-estrella.*

Si  $R$  y  $S$  son relaciones difusas en  $U \times V$  y en  $V \times W$ , respectivamente, la composición de  $R$  y  $S$  es una relación difusa denotada por  $R \circ S$  y se define por

$$R \circ S = \int_{U \times W} \sup_y (\mu_R(u, v) * \mu_S(v, w)) / (u, w)$$

$$u \in U, v \in V, w \in W.$$

donde  $*$  denota cualquier clase de normas triangulares.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Las normas triangulares se usan para definir conjunciones (ejemplos de normas triangulares son el mínimo -regla de Mamdani-, el producto algebraico -regla de Larsen-, etc.). En contraste, las *conormas* triangulares se usan para definir disyunciones [3], [4].

**Definición 2. 10****Regla composicional de inferencia supremo-estrella**

Si  $R$  es una relación difusa en  $U \times V$  y  $x$  es un conjunto difuso en  $U$ , entonces la regla composicional de inferencia dice que el conjunto difuso y inducido por  $x$  está dado por

$$y = x \circ R$$

donde  $x \circ R$  es la composición supremo estrella de  $x$  y  $R$ .

**2.2.1.5 Introducción a la Lógica Difusa y al Razonamiento Aproximado**

En la literatura de control difuso en general no se acostumbra definir a la lógica difusa de manera clara. Lo que se hace es dar una idea informal (vaga o difusa, aprovechando el término) de los problemas que aquella puede resolver. Es por ésta razón (y para evitar definiciones ambiguas formuladas por los lectores) que se dará la definición que se manejará en este trabajo, amén de otras que se consideren convenientes.

Primeramente necesitamos definir a la *lógica matemática*. La lógica matemática o simbólica es la lógica expuesta por medio y método de símbolos (como el álgebra), principios y leyes conforme a los cuales se combinan dichos símbolos y se llega a conclusiones. Hay que resaltar que dichas conclusiones serán *verdaderas o falsas* (por usar como base conjuntos clásicos; por tanto cabría el término *lógica matemática clásica*). De la misma manera en que se mostró que los conjuntos clásicos son un caso particular de los subconjuntos difusos, se puede ver claramente que la lógica matemática clásica es un caso particular de la lógica difusa. Por ello la definición dada anteriormente para lógica matemática clásica puede darse para lógica difusa, resaltando que hace referencia a subconjuntos difusos [34].

Definamos ahora un par de términos más, no siempre claros para los no filósofos.

Se entiende por *inferencia* o *implicación* a la combinación (relación) de dos proposiciones por medio del conectivo *si...entonces*, en la cual la primera proposición se llama *antecedente* y la segunda *consecuente*. Por tanto llamaremos *razonamiento* a cualquier procedimiento de inferencia o prueba, es decir; a cualquier argumento, conclusión, inferencia, deducción, analogía, etc. [1].

El objetivo principal de la lógica difusa es sentar las bases teóricas para el razonamiento a partir de enunciados vagos, es decir; imprecisos. A la manera de obtener tales razonamientos se le llama *razonamiento aproximado*.

La inferencia en el razonamiento aproximado es contrastante con la inferencia en lógica matemática clásica -como podrá notarse, el consecuente de un conjunto dado de proposiciones difusas dependerá esencialmente del significado de tales proposiciones-. Así, la inferencia en el razonamiento aproximado es el cálculo con subconjuntos difusos del significado de un conjunto de proposiciones difusas.

Como se mencionó al principio de la sección 2.2, la lógica difusa es la herramienta más adecuada para tratar con procesos complejos y pobre o nulamente definidos, ya que permite manejar sistemáticamente el tipo de descripciones lingüísticas empleados por los humanos. Esto se logra haciendo uso de:

- Variables lingüísticas y variables difusas
- Caracterización de relaciones simples entre variables difusas mediante enunciados condicionales
- Caracterización de relaciones complejas entre variables difusas mediante algoritmos difusos

#### 2.2.1.5.1 Variables lingüísticas y variables difusas

Aunque al comienzo de la lógica difusa se hacía distinción entre variable difusa y variable lingüística [52], en la bibliografía reciente [3], [4], [9], [23], etc., la mayoría de los autores ya no acostumbran definir a las variables difusas, sino que toman a éstas como un caso particular de las variables lingüísticas. Sin embargo, el creador de la lógica difusa, Lotfi A. Zadeh, aún hace distinción entre ambas [52]. Es por esta razón que aquí se definen a las dos y se aclara en su momento, con cual de ellas se está trabajando.

#### Definición 2. 11 Variable Difusa

Una variable *difusa* es aquella que toma valores que son etiquetas de subconjuntos difusos. Por ejemplo, la variable humedad puede tomar los valores *baja*, *media*, y *alta* (figura 5).

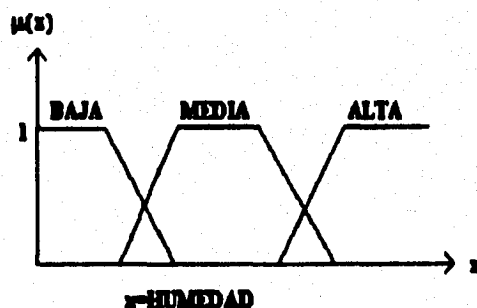


Fig. 5. Ejemplo de los valores de la variable difusa 'humedad'.

**Definición 2. 12 (formal)****Variable Lingüística**

Una variable lingüística está caracterizada por una quintupla  $(x, T(x), U, \underline{G}, \underline{M})$  en donde  $x$  es el nombre de la variable;  $T(x)$  es el conjunto de términos de  $x$ , es decir; el conjunto de nombres de los valores lingüísticos de  $x$ , siendo cada uno de estos valores un conjunto difuso definido en  $U$ ;  $\underline{G}$  es una regla sintáctica para la generación de nombres de valores de  $x$ ; y  $\underline{M}$  es una regla semántica para asociar cada valor con su significado.

Cabe aclarar que aunque puede sentirse que la definición anterior establece un concepto complejo, en realidad no es así. El objetivo de dar esta definición es mostrar de una manera formal que *una variable puede tomar palabras como valores*. Para mayor claridad, considérese ahora la siguiente

**Definición 2. 13 (informal)****Variable Lingüística**

Si la variable toma valores compuestos (frases u oraciones en un lenguaje específico) se dice que la variable es *lingüística*. Por ejemplo, la variable *juventud* puede tomar los valores lingüísticos expresados como *no muy joven*, *algo joven*, *muy muy joven*, etc. Al conjunto de nombres de los valores lingüísticos que toma la variable se le conoce como conjunto de términos. El uso de variables lingüísticas permite sistematizar la caracterización aproximada de los sistemas complejos o pobremente definidos, de manera semejante a la de un experto humano.

**2.2.1.5.2. Caracterización de relaciones simples entre variables difusas mediante enunciados condicionales**

Se sabe que dos variables numéricas pueden relacionarse de diversas maneras, por ejemplo, mediante una función. Otra manera es a través de una tabla, la cual puede ser descrita en palabras por medio de un conjunto de oraciones condicionales, por ejemplo, *si  $x$  es 7 entonces  $y$  es 1*, *si  $x$  es 8 entonces  $y$  es 4*, etc. Del mismo modo pueden relacionarse dos variables en lógica difusa pero en vez de ser variables numéricas serán variables lingüísticas.. Por ejemplo:

*si  $x$  es pequeña entonces  $y$  es muy grande*  
*si  $x$  no es muy pequeña entonces  $y$  es muy muy grande*  
*si  $x$  no es pequeña y no es grande entonces  $y$  no es muy grande*

y así sucesivamente.

Se dice que la relación es simple porque puede describirse por medio de un conjunto de enunciados condicionales de la forma *si x es A entonces y es B*, donde A y B son las etiquetas de conjuntos difusos que representan los valores que toman las variables x y y, respectivamente

### 2.2.1.5.3 Caracterización de relaciones complejas mediante el uso de algoritmos difusos

En caso de relaciones más complejas la descripción de la dependencia entre las variables requiere de un algoritmo difuso. *Un algoritmo difuso es una sucesión ordenada de instrucciones que pueden contener etiquetas de conjuntos difusos. Las instrucciones pueden ser de asignación, condicionales o incondicionales. Considérese por ejemplo la siguiente sección de un algoritmo difuso para controlar la velocidad de un motor:*

*Aplicar voltaje ligeramente alto si la velocidad es baja  
 Leer la velocidad actual  
 Dividir velocidad entre 10  
 Si la velocidad es muy baja entonces aplicar voltaje muy alto  
 Si la velocidad es baja entonces aplicar voltaje alto  
 y así sucesivamente*

Usando esta clase de algoritmos difusos es posible representar de manera aproximada una amplia variedad de sistemas complejos o vagamente definidos. *Es muy importante el resaltar que la fuente de la imprecisión no se halla en la lógica difusa, sino en el modo en que se aplican las variables lingüísticas y los algoritmos difusos a la formulación y solución de problemas.*

### 2.2.2 Estructura Básica de un Controlador Lógico Difuso [3], [4], [9].

En esta sección se exponen las partes principales de un CLD, explicando brevemente cada una de ellas. Éstas son:

1. Interfaz de fuzificación
2. Base de conocimientos
3. Lógica de decisiones
4. Interfaz de defuzificación

A grandes rasgos lo que ocurre dentro del CLD es lo siguiente. La información del sistema a controlar se obtiene a través de la interfaz de fuzificación. Dicha información se procesa por medio de la base de conocimientos y de la lógica de decisiones, la cual es el corazón del controlador. Finalmente la salida de control pasa por la interfaz de defuzificación (lo cual le devuelve su carácter abrupto a esta variable) y es entonces

cuando se alimenta al sistema bajo control. En la siguiente figura 6 se muestra la configuración de un CLD en diagrama de bloques:

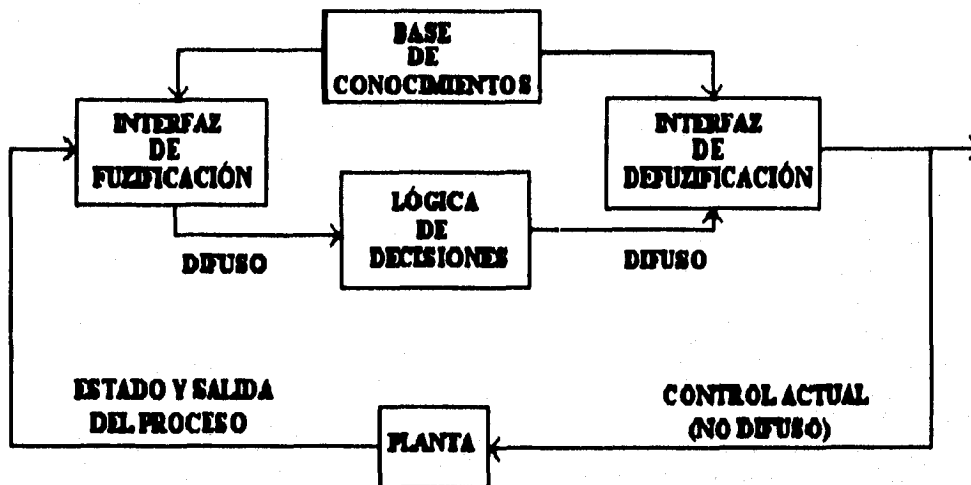


Fig. 6. Estructura de un CLD.

A continuación se da una explicación breve de cada una de los componentes del CLD.

#### 1) Interfaz de Fuzificación.

Es la parte del CLD que fuzifica (le da el carácter de variable lingüística a la variable numérica que recibe) a las variables de entrada. La interfaz de fuzificación involucra a las siguientes funciones:

- a) Medición de los valores de entrada.
- b) Efectúa un mapeo a escala de los valores de entrada a sus correspondientes conjuntos universo (universos de discurso).
- c) Realiza la fuzificación de los valores escalados, es decir; transforma las variables de entrada en variables lingüísticas las cuales son valuadas en conjuntos difusos. Es decir, la interfaz de fuzificación entrega al control la información del comportamiento del sistema de una manera adecuada (difusa) para que aquél la pueda procesar.

#### 2) Base de conocimientos.

Es la parte del CLD que contiene la información de cómo debe controlarse el proceso a regular. Su estructura se deriva de la experiencia desarrollada por un operador humano y/o el conocimiento previo de ingeniería de control, por tanto; depende del proceso a controlar y del desempeño deseado. La base de conocimientos consiste de una base de datos y de una base de reglas de control lingüístico (difuso).

- a) La base de datos contiene las definiciones que se usan para especificar las reglas de control lingüísticas y el tratamiento en términos de lógica difusa de los datos disponibles.

b) La base de reglas define los objetivos y la estrategia de control tomados de la experiencia, por medio de un conjunto de reglas de control lingüísticas.

3) Lógica de decisiones.

Es la parte más importante del CLD, ya que es la que simula el mecanismo de toma de decisiones utilizado por el cerebro humano. Esto se logra mediante inferencia difusa.

4) Interfaz de defuzificación.

Es la encargada de convertir las variables lingüísticas a variables numéricas (abruptas o no difusas).

Realiza las siguientes funciones:

a) Un mapeo a escala que transfiere el rango de valores de las variables de salida a sus correspondientes conjuntos universos (universos de discurso).

b) Defuzificación, la cual transforma la salida de control difuso obtenida (variable lingüística) en un valor abrupto (no difuso) de control (variable numérica) aplicable al sistema.

Con lo anterior presente, podemos ahora explicar los

### 2.2.3 Parámetros de diseño de un CLD [9], [3], [4], [23].

Los principales parámetros de diseño de un CLD son los siguientes:

1) Fuzificación. Para realizar ésta operación existen varios métodos, pero solo se presentan los más usuales.

a) El operador fuzificación (fuzificador) más simple, transforma un dato numérico en uno singular difuso, es decir; un valor de entrada  $u_0$  se convierte en un subconjunto difuso que tiene un grado de pertenencia de uno en  $u_0$  y cero en cualquier otro punto.

b) Debido al ruido presente en todo sistema de control es necesario convertir las mediciones probabilísticas en mediciones posibilísticas (involucran conjuntos difusos).

De este modo, disminuye la complejidad requerida para el uso de variables aleatorias. El fuzificador en este caso puede generar funciones de pertenencia como las mostradas<sup>5</sup> en la figura 7.

---

<sup>5</sup> Se muestran las formas más comunes aunque de hecho pueden definirse una gran cantidad de funciones de pertenencia [9], [3], [4].





*Fig. 7. Ejemplos de posibles funciones de pertenencia.*

La forma de la función de pertenencia depende básicamente de la incertidumbre en las mediciones y de la capacidad de cálculo del control. Para tal efecto, las funciones de pertenencia más populares son la triangular, la trapezoidal, y la campana de Gauss.

c) Existen procesos que involucran el manejo de datos precisos, datos probabilísticos o datos híbridos (una combinación de ambos). En este caso, el fuzificador se desarrolla por medio de variables híbridas, las cuales involucran la incertidumbre (variables difusas) y la aleatoriedad (variables numéricas.).

## 2) Base de datos.

Incluye la discretización y la normalización de los universos de entrada y de salida, la definición de los subconjuntos difusos (que incluye la especificación de las funciones de pertenencia y la partición de los universos de entrada y salida) y el cumplimiento de la propiedad de completitud, la cual indica que el algoritmo debe ser capaz de inferir una acción de control correcta para todo estado del proceso<sup>6</sup>.

a) Discretización. A la discretización de un universo de discurso se le llama cuantización. En efecto, la cuantización discretiza un universo en un cierto número de segmentos (niveles de cuantización). Cada segmento va etiquetado como un elemento genérico y por tanto forma un universo discreto. Un conjunto difuso se define entonces al asignar diversos valores (grados) de pertenencia a cada elemento cuantizado del nuevo universo discretizado. La elección de dichos niveles de cuantización influirá en que tan fino será el controlador. Por supuesto que se deberá hacer un compromiso entre la exactitud del controlador y el espacio en memoria disponible de la máquina.

b) Normalización. Es un mapeo llevado a cabo por las llamadas constantes de normalización. Este escalamiento consiste en multiplicar la variable de entrada por la constante de normalización, obteniéndose así, un dominio normalizado de los valores de entrada.

c) Partición de los universos. En general, una variable lingüística está asociada con un conjunto de términos. Una partición difusa determina cuantos términos existirán en el

<sup>6</sup> Es decir, en la acción de control se contemplan todos los casos o situaciones que puedan presentarse en la planta.

conjunto de términos. Por ejemplo en la figura 5, la variable *humedad* puede tomar los valores de *alta*, *media* y *baja*. Lo anterior implica que la partición difusa de los universos está determinada por el número de subconjuntos difusos en cada universo.

d) Funciones de pertenencia. Pueden definirse numéricamente o utilizando una función. La definición numérica relaciona cada elemento del universo con un grado de pertenencia al subconjunto correspondiente; esto se puede representar por medio de una tabla (en la figura 8 se representa un subconjunto difuso así definido). En contraste, también se puede definir el grado de pertenencia a un subconjunto difuso por medio de una función analítica (éstas ya se ilustraron en la figura 7).

$x$	$\mu(x)$
-0.5	0.05
-0.3	0.30
-0.1	0.70
0	1
0.2	0.70
0.4	0.55
0.6	0.30
0.7	0.20

Fig. 8. Ejemplo de la definición numérica de una función de pertenencia.

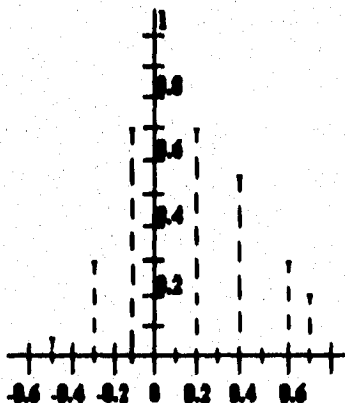


Fig. 9. Gráfica correspondiente a la tabla de la fig. 8.

### 3) Base de Reglas.

La estrategia de control, derivada de la experiencia, se expresa mediante el uso de algoritmos difusos. Las reglas de control que forman el algoritmo difuso pueden definirse usando los siguientes criterios:

a) Selección de las variables. Las variables de entrada se seleccionan basándose en la experiencia y en conocimientos de ingeniería de control. Generalmente se usan como variables el error, el cambio (derivada) del error, etc.

b) Origen y obtención de las reglas de control. Hay cuatro fuentes de obtención de las reglas de control:

- b.1) La experiencia y los conocimientos en ingeniería de control.
- b.2) La observación de las acciones de control de operadores humanos.
- b.3) El modelo difuso del proceso.
- b.4) Dando al control la capacidad de construir sus propias reglas. En este caso se tendría un controlador auto-organizado [23], [58].

c) Justificación de las reglas de control difuso. Las reglas pueden generarse por medio de dos métodos:

- c.1) El primero es heurístico y se apoya en la experiencia y en el análisis del comportamiento del sistema. Es el método más usado en el diseño de los CLD, ya que se implanta de manera natural y sencilla a partir del conocimiento cualitativo del proceso. En su depuración es de gran ayuda el conocimiento en ingeniería de control.
- c.2) El segundo es determinístico, es decir; a partir del estudio del sistema se formulan y definen los parámetros y la estructura de las reglas de control difuso. Éste método es laborioso y aún está siendo investigado.

d) Tipos de reglas de control difuso. Existen dos tipos de reglas de control difuso: las de evaluación de estado y las de evaluación de objeto.

d.1) Reglas de evaluación de estado. La mayoría de los CLD usan este tipo de reglas. Se expresan en forma de enunciados condicionales de la forma

- $R_1$ : Si  $x$  es  $A_1$ , ..., y  $y$  es  $B_1$  entonces  $z$  es  $C_1$
- $R_2$ : Si  $x$  es  $A_2$ , ..., y  $y$  es  $B_2$  entonces  $z$  es  $C_2$
- .....
- .....
- $R_n$ : Si  $x$  es  $A_n$ , ..., y  $y$  es  $B_n$  entonces  $z$  es  $C_n$

donde  $x$ , ...,  $y$  y  $z$  son las variables lingüísticas que representan a las variables de estado del proceso y a la variable de control respectivamente;  $A_i$ , ...,  $B_i$  y  $C_i$  son los valores de

las variables lingüísticas  $x, \dots, y, y z$  en los universos de discurso  $U, \dots, V, y W$  respectivamente, para  $i=1,2, \dots, n$ .

