

00382 5
207



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Fluidos No Homogéneos
y No Isotrópicos

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)
P R E S E N T A :
ALEJANDRO EDUARDO MENDOZA BLANCO

DIRECTOR DE TESIS: DR. HOWARD BRENNER

MEXICO, D. F.

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Fluidos No Homogéneos y No Isotrópicos. Resumen.

Los fluidos no isotrópicos presentan respuestas que dependen de la dirección de la fuerza motriz. En analogía con la teoría de elasticidad de sólidos no isotrópicos, se introduce un tensor de viscosidad de cuarto orden. Esta relación generaliza a la ecuación constitutiva clásica de los fluidos newtonianos y la correspondiente ecuación de Navier-Stokes. Los sistemas analizados se consideran homogéneos y solo el caso estacionario es analizado. El modelo introduce ciertos principios de simetría que permiten desarrollar un formalismo para incorporar efectos no isotrópicos en las ecuaciones de movimiento. Dichos principios de simetría reducen la aplicabilidad del modelo pero permiten utilizar un formalismo matemático con fuerte fundamento hidrodinámico. Se demuestra que existen hasta 6 parámetros de viscosidad que caracterizan completamente al fluido, se demuestra su existencia. Se analizan varios problemas clásicos de la hidrodinámica y se comparan dichos resultados con los obtenidos para el caso newtoniano clásico.

Los fluidos no homogéneos responden de manera distinta a los fluidos homogéneos. En la segunda parte de esta tesis, revisamos el caso donde la viscosidad del sistema no es homogénea y se supone que depende de la posición. Dicha situación puede obtenerse en el caso de una suspensión no homogénea de partículas. Entre otras variables, la viscosidad efectiva de una suspensión depende de la concentración de partículas; si esta no es constante, tampoco lo será la viscosidad. Se introduce una ecuación constitutiva donde la viscosidad es una función de la posición y se deriva la ecuación de movimiento respectiva. La no homogeneidad de la viscosidad introduce un término extra en las ecuaciones de movimiento modificando la solución. se analiza el caso estacionario para una función de viscosidad arbitraria. Se determinan los campos de velocidad y de presión así como las fuerzas y/o torcas necesarias para mantener el movimiento estacionario en términos de la función arbitraria de la viscosidad. Es posible observar el efecto sobre los perfiles de velocidad y las fuerzas y/o torcas necesarias para mantener el movimiento estacionario. Se calculan las expresiones para la viscosidad efectiva. Para ciertos problemas hidrodinámicos clásicos, se introducen funciones de viscosidad específicas a fin de observar el tipo de efectos introducidos por la viscosidad no efectiva.

Non Isotropic and Non Homogeneous Fluids Summary

Non isotropic fluids present responses that depend upon the orientation of the driving force. In analogy with the elasticity theory of anisotropic solids, a fourth-rank viscosity tensor is introduced. This relation generalizes the classic constitutive equation of Newtonian fluids and the corresponding Navier-Stokes equation. The analyzed systems are considered to be homogeneous and in steady state flows. The model introduces certain symmetries that allow the introduction of a formalism that incorporates non isotropic effects in the equations of motion. Such symmetry principles reduce the range of applicability of the model but allow the use of a mathematical formalism with a strong hydrodynamical background. It is demonstrated the existence and uniqueness of 6 viscosity parameters. Several classical hydrodynamic problems are solved and the results compared with the classic Newtonian results.

Non homogeneous fluids respond in a different way than homogenous fluids. In the second part of this thesis, we review the situation where the system viscosity is not homogeneous and it is assumed to depend on the position. Such situation can be obtained in the case of a non homogeneous suspension of particles. Among other variables, the effective viscosity of a suspension depends upon the particle concentration; if it is not constant, the viscosity will not be constant either. It is introduced a constitutive equation where the viscosity is a function of position and the corresponding equation of motion is derived. The non-homogeneity of the viscosity introduces an extra term in the equations of motion modifying the solutions. The steady state flow is analyzed for an arbitrary dependence of the viscosity function. The velocity and pressure fields as well as the torques and/or forces needed to maintain the steady state are determined in terms of this arbitrary function. It is possible to observe the effect of on the velocity profile and the forces needed to maintain the steady state situation. The effective viscosity is calculated. For certain classic hydrodynamic problems, specific dependences are introduced in order to observe the changes introduced in the effective viscosity.

**Fluidos
No Homogéneos y
No Isótropos.**

Dedico esta tesis a mi esposa Cristina y a mi hijo Pablo. Siempre serán un motivo de inspiración.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Howard Brenner sus ideas y comentarios que motivaron el presente trabajo. Un apoyo sincero y continuo hicieron posible la finalización de la investigación. Agradezco las muchas horas dedicadas a revisar y comentar las diferentes secciones. Un sincero reconocimiento a su labor como investigador y amigo. Su motivación tanto personal como profesional será siempre recordada.

Agradezco al Dr. Ramón Peralta Fabi sus comentarios que ayudaron a enriquecer este trabajo. Su entusiasmo de principio a fin fueron un apoyo invaluable. Agradezco su apoyo y amistad a lo largo de estos años.

Agradezco a los Doctores Rosalío Rodríguez, Agustín González, Víctor Romero, Rosa Ma. Velasco y Baltasar Mena sus valiosos comentarios y observaciones al revisar esta tesis.

INDICE

INDICE.	1
PREFACIO.	3
PARTE I. FLUIDOS NO ISÓTROPOS	5
Capítulo 1. FLUIDOS NO ISÓTROPOS.	7
Introducción.	7
Fluidos No Isótropos.	10
Suspensiones No Isótropas de Partículas	10
Capítulo 2. DESCRIPCION MATEMATICA.	13
Ley Generalizada de Hooke.	13
El tensor de viscosidad de cuarto orden.	14
Simetrías de μ .	15
Ecuaciones de Movimiento (Sin término inercial)	16
Capítulo 3. ECUACIONES DE MOVIMIENTO.	18
Ecuaciones de movimiento.	18
Estructura vs. propiedades macroscópicas.	20
Un Fluido Estratificado: Sistema Transversalmente Isótropo.	21
Fluido estratificado bajo esfuerzo constante.	22
Esfuerzo cortante en la dirección paralela.	23
Esfuerzo cortante en la dirección perpendicular.	23
Capítulo 4. FLUIDO TRANSVERSALMENTE ISÓTROPICO	
DE DOS CONSTANTES. ROTACION.	28
Solución fundamental para una torca.	28
Rotación de una esfera.	31
Capítulo 5. FLUIDO TRANSVERSALMENTE ISÓTROPICO	
DE DOS CONSTANTES. TRANSLACION.	39
Solución fundamental para el fluido transversalmente isótropo	
de dos constantes.	39
Conclusiones	46

PARTE II. FLUIDOS NO HOMOGENEOS.	47
Capítulo 6. FLUIDOS NO HOMOGENEOS.	49
Introducción.	49
Las ecuaciones de movimiento.	51
El caso estacionario.	51
Capítulo 7. FLUJOS UNIDIMENSIONALES.	56
Flujos unidimensionales.	56
Flujo entre placas paralelas.	57
Capítulo 8. FLUJO EN UN CILINDRO CIRCULAR.	67
Flujo en un cilindro circular.	67
Problemas de fuente y sumidero.	73
Capítulo 9. ROTACION DE UNA ESFERA.	77
Rotación de una esfera.	77
Capítulo 10. ROTACION DE CUERPOS CON SIMETRIA AXIAL.	88
Rotación de cuerpos con simetría axial.	88
Ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas.	89
Rotación de un cilindro circular infinito en un fluido no acotado.	91
Capítulo 11 PARTICULA PUNTUAL EN UN FLUIDO DE DENSIDAD Y VISCOSIDAD VARIANTE.	100
Partícula puntual en un fluido de densidad y viscosidad variante.	100
Capítulo 12. DISCUSION.	106
Discusión.	106
APENDICE A. Ecuaciones de movimiento.	109
APENDICE B. Resultados Newtonianos.	114
APENDICE C. Fluido Transversalmente Isótropo de dos constantes.	124
APENDICE D. El tensor de viscosidad de cuarto orden.	132
APENDICE E. Ecuaciones de movimiento FTI.	142
BIBLIOGRAFIA	152.

PREFACIO.

Los fluidos newtonianos han sido estudiados extensivamente desde la obtención de las ecuaciones de Navier-Stokes. Problemas clásicos como el de flujo en canales o alrededor de cuerpos de revolución han sido resueltos, en su mayoría, en forma analítica exacta, al menos para los casos estacionarios ^{6,24,31,32}.

Los fluidos newtonianos tienen varias características principales: son homogéneos, son isotrópicos y están caracterizados por viscosidades consideradas constantes en todo el fluido. No obstante, esta última puede hacerse función de variables termodinámicas como son la presión y la temperatura. Para fluidos newtonianos, hay dos parámetros de viscosidad: la dinámica y la de compresión. Para fluidos incompresibles, esta última no aparece en las ecuaciones de movimiento.

4 Prefacio

La viscosidad es un parámetro que, en términos generales, describe la reacción de un fluido ante un esfuerzo aplicado sobre el fluido. El fluido, por naturaleza propia, tiende a fluir bajo el efecto de esfuerzos. La viscosidad es un parámetro que mide la reacción ante esfuerzos de corte, compresión, etc..

Fluidos de distintas viscosidades reaccionarán o se "deformarán" de manera diferente. Dada su definición, la viscosidad es medida mediante la observación y medición de los efectos causados por una fuerza externa. Por ejemplo, la caída de una bola dentro de un fluido, el desplazamiento de una placa colocada sobre la superficie del fluido, la compresión de un fluido por una placa de geometría específica, etc. Usualmente se utilizan geometrías donde la solución es disponible analíticamente y se mide la dimensión del efecto (velocidad de caída de la bola, velocidad de la placa deslizante, etc.) en términos de la fuerza aplicada necesaria para mantener el movimiento estacionario. En el apéndice A se detallan varios de estos ejemplos.

