01168 1 2q

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

EL PROBLEMA DE INVENTARIO: CON MULTIPRODUCTOS

TESIS

QUE PARA RECIBIR EL GRADO DE

MAESTRA EN INGENIERÍA

(INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES)

Presenta

ISABEL PATRICIA AGUILAR JUÁREZ

Ciudad Universitaria — Mayo de 1996

No hay nada más gratificante que la sensación de un trabajo concluido y una meta más, alcanzada.

Quiero hacer patente mi agradecimiento al Dr. Sergio Fuentes Maya por todo su apoyo y comprensión así como por sus valiosos comentarios y consejos durante mis estudios de Maestría, sin los cuales el camino seguramente habría sido más sinuoso, y la meta tal vez inalcanzable. Asimismo agradezco a mis profesores por compartirme sus conocimientos y experiencias, a mis amigos por ayudarme a hacer de esta etapa una de las más felices de mi vida, y muy especialmente doy las gracias a cada uno de los miembros de mi jurado por el apoyo y la confianza que me brindaron, así como por sus aportaciones para la mejor conclusión de este trabajo.

El agradecimiento es la más humilde, pero también la más noble respuesta de quien ha recibido tanto amor.

A mis papás, a quienes les debo todo lo que soy.

A mis hermanos que al tiempo son fuertes apoyos y sabios consejeros.

A mis cuatro sobrinos por ser una gran razón para existir y superarme.

A Martha y Karla por sus cuidados y consejos.

CONTENIDO

RESUMEN

En el desarrollo económico de un país, la industria juega un papel importante. En la actualidad, con la apertura económica y comercial, es indispensable el crecimiento sano de la industria nacional en general y de la industria productiva en particular. En esta última, se deben cuidar y planear los niveles de producción de manera que los resultados sean óptimos. Es importante, aclarar que la economía de una empresa productiva no depende solamente de los costos de producción y de la recuperación a través de la venta, sino que un concepto básico dentro de dicha economía es el inventario.

La capacidad de inventario, generalmente limitada, representa una fuerte restricción para la producción sobre todo si observamos que se refiere tanto a inventario de materia prima como de producto terminado. Por otra parte, el costo de mantener un inventario alto y sin movimiento representa capital inactivo ó por el contrario un inventario insuficiente puede implicar bajas en la producción ó pérdida de clientes, todo ello con repercusiones económicas para la empresa. Se observa entonces que existe una fuerte relación entre el problema de control de la producción y el de control de inventarios.

El objetivo de este trabajo es analizar algunas técnicas que nos permitan resolver de manera óptima el problema de inventarios con varios niveles ó almacenes, tanto para el caso de empresas productivas como para aquellas que se encargan de la distribución de materiales o productos terminados. Se presentarán tanto métodos heurísticos como métodos exactos basados en técnicas de cálculo y de Investigación de Operaciones, pero se enfatizará en algunos métodos heurísticos como el **MRP** y el **DRP** debido a su amplia difusión y aplicación actual en el mercado, así como por el gran respaldo computacional que existe para ellos a través de diversa paquetería de cómputo. Finalmente se presentarán algunos testimonios de gerentes de control de inventarios y producción de algunas empresas que han optado por la implantación de este aún novedoso sistema de control. Para abordar con fundamentos teóricos claros, que nos permitan efectuar posteriormente una comparación entre las técnicas presentadas, se presentan primero, en los capítulos 1 y 2 algunos conceptos básicos de la teoría de inventarios, así como algunos de los modelos básicos desarrollados para el caso de inventarios con un solo producto con el fin de utilizarlos más tarde, en el capítulo 3, como herramienta para la comprensión y análisis de los sistemas de inventarios en los que se desea controlar, de manera simultánea, varios artículos entre los cuales existe algun tipo de competencia, ya sea por la demanda o por los recursos, y en los capítulos 4 y 5 de sistemas de inventarios con varios artículos y niveles múltiples, los cuales se presentan en la planeación de las necesidades de distribución cuando el sistema tiene varios centros y niveles de distribución del producto.

CAPITULO 1

CONCEPTOS DE CONTROL DE INVENTARIOS

INTRODUCCIÓN

Sabemos, gracias a la historia, que cuando el hombre se dio cuenta de que no siempre era posible obtener los artículos que necesitaba en el momento en que los requería, concibió la idea de aprovisionarse de aquellos artículos que le resultaran más indispensables, por ejemplo, tal vez, agua y alimentos. Seguramente también pensó en la posibilidad de conservar tanto como le fuera posible sin tomar en consideración lo que le costaría no solamente adquirirlo y mantenerlo guardado, sino también lo que tendría que desechar por haberse descompuesto después de conservarlo mucho tiempo. Tal vez fue esa la primera y más rudimentaria expresión de un inventario, que se ha venido afinando a través del tiempo.

Actualmente, el uso de los inventarios se ha generalizado al grado de que no solamente se utilizan en prácticamente todas las empresas, sino que todos manejamos pequeños inventarios familiares: La despensa, el botiquín, etc. Ciertamente, para manejar estos pequeños inventarios familiares no requerimos desarrollar toda una teoría, ni realizar ningún tipo de análisis sofisticado, pues generalmente procedemos por ensayo y error, sin embargo, esto no es factible en el caso de una empresa, en donde su crecimiento y supervivencia dependen, entre otras cosas, del manejo adecuado de sus inventarios.

Antes de tratar de plantear o resolver algún problema de inventarios, se necesita tener conocimiento de ciertos conceptos básicos de la teoría de inventarios.

El objetivo de este capítulo, es proporcionar este conocimiento, y para lograrlo, se presentan primero, algunos antecedentes de la teoría de inventarios y ciertas definiciones básicas, que nos permitan, en seguida, identificar claramente, las funciones de un inventario. A continuación se revisan los objetivos del control de inventarios, y finalmente, se analizan los costos involucrados dentro de un sistema de inventarios.

1.1 RESEÑA HISTÓRICA DE LA TEORÍA DE INVENTARIOS

Hace aproximadamente 300 años, la administración de los inventarios era relativamente sencilla. Los inventarios eran considerados por los comerciantes, productores y aseguradores, principalmente como una medida de riqueza. La riqueza y poder de un negocio o un pueblo era evaluada en términos del número de trigales, cabezas de ganado, libras de oro, etc., que tenían guardados en almacenes. Pappilo (1697) hablando de los inventarios decía que:

" La existencia o riqueza de un reino no consiste solamente en nuestro dinero, sino también en nuestras mercancías y embarques para comerciar, y almacenes surtidos con todos los materiales necesarios".

En este siglo, en los albores de los años 20's, los encargados de tomar las decisiones en las organizaciones empezaron a poner mayor énfasis en la liquidez de los capitales, tales como los inventarios, hasta convertirse para ellos en una importante meta que perseguir, por el bien de la misma organización y la seguridad del monto de las transacciones comerciales. En este sentido, Whitin (1957) reportó lo siguiente:

" Frecuentemente, los inventarios se conocen como el "cementerio" de los negocios Americanos, como existencias en exceso, que han sido una causa importante del fracaso de dichos negocios. También se considera a los inventarios como una influencia desestabilizadora de los negocios en curso... Los hombres de negocios han desarrollado un miedo casi patológico del crecimiento de los inventarios".

La mayoría de los miedos patológicos a los cuales se refiere Whitin, datan de 1920 - 1921, cuando se reconoció la primera "depresión de inventario" causó, en su momento, un fenómeno comúnmente conocido como "hand-to-mouth buying" (compra de la mano a la boca) en la economía americana (McGill, 1927). Como el nombre lo sugiere, durante esta depresión, se hizo mucho énfasis en la necesidad de conseguir tasas altas de rotación de inventarios, entendiéndose como tasa de rotación de un inventario, el cociente

$$\text{Rotación de inventario} = \frac{\text{ventas anuales ó uso (en costo)}}{\text{inventario promedio (en \$)}}$$

Algunos administradores sobre-reaccionaron tratando de conseguir inventarios cercanos a cero, con resultados desastrosos. La alta gerencia en muchas empresas ha revertido completamente su actitud de 250 años antes, respecto a la deseabilidad de mantener inventario.

Las altas tasas de inflación, que se hicieron comunes en los 70's, en la economía mundial, alteraron permanentemente los pasados patrones de gasto de las personas, las empresas y los gobiernos. A finales de los 70's la tasa de interés principal (la pagada a los más importantes prestamistas) había sobrepasado, en algunos países tales como Canadá, el 20% anual. Se hicieron comunes tasas estratosféricas en países poco desarrollados.

Actualmente, los inventarios son vistos por la mayoría de los más grandes administradores como un gran riesgo potencial y rara vez como una medida de riqueza. Persiste un miedo constante en las mentes de la mayoría de los planeadores, en el sentido de que el almacenamiento de mercancías en exceso de la demanda actual puede requerir drásticas rebajas en los precios, mientras que se podría vender antes de que se convierta en inútil como resultado de la obsolecencia por cambios de estilo o tecnología. La obsolecencia es, realmente, de origen reciente, pero promete ir incrementando su importancia en el futuro como resultado de que los tiempos de vida se hacen cada vez más cortos.

La mayoría de los administradores, hoy en día, reconocen la importancia de balancear las ventajas y desventajas de llevar inventarios. Sin embargo, algunos de los antiguos miedos aún persisten. Como expresó alguna vez el presidente de una compañía:

"Acepto que los inventarios juegan un papel crucial en mis operaciones. Pero no puedo perder de vista el otro lado de la moneda. Mientras los inventarios son algo que necesito para sobrevivir, también representan materiales con los que me puedo apuñalar".

Pero balanceando las ventajas y desventajas de la inversión en inventario, el futuro puede no ser tan simple como en el pasado. En 1980 la industria automotriz japonesa superó a la de los Estados Unidos. La Toyota se convirtió en el segundo productor más grande del mundo. Vendió más automóviles que toda la industria del Reino Unido, y las ventas japonesas sobrepasaron a las de Francia en Francophone Africa. Los sistemas japoneses de planeación de la producción, la administración de los inventarios, y el diseño organizacional fueron acreditados como las estrategias principales para lograr esta asombrosa hazaña. Así, los japoneses han demostrado que existe una debilidad en la aproximación occidental a la administración estratégica, reconocida anteriormente por Skinner (1969) quien llegó a comentar:

La manufactura ha sido dominada durante mucho tiempo, por expertos y especialistas.... Como resultado, los altos ejecutivos tienden a evitar involucrarse en elaborar nuevas políticas de producción.... función que podría ser una buena ventaja y estar unida a la estrategia corporativa....

Puede parecer extraño pensar en la producción solamente como una arma competitiva, pero actualmente la historia de la industria de autos de los Estados Unidos, muestra que a finales de los 50's la manufactura se había convertido en un factor neutral en la competencia. Excepto probablemente debido a su confianza en las economías de escala, tendieron a competir por medio de estilo, mercadeo, y cadenas exclusivas. La investigación realizada por Abernathy, entre otros en 1981, demuestra que una explicación válida del **suceso japonés** debió iniciar con el factor de " proceso productivo ", una amalgama de prácticas administrativas y sistemas conectados con administración de inventarios y planeación de la producción y control. Mientras que nosotros pensábamos en términos de el nivel de existencias óptimo y las cantidades a ordenar, los japoneses examinaban intercambios entre diferentes tipos de sistemas de producción. Ellos mismos desarrollaron un sistema de producción que efectivamente eliminó la necesidad de un nivel significativo de inventario. Tal sistema requiere un extensivo reajuste organizacional, e investigaciones que solamente los niveles más altos de ejecutivo podrían autorizar.

Lo que ha sucedido es ahora lógicamente obvio. Los sistemas de decisión sobre el manejo de los inventarios en la nueva competencia de la industria internacional del futuro, no puede estar muy alejada de sus procesos de producción. El control de los inventarios, la planeación de la producción, y la estrategia corporativa, están muy relacionadas.

1.2 DEFINICIONES BÁSICAS

Como ya se mencionó anteriormente, nuestro objeto de estudio son cierto tipo de modelos de inventarios, que nos permitan analizar y resolver problemas de control de inventarios. Pero antes de iniciar nuestro estudio, es necesario hacer una pausa y dar un marco de referencia para situarnos exactamente en el problema y el ámbito en que se desarrollará el presente trabajo. Para ello, es necesario precisar ciertos conceptos básicos como:

- ¿ Qué es un modelo ?
- ¿ Qué tipo de modelos se manejarán ?
- ¿ Qué es un inventario ?
- ¿ Qué es el control de inventarios ?

Empezaremos por decir que un modelo es una abstracción de una situación real, que se hace con el fin de simplificar el estudio de dicha realidad, pero que debe recopilar las principales características de ella.

Una forma de caracterizar a los modelos, es clasificarlos, primeramente, en dos tipos:

+ Físicos: Representan o simulan físicamente algunos aspectos del comportamiento de un sistema real.

+ Simbólicos: Representan por medio de símbolos, en muchas ocasiones gráficos, los elementos y el comportamiento de la situación real. Su interpretación requiere conocer el código de la simbología utilizada.

A su vez, los modelos simbólicos se pueden dividir en:

- Matemáticos: Determinístas y Probabilístas

- No matemáticos.

Los modelos que se manejarán en este trabajo, son de tipo simbólico y matemático, tanto determinístas como probabilístas ya que facilitan la toma de decisiones con base en criterios analíticos exactos que permiten minimizar los costos asociados al sistema de inventario.

En relación con el concepto de inventario, una definición generalizada es la siguiente:

Un inventario es una cantidad de bienes o materiales con valor monetario, que se encuentran bajo el control de una organización o empresa, y que se mantienen por algún tiempo en forma improductiva, esperando su uso o venta. Es también un sistema regulador de las actividades de oferta y demanda.

Un inventario puede estar formado por uno o más artículos en donde cada artículo puede ser materia prima, alguna parte manufacturada ó ensamblada, o bien algún producto terminado.

Así, se conoce como control de inventarios a las actividades y técnicas de manutención de las existencias de artículos en los niveles deseados, independientemente de que sean materias primas, trabajos en proceso, o productos terminados.

En la industria manufacturera, existe una estrecha relación entre el control de la producción y el control de inventarios. Una decisión de finiquitar una orden de producción reducirá el inventario de materia prima, incrementará temporalmente el inventario de trabajos en proceso, y eventualmente, hará crecer el de producto terminado. De igual manera, la decisión de elevar el nivel de inventario de una parte manufacturada, dará como resultado la liberación de una orden de producción.

No todos los inventarios son iguales, cada uno tiene sus características propias y de acuerdo a ellas se debe elegir un modelo apropiado para analizarlo. Sin embargo, podemos encontrar las siguientes componentes básicas:

* Número de productos:	Uno ó varios.
* Tipo de demanda:	Determinísta o estocástica.
* Tipo de Oferta:	Determinísta o estocástica.
* Horizonte de Planeación:	Un período, varios períodos ó bien un número infinito de períodos.
* Costos:	Por pedido, por artículo, por llevar inventario o por déficit.
* Forma analítica de la función de costos:	Lineal, convexa, cóncava u otra.
* Tiempo de entrega de los artículos:	Determinísta, estocástico.
* Política de Operación del Inventario:	Revisión continua, revisión periódica.

1.3 FUNCIONES DE LOS INVENTARIOS

En la sección anterior, se estableció que un inventario es un sistema regulador entre los procesos de oferta y demanda. Esta definición sugiere que un inventario existe porque los procesos de oferta y demanda difieren en las tasas en las cuales, proveen o requieren existencias. Por ello, cualquier propósito significativo para su existencia estará basado en el deseo o la necesidad de que estas dos tasas difieran.

Se puede decir entonces, que el papel principal de un inventario en la industria, es servir como un amortiguador, acoplando estados sucesivos de producción y distribución, con el fin de lograr mayor eficiencia. Un papel secundario es servir como protección contra aumentos de precios y fluctuaciones en demandas.

Dentro de este marco general, se pueden identificar las siguientes funciones básicas de un inventario:

1) Suavizar las Operaciones de una empresa

Regularmente, los procesos de demanda sufren variaciones, de alguna manera previsibles, aunque no controlables. Estas fluctuaciones muchas veces ocurren de acuerdo a la temporada del año, ó ciclos comerciales o fiscales, y se pueden resolver modificando la producción cada vez que se requiera, lo cual exige la existencia de materia prima, o bien produciendo y almacenando con anticipación a las demandas pico.

2) Explotación del Mercado

Frecuentemente, los movimientos en el mercado hacen que resulte económicamente ventajosa la creación de un inventario. Las variaciones de precios de los bienes y productos de un mercado o bien de la materia prima, pueden motivar la adquisición prematura o la producción sobre pedido. La posibilidad de un incremento en los costos de la mano de obra puede hacer útil la constitución de un inventario.

3) Protección contra déficit de material

Al enfrentarnos a las fluctuaciones impredecibles en los procesos de oferta y demanda, se corre el riesgo de que, en un momento dado, exista escasez de material y se experimente una lucha con los clientes, interrupción en las operaciones, etc. Un inventario es un "seguro" contra dicha situación. La necesidad de la existencia de tales inventarios aumenta de acuerdo al crecimiento de las fluctuaciones, y al tiempo que transcurre entre una fluctuación aleatoria y su compensación.

4) Economías de escala

Aún cuando los procesos de oferta y demanda se pudieran controlar de manera que fueran iguales e invariantes en el tiempo, no sería deseable hacerlo, puesto que implicaría un gran número de pequeñas remesas y despreciaría las economías con pocas remesas pero de gran tamaño, cuando ocurre que en muchas ocasiones, se obtienen descuentos por volumen con un consecuente ahorro en el costo promedio por artículo.

5) Control Económico

Un argumento a favor de los inventarios grandes, es que requieren menor control y que es más barato mantener grandes inventarios que revisar los niveles de inventario con mucha frecuencia. Sin embargo, es importante saber cuanto se gasta en diseñar, implantar y mantener un inventario, para determinar su eficiencia y decidir la existencia del mismo.

Cabe decir que existen también algunas corrientes que consideran que lo óptimo es llegar a tener un inventario cero.

1.4 OBJETIVOS DEL CONTROL DE INVENTARIOS

Dentro de una misma empresa, el control de inventarios puede tener objetivos diferentes dependiendo del departamento de que se trate. Tales objetivos pueden ser:

+ El departamento de ventas quisiera estar preparado para atender los pedidos de sus clientes lo más pronto posible, por lo que le gustaría tener en existencia una cantidad suficiente de productos terminados, o bien, de material para producir rápidamente los artículos requeridos.

+ El departamento de producción desea ser eficiente, lo cual implica que preferirá mantener un nivel alto de producción para reducir el costo de la misma por producto. Para ello se requiere tener en existencia una cantidad suficiente de materiales, componentes, y trabajos en proceso para que no se pare la producción por falta de material.

+ El departamento de compras quiere obtener los mejores precios de compra. Por ello prefiere hacer pocos pedidos grandes en lugar de muchos pequeños. Además está interesado en constituir inventarios en prevención de alzas en los precios y escasez en el mercado.

+ El departamento de Finanzas desearía minimizar todas las formas de invertir en inventarios por el costo de capital y los efectos negativos que tienen los inventarios grandes en los activos.

+ El departamento de personal y relaciones industriales considera adecuada la creación de un inventario durante la época de baja demanda y estabilizar así el nivel de empleados, evitando despidos y una fuerte rotación de personal.

+ El departamento de ingeniería prefiere minimizar los inventarios puesto que no se aplazarían demasiado los cambios en ingeniería, mientras que con inventarios grandes dichos cambios se podrían hacer hasta agotar los diseños anteriores.

Como se puede observar, existen objetivos contradictorios entre departamentos de una misma empresa, y el considerar únicamente los objetivos de alguno de ellos, podría acarrear graves consecuencias en otros, por ello, se propone evaluar los objetivos de cada uno, determinando, para cada departamento, el costo asociado a la constitución de un inventario, y minimizar la suma de dichos costos. Si alguno de los costos es difícil de estimar, el administrador debe fijar el nivel que se podría alcanzar y minimizar la suma de los costos restantes, considerando esto como una restricción.

Otra manera de decidir consiste en relacionar los alcances de los objetivos con un beneficio, y elegir aquella política de inventario que maximice los beneficios. Ambas técnicas proporcionan el mismo resultado, si se considera la privación de beneficios como costo de oportunidad.

1.4 COSTOS EN UN INVENTARIO

La función de un inventario se puede expresar, de manera resumida, como "evitar los costos asociados con el hecho de no mantener ningún inventario". Sabemos que el mantener un inventario tiene un costo, sin embargo, se intenta que dichos costos sean menores que aquellos que se quiere evitar.

La actividad de mantener un inventario, involucra dentro del costo total, diversos costos que se pueden clasificar como sigue:

+ **Costos por Ordenar**: Son los costos en que se incurre por el simple hecho de hacer un pedido. Pueden deberse a cargos por flete, inicio de la producción, o gastos de facturación.

+ **Costos por llevar inventario**: Son los costos que se afrontan por mantener artículos en inventario, que pueden deberse a costos de capital, o bien, costos por manejo, obsolecencia y deterioro de los artículos en inventario, renta de almacenes, etc.

+ **Costos por déficit**: Se refieren a los costos ocasionados por la incapacidad de satisfacer la demanda, y se pueden presentar como costos por pérdida de clientes, penalizaciones por retrasos, o bien costos asociados con la interrupción de la producción o compras de emergencia.

+ **Costos del sistema**: Se refieren a los costos que dependen de la cantidad y calidad del esfuerzo realizado en el control de inventarios, y afecta los costos de revisión de inventarios, pronósticos y generación de registros, entre otras cosas.

+ **Costos por material**: En general los costos de los materiales no se modifican por la decisión de mantener inventarios. Las excepciones son los descuentos por cantidad y fluctuaciones en el precio.

CAPITULO 2

MODELOS BÁSICOS

INTRODUCCIÓN

En la investigación de cualquier tema, es indispensable iniciar haciendo un breve repaso de los fundamentos, puesto que estos constituyen una base firme para la mejor comprensión de dicho tema, y en su caso, para permitir que exista una continuidad en la investigación. Respecto al objetivo del presente trabajo, podríamos identificar como fundamentos a la terminología y conceptos básicos de la teoría de inventarios, y también a los modelos que representan a los problemas más sencillos de entre los que son objeto de estudio de la misma materia.