Como su nombre indica, este conjunto de reglas evalúa el estado del sistema para posteriormente obtener la salida de control por medio de mecanismos de inferencia difusa.

d.2) Reglas de evaluación de objeto. Este tipo de reglas evalúan la salida de control del estado presente y del estado futuro. La regla más apropiada se elige mediante cálculos basados en predicción correspondientes a cada comando de control. Estos resultados de predicción son índices de desempeño de los objetivos de control. También se le llama *control difuso predictivo*.

e) Propiedades de consistencia, interactividad y completitud.

e.1) Consistencia. Implica que las reglas de control deben ser examinadas para evitar la posible contradicción entre ellas.

e.2) Interacción. Esta característica se refiere a como se van a combinar las reglas de decisión para inferir la correspondiente acción de control. De hecho, existen dos maneras en que interactúan las reglas de decisión con la variable lingüística de entrada:

- En la primera, se combinan todas las reglas de decisión en una sola relación difusa, que junto con la variable lingüística de entrada permite la deducción de la salida correcta de control.
- En la segunda, la inferencia se basa en reglas de decisión simples combinadas con una variable de entrada numérica; obteniendo así,  $n$  subconjuntos difusos que finalmente se combinan en uno solo generalizado.

e.3) Completitud. La base de reglas debe estar hecha de tal forma que para todo estado del proceso se genere una acción de control. Es decir, toda situación en que pudiese hallarse el sistema, debe ser contemplada por el control.

4) Lógica de decisiones. En esta parte se simula la toma de decisiones de manera semejante a como lo haría un ser humano. Dicha toma de decisiones se fundamenta principalmente en dos conceptos:

- Relación difusa (ver definición 2. 8).
- Regla composicional de inferencia. (ver definiciones 2. 10 y 2. 11).

Es decir, las reglas de control empleadas en el algoritmo de control se pueden representar por medio de relaciones difusas. Entonces, usando la regla composicional de inferencia se deduce la acción de control correcta para la situación presentada.

### 5) Estrategias de defuzificación.

Consiste en un mapeo de los valores de salida del algoritmo difuso a valores de salida no difusos aplicados al sistema bajo control. No existe una estrategia de defuzificación única y por lo tanto la selección de la misma la determinan las necesidades del control y la capacidad del mismo. La influencia del método de defuzificación en el desempeño del controlador ha recibido poca atención por parte de los investigadores. Incluso, los nombres de tales métodos varían de autor en autor y para consultas debe atenderse a las definiciones de tales métodos y no a los nombres de tales métodos.

Se dan en seguida los más comunes, haciendo notar sin embargo; que existen algunos otros que se explican en [9].

Las estrategias más usadas son:

- **Método del centroide de áreas.** Es el más extendido actualmente. La salida difusa de control queda formada por la unión de las funciones de pertenencia de la salida, de donde se haya el centroide de la figura; la cual viene siendo la salida defuzificada del control.
- **Método del criterio máximo.** Da como resultado el punto en el cual la distribución de posibilidades de la acción de control alcanza el valor máximo.
- **Método del promedio del máximo.** Produce una señal de control que representa el valor medio de todas las acciones de control locales cuyas funciones de pertenencia alcanzan el máximo.

### 2.2.4. Tipos de Controladores Lógicos Difusos [9].

Cuando se va a implantar un CLD, suele usarse al error (diferencia entre el valor de referencia y el de salida) y a la derivada del error como elementos para inferir a la señal de control. También puede usarse a la integral del error en vez de su derivada.

Es fácil ver que la elección de estas variables nos lleva de inmediato a la concepción de un controlador *PID difuso* (CDPID). En un control convencional PID se tiene que la ecuación descriptiva es:

$$w = K_p \cdot e + K_D \cdot \dot{e} + K_I \cdot \int e \cdot dt$$

En el caso de un CDPID discreto se tiene un proceso adicional el cual es una *suma de errores*:

$$\delta e(k) = \sum_{i=1}^{k-1} e(i).$$

Entonces la expresión simbólica de las reglas para este caso es:

*Si  $e$  es (valor lingüístico) y  $\Delta e$  es (valor lingüístico) y  $\delta e$  es (valor lingüístico) entonces  $u$  es (valor lingüístico)*

Naturalmente no hay que restringirse a las variables de error y su derivada y/o integral. En algunos casos, cuando se conoce la estructura del proceso a controlar, se pueden usar las variables de estado del proceso, en vez de restringirse al error, al cambio del error o su suma. En este caso, la expresión simbólica de un controlador de múltiple entrada y simple salida es como sigue:

*Si  $x_1$  es (valor lingüístico) y ... y  $x_n$  es (valor lingüístico) entonces  $u$  es (valor lingüístico)*

Reglas de esta clase se usan cuando se tiene un modelo difuso del sistema bajo control [40]. Otra clase de reglas son las del tipo

*Si  $x_1$  es (valor lingüístico) y ... y  $x_n$  es (valor lingüístico) entonces  $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$*

donde  $f$  representa una función lineal de las variables de estado del proceso. A esta clase de controladores se les llama de tipo Sugeno y se estudian en detalle en [9] y [23].

### 2.3 Preliminares de Control Deslizante [42].

#### Robustez de un sistema de control

Los modelos matemáticos que representan sistemas dinámicos poseen incertidumbres. Éstas se clasifican en dos tipos:

- Incertidumbres estructurales (paramétricas).
- Incertidumbres paramétricas (dinámicas no modeladas).

Los dos métodos más importantes que estudian sistemas con incertidumbres son el control robusto y el control adaptable. En seguida se explica muy brevemente un diseño de control robusto, el control deslizante.

#### Control deslizante.

*Dada la planta:*

$$q^{(n)} = f(q) + b(q)u$$

donde el escalar  $q$  es la salida de interés (alguna posición angular, por ejemplo), el escalar  $u$  es la señal de control y

$$q = [q \quad \dot{q} \quad \dots \quad q^{(n-1)}]^T$$

es el vector de estado. A este respecto, considérense las siguientes

**Suposiciones:**

1. Los estados  $q^{(i)}$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, n-1$  son medibles.
2.  $\exists F(q)$  conocida tal que  $|\hat{f}(q) - f(q)| \leq F(q)$ ,  $\forall q$  donde  $\hat{f}$  es una estimación de  $f$ .
3.  $b(q)$  es conocida.

**Problema de control.**

El problema de control es lograr que el estado  $q$  siga un vector de estado específico variante en tiempo  $q_d = [q_d \quad \dot{q}_d \quad \dots \quad q_d^{(n-1)}]^T$  con impresiones en el modelo, i.e.,  $f(q)$  y  $b(q)$ .

Para que el seguimiento se logre usando un control finito  $u$ , el estado inicial deseado debe ser tal que

$$q_d(0) = q(0)$$

Sea el error de seguimiento  $\tilde{q} = q - q_d$  en la variable  $q$  y sea

$$\tilde{q} = q - q_d = [\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}} \quad \dots \quad \tilde{q}^{(n-1)}]^T$$

el vector de error de seguimiento. Aun más, definamos una superficie variante con el tiempo  $V(t)$  en el espacio de estados  $\mathcal{R}^n$  por medio de la ecuación escalar  $v(q, t) = 0$ , donde

$$v(q, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{q} \quad \lambda > 0$$

Si  $n=2$  la superficie deslizante será una línea de conmutación mejor conocida como plano deslizante o línea deslizante y está dada por

$$v = \dot{\tilde{q}} + \lambda \tilde{q}$$

Dada la condición inicial  $q_d(0) = q(0)$  el problema de seguimiento  $q = q_d$  es igual al de

permanecer en la superficie  $V(t)$  para todo  $t > 0$ , de hecho  $v \equiv 0$  representa una ecuación diferencial lineal cuya solución única es  $\tilde{q} \equiv 0$ . Así, el problema de seguimiento al vector  $q_d$  puede reducirse al de mantener al escalar  $s$  igual a cero. Una condición suficiente para este comportamiento es elegir al control de manera que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2(q, t) \leq -\eta \cdot |v| \quad \eta > 0$$

que puede escribirse como

$$\dot{v} \leq -\eta \cdot |v| \quad \text{o equivalentemente} \quad \dot{v} \operatorname{sgn}(v) \leq -\eta$$

Considerando a  $v^2(q, t)$  como una función de Lyapunov, la condición anterior - llamada condición de deslizamiento - asegura que el sistema controlado es estable asintóticamente. En el plano de fase, lo anterior significa que el vector de estado tiende a moverse hacia la superficie deslizante, y una vez alcanzada ésta, la trayectoria del vector de estado ya no le abandona y llega al origen del plano de fase, aun en presencia de incertidumbres en el modelo, fluctuaciones en los parámetros y perturbaciones. Es decir, la superficie deslizante es un conjunto invariante.

## 2. 4 Control Deslizante Difuso [9],[42].

El control deslizante clásico (no difuso) se caracteriza por la conmutación abrupta de su señal de corrección (modelada por medio de una función signo, pues el signo del control aplicado es positivo por debajo del plano deslizante y negativo por encima de él para lograr la llegada a dicho plano) y debe ser eliminada para un desempeño adecuado del sistema. Esto se logra suavizando la discontinuidad del control deslizante por medio de una delgada capa dentro de la que se encuentra el plano de deslizamiento. A esta capa se le conoce como *capa de acotamiento*. El efecto de suavizar esta señal de control se modela por medio de una función saturación [9], [42]. Cuando el sistema se halla fuera de la capa de acotamiento la ley de control se elige de manera que verifique la condición de deslizamiento, lo cual garantiza que dicha capa de acotamiento es atractiva, esto es, invariante: todas las trayectorias dentro de esta capa permanecen dentro de ella para  $t \geq 0$ . El efecto de suavizar la discontinuidad producida por el control dentro de la capa de acotamiento es el de asignar una estructura de un filtro pasabajas a la dinámica local de  $v$  eliminando así la rápida conmutación de la señal de control (*chattering*).

En la figura 10 se ilustra al plano deslizante con su capa de acotamiento. Aquí,  $v$  es el deslizamiento y está en función del error y de su derivada, i.e.,  $\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}$ , respectivamente.

De hecho, si graficamos salida de control,  $u$ , contra entrada de control,  $v$ , se verá



que se obtiene una gráfica de dicha función saturación como se muestra en las figura 11. Aquí la  $k_{max}$  es la constante de fuzificación (constante de normalización de entrada al control). Como es obvio en dicha figura, si hacemos que  $|\phi| \rightarrow 0$  veremos que la función saturación de la gráfica entrada-salida del controlador, tiende a una función signo.

En el caso difuso, las reglas son tales que se aplica un control negativo por arriba de la superficie deslizante, y uno positivo por debajo, siendo obvia la razón para esto (alcanzar el plano deslizante  $v=0$ ). Para ilustrar este hecho, supóngase que la salida abrupta de un control difuso es  $\mu$  y de nuevo el deslizamiento está representado por  $v$ . Siendo así, la señal de control  $u$  puede escribirse de la siguiente manera [9]:

$$u = |\mu(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \lambda)| \operatorname{sgn}(v)$$

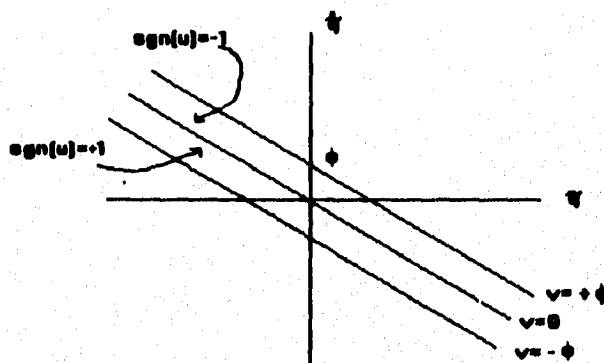


Fig. 10. Capa de acotamiento del plano deslizante  $v=0$ .

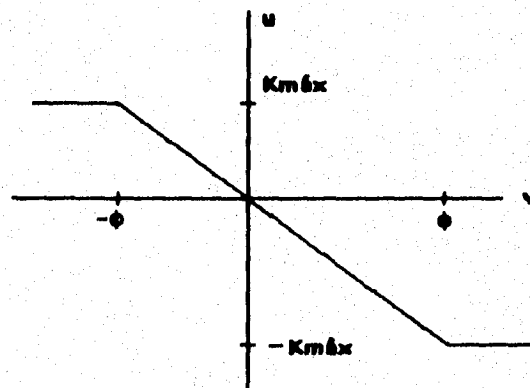


Fig. 11. Función saturación que representa al plano deslizante.

Considerando esta ecuación y comparando con la siguiente [9]

$$u \approx -|\mu| \cdot \operatorname{sat}(v / \phi)$$

(donde  $\phi > 0$  es la mitad del ancho de la capa de acotamiento) puede considerarse a esta última ecuación como una "extensión" de la anterior.

Considérese ahora a un CLDD cuya señal de entrada  $v$  es el deslizamiento y su salida de control  $w$  es la que obliga al sistema a entrar en modo deslizante. Un vector de decisión para tal efecto es el mostrado en la siguiente figura<sup>7</sup>:

$v$	$w$
PG	PG
PM	PM
PP	PP
CE	CE
NP	NP
NM	NM
NG	NG

Fig. 12. Vector de decisión para régimen deslizante.

En la figura anterior puede verse que los valores difusos que colindan con cero son de magnitud baja y de sentido contrario, como era de esperarse para lograr el estado deslizante. Se hace la aclaración de que en la figura 12 la salida de control del CLDD debería ser contraria al valor de su entrada para alcanzar el estado deslizante (esto es, a PG le correspondería NG, a PM, NM, etc.) pero se está considerando la salida negativa, es decir  $w = -N(v)$ . Esto es, equivalente a considerar  $w = N(v)$  y aplicar un vector de decisión con reglas de tipo si PG entonces NG, si PM entonces NM. etc.

Puede concluirse entonces que el control difuso en este sentido, es una extensión del modo deslizante clásico con capa de acotamiento [9]. Esta capa de acotamiento depende en gran medida del número y tamaño de las funciones de pertenencia usadas en las reglas de inferencia. Generalmente y en contraste con el control en modo deslizante con capa de acotamiento clásico (no difuso), el CLD genera una función piezolinesal  $u = f(v)$  (el primero genera una línea recta en el segundo y cuarto cuadrantes, que no es otra cosa más que el plano de deslizamiento no difuso). Si se aumenta el número de funciones de pertenencia  $f(v)$  tiende a ser lineal [9]. En la figura siguiente se muestra el caso para el control en modo deslizante difuso con capa de acotamiento definido para el vector de decisión de la figura 12. Nótese como la figura 13 tiende a ser una función signo. Es fácil verificar que la forma de esta curva cambia conforme a los niveles de decisión del vector. De hecho como se mostrará en la sección siguiente, dicho vector se

<sup>7</sup> Los niveles de decisión están dados por PG=positivo grande, PM=positivo mediano, PP=positivo pequeño, CE=cero. Análogamente, N=negativo, etc.

modificó (a partir del primeramente mencionado) para lograr una mejor respuesta del sistema en lazo cerrado.

Puede verse que la característica entrada-salida del CLDD es en realidad la unión de varias curvas. De hecho, tiene esta conformación por los conjuntos difusos (triangulares) de entrada que provocan ese efecto de piezolinealidad (linealidad a trozos), porque las rectas que forman a los conjuntos difusos de entrada cortan al eje de las abscisas para formar tales triángulos (ver figs. 1 y 23). Hay ocasiones en las que dichas discontinuidades son muy abruptas, pudiendo ocasionar un mal desempeño del control. En este caso se puede recurrir a suavizar las funciones de pertenencia o a filtrar (con un pasabajas) a la señal de control.

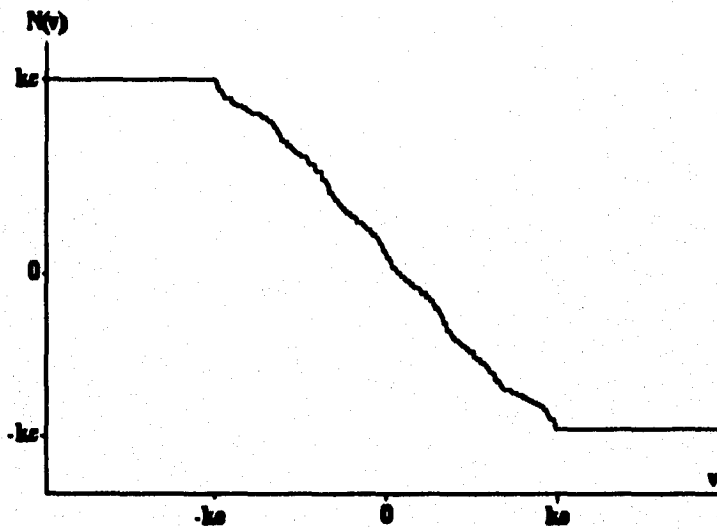


Fig. 13. Característica entrada-salida de un CLDD

## 2.5 Preliminares del enfoque entrada-salida de sistemas [8], [14], [39], [42].

El enfoque entrada-salida de sistemas se basa en dos teoremas: el de *pequeñas ganancias* y el de *pasividad*.

El teorema de pequeñas ganancias es un teorema muy general que da condiciones suficientes para estabilidad entrada acotada, salida acotada. Cuestiones importantes como existencia, unicidad, y continuidad está separadas de la cuestión de estabilidad y generalmente se suponen *a priori* [14].

Las funciones de Lyapunov son generalizaciones de la noción de energía de un sistema dinámico; de este modo, se espera que las funciones de Lyapunov sean aditivas,

esto es, para combinaciones de sistemas la función de Lyapunov total será la suma de las funciones de Lyapunov de cada bloque.

La teoría de la pasividad expresa formalmente esta noción y da reglas simples para describir combinaciones de subsistemas o bloques expresados con el formalismo de Lyapunov.

Antes de citar los teoremas antes mencionados, daremos una breve revisión a las definiciones de espacios  $L_p$ ,  $L_{p\infty}$ , relación binaria y estabilidad entrada - salida.

**Definición 2.11 [50].**

Para cualquier  $p \in [1, \infty)$  fija,  $f: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}$  se dice que  $f$  pertenece a  $L_p$  ssi  $f$  es localmente integrable y

$$\infty > \|f\|_p = \left[ \int_0^{\infty} |f(t)|^p dt \right]^{1/p}$$

Si  $p = \infty$ ,  $f \in L_\infty$  ssi

$$\infty > \|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$$

Es decir

$$L_p = \left\{ f: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R} \mid \infty > \|f\|_p \right\}$$

$$L_\infty = \left\{ f: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R} \mid \infty > \|f\|_\infty \right\}$$

En el enfoque entrada - salida se contemplan también sistemas inestables<sup>8</sup> y por tanto funciones no acotadas. Tales funciones no se consideran en los espacios  $L_p$ , por ello es necesario definir un nuevo espacio de funciones que las considere al que llamaremos  $L_{p\infty}$  ( $L_p$  extendido) y que está dado por la siguiente

**Definición 2.12 [8].**

$$L_{p\infty} = \left\{ f: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R} \mid \infty > \|f\|_p, \forall T \in \mathfrak{R}^+ \right\}$$

<sup>8</sup> Se permite que los sistemas sean inestables por separado (en lazo abierto), sin embargo se busca que su configuración en lazo cerrado sea estable.

donde

$$\|f\|_{p,T} = \|f_T\|_p \quad \text{y} \quad f_T(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

### Definición 2.13 [47], [52]

#### Relación Binaria

Sea  $X$  un conjunto de funciones. Una relación binaria  $R$  sobre  $X$  es cualquier subconjunto del espacio producto  $X \times X$ . Si  $(x, y)$  es cualquier par perteneciente a  $R$ , entonces decimos que  $y$  está  $R$ -relacionada con  $x$  o que  $y$  es la imagen de  $x$  bajo  $R$ .

Supóngase que  $A: X \rightarrow X$  es un mapeo. Entonces  $A$  define una relación binaria  $R_A$  sobre  $X$ , esto es:

$$R_A = \{(x, Ax) : x \in X\}$$

En el caso del enfoque entrada-salida, el espacio  $X = L_p$  (espacio de funciones de Lebesgue). En particular en este trabajo se usará el espacio  $L_2$ .