La característica común de todos estos ejemplos es una viscosidad constante y homogénea. De no ser constante y homogénea, el fluido se comportará de manera diferente modificando tanto el patrón de flujo como las fuerzas requeridas para mantener el movimiento. Tales desviaciones sobre el comportamiento newtoniano son provocadas por los cambios en la respuesta del fluido, esto es, a través de su viscosidad^{27,51}.

En este trabajo presentamos ciertas técnicas matemáticas que permiten analizar el comportamiento de fluidos no isotrópicos o no homogéneos. Dichas técnicas son aplicadas a varios ejemplos donde se estudian los cambios en los campos de presión y velocidad, así como sus efectos sobre las fuerzas y torcas necesarias para definir viscosidades efectivas.

PARTE I.

FLUIDOS
NO ISÓTROPAS.

FALTA PAGINA

No. 6

TESIS

COMPLETA

CAPÍTULO 1.

FLUIDOS NO ISÓTROPOS.

INTRODUCCIÓN.

Las ecuaciones de movimiento de la hidrodinámica clásica^{6,8} se deducen a partir de la hipótesis del continuo y de la utilización de los principios de conservación de masa, momento y energía. En este trabajo nos restringiremos a fluidos* incompresibles en flujos isotérmicos. Por tal razón, nos limitaremos a las ecuaciones de momento y masa teniendo como variables los campos de velocidad y presión²⁴. Para obtener un problema cerrado, será necesario introducir una ecuación que defina al tensor de esfuerzos en términos de los campos de presión y velocidad, esto es, una ecuación constitutiva. Adicionalmente, condiciones iniciales y de frontera serán requeridas para obtener la solución matemática.

* Analizaremos sistemas compuestos como son suspensiones de partículas, fluidos poliméricos, etc. Nos referiremos indistintamente a estos sistemas como fluidos al igual que a fluidos como el agua. Cuando nos referimos a la estructura del fluido, nos referiremos a los distintos componentes como pueden ser las partículas suspendidas, etc. y no a la estructura molecular. Cuando hablemos de microestructura nos referiremos a la estructura molecular del fluido. A menos de que sea así especificado, consideraremos siempre a los sistemas 'fluidos' como continuos.

8 Fluidos No Isótropos

Las ecuaciones de conservación de masa y momento para un flujo incompresible, en ausencia de fuerzas externas, son:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_f (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}}; \quad (1.2)$$

donde \mathbf{u} es el campo de velocidad, ρ_f es la densidad del fluido y $\underline{\mathbf{P}}$ es el tensor de esfuerzos. La ecuación constitutiva relaciona al tensor de esfuerzos con los campos de presión y velocidad. La forma de su dependencia es analizada en varios textos^{6,31,32} y se reduce a que depende de la presión y los gradientes de la velocidad. En general, la dependencia debe incluir a la densidad y la temperatura como variables termodinámicas; en nuestro análisis se suponen constantes y por lo tanto sin efecto para modificar las soluciones; esto es, su dependencia es implícita.

La presión hidrostática* p se encuentra en la diagonal³² del tensor de esfuerzos de tal manera que

$$\underline{\mathbf{P}} = -\underline{\mathbf{I}} p + \underline{\boldsymbol{\tau}}(\nabla \mathbf{u}), \quad (1.3)$$

donde $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ es la parte viscosa del tensor de esfuerzos que sólo dependerá de los gradientes de la velocidad. La forma explícita de dicha dependencia lleva inherentemente la respuesta del fluido a fenómenos de corte, compresión, tensión, etc. Para obtener la ecuación constitutiva para fluidos newtonianos, se utilizan propiedades de simetría y argumentos termodinámicos^{18, 57}. El tensor de esfuerzos newtoniano se supone** simétrico^{6,8}; adicionalmente, se supone que el fluido es homogéneo e isótropo. Estos argumentos^{6,32} conducen a la ecuación constitutiva para fluidos newtonianos incompresibles:

$$\underline{\mathbf{P}} = -\underline{\mathbf{I}} p + \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\dagger} \right]. \quad (1.4)$$

*Cuando el fluido se encuentra en reposo, la única fuerza actuante proviene de la presión hidrostática actuando de manera isótropa. No puede depender directamente de la velocidad ya que aparecerían esfuerzos al hacer un cambio a un sistema de coordenadas en movimiento con velocidad constante.

** La posibilidad teórica de un tensor de esfuerzos no simétrico es analizada por J. S. Dahler y L. E. Scriven, *Nature*, 192, 36-37 (1961). Bird, Armstrong & Hassager indican en su libro⁸ que hasta la fecha (1987) ningún experimento ha mostrado asimetría en el tensor de esfuerzos para líquidos amortos. Aún más, casi todas las teorías moleculares para líquidos amorfos dan expresiones simétricas para el tensor de esfuerzos. G. K. Batchelor⁶ calcula la fuerza total que actúa sobre un volumen V que contiene al punto O ; usando el teorema de la divergencia prueba que, en el límite cuando el volumen tiende a cero, se tiene que cumplir que, a menos de que exista una torca externa como la producida por un campo eléctrico externo sobre un medio dieléctrico polarizado, $\epsilon_{ijk} \tau_{kj} = 0$, esto es, que el tensor de esfuerzos sea simétrico. El punto se analizará nuevamente cuando se discutan las simetrías del tensor de viscosidad.

donde μ es la viscosidad del fluido, que puede suponerse constante en todo el espacio ocupado por el fluido.

La estructura del fluido puede conducir a efectos no isotropos, esto es, a respuestas del fluido que dependen de la dirección en la que es aplicada la fuerza motriz. Un fluido estratificado es un ejemplo sencillo de sistemas no isotropos. Si el sistema se coloca entre placas paralelas y se desplaza una de ellas con respecto a la otra con velocidad constante, la fuerza requerida para mantener el movimiento estacionario será diferente si el sistema tiene sus capas a lo largo o perpendicular a las placas.

La estructura también puede conducir a efectos no homogéneos en el comportamiento del sistema^{3, 30, 41, 47, 48}. Por ejemplo, en el caso de una suspensión de partículas, la viscosidad efectiva es una función, entre otras variables, de la concentración de las partículas²⁰. Si por alguna razón las partículas tienden a migrar hacia ciertas regiones del sistema, la viscosidad tomará diferentes valores dependiendo de la concentración⁴³. Dicha inhomogeneidad en la viscosidad lleva a cambios en la dinámica del fluido.

El trabajo aquí presentado está relacionado con la introducción de modelos y técnicas matemáticas para incluir este tipo de comportamientos²⁷. Se resuelven analíticamente varios problemas donde es claro el efecto de la no isotropía o de la inhomogeneidad del sistema. Se estudian las modificaciones tanto en el patrón de flujo como en las fuerzas o torcas necesarias para mantener el movimiento estacionario. Para desviaciones pequeñas, se hace análisis perturbativo²⁹ para analizar la regularidad de las soluciones a medida que se recobran los casos homogéneo e isotrópico.

Una de las conclusiones de este trabajo es que la estructura del fluido puede modificar el comportamiento macroscópico del sistema. La relación entre la estructura y el flujo macroscópico tiene aplicaciones prácticas en el campo de la dinámica de fluidos y reología. La mayoría de los métodos para medir la viscosidad de fluidos se basan en el estudio de flujos sencillos donde la solución puede encontrarse fácilmente, tanto analítica como experimentalmente. Para muchos flujos sencillos, la relación entre la fuerza o torca aplicada y los efectos sobre el fluido como velocidades medias, de caída, angulares, etc., es lineal. La viscosidad se encuentra en el factor de proporcionalidad por lo que variando la fuerza o torca aplicada y midiendo el cambio en el efecto sobre el fluido es posible asignar valores a la viscosidad. Sin embargo, y como se observará en varios ejemplos, el valor

10 Fluidos No Isótropos

reportado de la viscosidad puede variar dependiendo de la orientación y homogeneidad del fluido^{17, 45, 51}. Asimismo, el proceso de flujo puede cambiar las condiciones de homogeneidad e isotropía del sistema, por lo que dicha perturbación puede modificar los valores de viscosidad medidos.

FLUIDOS NO ISÓTROPAS.

En la primera sección introdujimos la ecuación constitutiva de un fluido newtoniano incompresible. La ecuación constitutiva newtoniana representa la relación más simple, entre los tensores de esfuerzos y gradientes de la velocidad, que incluye efectos viscosos. Muchos líquidos encontrados en la naturaleza se comportan como fluidos newtonianos bajo una gran variedad de circunstancias: agua, aire, glicerina y alcohol son ejemplos típicos de fluidos newtonianos⁸. Este tipo de fluidos es homogéneo e isótropo y está caracterizado por una viscosidad que es constante en todo el espacio ocupado por el fluido. Un sistema compuesto por capas de distintos fluidos es un sistema no isótropo. Una suspensión de partículas no esféricas o ciertos fluidos poliméricos pueden considerarse como no isótropos. El agua en el mar^{1, 15, 38} puede ser un ejemplo, a su vez, de fluido no homogéneo. En este caso, la gravedad origina cambios en la homogeneidad del sistema. Una suspensión de partículas en sedimentación puede ser otro ejemplo.

En este capítulo, vamos a presentar técnicas matemáticas para trabajar con fluidos viscosos no isótropos. Estos fluidos presentan diferentes respuestas viscosas en diferentes direcciones. Hay muchos sistemas fluidos elaborados por el hombre que bajo ciertas circunstancias se comportan no isótrópicamente.

SUSPENSIONES NO ISÓTROPAS DE PARTÍCULAS .