Hasta el momento, hemos cubierto lo referente a la terminología y conceptos básicos, por ello el objetivo de este capítulo es presentar, muy brevemente, algunos modelos básicos de la teoría de inventarios, tanto determinístas como aleatorios, así como los principales resultados que se conocen acerca de dichos modelos, y para ello se presentarán, en la primera sección, los modelos básicos de tipo determinísta, y en la segunda aquellos de tipo aleatorio.

2.1 CONCEPTOS GENERALES

Un inventario en el manejo de operaciones o producción, se entiende como un recurso escaso que está en espera de satisfacer una demanda futura.

Un problema de inventario involucra la formulación de reglas de decisión que responden a:

- ¿ cuándo es necesario efectuar un pedido ?,
- ¿ cuánto se debe ordenar ?,

y las reglas de decisión se enfocan a satisfacer la demanda a costo mínimo, o con ganancia máxima.

El sistema de inventario puede verse como un sistema con los siguientes componentes (fig 2.1):

a) Patrón de demanda.
b) Patrón de oferta.
c) Restricciones de operación.
d) Mecanismo de decisión o política de pedidos.
e) Costo total del inventario.

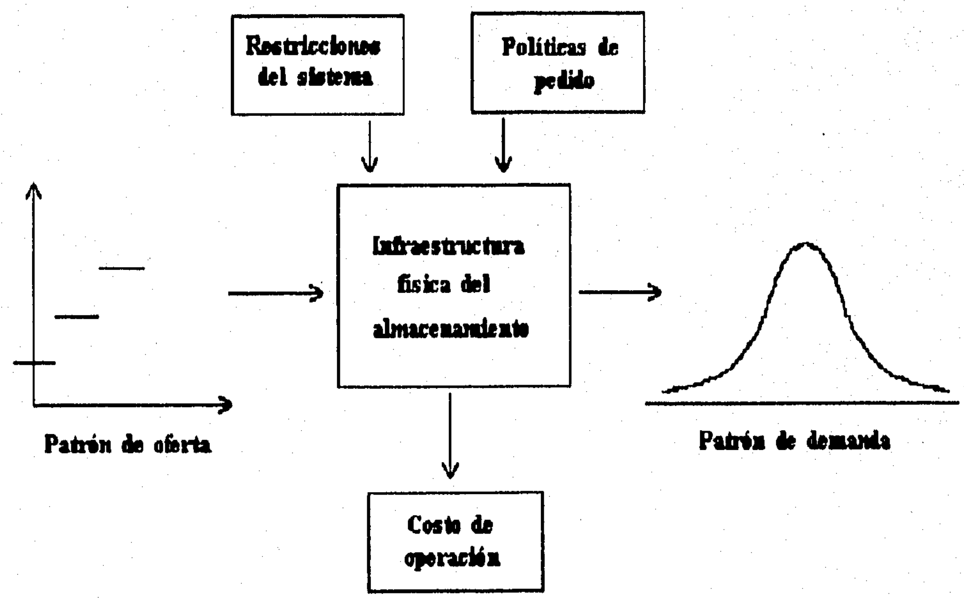


Fig 2.1 Los componentes del sistema de inventario.

Acerca de estos componentes, en los modelos básicos, podemos decir lo siguiente:

a) Demanda: Se supone que la demanda de artículos es constante y conocida y se denota por **d**.

b) Oferta: Es la parte del sistema de inventarios que es controlable por el decisior, y queda determinada por:

   Q = tamaño del pedido.
   T = tamaño del período de los niveles de inventario.
   S = nivel máximo de inventario.

   En realidad, estas variables definen a la política de operación del inventario, y por lo tanto el valor que tomen se determinará de manera óptima.

c) Restricciones de Operación: Son las propias del sistema que se analiza, por ejemplo, la imposibilidad en ocasiones de aceptar déficit en la satisfacción de la demanda.

d) Políticas de pedidos: Está relacionada con la elección de los valores **Q**, **T** o **S**, o alguna variante de ellos.

e) Costo de inventario: Es usual considerar un costo total por unidad de tiempo, derivado de los costos promedio de un ciclo. Los componentes de estos costos, por unidad de tiempo, son:

   Costo total = Costo por ordenar + costo por inventario
   + costo por déficit + costo de la compra ó producción.

Cada uno de los costos involucrados en el cálculo del costo total, se calcula en el caso determinísta como se muestra a continuación:

1) Costo por ordenar, por unidad de tiempo.

Si se considera que el costo por realizar un pedido es una cantidad fija e igual para cada requisición, se tiene que el costo por ordenar será

$$f(I_0) = kI_0$$

en donde I_0 es el número de pedidos por unidad de tiempo, y k es el costo de cada pedido. Nótese que se supone linealidad.

2) Costo por mantener inventario, por unidad de tiempo.

Se supone por simplicidad que el costo por mantener inventario por unidad de tiempo, es una función lineal, esto es, se puede calcular como

$$f(I) = hI$$

en donde I es el número de artículos en inventario, y h el costo de mantener un artículo en inventario, por unidad de tiempo. Sus unidades son [Unidades monetarias/unidad de tiempo].

3) Costo por déficit por unidad de tiempo.

El costo por déficit se puede modelar de cuatro formas básicas:

a) Si la demanda insatisfecha se transforma en pérdida de clientes, el costo por déficit depende únicamente del número de artículos faltantes y no del tiempo que persista la situación de déficit en el sistema, en este caso el costo por faltantes sería

$$f(y) = py,$$

en donde p es el costo por unidad faltante, e " y " es el número de unidades faltantes durante el período.

b) La incapacidad para satisfacer la demanda puede provocar interrupciones en la producción del cliente, lo cual ocasiona una penalización que depende del tiempo durante el cual prevalezca el déficit. En este caso, el costo por déficit se calcularía como

$$f(y) = py,$$

en donde p es la penalización por cada unidad de tiempo que permanezca interrumpida la producción a causa de los faltantes, e " y " es el tiempo total durante el cual se tiene déficit en la satisfacción de la demanda.

c) En ocasiones el costo por déficit depende tanto del tiempo que existan faltantes, así como de la cantidad de artículos de demanda insatisfecha. Entonces de la misma manera que en el caso del costo por inventario, se puede suponer que, en algunos casos, el costo por déficit es lineal, aún más, crece conforme aumenta el número de faltantes. Esto significa que el costo por déficit por unidad de tiempo, se puede calcular como

$$f(y) = py$$

donde y es el nivel de artículos faltantes en inventario (o demanda insatisfecha), mientras que p es el costo por tener un artículo de demanda insatisfecha, por unidad de tiempo. Al igual que en el caso anterior, las unidades son [u.monetarias/u.de tiempo].

d) Por último, en ocasiones el llegar a una situación de faltantes provoca que se realice un pedido de emergencia y se tiene, desde luego, un costo por pedir, en estos casos el costo por déficit no depende ni del tiempo en el que exista déficit, ni tampoco de las unidades faltantes, sino únicamente del hecho de que hay demanda insatisfecha. En este caso, el costo por déficit se puede modelar como

$$f(y) = p$$

en donde p es el costo en que se incurre cada vez que no se tiene la capacidad de satisfacer la demanda, durante el período.

4) Compra (o costo de producción) de artículos por unidad de tiempo.

De acuerdo con el razonamiento seguido para los otros costos que conforman la función de costo total del inventario, el costo por comprar o producir los artículos necesarios para hacer frente a la demanda por unidad de tiempo, se determina como

$$f(\mathbf{d}) = c\mathbf{d}$$

en donde **d** es el número de artículos solicitados por unidad de tiempo y c el costo de cada artículo.

Así, se tiene que el costo total del sistema de inventario, por unidad de tiempo es la suma de los costos por cada uno de los conceptos mencionados antes, esto es,

$$CT = f(I_0) + f(I) + f(y) + f(\mathbf{d}) \ ,$$

o bien (en el caso determinísta),

$$CT = kI_0 + hI + py + cd \ ,$$

mientras que el costo incremental por unidad de tiempo es

$$CIN = f(I_0) + f(I) + f(y) \ .$$

y corresponde a aquellos costos que dependen de la cantidad de artículos que se ordenen, así como del número de pedidos que se realizen durante la unidad de tiempo establecida.

Es importante notar que el costo que se utiliza en la solución de los problemas, es el costo por unidad de tiempo, que es un costo promedio. Esto se debe a que si el problema se prolongara en el tiempo, indefinidamente, el costo total también crecería constantemente acercándose al infinito, y este problema se puede solucionar utilizando, precisamente, costos promedio en lugar de costos totales, o bien, usando algún factor de descuento.

Como mencionamos antes, una de las características de un sistema de inventarios, es el patrón de demanda, que puede ser determinísta o aleatoria con una distribución específica y conocida. Dependiendo de cuál sea dicho patrón de demanda, se selecciona el modelo apropiado para el análisis del comportamiento del sistema. Por ello, es necesario desarrollar modelos determinístas y modelos aleatorios, que respondan a esta diversidad de realidades.

2.2 MODELOS DETERMINÍSTAS

En el caso de modelos de inventario con demanda determinísta y revisión periódica, se distinguen cuatro modelos clásicos que corresponden a cuatro casos del problema de pedido (o lote) económico, y sus variantes, y que se analizan en el marco de su desarrollo en el plano almacenamiento - tiempo. A saber, los casos son los siguientes:

Caso 1: Sin producción y sin déficit.

Caso 2: Con producción y sin déficit.

Caso 3: Sin producción y con déficit.

Caso 4: Con producción y con déficit.

MODELO SIN PRODUCCIÓN Y SIN DÉFICIT.

El modelo más sencillo supone que la entrega de los artículos solicitados es inmediata, y que por las características del artículo o bien del sistema que se desea analizar, no se está dispuesto a tolerar la falta de artículos cuando se tiene demanda positiva. Por otro lado, se supone que la demanda es contínua y constante durante el período que se analiza, y en general durante todo el horizonte de planeación.

El inventario se analiza para varios períodos de tiempo, lo cual también valida la utilización de la función de costo promedio como función a minimizar, ya que implica que la misma decisión se deberá tomar período con período y el costo calculado mediante la utilización del costo promedio, para cada uno de los períodos en el horizonte de planeación, será equivalente al costo real del sistema calculado para todo el horizonte de planeación.

Los supuestos básicos de este modelo son los siguientes:

1) La demanda de artículos es una constante conocida **d** (No. de artículos/U. de tiempo).

2) El tiempo de entrega de los pedidos es cero.

3) No se permite que exista déficit.

4) Los costos significativos involucrados son conocidos y son los siguientes:
   k = costo fijo por ordenar (u. m.)
   c = costo por comprar artículos, en u. m. por artículo.
   h = costo por llevar inventario, en u. m. por artículo y por unidad de tiempo.

5) El tamaño del pedido es fijo, e igual a **Q** unidades.

6) El tamaño del período de tiempo también es fijo e igual a **T** unidades de tiempo.

El desarrollo de los niveles de inventario a lo largo del tiempo, cuando se ha decidido ordenar una cantidad **Q** cada vez que se llega a un nivel de inventario igual a cero, se muestra en la figura 2.2.

Si se analiza el problema para un período dado, tenemos que el costo del inventario al final del período será:

Costo por período:

$$CP = k + c\mathbf{Q} + h(\mathbf{Q}/2)\mathbf{T}$$

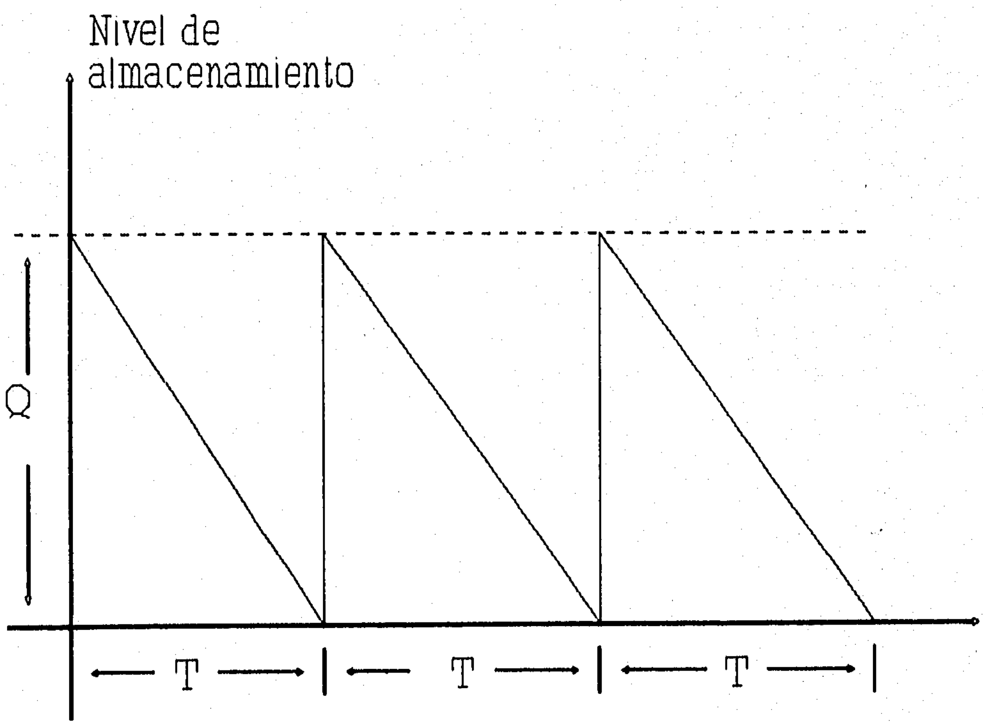


Fig 2.2 Comportamiento del nivel de inventario en el modelo sin producción y sin déficit

y si el período consta de T unidades de tiempo, se puede calcular el costo promedio por unidad de tiempo, simplemente dividiendo el costo del período entre la longitud del período, esto es:

Costo promedio por unidad de tiempo:

$$CT(\mathbf{Q}) = \frac{CP}{\mathbf{T}}$$

$$= \frac{k + c\mathbf{Q} + h\left(\frac{\mathbf{Q}}{2}\right)\mathbf{T}}{\mathbf{T}}$$

$$= \frac{k\mathbf{d}}{\mathbf{Q}} + \frac{h\mathbf{Q}}{2} + c\mathbf{d}$$

Utilizando métodos de Cálculo Diferencial, se puede minimizar esta función y se obtiene que los valores óptimos para el tamaño del pedido, el tamaño del período, y el costo promedio, son los siguientes:

$$\mathbf{Q}^* = \sqrt{\frac{2k\mathbf{d}}{h}}$$

$$\mathbf{T}^* = \sqrt{\frac{2k}{h\mathbf{d}}}$$

$$CT(\mathbf{Q}^*) = \sqrt{2h\mathbf{d}k} + c\mathbf{d}$$

MODELO CON PRODUCCIÓN Y SIN DÉFICIT.

Existen muchos casos en los que no es posible suponer la entrega inmediata de la cantidad solicitada de artículos, debido a las limitaciones en la capacidad del almacén de producto terminado, o en la capacidad de producción del fabricante, sin embargo esto no necesariamente significa que la entrega se vaya a postergar hasta que se logre completar el total de artículos solicitado, sino que es posible convenir la entrega continua de artículos a una tasa constante de **q** artículos por unidad de tiempo, durante parte del período, hasta lograr completar la entrega de la cantidad solicitada.

Este modelo responde principalmente a las condiciones de una empresa de producción (de ahí su nombre), sin embargo la situación descrita, puede también reflejar alguna otra limitación del inventario en sí o del proveedor.

Las suposiciones de este modelo son las siguientes:

1) El número de artículos demandados por unidad de tiempo es **d**, y es una constante conocida.

2) La cantidad **q** de artículos producidos (o mejor, entregados) por unidad de tiempo, también es una constante conocida, que además tiene la característica de que $q > d$, para evitar llegar a tener faltantes.

3) El nivel máximo de almacenamiento de artículos es una constante que se denota por **S**, y que formará parte de la política para ordenar.

4) El tamaño del período de tiempo es también fijo e igual a **T** unidades de tiempo, y en él se pueden reconocer dos partes:

   T_1 es el tiempo durante el cual existe producción (entrega de artículos).

   T_2 es el tiempo dentro del ciclo, en el que no existe producción.

5) El tamaño del pedido es fijo e igual a **Q** unidades.

6) No se permite déficit.

7) Los costos son conocidos:

   c= costo de producción de un artículo (u. m.).

   h= costo por almacenamiento de un artículo por unidad de tiempo (u. m. / unidad de tiempo).

   k= costo por iniciar la producción (u. m.).

El desarrollo del sistema de inventario representado por este modelo, se muestra en la figura 2.3.

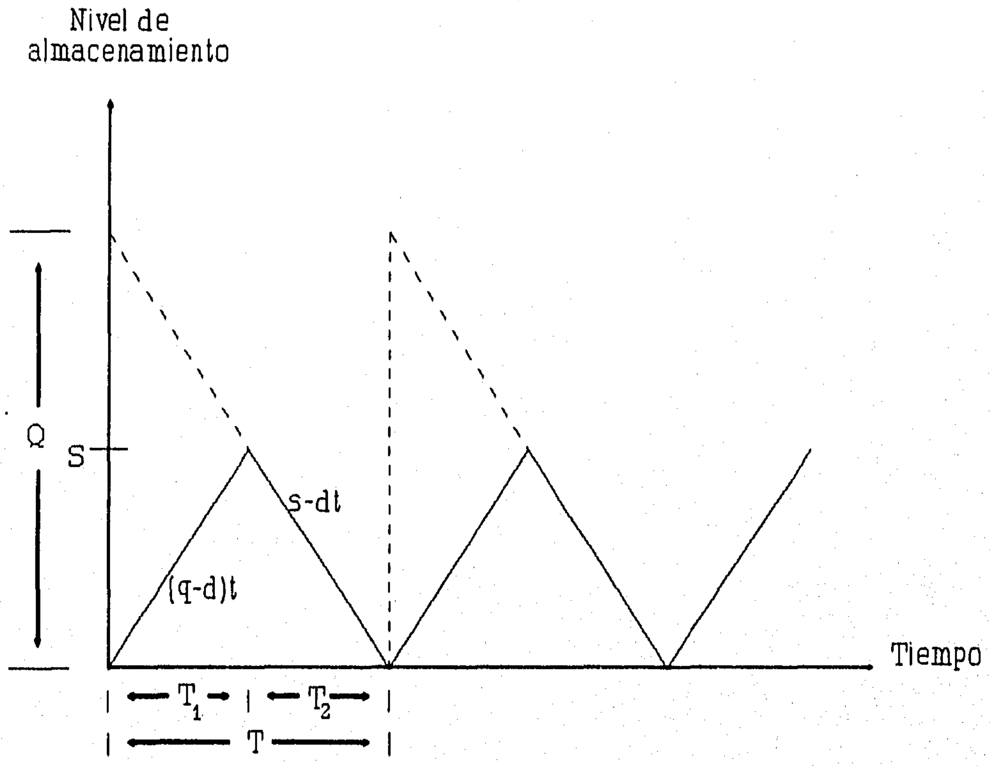


Fig 2.3 Niveles de inventario en el modelo con producción y sin déficit.

Si analizamos primeramente los costos por período, se verá que son los siguientes:

Costo por período:

$$CP = k + c\mathbf{Q} + h\left(\frac{\mathbf{S}}{2}\right)\mathbf{T}$$

que si se divide por **T** para obtener el costo promedio por unidad de tiempo, proporciona la siguiente expresión:

Costo promedio por unidad de tiempo:

$$CT(\mathbf{Q}) = \frac{CP}{\mathbf{T}}$$

$$= \frac{k\mathbf{d}}{\mathbf{Q}} + h\left(\frac{\mathbf{S}}{2}\right) + c\mathbf{d}$$

Nótese que a diferencia del modelo anterior, en este caso en la función de costo promedio intervienen varias variables, entre las cuales se puede observar que existen las siguientes relaciones:

$$Q = qT_1 \,, \quad Q = dT \,, \quad S = (q - d)T_1$$

de donde se concluye que

$$S = (q - d)\,\frac{Q}{q} = \left(1 - \frac{d}{q}\right)Q \,.$$

Finalmente, sustituyendo en la función de costo promedio, se obtiene que

Costo promedio por unidad de tiempo:

$$CT(Q) = \frac{kd}{Q} + \left[h\left(1 - \frac{d}{q}\right)\right]\frac{Q}{2} + cd$$

= costo por ordenar por unidad y por u. de tiempo
+ costo por almacenamiento por u. de tiempo
+ costo de producción por u. de tiempo.

y los valores óptimos para el tamaño del pedido, la longitud del período y el costo total determinados mediante el criterio de la derivada son:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2kd}{h\left(1 - \frac{d}{q}\right)}}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{d} = \sqrt{\frac{2k}{hd\left(1 - \frac{d}{q}\right)}}$$

$$CT(Q^*) = \sqrt{2h\left(1 - \frac{d}{q}\right)kd} + cd$$

Cabe mencionar que no siempre es más deseable, desde el punto de vista de minimizar el costo, mantener siempre un nivel de inventario positivo o cero, y garantizar que nunca habrá déficit, sino que por el contrario, ocasionalmente el tener cierta demanda insatisfecha durante una porción del período, tendrá un efecto de compensanción en el costo total y desde luego también el costo promedio del sistema, permitiendo lograr un costo menor.

MODELO CON DÉFICIT Y SIN PRODUCCIÓN

Este modelo responde a la inquietud de algunos encargados del control de inventarios, que consideran que hay muchas ocasiones en que la falta de artículos en existencia para satisfacer una demanda no es tan crítico, ya que su costo puede no ser demasiado elevado, y puede ayudar a evitar el crecimiento excesivo de los inventarios, sin que ello signifique que sea deseable tener faltantes, es decir, en muchos casos se puede tolerar, sin graves repercusiones para la economía de la empresa.

El tipo de problema de inventario que se resuelve utilizando este modelo, se puede representar gráficamente como se muestra en la figura 2.4, y corresponde al caso en el que la demanda insatisfecha se traduce en entrega retrasada de los artículos solicitados.

En el desarrollo de este modelo se parte de las suposiciones básicas que se relacionan a continuación:

1) La demanda **d** es una constante conocida, y sus unidades son número de artículos / u. de tiempo.

2) Se tiene una capacidad máxima de inventario fija e igual a **S** artículos.

3) Aunque está permitido tener un déficit, el nivel máximo permitido para él es **s** unidades.

4) El tamaño del pedido es una constante fija igual a **Q** artículos.