#### Estabilidad Entrada-Salida

Suele definirse a la estabilidad entrada-salida por medio de *relaciones* más que por medio de *operadores* [54], [56] (recuérdese que un operador es un caso particular de una relación). Por tanto se da la siguiente

### Definición 2.14

#### Estabilidad entrada-salida

Supóngase que  $R$  es una relación binaria definida sobre  $L_{p_1}$ . Entonces  $R$  es  $L_p$  estable si:

$$(x, y) \in R, x \in L_p \Rightarrow y \in L_p$$

Se procede ahora a enunciar el primero de los dos teoremas, el

### Teorema 2.1

#### Pequeñas Ganancias

Considérese el sistema mostrado en la figura 14. Sean  $H_1, H_2: L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ . Sean  $e_1, e_2 \in L_{2e}$  y  $r_1, r_2$  están definidas por

$$\begin{aligned} r_1 &= e_1 + H_2 e_2 \\ r_2 &= e_2 - H_1 e_1 \end{aligned}$$

Supóngase que existen constantes  $\beta_1, \beta_2, \gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0$  tales que

$$\begin{aligned} \|H_1 e_1\|_T &\leq \gamma_1 \|e_1\|_T + \beta_1 \\ \|H_2 e_2\|_T &\leq \gamma_2 \|e_2\|_T + \beta_2 \\ \forall T \in \mathfrak{R}_+ \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones, si  $\gamma_1 \gamma_2 < 1$  entonces

$$\begin{aligned} \|e_1\|_T &\leq (1 - \gamma_1 \gamma_2)^{-1} (\|r_1\|_T + \gamma_2 \|r_2\|_T + \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) \\ \|e_2\|_T &\leq (1 - \gamma_1 \gamma_2)^{-1} (\|r_2\|_T + \gamma_1 \|r_1\|_T + \beta_1 + \gamma_1 \beta_2) \end{aligned}$$

y si además

$$\|r_1\|, \|r_2\| < \infty$$

entonces  $e_1, e_2, y_1, y_2$  tienen normas finitas, y las normas de los errores  $\|e_1\|, \|e_2\|$ , están acotadas por las expresiones dadas anteriormente.

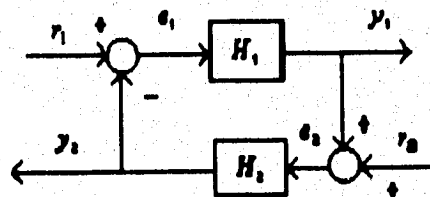


Fig. 14. Sistema realimentado.

Otro teorema relacionado con el anterior y de suma utilidad es el criterio de conicidad, el cual tiene mucho que ver con las no linealidades acotadas por sector.

### Criterio de Conicidad

El criterio de conicidad resulta de aplicar el teorema de pequeñas ganancias al teorema de transformación de lazo [8], [14].

Se considera primeramente al sistema de la figura 15.  $P$  es la planta y  $N$  es el control no lineal que en este caso es el CLD. El criterio del círculo (sección 2.6) es un caso particular del criterio de conicidad [14], [50], [9].

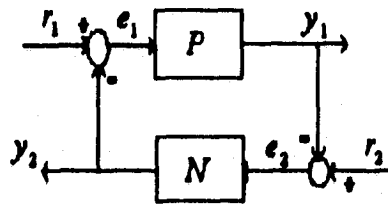


Fig. 15. Sistema realimentado.

Por medio del teorema de transformación de lazo se hace un corrimiento en la conicidad del operador  $N$ , lo cual se ve reflejado en la inserción del operador  $C$  en ambos bloques de la figura 15 como se ilustra en la figura 16:

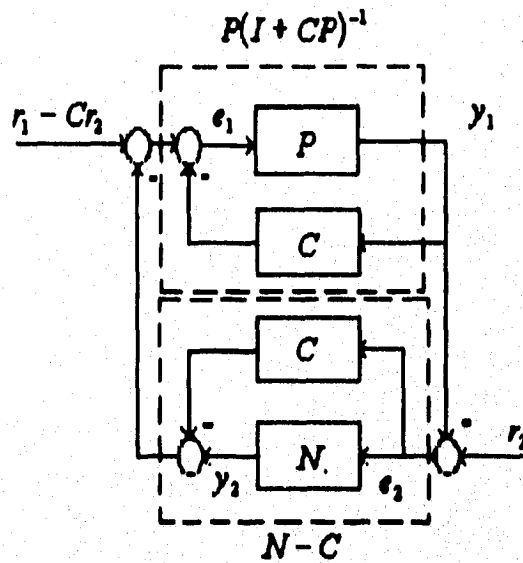


Fig. 16. Transformación de lazo.

Lo cual significa que al aplicar el teorema de pequeñas ganancias se obtiene:

$$\|P(I + CP)^{-1}\|_2 \|N - C\|_2 \leq 1 \quad (2.1)$$

lo cual es una condición para la estabilidad entrada-salida.

Como el operador no lineal  $N$  es interiormente cónico, i.e.:

$$\|Nx - Cx\|_2 \leq \|Rx\|_2 \quad (2.2)$$

en donde  $C$  y  $R$  son el centro y el radio del sector cónico, respectivamente, i.e.,

$sector = \{C-R, C+R\} = \{\alpha, \beta\}$ ,  $R=rI$ ,  $C=cI$ ,  $r=(\beta-\alpha)/2$ ,  $c=(\beta+\alpha)/2$ .  $x$  es un vector cualquiera de dimensiones adecuadas.

Cabe hacer notar que un sector cónico también puede definirse matricialmente, de donde resultan muchas otras aplicaciones [39].

Las desigualdades 2.1 y 2.2 pueden ser respectivamente rescritas como

$$\begin{aligned} \|N - C\|_2 &< r \\ \|P(I + CP)^{-1}\|_2 &\leq 1/r \end{aligned} \quad (2.3)$$

Véase que las desigualdades 2.3 representan el caso de un sector que acota a una no linealidad monovariable, ya que  $C$  y  $r$  no son operadores (en contraste con las desigualdades 2.1 y 2.2).

De la desigualdad 2.1, puede verse que el criterio del círculo es un caso particular del criterio de conicidad [55], [14].

Por otro lado, es fácil ver que combinando las desigualdades 2.1 y 2.2 se obtiene:

$$\|P(I + CP)^{-1}\|_2 \|R\|_2 < 1 \quad (2.4)$$

Esta inecuación nos servirá en seguida. Cabe hacer notar que en este criterio no hay suposiciones restrictivas acerca del CLD.

Ahora, se pueden restablecer las condiciones de estabilidad para algún  $r$  y para algún  $C$  [9], [14]:

- *Conicidad no lineal*

$$\|Nx - Cx\|_2 < r\|x\|_2 \quad (2.5)$$

- *Conicidad lineal, que se divide en:*
- *Estabilidad del lazo cerrado lineal:*

$$P(s)(I + CP(s))^{-1}$$

- *Condición de respuesta en frecuencia (de la ecuación 2.2):*



$$\|P(I + CP)^{-1}\|_2 = \sup_{\omega} \bar{\sigma}\{P(j\omega)(I + CP(j\omega))^{-1}\} \geq 1/r \dots\dots\dots(2.6)$$

$$\Rightarrow r \cdot \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \left\{ \max_{\lambda \in P(j\omega)} \left| \frac{\lambda}{1 + c\lambda} \right| \right\} < 1 \dots\dots\dots(2.7)$$

$$\Rightarrow |\lambda_i(j\omega)^{-1} + c| > r \dots\dots i = 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots(2.8)$$

donde  $\bar{\sigma}$  es el valor singular máximo de la matriz indicada y  $\lambda$  representa valores propios.

Cabe hacer notar que existen diversas formas de llegar al criterio del círculo empleando este camino puesto que para tal efecto pueden definirse diversos tipos de operadores como *compactos, normales, convexos*, etc., y/o una combinación de ellos [57], [33], [39], [44], [27]. En este sentido la mecánica es establecer el tipo de operador deseado con base en un criterio de conicidad general para luego acotar a dichos operadores y deducir de ahí condiciones para estabilidad entrada-salida [14]. Dichos acotamientos se dan por medio de operadores cónicos en general (por ejemplo, incrementales) y/o su equivalencia con *operadores de sector* [50] apoyados con *teoremas de punto fijo* [14], [18].

Ahora, nos enfocamos a la parte de pasividad [8], [14] por medio de la

**Definición 2. 11**

*Pasividad*

Sea  $H: L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ . Decimos que  $H$  es pasivo si y solo si existe una constante  $\beta$  tal que

$$\langle Hx | x \rangle_T \geq \beta, \forall x \in L_{2e}, \forall T \in \mathfrak{R}^+$$

**Definición 2. 12**

*Pasividad Estricta*

Decimos que  $H: L_{2e} \rightarrow L_{2e}$  es estrictamente pasivo si y solo si  $\exists \delta > 0$  y  $\exists \beta$  tal que

$$\langle Hx | x \rangle_T \geq \delta \|x\|_T^2 + \beta, \forall x \in L_{2e}, \forall T \in \mathfrak{R}^+$$

**Teorema 2. 2 [8].**

*Pasividad*

Considérese un sistema retroalimentado como el de la figura 14, con  $r_2=0$  de manera que

$$\begin{aligned}e_1 &= r_1 - H_2 e_2 \\e_2 &= H_1 e_1\end{aligned}$$

donde  $H_1, H_2: L_{2a} \rightarrow L_{2a}$ . Supongamos que para cualquier  $r_1 \in L_2$  existen soluciones  $e_1, e_2$  en  $L_{2a}$ . Bajo estas condiciones, si  $H_1$  es pasivo,  $H_2$  es estrictamente pasivo, y si  $r_1 \in L_2$ , entonces  $H_1 e_1 = y_1 \in L_2$ .

Otra forma útil y más general del teorema anterior es

### Teorema 2.3 [8].

Considérese un sistema retroalimentado como en la figura 14 y descrito por

$$\begin{aligned}e_1 &= r_1 - H_2 e_2 \\e_2 &= r_2 + H_1 e_1\end{aligned}$$

donde  $H_1, H_2: L_{2a} \rightarrow L_{2a}$ . Supóngase que para cualquier  $r_1$  y  $r_2$  en  $L_2$  existen soluciones  $e_1$  y  $e_2$  en  $L_{2a}$ . Supóngase que existen constantes  $\gamma_1, \beta_1, \delta_1, \beta_1', \varepsilon_2$ , y  $\beta_2'$  tales que

$$\begin{aligned}\|H_1 x\|_T &\leq \gamma_1 \|x\|_T + \beta_1 \\ \langle x | H_1 x \rangle_T &\geq \delta_1 \|x\|_T^2 + \beta_1' \\ \langle H_2 x | x \rangle_T &\geq \varepsilon_2 \|H_2 x\|_T^2 + \beta_2'\end{aligned}$$

Bajo estas condiciones si

$$\delta_1 + \varepsilon_2 > 0$$

entonces

$r_1, r_2 \in L_2$  implica que  $e_1, e_2, H_1 e_1, H_2 e_2 \in L_2$

### Corolario 2.1 [8]

Bajo las condiciones del teorema 2.3 se cumple que

- si  $r_1 = 0$ , entonces el mapeo de  $r_2$  a  $H_2 e_2$  es pasivo
- si  $r_2 = 0$ , entonces el mapeo de  $r_1$  a  $H_1 e_1$  es pasivo

### Corolario 2.2 [8]

Si además de las suposiciones del teorema 2.3 tenemos que  $\beta_1 = \beta_1' = \beta_2' = 0$ , entonces los mapeos que envían  $(r_1, r_2)$  a  $e_1, e_2, y_1 = H_1 e_1, y_2 = H_2 e_2$  son  $L_2$  estables.

## 2.6 Preliminares del Criterio del Circulo [38], [21], [42].

### 2.6.1 Problema de Estabilidad Absoluta

Muchos sistemas no lineales pueden representarse como la conexión de un elemento lineal y un elemento no lineal como se muestra en la figura 17. Supongamos que la referencia del sistema es  $r=0$  y estudiamos su comportamiento. Supóngase también que las ecuaciones 2.9 y 2.10 son una realización de  $G(s)$  y son tales que el par  $(A,B)$  es controlable y el par  $(A,C)$  es observable. Se tiene entonces que:

$$\dot{x} = Ax + Bw \dots \dots \dots (2.9)$$

$$y = Cx \dots \dots \dots (2.10)$$

$$w = N(e) \dots \dots \dots (2.11)$$

donde  $x \in \mathfrak{R}^n, e, y \in \mathfrak{R}$  ;  $N: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}, N(0)=0$  es un operador no lineal, sin memoria, invariante en tiempo (en general puede no serlo), y Lipschitz continuo en  $y$ .

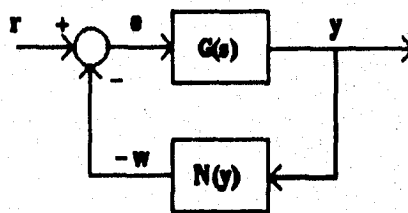


Fig. 17. Sistema formado por una planta lineal y una no linealidad sectorial.

La función de transferencia es  $G(s)$  y es estrictamente propia.<sup>9</sup> De la teoría de sistemas lineales sabemos que para cualquier  $G(s)$  estrictamente propia, existe una realización mínima siempre [21].

#### Definición [8].

Sea  $N: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  con  $N(0)=0$ . Decimos que  $N$  pertenece al sector  $(\alpha, \beta)$  ssi  $\alpha y \leq N(y) \leq \beta y, \forall y \in \mathfrak{R}$ . Similarmente, decimos que  $N \in (\alpha, \beta)$  ssi  $\alpha y \leq N(y) < \beta y, \forall y \in \mathfrak{R}$ . Existen varias maneras de expresar condiciones de sector. Aquí, se establecen por medio del

#### Teorema de Equivalencia [8].

<sup>9</sup> Es estrictamente propia porque supusimos que  $y=Cx$ . De lo contrario tendríamos  $y=Cx+Dw$

Sea  $N: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  con  $N(0)=0$  y  $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}, \alpha \leq \beta$ . Bajo estas condiciones se cumple lo siguiente:

$$\alpha \leq N(y)/y \leq \beta \dots\dots\dots y \neq 0 \dots\dots\dots (2.12)$$

$$\alpha \cdot y^2 \leq yN(y) \leq \beta \cdot y^2 \dots\dots\dots (2.13)$$

$$[N(y) - \alpha \cdot y][N(y) - \beta \cdot y] \leq 0 \dots\dots\dots (2.14)$$

$$|N(y) - cy|^2 \leq r^2 |y|^2 \dots\dots\dots (2.15)$$

donde

$$c = \frac{1}{2}(\beta + \alpha) \dots\dots\dots r = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \dots\dots\dots \alpha\beta = c^2 - r^2$$

Nótese que si las ecuaciones (2.12)- (2.14) se cumplen para  $y \in (-\infty, \infty)$  tenemos que la condición de sector se cumple globalmente. Si el intervalo es finito, entonces el resultado es local.

Como puede verse, las desigualdades del teorema anterior - caso monovariante - sólo dependen de productos escalares. En el caso multivariante se trabaja en espacios de Hilbert,  $H$ . Casi siempre  $H = \mathfrak{R}^n$ .

**Condiciones Equivalentes [8].**

Sea  $H$  un espacio de Hilbert con producto escalar real  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  y norma  $\|\cdot\|$ . Sea  $N: H \rightarrow H$  y sea  $N(0)=0$  donde  $0$  es el vector nulo en  $H$ . Sean  $\alpha, \beta$  dos constantes reales con  $\beta \geq \alpha$ . Bajo estas condiciones, las condiciones siguientes son equivalentes:

1.  $\langle N(y) - \alpha y | N(y) - \beta y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in H$
2.  $\|N(y) - cy\|^2 \leq r^2 \|y\|^2 \quad \forall y \in H$

donde

$$c = \frac{1}{2}(\beta + \alpha) \dots\dots\dots r = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \dots\dots\dots \alpha\beta = c^2 - r^2$$

**Teorema del Círculo [42], [47].**

Considérese un sistema escalar como el de la figura 1.1 y descrito por las ecuaciones (2.9)- (2.11), donde  $\{A, B, C\}$  es una realización mínima de  $G(s)$  y  $N(\cdot)$  satisface las

condiciones de sector del Teorema de Equivalencia globalmente. Entonces, el sistema es absolutamente estable si se cumple si el siguiente

**Criterio Gráfico para Estabilidad  $L_2$  (Criterio del Círculo):**

**Suposiciones:**

Si el sistema bajo estudio satisface las ecuaciones (2.9)- (2.11) y además

- i) La matriz  $A$  no tiene valores propios sobre el eje imaginario y posee "n" valores propios estrictamente del lado derecho del plano complejo.
- ii) La no linealidad  $N$  pertenece al sector  $(\alpha, \beta)$

Y se cumple uno de los siguientes casos:

- a) Si  $0 < \alpha < \beta$  la gráfica de Nyquist de  $G(j\omega)$  no rodea o interseca al disco  $D[-\alpha^{-1}, -\beta^{-1}]$  -de radio  $\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$  y centro  $\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)$ - y rodea a éste "n" veces en sentido horario.
- b) Si  $0 = \alpha < \beta$  la gráfica de Nyquist de  $G(j\omega)$  está a la derecha de la abscisa  $-\beta^{-1}$ , esto es

$$\text{Re}\{G(j\omega)\} > -\beta^{-1}$$

- c) Si  $\alpha < 0 < \beta$ , la gráfica de  $G(j\omega)$ , permanece dentro del círculo  $D[-\alpha^{-1}, -\beta^{-1}]$ .
- d) Si  $\alpha < \beta < 0$ , la gráfica de Nyquist de  $-G(j\omega)$ , no rodea ni interseca al disco  $D[-\beta^{-1}, -\alpha^{-1}]$  y rodea a éste "n" veces en sentido horario.

entonces, si  $w \in L_2 \Rightarrow y \in L_2$ .

En el caso de estabilidad asintótica, diríamos equivalentemente que el origen es *global y asintóticamente estable*.

**2.7 El CLD como una no linealidad estática, invariante con el tiempo [9], [3], [4].**

En principio, operaciones con respecto al tiempo como derivación, integración, etc., no se llevan a cabo en un CLD. Esto significa que la base de reglas *no tiene dinámica*. Esto hace que esta clase de controladores sea *estático*. Aunado a esto, la característica de transferencia de un CLD es *no lineal* por las propiedades no lineales de algunas partes de la estructura del CLD. Por tanto, se dice que un CLD puede ser representado por una no linealidad estática, invariante con el tiempo.

Veamos ahora, de manera muy breve, cómo es que se origina la no linealidad del CLD.

En la estructura definida anteriormente para un CLD, teníamos como primera parte al escalamiento y a la normalización. Claramente, se trata de elementos lineales dentro de la mencionada estructura.

A continuación se fuzifica la señal de entrada al controlador. Para ello, se calcula su grado de pertenencia para cierto conjunto del universo de entrada. La mayor parte de las veces, la función de pertenencia asociada a tales conjuntos es no lineal. (puede tratarse de una campana de Gauss, de una función triangular, etc. Véase la figura 6).

De acuerdo con el (los) valor (es) de la (s) entrada (s) se infiere la salida de control correspondiente. Es claro también que este proceso es no lineal por involucrar operaciones como máximos, mínimos, negaciones etc. sobre las funciones de pertenencia asociadas al proceso.

Finalmente, se defuzifica la salida. Como ya se ha mencionado anteriormente, el método del centroide de áreas es el más usado. Obviamente que no se trata de una operación lineal. Lo mismo se aplica a los otros métodos, que en general son no lineales [9].

Se puede concluir de lo anterior que las fuentes de no linealidades se producen en la parte de fuzificación (por las funciones de pertenencia), en la lógica de decisiones (por los mecanismos de inferencia) y en la defuzificación (por las características propias de cada método [3], [4]).

Como ejemplo, considérese un CLD monovariante en donde la salida de control  $u$  se infiere a partir de un vector de decisión como el de la figura 20 según los valores de la variable de entrada  $q$  al controlador (*supóngase por ahora que el CLD no posee la característica de deslizamiento*). Esta situación se ilustra mediante la figura siguiente:

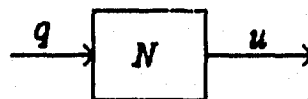


Fig. 18. CLD monovariante,  $u=N(q)$ .

Si graficamos salida vs. entrada del CLD ( $u$  vs.  $q$ ) podemos obtener una curva como la que se muestra en la figura 19 (donde la salida es proporcional a la entrada).

Aquí como antes,  $k_c$  y  $k_e$  son las constantes de defuzificación y de fuzificación, respectivamente. Puede verse en este caso que la gráfica mostrada es cuasilineal. Este efecto es ocasionado por los puntos de intersección de las funciones de pertenencia triangulares - en estos ejemplos - las cuales al graficarse salida vs. entrada del CLD dan el efecto de cuasi linealidad. Esto puede disminuirse con filtros pasabajas en la señal de

salida o suavizando las funciones de pertenencia. También una partición mayor del espacio de entradas y de salidas ayudaría [9], [3], [4].