Al tratar con suspensiones de partículas neutralmente suspendidas, esto es, suspensiones de partículas con fuerza de flotación cero debido a que tienen la misma densidad que la del fluido solvente, usualmente se supone que el fluido en el que se encuentran sumergidas es newtoniano e incompresible^{2, 4, 16, 21, 22, 34, 42, 43, 52}. Las suspensiones diluidas de partículas neutralmente suspendidas son usualmente modeladas como fluidos newtonianos con una viscosidad efectiva mayor a la del fluido solvente. La suspensión es considerada homogénea e isótropa y el modelo ha sido probado experimentalmente en variadas circunstancias^{54, 55, 56}. Suspensiones de partículas no esféricas pueden mostrar comportamientos no homogéneos o no isótropos. Experimentalmente se ha observado que las suspensiones responden en forma diferente a

fuerzas externas si se comparan con respuestas newtonianas^{4, 5, 19, 39, 49}. En estos casos, la suspensión no puede ser descrita como un fluido newtoniano con una viscosidad efectiva. El comportamiento no homogéneo será estudiado en la parte II y el comportamiento no isotrópico será el tema de esta parte I. Los sistemas considerados en la parte I se suponen homogéneos, en cuyo caso los coeficientes utilizados para su descripción no varían con la posición. La caracterización de fluidos no isotrópicos requiere de más de un parámetro de viscosidad, en contraste con los fluidos newtonianos. Sin embargo, los fluidos considerados se siguen suponiendo incompresibles.

Los fluidos no isotrópicos tienen la propiedad de reaccionar en formas distintas dependiendo de la orientación de la fuerza motriz. Ejemplos de fluidos no isotrópicos son cristales líquidos (nemáticos), poliméricos y suspensiones dipolares¹⁷. Una de las características principales de estos fluidos es que la aplicación de esfuerzos cortantes en diferentes direcciones conduce a diferentes tipos de flujo. Los cristales líquidos nemáticos¹⁷ son considerados, como su nombre lo indica, como un estado intermedio entre cristales y líquidos, mostrando propiedades de ambos estados^{37, 51}.

La descripción matemática de estos fluidos puede realizarse en términos de una ecuación constitutiva generalizada que permita al fluido presentar respuestas no isotrópicas. Los fluidos newtonianos serán considerados como un caso especial de esta ecuación generalizada. Esta ecuación generalizada debe de cumplir con los requisitos impuestos por los principios físicos de conservación.

La hidrodinámica molecular presenta una manera alternativa de analizar fluidos con microestructura^{9a}. Sin embargo, el análisis presentado aquí supone la existencia de un continuo, partículas mesoscópicas, etc. En todo momento, se supone que el flujo es lo suficientemente lento como para suponer estados de equilibrio termodinámico. Esto es, suponemos que las longitudes involucradas son mucho mayores que las dimensiones moleculares y las frecuencias involucradas son pequeñas como para suponer que las ecuaciones hidrodinámicas son aplicables. El análisis aquí presentado podría entenderse a un nivel intermedio entre el microscópico y el macroscópico.

Los coeficientes de transporte en el límite hidrodinámico son determinados en forma experimental. El análisis aquí presentado supone que los fluidos con estructura considerados son resultado de la combinación de sistemas cuya estructura es mucho mayor que la microscópica; esto es, por ejemplo, una suspensión de partículas donde el fluido

12 Fluidos No Isótopos

suspensor se describe en términos de la hidrodinámica y las partículas son de mucho mayor tamaño que las dimensiones moleculares.

Por otra parte, seguiremos un análisis diferente al utilizado por Leslie y Ericksen¹⁷ para el estudio de cristales líquidos nemáticos. De hecho, usaremos una analogía con sólidos elásticos no isótopos^{26, 33, 35}, que creemos tiene un fundamento hidrodinámico que permite interpretar y justificar los diferentes elementos de la ecuación constitutiva desde un punto de vista hidrodinámico. El siguiente capítulo se dedica a introducir dicha analogía.

CAPÍTULO 2.

DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA.

LEY GENERALIZADA DE HOOKE.

La ley generalizada de Hooke es una ecuación constitutiva frecuentemente utilizada para describir sólidos elásticos no isótropos^{33,59}. Los sólidos elásticos no isótropos están caracterizados por un tensor elástico de cuarto orden que relaciona a los tensores de esfuerzos y deformación. Modelaremos fluidos no isótropos utilizando este esquema. Esta analogía es el punto principal para el análisis subsecuente. Introduciremos el tensor de viscosidad de cuarto orden que relaciona a los tensores de esfuerzos y gradiente de velocidad.

Mientras que la mayoría de los sólidos elásticos no isótropos mantienen sus propiedades durante el proceso de deformación, los fluidos no isótropos pudieran no hacerlo. Conforme fluyen, sus propiedades no isótropas pueden cambiar por lo que los coeficientes que aparecen en la ecuación constitutiva serán por lo general funciones del tiempo y de la posición. Como primera hipótesis del modelo, sólo consideraremos situaciones donde el fluido se mantiene homogéneo* durante su flujo y, por consiguiente,

* Suponer que el fluido mantiene sus propiedades homogéneas restringe la aplicabilidad a cierto tipo de sistemas bajo ciertas circunstancias. Usualmente, durante el flujo, las simetrías pueden destruirse localmente. El mantener las propiedades homogéneas desde un punto de vista experimental puede ser bastante complicado.

14 Fluidos No Isótropos

los coeficientes en la ecuación constitutiva son constantes. Evidentemente, la estructura del fluido determinará si las propiedades permanecen o no homogéneas durante el flujo. Por ejemplo, si analizamos una suspensión de partículas no esféricas, neutralmente suspendidas teniendo un dipolo magnético, al aplicar un campo magnético fuerte todas las partículas estarán alineadas con el campo y, por lo tanto, constituirán una suspensión no isótropa desde el punto de vista de la orientación. Los cristales líquidos nemáticos pueden tomarse como otro ejemplo.

EL TENSOR DE VISCOSIDAD DE CUARTO ORDEN.

Para deducir las ecuaciones de movimiento, suponemos que el sistema es homogéneo. En analogía con la ley generalizada de Hooke para sólidos elásticos no isótropos, introducimos el tensor de viscosidad de cuarto orden $\underline{\underline{\mu}}$ que relaciona la parte viscosa del tensor de esfuerzos con los gradientes de velocidad. La parte simétrica del gradiente de velocidad se define como:

$$\underline{\underline{S}} \equiv \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\dagger}] , \quad (2.1)$$

que, por construcción, es simétrico. La ecuación constitutiva generalizada para fluidos no isótropos puede escribirse como:

$$\underline{\underline{P}} = -\underline{\underline{I}} p + \underline{\underline{\tau}} , \quad (2.2)$$

donde p es la presión hidrostática y la parte viscosa del tensor de esfuerzos $\underline{\underline{\tau}}$ está dada por la ecuación constitutiva

$$\underline{\underline{\tau}} \equiv 2 \underline{\underline{\mu}} : \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\mu}} : [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\dagger}] . \quad (2.3)$$

Esta es la relación lineal homogénea más general* entre los tensores de esfuerzo y los gradientes de velocidad. Para un fluido newtoniano incompresible, la parte viscosa del tensor de esfuerzos es proporcional a la parte simétrica del gradiente de velocidad:

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{S}} . \quad (2.4)$$

* Cuando se consideran sistemas no homogéneos, los coeficientes son funciones de la posición. Peralta-Fabi, On the foundations of the Navier-Stokes equations; Rev. Mex. Fís., 37, (1991), indica como la dependencia en la posición puede ser incorporada.

donde μ es la viscosidad que se supone constante en todo el espacio ocupado por el fluido. Esta ecuación constitutiva es un caso especial de la ecuación generalizada y puede ser obtenida si tomamos

$$\underline{\underline{\underline{\mu}}} = \mu \underline{\underline{\underline{U}}}, \quad (2.5)$$

donde $\underline{\underline{\underline{U}}}$ es un tensor unitario de cuarto orden cuyas componentes cartesianas están dadas por

$$U_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right). \quad (2.6)$$

En general, hay tres tensores isótropos de cuarto orden. El tensor isótropo de cuarto orden más general⁵³ es una combinación lineal de ellos

$$I_{ijkl} = a \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) + b \delta_{ij} \delta_{kl} + c \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \right), \quad (2.7)$$

donde a , b y c son constantes arbitrarias. El término multiplicado por c es antisimétrico y, por lo tanto, no aparecerá en las ecuaciones de movimiento (la contracción total de cualquier tensor simétrico con uno antisimétrico es cero). El término multiplicado por b es proporcional a $\nabla \cdot \mathbf{u}$; por lo tanto no aparecerá en las ecuaciones de movimiento porque suponemos incompresibilidad. De todo lo anterior, concluimos que el tensor isótropo apropiado está dado por la ecuación (2.6).

SIMETRÍAS DE $\underline{\underline{\underline{\mu}}}$.

Un tensor arbitrario de cuarto orden tiene 81 componentes independientes. El tensor de viscosidad tiene menos componentes independientes debido a sus simetrías. Como segunda hipótesis, pedimos que el tensor μ_{ijkl} tenga las siguientes simetrías: *i*) ya que por definición, aparece multiplicando al tensor simétrico $\underline{\underline{\underline{S}}}$, sólo su parte simétrica es de importancia en la solución y por lo tanto suponemos que se considera simétrico en el último par de índices^{*}, *ii*) el tensor de esfuerzos se considera simétrico, por lo que el tensor de viscosidad es simétrico en su primer par de índices y *iii*) una doble contracción

* Al escribir la ecuación de balance de momento angular, la parte antisimétrica del tensor de esfuerzos se convierte en el término fuente para dicha ecuación. Si el fluido no posee movimiento interno intrínseco, el momento angular se debe conservar y por tanto el tensor de esfuerzos es simétrico. Si el fluido tuviera estructura interna (grados internos de libertad), el tensor pudiera no ser simétrico ya que la energía podría ser transferida a los grados de libertad internos. El análisis se restringe a aquellos fluidos para los que el tensor de esfuerzos es simétrico.