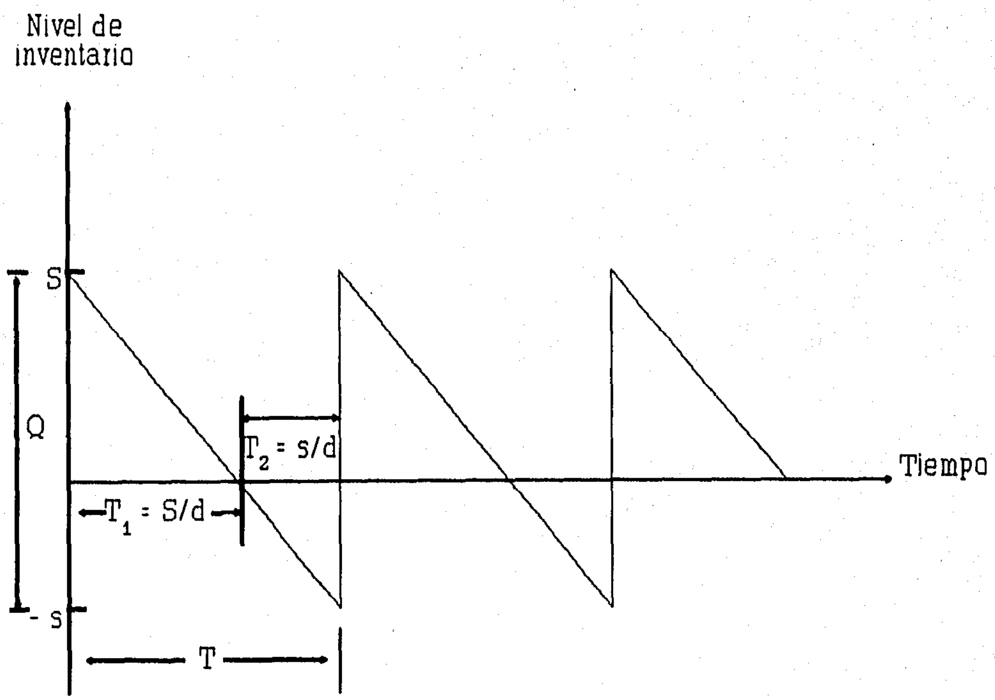


Fig 2.4 Inventario en el modelo sin producción y con déficit (entrega retrasada).

5) El tamaño del período es **T** unidades de tiempo.

6) Los costos son fijos y conocidos:

   k = costo por ordenar (por pedido).

   c = costo por artículo (u. m. / art.).

   h = costo por llevar inventario (u. m./ art. x tiempo).

   p = costo por tener déficit (u. m. / art. x tiempo).

Con base en estas suposiciones, se determina el costo del inventario, para cada período, como se muestra a continuación.

Costo por período:

En este caso, el costo por período del sistema se compone así:

CP = costo fijo por ordenar
+ costo de compra de materiales
+ costo por almacenamiento
+ costo por déficit ,

es decir,

$$CP = k + c\mathbf{Q} + h\left(\frac{\mathbf{S}}{2}\right)\left(\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{d}}\right) + p\left(\frac{\mathbf{s}}{2}\right)\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{d}}\right)$$

$$= k + c\mathbf{Q} + h\left(\frac{\mathbf{S}^2}{2\mathbf{d}}\right) + p\left[\frac{(\mathbf{q} - \mathbf{S})^2}{2\mathbf{d}}\right]$$

y como **T** = **Q/d**, se tiene que el costo promedio por unidad de tiempo está dado por la siguiente expresión:

$$CT(\mathbf{Q}, \mathbf{S}) = \left[\frac{k\mathbf{d}}{\mathbf{Q}}\right] + c\mathbf{d} + \left[\frac{h\mathbf{S}^2}{2\mathbf{Q}}\right] + \left[\frac{p(\mathbf{Q} - \mathbf{S})^2}{2\mathbf{Q}}\right]$$

Se puede demostrar que CT (**Q**,**S**) es una función convexa, por lo que aplicando derivadas parciales para calcular los valores de **Q** y **S** que minimizan el valor de la función se obtiene que

$$Q^{*} = \sqrt{\frac{2k\mathbf{d}}{h}}\sqrt{\frac{(p + h)}{p}}$$

$$S^{*} = \sqrt{\frac{2k\mathbf{d}}{h}}\sqrt{\frac{p}{(p + h)}}$$

$$s^{*} = \sqrt{\frac{2k\mathbf{d}}{p}}\sqrt{\frac{h}{(p + h)}}$$

Nótese que si $p \to \infty$ entonces **Q** = **S**, y s = 0, lo cual corresponde al modelo sin déficit y sin producción; y si k = 0 entonces **Q** = **S** = s = 0 lo cual significa que no se requiere ningún modelo, puesto que en el momento en que se solicita un artículo, se ordena y no se mantiene ninguno almacenado ya que el costo del almacenamiento es muy elevado.

MODELO CON PRODUCCIÓN Y DÉFICIT

Es común, sobretodo en las empresas productivas, que el inventario se alimente de la producción de la misma empresa y lo que es más sea la demanda de artículos el motor para iniciar la producción, por tal razón también es común que el almacén reciba constantemente artículos, durante el tiempo de producción, para hacer frente a la demanda que tenga pendiente del período anterior, así como a la que se le presente durante el período actual.

El modelo que se presenta a continuación es un caso más general que el anterior ya que considera la posibilidad de tener faltantes en algún momento dentro del período de análisis, y su desarrollo en el tiempo se muestra en la figura 2.5.

Los principales supuestos de este modelo son los siguientes:

1) La demanda es conocida e igual a **d** unidades por u. de tiempo.
2) El nivel máximo de inventario es **S** unidades.
3) El nivel máximo de déficit es s unidades.
4) El tamaño de la producción es **Q** y es uno de los parámetros del modelo.
5) La producción es continua, con una rapidez de **q** unidades por unidad de tiempo.
6) Los costos son fijos:

   k = costo por iniciar la producción.
   c = costo unitario por producir.
   h = costo por almacenar por artículo y por u. de tiempo.
   p = costo por déficit por artículo y por u. de tiempo.

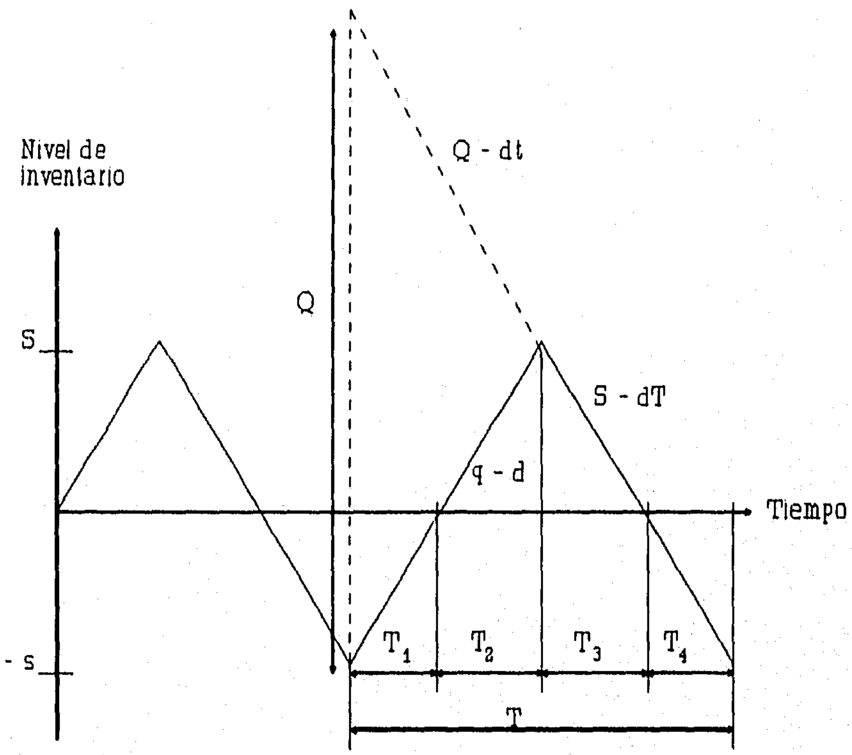


Fig 2.5 Comportamiento del nivel de inventario en el modelo con producción y déficit (ventas pendientes).

Con base en las suposiciones mencionadas y considerando el déficit como ventas pendientes, es posible determinar una función que permita evaluar el costo que un sistema como el planteado tendría durante cada período. Esta función dependerá, desde luego, de los costos asociados a la compra, manejo y escazes de materiales y se conoce como **costo por período.**

Costo por período:

El costo total por período se puede calcular como se muestra en la siguiente ecuación:

$$CP = k + c\mathbf{Q} + h\frac{\mathbf{S}}{2}(\mathbf{T_2} + \mathbf{T_3}) + p\frac{\mathbf{s}}{2}(\mathbf{T_1} + \mathbf{T_4})$$

En donde se satisfacen las relaciones que se indican a continuación:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)$$

$$\mathbf{S} + \mathbf{s} = (\mathbf{q} - \mathbf{d})(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)$$

$$\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{q}} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}\left[1 - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{q}}\right] - \mathbf{s}$$

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{q} - \mathbf{d}} \quad ; \quad \mathbf{T}_2 = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{q} - \mathbf{d}}$$

$$\mathbf{T}_3 = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{d}} \quad ; \quad \mathbf{T}_4 = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{d}}$$

y por lo tanto se tiene que

$$\mathrm{CP} = k + c\mathbf{Q} + \frac{h\mathbf{S}}{2}\left[\frac{\mathbf{S}\mathbf{q}}{\mathbf{d}(\mathbf{q} - \mathbf{d})}\right] + p\left(\frac{\mathbf{s}}{2}\right)\left[\frac{\mathbf{s}\mathbf{q}}{\mathbf{d}(\mathbf{q} - \mathbf{d})}\right].$$

Considerando que la decisión se tomará en repetidas ocasiones, es válido pensar que basta con minimizar el costo promedio del sistema, lo que resulta además, más sencillo.

Costo promedio:

Considerando que **T = Q/d**, y haciendo algunos desarrollos algebraicos se tiene que el costo promedio del sistema se puede calcular como

$$\mathrm{CT}(\mathbf{Q},\mathbf{S}) = \frac{k\mathbf{d}}{\mathbf{Q}} + c\mathbf{d} + h\left[\frac{\mathbf{S}^2}{2\mathbf{Q}\left(1 - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{q}}\right)}\right] + p\left[\frac{(\mathbf{S} - \mathbf{Q})\left(1 - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{q}}\right)^2}{2\mathbf{Q}\left(1 - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{q}}\right)}\right]$$

de donde, utilizando técnicas del cálculo vectorial, se obtiene

$$\mathbf{Q}^* = \sqrt{\frac{2k\mathbf{d}}{h\left(1 - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{q}}\right)}}\sqrt{\frac{(p + h)}{p}}$$

$$\mathbf{S}^* = \sqrt{\frac{2k\left(1 - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}}{h}}\sqrt{\frac{p}{p + h}}$$

$$\mathbf{s}^* = \sqrt{\frac{2k\left(1 - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}}{p}}\sqrt{\frac{h}{p + h}}$$

Nótese que si $q \to \infty$ se tiene, precisamente, el modelo anterior.

2.3 MODELOS ESTOCÁSTICOS

Aunque existen muchos casos en los que la demanda realmente es constante, o bien su variabilidad es tan pequeña que bien puede manejarse como constante, esto no siempre es así, y son tantos y tan importantes los casos en los que no es válida la suposición, que resulta ineludible la presentación de un modelo que considere las variaciones aleatorias de esa demanda.

El modelo que se considera en esta ocasión, consiste en un sólo período, pero con demanda estocástica, tipificada por una función de distribución que se supone conocida. Supóngase que al inicio del período se tiene una cantidad **Q** de artículos. Si **D** representa a la demanda aleatoria en dicho período, existen los dos casos posibles para la situación del inventario al final del período, que se muestran a continuación.

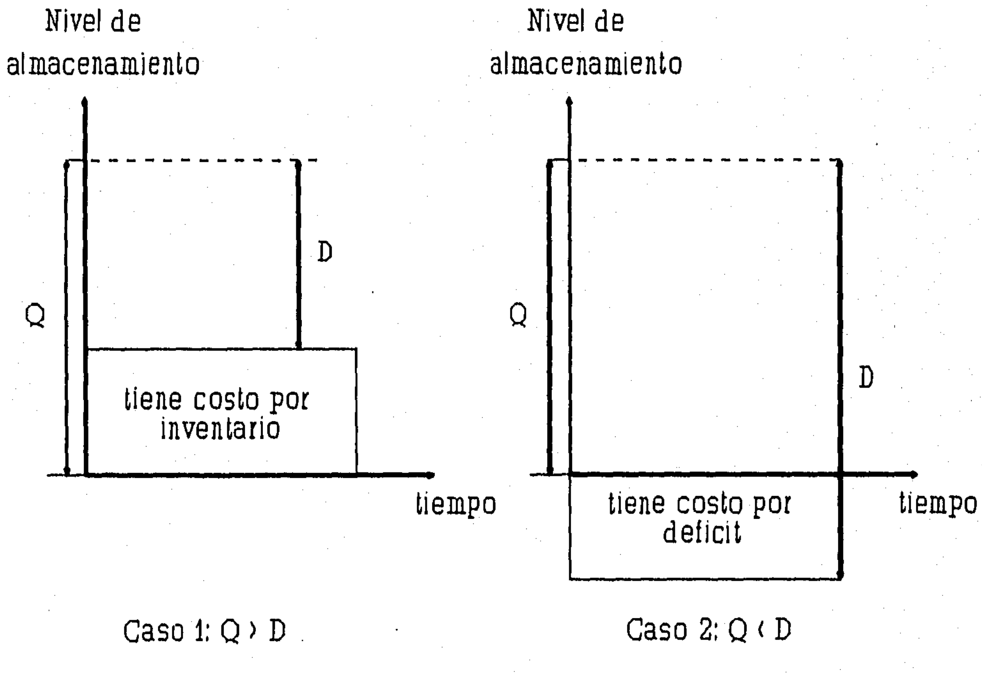


Fig 2.6 Casos posibles en modelos de inventario estocástico.

No es posible saber de antemano cuál de las dos situaciones se observará, debido a la aleatoriedad de la demanda, por tal razón, se debe modelar el hecho de que existe una probabilidad diferente de cero de que se presente cada uno de los dos casos planteados.

Se supone en ambos casos, que la demanda **D** ocurre de manera instantánea, y que durante el período no existe forma de pedir más artículos para satisfacer la demanda.

Se consideran también los siguientes costos significativos:

k = costo fijo por ordenar ($k > 0$).

c = costo unitario del artículo.

h = costo por llevar inventario, por artículo.

p = costo por déficit. (Es una penalización por cada artículo demandado que no se satisface).

El problema consiste en determinar la cantidad de artículos que se debe tener al iniciar el funcionamiento del sistema, de manera que se minimicen los costos totales. En este contexto se pueden identificar básicamente dos casos:

<u>Caso 1: El nivel inicial del inventario es cero.</u>

Es claro que si $p \leq c$ entonces $\mathbf{Q}^* = 0$, ya que resulta más económico tener faltantes, que comprar artículos para satisfacer la demanda, pero ¿ qué sucede si $p > c$?

Sea CT(**Q**) el costo por satisfacer una demanda estocástica **D** dado que se inició elevando el nivel de inventario hasta **Q** unidades, entonces

CT(**Q**) = costo fijo por ordenar + costo de materiales + costo de almacenamiento + costo por déficit,

es decir,

$$CT(\mathbf{Q}) = k + c\mathbf{Q} + \int_0^{\mathbf{Q}} h(\mathbf{Q} - \mathbf{D})\, f(\mathbf{D})\, d\mathbf{D} + \int_{\mathbf{Q}}^{\infty} p(\mathbf{D} - \mathbf{Q})\, f(\mathbf{D})\, d\mathbf{D} \quad .$$

Se puede demostrar que la función CT(**Q**) es convexa, y por ello, es posible utilizar el criterio de la derivada para obtener el valor de **Q** que permite que el costo total sea óptimo. Los resultados son los siguientes (Véase el desarrollo en el apéndice A):

$$F(\mathbf{Q}) = 1 - \frac{c + h}{p + h}$$

y por tanto,

$$1 - F(\mathbf{Q}) = \frac{c + h}{p + h}$$

en donde F(**Q**) es la función de distribución de la demanda evaluada en **Q**, y es la probabilidad de que dicha demanda sea menor o igual que **Q**. Obsérvese además que si $p \rightarrow \infty$, entonces F(**Q**) = 1, y por tanto **Q** debe ser muy grande; y si p = c entonces **Q** = 0.

<u>Caso 2: El nivel inicial del inventario es x.</u>

De manera similiar al caso 1, se construye una función que permita determinar el costo del sistema, cuando el nivel inicial del inventario es de x unidades, y por lo tanto, al comprar **Q** unidades al inicio del período, hace que se eleve el nivel de inventario hasta (**Q** + x) artículos. La función de costo total se define como:

CT(Q) = costo por ordenar + costo de materiales
+ costo por almacenamiento + costo por déficit ,

es decir,

$$\begin{aligned} CT(\mathbf{Q}) &= k + c\mathbf{Q} + \int_0^{x+\mathbf{Q}} h(x+\mathbf{Q}-\mathbf{D})\, f(\mathbf{D})\, d\mathbf{D} + \int_{x+\mathbf{Q}}^{\infty} p(\mathbf{D}-x-\mathbf{Q})\, f(\mathbf{D})\, d\mathbf{D} \\ &= k + c(x+\mathbf{Q}) + \int_0^{x+\mathbf{Q}} h(x+\mathbf{Q}-\mathbf{D})\, f(\mathbf{D})\, d\mathbf{D} + \int_{x+\mathbf{Q}}^{\infty} p(\mathbf{D}-x-\mathbf{Q})\, f(\mathbf{D})\, d\mathbf{D} - cx \\ &= k + L(x+\mathbf{Q}) - cx \end{aligned}$$

donde

$$L(u) = cu + \int_0^{u} h(u - \mathbf{D})\, f(\mathbf{D})\, d\mathbf{D} + \int_{u}^{\infty} p(\mathbf{D} - u)\, f(\mathbf{D})\, d\mathbf{D}$$

y L(u) es la función convexa en u que se muestra en la figura 2.7, y tiene la misma forma básica que la función de costo total para el modelo anterior.

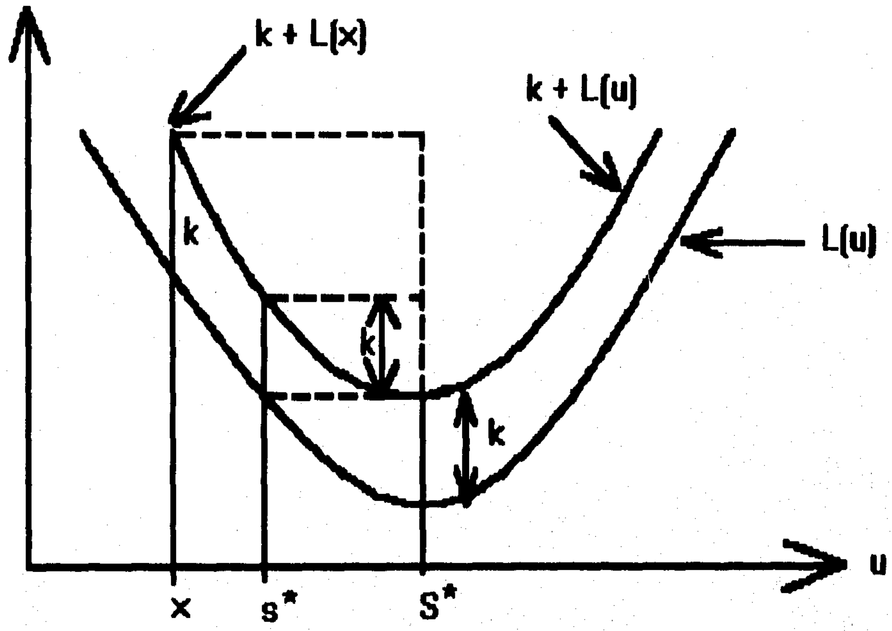


Fig 2.7 Inventario estocástico con nivel inicial x.

Por lo tanto,

$$CT(Q) = \begin{cases} k + L(x + Q) - cx & \text{si } Q > 0 \\ L(x) - cx & \text{si } Q = 0 \end{cases}$$

Si S^* es el valor de u que maximiza L(u), y $x \leq S^*$, entonces el costo mínimo es

$$CT(Q^*) = \begin{cases} k + L(S^*) - cx & \text{si } Q = S^* - x \\ L(x) - cx & \text{si } Q = 0 \end{cases}$$

y por tanto, la política óptima de operación de este sistema de inventarios, conocida como política (s^*, S^*), es tal que

$$Q^* = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq s^* \\ S^* - x & \text{si } x < s^* \end{cases}$$

$$L(S^*) + k = L(s^*)$$

CAPITULO 3

REAPROVISIONAMIENTO COORDINADO DE MÚLTIPLES ARTÍCULOS

INTRODUCCIÓN

En el funcionamiento de los inventarios es común encontrarse con múltiples productos, ya sea de materia prima o de producto terminado, y en la mayoría de los casos ocurre que existe alguna interacción entre los diferentes tipos de artículos inventariados.

Dada la frecuencia con que se encuentra este tipo de inventarios y la importancia de ellos en la vida real, se hizo necesario desarrollar modelos que consideren interacciones entre los diferentes artículos en el inventario y que permitan tomar las mejores decisiones para manejarlos.

El objetivo de este capítulo es identificar las diferentes interacciones que se presentan entre los artículos en un sistema de inventario, así como mostrar algunos modelos que se utilizan para decidir en estas situaciones.

3.1 ANTECEDENTES BÁSICOS

Con el fin de controlar la producción y minimizar gastos, es común que una planta de producción tenga al menos dos almacenes: uno de materia prima, y otro de producto terminado, aunque podría haber más. Sin embargo, es también usual que estos almacenes sean compartidos, refiriéndonos con esto a que se utilizan para almacenar más de un tipo de artículo. Esto mismo ocurre en la bodega de un supermercado o de una tienda de ropa, en una fábrica de cables, de artículos eléctricos, o de pinturas. Es lo más práctico y por tanto lo más usual. La pregunta que surge es ¿ cómo manejar el inventario de manera que los costos sean mínimos, y satisfaga de la mejor manera las demandas de todos los artículos ?