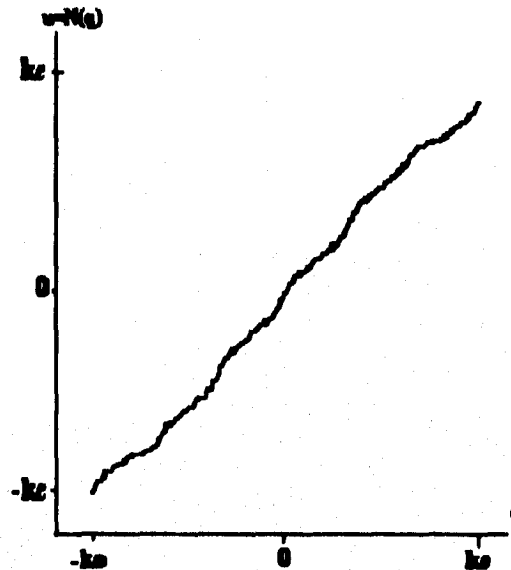


Fig. 19. Característica entrada - salida del CLD de la figura 18.

El hecho de que tan no lineal sea proviene de la partición del vector elegido y de los valores difusos de tales niveles de decisión. Como segundo ejemplo, considérese ahora al siguiente vector de decisión, el cual da un control deslizante difuso  $u$  :

$q$	$u$
PG	PG
PM	PM
PP	PM
CE	CE
NP	NP
NM	NG
NG	NM

Fig. 20. Vector de decisión del segundo ejemplo.

Obteniendo de nuevo la característica entrada - salida del citado vector obtendremos una curva como la que se muestra en la figura 21. En ella se muestra también al sector cónico que le acota localmente.

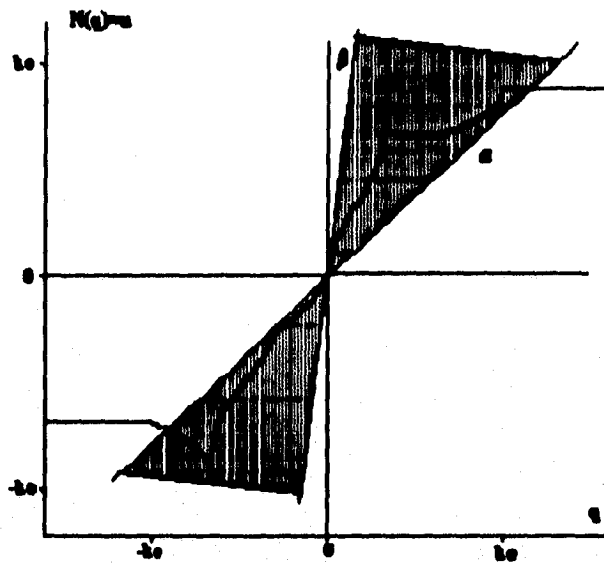


Fig. 21. No linealidad acotada por sector correspondiente al vector de la figura 20.

Dejando de lado la morfología de ambas curvas, la diferencia que más resalta entre ellas es que la primera inicia en un punto y termina en otro punto (fig. 19). Esto se debe a que cuando se normaliza la entrada al CLD, por más que ésta aumente, sólo podrá alcanzar como máximo el valor de la normalización de entrada. Correspondientemente, la salida generada, tampoco aumentará más allá del valor asignado por la normalización de salida. Por lo tanto, al obtenerse el máximo valor permitido de la entrada, éste ya no cambia, y de igual manera ocurre con la salida.

Contrariamente, la figura 21, corresponde a un CLDD. De ahí a que tienda a parecerse a la función saturación mencionada en la sección de modos deslizantes. Véase que el acotamiento de la no linealidad es sólo local. De ahí que la estabilidad correspondiente sea solamente local.

### 2. 8 Ejemplo de diseño de un CLD.

Sea el sistema mostrado en la figura siguiente:

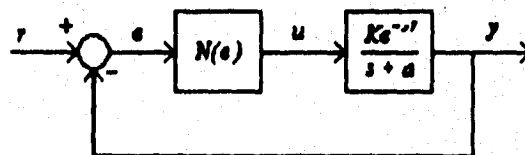


Fig.22. Sistema para ejemplificar el diseño de un CLD.

donde  $\alpha=8$ ,  $K=8$ ,  $T=0.1$  segundos y  $u=N(e)$  es la señal de control del CLD (no deslizante)..



**a) Selección de variables**

Primeramente se elige como variable de entrada al error porque por medio de esta variable es como se expresa la regla de control lingüística.

**b) Normalización.**

Las constantes de normalización son análogas a las ganancias de los PID. Como podrá verse en este caso se dispondrá de un CLD de tipo proporcional (CLDP), en donde las ganancias (constantes de normalización) se fueron ajustando durante el proceso.

**c) Discretización.**

Esta etapa la hace directamente el paquete de simulación *SIMNON*, ya que el control difuso se hace en un archivo de tipo discreto (*DISCRETE SYSTEM*).

**d) Partición de los universos.**

En este punto son muy importantes la capacidad de cálculo con que se cuente y la precisión deseada en el control. Es de hacer notar que no existen métodos para la obtención del valor óptimo del número de elementos del conjunto de términos. Con base en lo anterior, se optó por una partición medianamente densa<sup>10</sup>, es decir; que la variable error tomará los valores de: *PG*=positivo grande, *PM*=positivo mediano, *PP*=positivo pequeño, *CE*=cero, *NP*=negativo pequeño, *NM*=negativo mediano, *NG*=negativo grande. Se trata entonces de siete niveles de decisión.

**e) Fuzificador.**

Este operador relaciona los datos medidos con sus correspondientes subconjuntos difusos. La selección de las funciones de pertenencia está relacionada con la incertidumbre en las mediciones, es decir, se toma en cuenta la confianza en la exactitud de las mismas, así como la presencia de ruido en el sistema. De este modo, la forma de las funciones de pertenencia obtenidas refleja el nivel de confianza respecto a tales mediciones. Si por ejemplo, se eligen funciones de pertenencia trapezoidales (suponiendo que la base mayor no es muy ancha con respecto a la base menor), quiere decir que se tiene gran confianza en los valores que representan los subconjuntos difusos. Si se eligiesen funciones como una campana de Gauss o como un triángulo, significaría que el nivel de confianza es menor que en el caso anterior.

Según se acaba de mencionar y por facilidad de cálculo se están usando funciones de pertenencia triangulares para la variable de entrada al controlador ( $e$ =señal de error) y trapecios para obtener la salida del controlador, esto es; se está usando la

<sup>10</sup> Este término es muy usado en la literatura [9], [3], [4], [53], etc. Se dice que la partición es "medianamente" densa porque se le compara con una partición de tipo "pequeño", "mediano", "grande" que en contraste sería "pequeña".

regla de Mamdani<sup>11</sup> [3], [4], [9], [23]. Véase la siguiente figura -donde  $\mu(e)$ =función de pertenencia del error-

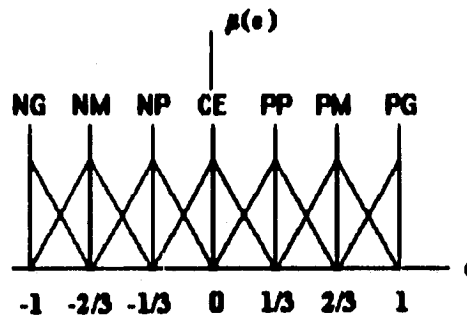


Fig. 23. Funciones de pertenencia para el universo de entrada.

f) Reglas de control.

Se deducen de los conocimientos en ingeniería de control y de la experiencia previa<sup>12</sup>. En este caso tendremos reglas de tipo

*Si e es (variable lingüística) entonces u es (variable lingüística)*

lo cual implica que se trata de un control difuso de tipo proporcional. Esto se nota de inmediato porque ante un cierto valor de la señal de error, la corrección será proporcional a dicho valor del error. Por esta razón, existirá un error en estado estable en las respuestas del sistema. Por supuesto, adviértase también la sencillez del controlador. Las reglas fueron obtenidas a partir del comportamiento de la respuesta a escalón.

Dado que la cardinalidad del conjunto de términos de la única variable de entrada (el error) es de siete, tendremos que el máximo número de reglas posible es de siete. Si hubiese más variables de entrada, el número máximo de reglas está dado por el producto de las cardinalidades de cada variable. Por ejemplo, si hubiese dos variables de entrada y la primera tuviese una cardinalidad de tres (tres elementos en el conjunto de términos) y la segunda tuviese seis, entonces el número máximo de reglas posible sería de  $3(6)=18$ <sup>13</sup>. En el presente ejemplo, estas reglas pueden acomodarse en un *vector de decisión* (que en general sería una *matriz de decisión*).

Dicho vector puede verse en la siguiente figura:

<sup>11</sup> Se usó esta regla por ser la más popular.

<sup>12</sup> Si bien esto es cierto y no hay una metodología precisa para establecer las reglas de control más adecuadas en [3] se da un buen método para obtener una primera aproximación al conjunto de reglas más adecuado.

<sup>13</sup> Se toma como un resultado general en [3].

Entrada al control (e)	Salida del control (u)
PG	PG
PM	PM
PP	PG
CE	CE
NP	NG
NM	NM
NG	NG

Fig. 24. Vector de decisión para el ejemplo de la figura 22.

**g) Lógica de decisiones**

Se utilizó la regla de Mamdani [3], [4], [9], [23] para implantar la lógica de decisiones. Esta regla es un caso particular de la definición 2. 9. Para ilustrar dicha regla se da el siguiente ejemplo. Supóngase que se tiene un error de 0.4 (valor normalizado) en cierto momento. Un error de 0.4 corresponde a los subconjuntos *PP* y *PM*. El grado de pertenencia del error a tales subconjuntos aparece también en dicha figura. Las reglas aplicables a este caso se obtienen del vector de decisión de la figura 24.

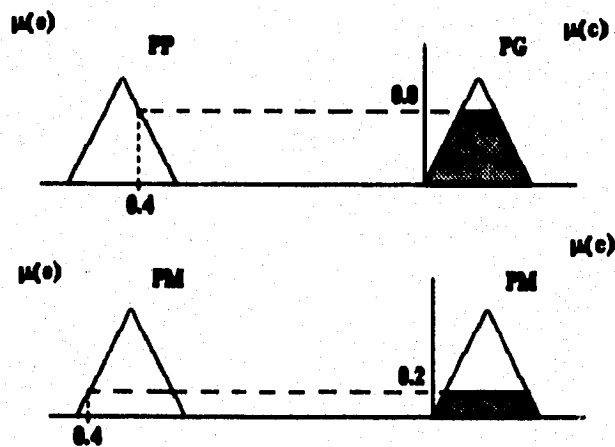


Fig. 25. Ejemplo del proceso de inferencia

La correspondiente acción de control se calcula por medio de la regla composicional de inferencia (definición 2. 10), la cual está en términos de una relación difusa; la que a su vez involucra una norma triangular, que al ser interpretada como el operador *mínimo*, indica que se está empleando la regla de Mamdani. Dependiendo de que norma triangular se trate, será el tipo de regla que se interprete. Por ejemplo, si se usara el *producto*, se tendría la regla de Larsen, etc. [3], [4], [23].

### h) Defuzificación

Se utilizó el método del centro de áreas. De manera general el centroide de gravedad se calcula con

$$cgn = \frac{\sum_{i=1}^n (\mu_i(u_i) \cdot u_i)}{\sum_{j=1}^n \mu_i(u_j)}$$

donde  $n$  es el número de niveles de cuantización del universo de salida y  $\mu_i$  es la función de pertenencia de la salida de control. Por usarse sumatorias de unión se trata de universos de discurso discretos. Lo anterior se ilustra en la siguiente figura:

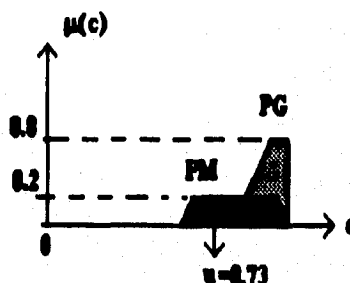


Fig. 26. Proceso de defuzificación.

Después de obtener la salida de control (que en este ejemplo resultó de 0.73) se multiplica por una ganancia (para desnormalizar) llamada *constante de defuzificación* (en contraste la ganancia que sirve para normalizar se llama *constante de fuzificación*). Este valor es el que se aplica al sistema bajo control.

### Resultados de la simulación

Como se sabe, un control difuso puede ser visto como una no linealidad estática, invariante en tiempo, acotada por sector [9], [50]. Como la planta es lineal puede aplicarse el criterio del círculo sin dificultades.

La no linealidad correspondiente al vector de decisión anterior se muestra en la figura siguiente. Las pendientes del sector cónico se designan con  $\alpha$  y  $\beta$ , y valen  $\alpha=46^\circ=0.8029$  radianes, y  $\beta=74^\circ=1.2915$  radianes, respectivamente. El centro  $c$  y el radio  $r$  del sector cónico están dados por

$$c = (\beta + \alpha)/2 \quad \text{y} \quad r = (\beta - \alpha)/2$$

En este caso  $c=1.0472$  radianes= $60^\circ$  y  $r=0.2443$  radianes= $14^\circ$ .

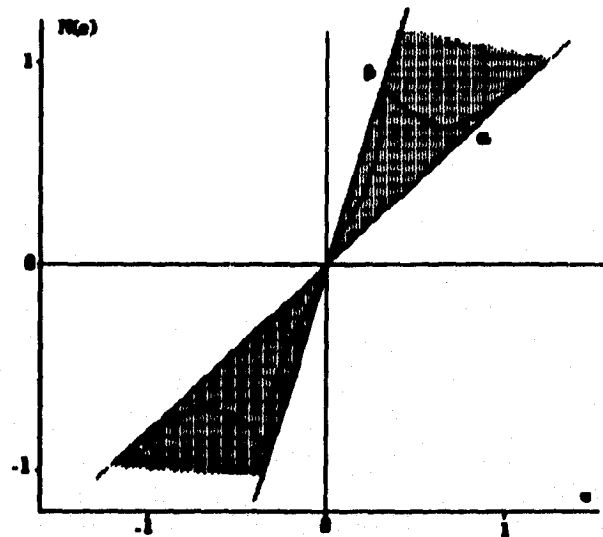


Fig. 27. Sector cónico correspondiente al vector de decisión de la figura 24.

Con lo anterior podemos aplicar el criterio del círculo. Se eligieron valores que muestren un caso estable. Dicha situación puede verse en la figura siguiente:

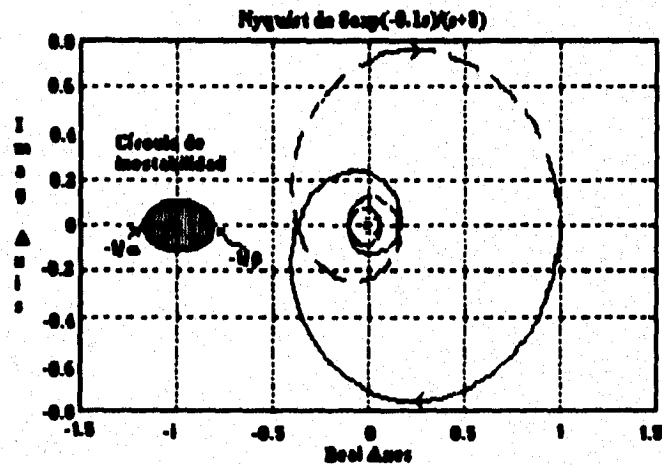


Fig. 28. Círculo crítico para la planta en la región estable.

El círculo crítico está centrado en  $\varepsilon = -1$  y tiene un radio de  $\rho = 0.236$  y corta al eje real en  $-1/a = -1.24$ , y en  $-1/b = -0.77$ . Como no se invade al círculo crítico la respuesta será estable.

En el caso de regulación tendremos la respuesta mostrada en la figura 29. El error estacionario es del 0.4%.

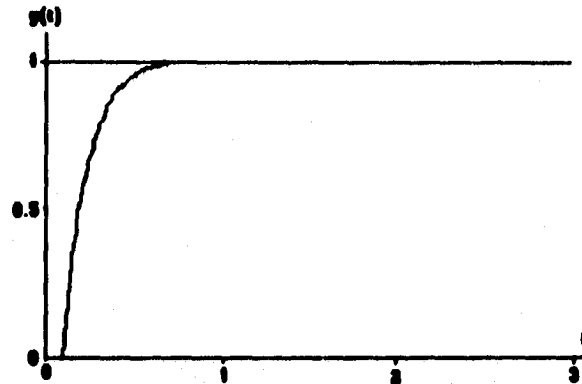


Fig. 29. Regulación de la planta ejemplo de la figura 22.

Para el caso de seguimiento a una senoide tenemos que la respuesta es la mostrada en la figura 30. Para este caso la frecuencia de la señal de referencia es de 0.1 Hz, la amplitud es unitaria y la respuesta no alcanza el seguimiento en amplitud. Esto, como en el caso anterior es porque disponemos de un control P difuso que implica la existencia de un error en estado estable (en amplitud es del 50%) como puede verse.

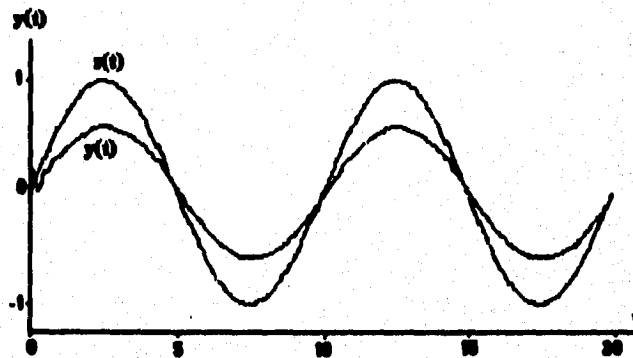


Fig. 30. Seguimiento de la planta ejemplo.

## 2.9 Conclusiones

En este capítulo se dieron las bases teóricas en las que se sustenta el presente trabajo. Tales fueron de lógica difusa; del diseño de un CLD monovariante apoyado con diversas simulaciones; del enfoque entrada-salida; y de modo deslizante difuso. Lo anterior servirá para uniformizar el conocimiento previo que servirá en el resto del trabajo.

## Capítulo Tres

# Control Difuso de Sistemas de Segundo Orden Vectorial

### 3.1 Introducción

El capítulo presente comienza con la descripción del problema a resolver. En seguida se hace una breve descripción de la clase de plantas bajo estudio. De esta clase de sistemas se consideran los casos lineal y no lineal, así como las suposiciones adecuadas para cada uno de ellos. Para ejemplificar lo anteriormente expuesto se muestran dos plantas, una para cada caso. A continuación se plantea la solución propuesta para el caso lineal (por medio de un teorema) y se apoya lo anterior con una simulación. Igualmente se procede para el caso no lineal. Las simulaciones están basadas en las plantas ejemplo citadas anteriormente. Para terminar, se dan las conclusiones del capítulo.

### 3.2 Formulación del problema

El criterio de estabilidad  $L_2$  es válido cuando tenemos el mismo número de entradas que de salidas (sistemas SISO o MIMO) en un sistema de control realimentado. Sin embargo, es común que los SCD monovariantes manejen controladores difusos MISO con plantas SISO. *En este caso, no existía solución (antes del presente trabajo) para el problema de estabilidad  $L_2$ .* La solución propuesta se basa en convertir al CLD MISO en uno SISO o MIMO, dependiendo de la planta a regular.

Para explicar el problema a resolver, considérese el sistema de la figura 31. Como puede verse, se trata de un sistema SISO, donde  $P$  es un operador (que puede ser lineal o no lineal), invariante en tiempo, que representa a la planta;  $N$  es un operador no lineal, sin memoria, interiormente cónico, MISO, que representa al CLD; cuyas entradas son el error  $\tilde{q}$  y la derivada del error  $\dot{\tilde{q}}$ ;  $r$  es la entrada de referencia,  $u$  es la señal de control y  $y$  es la salida del sistema.

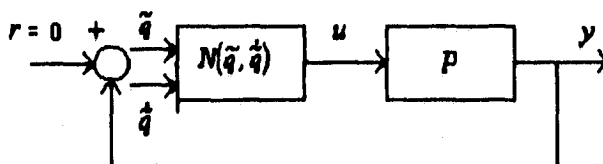


Fig. 31. Problema a resolver

El problema a resolver es:

Dado el sistema de la figura 31, hallar condiciones para su estabilidad  $L_2$ .

Nótese la dificultad obvia de querer estudiar la estabilidad  $L_2$  en un sistema cuyo controlador no tiene el mismo número de entradas que de salidas<sup>1</sup>.