16 Fluidos No Isótropos

del tensor de viscosidad con $\underline{\underline{S}}$ da la tasa de disipación de energía mecánica. Teniendo $\underline{\underline{S}}$ la simetría al intercambio entre el primer y segundo par de índices, suponemos que el tensor de viscosidad tiene la misma propiedad. Estas simetrías pueden ser escritas como se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} i) \quad \mu_{ijkl} &= \mu_{ijlk} \\ ii) \quad \mu_{ijkl} &= \mu_{jikl} \\ iii) \quad \mu_{ijkl} &= \mu_{klij} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Este conjunto de simetrías reduce el número de componentes independientes a 21. Hay que señalar que en el caso de fluidos newtonianos, la isotropía debe ser total. Esta restricción reduciría a 2 el número de componentes independientes. La reducción a dos coeficientes viene del hecho de que ser totalmente simétrico implica la invariancia ante rotaciones. El tensor de cuarto orden isótropo más general^{1-4a} es de la forma:

$$\mu_{iklm} = A \delta_{ik} \delta_{lm} + B \delta_{il} \delta_{km} + C \delta_{im} \delta_{kl} \quad (2.9)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Esta es una reorganización de términos de (2.7). Esto es, existen tres tensores isótropos de cuarto orden. Al multiplicar por un tensor simétrico $\underline{\underline{S}}$ los coeficientes se reordenan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mu_{iklm} S_{lm} &= A \delta_{ik} \delta_{lm} S_{lm} + B \delta_{il} \delta_{km} S_{lm} + C \delta_{im} \delta_{kl} S_{lm} \\ &= A \delta_{ik} S_{ll} + B S_{jk} + C S_{ki} = A \delta_{ik} S_{ll} + (B+C) S_{ki} \end{aligned} \quad (2.10)$$

por lo que efectivamente sólo dos coeficientes aparecen en la ecuación de movimiento. La restricción de que el tensor de esfuerzos sólo depende de la parte simétrica del gradiente de velocidad es la causa de la eliminación de uno de los coeficientes.

Si pedimos que el fluido sea incompresible, sólo habrá un coeficiente que aparecerá en las ecuaciones de movimiento, ya que el otro, aún cuando no sea cero, no aparece en las ecuaciones de movimiento. Landau³² ofrece una deducción 'alternativa' invocando el hecho de que en movimientos de rotación pura no hay esfuerzos y por lo tanto nos lleva a la conclusión arriba mencionada.

ECUACIONES DE MOVIMIENTO (SIN TERMINO INERCIAL).

Las ecuaciones que aplicarán para este tipo de fluidos con ecuación constitutiva generalizada son obtenidas mediante la sustitución de dicha ecuación constitutiva. Para poder desarrollar analíticamente resultados e interesados en flujos de número de Reynolds

bajos, omitiremos el término inercial. En los casos de flujos unidimensionales, el término inercial es idénticamente cero y tal simplificación no es necesaria. La sustitución de la ecuación constitutiva (2.3) en la ecuación estacionaria de conservación de momento conduce al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\nabla p = \nabla \cdot \left[\underline{\underline{\mu}} : (\nabla u + (\nabla u)^t) \right] , \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot u = 0 ; \quad (2.12)$$

Estas ecuaciones deben ser resueltas sujetas a las condiciones de frontera pertinentes. Las condiciones de frontera de los campos de presión y velocidad son de la misma estructura que en el caso newtoniano. Usualmente se requieren condiciones de adherencia en superficies sólidas y los campos de velocidad y presión deben alcanzar un valor finito en problemas no acotados. El caso newtoniano se recupera al insertar la ecuación constitutiva correspondiente.

La viscosidad de un sistema puede medirse utilizando una esfera de densidad distinta a la del fluido. Midiendo la velocidad final de la esfera, es posible calcular la viscosidad efectiva del sistema utilizando la ley de Stokes. Supongamos que tenemos una suspensión no acotada de partículas en forma de tubo suspendidas neutralmente (esto es, con fuerza de flotación cero). Todas las partículas tienen la misma orientación espacial y la suspensión es homogénea. Supongamos que una esfera pequeña, con una densidad ligeramente superior a la del fluido solvente, es colocada en el sistema y se empieza a desplazar hacia abajo por efecto de la gravedad. En su movimiento la esfera perturba la simetría del sistema, especialmente la de las partículas cercanas a su trayectoria. La mayoría de las partículas se mantienen prácticamente en la misma posición. Este sistema podría considerarse como transversalmente isotrópico. La suspensión de partículas puede describirse por un tensor de esfuerzos simétrico²⁴. Este sistema podría ser descrito por un tensor de viscosidad con las simetrías establecidas en (2.8). Las simetrías impuestas al tensor de viscosidad limitan su aplicabilidad en términos de los sistemas que pueden ser descritos. Incluir sistemas en los que el tensor de esfuerzos pueda ser no simétrico podría llevar a resultados interesantes con aplicaciones a algunos otros sistemas.

CAPÍTULO 3.

ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

Como se analizó en el Apéndice D, el tensor de cuarto orden puede ser descompuesto de manera única en la forma:

$$\underline{\underline{\mu}} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \quad (3.1)$$

donde $\underline{\underline{D}}^{\alpha}$ constituye un conjunto completo de tensores unitarios simétricos y λ^{α} son los correspondientes eigenvalores. Esta descomposición conduce al tensor de esfuerzos dado por la siguiente ecuación constitutiva:

$$\underline{\underline{P}} = -\underline{\underline{U}}p + \left(\sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \right) : (\nabla u + (\nabla u)^{\dagger}) \quad (3.2)$$

Las ecuaciones de movimiento pueden escribirse usando esta descomposición como

$$\nabla p = \nabla \cdot \left[\left(\sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \right) : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t) \right], \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (3.4)$$

donde los seis eigenvalores λ^{α} aparecen explícitamente en las ecuaciones de movimiento. Hay que notar que fue supuesto que el tensor de cuarto orden se supondrá constante en el espacio y en el tiempo.

El flujo más simple que analizamos es el de esfuerzo constante en un fluido infinito. Para un fluido isótropo, el esfuerzo cortante constante produce un perfil de velocidad lineal en la dirección del esfuerzo como se ve en la figura 4.1. Las propiedades permanecen constantes durante el flujo, independientemente de la dirección del esfuerzo. Para materiales compuestos, como el material estratificado (apéndice E), no podemos asegurar, *a priori*, que la microestructura del fluido preservará sus simetrías; por el contrario, cambiarán en la mayoría de los casos. Cambios en la microestructura conducen a cambios en la descripción macroscópica.

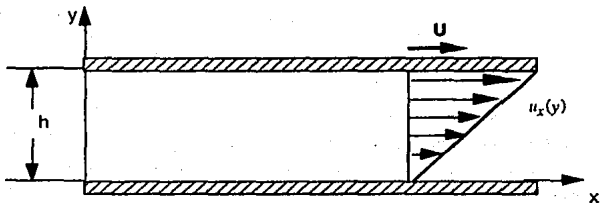


Figura 4.1. Flujo entre placas paralelas separadas una distancia h . La placa superior se mueve con velocidad U respecto de la inferior.

Específicamente, el tensor de cuarto orden puede no ser constante en el tiempo o puede que no sea una propiedad homogénea del fluido, como se supuso en el análisis hecho en este capítulo (analizaremos un problema especial donde la microestructura del problema puede ser resuelta exactamente y las propiedades macroscópicas pueden ser evaluadas como función del tiempo).

ESTRUCTURA VS. PROPIEDADES MACROSCÓPICAS.

Suponemos que el sistema en consideración es una suspensión de partículas neutralmente suspendidas y modelamos el sistema con un tensor de viscosidad de cuarto orden. Este modelo es válido en escalas grandes comparadas con la estructura del fluido; en el caso de la suspensión la macroescala de longitud es grande comparada con el tamaño de las partículas y la distancia entre ellas. Esta macroescala no reconoce la estructura del fluido y los coeficientes que aparecen en la descomposición del tensor de cuarto orden, son obtenidos a través de promedios en volúmenes espaciales suficientemente grandes comparados con la microestructura pero pequeños para seguir siendo considerados como "puntos" en la descripción macroscópica.

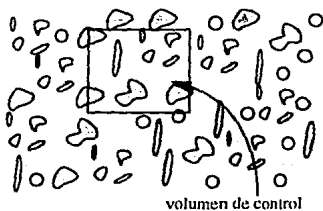


Figura 3.2 Las propiedades macroscópicas del fluido son obtenidas a través de promedios en volúmenes de control. Los volúmenes de control son lo suficientemente grandes comparados con la estructura microscópica pero pequeños comparados con las longitudes macroscópicas.

Durante el flujo, la microestructura dentro de los volúmenes de control puede cambiar y consecuentemente los coeficientes macroscópicos usados en la descripción del fluido. En tales casos, el tensor de cuarto orden no es constante durante el flujo. Restringiremos el análisis a donde se mantiene constante el tensor durante el flujo. Si, por ejemplo, las partículas tuvieran un dipolo magnético y un campo magnético fuerte es aplicado al sistema, la orientación de las partículas permanecería constante. Si la concentración de partículas es homogénea, la descripción macroscópica (tensor de cuarto orden) también permanecerá constante.

Matemáticamente, un campo tensorial es un conjunto de funciones escalares puntuales que dependen sólo del punto en consideración, independientemente de los valores de los puntos cercanos. Físicamente, el valor de los componentes del tensor es

usualmente obtenido promediando cantidades en volúmenes que son pequeños con la macroescala de las dimensiones del flujo. Requeriremos que la estructura en los volúmenes de promedio permanezca constante para mantener las propiedades de macroescala invariantes durante el flujo.

Esto será más fácilmente comprendido si usamos el siguiente ejemplo. Consideremos un material en capas formado por la superposición de capas infinitas de diferentes fluidos, como se muestra en la figura 3.3. Este material tiene un eje de simetría perpendicular a las capas y es invariante ante rotaciones alrededor del eje de simetría. Si aplicamos un esfuerzo cortante en la dirección de las capas, la simetría se mantendrá. Si lo aplicamos en la dirección perpendicular, la simetría no se conservará en el tiempo, pero como veremos, el fluido se mantiene transversalmente isótropo con el eje de simetría cambiando con el tiempo.

UN FLUIDO ESTRATIFICADO: SISTEMA TRANSVERSALMENTE ISÓTROP.