Para ello, los modelos de decisión para ordenar artículos múltiples son muy útiles ya que reconocen interacciones entre los artículos involucrados pues si no existieran interacciones, se podría controlar cada uno de los artículos por separado, valiéndose para ello de los modelos anteriores. Sin embargo, aún en el caso de existir interacciones, el control de inventarios con múltiples artículos no requiere necesariamente de procedimientos diferentes a aquellos utilizados en los modelos con un solo artículo, sino que los toma como base para desarrollar sus propios resultados.

Las interacciones entre los artículos en un sistema de inventarios son:

1) **Interacciones entre los costos:** Ocurren cuando los costos de un artículo o la compra de varios de ellos afectan el costo total de otros o de todos. Por ejemplo, una reducción en el costo por ordenar debido a una orden de varios artículos simultáneamente, o bien, el ahorro en el costo de un material como resultado de un descuento aplicado al monto total de una orden.

2) **Interacciones entre los recursos:** Se presentan cuando los artículos a almacenar compiten por obtener para sí recursos limitados. Ejemplos de ellas son la cantidad limitada de inventario de cierto artículo debido a la capacidad también limitada del almacén, o también la limitación en el monto tal de una orden debido a la capacidad del vehículo de transporte o embarcación.

3) **Interacciones entre las demandas:** Ocurren cuando la demanda de un artículo puede ser afectada por la demanda de otro u otros artículos en el inventario. Es común que a falta de un artículo en inventario, el cliente seleccione otro en sustitución, o bien que los artículos mantengan una relación de oferta-demanda entre ellos. Otro ejemplo de este tipo de interacciones entre artículos en el inventario es el caso de los inventarios con múltiples niveles, en los que cada artículo puede estar bajo control tanto en el almacén central como en el de distribución, teniendo una demanda externa y una oferta interna o viceversa.

Es común, por simplicidad, y principalmente en los casos en que el número de artículos a controlar es grande y dado que no todos los artículos tienen el mismo costo, hacer una clasificación de ellos en términos de su importancia (en el sentido de costo) dentro del inventario. Dicha clasificación se conoce como clasificación ABC. En ella se dividen los artículos en tres grupos:

A Aquellos artículos con mayor valor monetario de uso anual.
B Los artículos que tienen un valor moderado.
C Son los artículo con bajo valor.

Para calcular el valor monetario de uso anual para cada artículo bajo control, se debe multiplicar el número de unidades de uso anual del artículo en cuestión por el costo por unidad.

Con el fin de llevar a cabo la clasificación mencionada, es conveniente ordenar los artículos en forma decreciente del valor monetario de uso anual. La clasificación se realizará de manera que alrededor del 15 o 20% de los artículos y aproximadamente el 80% del valor de uso anual pertenezcan al grupo **A**, entre el 30 y 35% de los artículos se clasificarán en el grupo **B** con un valor de uso anual cercano al 15% del total, mientras que entre el 45 y 55% restante de los artículos, se ubicarán en el grupo **C** y representarán prácticamente el 5% del valor de uso anual del total de los artículos. Este clasificación se muestra en la figura 3.1.

Definitivamente, por el monto que representan los artículos del grupo **A**, es de transcendental importancia mantener un control estricto de ellos y son los que deben tener atención prioritaria, mientras que los clasificados en el grupo **C** requerirán menor atención, sin que por ello se mantengan en el olvido.

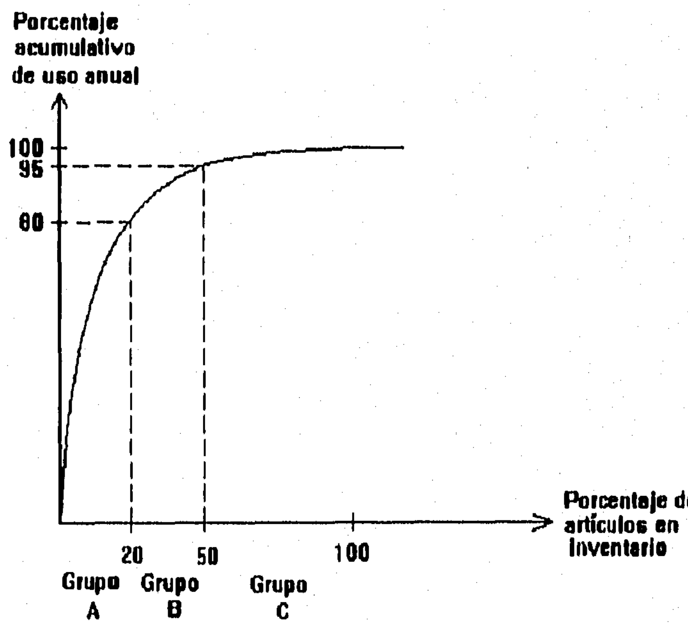


fig 3.1 Distribución de los artículos de acuerdo con la clasificación ABC

En el caso en que los artículos clasificados en un mismo grupo, no tengan alguna interrelación de costos, demanda, etc., lo conveniente será manejarlos como artículos independientes, mediante el modelo para un solo artículo que mejor represente la situación de ese artículo en particular. Si existe alguna relación de dependencia, se requiere algún modelo especial como los que se presentan a continuación.

Independientemente del tipo de interacción que exista entre los artículos, surge la siguiente pregunta: ¿ Qué grado de interacción justifica la complejidad adicional asociada al uso de un modelo con multiproductos ?, en realidad es prácticamente imposible encontrar inventarios con multiproductos y sin interacciones entre los diferentes artículos, por tanto la pregunta acerca de la justificación del uso de procedimientos de control con multiproductos, debe ser respondida ó por lo menos analizada, esencialmente en cada caso práctico.

En general una política para ordenar artículos múltiples y que interactúan, se llamará "política de reaprovisionamiento coordinado". El término "política de orden conjunta", aunque en ocasiones se considera como sinónimo de "política de reaprovisionamiento coordinado", para nuestros fines, no lo es, y lo definiremos como sigue:

Suponga que siempre que se ordena un artículo, se ordena también cada uno de los artículos que fueron demandados desde la orden anterior. Es decir, cada vez que se realiza una orden, el inventario de cada uno de los artículos se eleva hasta un nivel específico. La política que especifica los niveles máximos de inventario por artículo, así como la cantidad a ordenar de cada uno, recibe el nombre de "política de orden conjunta".

Como veremos más adelante, en cierto modo una orden conjunta, se da al final de un espectro de políticas de reaprovisionamiento coordinado. Por el contrario el final será un ordenamiento independiente, en el cual cada artículo se ordena de acuerdo a su propia política de un solo artículo.

3.2 MODELOS QUE RECONOCEN INTERACCIÓN ENTRE LOS COSTOS

Como se mencionó anteriormente, en un sistema de inventarios se pueden identificar diferentes costos: a) Por ordenar; b) Del material; c) Por inventario; d) Por déficit.

La mayoría de las interacciones de costos ocurren entre los costos por ordenar y los del material. Las interacciones de costos por ordenar suceden porque dichos costos se ven reducidos por coincidir órdenes de varios artículos, lo cual puede redundar en ahorros en facturación, papelería, materiales de trabajo o transporte. Esto se modelará definiendo a **k** como el costo por ordenar y $\mathbf{k}_j$ el costo adicional por ordenar el artículo j.

Interacciones entre los costos de los materiales se presentan por ejemplo, cuando el proveedor hace efectivo un descuento en el monto total de la factura, sin importar cuales fueron los artículos ordenados.

Interacciones entre los costos por ordenar

Si se supone que se desea manejar n artículos diferentes y que el costo por ordenar cuando se ordena el artículo j es $\mathbf{k} + \mathbf{k}_j$, entonces $\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + ... + \mathbf{k}_n$ es el costo por incluir los n artículos en una misma orden. Es posible identificar aquí dos tipos de modelo: determinísta y estocástico.

En el **modelo determinísta** se supone que cada uno de los n artículos tiene asociados un costo por llevar inventario, de $\mathbf{h}_j$ unidades monetarias por artículo, por unidad de tiempo, y una demanda de $\mathbf{d}_j$ unidades por unidad de tiempo también. Se desea determinar, para cada artículo j, la cantidad óptima a ordenar y el tiempo entre órdenes consecutivas del mismo artículo, de manera que el costo total para los n artículos sea mínimo. Para ello, se parte de los modelos existentes para un sólo artículo, considerando que no se acepta tener demanda insatisfecha.

Para determinar el tiempo entre órdenes se calcula para cada uno de los artículos j, y de manera independiente, el tiempo óptimo entre órdenes (τ_j), considerando a $\mathbf{k}_j$ como costo por ordenar. Se ordenan los artículos de tal forma que τ_1 corresponda al artículo con menor tiempo entre órdenes, y que el mayor tiempo entre órdenes τ_n corresponda al artículo n-ésimo, con ello es posible calcular, para cada j, valores α_j tales que $\tau_j = \alpha_j \tau_1$, con la característica de que $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_i \leq \alpha_j$ siempre que $i \leq j$, y $\alpha_j = 1$ si $\mathbf{k}_j = 0$.

Con el fin de ahorrar en los costos por ordenar, se considera $[\alpha_i]$ como el entero resultante de redondear α_i, y se escoge $\mathbf{t}_j = [\alpha_j]\, \mathbf{t}_1$, para j = 1, 2, ..., n, con lo cual se obtiene la siguiente función de costo promedio del sistema por unidad de tiempo:

$$TC = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{t}_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{k}_j}{\mathbf{t}_j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_j \mathbf{d}_j \mathbf{t}_j$$

$$= \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{t}_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{k}_j}{[\alpha_j]\,\mathbf{t}_1} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_j \mathbf{d}_j [\alpha_j]\, \mathbf{t}_1$$

que minimizando para $\mathbf{t}_1$, se tiene

$$\mathbf{t}_1 = \sqrt{\frac{2\left(\mathbf{k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{k}_j}{[\alpha_j]}\right)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_j \mathbf{d}_j [\alpha_j]}}$$

Una vez obtenido el valor óptimo para t_1, es posible calcular los tamaños óptimos de pedido para cada uno de los artículos involucrados, utilizando para ello los resultados obtenidos en los modelos básicos para un solo producto. Así,

$$\mathbf{Q}_j = [\alpha_j]\mathbf{t}_1\mathbf{d}_j$$

El **modelo estocástico** es más complicado, ya que por la aleatoriedad con que se demandan los artículos, no todos se terminan simultáneamente, y por lo tanto, será necesario realizar pedidos cuando alguno de ellos falte. En el momento en el que alguno de los artículos falte, se deberá decidir si solicitar únicamente dicho artículo, o bien solicitar alguno más cuyo nivel de inventario este bajo o cercano a cero, porque su demanda haya sido superior a la supuesta.

El problema consiste entonces en determinar, para cada artículo, ¿ cuánto es un nivel bajo de inventario ? o bien, ¿ cuánto es un nivel cercano a cero ?, de tal forma que el control del inventario represente el mínimo costo posible. El que se presenta a continuación es un método propuesto por Love.

Para cada uno de los artículos se pueden definir las siguientes variables de decisión:

c_j: El nivel crítico de inventario. Es tal que si al realizar el pedido de algún otro artículo el nivel de inventario del artículo j en cuestión está por debajo de dicho nivel crítico, la mejor decisión sea optar por incluir este artículo en dicho pedido.

s_j: Nivel de reorden. Si la entrega tarda **L** unidades de tiempo a partir del momento en que se solicita, es necesario requerirlo con anticipación, para lo cual se realizará un pedido en cuanto el nivel de inventario del artículo j alcance el nivel s_j.

S_j: Es el nivel máximo del inventario para el artículo j.

La política completa de manejo del inventario determinará los niveles $\mathbf{c}_j$, $\mathbf{s}_j$ y $\mathbf{S}_j$ óptimos para cada artículo j, j = 1, 2, ... , n, a partir de los siguientes costos:

$\mathbf{k} + \mathbf{k}_j$: Costo por ordenar, si se solicita únicamente el artículo j,

h_j : Costo por mantener en inventario una unidad del artículo j,

en donde el gasto **k** se hace una sola vez por pedido, independientemente del número de artículos solicitados, y de la cantidad pedida de cada uno de ellos.

Por otro lado, como la demanda de cada artículo es aleatoria, no se puede conocer con certeza, sin embargo es posible conocer su comportamiento probabilísta, a través de la función de densidad o probabilidad, y con ella determinar valores como $\bar{d}_j$ y σ_j que corresponden al promedio y la desviación estándar, respectivamente, y que poseen la información más relevante del comportamiento de dicha demanda y que nos permita determinar la política óptima de manejo del inventario.

La primera decisión a tomar se refiere a la conveniencia de solicitar el artículo j de manera individual, o bien conjuntamente con otros artículos, para ello, se define el índice

$$b_j = \frac{k}{k+k_j}$$

cuyos valores fluctuarán entre 0 y 1 inclusive. Existen dos casos extremos para b_j que dependen de los valores de **k** y de k_j.

1. Si $k = 0$, $b_j = 0$. En este caso lo conveniente será pedir el artículo de manera independiente de los demás.

2. Si por el contrario $k_j = 0$ entonces $b_j = 1$. La mejor decisión será solicitar el artículo j conjuntamente con otros, y cada vez que se requiera cualquier otro artículo, con lo cual $c_j = S_j$.

Si el caso 2 ocurriera para todos los artículos, se llegaría a una política de orden conjunta.

El segundo paso consiste en definir, para cada artículo j, los valores s_j, c_j y S_j. Para ello un criterio conservador consiste en especificar un nivel de servicio, medido como la probabilidad $(1 - \alpha)$ de que el inventario no llegue al nivel cero durante el tiempo de espera **L**, o de otra manera, que la probabilidad de que la demanda durante el tiempo **L** no sobrepase el nivel s_j es

$$F_L(s_j) = 1 - \alpha, \text{ para } j = 1,2,\ldots,n \qquad \ldots\ldots (3.1)$$

Gráficamente el comportamiento del inventario es el que se presenta en la figura 3.1. Como se puede observar, el nivel promedio del inventario (R_j) en el momento justo anterior a realizar un pedido, en general se encuentra más cerca de c_j que de s_j.

Existen algunas formas alternativas para determinar el nivel de s_j, por ejemplo:

a) Calcular, con base en el nivel de servicio deseado, R_j como el valor de la demanda para el cual $F_L(R_j) = 1 - \alpha$, para cada j.

b) Seleccionar s_j como una fracción del valor obtenido mediante el uso de la ecuación (3.1).

c) Considerar en la ecuación (3.1) un valor de α un poco mayor de lo deseado.

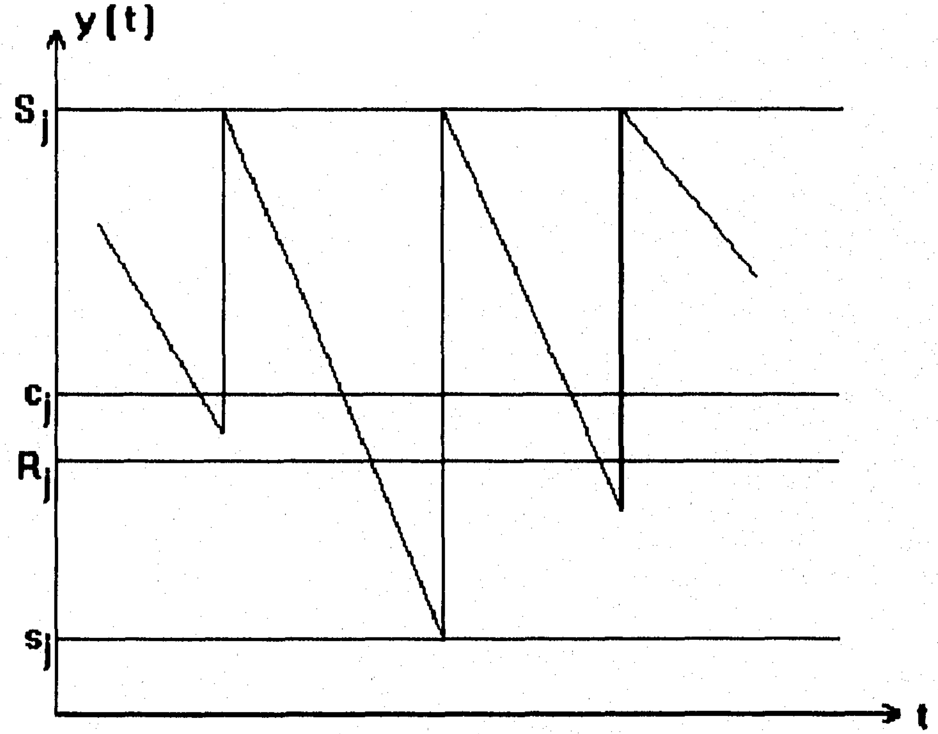


Fig 3.1 Gráfica del comportamiento del inventario de un artículo j usando una política can-order.

Para determinar los valores de S_j y c_j, se requiere calcular t_j como se indica en seguida.

Se dijo anteriormente que

$$\tau_j = \sqrt{\frac{2\mathbf{k}_j}{\mathbf{h}_j\bar{\mathbf{d}}_j}}\ ,$$

y después de ordenar los artículos de manera que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_n$, se determina α_j como $\alpha_j = \tau_j / \tau_1$. Nótese que α_j es diferente de α.

La función de costo promedio del sistema por unidad de tiempo, está dada, entonces, por

$$TC = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{t}_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{k}_j}{\mathbf{t}_j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_j\bar{\mathbf{d}}_j\mathbf{t}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{h}_j b_j\sqrt{n}\,\sigma_j\sqrt{\mathbf{t}_j}}{2.3}\ ,$$

y haciendo $\mathbf{t}_j = \alpha_j\mathbf{t}_1$, se tiene

$$TC = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{t}_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{k}_j}{\alpha_j\mathbf{t}_1} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_j\bar{\mathbf{d}}_j\alpha_j\mathbf{t}_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{h}_j b_j\sqrt{n}\,\sigma_j\sqrt{\alpha_j\mathbf{t}_j}}{2.3}\ ,$$

esto es,

$$TC = \frac{1}{\mathbf{t}_1}\left[\mathbf{k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{k}_j}{\alpha_j}\right] + \frac{1}{2}\mathbf{t}_1\sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_j\bar{\mathbf{d}}_j\alpha_j + \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{t}_1}\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{h}_j b_j\sqrt{n}\,\sigma_j\sqrt{\alpha_j}}{2.3}\ ,$$

cuyo comportamiento se muestra gráficamente en el apéndice B.

Para determinar el valor de $\mathbf{t}_1$ de manera que la función TC sea mínima, se observa que si se puede despreciar el último sumando de dicha función, se tiene que

$$\mathbf{t}_1 = \sqrt{\frac{2\left[\mathbf{k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{k}_j}{\alpha_j}\right]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_j\bar{\mathbf{d}}_j\alpha_j}}\ ,$$

y el resto de las $\mathbf{t}_j$ se calculan como $\mathbf{t}_j = \alpha_j\, \mathbf{t}_1$. En otro caso la solución es notablemente más compleja, ya que las raíces de la función completa no son fáciles de obtener. Sin embargo, cuando la demanda de cada artículo durante el tiempo $\mathbf{t}_1$ es suficientemente grande (por ejemplo más de 10) y no se tienen muchos artículos (digamos menos de 20) bajo control, es posible despreciar el término mencionado, sin que exista gran diferencia en los costos, y tampoco en los resultados óptimos, ya que la suma tendrá pocos términos, la raíz cuadrada de n será pequeña y b_j reduce los sumandos, ya que está entre cero y uno.

Una vez que se han calculado las longitudes óptimas del período para cada uno de los artículos, se está en posibilidad de determinar los valores también óptimos S_j de manera que correspondan con los valores de t_j calculados. El valor óptimo del nivel máximo de inventario para cada artículo j, dependerá del valor de b_j, por lo cual es necesario seleccionar un valor β para dicha variable y calcular el valor S_j que minimice la función de costos. Dicho valor se denota mediante $S_j^{(\beta)}$. En el caso en el que $b_j = 0$ se tiene que $S_j^{(0)} = s_j + \bar{d}_j t_j$ que corresponde a la cantidad máxima en inventario en el caso de un solo artículo. Por otro lado cuando lo recomendable es llevar una política de orden conjunta, esto es cuando $b_j = 1$, el tiempo promedio entre órdenes será t_1, que en realidad será el tiempo en el que uno cualquiera de los artículos bajo control alcance primero su punto de reorden, pero para asegurar que este tiempo será aproximadamente t_j, una manera heurística de seleccionar $S_j^{(1)}$ consiste en considerar a $\frac{n}{n+1}$ como la probabilidad de que la cantidad demandada del artículo j durante el tiempo t_j no exceda de la diferencia entre $S_j^{(1)}$ y el s_j óptimo. En general se tiene para cualquier artículo j, que $S_j^{(\beta)} = S_j^{(0)}(1-\beta) + \beta\, S_j^{(1)}$, en donde $\beta = b_j$.

Por último para determinar los valores óptimos c_j, ayuda el hecho de que

$$R_j = s_j - \bar{d}_j t_j$$

así como que el tiempo promedio entre órdenes una vez que el inventario del artículo j alcanza un nivel inferior a c_j, debe ser $t_1 / 2$, y por lo tanto

$$c_j - R_j = \bar{d}_j \frac{t_1}{2}$$

de donde

$$c_j = s_j - \bar{d}_j\left(t_j - \frac{t_1}{2}\right)$$

con lo cual se completa la obtención de los valores que definen la política para controlar el inventario.

Se puede considerar que los modelos con interacción en los costos del material en los que se ofrece un descuento sobre la cantidad facturada, son una extensión del modelo con costos descontados, en el que el descuento se realiza sobre todas las unidades, y para un solo producto. En este caso se requiere clasificar todos los artículos que se desean controlar en grupos. Para ello, un criterio es agrupar aquellos cuyos valores óptimos $\mathbf{Q_j}$ calculados mediante el modelo para un solo producto, sean muy similares; en realidad una forma de hacerlo es por ejemplo, calcular el valor $\mathbf{Q_j}$ óptimo para cada uno de los productos (j = 1, 2, 3, ..., n), y ordenar los productos de manera tal que $\mathbf{Q_1} \leq \mathbf{Q_2} \leq \mathbf{Q_3} \leq \ldots \leq \mathbf{Q_n}$ de esta forma se seleccionarán los artículos para cada grupo, solamente considerando productos adyacentes. Un grupo de artículos puede estar conformado por un artículo o más, hasta llegar a contener a todos los artículos, sin embargo, un artículo solamente puede pertenecer a un grupo y no a varios a la vez.