Se propone como solución reducir el número de entradas del CLD de dos a una por medio del control deslizante, convirtiendo así al CLD MISO original (fig. 31) en uno SISO o MIMO - dependiendo de la planta - y en consecuencia a todo el sistema también<sup>2</sup>. El control deslizante se eligió por sus conocidas ventajas [42]. Esto es, se está manejando ahora una sola variable como salida de control, el deslizamiento  $v$ :

$$v = \ddot{q} + \lambda \dot{q}$$

donde  $v, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \lambda$ , representan deslizamiento, error, derivada del error y la pendiente del plano deslizante, respectivamente.

Como puede verse, ahora disponemos de un sistema cuyo controlador antes MISO ha sido transformado en uno SISO a través del control de estructura variable.

### 3.3 Clase de plantas a considerar

El operador  $P$  representa a una clase de plantas muy particular. La clase de plantas estudiadas en este trabajo son las que tienen la forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K(q)q = u \quad (3.1)$$

<sup>1</sup> No se puede definir el producto interno entre los vectores de entrada y de salida.

<sup>2</sup> Si la planta es SISO entonces el CLD resultante es SISO también y por tanto, todo el sistema. Si la planta es MIMO, entonces igualmente será el CLD y en consecuencia todo el sistema. En resumen, se igualan las dimensiones del vector de entradas con el vector de salidas por medio del control deslizante.



donde  $u, q \in \mathfrak{R}^n$ ,  $M(q), C(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $K(q) \in \mathfrak{R}^n$ . A la ecuación no lineal 3.1 se le puede considerar como un sistema de *segundo orden vectorial* [41]. Nótese que el número de variables  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  requeridas para escribir la ecuación diferencial es  $n$ , mientras que el número de elementos para resolver tal ecuación es de  $2n$  porque se requiere que se especifiquen  $q(0), \dot{q}(0)$ , es decir; el orden del sistema representado por la ecuación 3.1 es  $2n$ . El orden del sistema indica el número de condiciones iniciales necesarias para resolver las ecuaciones diferenciales 3.1. Las variables  $q_i$  en 3.1 se llaman variables de configuración. Si al sistema 3.1 se le da la forma  $\dot{x} = Ax + Bu$  entonces las  $2n$  variables  $x^T = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \dots, q_n, \dot{q}_n)$  se llaman variables de estado.

Esta clase de plantas incluye a los sistemas que pueden modelarse por medio de las ecuaciones Euler - Lagrange cuya energía cinética es  $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$  y su energía potencial es  $(q)$ . Los términos de la gravedad están dados en  $K(q) = \frac{\partial}{\partial q} V(q)$ . La metodología de Euler - Lagrange permite visualizar con facilidad los espacios de las entradas de control y de los estados del sistema. Las dimensiones de estos espacios permiten clasificar a los sistemas Euler - Lagrange como *subactuados* si la dimensión del espacio de entradas es menor a la dimensión del espacio de estados, y como *totalmente actuados* si las dimensiones de ambos espacios son iguales. Como puede verse (de 3.1) en este trabajo se trata con sistemas totalmente actuados.

¿Por qué tratar con modelos con estructura física y no con modelos generales? Pues porque la clase  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  es demasiado general para el interés práctico y porque al cancelar no linealidades los diseños basados en tal modelo serán poco robustos.

Existen muchos ejemplos de sistemas que cumplen con la ecuación 3.1 [49]. El robot manipulador rígido es uno de ellos. También para el caso de máquinas eléctricas rotatorias tenemos como ejemplo a los motores síncronos, a los de pasos y a los de inductancia variable. De hecho, se puede obtener una gran cantidad de modelos de cualquier sistema (mecánico, hidráulico, térmico, etc.) si el lagrangiano es suave, de lo contrario; no es posible hallar un modelo adecuado o el modelo hallado sería una burda aproximación a la realidad (por ejemplo el motor de CD que utiliza conmutadores es un caso típico).

### 3.3.1 Caso no lineal: $M$ y $C$ son funciones de $q, \dot{q}$ , i.e., $M = M(q), C = C(q, \dot{q})$

Como se acaba de mencionar en la sección anterior, la ecuación 3.1 representa a toda una clase de sistemas (los susceptibles de modelarse con el método lagrangiano) los cuales pueden ser mecánicos, eléctricos, térmicos, etc. Los ejemplos de simulación usados en este trabajo son del tipo mecánico y por tanto todo lo referente a suposiciones

consideraciones y significado del modelo 3.1 serán con base en sistemas mecánicos (de hecho en esta sección se utiliza un robot rígido de dos grados de libertad, y por tanto, en lo que resta de la presente sección, el modelo 3.1 será interpretado como un robot rígido).

Para la descripción de sistemas en general modelados por la ecuación 3.1, véase [49].

Según lo anterior, tendremos que  $q$  es el vector de coordenadas generalizadas; que en este caso son las posiciones angulares,  $u$  es el vector de pares de control,  $M(q)$  es la matriz de inercias,  $C(q, \dot{q})$  es la matriz que contiene términos de Coriolis y de fuerza centrífuga, y  $K(q)$  contiene a los pares producidos por la gravedad.

Con respecto a la ecuación 3.1 se hacen las siguientes

*Suposiciones* [43]:

1.  $\underline{m}I \leq M(q) = M^T(q) \leq \bar{m}I$

Esto es, la matriz de inercias es simétrica, positiva definida y ambas matrices  $M(q), M(q)^{-1}$  son uniformemente acotadas como funciones de  $q$ . Si se trata de un robot con uniones rotacionales (como se supondrá en este caso), las cotas  $\underline{m}, \bar{m}$  son constantes.

La ecuación anterior puede escribirse también como

$$\underline{m} \leq \|M(q)\| \leq \bar{m}$$

donde cualquier norma inducida puede usarse para definir a los escalares  $\underline{m}, \bar{m}$

2. Existe una entrada de control independiente para cada grado de libertad.
3.  $\dot{q}^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} = 0, \forall q \in \mathcal{R}$

Lo anterior significa simplemente que las fuerzas ficticias definidas por el término  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  no ejercen trabajo sobre el sistema 3.1. Si se define a la matriz  $C(q, \dot{q})$  por medio de los símbolos de Christoffel y de acuerdo a 3.1, entonces la matriz  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es antisimétrica.

4.  $C(q, \dot{q})$  contiene funciones continuas en sus argumentos.
5.  $\|C(q, \dot{q})\| \leq c\|\dot{q}\|, c \geq 0, \forall q, \dot{q}$
6.  $\|K(q)\| \leq \gamma, \gamma \in \mathfrak{R}_+$

### 3.3.2 Caso lineal: $M$ y $C$ son matrices constantes.

Ahora estamos considerando que el modelo 3.1 es una ecuación lineal, por tanto se le puede dar la estructura de un sistema en variables de estado de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.2)$$

El modelo anterior es más común en la teoría de control que la ecuación 3.1 aun considerándola lineal. Además, de esta forma, nos permitirá enunciar las siguientes

*Suposiciones* [42], [47]:

1. La matriz  $A$  es Hurwitz.
2. El par  $(A, B)$  es controlable y el par  $(C, A)$  es observable.

Lo anterior significa que:

1. El sistema 3.2 es estrictamente estable<sup>3</sup>.
2. Existe una descripción entrada - salida (función de transferencia) equivalente al modelo 3.2.

Esto es, podemos usar métodos de respuesta en frecuencia.

**Ejemplos.**

*a) Sistema de segundo orden vectorial no lineal: robot rígido de dos grados de libertad.*

Sea el sistema de la figura 32. Para  $i=1,2$   $m_i$  son las masas de cada eslabón,  $l_i$  son las distancias del origen del plano de referencia al centroide del eslabón  $i$ ,  $l_i$  son las longitudes de los eslabones,  $g$  es la constante de aceleración terrestre, y  $q_i$  son las posiciones angulares de cada eslabón con respecto a los ejes de referencia. En este caso los vectores  $q$ ,  $\bar{q}$ , y  $\dot{\bar{q}}$  están dados por  $q = [q_1, q_2]^T$ ,  $\bar{q} = [\bar{q}_1, \bar{q}_2]^T$ ,  $\dot{\bar{q}} = [\dot{\bar{q}}_1, \dot{\bar{q}}_2]^T$ .  $\bar{q}$  representa al error de posición y  $\dot{\bar{q}}$  representa al error de velocidad.

<sup>3</sup> El caso en el que la matriz  $A$  tenga valores propios del lado derecho del plano complejo está contemplado en el teorema que da solución al caso lineal (teorema 3.1).

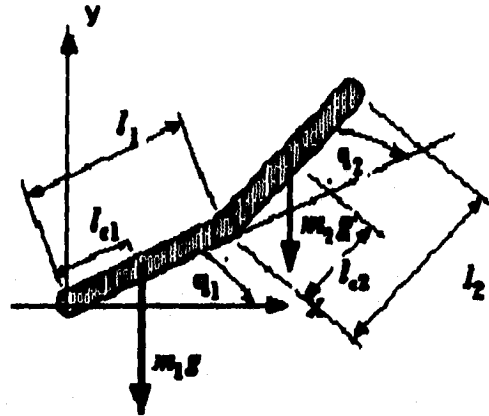


Fig. 32. Robot rígido de d.g.l.

b) Sistema de segundo orden vectorial lineal: sistema masa-resorte-amortiguador.

Considérese el sistema de la figura 33, donde  $m$ =masa,  $b$ =constante de amortiguamiento,  $k$ =constante de elasticidad del resorte,  $q$ =desplazamiento lineal (en el plano de la página),  $F$ =fuerza de excitación.

Dicho sistema es de la forma 3.1, puesto que su ecuación dinámica es

$$m \ddot{q} + b \dot{q} + kq = u$$

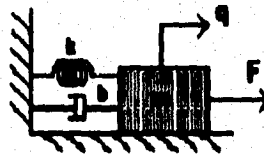


Fig. 33. Sistema masa-resorte-amortiguador

### 3.4 Solución del problema para el caso general<sup>4</sup>.

En la sección 3.2 se hizo la formulación del problema a resolver en este trabajo y se dio una idea simple acerca de la manera de solucionarlo. Ésta sección es una continuación - formal - del planteamiento dado en aquella sección.

Considerando a la familia de plantas descrita por la ecuación 3.1, tendremos que el diagrama de bloques de la figura 31 tiene como equivalente al sistema mostrado en la figura 34.

<sup>4</sup> Válido para el caso lineal y para el no lineal.

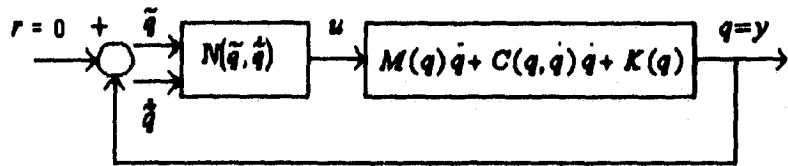


Fig. 34. SCD con la familia de plantas considerada.

en donde  $N$  - como ya se ha dicho -es el operador que representa al CLD.

Con todo lo anterior en mente, se puede ahora enunciar - de manera formal - el

### Problema de control

Para el sistema mostrado en la figura 34, diseñar un control  $w$  que considere a dicho sistema con el mismo número de entradas que de salidas y sea tal que el error de seguimiento tienda a cero a medida que el tiempo tiende a infinito, i.e.,

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= q - q_d \rightarrow 0 \\ (\tilde{q}_i &= q_i - q_{d,i} \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

### Control

Se trata de un control en modo deslizante:

$$v = \dot{\tilde{q}} + \lambda \tilde{q} = (p + \lambda) \tilde{q}, p = d/dt, \lambda > 0$$

Haciendo un cambio de variable, se tiene que

$$a = \dot{q}_d - \lambda \tilde{q} \therefore v = \dot{q} - a$$

De  $v$ ,  $a$ , y de la ecuación (3. 1) se propone:

$$u = M \dot{a} + Ca + K(q) - K_v v + w \quad (3. 2)$$

donde  $w = -N(v)$  es el control difuso a determinar: Igualando (3. 1) y (3. 2) obtenemos:

$$w = M \dot{v} + Cv + K_v v \quad (3. 3)$$

de donde consideramos a  $K_v$  diagonal y positiva definida, i.e.,  $K_v = k_v I, k_v > 0$ .

Lo que significa la ec. 3.3 es que se ha transformado el diagrama de bloques de la figura 34 - por medio del control deslizante - en el diagrama de bloques de la figura 35, obteniéndose así un sistema con el mismo número de entradas que de salidas.

*Suposiciones acerca del operador  $N$  que representa al controlador:*

El operador  $N$  satisface el teorema de equivalencia de la sección 2.5 del capítulo dos, por tanto se sigue cumpliendo - ahora en términos del deslizamiento  $v$  - que

1. El operador  $N$  es no lineal, invariante en tiempo y estático.
2. El operador  $N$  es interiormente cónico.

$$\alpha (v^T v) \leq v^T N(v) \leq \beta \cdot (v^T v)$$

Si lo anterior se cumple para  $v \in (-\alpha, \alpha)$  se trata de una no linealidad acotada globalmente por el sector  $\{\alpha, \beta\}$ ; si  $v \in (a, b)$  con  $|a|, |b| < \alpha$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  se trata de una no linealidad acotada localmente. El operador  $N$  está definido como

$$N = \begin{bmatrix} n_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & n_n \end{bmatrix} \cdot y, \quad N(v) = \begin{bmatrix} n_1(v_1) \\ \vdots \\ n_n(v_n) \end{bmatrix}$$

donde  $n_i(v_i)$  representa a los "n" vectores de decisión difusos ( $i=1, \dots, n$ ,  $n = \text{número de coordenadas generalizadas del sistema}$ ), uno por cada par de señales de error y sus respectivas derivadas.

### 3.5 Solución del problema para el caso lineal.

El diagrama de bloques correspondiente a la ecuación (3.3) se ilustra en la figura 35.

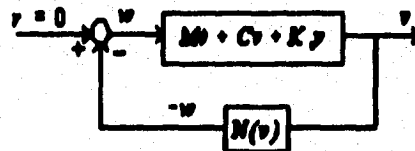


Fig. 35. Diagrama de bloques de la ec.3.3.

Es decir

$$\begin{aligned} M\dot{v} + Cv + K_v v &= w \\ w &= -N(v) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si de las ecuaciones 3.4 se observa la ecuación de la trayectoria directa, se notará que ésta posee un término de precompensación  $K_v v$ . El efecto de este término es producir una acción correctiva - previa al CLD - para mejorar el comportamiento de la salida  $v$  de la planta. También se ha eliminado el término  $K(q)$ , - el vector con términos de la gravedad - que en general (ecuación 3.1) provoca pares que alteran el buen desempeño del sistema.

Lo anterior se ilustra en la figura siguiente:

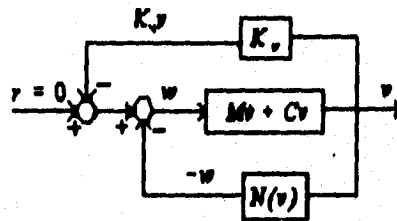


Fig. 36. Diagrama de la ec. 3.4 con el término de precompensación separado.

las cuales pueden ser rescritas como ecuaciones de estado, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Av + Bw \\ w &= -N(v) \end{aligned} \quad (3.4')$$

donde

$$\begin{aligned} A &= -M^{-1}(C + K_v) \\ B &= M^{-1} \end{aligned}$$

Si consideramos un mapeo  $G: w \rightarrow v$  lineal, se sigue de (3. 4) que

$$\begin{aligned} Mv(s)s + Cv(s) + K_v v(s) &= w \\ [Ms + (C + K_v)]v(s) &= w \therefore \\ v(s) &= [Ms + (C + K_v)]^{-1} w \\ \Rightarrow G(s) &= [Ms + (C + K_v)]^{-1} \\ \Rightarrow v(s) &= G(s)w(s) \end{aligned}$$

**Determinación de  $\alpha$  y  $\beta$ .**

Según se mostró en la sección 3.4, existe un deslizamiento  $v$  que involucra a cada coordenada generalizada del sistema 3.3. Por lo tanto al tener  $n$  deslizamientos y  $n$  no linealidades (vectores de decisión) se tendrán  $n$  sectores correspondientes que les acotan. Esto es:

$$\alpha_i v_i^2 \leq n_i(v_i) v_i \leq \beta_i v_i^2 \therefore$$

$$\text{si } \sum_{i=1}^n v_i^2 \leq v^T N(v) = \sum_{i=1}^n v_i n_i(v_i) \leq \beta \sum_{i=1}^n v_i^2$$

donde

$$\alpha = \min_i \{\alpha_i\}, \beta = \max_i \{\beta_i\}$$

$$c = \frac{1}{2}(\beta + \alpha), r = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$$

es decir, para formar un sólo sector, se toman los valores extremos de las pendientes de todos los sectores independientes ( $\alpha$  y  $\beta$ ).

**Implicaciones en el diseño del controlador.**

La definición del operador  $N$  significa que existe un CLD para cada variable de deslizamiento. Como cada variable de deslizamiento depende a su vez del error y de la derivada del error de cada coordenada generalizada (posiciones angulares en el caso del manipulador robot) esto quiere decir que habrá un CLD monovariante (de tipo proporcional<sup>5</sup>) por cada eslabón. Es bien sabido que los CLD son muy robustos [9], [12], [46] y considerando ahora que el CLD recién formado es deslizante (CLDD), se refuerza aún más aquella característica. Se notará entonces porqué el sistema obtenido se distingue por su extremada robustez.

Cabe hacer notar que el hecho de tener un CLDD proporcional monovariante asociado a cada variable generalizada de la planta 3.1 implica una mejora en el trabajo de sintonía - además de las consabidas ventajas del control en modo deslizante - con respecto a trabajos desarrollados anteriormente [12], [9], [19]. En contraste, si hubiese un CLDD MISO - como en [12] - que manipulara a cada coordenada generalizada, el problema de sintonizar sería mayor porque tendríamos una matriz de decisión en vez de un vector por cada coordenada generalizada<sup>6</sup>.

Por otro lado, el hecho de que el operador no lineal  $N$  sea interiormente cóncavo implica robustez en el CLD (por estabilidad absoluta) [46], [47].

<sup>5</sup> Ver capítulo dos (Preliminares de control difuso).

<sup>6</sup> El hecho de usar una matriz de decisión implica que se está usando un CLD PD o un CLD PI (ver cap.2).



Recuérdese también que la no linealidad que representa al CLDD está acotada por sector pero sólo localmente - del capítulo 2, sabemos que la no linealidad está acotada para  $v \in (-k_s, k_s)$ , donde  $k_s$  es la constante de fuzificación de la entrada del controlador difuso - por tanto los resultados obtenidos sobre estabilidad serán locales.

**Criterio gráfico para estabilidad  $L_2$  (Criterio del Círculo):**

**Teorema 3.1**

**Suposiciones:**

Si el sistema descrito por las ecuaciones (3.4') satisface

- i) La matriz  $A$  no posee valores propios sobre el eje imaginario y tiene "n" valores propios estrictamente del lado derecho del plano complejo.
- ii) La no linealidad  $N$  pertenece al sector  $(\alpha, \beta)$ .

Y se cumple uno de los siguientes casos:

- a) Si  $0 < \alpha < \beta$  la gráfica de Nyquist de  $G(j\omega)$  no interseca al disco  $D[-\alpha^{-1}, -\beta^{-1}]$  y lo rodea "n" veces en sentido horario.
- b) Si  $0 = \alpha < \beta$  la gráfica de Nyquist de  $G(j\omega)$  está a la derecha de la abscisa  $-\beta^{-1}$ , esto es

$$\text{Re}\{G(j\omega)\} > -\beta^{-1}$$

- c) Si  $\alpha < 0 < \beta$ , la gráfica de Nyquist de  $G(j\omega)$ , se encuentra dentro del círculo  $D[-\alpha^{-1}, -\beta^{-1}]$ .
- d) Si  $\alpha < \beta < 0$ , la gráfica de Nyquist de  $-G(j\omega)$ , no interseca al disco  $D[-\beta^{-1}, -\alpha^{-1}]$  y lo rodea "n" veces en sentido horario.

entonces si  $w \in L_2 \Rightarrow v \in L_2$ .

**Demostración.**

La demostración se basa en el teorema de transformación de lazo y en el de pequeñas ganancias [47].

**Comentarios.**

1. Una vez que el sistema original (fig. 34) ha adoptado la forma de las ecuaciones 3.4, se le puede considerar como un sistema SISO o MIMO. Es decir, la dimensión de los

- vectores de la señales de referencia  $r$ , de control  $w$  y salida  $y$  del sistema es la misma, debido al uso del control deslizante. No importando si el sistema obtenido es SISO o MIMO, el criterio del círculo se aplica (en ambos casos) en su versión monovariable.
2. Sin lo anterior, para los sistemas MIMO es muy difícil usar este criterio porque los resultados son muy conservativos debido al uso de las normas euclidianas. La única excepción es cuando el CLD multivariable no se encuentra acoplado (una variable de entrada sólo influye en una variable de salida) y la matriz de transferencia del proceso es diagonalmente dominante. En este caso, es posible analizar la estabilidad del proceso por medio de las bandas de Gershgorin [25].