Consideremos un material en capas infinito, formado por n capas básicas de diferentes longitudes L_i y viscosidades μ_i . El sistema infinito está formado por repeticiones de estas n capas básicas en forma periódica, como se muestra en la figura 3.3. La periodicidad del sistema es la longitud total L de las n capas

$$L = \sum_{i=1}^n L_i \quad (3.5)$$

En una descripción macroscópica, donde las distancias son grandes comparadas con el periodo L , el sistema tendrá una dirección especial \hat{n} . Un sistema que posee sólo una dirección especial se denomina transversalmente isótropo. Un tensor de cuarto orden transversalmente isótropo adecuado al fluido estratificado, está dado por la siguiente expresión (ver apéndice C para los detalles):

$$\underline{\underline{\mu}} = \mu \underline{\underline{U}} + \Delta\mu \underline{\underline{H}} \quad (3.6)$$

donde $\underline{\underline{U}}$ es el tensor unitario de cuarto orden sin traza y $\underline{\underline{H}}$ es un tensor unitario sin traza transversalmente isótropo. μ es la viscosidad en la dirección del eje de simetría y $\mu + \Delta\mu$ es la viscosidad en la dirección perpendicular; $\Delta\mu$ es la diferencia entre ambas viscosidades y es el parámetro de asimetría. El tensor transversalmente isótropo más general contiene más constantes²⁷. El tensor $\underline{\underline{H}}$ está caracterizado por tener una dirección especial que

22 Fluidos No Isótropos

tomaremos en la dirección del eje z de un sistema de coordenadas cartesiano elegido de esta forma. Sus componentes cartesianas están dadas por la expresión

$$U_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (3.7)$$

$$H_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{i3} \delta_{l3} \delta_{jk} + \delta_{i3} \delta_{k3} \delta_{jl} + \delta_{j3} \delta_{l3} \delta_{ik} + \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{il} - 4 \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{l3} \right) \quad (3.8)$$

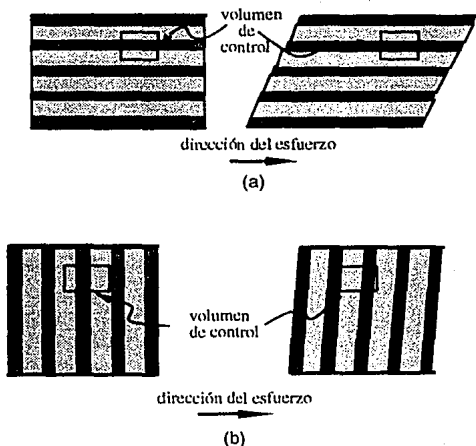


Figura 3.3. Un material en capas está compuesto de la superposición de diferentes fluidos. Si aplicamos un esfuerzo cortante en la dirección de las capas (a) la estructura se mantiene y las propiedades permanecen invariables. Si aplicamos el esfuerzo en la dirección perpendicular (b), la estructura es destruida y las propiedades cambiarán.

FLUIDO ESTRATIFICADO BAJO ESFUERZO CONSTANTE.

Hay dos direcciones de esfuerzo cortante respecto del eje de simetría del fluido transversalmente isótropo llamadas paralela y perpendicular. El caso de esfuerzo paralelo

es especial en el sentido de que las propiedades del fluido permanecen constantes durante el tiempo. El caso perpendicular conduce a un cambio en la dirección del eje de simetría pero no afecta sus valores numéricos. A medida que el tiempo se va a infinito, la dirección del eje de simetría tenderá a ser paralelo a las capas.

Esfuerzo cortante en la dirección paralela.

Aplicando esfuerzo cortante en la dirección paralela a las capas, preservaremos la estructura del fluido. Si el fluido es colocado entre dos placas paralelas, separadas por una distancia H , tal que el eje de simetría es perpendicular a las placas y la placa superior se mueve con velocidad constante U , entonces habrá un esfuerzo constante actuando sobre el fluido. El valor del esfuerzo constante será simplemente $\dot{\gamma}_0 = U/H$. Colocamos un sistema cartesiano de coordenadas con el eje x paralelo a las placas y el eje y perpendicular a ellas, como se observa en la figura 3.3. La parte simétrica del gradiente de velocidades está dado por la expresión

$$\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\dagger = (\hat{e}_x \hat{e}_y + \hat{e}_y \hat{e}_x) \dot{\gamma}_0, \quad (3.9)$$

y el tensor de esfuerzos se convierte en

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{P}}} &= -\underline{\underline{\mathbf{I}}}p + \underline{\underline{\underline{\mu}}}: (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\dagger) = -\underline{\underline{\mathbf{I}}}p + \underline{\underline{\underline{\mu}}}: (\hat{e}_x \hat{e}_y + \hat{e}_y \hat{e}_x) \dot{\gamma}_0 \\ &= -\underline{\underline{\mathbf{I}}}p + \mu (\hat{e}_x \hat{e}_y + \hat{e}_y \hat{e}_x) \dot{\gamma}_0 + \Delta\mu (\hat{e}_x \hat{e}_y + \hat{e}_y \hat{e}_x) \dot{\gamma}_0 = \\ &= -\underline{\underline{\mathbf{I}}}p + (\mu + \Delta\mu) (\hat{e}_x \hat{e}_y + \hat{e}_y \hat{e}_x) \dot{\gamma}_0; \end{aligned} \quad (3.10)$$

que implica que la presión es constante en todo el fluido y la ecuación de continuidad es idénticamente satisfecha. La fuerza por unidad de área en la placa superior es la misma que en el caso isótropo con viscosidad $\mu + \Delta\mu$.

$$\mathbf{F} = (\mu + \Delta\mu) \dot{\gamma}_0 \hat{e}_x. \quad (3.11)$$

No hay otros efectos o esfuerzos en la dirección perpendicular.

Esfuerzo cortante en la dirección perpendicular.

Debido a la simplicidad geométrica del problema, es posible resolver analíticamente el caso general con una dirección arbitraria del esfuerzo. El caso donde el eje de simetría del fluido es perpendicular es muy particular (figura 3.3a). Si aplicamos el esfuerzo cortante en esa dirección, la simetría se preservará para todo el tiempo t . En el otro caso, si aplicamos el esfuerzo con el eje de simetría paralelo a las placas (figura 3.3b).

la simetría cambiará en el tiempo; como veremos, la orientación del eje de simetría rotará de ser paralela a las placas a ser perpendicular a medida que el tiempo se va a infinito. Es en este sentido que el caso donde el eje de simetría es perpendicular a las placas es particular.

Si al tiempo $t = 0$, el eje de simetría es perpendicular a las placas y la placa superior se mueve con velocidad constante, el eje de simetría será siempre perpendicular a $t = \infty$. A cualquier tiempo t , las superficies entre capas serán planas y paralelas entre sí. La orientación cambiará con el tiempo y, debido a la simplicidad geométrica del problema, es posible calcular la orientación del eje de simetría como función del tiempo. Por continuidad, la distancia entre capas cambiará en el tiempo pero sus proporciones permanecerán constantes. Como se ve en la figura 3.4, la distancia entre dos capas cambiará en el tiempo de acuerdo con la fórmula:

$$\frac{L(t)}{L_0} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + U^2 t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_0^2 t^2}} \quad (3.12)$$

Introduciendo el ángulo α entre el eje de simetría y el eje x definido como

$$\tan \theta \equiv \frac{H}{Ut} = \frac{1}{\gamma_0 t} = \frac{1}{\tan \alpha} \quad (3.13)$$

la distancia entre capas se convierte en

$$L(t) = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \gamma_0^2 t^2}} \quad (3.14)$$

o

$$L(t) = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = L_0 \cos \alpha \quad (3.15)$$

El vector unitario \hat{n} en la dirección del eje de simetría está dado por la expresión

$$\hat{n}(t) = -\hat{e}_x \cos \alpha + \hat{e}_y \sin \alpha \quad (3.16)$$

y el vector tangente unitario

$$\hat{i}(t) = \hat{e}_x \sin \alpha + \hat{e}_y \cos \alpha \quad (3.17)$$

Los vectores unitarios \hat{n} y \hat{i} pueden ser escritos en términos de \hat{e}_x y \hat{e}_y .

$$\hat{e}_x = -\hat{n} \cos \alpha + \hat{i} \sin \alpha \quad (3.18)$$

$$\hat{e}_y = \hat{n} \sin \alpha + \hat{i} \cos \alpha \quad (3.19)$$

Debido al hecho de que el tensor de viscosidad es más fácilmente expresado en términos de \hat{n} y \hat{t} , escribiremos el tensor de deformación usando dichos vectores unitarios.

$L(t) \equiv$ distancia entre capas

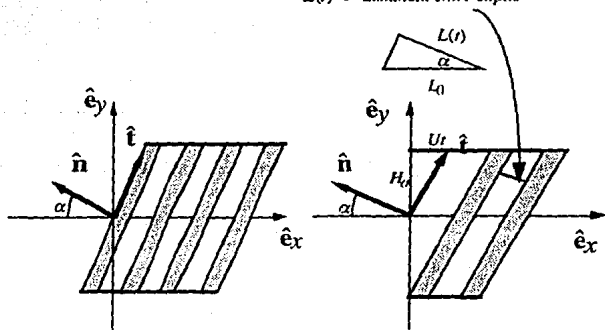


Figura 3.4 La dirección del vector unitario cambia con el tiempo. En el caso del esfuerzo cortante perpendicular, cambia de ser paralelo al eje X a ser paralelo al eje Y conforme el tiempo se va a infinito.