En el caso discreto es posible calcular, para cada grupo, un tamaño de lote económico, como

$$\mathbf{Q_G} = \sqrt{\frac{2\sum \mathbf{k_j} \sum \mathbf{d_j}}{\sum \mathbf{h_j d_j} / \sum \mathbf{d_j}}}$$

considerando las sumas sobre todos los artículos en el grupo, y la cantidad a ordenar de cada uno de los artículos en el grupo se determinará como la siguiente proporción de $\mathbf{Q_G}$:

$$\mathbf{Q_j} = \mathbf{Q_G}\,(\mathbf{d_j} / \sum \mathbf{d_j})$$

de la misma manera que en el caso de un solo producto, es necesario comparar el costo por comprar esta cantidad de productos, para determinar si con ello se alcanza el descuento por volumen, y en caso de que esto no ocurra, se deberá comparar el costo total por unidad de tiempo asociado con la compra de la cantidad $\mathbf{Q_G}$ obtenida contra el costo mínimo total, también por unidad de tiempo, resultante de hacer una compra mínima de **B** unidades monetarias sobre la cual se obtendría el descuento propuesto por el proveedor.

En el caso de demanda estocástica el problema se complica notablemente, de hecho no es posible llegar a precisar la cantidad óptima a ordenar y el tamaño de cada período, sin embargo se puede partir de la política generada sin considerar descuentos y comparar los resultados para verificar si con tales condiciones se es sujeto del descuento ofrecido, o se requiere extender la cantidad a ordenar de manera que se pueda aprovechar la oportunidad de lograr un mejor precio.

No obstante, se tiene algunas formas para aproximar la solución óptima, una de ellas es plantear el problema de inventarios como un problema de programación combinatoria en el que la función objetivo es, desde luego la función de costo esperado, que en general es una función no lineal, y existe un conjunto de soluciones factibles, mismo que será un subconjunto del espacio $\mathbf{R}^3$ y dentro del cual se buscará encontrar la solución óptima.

Existen diferentes métodos heurísticos desarrollados para obtener la solución óptima, como el método Tabú para la búsqueda de soluciones a partir de una solución inicial, y otros métodos debidos principalmente a Goyal, Belton, Kaspi y Rosenblat entre otros. Adicionalmente existen métodos que pretenden determinar la política óptima de operación del inventario de manera que su costo sea mínimo. De los métodos desarrollados más recientemente se encuentra el Narro3 cuyas principales características son proveer una solución más económica del sistema y con un menor esfuerzo computacional que los reconocidos como más eficientes hasta 1994 debidos a Ferdergruen y Atkins.

3.3 MODELOS QUE RECONOCEN INTERACCIÓN ENTRE LOS RECURSOS

Es común que los recursos con los que cuenta una empresa para mantener un inventario sean limitados con respecto a las necesidades, y en estos casos, la pregunta sigue en pie, ¿ de qué tamaño deberá ser el pedido de cada uno de los artículos que se desea controlar, de manera que el costo del inventario sea mínimo y que se satisfagan las restricciones impuestas por la escasez de recursos ?.

Cuando se habla de recursos compartidos, se puede referir al capital a invertir, al espacio físico disponible para llevar inventario, o bien a la capacidad del transporte para mover dichas mercancías.

Matemáticamente el problema se convierte en minimizar la función de costo promedio, sujeto a ciertas restricciones. Así, si solamente uno de los recursos esta limitado a M unidades, el problema se plantearía como

$$CT = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{h_j Q_j}{2} + \frac{k_j d_j}{Q_j} \right)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j Q_j \leq M$$

y se resuelve mediante los multiplicadores de Lagrange. El resultado de la optimización es

$$Q_j = \sqrt{\frac{2k_j d_j}{h_j + 2a_j\lambda}}$$

en donde λ satisface la ecuación

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \sqrt{\frac{2k_j d_j}{h_j + 2a_j\lambda}} = M .$$

Esta última ecuación se resuelve para λ mediante aproximaciones, lo cual puede ser bastante complicado.

Una forma alterna de resolver el problema con una restricción consiste en considerar no la función de costo total, sino solamente los costos por ordenar, ya que el costo por mantener inventario, se considera, en este caso, como una función lineal, y minimizar manteniendo la restricción, esto es, minimizar

$$CO = \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j d_j}{Q_j}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j Q_j$$

utilizando nuevamente multiplicadores de Lagrange, se obtiene que la cantidad óptima a ordenar está dada por

$$Q_j = \sqrt{\frac{k_j d_j}{a_j}} \; \frac{M}{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j k_j d_j}}$$

(Véase el desarrollo en el apéndice C).

Un problema diferente surge cuando la capacidad de producción es limitada e insuficiente para hacer frente a la demanda del inventario para cada uno de los artículos, en este caso se debe realizar una programación de los artículos a producir en cada momento, y durante cuánto tiempo se producirá tal artículo, de manera que no exista déficit en ninguno de ellos y que el costo del inventario sea mínimo.

Para resolver el problema se recurre tanto al modelo con producción y sin déficit para un solo producto, planteado en el capítulo 2, para determinar la cantidad óptima a ordenar, así como la longitud también óptima del período para cada uno de los artículos que se desea controlar, como a la filosofía utilizada en el caso en el que existe interrelación en los costos, en la cual se aproximan las longitudes óptimas de los períodos para cada uno de los artículos, mediante múltiplos de la longitud del período más pequeño, considerando todos los artículos. Posteriormente se debe realizar una planeación de la producción de manera que no exista déficit en la satisfacción de la demanda, lo cual se puede lograr ya sea produciendo cada artículo durante el período total en más de una ocasión, o bien produciendo una sola vez cada artículo, pero en cantidad suficiente para satisfacer la demanda durante el período, lo cual elevaría los niveles de inventario. No obstante, ambas son buenas aproximaciones y podría entonces, optarse por cualquiera de ellas, en un momento dado, sería necesario comparar los costos para cada uno de los modelos, con el fin de decidir en cada caso cual de las dos es la política óptima.

3.4 MODELOS QUE RECONOCEN INTERACCIÓN ENTRE LAS DEMANDAS

En el caso de que exista interacción entre las demandas, esta interacción se reconoce no como una relación oferta-demanda entre dos artículos, sino más bien como una interrelación del tipo de sustitución o bien modificación del bien original.

Pensemos por ejemplo en el caso de un sistema de inventarios con dos artículos cuyas demandas son estocásticas y que tienen una relación de sustitución, esto es, uno de los artículos puede utilizarse como sustituto del otro en caso de faltante de alguno de ellos, sin embargo para ello, se requiere, desde luego, la autorización del cliente, quien no siempre está de acuerdo en dicha sustitución, por lo cual no es una sustitución del 100% de la demanda insatisfecha.

Consideremos entonces que d_j es la demanda durante el período del artículo j, la cual tiene la distribución $f_j(d_j)$. Al inicio de cada período se eleva el nivel de inventario de cada uno de los artículos j hasta el nivel S_j, y los costos por llevar inventario por unidad y por unidad de tiempo serán h_j. Consideremos también que el tiempo de entrega de cada pedido es cero, y que la demanda insatisfecha se cubrirá en cuanto se tengan nuevamente unidades en el inventario.

Supongamos adicionalmente que una fracción de la demanda insatisfecha del artículo 1, digamos f_{12} ($0 \leq f_{12} \leq 1$), puede satisfacerse, mediante sustitución, por el artículo 2, si es que de él hay artículos en existencia, y que de la misma manera una fracción de la demanda insatisfecha del artículo 2, digamos f_{21} ($0 \leq f_{21} \leq 1$), puede satisfacerse, mediante sustitución, por el artículo 1, siempre que se tenga inventario de dicho artículo. Entonces, si el artículo 1 alcanza un nivel de inventario cero antes que el artículo 2, la nueva demanda de este segundo artículo se elevará a $d_2 + f_{12}(d_1 - S_1)$.

El problema es entonces, encontrar los valores de S_1 y S_2 de manera que el costo total del inventario sea mínimo. Es claro que dichos valores cambiarán dependiendo del grado de relación o sustitución que exista entre los artículos involucrados, pero si es posible analizar algunos casos especiales:

- Si $f_{12} = f_{21} = 0$ significa que no hay sustitución posible y por lo tanto no hay correlación entre las demandas de los artículos, y por lo tanto los valores máximos de inventario se calculan de acuerdo con el modelo para un solo artículo, con demanda estocástica.

- Si $f_{12} = 1$ y $f_{21} = 0$, o bien $f_{21} = 1$ y $f_{12} = 0$ entonces uno de los artículos sustituye completamente al otro, y por lo tanto la nueva demanda del artículo que sustituye será la suma de ambas demandas $(d_1 + d_2)$, y se obtiene la solución óptima mediante los modelos desarrollados para un solo artículo.

- Podría suceder también que $f_{12} = f_{21} = 1$, entonces habría una infinidad de soluciones, todas las posibles combinaciones de los dos artículos, de manera que se satisfaga la demanda de ambos.

Un método heurístico para determinar los valores óptimos de S_1 y S_2 lleva a la siguiente solución:

Si se define $S^*(f_{12}, f_{21}) = (S^*_1(f_{12}, f_{21}), S^*_2(f_{12}, f_{21})$, y

si $\quad S^*(f_{12}, 0) = S^*(0,0) + f_{12}[S^*(1,0) - S^*(0,0)]$, y

si $\quad S^*(0, f_{21}) = S^*(0,0) + f_{21}[S^*(0,1) - S^*(0,0)]$,

entonces,

$$S^*(f_{12}, f_{21}) = S^*(f_{12},0) + \alpha\, [S^*(0,1) - S^*(f_{12},0]$$

y también,

$$S^*(f_{12}, f_{21}) = S^*(f_{12},0) + \beta\, [S^*(1,0) - S^*(f_{12},0]$$

en donde

$$\alpha = [f_{21} - f_{21}f_{12}] / [1 - f_{12}f_{21}]$$

y

$$\beta = [f_{12} - f_{21}f_{12}] / [1 - f_{12}f_{21}].$$

Existen otras formas de solución, que también proporcionan aproximaciones apropiadas a los valores óptimos buscados.

CAPITULO 4

CONTROL DE INVENTARIOS CON VARIOS NIVELES

INTRODUCCIÓN

Existen diferentes tipos de relaciones entre demandas, las que se dan cuando un artículo es sustituto de otro, y las que se presentan cuando uno de los artículos es alguna componente del segundo, en este último caso, la relación que existe entre ambos artículos es de oferta-demanda. Se puede hablar también de una relación oferta-demanda cuando, aún tratándose del mismo artículo este se encuentra en diferentes almacenes de manera que uno provee a otro.

Este tipo de relaciones entre los artículos, es de gran aplicación, ya que en la gran mayoría de las fábricas es de vital importancia la conformación de inventarios de materias primas, productos en proceso y finalmente de producto terminado, y entre todos ellos existe una relación de oferta- demanda. De la misma manera en las distribuidoras existen este tipo de inventarios, ya con el fin de dar un mejor servicio y ahorrar en la transportación de las mercancías, se acostumbra tener una red de almacenes distribuidos en diferentes puntos estratégicos todos ellos dependientes de un almacén principal que puede encontrarse en la planta productora o bien en algún lugar alterno. Con el fin de lograr un funcionamiento óptimo del sistema, es necesario tener un control de total de todos los inventarios para evitar que se escapen de las manos de la compañía y ocasionen graves problemas financieros y/o de operación.

A través del tiempo se han desarrollado diversos métodos para llevar un control efectivo de los inventarios con varios niveles. El objetivo de este capítulo es presentar algunas de esas metodologías, pero se pondrá énfasis en la Planeación de Requerimientos de Material, por ser esta una técnica bastante generalizada en la actualidad, y que parece estar dando resultados satisfactorios en las empresas de producción en las que se ha instalado adecuadamente dicho sistema.

4.1 COMPORTAMIENTO DE LOS INVENTARIOS CON VARIOS NIVELES.

Empezaremos por definir lo que entenderemos como sistema de inventario con varios niveles y cuáles serían los niveles del sistema, de que manera están o pueden estar relacionados dichos niveles entre sí, y con los niveles inicial y final.

Se considerará en este caso que los artículos bajo control común pueden mantener una relación oferta-demanda entre ellos y que todos son distintos aunque en realidad podría tratarse de un sólo artículo almacenado en lugares diferentes. Los artículos que tienen entre sí una relación oferta demanda se dice que pertenecen a distintos niveles. Un nivel se puede considerar como un estado del producto dentro del proceso de producción, en el cual los artículos o materiales son inventariados.

Una forma gráfica de visualizar un inventario con múltiples niveles se muestra en la figura 4.1. En ella las flechas representan la dirección del flujo de los materiales. Note que no todos los materiales deben visitar necesariamente todos los niveles, por ejemplo el artículo 1 solamente visita el nivel 1 y el nivel 3. Aquellos artículos para los cuales existen demandas externas se considerarán como artículos de venta al menudeo y pueden no ser almacenados en los almacenes de menudeo, mientras que aquellos que no tienen este tipo de demanda se conocerán como artículos de venta al mayoreo, aunque no necesariamente tendrán un precio de mayoreo, en realidad lo que ocurre es que no están a la venta.

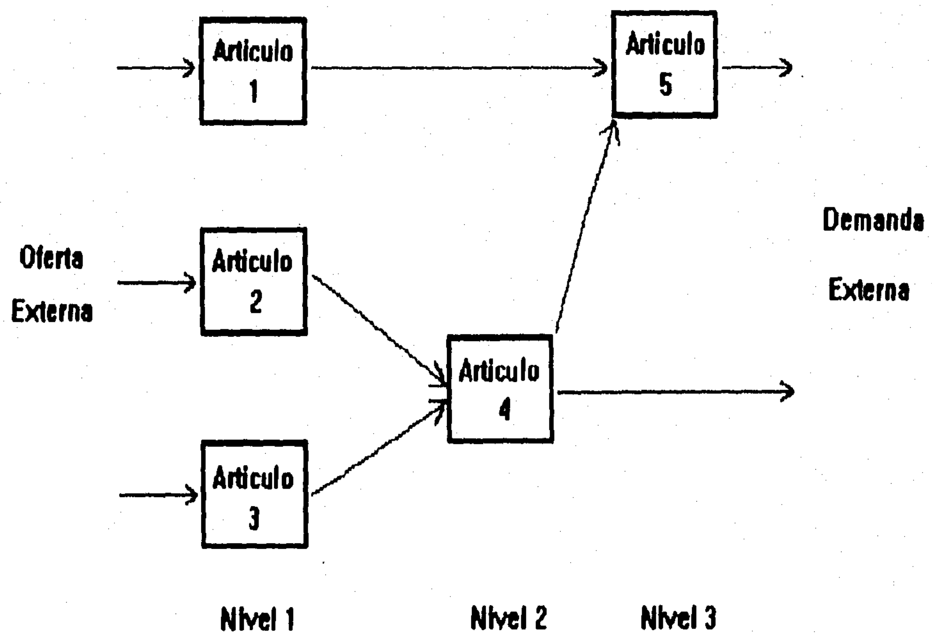


Fig 4.1 Representación de un Inventario con múltiples niveles

Cualquier relación de oferta-demanda interna, tendrá asociado un artículo predecesor y otro sucesor, mientras que los que tienen ya sea oferta o demanda externas no necesariamente tendrán predecesor o sucesor, ya que dichas relaciones externas no se conocen de esa manera. Si cada uno de los artículos en una red de inventarios tiene a lo más un sucesor, la red se conocerá como una unión. Así por ejemplo, el sistema mostrado en la figura 4.1, es una unión.

Una situación diferente, es aquella en la que cada uno de los artículos tiene a lo más un predecesor, en tal caso la red recibirá el nombre de arborescencia. La terminología definitivamente corresponde a la de una red cualquiera. Este tipo de estructura es común en la distribución de artículos por decir algo, de un centro de producción a los clientes.

Otro tipo de sistema de inventario con varios niveles tiene la estructura de una serie, en la cual cada uno de los artículos tendrá a lo más un predecesor y un sucesor. En este caso, el número de niveles será igual al número de artículos. Gráficamente la situación es la de la figura 4.2.

Adicionalmente es costumbre pedir a una serie que solamente el primer artículo tenga oferta externa, y solamente el último tenga demanda externa.

Con estos conceptos presentes, consideremos ahora un sistema de inventarios en el que se tienen m artículos y n niveles, esto es, una red que no necesariamente será una serie por lo que $n \leq m$. Supongamos también que cada uno de los artículos j ($j=1, 2,\dots,m$) tiene una demanda externa conocida durante el período t, denotada por d_t^j para $t = 1, 2, \dots, n$ en donde el número de niveles se puede considerar como el número de períodos de tiempo dentro del horizonte de planeación. Asimismo, para cada uno de los artículos j, es posible definir el conjunto de todos sus predecesores [A(j)], y el conjunto de todos sus sucesores [B(j)]. Sean también $x_t^j \geq 0$ e y_t^j respectivamente, la cantidad a ordenar del artículo j al inicio del período t y el nivel de inventario del artículo j al final del mismo período.

Si el artículo j es uno de los componentes del artículo k, con $k \in B(j)$, sean g_{jk} la

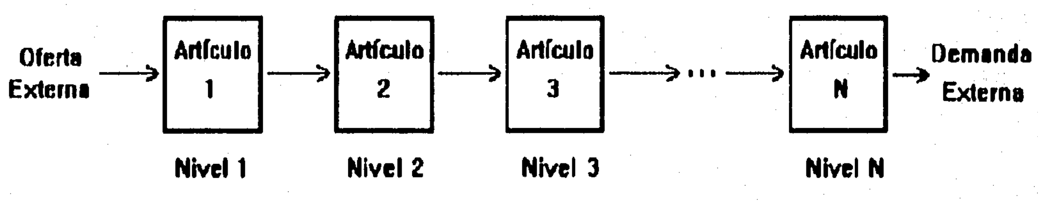


Fig 4.2 Esquema de un sistema de inventario con varios niveles, en serie

cantidad de artículos j requeridos para construir una unidad del artículo k y L(j) $\geq$ 0, el tiempo de entrega del artículo j, el cual consideraremos entero. Para el artículo j se cumple que

$$y_t^j = y_{t-1}^j + x_{t-L(j)}^j - \sum_{k \in B(j)} (g_{jk} x_t^k) - d_t^j$$

ya que significa que la cantidad "sobrante" al final del período t, será la diferencia entre la suma de las cantidades sobrante del artículo j en el período t-1 y recibida del mismo artículo al inicio del período t (entradas) y la suma de las demandas tanto internas como externas (salidas). Estas salidas del inventario del artículo j durante el período t, se llaman "requerimientos gruesos" y se denotan por r_t^j . En relación con los faltantes, se considera que, de existir, estos artículos serán entregados en alguno de los períodos posteriores, esto es, el déficit se convierte en entrega retrasada y no en pérdida de la venta.

En los sistemas de inventarios con varios niveles y principalmente cuando la demanda sufre cierta variación de un período a otro, suele presentarse un fenómeno conocido como amplificación de las oscilaciones de los niveles de inventario, este fenómeno consiste en la ocurrencia de cambios constantes y cada vez mayores en los niveles de inventario de un período a otro, de cada uno de los artículos que se desea controlar, y es de llamar la atención que aún cuando a partir de cierto período la cantidad de unidades solicitadas del artículo j sea cero, continúa habiendo fuertes modificaciones en los niveles de inventario de períodos subsecuentes. Estas oscilaciones, según Forrester, son características del sistema, sin embargo también se nota que dependen de la política que se utilice para ordenar, de la cantidad de niveles que se tengan en el sistema, así como de la longitud de los tiempos de espera para la entrega de cada artículo controlado, de hecho es posible reducir las oscilaciones en los niveles de inventario reduciendo los tiempos de entrega de los artículos, o bien modificando la política de pedido dentro de la red de inventarios multiniveles.

Ejemplo:

Consideremos un sistema de inventario en el que se tiene una estructura de serie, y consta de 3 artículos bajo control común. Supongamos que para cada unidad de demanda se requiere exactamente 1 unidad de oferta, por lo que g_{jk} = 1 para todas j y k. Gráficamente, la situación en cada período es la siguiente:

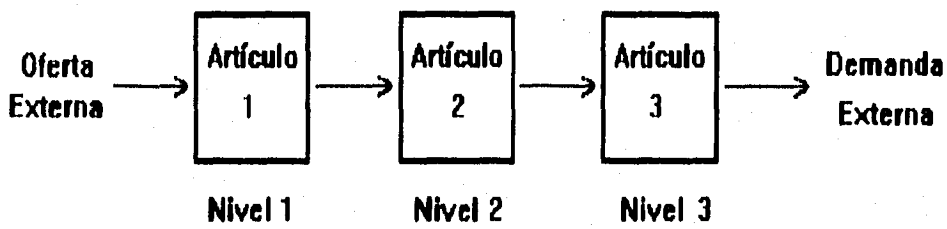


Fig 4.3 **Inventario en serie con 3 artículos y $g_{jk} = 1$**

En el control de este sistema se desea no solamente satisfacer los requerimientos, sino también contar siempre con un inventario de seguridad de 12 unidades, y nunca tener faltantes, cuando se sabe con certeza que el tiempo de espera desde que se realiza un pedido y hasta el momento en que se entrega el material es de dos períodos. Esto significa que se satisface la relación

$$y_t^j = y_{t-1}^j + x_{t-2}^j - x_t^{j+1} \quad ; \quad j = 1, 2, 3$$

Por otro lado, y dado que se supone que transcurre un período de tiempo entre la ocurrencia de un requerimiento x_t^{j+1}, y su conocimiento en el nivel precedente j, la política general de pedido que se ha adoptado, sin que necesariamente sea la óptima, se resume en la siguiente expresión:

$$x_t^j = x_{t-1}^{j+1} + \frac{1}{2}(12 - y_{t-1}^j) \qquad j = 1, 2, 3$$

donde

$x_t^4 \equiv d_t$ para toda t, y

x_t^j se redondea al entero superior. Por último, las demandas del artículo 3 en cada uno de los períodos 1 a 25, son:

6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 5, 6, 7, 8, 9

El comportamiento del inventario se muestra en la siguiente tabla, y corresponde a la figura 4.4.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
x_t^3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	10	12	14	13	10	5	1	0	0	0	3	7	12
y_t^3	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	11	9	6	4	5	9	16	23	28	29	25	19	12	4	-2
x_t^2	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	9	13	18	23	22	15	1	0	0	0	0	0	0
y_t^2	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	10	6	0	-5	-5	3	21	42	57	58	58	55	48	36
x_t^1	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	11	18	29	40	41	27	0	C	0	0	0	0
y_t^1	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	9	2	-10	-22	-26	-12	27	68	95	95	95	95	95
d_t	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9

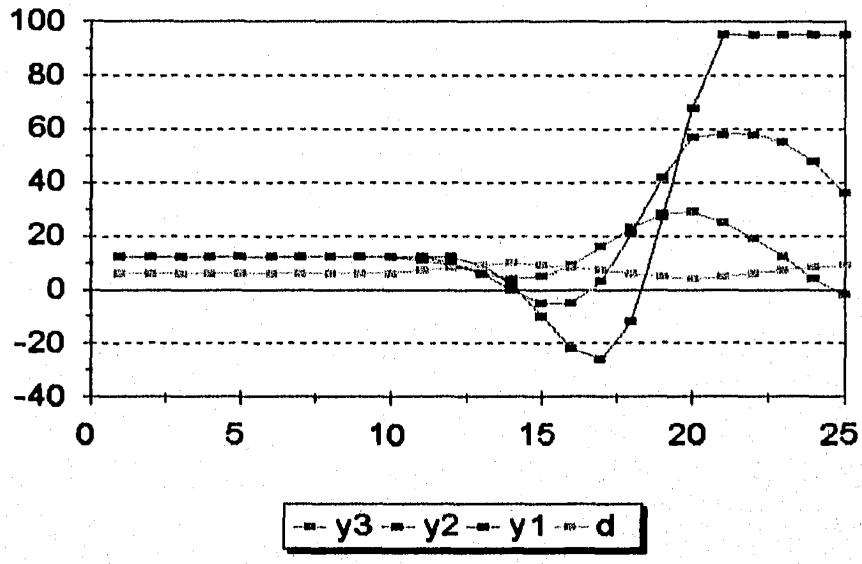


Fig 4.4 **Comportamiento de los niveles de inventario con varios niveles, considerando 2 períodos como tiempo de entrega.**

Veamos lo que sucede con los niveles del inventario si se considera ahora que el tiempo de entrega se reduce de dos períodos a solamente uno. En tal caso, desde luego la política para ordenar no sufrirá ningún cambio, sin embargo, la expresión para determinar el nivel de inventario al final de cada uno de los períodos, si será un poco distinta, a saber:

$$y_t^j = y_{t-1}^j + x_{t-1}^j - x_t^{j+1}; \quad j = 1, 2, 3.$$

al aplicarla produce los resultados de la tabla 4.2, y que se muestran en la figura 4.5.