### Ejemplo numérico.

Considérese el sistema mecánico de la figura 33 repetido aquí:

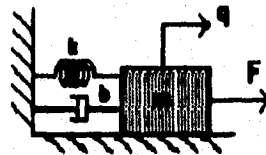


Fig. 37. Sistema masa-resorte-amortiguador

cuya ecuación es

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = u$$

la cual en términos del deslizamiento  $v$  es

$$m\dot{v} + (b + k_v)v = w$$

donde  $w$  es el vector difuso deslizante. El sistema completo (planta + CLDD) se muestra en la figura 38:

El vector de decisión se muestra en la figura 39, donde la entrada al controlador es el deslizamiento  $v$  y la salida del controlador es  $w$ . Los niveles de decisión difusos están dados por  $PG$ =positivo grande,  $PM$ =positivo mediano,  $PP$ =positivo pequeño,  $CE$ =cero,  $NP$ =negativo pequeño,  $NM$ =negativo mediano,  $NG$ =negativo grande.

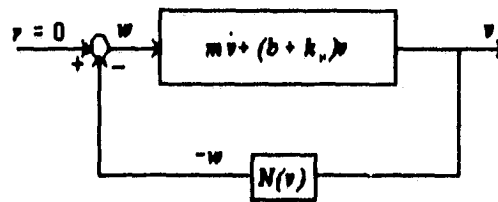


Fig. 38. SCD para la planta de la figura 33.

Ahora, la característica entrada - salida del CLDD está graficada en la figura 40, en donde se puede apreciar el sector cónico que la acota. En esta gráfica se muestra además a la característica correspondiente al vector de decisión de la figura 39 (curva denotada por 2) y al vector de la figura 12 (curva denotada por 1). Aquí puede apreciarse muy claramente el hecho de que el acotamiento del sector sólo es local.

Condición Deslizante v	Salida de Control w
PG	PG
PM	PM
PP	PG
CE	CE
NP	NG
NM	NM
NG	NG

Fig. 39. Vector de decisión del CLDD

Nótese el cambio necesario - con respecto a la figura 12<sup>7</sup> - en los niveles de entrada *negativo pequeño* y *positivo pequeño*, a los que corresponden los valores de salida *w*, de *positivo grande* y *negativo grande*. Dicho cambio fue necesario para el mejor desempeño de las respuestas del sistema. Cabe resaltar que las gráficas mostradas en la figura 40 están invertidas por el signo menos de la ecuación del control (ecuación 3.4). Véase además la influencia de las constantes de fuzzificación y defuzzificación ( $k_c$  y  $k_s$  respectivamente). La altura máxima de las curvas no lineales está limitada por la  $k_c$  y la anchura por la  $k_s$ .

La constante de fuzzificación es  $k_c$  y la constante de defuzzificación es  $k_s$ . En este caso para el controlador se tiene que  $k_c=3$ ,  $k_s=4$ ,  $\lambda=7$  (pendiente del plano deslizante);

<sup>7</sup> Se tomó como primera aproximación un vector de esta naturaleza. A partir de él, se hacen ajustes en línea.

para la planta,  $m=1$ ,  $b=1.2$ ,  $k=1$ ,  $k_v=1$ . Las pendientes del sector cónico son  $\alpha=34^\circ=0.5934$  radianes y  $\beta=65^\circ=1.1345$  radianes; y su centro y su radio son  $c=0.864$  y  $r=0.2706$ , respectivamente.

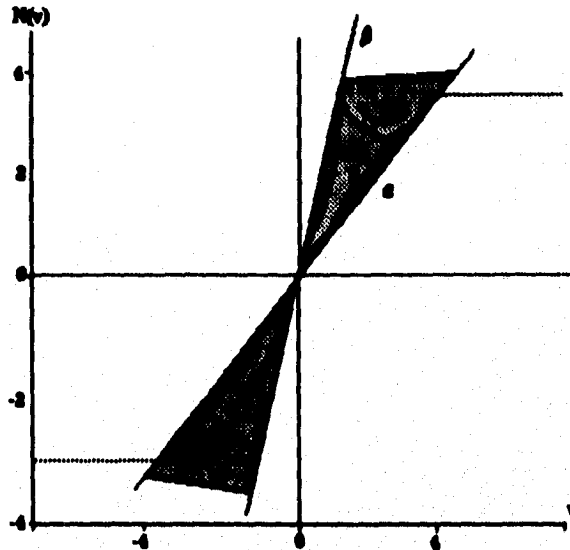


Fig. 40. Sector cónico que acota localmente a dos no linealidades: "1" para la versión final (fig. 39) y "2" para una primera aproximación.

Por otro lado en la figura 41 se muestra el deslizamiento del sistema para varias condiciones iniciales. Se aprecia claramente al plano deslizante como conjunto invariante:

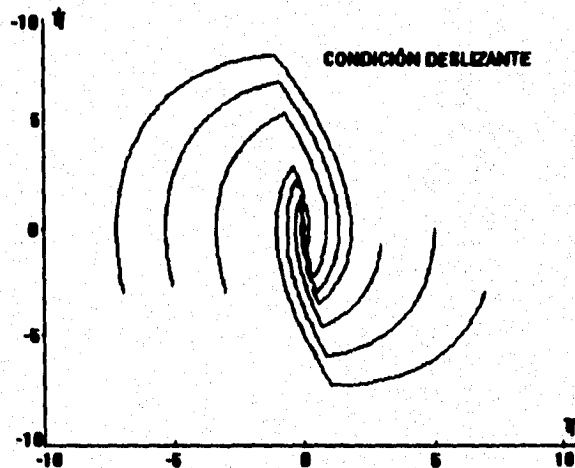


Fig. 41. Gráfica del deslizamiento "v" del sistema ejemplo.

La función de transferencia de la planta está dada por la ecuación siguiente:

$$g(s) = \frac{v(s)}{w(s)} = \frac{(1/m)}{s + \left(\frac{b + K_v}{m}\right)}$$

La gráfica de Nyquist de  $g(s)$  y el círculo crítico se ilustran en la figura 42.

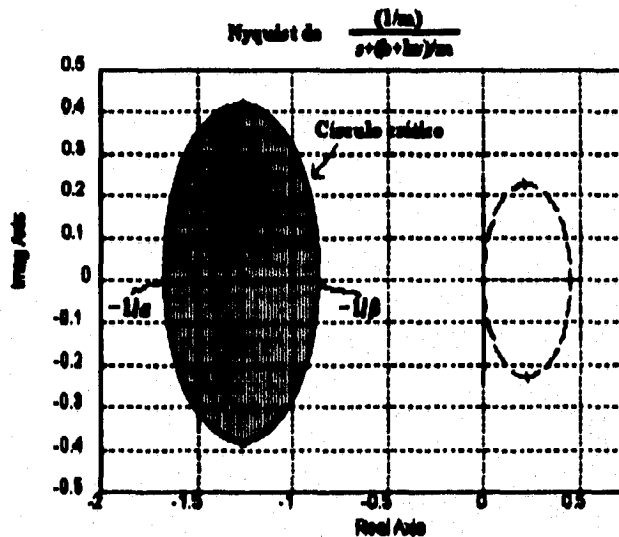


Fig. 42. Criterio del círculo: caso estable.

El centro del círculo está en -1.28 y el radio es de 0.4 y  $m=1$ ,  $b=1.2$ ,  $k=1$ ,  $k_v=1$ .

Es inmediato el notar que al no invadirse el círculo de estabilidad se obtienen respuestas estables (fig. 43) ante las señales de prueba elegidas (escalón unitario y senoide con frecuencia  $f=0.1$  Hz).

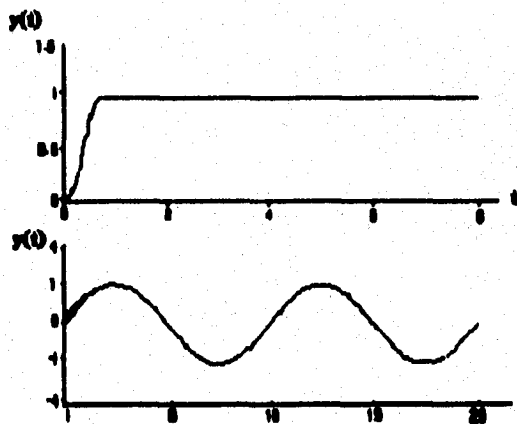


Fig. 43. Respuestas ante señales de prueba.

**Comentarios.**

Si bien se eligió una planta lineal muy sencilla (y fue así con fines ilustrativos) es fácil apreciar que:

1. La sintonía del controlador es sencilla y relativamente rápida por tratarse de vectores de decisión.
2. Compárense las gráficas de las respuestas anteriormente obtenidas con las de la sección 2.8 del capítulo 2 ("Ejemplo de diseño de un CLD"). En ambos casos puede clasificarse al CLD como un CLDP (proporcional) sin embargo el error en estado estacionario - ante respuesta escalón - era obvio en el controlador que carecía de la implantación del deslizamiento. El CLDD de esta sección dota de estabilidad asintótica al sistema.
3. El buen desempeño del sistema es casi inmediato, no sólo por las características de los CLD sino por las nuevas ventajas adquiridas del control en modo deslizante. La conmutación de alta velocidad - propia de los controladores basados en estructura variable - se ve evita con la "suavización" de la función signo - implícita en modos deslizantes - por la función saturación que implica el control deslizante difuso. Lo anterior proporciona características de robustez en el sistema. Al existir estabilidad  $L_2$  se dispone de un criterio gráfico en el dominio de la frecuencia. Las ventajas de los criterios gráficos son obvias.
4. La desventaja inmediata es que el criterio del círculo pide que la planta bajo control posea una realización mínima y que de los valores propios de la matriz  $A$ , ninguno se encuentre sobre el eje imaginario del plano complejo.
5. Haciendo referencia al punto 3, recuérdese que el acotamiento de la no linealidad del CLDD sólo es local, por lo que la estabilidad  $L_2$  del sistema será local. Esto es algo implícito de los CLDs.

**3.6 Solución del problema para el caso no lineal.**

El diagrama de bloques correspondiente a la ecuación (3.3) se ilustra en la figura 44.

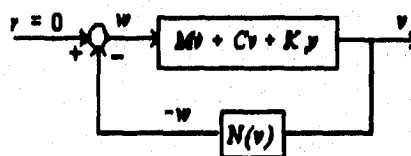


Fig.44. Diagrama de bloques de la ec.3.3.

**Suposiciones.** con respecto al operador  $N$  que representa al controlador.

Las suposiciones hechas en la sección 3.3 siguen siendo válidas. Amén de aquellas, considérese a las siguientes:

1. La matriz  $K_v$  es diagonal, i.e.,  $K_v = k_v I, k_v > 0$ .
2. El punto de equilibrio es  $v_e = 0$ .

**Implicaciones en el diseño del controlador.**

Las implicaciones correspondientes en la parte lineal siguen cumpliéndose aquí, recordando que los resultados de estabilidad  $L_2$  y asintótica son locales.

**Análisis por Pasividad.**

**Lema 3. 1**

El mapeo que representa a la planta más precompensación  $w \rightarrow v$  es estrictamente pasivo a la salida.

**Prueba**

$$\begin{aligned} \langle w|v \rangle_T &= \langle (M\dot{v} + Cv) + K_v v | v \rangle_T = \\ &= \langle M\dot{v} + Cv | v \rangle_T + \langle K_v v | v \rangle_T = \\ &= \left[ \int_0^T \frac{1}{2} (v^T M v) \cdot dt - \frac{1}{2} v^T (M - 2C)v \cdot dt \right] + \\ &+ \left[ \int_0^T v^T K_v v \cdot dt \right] \geq -\frac{1}{2} v^T(0)M(0)v(0) + T \|v\|_T^2 k_v \end{aligned}$$

**Teorema 3. 2 (Pasividad).**

Considérese de nuevo al sistema de la figura 44 y descrito por las ecuaciones 3. 4, donde los mapeos  $w \rightarrow v, v \rightarrow -w$  son  $L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ . Supóngase que para  $r = 0 \in L_{2e}$  existen soluciones  $w, v \in L_{2e}$ . Bajo estas condiciones si el mapeo  $w \rightarrow v$  es estrictamente pasivo a la salida y el mapeo  $v \rightarrow -w$  es pasivo a la salida y  $r \in L_{2e}$ , entonces  $v \in L_{2e}$ .

**Prueba.**

El control difuso define un mapeo pasivo<sup>8</sup>:

$$\langle -w|v \rangle_T = \langle N(v)|v \rangle_T = \int_0^T v^T N(v) dt$$

Como  $N$  es interiormente cónico, está acotado por abajo, i.e.

<sup>8</sup> De hecho se trata de un operador positivo [50], [8].

$$\alpha (v^T v) \leq v^T N(v)$$

Integrando la expresión anterior obtenemos

$$\int_0^T v^T N(v) dt \geq \int_0^T \alpha (v^T v) dt = \alpha \cdot T \|v\|_T^2 \geq 0, \forall T \geq 0$$

$$\therefore \langle -w | v \rangle_T \geq 0$$

Tomando ahora a los mapeos de la planta y del controlador tendremos que:

$$\langle w | v \rangle_T + \langle -w | v \rangle_T \geq k \cdot T \|v\|_T^2 -$$

$$-\frac{1}{2} v^T(0) M(0) v(0) + 0$$

Es decir, el sistema completo es estrictamente pasivo a la salida.  
Aplicando la desigualdad de Schwartz a la última inecuación, tenemos:

$$k \cdot T \|v\|_T^2 - \frac{1}{2} |v^T(0) M(0) v(0)| \leq$$

$$\leq |\langle w | v \rangle_T + \langle -w | v \rangle_T| \leq 2 \|w\|_T \|v\|_T$$

Lo cual significa que

$$\|v\|_T^2 \leq \left( \frac{2 \|w\|_T}{k \cdot T} \right) \|v\|_T + \frac{1}{2k \cdot T} |v^T(0) M(0) v(0)|$$

Y puede ser rescrito como:

$$\|v\|_T \leq \frac{\|w\|_T}{k \cdot T} +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2k \cdot T} |v^T(0) M(0) v(0)| + \left( \frac{\|w\|_T}{k \cdot T} \right)^2}$$

Si

$$T \rightarrow \infty \therefore \|v\| \leq 0 \Rightarrow \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$\therefore v \in L_2.$$

Como  $w = -N(v)$  y debido a que  $N$  es interiormente cónico, i.e.:



$$\|w - C_v\|_r \leq \|Rv\|_r, C_v = cI, R = rI$$

Aplicando la desigualdad del triángulo y usando las expresiones para  $c$  y  $r$  en función de  $\alpha$  y  $\beta$  obtenemos:

$$\|w\|_r \leq (|c| + |r|)\|v\|_r$$

Al hacer que  $T \rightarrow \infty$  se obtiene:

$$\|w\| \leq (|c| + |r|)\|v\|$$

y sabiendo que  $\|v\|$  está acotada se obtiene que

$$\|w\| \leq 0 \Rightarrow \|w\| = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow w \in L_2$$

### Estabilidad Asintótica

Proponemos como función candidata de Lyapunov a:

$$V_1 = \frac{1}{2} v^T M v - \int_0^t v^T K_v v dt$$

$$\Rightarrow \dot{V}_1 = v^T M \dot{v} + \frac{1}{2} v^T \dot{M} v - v^T K_v v$$

$$\dot{V}_1 = v^T w - 2v^T K_v v + \frac{1}{2} v^T (\dot{M} - 2C) v$$

$$\dot{V}_1 = v^T w - 2v^T K_v v$$

$$\dot{V}_1 = v^T (w - K_v v) - v^T K_v v$$

Como

$$\begin{aligned} v^T (w - K_v v) &= \langle w - K_v v | v \rangle_r = \\ &= \langle M \dot{v} + C v | v \rangle_r \geq -\frac{1}{2} v^T(0) M(0) v(0) \end{aligned}$$

y  $v^T (w - K_v v) \leq 0$  para  $\dot{V}_1 \leq 0$

$$\therefore -\frac{1}{2} v^T(0) M(0) v(0) \leq v^T (w - K_v v) \leq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} v^T(0) M(0) v(0) \leq 0 \Rightarrow \dot{V}_1 \leq 0$$

$\Rightarrow v$  es asintóticamente estable

Debido a la condición deslizante

$$v = \dot{\tilde{q}} + \lambda \tilde{q}$$

si

$$v \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \Rightarrow \tilde{q} \rightarrow 0, \dot{\tilde{q}} \rightarrow 0$$

### Comentarios.

1. Se ha supuesto que el sistema está *bien planteado*<sup>9</sup>, es decir, sus soluciones existen y son únicas, es continuo con respecto a las variables de entrada, y es continuo con respecto a errores en el modelo (incertidumbre paramétrica) [50].
2. El resultado es general en el sentido de que puede aplicarse a sistemas SISO o MIMO (nótese que el resultado fue análogo en el caso lineal).
3. Recuérdese que  $v \in (-k_v, k_v)$  en la característica entrada - salida del CLDD. El resultado de estabilidad es válido en ese intervalo solamente.

### Ejemplo numérico.

La simulación se llevó a cabo en el ejemplo del robot rígido de dos grados de libertad de la sección 3.3 (figura 32), cuyo esquema se repite ahora en la figura 45. Para controlar la posición angular de cada uno de los eslabones se implantó un CLDP (CLD proporcional) por cada eslabón. Los parámetros del brazo robot son  $m_1=0.3$  kg.,  $m_2=0.3$  kg.,  $l_1=0.3$  m, y  $l_2=0.3$  m. Primeramente se aplica una entrada escalón unitario.

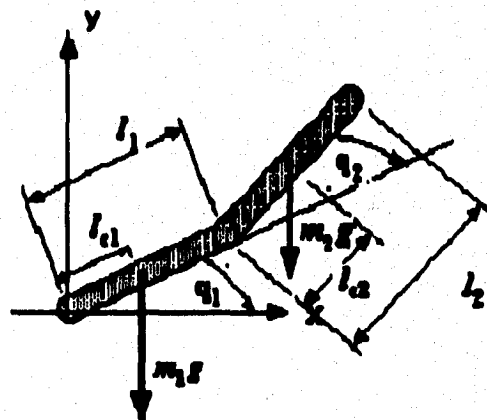


Fig. 45. Robot rígido de dos grados de libertad.

<sup>9</sup> El que un sistema esté bien planteado es un problema de modelado. Expresa que un modelo - al menos en principio - es adecuado para describir un sistema físico [50].

El diagrama de bloques del controlador y del robot se ilustra en la siguiente figura. Recuerdese que en el presente caso  $M$  y  $C$  son funciones de  $q, \dot{q}$ , i.e.,  $M = M(q), C = C(q, \dot{q})$ .

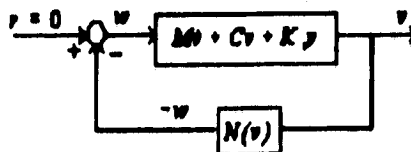


Fig.46. Robot con CLDD

El controlador difuso está representado por la no linealidad  $N(v)$  y contiene a dos vectores de decisión difusos<sup>10</sup> definidos de la siguiente manera:

$v_{i,j}, i = 1,2$	$w_{i,j}, i = 1,2$
PG	PG
PM	PM
PP	PG
CE	CE
NP	NG
NM	NM
NG	NG

Fig. 47. Vector de decisión para ambos eslabones

Si graficamos salida de control contra entrada de control obtendremos la gráfica correspondiente a la curva deslizante no lineal acotada por sector de la figura 48. Recuerdese que dichas gráficas aparecen invertidas con respecto al eje horizontal por el signo menos del controlador, lo cual significa que tenemos una gráfica aproximada de una función signo negativa (ver sección 2.4).

Del vector de decisión original se hizo un ajuste en los niveles de decisión cerca del origen, los cuales fueron necesarios para obtener un mejor comportamiento en las curvas de salida de cada eslabón, tanto en seguimiento como en regulación. Las pendientes del sector cónico resultaron ser  $\alpha = 36^\circ, \beta = 68^\circ$ , o  $\alpha=0.6283, \beta=1.1868$  radianes.