El tensor de deformación se convierte en

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t &= (\hat{e}_x \hat{e}_y + \hat{e}_y \hat{e}_x) \dot{\gamma}_0 \\
 &= [(-\hat{n} \cos \alpha + \hat{t} \sin \alpha)(\hat{n} \sin \alpha + \hat{t} \cos \alpha) + (\hat{n} \sin \alpha + \hat{t} \cos \alpha)(-\hat{n} \cos \alpha + \hat{t} \sin \alpha)] \dot{\gamma}_0 \\
 &= [\hat{n} \hat{n}(-2 \cos \alpha \sin \alpha) + \hat{t} \hat{t}(2 \cos \alpha \sin \alpha) + (\hat{t} \hat{n} + \hat{n} \hat{t})(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)] \dot{\gamma}_0 = \\
 &= [\hat{n} \hat{n}(-2CS) + \hat{t} \hat{t}(2CS) + (\hat{t} \hat{n} + \hat{n} \hat{t})(S^2 - C^2)] \dot{\gamma}_0 ; \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

donde usamos la notación $S \equiv \sin \alpha$ y $C \equiv \cos \alpha$. El tensor de esfuerzos se convierte en

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{P}} &= -\underline{\underline{I}} p + \underline{\underline{\mu}} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) = -\underline{\underline{I}} p + \underline{\underline{\mu}} : (\hat{e}_x \hat{e}_y + \hat{e}_y \hat{e}_x) \dot{\gamma}_0 \\
 &= -\underline{\underline{I}} p + \underline{\underline{\mu}} : [\hat{n} \hat{n}(-2CS) + \hat{t} \hat{t}(2CS) + (\hat{t} \hat{n} + \hat{n} \hat{t})(S^2 - C^2)] \dot{\gamma}_0 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & -\mathbf{I}\rho + \mu \left[\hat{n}\hat{n}(-2CS) + \hat{t}\hat{t}(2CS) + (\hat{i}\hat{n} + \hat{n}\hat{i})(S^2 - C^2) \right] \dot{\gamma}_0 + \\
 & + \Delta\mu (\hat{i}\hat{n} + \hat{n}\hat{i})(S^2 - C^2) \dot{\gamma}_0.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

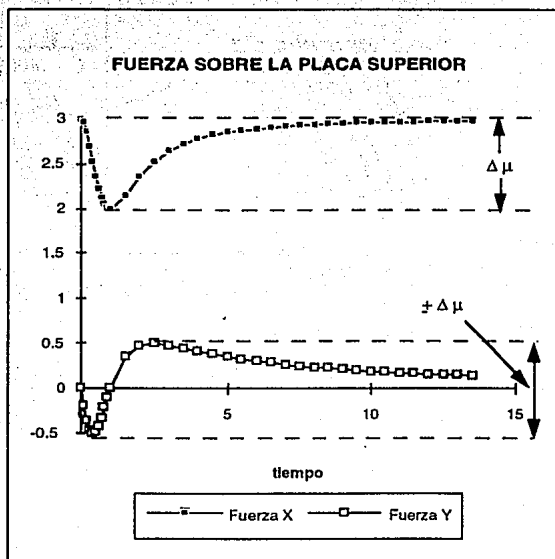


Figura 3.5. La gráfica muestra las componentes X y Y de la fuerza que actúa sobre la placa superior. Es posible observar cómo aparece una fuerza perpendicular que desplazaría hacia arriba y hacia abajo la placa superior. En el límite cuando t tiende a infinito, se recupera la condición inicial.

La fuerza por unidad de área actuando sobre la placa superior es

$$\mathbf{F} = \underline{\underline{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \underline{\underline{\tau}} \cdot (\hat{n}\cos\alpha + \hat{t}\sin\alpha) =$$

$$- \mu \dot{\gamma}_0 \hat{e}_x + \Delta\mu \dot{\gamma}_0 (S^2 - C^2) \left\{ \hat{e}_x (S^2 - C^2) + \hat{e}_y 2CS \right\}. \quad (3.22)$$

La fuerza sobre la placa superior presenta comportamientos enteramente no newtonianos como es una fuerza perpendicular a la placa. El tensor de esfuerzos en términos de los vectores \hat{e}_x y \hat{e}_y tiene la forma:

$$\underline{\underline{P}} = -\underline{\underline{I}}P + \mu (\hat{e}_x \hat{e}_y + \hat{e}_y \hat{e}_x) \dot{\gamma}_0 + \Delta\mu (S^2 - C^2) \left\{ -2SC \hat{e}_x \hat{e}_x + 2SC \hat{e}_y \hat{e}_y + (S^2 - C^2) (\hat{e}_x \hat{e}_y + \hat{e}_y \hat{e}_x) \right\} \dot{\gamma}_0 \quad (3.23)$$

Calculando el primer coeficiente de esfuerzos normales⁸ obtenemos:

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -4\mu \dot{\gamma}_0^2 = -\Delta\mu 4SC (S^2 - C^2) \dot{\gamma}_0. \quad (3.24)$$

El comportamiento "no newtoniano" puede observarse fácilmente en este primer coeficiente de esfuerzos normales.

Como ejemplo, supondremos que:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_0 &= 1, \\ \mu &= 2, \\ \Delta\mu &= 1; \end{aligned} \quad (3.25)$$

La gráfica 3.5 muestra la dependencia temporal de las componentes x y y de la fuerza que actúa sobre la placa superior.

El comportamiento de la fuerza sobre la placa superior presenta características "no newtonianas". Por un lado, la componente x de la fuerza disminuye y aumenta; por otro lado, aparece una fuerza en la dirección perpendicular (típicamente no newtoniana) que tendría el efecto de desplazar la placa hacia abajo y después hacia arriba. Hay que notar que en el límite $t \rightarrow \infty$, se recupera la condición inicial. Es importante notar que el fluido analizado es homogéneo, esto es, los coeficientes del tensor de viscosidad no dependen de la posición. Este fluido es la generalización del fluido estratificado ya que éste tiene estructura y no es homogéneo en escalas de longitud comparadas con las alturas de las capas de fluidos. Hemos supuesto que un gradiente de velocidad constante es aplicado y se estudiaron los efectos sobre la fuerza aplicada sobre la placa superior.

CAPÍTULO 4.

FLUIDO TRANSVERSALMENTE ISÓTROPICO DE DOS CONSTANTES. ROTACIÓN.

SOLUCIÓN FUNDAMENTAL PARA UNA TORCA.

Como se menciona en el Apéndice C, el fluido transversalmente isótropo más general tiene 5 constantes²⁷. En este capítulo y el siguiente, nos dedicaremos a estudiar un caso especial con sólo dos constantes, que se aplica al caso de un fluido estratificado. Este caso especial tiene dos viscosidades que se asocian con las direcciones del eje de simetría y la dirección perpendicular.

La solución fundamental para la torca puntual (rotlet) puede ser obtenida usando la solución isótropa. El efecto de una torca puntual en un fluido infinito transversalmente isótropo puede ser analizado usando el mismo esquema de la sección anterior. Para resolver

el problema utilizamos el campo de velocidad en vez de la función de corriente. Es necesario entonces determinar los campos de velocidad y presión. El campo de velocidad, como se mencionó, tiene sólo una componente u_ϕ

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\phi u_\phi(\rho, z) \quad (4.1)$$

$$p = p(\rho, z) \quad (4.2)$$

donde se supone no hay dependencia en ϕ .

La torca puntual se coloca en $z = c$:

$$\mathbf{L} = L_0 \mathbf{e}_z \delta(r - c\mathbf{e}_z) = L_0 \mathbf{e}_z \frac{\delta(\rho)\delta(z-c)}{2\pi\rho} \quad (4.3)$$

La ecuación de movimiento está dada por

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_r \times [\nabla \cdot \mathbf{P}] \quad (4.4)$$

Escribiendo la ecuación en coordenadas cilíndricas obtenemos

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_\rho \times \nabla p - \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\phi \left\{ \mu \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} \right] + \Delta \mu \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} \right\} \quad (4.5)$$

que nos conduce al conjunto de ecuaciones

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (4.7)$$

$$\mu \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} \right] + \Delta \mu \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} = L_0 \frac{\delta(\rho)\delta(z-c)}{2\pi\rho} \quad (4.8)$$

o introduciendo la variable z' :

$$z' = \frac{z}{\left(\frac{\mu + \Delta\mu}{\mu} \right)^{1/2}} = \frac{z}{k} \quad (4.9)$$

30 Fluidos No Isótropos

la ecuación puede reescribirse como:

$$\mu \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z'^2} \right] = L_0 \frac{\delta(\rho) \delta[k(z'-c')]}{2\pi\rho} = \frac{L_0 \delta(\rho) \delta(z'-c')}{k \cdot 2\pi\rho} \quad (4.10)$$

donde k está dado por

$$k = \left(\frac{\mu + \Delta\mu}{\mu} \right)^{1/2} \quad (4.11)$$

CURVAS DE VELOCIDAD u_ϕ CONSTANTE

Solución en la variable original z para:

$$k = 4^{2/3}$$

$$k = \frac{1}{4^{2/3}}$$

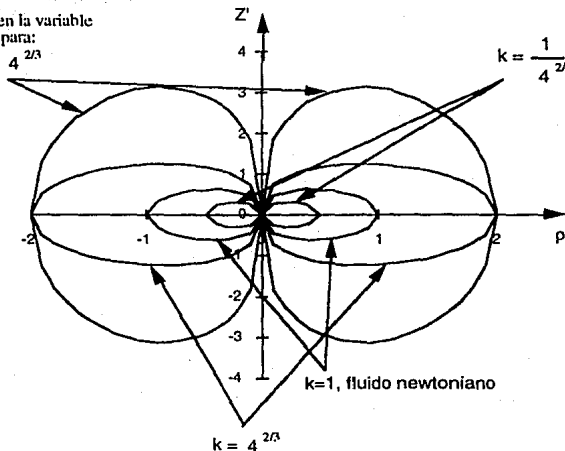


Figura 4.1. Se muestran gráficas para curvas de velocidad constante para varios valores de k , incluyendo el caso newtoniano $k=1$. Adicionalmente, hay una gráfica en la coordenada original z .