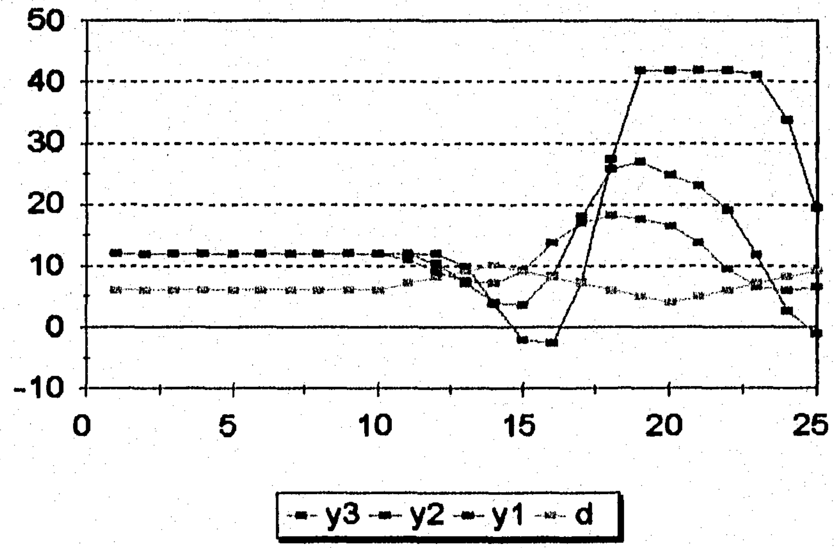


Fig 4.5 **Comportamiento de los niveles de inventario cuando el tiempo de espera se reduce a un período y se mantiene la misma política para ordenar.**

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
x_t^3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	10	11	13	10	7	4	3	2	2	4	7	10	11
y_t^3	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	11	9	8	7	9	14	17	18	18	17	14	9	7	6	7
x_t^2	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	12	15	17	12	4	0	0	0	0	1	7	14
y_t^2	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	11	7	4	4	8	18	26	27	25	23	19	12	3	-1
x_t^1	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	9	16	22	24	15	0	0	0	0	0	0	0
y_t^1	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	10	4	-2	-3	7	27	42	42	42	42	41	34	19
d_t	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9

Comparando las gráficas correspondientes a cada uno de los dos casos analizados hasta este momento, es claro que el objetivo de disminuir las oscilaciones en los niveles del inventario, se ha logrado, sin embargo, observemos que no es aún lo óptimo, pues como comentamos anteriormente, existen diversas formas para tratar de abatir o tal vez moederar dichas oscilaciones, y en este caso, aunque se ha realizado un cambio, es posible aún mejorar el resultado obtenido esto es, acercarnos más al nivel de oscilación deseado.

Si reducimos ahora el tiempo de espera a cero, esto es, si la entrega fuera inmediata, pero se mantiene la misma política para ordenar, las expresiones que requeriríamos para calcular los tamaños de pedido e inventario para cada artículo en un período específico t, también sufrirán cambios, ya que las anteriores respondían a las condiciones planteadas: una política para ordenar y un tiempo fijo de espera para la entrega de los artículos solicitados. Como veremos, en este caso particular solamente se debe modificar aquella ecuación asociada con el cálculo de la cantidad en inventario. Así las ecuaciones que nos permitirán analizar el comportamiento del inventario con las nuevas condiciones son:

$$y_t^j = y_{t-1}^j + x_t^j - x_t^{j+1} \quad ; \quad j = 1,\ 2,\ 3$$

y

$$x_t^j = x_{t-1}^{j+1} + \frac{1}{2}(12 - y_{t-1}^j) \qquad j = 1,\ 2,\ 3$$

con las que se obtienen los resultados que aparecen en la siguiente tabla (ver fig 4.6).

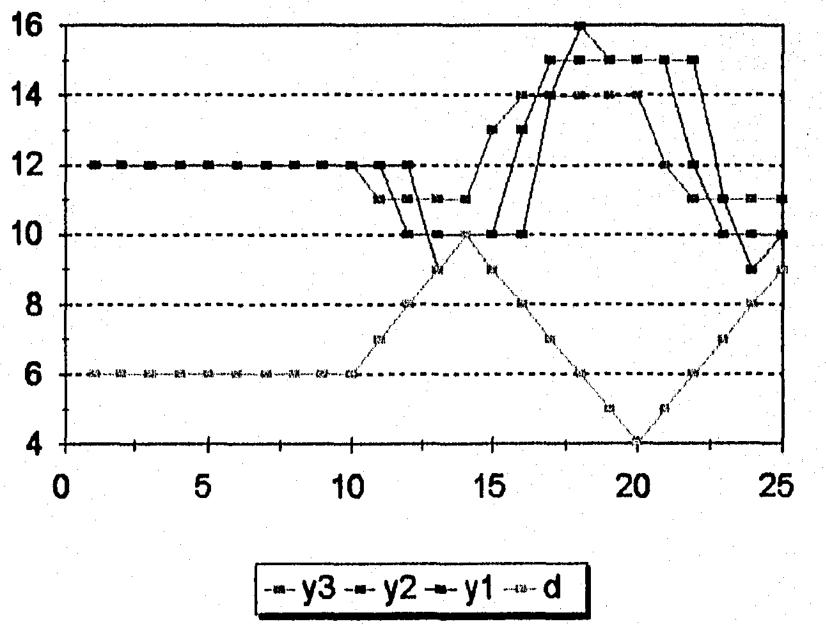


Fig 4.6 Niveles de inventario en cada uno de los períodos, cuando la política a ordenar se mantiene, pero la entrega es inmediata.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
x_t^3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	9	10	11	9	7	6	5	4	3	5	7	8	9
y_t^3	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	11	11	11	11	13	14	14	14	14	14	12	11	11	11	11
x_t^2	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	9	10	11	12	9	6	5	4	3	2	5	8	9
y_t^2	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	10	10	10	10	13	15	15	15	15	15	12	10	10	10
x_t^1	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	11	11	12	13	8	4	4	3	2	1	6	10
y_t^1	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	9	10	10	10	14	16	15	15	15	15	11	9	10
d_t	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9

Por último si se lograra eliminar la demora en la información de los pedidos solicitados, se modificaría la política de ordenar, de tal manera que se utilizaría la siguiente política:

$$x_t^j = x_t^{j+1} + \frac{1}{2}(12 - y_{t-1}^j) \qquad j = 1,\ 2,\ 3$$

y se mantiene en cero el tiempo de entrega de los artículos ordenados, se obtendrían los resultados de la tabla siguiente, que gráficamente se muestran en la figura 4.7.

Si se realiza un análisis comparativo de los niveles de inventario, ya sea a partir de los valores calculados o a través de las gráficas correspondientes, es claro que en realidad, como se comentó antes, las modificaciones en los planes para ordenar o bien en el tiempo de entrega, redunda en modificaciones, en ocasiones bastante significativas, de los niveles de inventario en cada período. Conviene aquí aclarar que no siempre las fluctuaciones en las cantidades a ordenar o en los niveles de inventario son indeseable, es más, en ocasiones dichas fluctuaciones pueden ser inducidas. Esto es muy importante, ya que por el bien de la empresa se debe adoptar la política más económica, no solo desde el punto de vista monetario, sino también el social.

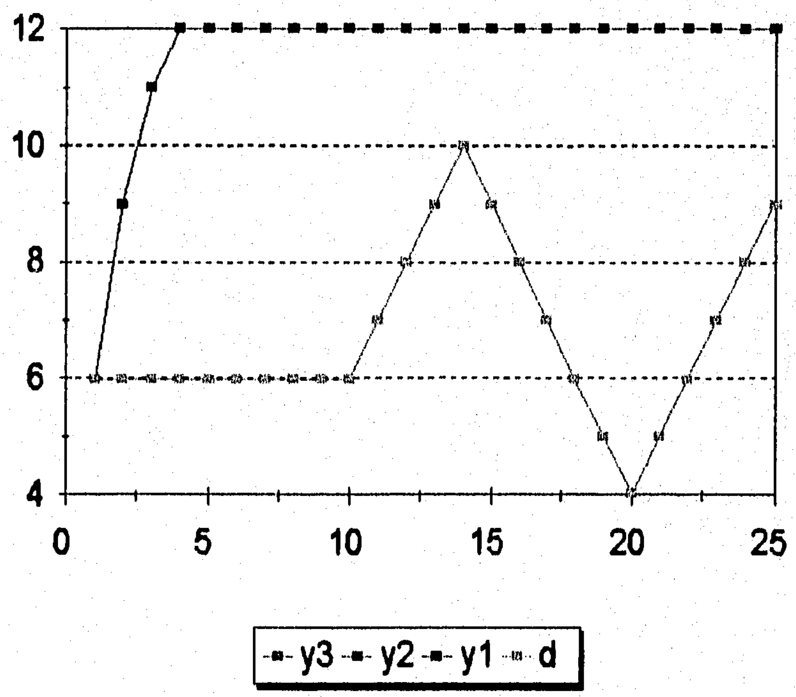


Fig 4.7 Cantidad de artículos en inventario en cada uno de los períodos, cuando el tiempo de retraso en la entrega y el tiempo para informar sobre las solicitudes de materia son nulos.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
x_t^3	12	9	8	7	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9
y_t^3	6	9	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
x_t^2	18	12	10	8	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9
y_t^2	6	9	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
x_t^1	24	15	12	9	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9
y_t^1	6	9	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
d_t	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4	5	6	7	8	9

El problema, entonces, es determinar la política óptima de funcionamiento de este tipo de inventario, y para lograrlo existen diferentes métodos. Uno de ellos se debe a Veinott, y es el siguiente:

Consideremos un sistema de inventario con N productos y m tipos diferentes de demanda todas distinguibles entre sí, en el cual se aceptan los sustitutos, $D_i = (D_{ij})$ es la demanda en el período i, $x_i = x_{ij}$ el nivel de inventarios disponibles o en tránsito (por entregar) justo antes de ordenar en el período i, $y_i = (y_{ij})$ el nivel de inventario ya sea disponible o en tránsito después de realizar el pedido correspondiente al período i, y $v(y_i, D_i) = v_j(y_i, D_i)$ el nivel del inventario al finalizar el mismo período, a esta función se le puede llamar **política para ordenar**.

Supongamos también, que el tiempo de entrega es λ para todos los artículos, que si $\lambda > 0$ entonces $v(y, t) = y - t$, esto es, que para cada producto existe un solo tipo de demanda y que los artículos faltantes se surten con retraso; y que los costos por ordenar son proporcionales a las cantidades ordenadas. Consideremos por facilidad un sistema con únicamente dos artículos, y que ambos artículos pueden aceptarse como sustitutos del otro. Esto significa que entonces $v_2(y_i , D_i)$ se puede definir como sigue:

$$v_2(y_i , D_i) = \max \{y_{i2} - D_{i2} - \max (D_{i1} - y_{i1} , 0), 0\}.$$

Si llamamos $\mathbf{y_i}$ al valor de y_i que minimiza el costo del inventario, y si $v(\mathbf{y_i},t) \leq \mathbf{y_{i+1}}$, se pueden identificar dos casos:

a) Si $x_I \leq \mathbf{y_I}$, en cuyo caso la política óptima sería hacer crecer los niveles de inventario de cada uno de los productos al inicio de cada período hasta el nivel de inventario base.

b) Si $x_I > \mathbf{y_I}$, y si la función de costos es convexa, el conjunto Y_i de los tamaños posibles de ordenes, es convexo también, y si las demandas insatisfechas se convierten en demandas satisfechas en períodos posteriores, entonces la política óptima, vomo se muestra en la figura 4.8, depende de $\mathbf{y_I}$, y de las funciones z_{i1} y z_{i2} que representan los niveles básicos de inventario de cada uno de los artículos en el período i. Esto es,

- Si los niveles de inventario de los artículos 1 y 2 se encuentran en la región I, no se debe realizar pedido alguno en el período;
- Si los niveles de inventario de los productos se localizan en la región II, la decisión óptima sería solicitar únicamente el producto 1 de manera que su nivel de inventario alcance el nivel $z_{i1}(x_{i2})$;
- Si los niveles de inventario de cada uno de los productos se encuentran en la región III, se deberá ordenar únicamente el artículo 2 en cantidad suficiente para alcanzar el nivel $z_{i2}(x_{i1})$;

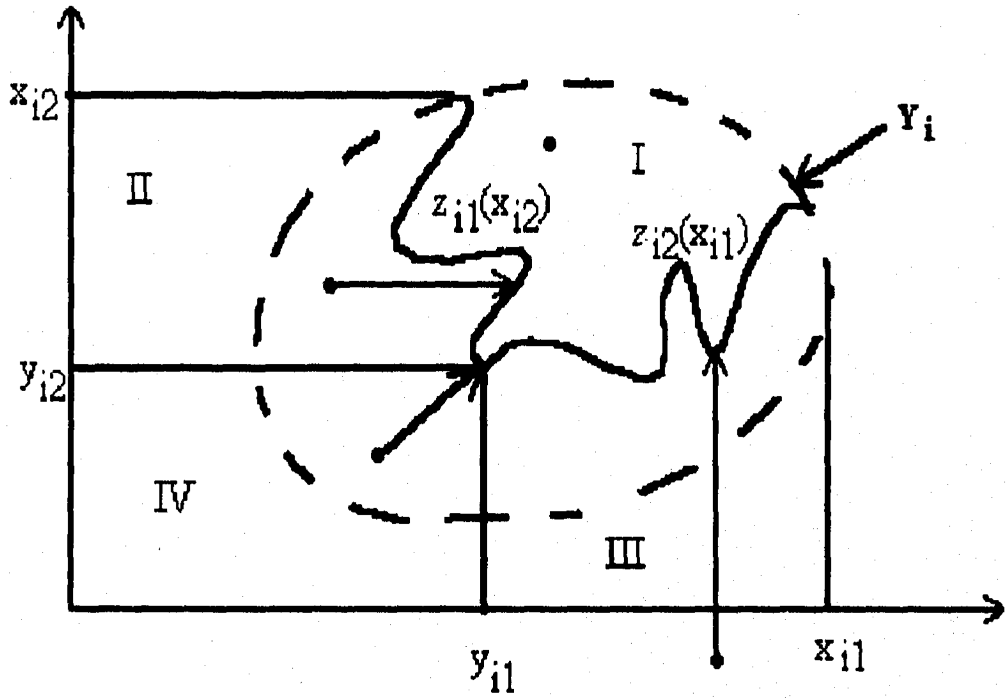


Fig 4.8 Política óptima para ordenar en un inventario con múltiples niveles

- Por último, si el nivel de inventario de cada uno de los artículos se localizara en la región IV, la política óptima sería solicitar ambos artículos, de tal forma que se llegue al punto y_i.

Desgraciadamente, es difícil determinar a las funciones z_{ij}

4.2 PLANEACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE MATERIAL (MRP)

La "planeación de requerimientos de material" se puede concebir como una filosofía o una metodología para responder de manera aproximada a preguntas relacionadas con el cuando y cuanto ordenar de cada artículo bajo control de un sistema de inventario con múltiples productos, que mantienen una estructura en varios niveles, ya que en realidad entre ellos existen relaciones de oferta-demanda.

El MRP es una técnica que en estos últimos tiempos ha tomado gran auge y ha reemplazado a los otros métodos conocidos como sistemas reactivos de inventarios, principalmente cuando existe dependencia entre las demandas de los artículos. La razón de este cambio puede deberse a que mientras que los sistemas antiguos parecen decidir lo que se debe hacer en este momento, los sistemas de planeación toman providencias, preguntándose por lo que se requerirá en el futuro, para planear la mejor solución, y no tener que responder cuando el problema está encima. Los resultados que proporciona son satisfactorios, ya que reduce los niveles de inventario y los costos del mismo, puesto que maneja solamente aquellos materiales que se requieren y cuando se necesitan; ayuda a disminuir los tiempos de espera en la producción y los retrasos en los procesamientos de las órdenes de trabajo y permite que los trabajos sean realizados a tiempo. Su implantación en las empresas de producción requiere de información completa y precisa acerca de las necesidades de materiales así como con una planeación de la producción, lo cual podría constituir ya una limitante, y sobre todo, exige disciplina y compromiso en el cumplimiento de los programas establecidos.

En un sistema MRP existen tres componentes fundamentales de información: El programa maestro de producción (MPS) que se había mencionada anteriormente, un archivo del estado legal del inventario y un archivo de listas de materiales para la estructura del producto. Con base en estos tres componentes, la lógica del MRP proporciona tres tipos de resultados que informan sobre cada de los artículos en inventario, a saber: Los requerimientos para emitir las órdenes, una nueva programación de las órdenes, y las órdenes planeadas. Estos componentes se muestran en la figura 4.9.

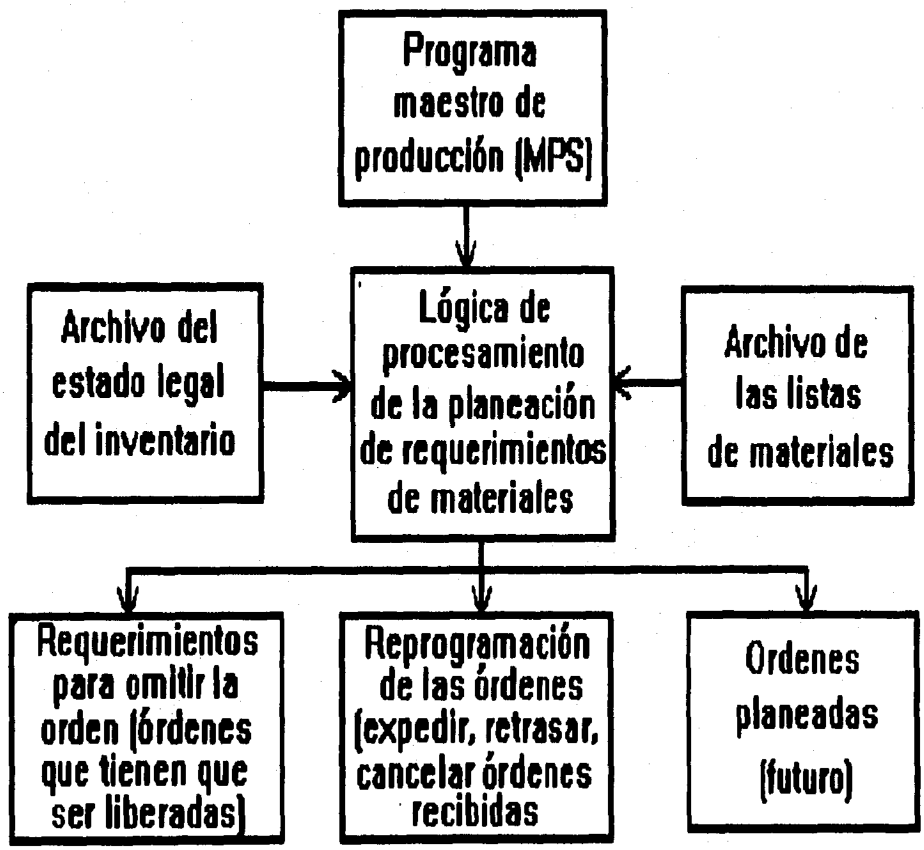


Fig 4.9 Componentes del Programa de Requerimientos de Material (MRP)

El programa maestro de producción (MPS) se inicia a partir ya sea de las demandas de los clientes o bien de los pronósticos de demanda anteriores al establecimiento del MRP. Su labor es identificar las cantidades de cada uno de los productos terminados, así como el momento en el que se deberán producir en el futuro dentro del horizonte de planeación. Es así que es un insumo indispensable para el MRP, y controla todas las acciones recomendadas por el MRP.

La lista de Materiales identifica, para cada artículo, sus componentes, su secuencia de integración, así como la cantidad de él que se requiere para conformar el producto final.