Se puede ver de la característica no lineal de los CLDD, que cada uno de ellos cumple con la propiedad de pasividad, ya que sus gráficas están situadas en el primero y tercer cuadrante del plano  $\mathcal{R}^2$ . Se muestra una sola gráfica porque ambas son idénticas, es decir,  $k_r=100, k_w=5, k_v=80, i=1,2$  (fig. 48).

<sup>10</sup> Para el caso de esta planta, ocurrió que los vectores de decisión para cada eslabón son iguales entre sí.

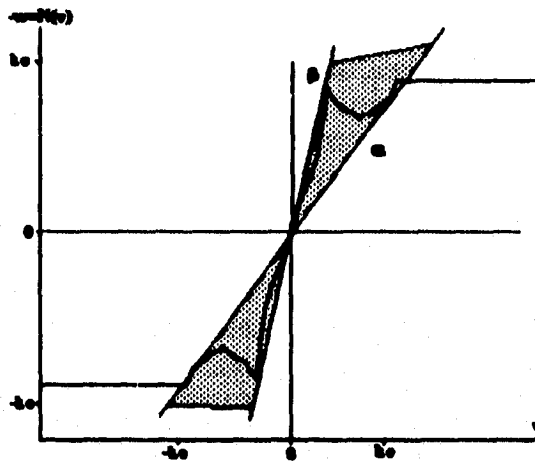


Fig. 48. Sector para las no linealidades de cada eslabón

Para la respuesta a escalón unitario se obtuvieron las siguientes gráficas:

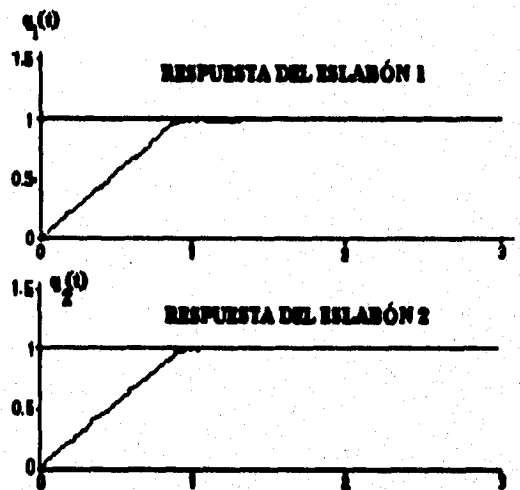


Fig. 49. Regulación para ambos eslabones.

La respuesta es relativamente rápida porque alcanza a la referencia en menos de un segundo (aproximadamente 0.8 segundos).

Es de hacer notar (como era de esperarse) que la sintonía fue mucho más difícil que cuando se tenía que controlar una planta *lineal*, pues como no se dispone de un algoritmo de auto-organización o de adaptación el ajuste de parámetros y ganancias debe ser por ensayo y error.

Ahora se muestran las gráficas del error, y de la derivada del error para la entrada escalón en las figuras 50 y 51, respectivamente. Como puede verse, se verifica el hecho

de que el error de posición tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito. Aunque esto es también válido para la derivada del error, es importante hacer notar que una  $k_c$  baja (de alrededor de 1-30) produciría una respuesta sumamente lenta. Esto obliga a incrementar el valor de  $k_c$ , pero el hecho de aumentarla demasiado produciría oscilaciones de alta frecuencia en la respuesta del sistema, las cuales aumentan en amplitud según se incremente el valor de dicha  $k_c$ . Obviamente si se elige un valor de  $k_c$  muy pequeño (uno, por ejemplo), no se presentarían tales oscilaciones.

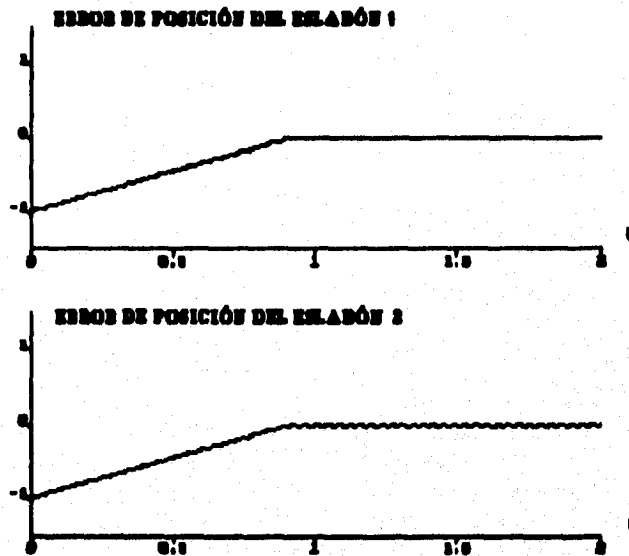


Fig. 50. Errores de posición para los eslabones del robot

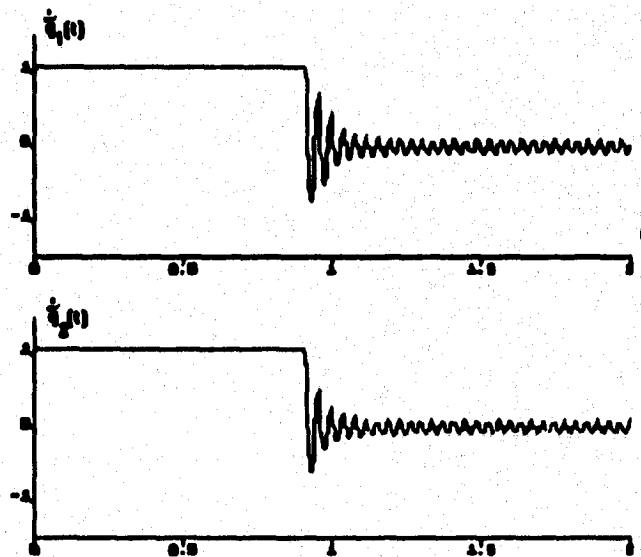


Fig. 51. Derivadas de los errores de posición de cada eslabón.

Obsérvense ahora las curvas de las señales de control de cada eslabón.  $w_1$  y  $w_2$  en la figura 52. Éstas son las salidas *defuzificadas* del CLD *desnormalizadas*. Se usó una  $k_c$  de 100 porque la salidas eran de amplitudes muy pequeñas, del orden de los centésimos<sup>11</sup>; asimismo, se lograba una respuesta suficientemente rápida en cada eslabón (ver fig. 49). La razón de las oscilaciones acotadas ya se ha expuesto.

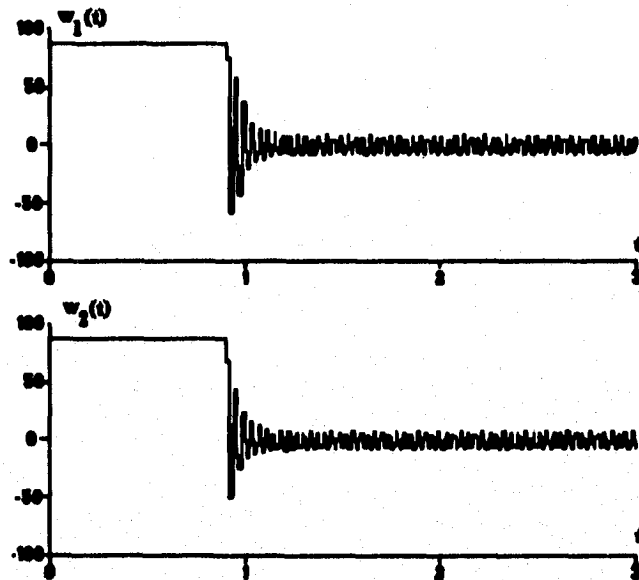


Fig. 52. Señales de control para cada eslabón.

Se muestra ahora la condición en modo deslizante de cada eslabón para varios estados.

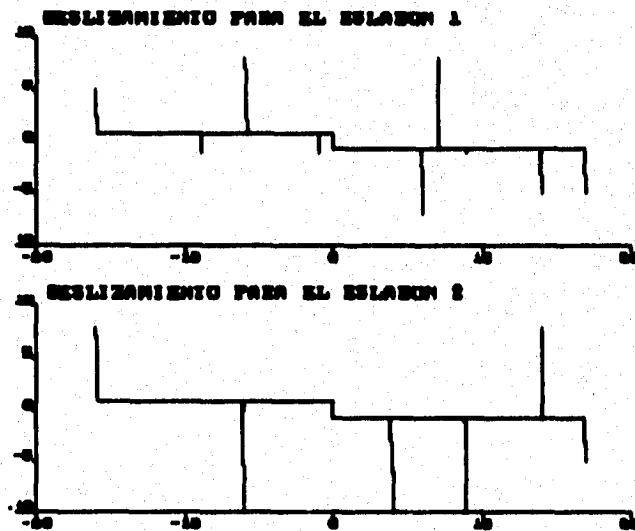


Fig. 53. Deslizamientos para los dos eslabones.

<sup>11</sup> Si la salida de control viene de un microcontrolador que entregue cinco volts máximos de salida, cien unidades corresponden a cinco volts.

En este caso la pendiente es  $\lambda=500$  para cada eslabón, por ello en las gráficas de la simulación se ve un recta vertical a la que convergen todos los estados para los que se tomaron diversas condiciones iniciales.

Para una frecuencia de 0.1 Hz el seguimiento para cada eslabón se muestra en la siguiente figura. Prácticamente la respuesta va sobre la referencia en ambos casos. La condición inicial es 0.3 unidades de amplitud, por ello casi no se percibe en la gráfica.

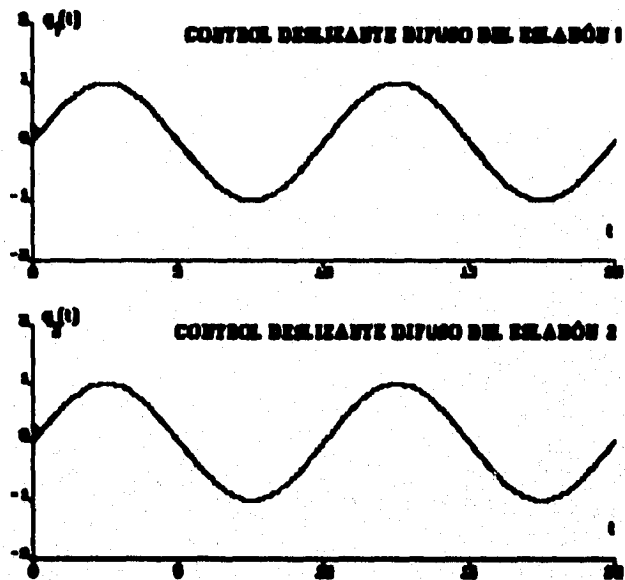


Fig. 54. Seguimiento del brazo robot.

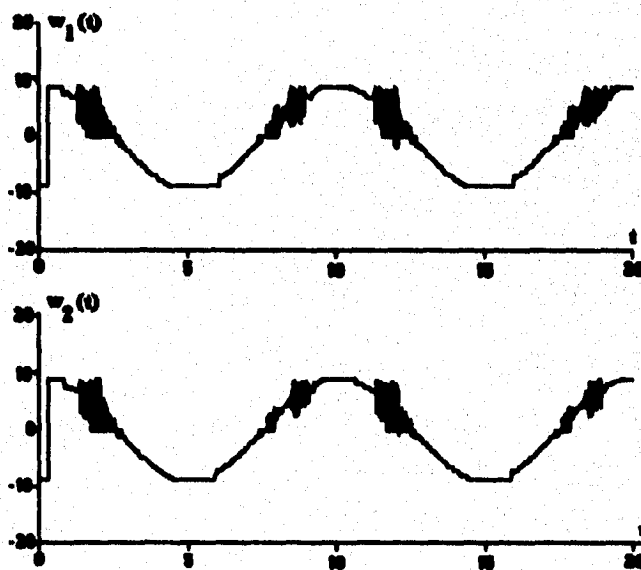


Fig. 55. Señal de control para ambos eslabones.

En la figura 55, se muestran las señales de control para la senoide. Si bien existen regiones de conmutación de alta frecuencia, es obvio que no es una señal cuyos cambios abruptos se presenten en todo tiempo, como si fuese una señal de control en modo deslizante común. En este caso  $k_c=11$ ,  $k_v=5$ ,  $k_f=80$  para ambos eslabones. El vector de decisión es el mismo y por tanto la no linealidad acotada es la misma que para el caso del escalón (fig. 48).

### *Comentarios.*

En general los comentarios son los mismos que los expuestos en los puntos 1-4 y 5 de la sección lineal correspondiente. Sin embargo cabe hacer mención de que debido a que el manipulador rígido de dos grados de libertad es una planta mucho más compleja que la considerada en la parte lineal (el sistema masa - resorte - amortiguador) el ajuste de las ganancias del CLD requiere de un esfuerzo mucho mayor. De hecho, para tener idea de por donde andaban los valores de las ganancias, hubo de simularse primero un robot rígido de un sólo grado de libertad, lo cual resultó de gran ayuda. Esto podría mejorarse si se añadiera un algoritmo de autosintonía de los parámetros, aunque ya cambiaría un poco el planteamiento del problema original por involucrar a dicha estructura en el diagrama de bloques correspondiente.

Las gráficas de la señal de control en el caso de regulación (fig. 52), presentan oscilaciones de magnitud acotada y de frecuencia mucho menor a las del control deslizante clásico (no difuso) para un caso semejante. Esto es debido al efecto de suavizar dicha conmutación en el CLDD.

La gráfica de la característica entrada - salida del CLDD no está acotada en sentido vertical por el valor exacto de  $k_c$ , para la parte positiva de dicha curva, ni por  $-k_c$ , para su parte negativa; sino que es sólo 5/6 de esos valores [9]. Dicho efecto se ve claramente en las señales de control para regulación y seguimiento. Ver también las características entrada - salida del capítulo anterior.

### **3.7 Conclusiones.**

Al principiar el presente capítulo se formuló el problema de control para el caso general de sistemas de segundo orden vectorial controlados por un CLD, proponiéndose después una solución basada en deslizamiento para disminuir la dimensión del vector de entrada al CLD (antes MISO) y tener así un controlador con el mismo número de entradas que de salidas, en el cual ya sea posible la aplicación de criterios de estabilidad  $L_2$ . La solución propuesta se divide en dos casos, una lineal y otra no lineal.

Para la parte lineal se hicieron las suposiciones convenientes para poder aplicar el criterio del círculo a la planta que quedó en términos del deslizamiento. El resultado obtenido se complementó con simulaciones para un caso estable.



De manera análoga se procedió para el caso de la planta no lineal en donde se obtuvieron condiciones para su estabilidad  $L_2$  por medio de la teoría de la pasividad, ilustrando los resultados obtenidos con simulaciones al igual que en el caso anterior.

Cabe hacer notar aquí la aportación realizada en el presente trabajo. Anteriormente a éste, no se disponía de herramientas para abordar el problema de estabilidad  $L_2$  tratándose únicamente en la bibliografía el caso SISO o el caso MIMO con el mismo número de entradas que de salidas [9], [12]. Si bien en [9] y en [12] se habla de control deslizante difuso, sólo se le compara con el caso clásico<sup>12</sup> para después tratarlo como un tema aislado de la estabilidad  $L_2$ . Éste tema se aborda en [9] de manera más general.

En conclusión, se dio una forma alternativa del criterio del círculo que en este trabajo se llama *criterio del círculo en modo deslizante*.

---

<sup>12</sup> En este sentido, el CLD que no utiliza modos deslizantes.

# Capítulo Cuatro

## Trabajos a Futuro:

### Conversión del CLD MISO a MIMO

#### 4.1 Introducción

En el capítulo 3 se enunció el siguiente problema: dado un SCD SISO con un CLD MISO, hallar condiciones para estabilidad  $L_2$ . (convirtiendo al CLD MISO original en uno SISO o MIMO<sup>1</sup>, por medio del control de estructura variable). Ahora, se plantea el problema alternativo:

*Dado un SCD SISO con un CLD MISO hallar condiciones de estabilidad  $L_2$  (convirtiendo al CLD MISO original en un CLD MIMO añadiendo artificialmente una salida a dicho CLD). Lo anterior tiene el efecto de convertir al SCD SISO original en un nuevo sistema MIMO.*

#### 4.2 Planteamiento de la solución

##### 4.2.1 Forma 1: proyecciones en tres dimensiones

La solución alterna consiste en añadir una salida artificial al CLD MISO para convertirlo en uno MIMO (dos entradas, dos salidas) para poder aplicar el Teorema del Círculo Multivariable [14], [9], [25].

Considérese el siguiente diagrama de bloques del problema original:

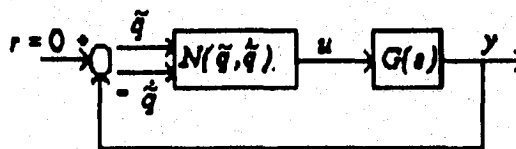


Fig. 56. Planta lineal con un CLD.

<sup>1</sup> Depende de si la planta es monovariable o multivariable (ver capítulo 3).

De la figura anterior se aprecia que se trata de un sistema SISO con un CLD MISO. Añadamos ahora una salida artificial al CLD definida por

$$\dot{u} = pu, \quad s = d/dt, \quad u = N(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \quad (4.1)$$

Por ello el diagrama de la figura 56 se transforma en el mostrado en la figura 57:

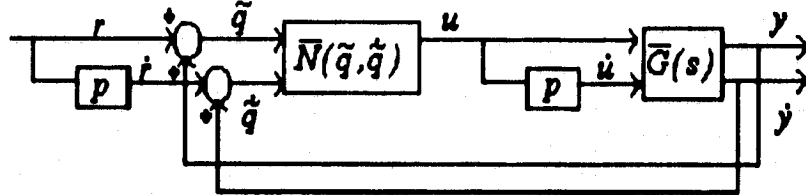


Fig. 57. Transformación del sistema de la figura 56.

El cual puede redibujarse como:

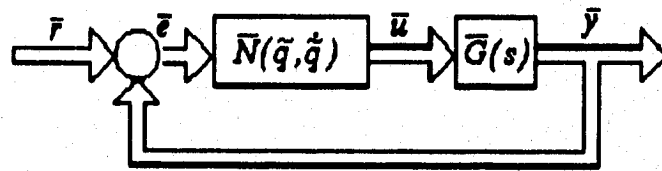


Fig. 58. Sistema equivalente al de la figura 57.

donde

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix}, \quad \bar{q} = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \\ sn(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad \bar{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 \\ 0 & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

donde  $g_{11}(s), g_{22}(s)$  representan a la planta monovariable original. Nótese ahora que hemos definido un sector multivariable por la relación característica del CLD dada por

$$\bar{u} = \bar{N}(\bar{q}) \quad (4.3)$$

Aplicando el criterio de conicidad, y con el teorema de transformación de lazo [14], [8], [9], [50] se puede llegar a deducir el criterio del círculo multivariable [14],[25]:

$$|\lambda(\omega)^{-1} + c| \leq 1/r \quad (4.4)$$

Hasta aquí podría pensarse que ya se ha solucionado el problema de estabilidad  $L_2$  pero analizando el bloque del CLD de la figura anterior, notaremos que el sector multivariable está en cuatro dimensiones por lo que hay que proyectarlo en tres o dos

dimensiones (ecuación 4. 3). Es fácil ver que para la primera alternativa (proyectar la hipersuperficie de control de cuatro dimensiones a tres) tendremos que separar en dos proyecciones de tres dimensiones, es decir, en dos superficies en  $\mathfrak{R}^3$  del control difuso:

$$u = N(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}), \dot{u} = N(\tilde{q}, \ddot{\tilde{q}}) \quad (4. 5)$$

Se generarían superficies como la mostrada a continuación:

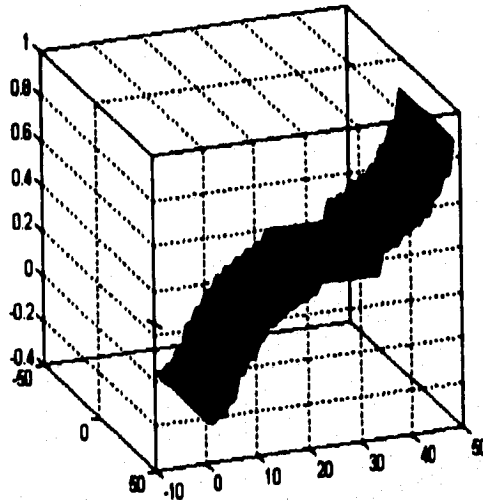


Fig.59. Superficie de control difusa.