Si usamos las propiedades de la función delta de Dirac

$$\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{k}; \quad (4.12)$$

la ecuación puede reescribirse como

$$\left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z'^2} \right] = \frac{L_0 \delta(\rho) \delta(z'-c')}{\mu k 2\pi \rho}. \quad (4.13)$$

Estas ecuaciones son las mismas que para el caso isótropo. La solución del caso transversalmente isótropo es la misma que la del caso isótropo si reemplazamos L_0 por L_0/k . La solución para el fluido transversalmente isótropo es entonces

$$u_\phi = \frac{L_0}{8\pi k \mu} \frac{\rho}{(\rho^2 + (z'-c')^2)^{3/2}}. \quad (4.14)$$

La figura 4.1 muestra las líneas de velocidad constante. Se muestran para tres valores de k , incluyendo $k=1$ (fluido newtoniano):

$$\begin{aligned} k &= 4^{2/3}, \\ k &= 1, \\ k &= \frac{1}{4^{2/3}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Los otros dos casos son "simétricos", esto es, intercambiamos los valores de la viscosidad μ por $\mu + \Delta\mu$ y viceversa. Se puede apreciar cómo en un caso la curva de velocidad constante se ve contraída mientras que en el otro caso se ve expandida. Adicionalmente, incluimos una gráfica en la variable no escalada z , para $k=4^{2/3}$. En este caso, la gráfica es similar a la de z' , simplemente está escalada por el factor k .

ROTACION DE UNA ESFERA.

La rotación de una esfera de radio R , en un fluido transversalmente isótropo, es matemáticamente equivalente a la rotación de un elipsoide en un fluido isótropo. La solución para la rotación de un elipsoide (prolato u oblató) es conocida (Jeffreys, 1915). Seguiremos cercanamente la solución ofrecida por Jeffreys. La figura 4.2 muestra la

32 Fluidos No Isótropos

geometría del problema. La ecuación de movimiento para la rotación de una esfera en un fluido transversalmente isótropo está dada por

$$\mu \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} \right] + (\mu + \Delta\mu) \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} = 0 ; \quad (4.16)$$

que debe satisfacer las condiciones de frontera

$$u_\phi = \Omega \rho \quad \text{en} \quad r = (\rho^2 + z^2)^{1/2} = R , \quad (4.17)$$

$$u_\phi \rightarrow 0 \quad \text{a medida que} \quad r = (\rho^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty . \quad (4.18)$$

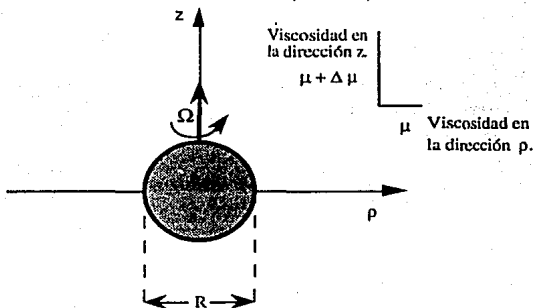


Figura 4.2. La gráfica muestra una esfera de radio R que gira con velocidad angular Ω constante. La viscosidad en la dirección z , dirección de la velocidad angular, es $\mu + \Delta\mu$; en la dirección r , la viscosidad es μ .

En términos de la variable escalada z' :

$$z' = \frac{z}{\left(\frac{\mu + \Delta\mu}{\mu} \right)^{1/2}} = \frac{z}{k} , \quad (4.19)$$

donde k se define como

$$k = \left(\frac{\mu + \Delta\mu}{\mu} \right)^{1/2} . \quad (4.20)$$

La ecuación se convierte en

$$\left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z'^2} \right] = 0 \quad (4.21)$$

y las condiciones de frontera se convierten en

$$u_\phi = \Omega \rho \quad \text{at} \quad r = (\rho^2 + k^2 z'^2)^{1/2} = R, \quad (4.22)$$

$$u_\phi \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad r = (\rho^2 + k^2 z'^2)^{1/2} \rightarrow \infty; \quad (4.23)$$

que corresponden a las ecuaciones de rotación de un elipsoide sumergido en un fluido isótropo infinito. La figura 4.3 muestra ambos casos. El elipsoide es prolato u oblató dependiendo del valor de $k^2 < 1$ o $k^2 > 1$, respectivamente. Presentaremos primero la solución para el elipsoide prolato y luego de forma análoga el caso del elipsoide oblató.

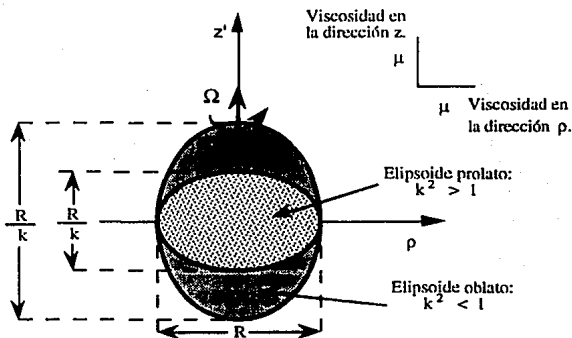


Figura 4.3. La figura muestra la esfera usando la variable escalada z' . Dependiendo del valor de k , el elipsoide se convierte en oblató ($k < 1$) o en prolato ($k > 1$). En cualquier caso, las dimensiones en la dirección ρ no son alteradas. Entonces, el problema de una esfera en un fluido transversalmente isótropo, se convierte en el problema de un elipsoide en un fluido newtoniano.

34 Fluidos No Isótropos

La situación prolata es más fácilmente obtenida si introducimos un sistema de coordenadas prolatas definidas por la siguiente transformación

$$z' + i\rho = c \cosh(\xi + i\eta) ; \quad (4.24)$$

o equivalentemente

$$z' = c \cosh \xi \cos \eta , \quad (4.25)$$

$$\rho = c \sinh \xi \sin \eta . \quad (4.26)$$

Las superficies de coordenadas $\xi = \text{const}$ son una familia de esferoides prolatos teniendo su centro común en el origen. Las superficies de coordenadas $\eta = \text{const}$ son una familia de hiperboloides de dos brazos confocales de revolución teniendo al eje z como eje de rotación y sus focos localizados en $z = \pm c$, $\rho = 0$.

La ecuación de movimiento es conocida como la ecuación de Laplace cuyas soluciones son de la forma:

$$u_\phi = P_n^1(\cos \eta) P_n^1(\cosh \xi) , \quad (4.27)$$

$$u_\phi = P_n^1(\cos \eta) Q_n^1(\cosh \xi) , \quad (4.28)$$

que son funciones asociadas de Legendre del primer tipo de grado n . Para tener una solución finita, tenemos que elegir $n = 1$. Jeffreys presentó la solución más general cuando el fluido llena el espacio entre dos elipsoides prolatos definidos por las ecuaciones $\xi = \xi_0, \xi_1$. La solución para un fluido infinito se obtiene tomando $\xi_1 = \infty$. La solución se convierte entonces en

$$u_\phi = \sin \eta \left[A P_1^1(\cosh \xi) + B Q_1^1(\cosh \xi) \right] ; \quad (4.29)$$

las dos ecuaciones de frontera se pueden escribir como

$$A P_1^1(\cosh \xi) + B Q_1^1(\cosh \xi) = c \Omega_0 \sinh \xi_0 , \quad (4.30)$$

$$A P_1^1(\cosh \xi) + B Q_1^1(\cosh \xi) = c \Omega_1 \sinh \xi_1 . \quad (4.31)$$

Introduciendo la función f definida como

$$f(\xi) = \log \left(\coth \left(\frac{\xi}{2} \right) \right) - \frac{\cosh \xi}{\sinh^2 \xi} , \quad (4.32)$$

la solución puede ser escrita como

$$u_{\phi} = c \sinh \xi \sin \eta \left\{ \Omega_0 \frac{f(\xi) - f(\xi_1)}{f(\xi_0) - f(\xi_1)} + \Omega_1 \frac{f(\xi_0) - f(\xi)}{f(\xi_0) - f(\xi_1)} \right\}. \quad (4.33)$$

ya la torca requerida para mantener una rotación estacionaria del elipsoide está dada por

$$T = \frac{16}{3} \pi \mu c^3 \frac{\Omega_0 - \Omega_1}{f(\xi_0) - f(\xi_1)}. \quad (4.34)$$

La solución para el fluido infinito se obtiene al tomar $\xi_1 = \infty$. El campo de velocidad es entonces

$$u_{\phi} = c \sinh \xi \sin \eta \Omega_0 \frac{f(\xi)}{f(\xi_0)}. \quad (4.35)$$

ya la torca requerida

$$T = \frac{16}{3} \pi \mu c^3 \frac{\Omega_0}{f(\xi_0)}. \quad (4.36)$$

Si R/k y R son los radios polar y ecuatorial respectivamente,

$$\frac{R}{k} = c \cosh \xi_0, \quad R = c \sinh \xi_0, \quad (4.37)$$

o inversamente

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{R/k + R}{R/k - R} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+k}{1-k} \right)$$

La torca es entonces escrita como

$$T = \frac{\frac{16}{3} \pi \mu \Omega_0 c^3}{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+k}{1-k} \right) - \frac{c}{Rk}}; \quad (4.38)$$

donde

$$c = \sqrt{\left(\frac{R}{k}\right)^2 - R^2} = R \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1}. \quad (4.39)$$

En términos de k , la torca puede escribirse como:

$$T = \frac{\frac{16}{3} \pi \mu \Omega_0 R^3 \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)^{3/2}}{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - k^2}}{1 - \sqrt{1 - k^2}} \right) - \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k^2}}$$

36. Fluidos No Isótropos

El caso de una esfera rotando se obtiene en el límite

$$k \rightarrow 1^-, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 1^-} T &= \lim_{k \rightarrow 1^-} T = \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{\frac{16}{3} \pi \mu \Omega_0 R^3 \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)^{3/2}}{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - k^2}}{1 - \sqrt{1 - k^2}} \right) - \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k^2}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{\frac{d}{dk} \frac{16}{3} \pi \mu \Omega_0 R^3 \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)^{3/2}}{\frac{d}{dk} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - k^2}}{1 - \sqrt{1 - k^2}} \right) - \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k^2} \right]} = \\ &= \pi \mu \Omega_0 R^3 \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{\frac{16}{3} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{-2}{k^3}\right)}{\left(\frac{-k \left(\frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} - 1 \right) - k \left(\frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} + 1 \right)}{1 + (k^2 - 1)} \right) + \frac{2}{k\sqrt{1 - k^2}} - \frac{2}{k^3} \sqrt{1 - k^2}} = \\ &= \pi \mu \Omega_0 R^3 \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{16 \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{-1}{k^3}\right)}{\frac{-2}{k\sqrt{1 - k^2}} + \frac{2}{k\sqrt{1 - k^2}} - \frac{2}{k^3} \sqrt{1 - k^2}} = \\ &= \pi \mu \Omega_0 R^3 \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{16 \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)^{1/2}}{2\sqrt{1 - k^2}} = \\ &= \pi \mu \Omega_0 R^3 \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{8}{k} = 8 \pi \mu \Omega_0 R^3. \quad (4.41) \end{aligned}$$

La gráfica siguiente muestra la torca como función del parámetro k . Se incluye la solución para el caso oblató, esto es, para $k > 1$ o $\Delta\mu < 0$. Se aprecia el comportamiento similar a $1/k$ que se obtuvo al aplicar la regla de L'Hôpital.