El archivo del estado legal del inventario es un archivo completamente actualizado de la situación real del inventario de cada uno de los artículos que se requieren para elaborar el producto final. Esto es, el archivo del estado legal del inventario proporciona información precisa sobre la disponibilidad de cada uno de los artículos controlados por el MRP

La lógica de procesamiento del MRP recibe la información del MPS, y desarrolla programas para cada uno de los artículos componentes del artículo final. Calcula para cada artículo y para cada período dentro del horizonte de planeación la cantidad requerida del artículo, la cantidad de unidades disponibles en el inventario, así como un programa de cuando se deben colocar órdenes, y la cantidad neta de unidades que se tendrían al recibir las cantidades solicitadas, de manera que los materiales lleguen justo cuando se necesitan, ni antes, ni después.

Como se recordará, se dijo que los requerimientos de determinado material podían ser internos y externos, y que los requerimientos totales serían la suma de ambos, en el MRP, los requerimientos se separan por períodos de tiempo no necesariamente de la misma longitud, y el tiempo total que cubrirán dichos períodos, será todo el horizonte de planeación, a partir del momento actual.

Con el MRP se desea planear los requerimientos de cada uno de los artículos bajo control, de manera que con la suficiente anticipación se realicen los pedidos necesarios, de manera que se evite en lo posible el déficit de alguno cualquiera de los artículos, para ello se requiere contar de un plan maestro de producción (MPS) que nos permita realizar una aproximación de la demandas futuras de cada uno de los artículos debido a su utilización para conformar los artículos finales bajo control del mismo inventario y adicionalmente a dicha demanda interna, conocer completamente la demanda externa en cada período para cada uno de tales artículos. Es importante insistir en que definitivamente, no se planerarán faltantes, es decir, la filosofía consiste en planear de manera de recibir en el momento requerido, el artículo necesario y en cantidad suficiente.

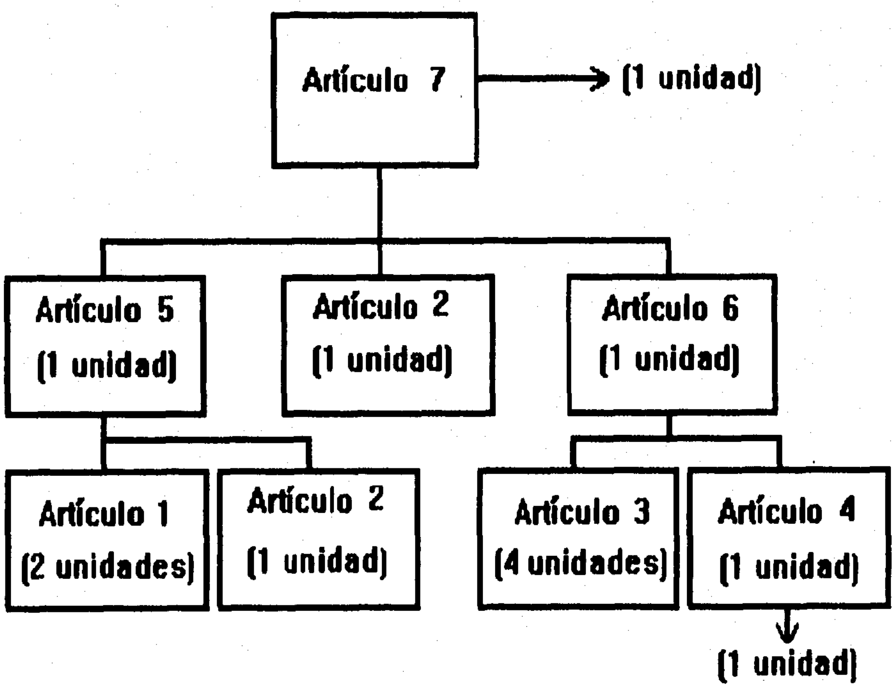
<u>Ejemplo:</u>

Consideremos el sistema de inventario con varios niveles, que maneja 7 productos los cuales se relacionan como se muestra en la figura.Aceptemos también el siguiente plan maestro de producción:

Artículo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7	3	6	12	8	15	15	15	15	15	15	15
4	6	2	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Se sabe también que los tiempos de entrega (en períodos) de cada uno de los artículos, así como su nivel inicial de inventario, los tamaños de lote y los períodos en los que se planea recibir cada uno de los artículos así como la cantidad esperada, se muestran en la siguiente tabla:

Artículo	Tiempo de espera	Nivel de inventario inicial	Entregas programadas (período)	Tamaño del lote
1	1	100	-	200
2	1	6	-	-
3	1	40	20 (1)	-
4	1	2	60 (0)	60
5	2	14	30 (1)	-
6	2	6	-	20
7	1	3	-	-



Los resultados para cada uno de los artículos, que se obtienen al utilizar el MRP con las siguientes ecuaciones, se muestran en las tablas 4.1 a 4.7.

$$y_t^j = y_{t-1}^j + x_{t-L(j)}^j - r_t^j$$

$$r_t^j = \sum_{k \in B(j)} (g_{jk} x_t^k) + MPS_t^j$$

Dado que se tienen experiencias alhagadoras con la utilización del MRP se ha seguido investigando y se ha encontrado que sus sistemas de información pueden ser compartidos con algunas otras bases de datos relacionadas por ejemplo con facturación, cuentas por pagar, mercadotécnia o compras. Así se crea el sistema MRPII que coordina las ventas, compras, manufactura, finanzas e ingeniería adoptando un plan de producción a partir del plan general de negocios investigando la factibilidad de dicho plan, y tomando en cuenta las restricciones por capacidad.

Desde luego, entonces, la filosofía es la misma que la del MRP, solamente que es un programa más completo para la empresa. Algo que vale la pena mencionar también es que se basa en la entrega a tiempo de cada uno de los materiales requeridos, así como en la calidad de dichos insumos, de donde se puede relacionar con la filosofía japonesa también ampliamente conocida y difundida en estos tiempos, del **Just in Time**.

4.3 UTILIDAD DEL MRP

El MRP es un sistema para determinar cuando y cuanto ordenar, y como los otros sistemas o métodos, está sujeto a su aplicabilidad en la realidad. Está orientado a satisfacer los productos finales del programa maestro de producción, para lo cual parte de que los tiempos de entrega son conocidos y que no existe gran aleatoriedad en la demanda.

Los objetivos que persigue el MRP son los siguientes:

a) Abatir los niveles de inventario: Entre la información que proporciona el MRP, se encuentra una planeación de la cantidad y el momento de ordenar cada uno de los artículos bajo control, de manera que se adquiera cuando se necesite.

b) Disminuir los tiempos de espera en la producción y la entrega: Dado que el MRP identifica plenamente los materiales requeridos, así como su cantidad y el momento de utilización del mismo, al tomar decisiones coordinadas para todos los artículos, se evitan las demoras en la producción y en la entrega tanto del producto terminado como de aquellos materiales que tienen demanda externa.

Tabla 4.1 Requerimientos del artículo 7

Período t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Requerimientos totales		3	6	12	8	15	15	15	15	15	15	15	
Recepciones planeadas													
Disponibles de acuerdo al plan	3	0	-6	-18	-26	-41	-56	-71	-86	-101	-116	-131	-131
Requerimientos netos			6	12	8	15	15	15	15	15	15	15	
Plan de realización de órdenes		6	12	8	15	15	15	15	15	15	15	15	
Nivel real de inventario	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 4.2 Requerimientos del artículo 6

Período t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Requerimientos totales		6	12	8	15	15	15	15	15	15	15	15	
Recepciones planeadas													
Disponibles de acuerdo al plan	6	0	-12	-20	-35	-50	-65	-80	-95	-110	-125	-140	-140
Requerimientos netos			12	8	15	15	15	15	15	15	15	15	
Plan de realización de órdenes		20	20	20	20		20	20	20		20		
Nivel real de inventario	6	0	-12	0	5	10	15	0	5	10	15	0	0

Tabla 4.3 Requerimientos del artículo 5

Período t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Requerimientos totales		6	12	8	15	15	15	15	15	15	15	15	
Recepciones planeadas		30											
Disponibles de acuerdo al plan	14	38	26	18	3	-12	-27	-42	-57	-72	-87	-102	-102
Requerimientos netos						12	15	15	15	15	15	15	
Plan de realización de órdenes				12	15	15	15	15	15	15	15		
Nivel real de inventario	14	38	26	18	3	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 4.4 Requerimientos del artículo 4

Período t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Requerimientos totales		26	22	28	28	8	28	28	28	8	28	8	
Recepciones planeadas	60												
Disponibles de acuerdo al plan	2	36	14	-14	-42	-50	-78	-106	-134	-142	-170	-178	-178
Requerimientos netos			14	28	8	28	28	28	8	28	8	8	
Plan de realización de órdenes			60			60		60					
Nivel real de inventario	62	36	14	46	18	10	42	14	46	38	10	2	2

Tabla 4.5 Requerimientos del artículo 3

Período t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Requerimientos totales		80	80	80	80	0	80	80	80	0	80	0	0
Recepciones planeadas		20											
Disponibles de acuerdo al plan	40	-20	-100	-180	-260	-260	-340	-420	-500	-500	-580	-580	-580
Requerimientos netos			20	80	80	80		80	80	80		80	
Plan de realización de órdenes		100	80	80	0	80	80	80		80			
Nivel real de inventario	40	-20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 4.6 Requerimientos del artículo 2

Período t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Requerimientos totales		6	12	20	30	30	30	30	30	30	30	15	0
Recepciones planeadas													
Disponibles de acuerdo al plan	6	0	-12	-32	-62	-92	-122	-152	-182	-212	-242	-257	-257
Requerimientos netos			12	20	30	30	30	30	30	30	30	15	
Plan de realización de órdenes		12	20	30	30	30	30	30	30	30	15		
Nivel real de inventario	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 4.7 Requerimientos del artículo 1

Período t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Requerimientos totales		0	0	24	30	30	30	30	30	30	30	0	0
Recepciones planeadas													
Disponibles de acuerdo al plan	100	100	100	76	46	16	-14	-44	-74	-104	-134	-134	-134
Requerimientos netos							14	30	30	30	30	0	0
Plan de realización de órdenes						200							
Nivel real de inventario	100	100	100	76	46	16	186	156	126	96	66	66	66

c) Obligaciones realistas: Puesto que todo el proceso de producción está controlado, es posible prometer tiempos de entrega más realistas, con lo cual se logra además alcanzar una mejor imagen para la empresa, misma que es posible que redunde en una elevación de sus beneficios.

d) Incremento en la eficiencia: Al aplicar el sistema MRP se provoca una mayor coordinación de los departamentos que participan en la integración del producto, con lo cual es posible reducir a los intermediarios y con menos interrupciones no deseadas del proceso de producción, logrando que esta sea más eficiente.

4.4 TAMAÑO DEL LOTE CON VARIOS NIVELES

Como se mencionó anteriormente, los sistemas MRP son sistemas creados con características diferentes a los modelos reactivos estudiados antes y por tal razón la determinación de su tamaño de lote también tendrá diferencias. Entre las características distintivas de los MRP con relación a los otros métodos se encuentran las siguientes:

1) La demanda de materiales o componentes es tal que aunque depende de los requerimientos de los artículos en niveles superiores, una vez que se decide el plan de producción, será una demanda determinísta.

2) La demanda no será una demanda continua en el tiempo, sino que se tiene una demanda discreta misma que ocurre en intervalos discretos, al principio de los períodos dentro del horizonte de planeación.

3) Ya que uno de los objetivos del sistema es evitar los retrasos en la producción, resulta indispensable que no se permita tener déficit en ningún momento dentro del horizonte de planeación para ninguno de los artículos bajo control.

4) Inducido por las fluctuaciones en las demandas de los clientes, ya sea para los productos terminados, o para los materiales que presentan una demanda externa, y que es necesario atender, no es posible en este caso considerar demandas constantes, sino por el contrario se debe trabajar con demandas variables de un período a otro.

5) El costo por llevar inventario será considerado con base en el nivel de inventario para cada uno de los artículos al final de cada uno de los períodos.

Es posible encontrar una gran variedad de maneras para aproximar el tamaño óptimo del lote, y desde luego cada una de ellas tendrá efectos en los costos lo cual conjuntamente con las capacidades de cómputo, por ejemplo, con que se cuente, se seleccionará alguna de ellas.

No obstante, se pueden distinguir algunas propiedades en las políticas óptimas para ordenar, mismas que reducirán el esfuerzo de cómputo en la obtención de la mejor aproximación ya que de entrada permiten descartar alternativas que no posean estas propiedades:

1) Todo período en cual se planee realizar una orden, estará precedido por un período con inventario final igual a cero.

2) La cantidad a ordenar siempre será igual a la demanda del período actual, o bien a la demanda de dicho período más un número entero de períodos adicionales, esto es, nunca será óptimo solicitar una cantidad de artículos tal que haga frente a una porción de la demanda de alguno de los períodos, de manera que se requiriera realizar una solicitud complementaria.

3) El nivel de inventario al final de un período será igual a la demanda del período siguiente, o bien a las demandas de varios períodos posteriores.

4) Los artículos utilizados para satisfacer la demanda en un período específico serán los recibidos más recientemente.

5) No se programará la recepción de ninguna orden al inicio de algún período con demanda cero, ya que acarearía costos innecesarios por mantener artículos en inventario.

6) En caso de que el costo por llevar inventario sea superior al costo por ordenar, no deberán mantenerse artículos en inventario.

Un procedimiento seguro para determinar el tamaño óptimo del lote, es el algoritmo de Wagner-Within que propone un método recursivo basado en la programación dinámica con el fin de lograr su objetivo. Para ello se plantea la ecuación de recurrencia

$$f_i = \min_{i+1 \le m \le n} \{c_{im} + f_m\}$$

en donde f_i es el costo mínimo en los períodos $i + 1, \ldots, n$ si se ordena en el período $i + 1$, y c_{im} representa el costo asociado con la realización de una orden en el período $i + 1$, en cantidad suficiente para satisfacer la demanda desde el período $i + 1$ y hasta el período m, y se calcula como

$$c_{im} = k + \sum_{t=i+1}^{m-1} \left(\sum_{\tau=t+1}^{m} r_\tau^j \right)$$

No obstante, existen como mencionamos antes, varios métodos heurísticos para acercarse a dicho óptimo y generalmente se basan en la búsqueda a partir del período actual (i) y en cada uno de los períodos sucesivos hasta identificar un criterio de paro, en donde m(i) será un candidato de período para parar. Algunos de estos métodos son, entre otros, los siguientes:

a) El método conocido como **Cantidad de períodos por orden** cuyo razonamiento es similar al del tamaño económico de orden, que busca determinar el número de períodos que serán cubiertos por cada orden.

Si m_i^* es el período de paro seleccionado con base en criterio establecido, se decidirá

$$m_i^* = i - 1 + \sqrt{\frac{2k}{\bar{r}h}}$$

donde $\bar{r}$ son los requerimientos promedio en el horizonte de planeación, esto es

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t^j$$

b) El **método del menor costo unitario**, es un método prospectivo que inicia siempre en el período 1, selecciona m(i) de manera que se minimice el costo unitario por ordenar de manera que se cubran las demandas de un número cada vez mayor de períodos. El costo unitario se calcula dividiendo la suma de los costos por ordenar y mantener inventario, por el número de unidades ordenadas. Esto es,

$$UC(m,i) = \frac{\mathbf{k} + \mathbf{h}\sum_{t=i}^{m(i)} (t-i)\, r_t^j}{\sum_{t=1}^{m(i)} r_t^j}$$

y m_i^* será aquel m(i) para el cual UC(m,i) sea mínima.

De cualquier manera, el propio sistema MRP en general tiene la capacidad de ajustar de manera automática el tamaño de lote a utilizar, tomando en cuenta algunas consideraciones prácticas como pueden ser:

- Las limitaciones impuestas por el vendedor, en cuanto a tamaño máximo del lote,
- la capacidad del almacén,
- las políticas de venta del proveedor, que pueden ser vender únicamente por múltiplos de una unidad establecida, y no necesariamente de artículo por artículo, entre otras.

Existen testimonios de varios usuarios del MRP, en los que remarcan los beneficios que han obtenido sus empresas gracias a la utilización del sistema MRP. Mencionaremos solamente algunos:

- La compañía Corning Glass Works de Corning, N.Y. maneja alrededor de 60,000 productos y está formada por 29,000 empleados que operan en sus 63 plantas alrededor del mundo, ha implementado un sistema MRP en los almacenes de algunas de sus plantas. En una reunión de los gerentes de planta, el gerente de distribución en la planta de Greencastle, comentó el impacto que en su planta tuvo la implementación del MRP, afirmando que desde que se implementó el sistema, la presición de su inventaio ha aumentado de 69% a 86%, y el rendimiento medido como lo que se conoce como líneas muertas, ha mejorado de 71% a 90%.

  Por otro lado, el gerente de la planta de Harrodsberg, importante por su localización y el trabajo que desarrolla (fundir 65 tipos diferentes de vidrio) informa que desde hace 3 años que se implantó el MRP en su planta, se ha logrado un gran ahorro, ya que se ha eliminado la necesidad de mantener inventarios físicos, ya que el sistema de cómputo es tan seguro, que se han ahorrado alrededor de 800 horas hombre, por otro lado, es cierto que el sistema de cómputo ha sido costoso, (400,000 dólares entre equipo y programas de cómputo para el manejo del inventario), sin embargo, también comenta, que en solamente un año con la implantación del sistema se logró ahorar más de 500,000 dólares. Adicionalmente, la computadora realiza el trabajo pesado de cálculo de tamaños de lote de producción, etc, y la precisión del inventario se ha elevado como se comentó al 90%, aunque en algunas areas el resultado ha sido mejor aún, por ejemplo, en el departamento de mantenimiento en donde se almacenan más de 8,000 artículos diferentes entre mateirales y herramientas, la precisión del inventario ha llegado al 99%, lo cual resulta bastante halagador.

- La compañía de productos para hospitales "American Sterilizer Company" ha mejorado en su tiempo de entrega a los clientes del 70% al 95%, ha reducido sus tiempos extra en al menos 50%, y sus costos por déficit en más de 80%.

- La compañía manufacturera Bentley-Nevada fabrica instrumentos que miden la vibración en maquinaria, implementó un sistema MRP en menos de 18 meses. Con este nuevos sistema, su porcentaje de remesas se elevó de 3% a 20% en los pedidos anteriores, mientras que en total, el porcentaje de entregas aumentó en 13% y las solicitudes de producción se acercaron al 21%.

- La División de Colorado de Hewlett-Packard cuya función es fabricar gran variedad de instrumentos electrónicos, modificó su sistema MRP de manera que le proporciones reportes financieros además de los planes de operación. Las predicciones resultaron bastante satisfactorios, con costos de producción dentro del 1% de los proyecciones para su nuevo sistema MRPII.

CAPITULO 5

PLANEACIÓN DE LAS NECESIDADES DE DISTRIBUCIÓN

INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se habló de algunas técnicas para controlar los inventarios de las empresas de producción que se enfrentan al control de varios de sus artículos, cuando existen relaciones entre las demandas de dichos artículos, y en particular cuando dichas demandas son del tipo oferta-demanda.

Sin embargo, no se puede dejar de lado el hecho de que existen también empresas cuyo ramo no es la producción sino la distribución de producto terminado, y no solamente a granel sino en muchas ocasiones en grandes cantidades.

Los modelos presentados anteriormente, como el MRP, no les resultan de utilidad para resolver su problema, ya que como se mencionó en su oportunidad, entre los requerimientos indispensables para utilizar esa metodología es contar con un plan maestro de producción, lo cual es imposible generar en estos casos.

El objetivo de este capítulo es presentar algunas técnicas que ayuden a resolver el problema al que se enfrentan las empresas de distribución, dándoles una pauta para decidir de la mejor manera no solo el número de centros de distribución que, en su caso, es recomendable mantener, sino también la localización más deseable de los mismos centros.

5.1 SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN CON VARIOS NIVELES.

En cualquier proceso de distribución el objetivo es hacer llegar los productos desde el productor hasta el consumidor, lo cual puede ocurrir a través de varios pasos de transportación y almacenamiento, y es probable que en algunos de ellos se vea sometido a algún procedimiento o manufactura adicional.

En estos sistemas se puede identificar algunas preguntas clave para su diseño:

- El número de almacenes, así como su localización y tamaño.
- Los artículos que serán manejados en cada almacén.
- Las plantas o vendedores que entregarán artículos a cada almacén.
- Los clientes que serán atendidos por cada uno de los almacenes.
- Los medios de transportación de las mercancías.
- El grado en el que cada almacén se hará cargo de las actividades inherentes a la distribución (transportación, publicidad, etc.).
- Las rutas de los transportes.
- La selección de un sistema para controlar los inventarios para cada uno de los almacenes.

Las preguntas que deseamos intentar responder son las referentes al manejo de los inventarios, esto es, cuándo y cuánto se debe ordenar dentro de esta red de distribución.

Empecemos por identificar la forma en que está conformado u organizado este sistema de distribución en niveles.

Entre la planta y el consumidor, pueden existir diferentes niveles o inventarios, y las razones para ello pueden ser variadas, por ejemplo, para lograr una mayor cercanía con el cliente que redunde en una atención más rápida, y ganar así la preferencia del mismo;o bien, ahorrar en los gastos de transportación haciendo un uso más eficiente de los medios que para ello se utilicen, enviando los artículos de la planta a un centro de distribución (DC), que posteriormente se encargue de la distribución a los almacenes más pequeños, o almacenes regionales.

En la figura 5.1 su muestra la estructura de un sistema de distribución con 3 niveles.

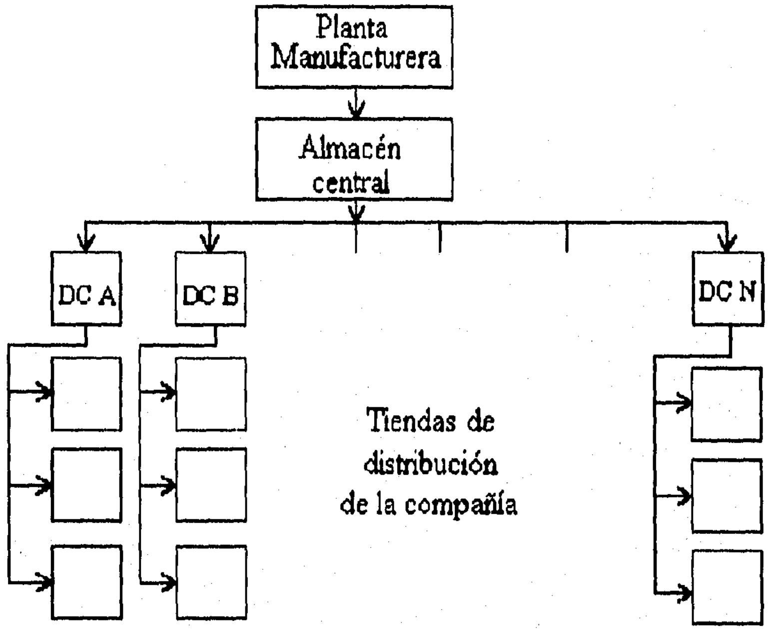


Fig 5.1 Sistema de distribución con 3 niveles

Desde luego, con esta base cada uno de los sistemas tendrá una conformación diferente, dependiendo de los artículos que se vayan a distribuir, y de las necesidades no solamente de la empresa de distribución sino también de los clientes.