Como puede verse se pueden plantear sectores tridimensionales sin dificultad acotando a la superficie anterior siguiendo la misma mecánica que para las curvas no lineales en  $\mathfrak{R}^2$  [8], [54], [55], [9]. Desde luego, es más fácil proyectar la superficie del ejemplo anterior (la cual consideramos como superficie de control en función del error y de su derivada) en  $\mathfrak{R}^2$  y aplicar el criterio del círculo monovariante; en un caso estático (gráfica control-error) y en otro dinámico (gráfica control-derivada del error). No se olvide el hecho de que el problema es doble, pues tenemos otra superficie (derivada de control-error-derivada del error) que debemos también proyectar a  $\mathfrak{R}^2$ . Aunque las referencias para no linealidades acotadas por sector, dinámicas son muy escasas (de hecho prácticamente nulas) [54], en el momento en el que se aplica el criterio de conicidad y el teorema de transformación de lazo para deducir una forma adecuada para el criterio del círculo, aquello no representa problema porque dicho criterio y dicho teorema no imponen restricción dinámica a los operadores no lineales [54]. De lo anterior podemos decir que el problema a resolver (abierto aun) es:

A partir de

$$\|Nx - Cx\|_2 \leq \|Rx\|_2 \quad (4.6)$$

debe demostrarse que los operadores  $C$  y  $R$  existen y son únicos.

#### 4.2.2 Forma 2: proyecciones en dos dimensiones

Sea el sistema de la figura siguiente:

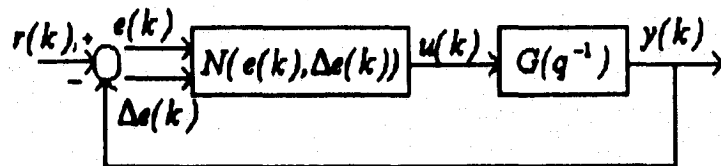


Fig. 60. Sistema discreto equivalente al de la figura 56.

donde

$$\Delta u(k) = N(q(k), \Delta q(k)), \cdot u(k) = \frac{1}{\nabla(q^{-1})} \Delta u(k) \Rightarrow$$

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k), \cdot \Delta u(k) = \nabla(q^{-1})u(k), \Delta e(k) = \nabla(q^{-1})e(k)$$

$$\nabla(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

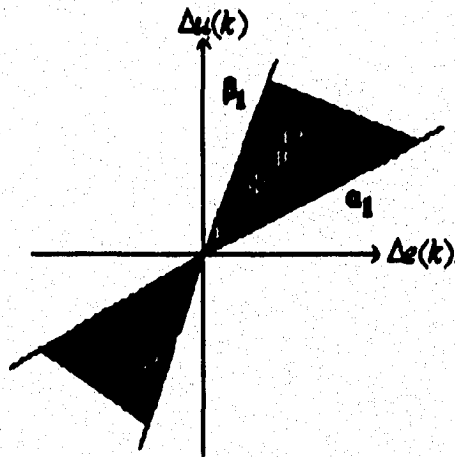


Fig. 61. Sector cónico de acotamiento a la no linealidad dinámica (proyección 1).

y  $N$  depende de

- Método de fuzificación
- Tabla de decisión
- Método de defuzificación

Caracterización de  $N(e(k), \Delta e(k))$

$$\alpha_1 \Delta e(k)^2 \leq \Delta e(k) \Delta u(k) \leq \beta_1 \Delta e(k)^2, \forall e(k) \quad (4.7) \quad (\text{ver fig. 61})$$

$$\alpha_2 e(k)^2 \leq e(k) u(k) \leq \beta_2 e(k)^2, \forall \Delta e(k) \quad (4.8) \quad (\text{ver fig. 62})$$

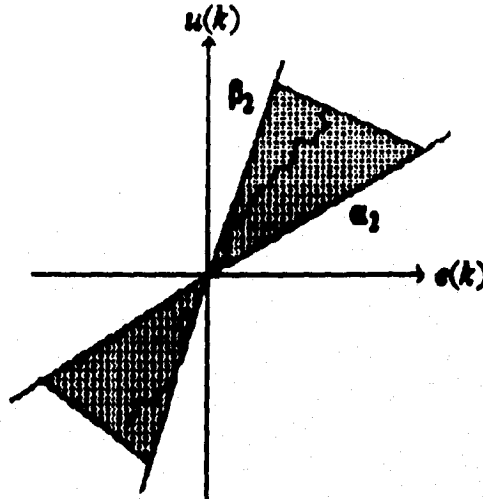


Fig. 62. Sector cónico de acotamiento a la no linealidad estática (proyección 2).

Combinando las ecuaciones (4.6) y (4.7) se tiene que

$$\begin{aligned} (\Delta e(k)^2 + e(k)^2) &\leq \Delta e(k) \Delta u(k) + u(k) e(k) \leq \beta (\Delta e(k)^2 + e(k)^2) \\ \alpha &= \min\{\alpha_1, \alpha_2\}, \beta = \max\{\beta_1, \beta_2\} \\ \Rightarrow \alpha \bar{e}^T(k) \bar{e}(k) &\leq \bar{e}^T(k) \bar{u}(k) \leq \beta \bar{e}^T(k) \bar{e}(k) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{e}(k) &= \begin{bmatrix} e(k) \\ \Delta e(k) \end{bmatrix}, \bar{u}(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ \Delta u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\nabla(q^{-1})} N(e(k), \Delta e(k)) \\ N(e(k), \Delta e(k)) \end{bmatrix} = F(e(k), \Delta e(k)) \\ \bar{G}_a(q^{-1}) &= \begin{bmatrix} G(q^{-1}) & 0 \\ 0 & G(q^{-1}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde el subíndice "a" indica planta aumentada.

Es fácil ver que de nuevo se tienen dos sectores, uno estático (fig. 61) y uno dinámico (fig. 62). Para el primero de ellos no hay problema, pues se aplica el criterio del círculo monovariante sin problemas; aunque para el otro se necesita el criterio del círculo con operadores dinámicos. Aquí se repite el hecho de que se necesita el criterio

de conicidad para deducir un criterio del círculo adecuado, pero de nuevo el problema es demostrar la existencia y unicidad de los operadores  $C$  y  $R$  de la citada condición de conicidad.

#### 4.3 Conclusiones

El propósito de este capítulo fue mostrar la otra tendencia en cuanto a estabilidad  $L_2$ , es decir, transformar el SCD SISO con un CLD MISO original en un SCD MIMO con un CLD MIMO también. Es fácil ver que la obtención de criterios del círculo multivariables basados en conicidad y en transformaciones de lazo no representa problemas desde un punto de vista de operadores multivariables, incluso de operadores dinámicos. El problema -se repite- es la demostración de la existencia y unicidad de los operadores  $C$  y  $R$ .

Existen múltiples métodos posibles para esto, por ejemplo puede aplicarse de nuevo la transformación de lazo para solventar la dinámica de las no linealidades acotadas por sector aproximándolas quizá con operadores no causales. También podría emplearse dicha técnica en la obtención de  $C$  y  $R$  o como se ha mencionado en otros capítulos del presente trabajo emplear operadores de otro tipo (convexos, compactos, definidos en otros espacios, etc.) y/o combinaciones de ellos. La técnica de entrada-salida basada en el análisis funcional tiene muchos caminos por investigar. El resultado (a reserva de ver las restricciones) sería fuerte pues significaría el complemento de los SCD SISO y MIMO que en este trabajo se resolvieron por control deslizante.

## Capítulo Cinco

### Conclusiones Finales

En este trabajo se ha hecho un estudio de la estabilidad de los controladores difusos, aportando un nuevo criterio (que unifica el enfoque de control deslizante con el de pasividad, obteniendo así una nueva forma de obtener condiciones para la estabilidad  $L_2$ ) de una familia o clase de plantas que pueden ser lineales o no lineales, monovariantes o multivariantes. Posibilidades alternas se dan en el capítulo 4.

Cabe hacer notar que aunque existen criterios para los casos monovariante y multivariante del problema de estabilidad absoluta, la restricción es que el número de entradas debe ser igual al número de salidas y las condiciones para asegurar estabilidad son suficientes solamente [9], [14]. Si el número de entradas es mayor que el número de salidas el problema de estabilidad aunque sin solución completa aun, ha tenido un avance importante con ayuda del enfoque entrada-salida, pues se sabe que se deben usar operadores cónicos (pudiendo ser estos dinámicos o estáticos) pero la incógnita estriba en la obtención de dos operadores lineales que deben ser únicos. Cabe hacer mención de que se puede estudiar la estabilidad entrada-salida con una gran variedad de operadores y de espacios, basando dicho estudio en los teoremas de punto fijo, en operadores cónicos y en operadores de sector [14], [55]. De hecho ya se tiene una mecánica para tal efecto (aunque no de manera explícita) en [14], donde a partir del problema de estabilidad absoluta multivariante, se definen nuevos operadores (cónicos en el primer caso de [14]) del sistema basados en el corrimiento de su conicidad, se acotan por medio de normas de operadores (esto con base en el teorema de pequeñas ganancias) y por medio teoremas de punto fijo y del círculo se obtienen condiciones para estabilidad  $L_2$ .<sup>1</sup> Como segundo caso se toman operadores sectoriales [50] (lo cual implica el uso de la teoría de pasividad) y con la misma mecánica se obtienen condiciones de estabilidad, pero ahora con otra clase de operadores.

Debido a que el uso de operadores de sector lleva implícito el hecho de robustez en el controlador difuso, existen maneras de medir dicha robustez por medio de diversos

---

<sup>1</sup> Es en este punto en donde se elige si el operador será compacto, convexo, etc., o alguna combinación de ellos con base en sus restricciones.



márgenes de robustez, los cuales se calculan por medio de los operadores centro y radio del sector en uso [44], [27].

Otra manera de medir esta propiedad de robustez es la mencionada en [9], en donde se usan propiedades de sectores obteniendo así una *conicidad robusta*. En dicha referencia se obtienen los llamados índices de robustez. Este es otro camino para estudiar esta propiedad. Por otro lado, los sistemas difusos tienen esta propiedad implícita, ya que la anchura de la base de las funciones de pertenencia los hace tener esta peculiaridad. Si a esto sumamos lo antes mencionado acerca de operadores podrá notarse que estos controladores son robustos en gran medida.

Para terminar los comentarios en este sentido, puede verse que el uso del enfoque entrada-salida es muy útil, pues permite estudiar propiedades importantes de los sistemas difusos, como ha sido el caso de la estabilidad a lo largo de este trabajo.

Recientemente se ha venido desarrollado otra manera de estudiar el problema de estabilidad absoluta y es la que se basa en *inclusiones diferenciales*, [48], [57] que aunque ya habían sido utilizadas en el estudio de ecuaciones diferenciales -y por tanto de sistemas físicos- [46] es hasta hace muy poco que se han aplicado a cuestiones más fuertes y específicas como la estabilidad.

Es conveniente mencionar que también se han hecho aportaciones en la teoría entrada-salida como el caso de estabilidad local  $L_2$  basada en espacios binormados extendidos, que, con la idea de que se pueden tener modelos matemáticos "exactos" de sistemas físicos a costo de hacer restricciones severas en el espacio de funciones de entrada, permite hacer suposiciones menos restrictivas en la definición de nuestros espacios de señales de entrada [27], [28].

Existen muchas maneras de estudiar la estabilidad de los SCD aunque considero que una de las más atractivas es la de entrada-salida, pues desde este punto de vista se tienen herramientas poderosas como la pasividad y pequeñas ganancias; que por otro lado pueden relacionarse con Lyapunov, ampliando así su acción. Por supuesto que podrían establecerse nuevos puntos de vista a partir de otras herramientas de los sistemas no lineales como podría ser el método geométrico [16], [32], o algo más abstracto aun. Desde luego que no menos importante o interesante deja de ser el enfoque meramente difuso, pues se tienen resultados interesantes que toman a la energía [22] y las funciones de Lyapunov [12] como su pauta. También se han logrado hacer analogías difusas con conceptos típicos del control abrupto (o no difuso) como en los casos de controlabilidad [10], estabilidad, modelado, identificación [9], etc., y como la tendencia en estos años es el control inteligente aun se pueden tener combinaciones con otras disciplinas como las redes neuronales y/o algoritmos genéticos que harán que esta área del control resulte aun más fascinante, por tratar de modelar y controlar esquemas que representan la manera de pensar, y decidir de los seres humanos, esto es, su *inteligencia*.

## Referencias

- [1] Abbagnano, Nicola, *"Diccionario de Filosofia"*. Fondo de Cultura Económica. México, 1974.
- [2] Border, Kim .C., *"Fixed point theorems with applications to economics and game theory"*. Cambridge Press 1985.
- [3] C. C. Lee, *"Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller- Part I"*. IEEE Trans. Syst. Man Cybern., vol. 20, no. 1, pp. 419-435, Mar./Apr., 1990.
- [4] C. C. Lee, *"Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller- Part II"*. IEEE Trans. Syst. Man Cybern., vol. 20, no. 1, pp. 419-435, Mar./Apr., 1990.
- [5] Cheng, D. K., *"Analysis of linear systems"*. Addison Wesley, 1989.
- [6] Chin-Ming Hong, Huan-Wen Tzeng, Chi-Wu Huang, *"Design of a static reactive power compensator using fuzzy sliding mode control"*. Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, Fl. December 1994
- [7] Debnath, Lokenath, Mikusinski, Piotr, *"Introduction to Hilbert spaces with applications"*. Academic, Boston, 1990.
- [8] Desoer, C. A. ,Vidyasagar, M. *"Feedback systems: input-output properties"*, Academic Press, 1975.
- [9] Driankov, D., Hellendoorn, H., Reifrank, M., *"An introduction to fuzzy control"*. Springer Verlag, 1993.
- [10] Farinwata, Shehu, Vachtsevanos, George, *"A survey on the controlability of fuzzy logic systems"*. Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, December 1993.

- [11] Furutani, E.; Sacki, M., Araki M., *Shifted Popov criterion and stability analysis of fuzzy control systems*. Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control". FA8-900, Tucson, Arizona.
- [12] Guang-Chyan Hwang, Shih-Chang Lin, *"A stability approach to fuzzy control design for nonlinear systems"*. Fuzzy Sets and Systems 48 (1992) 279-287, North-Holland.
- [13] Gupta, Madani, Trojan, George, Kiszka, Jerzy, *"Controlability of fuzzy control systems"*. IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics, vol. SMC-16, no. 4, July /August 1986.
- [14] Harris, C. J., Valenca, J. M. E., *"The stability of input-output dynamical systems"*. Academic Press, 1983.
- [15] Hutson, V., Pym J. S., *"Applications of functional analysis and operator theory"*. Academic Press, N.Y., 1980.
- [16] Isidori, A., *"Nonlinear control systems: an introduction"*. Springer-Verlag, 1989.
- [17] Istratescu, Vasile. *"Strict convexity and complex strict convexity: theory and application"*. D, Reidel Publishing Co. (Mathematics and its applications, v. 7), Dordrecht, Holland, 1981.
- [18] Istratescu, Vasile Y., *"Fixed point theorems"* (Mathematics and its application V7). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland, 1981.
- [19] Jiang Shiang Chen, Chao-Shu Liu, Yu-Wein Wang, *"Control of robot manipulator using a fuzzy model-based sliding control scheme"*. Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, Fl. December 1994.
- [20] Kevin, Self, *"Designing with fuzzy logic"*, IEEE Spectrum, pp. 42-44, 105, November 1990.
- [21] Khalilh Hassan K., *"Nonlinear systems"*. McMillan Publishing Company, 1992.
- [22] Kiszka, J. B., Gupta M. M., *"Energetic stability of fuzzy dynamic systems"*. IEEE Trans. Syst. Man. Cybern., vol. SMC-15, pp783-791, 1985.
- [23] Li-Xin Wang, *"Adaptive fuzzy systems and control"*, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- [24] Lipschutz, Seymour, *"Teoria de conjuntos y temas afines"*. Schaum - McGraw -

Hill, 1970.

[25] Maciejowski, Jan Marian, "*Multivariable feedback design*". Addison-Wesley, Wokingham, England. 1989

[26] Marin, J. P., Titli, A., "*Comparative analysis of stability methods for fuzzy controllers*". Proyecto CSN, Universidad de Toulouse, Francia..

[27] Márquez, Horacio, "*A local theory of input-output stability of dynamical systems*", Proceedings of Control Conference. Seattle, Washington. June 1995.

[28] Martin, Robert H. ., Jr., "*Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*". Wiley-Interscience Publication, North Carolina, 1976.

[29] Morari, Manfred, Zafirou, Evangelos, "*Robust process control*". Prentice Hall, 1992.

[30] Murray, Spiegel R., "*Variable Compleja*". Schaum-McGraw-Hill, N. Y., 1991.

[31] Nieto, Jose I, "*Introducción a los espacios de Hilbert*", monografía no. 19, serie matemática. Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, Departamento de Asuntos Científicos, Secretaria General de la Organización de Estados Americanos, Washington DC, 1978.

[32] Nijmeyer, H., Van der Schaft, A. J., "*Nonlinear dynamical control systems*", Springer Verlag, 1990.

[33] Park, Schie, "*Fixed point theorem on compact convex sets in topological vector spaces*". Contemporary Mathematics, Vol. 72, 1988.

[34] Rahaim. Manríquez Salomón, "*Compendio de Filosofía*". Editorial Progreso. México, 1966.

[35] Rasmussen, Robert D., Michel, Anthony, "*Stability of interconnected dynamical systems described on Banach spaces*", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol., AC-21, No. 4, August 1976.

[36] Ray, William O., "*The fixed point property and unbounded sets in Hilbert Spaces*". Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 258, number 2, April 1980.

[37] Reich, Simeon, "*Fixed points in locally convex spaces*", Math. Z. 125, 17-31, Springer-Verlag, 1972.

- [38] Rosenbrock, H. H. *"Multivariable Circle Theorems"*. Recent Mathematical Development in Control, Bath, 1972, D. J. Bell, Ed. London: Academic Press, 1973, pp. 345-365.
- [39] Safonov, M.G., *"Stability and robustness of multivariable feedback systems"*. The MIT Press Cambridge, 1980.
- [40] Schwartz, Daniel G., Klir, George, *"Fuzzy logic flowers in Japan"*, IEEE Spectrum, pp. 32-35, July 1992.
- [41] Skelton, Robert E, *"Dynamic systems control"*. J. Wiley, N.Y. 1988.
- [42] Slotine, J.J. E, Li Weiping, Li, *"Applied nonlinear control"*, Prentice Hall, N.J., 1991.
- [43] Spong, M. W., Vidyasagar M, *"Robot dynamics and control"*. J. Wiley and Sons, 1989.
- [44] Stoer, Josef, *"Convexity and optimisation in finite dimensions"*. Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [45] Tanaka, Kazuko, Sugeno, Michio, *"Stability analysis and design of fuzzy control systems"*. Fuzzy sets and systems 45(1992) 135-136. North-Holland.
- [46] Thompson, Peter M., Stein G., Athans M., *"Conic sectors for sampled-data feedback systems"*. Systems & Control Letters 3 (1983) 77-82, North Holland, July 1983.
- [47] Vidyasagar, M., *"Nonlinear systems analysis"*, Prentice Hall, N.J., 1992.
- [48] Wang, Kaining, Michel, Anthony N., *"Stability analysis of differential inclusions in Banach spaces with application to nonlinear systems with time delays"*. Proceedings of the American Control Conference. Seattle, Washington, June 1995.
- [49] Wellstead, P. E., *"Introduction to physical system modelling"*. Academic Press, 1979.
- [50] Willems, J. C., *"The analysis of feedback systems"*. Research Monograph No. 62, The MIT Press, 1971.
- [51] Yuan Yih Hsu, Chin Hsing Cheng, *"A fuzzy controller for generator excitation control"*. IEEE Transactions on Syst. Man. and Cybern., vol. 23, no. 2, March/April 1993.

- [52] Zadeh, L. A., "Outline of new approach to the analysis of complex system and decision process". IEEE Trans. Syst. Man Cybern., vol SMC-3, pp. 28-44, 1973.
- [53] Zadeh, L. A., "Making computers think like people", IEEE Spectrum, August 1984.
- [54] Zames, G., "On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems- part I: conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity". IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-11, No. 2, April 1966.
- [55] Zames, G., "On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems- part II: conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities". IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-11, No. 2, April 1966.
- [56] Zavala Yoé Ricardo, Mendoza Escamilla Victor X., "Estudio sobre el Control Difuso y su implementación en un microcontrolador". Tesis de licenciatura, UNAM, Facultad de Ingeniería. 1993.
- [57] Zeidler Eberhard, "Nonlinear functional Analysis and its application". Vol. I, Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, Leipzig 1986.
- [58] Zhen Yu Zhao, Masayoshi Tomizuka, Setsuo Sagara, "A fuzzy tuner for fuzzy logic controllers". ACC/TP3 1992.