5.2 SISTEMAS PULL Y PUSH

De acuerdo con el diccionario de APICS, existen dos sistemas de operación de los inventarios de un sistema de distribución, con características que los hacen radicalmente diferentes:

<u>Sistema Pull</u> Es un sistema en el que todos los movimientos son solamente un reflejo de las necesidades inmediatas del usuario. Su objetivo es comprar, transportar, etc. exactamente en el momento en que se requiere, y solamente las cantidades necesarias, esto significa que no desean en absoluto mantener inventario innecesario al menos en ese momento.

Sistema Push Es un sistema en el que las operaciones responden a una planeación previa, sin tomar en cuenta el estado del sistema en momento real. Su objetivo es, entonces, operar de acuerdo con el plan.

En realidad ambos sistemas existen, y también ambos son utilizados, ya que tienen ventajas y desventajas, únicamente que al parecer en este momento han tomado más auge los sistemas Push, ya que sus ventajas resultan atractivas y en mejores resultados que los sistemas Pull.

Entre las ventajas que se pueden atribuir a los sistemas Pull, que cabe decir que son los más antiguos, se puede decir que son más fáciles de manejar, ya que no se requieren grandes sistemas de cómputo, realmente, se pueden controlar manualmente, y tampoco necesitan sistemas de transmisión o comunicación demasiado sofisticados y por otro lado permite que la·persona responsable del rendimiento económico del sistema, tome las decisiones también para el manejo del inventario, de la manera que le parezca más conveniente.

Por su parte, los sistemas Push cuentan con información más confiable y actualizada, con mucha mayor rapidez, y permiten tomar decisiones de acuerdo con las condiciones observadas en cada uno de los centros, de manera que se pueda dar una mejor respuesta a las demandas ya sean, internas o externas, además toma como base los pronósticos en cada uno de los almacenes en el sistema de manera que la cantidad y el tiempo de los embarques puede ser planeado a través del horizonte de planeación. Proporciona además información al MPS, permitiendo que se consoliden las entregas, la ubicación de los inventarios, y desde luego la planeación de la producción.

Se puede reconocer entre las ventajas de los sistemas Push el hecho de que se puede sincronizar el MPS con las remesas a los centros de distribución, de tal forma que el inventario en el almacén central podría ser eliminado, con un consecuente ahorro en el inventario. Las cantidades solicitadas serían enviadas tan pronto como fueran producidas y los artículos se almacenarían, entonces, en los centros de distribución en donde estarían más cerca de los consumidores. Para disfrutar de las ventajas de los sistemas Push, se requiere que los pronósticos sean suficientemente seguros, ya que si esto no ocurriera, la diferencia con los resultados obtenidos con los métodos Pull, no sería significativa.

Se puede mencionar como una desventaja de los sistemas Pull es que la variabilidad en las demandas se amplifica en los centros de distribución, ya que estos últimos pueden decidir ordenar de manera individual para tratar de economizar en la transportación. Además, puede existir semanas sin que se reciba pedido alguno, y en otras semanas recibir solicitudes de varios de los centros de distribución, por lo que el almacén central mantendría grandes inventarios y aún así exponerse a sufrir déficit.

Los sistemas Pull se pueden manejar a través de los modelos de inventarios en los que las demandas son independientes, ya que cada uno de los centros de distribución puede revisar en un momento dado sus niveles de inventario de cierto artículo, y realizar un pedido al almacén central en el momento en que lo considere conveniente, tomando en consideración cierto tiempo de entrega y probablemente algún inventario de seguridad, para evitar en lo posible tener faltantes en tanto su solicitud es atendida y los artículos recibidos. Para ello, puede considerar la cantidad económica a ordenar calculada con los modelos que para ello se han desarrollado. Esta forma de controlar los inventarios se conoce como **Sistema de**

punto-orden.

Sin embargo, existe un método alternativo, el **Sistema stock-base** que fue desarrollado por George Kimball, que puede ser utilizado tanto en los sistemas Pull como en los Push. Su principal ventaja es que la política de reorden del almacén central, se basa en la demanda de los clientes en los Centros de Distribución más que en las órdenes recibidas de dichos centros. El efecto es una disminución en la variabilidad de la demanda.

Las principales características de este sistema son las siguientes:

a) La información acerca de la demanda en los almacenes se envía frecuentemente a los almacenes del nivel anterior.

b) Se calcula el stock base para cada uno de los artículos, y para cada uno de los almacenes en la red, buscando mantener siempre el inventario en cada uno de los puntos.

c) Periódicamente cada uno de los almacenes ordena una cantidad igual a su stock base menos la suma de su propio nivel de inventario y los niveles de inventario de todos sus almacenes subsecuentes.

Uno de los sistemas que recientemente han generalizado su utilización, es **la Planeación de requerimientos de distribución (DRP)** cuya filosofía es similar a la desarrollada para el MRP, solamente que adecuada a las necesidades de este tipo de sistemas. Evidentemente tanto el DRP como su versión más reciente, el DRPII, son sistemas Push. En ellos, la información acerca de las demandas en cada uno de los almacenes se transmite a los almacenes de nivel superior, en donde se toman las decisiones acerca de las remesas, con anticipación y con base en el pronóstico de demandas.

5.3 ASIGNACIÓN ENTRE CENTROS DE DISTRIBUCIÓN

En caso de que en una semana el almacén central tenga cierto número de remesas planeadas de un artículo, para los centros de distribución, se debe verificar que las cantidades requeridas estén disponible, en cuyo caso, dichas órdenes serán atendidas, pero en caso de que la cantidad disponible del artículo sea menor a la solicitada, se debe poner en práctica una política de asignación entre centros de distribución.

Una aproximación usual es asignar de manera que el tiempo que transcurra para que un centro de distribución alcance el nivel de inventario cero, sea igual al tiempo calculado para el resto de los centros de distribución, lo cual se conoce como la **asignación justa**. El procedimiento para hacerlo es el siguiente:

Si Q es la cantidad del artículo disponible en el almacén central, r_i el pronóstico de demanda por semana para el centro de distribución i, Q_i el nivel de inventario actual en el centro de distribución i, y q_i la cantidad enviada al centro de distribución i, se debe calcular primeramente la cantidad del artículo en cuestión disponible en todo el sistema, como

$\text{Total disponible} = Q + \sum Q_i$. En seguida es necesario saber durante cuantas semanas se podrá satisfacer la demanda de todo el sistema con esa cantidad disponible, así

$$\text{Número de semanas a cubrir} = \frac{\text{Total disponible}}{\sum r_i},$$

y por último, calcula la cantidad tentativa a surtir para cada centro de distribución:

$$q_i = (\text{Número de semanas a atender})\, r_i - Q_i\,.$$

Si las cantidades calculadas son todas no negativas, esta será la cantidad a asignar, en caso contrario, será necesario eliminar a los centros de distribución con resultado negativo de esta asignación, y con los restantes hacer de nuevo el cálculo de las asignaciones.

Dado que el DRP permite a las compañías tener una planeación de sus asignaciones en cada período a cada centro de distribución, esto le da también la posibilidad de investigar y aprovechar varias oportunidades de reducción de costos por ejemplo, en la transportación, o bien buscar diferentes rutas cuando opera su propio flete, de manera que sus costos se diluyan.

APÉNDICE A

En este apéndice se realiza el desarrollo de la expresión para obtener la cantidad óptima a ordenar en el modelo con demanda estocástica.

Supondremos que la demanda es continua. En el caso en el que la demanda sea discreta, el desarrollo se realizaría de manera similar.

Para determinar la cantidad óptima a ordenar se busca minimizar la función de costo promedio definida como

$$CT(Q) = k + cQ + \int_0^Q h(Q - D)f(D)dD + \int_Q^\infty p(D-Q)f(D)dD$$

Desarrollando,

$$CT(Q) = k + cQ + \int_0^Q hQf(D)dD - \int_0^Q hDf(D)dD + \int_Q^\infty pDf(D)dD - \int_Q^\infty pQf(D)dD$$

$$= k + cQ + hQF(Q) - h\int_0^Q Df(D)dD + p\int_Q^\infty Df(D)dD - pQ[1-F(Q)]$$

y derivando con respecto a **Q**, se tiene

$$\frac{dCT(Q)}{dQ} = c + hQf(Q) + hF(Q) - hQf(Q) - pQf(Q) + pQf(Q) - p[1-F(Q)]$$

$$= (c-p) + (p+h)F(Q)$$

igualando a cero la derivada,

$$
\begin{aligned}
(c-p)+(p+h)F(Q) &= 0 \\
(p+h)F(Q) &= p-c \\
F(Q) &= \frac{p-c}{p+h} \\
F(Q) &= \frac{p+h-c-h}{p+h} \\
F(Q) &= 1-\frac{c+h}{p+h}
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$\boxed{F(Q) = 1-\frac{c+h}{p+h}}$$

APÉNDICE B

En este apéndice se presenta el comportamiento de la función de costo total de un inventario con varios artículos, considerando los costos por asociados a cada uno de los artículos bajo control.

INTERPRETACIÓN DE LAS GRÁFICAS

Figura A.2.

Si A = 0 lo conveniente es que el tiempo entre pedidos sea igual a cero, lo que significa que lo óptimo es solicitar un artículo solamente cuando este es demandado, y justamente en la cantidad demandada.

El hecho de que $A = 0$ implica que $\mathbf{k} = 0$ y también $\mathbf{k}_j = 0$; $j = 1, 2, \ldots, n$, es decir, no hay un costo por ordenar, sino que toda orden es gratuita, puesto que

$$A = \mathbf{k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{k}_j}{\alpha_j} .$$

Figura A.3.

Considere el parámetro

$$B = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_j \bar{\mathbf{d}}_j \alpha_j$$

Para que $B = 0$ se requiere que $\bar{\mathbf{d}}_j$, $\mathbf{h}_j$ o α_j sea cero. Veamos:

$\bar{d}_j \neq 0$ — puesto que es demanda, si $\bar{d}_j = 0$ significa que $d_j = 0$ para todo valor de $j = 1, 2, \ldots, n$ en cuyo caso sería demanda determinísta y nula.

$\alpha_j \neq 0$ — pues para ser $B = 0$ y este se deba a que α_j, se requeriría $\alpha_j = 0$ para todo valor de j entre 1 y n, lo cual solamente ocurre cuando $t_j = 0$ también para todo valor de j, o bien si $\tau_1 \to \infty$.

$h_j \neq 0$ — puede ocurrir que $h_j = 0$ para todo valor de j, $j = 1, 2, \ldots, n$, es decir, no hay ningún cargo por llevar inventario, en ninguno de los artículos.

La gráfica, entonces, es equivocada, ya que si $B = 0$ implica que $C = 0$ también. En este caso, desde luego la solución óptima es $t_1 \to \infty$ y por tanto $t_j \to \infty$ para toda $j = 1, 2, \ldots, n$. Es claro que así debe ocurrir ya que mientras que exista un cargo por pedido, no lo existe por mantener artículos en inventario, esto es, lo conveniente es solicitar una cantidad infinita, para no tener nunca la necesidad de volver a solicitar.

Figura A.4

Dado que

$$C = \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j b_j \sqrt{n}\, \sigma_j \sqrt{t_j}}{2.3},$$

$C = 0$ solo cuando para toda $j = 1, 2, \ldots, n$

a) $\sigma_j = 0$ y se tendría una demanda determinísta, caso que se analizó con otro modelo, o bien

b) $b_j = 0$ que como se mencionó antes, nos lleva a una política de reorden independiente para cada artículo.

COMPORTAMIENTO DEL COSTO TOTAL

$$CT = A/t + Bt + C\sqrt{t}$$

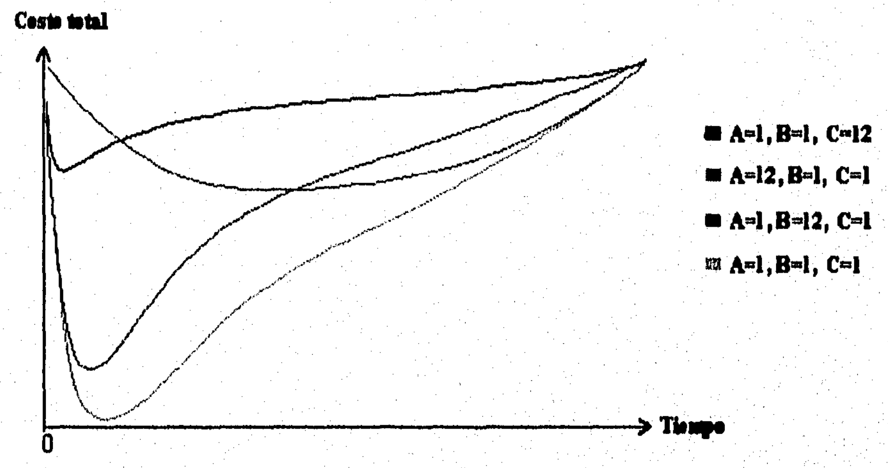


Fig A.1 Comportamiento de los niveles de inventario cuando todos los coeficientes de la ecuación son diferentes de cero.

COMPORTAMIENTO DEL COSTO TOTAL

$$CT = A/t + Bt + C\sqrt{t}$$

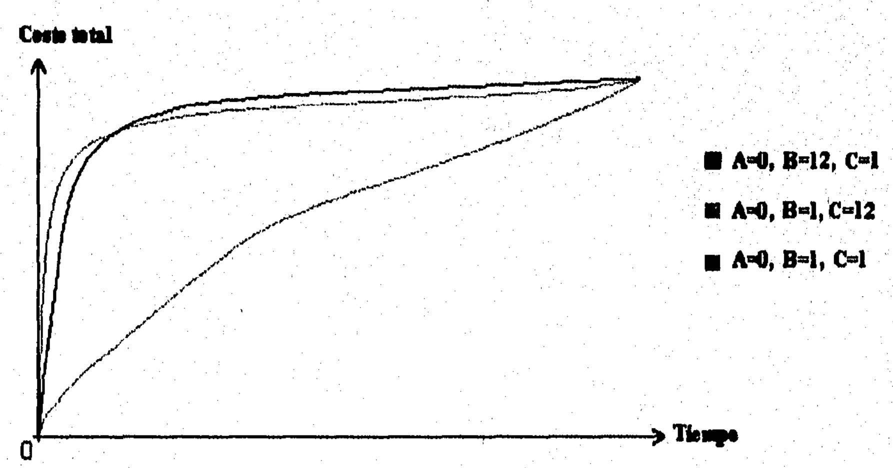


Fig A.2 Comportamiento de los niveles de inventario cuando el coeficiente A es cero, y el resto son diferentes de cero.

COMPORTAMIENTO DEL COSTO TOTAL

$A/t + Bt + C\sqrt{T}$

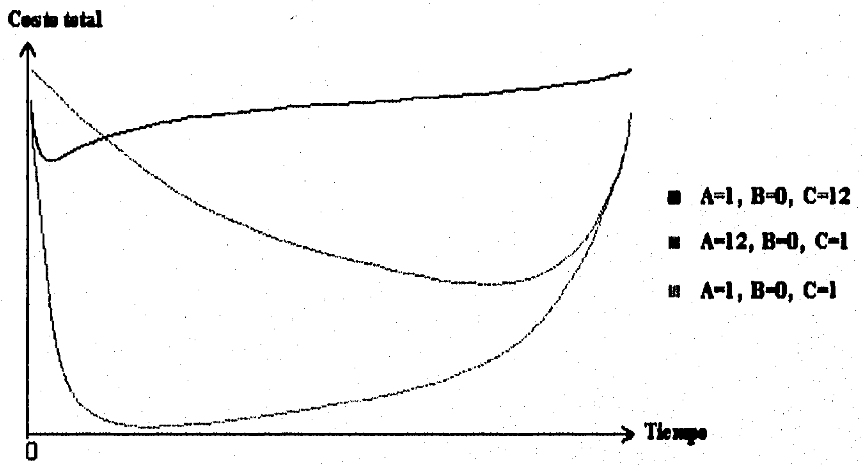


Fig A.3 Comportamiento de los niveles de inventario cuando el coeficiente B es cero y el resto de los coeficientes de la ecuación son diferentes de cero.

COMPORTAMIENTO DEL COSTO TOTAL

$A/t + Bt + C\sqrt{T}$

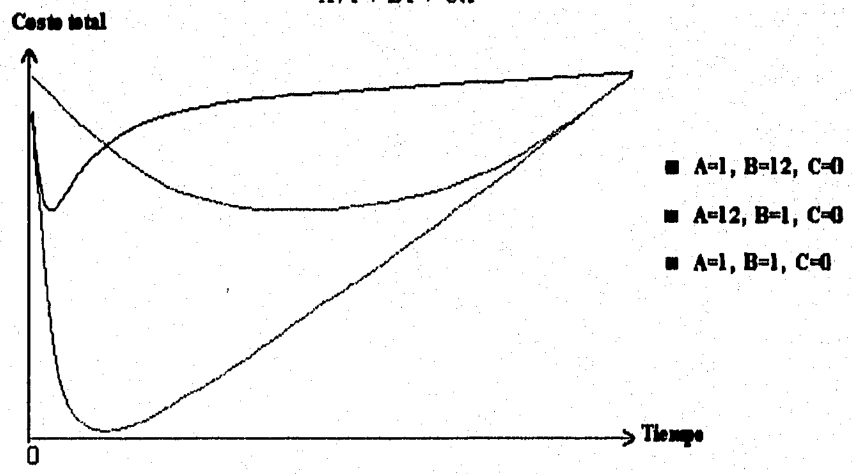


Fig A.4 Comportamiento de los niveles de inventario cuando el coeficiente C es cero, y el resto son diferentes de cero.

APÉNDICE C

En este apéndice se desarrolla el cálculo del valor óptimo de Q_j, cuando se tienen restricciones de capital.

En el capítulo 3 se mencionó que el problema a resolver era el siguiente problema de cálculo

$$\min \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j d_j}{Q_j}$$

s. *a*.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j Q_j \leq M$$

La solución la obtendremos utilizando multiplicadores de Lagrange.

$$L = \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j d_j}{Q_j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j - M$$

derivando para identificar los puntos críticos,

$$\frac{\partial L}{\partial Q_j} = -\frac{k_j d_j}{Q_j^2} + \lambda a_j = 0$$

lo cual implica que

$$\frac{k_j d_j}{Q_j^2} = \lambda a_j$$

de donde, entonces

$$Q_j = \sqrt{\frac{k_j d_j}{\lambda a_j}} \qquad \ldots\ldots \qquad (1)$$

Derivando con respecto a λ , se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j - M$$

y

$$\sum_{j=1}^{n} a_j Q_j = M \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

sustituyendo (1) en (2)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \sqrt{\frac{k_j d_j}{\lambda a_j}} = M$$

y por tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{k_j d_j a_j}{\lambda}} = M \ ,$$

y despejando, se obtiene

$$\lambda = \frac{1}{M^2}\left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{k_j d_j a_j}\right)^2 \qquad \ldots\ldots \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1), se obtiene que la cantidad óptima a ordenar de el artículo j es

$$Q_j = \sqrt{\frac{k_j d_j}{\frac{1}{M^2}\left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{k_j d_j a_j}\right)^2 a_j}}$$

$$= M\sqrt{\frac{k_j d_j}{a_j\left(\sum_{j=1}^{n} k_j d_j a_j\right)^2}}$$

$$= \frac{M}{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{k_j d_j a_j}}\sqrt{\frac{k_j d_j}{a_j}}$$

$$\boxed{Q_j^* = \frac{M}{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{k_j d_j a_j}}\sqrt{\frac{k_j d_j}{a_j}}}$$

BIBLIOGRAFIA

ADAM, Everett & EBERT, Ronald. "Administración de la producción y las operaciones". Cuarta edición, Prentice Hall, 1991.

APICS. "Dictionary", 1996.

KRAJEWSKI, Lee & RITZMAN, Larry. "Operations Management: Strategy and Analysis". Addison-Wesley, 1987.

LEWIS, C. "Scientific inventory control". London Butterworths, 1970.

LOVE, Stephen. "Inventory Control". McGraw-Hill, 1979.

MEREDITH, Jack. "The management of Operations". Tercera edición, John Wiley & Sons, 1987.

NARRO, Ana. "Un sistema de Inventario Multiproductos", Tesis Doctoral. DEPFI, 1994

QUIGLEY, Philip. "Pre-planning MRP Part One". Industrial Engineering, Vol. 12, No. 2 (Febrero, 1980), 36 - 37.

QUIGLEY, Philip. "Pre-planning MRP Part Three". Industrial Engineering, Vol. 12, No. 4 (Abril, 1980), 52 - 53.

QUIGLEY, Philip. "Pre-planning MRP Part Two". Industrial Engineering, Vol. 12, No. 3 (Marzo, 1980), 48 - 49.

QUIGLEY, Philip. "Pre-planning MRP Part Three". Industrial Engineering, Vol. 12, No. 5 (Mayo, 1980), 32 - 33.

SAWCHUK, Peter. "Installing a Push Distribution System". CPIM Inventory Managemente Reprints, APICS, 1991.

SCARF, Herbert & GILFORD, Dorothy & SHELLY, Maynard. "Multistage Inventory Models and Techniques". Stanford University Press, 1963.

SILVER, Edward & PETERSON, Rein. "Decision Systems for Inventory Management and Production Planning". Segunda edición, John Wiley & Sons, 1985.

SMITH, Spencer. "Computer-Based Production an Inventory Control". Prentice Hall, 1989.

VEINOTT, Arthur. "The Status of Mathematical Inventory Theory". Management Science, Vol. 12, No. 30 (Abril, 1966), 745 - 777.

VEINOTT, Arthur. "Optimal Policy for a Multi-product, Dynamic, Nonstationary Inventory Problem". Management Science, Vol. 12, No. 3 (Noviembre, 1965), 206-222.