El caso oblató es obtenido en una forma completamente similar introduciendo un sistema de coordenadas oblató definidas por la transformación esferoidal

$$z' + ip = c' \sinh(\xi + i\eta), \quad (4.42)$$

o equivalentemente

$$z = c' \sinh \xi \cos \eta, \quad \rho = c' \cosh \xi \sin \eta. \quad (4.43)$$

La solución puede ser expresada en términos de la función F definida como

$$F(\xi) = \frac{\sinh \xi}{\cosh^2 \xi} = \cot^{-1}(\sinh \xi), \quad (4.44)$$

como la siguiente expresión

$$u_\phi = c' \cosh \xi \sin \eta \Omega_0 \frac{F(\xi)}{F(\xi_0)}; \quad (4.45)$$

y la torca para mantener una rotación estacionaria del elipsoide es

$$T = \frac{16}{3} \pi \mu c^3 \frac{\Omega_0}{F(\xi_0)}. \quad (4.46)$$

TORCA COMO FUNCION DEL PARAMETRO k .

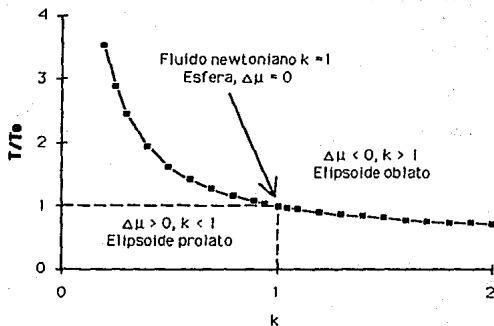


Figura 4.4. La gráfica muestra la torca como función del parámetro k .

38 Fluidos No Isótropos

Usando los radios polar R/k y ecuatorial R ,

$$\frac{R}{k} = c' \sinh \xi_0, \quad R = c' \cosh \xi_0 \quad (4.47)$$

la torca se convierte en

$$T = \frac{\frac{16}{3} \pi \mu \Omega_0 R^3 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{3/2}}{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2} - \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{k\sqrt{k^2-1}} \right)} \quad (4.48)$$

donde

$$c'^2 = R^2 - \frac{R^2}{k^2}; \quad (4.49)$$

que también se reduce a la solución de la esfera en el límite respectivo. Es importante notar que:

$$i \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{k\sqrt{k^2-1}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+i\sqrt{k^2-1}}{1-i\sqrt{k^2-1}} \right)$$

por lo que la solución es esencialmente la misma para $k < 1$ y para $k > 1$.

CAPÍTULO 5.

FLUIDO TRANSVERSALMENTE ISÓTROPO DE DOS CONSTANTES. TRANSLACIÓN.

SOLUCIÓN FUNDAMENTAL PARA EL FLUIDO TRANSVERSALMENTE ISÓTROPO DE DOS CONSTANTES.

La ecuación de movimiento de una fuerza puntual está dada por

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} = \mathbf{F} \delta(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z F \delta(\mathbf{r}) ; \quad (5.1)$$

donde $\delta(\mathbf{r})$ es la función delta de Dirac. En coordenadas cilíndricas $\delta(\mathbf{r})$ está dada por la expresión

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{\delta(z) \delta(\rho)}{2\pi\rho} . \quad (5.2)$$

La solución de la ecuación anisótropa requiere del uso de ciertas propiedades de la función delta de Dirac que se dan a continuación

$$\int_0^{\infty} \delta(r) dr = \frac{1}{2}; \quad \int_0^{\infty} \delta(z) dz = \frac{1}{2}; \quad \int_0^{\infty} \delta(\rho) d\rho = 1;$$

$$\int_0^{\infty} \delta(z) u(z) dz = \frac{1}{2} u(0); \quad \int_0^{\infty} \delta'(z) u(z) dz = -\frac{1}{2} u'(0). \quad (5.3)$$

Usando la función de corriente introducida en la sección anterior, la ecuación de movimiento resulta ser

$$\left(\frac{\mu}{\rho} E^2 E^2 + \frac{\Delta\mu}{\rho} D^2 D^2 \right) \Psi = \frac{F \delta(z)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} \right]; \quad (5.4)$$

o rearmplando términos

$$\left(E^2 E^2 + \frac{\Delta\mu}{\mu} D^2 D^2 \right) \Psi = \frac{F \delta(z)}{2\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} - \delta'(\rho) \right]. \quad (5.5)$$

Si tomamos el límite $\Delta\mu \rightarrow 0$ recuperamos la ecuación isótropa para la fuerza puntual. Podemos reescribir la ecuación de movimiento introduciendo el parámetro k^2 definido como

$$k^4 = -\frac{\Delta\mu}{\mu}. \quad (5.6)$$

Por definición k^2 es un número real si $\Delta\mu \leq 0$ y un número imaginario puro si $\Delta\mu \geq 0$. Como la ecuación depende de k^4 en vez de k^2 , la solución debe ser simétrica bajo el intercambio de k^2 por $-k^2$. Esta propiedad nos permitirá reescribir las ecuaciones de movimiento en forma simétrica. La ecuación de movimiento puede ser escrita como

$$\left(E^2 + k^2 D^2 \right) \left(E^2 - k^2 D^2 \right) \Psi = \frac{F \delta(z)}{2\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} - \delta'(\rho) \right], \quad (5.7)$$

que puede ser escrita en la forma simétrica

$$\left[\frac{1}{2} \left(E^2 + k^2 D^2 \right) \left(E^2 - k^2 D^2 \right) + \frac{1}{2} \left(E^2 - k^2 D^2 \right) \left(E^2 + k^2 D^2 \right) \right] \Psi =$$

$$= \frac{F \delta(z)}{2\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} - \delta'(\rho) \right]; \quad (5.8)$$

donde los operadores $E^2 + k^2 D^2$ y $E^2 - k^2 D^2$ están dados por las expresiones

$$E^2 + k^2 D^2 = (1 + k^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 - k^2) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right), \quad (5.9)$$

$$E^2 - k^2 D^2 = (1 - k^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 + k^2) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right). \quad (5.10)$$

Primero definimos las funciones $\Phi_1(\rho, z)$ y $\Phi_2(\rho, z)$ como

$$\Phi_1(\rho, z) \equiv (E^2 - k^2 D^2) \Psi, \quad (5.11)$$

$$\Phi_2(\rho, z) \equiv (E^2 + k^2 D^2) \Psi; \quad (5.12)$$

que satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{2} (E^2 + k^2 D^2) \Phi_1(\rho, z) + \frac{1}{2} (E^2 - k^2 D^2) \Phi_2(\rho, z) = \frac{F \delta(z)}{2\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} - \delta'(\rho) \right] \quad (5.13)$$

o usando la expresión para los operadores, podemos escribirla como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ (1 + k^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 - k^2) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right\} \Phi_1(\rho, z) + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ (1 - k^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 + k^2) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right\} \Phi_2(\rho, z) = \frac{F \delta(z)}{2\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} - \delta'(\rho) \right]; \end{aligned} \quad (5.14)$$

introduciendo las variables

$$\rho' \equiv \frac{\rho}{(1 - k^2)^{1/2}}, \quad (5.15)$$

$$z' \equiv \frac{z}{(1 + k^2)^{1/2}}, \quad (5.16)$$

$$z'' \equiv \frac{z}{(1 - k^2)^{1/2}} = \frac{(1 + k^2)^{1/2}}{(1 - k^2)^{1/2}} z' = \frac{z'}{\epsilon}, \quad (5.17)$$

$$\rho'' \equiv \frac{\rho}{(1 + k^2)^{1/2}} = \frac{(1 - k^2)^{1/2}}{(1 + k^2)^{1/2}} \rho' = \epsilon \rho'; \quad (5.18)$$

donde

$$\varepsilon = \frac{(1-k^2)^{1/2}}{(1+k^2)^{1/2}}. \quad (5.19)$$

La ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) \right\} \Phi_1(\rho', z') + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z''^2} + \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) \right\} \Phi_1(\rho'', z'') &= \\ = \frac{F \delta(z')}{2\pi\mu (1+k^2)^{1/2} (1-k^2)} \left[\frac{\delta(\rho')}{\rho'} - \delta'(\rho') \right] &= \\ = \frac{F \delta(z'')}{2\pi\mu (1-k^2)^{1/2} (1+k^2)} \left[\frac{\delta(\rho'')}{\rho''} - \delta'(\rho'') \right]. & \quad (5.20) \end{aligned}$$

Por construcción $\Phi_1(\rho, z)$ es igual a $\Phi_2(\rho, z)$ si cambiamos k^2 por $-k^2$. La función $\Phi(\rho, z)$ definida como la suma

$$\Phi(\rho, z) \equiv \Phi_1(\rho, z) + \Phi_2(\rho, z), \quad (5.21)$$

es entonces simétrica bajo el intercambio de k^2 por $-k^2$. Debido a la simetría, podemos dividir la ecuación en dos

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) \right\} \Phi_1(\rho', z') &= \frac{1}{2} \frac{F \delta(z')}{2\pi\mu (1+k^2)^{1/2} (1-k^2)} \left[\frac{\delta(\rho')}{\rho'} - \delta'(\rho') \right] \\ \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z''^2} + \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) \right\} \Phi_1(\rho'', z'') &= \frac{1}{2} \frac{F \delta(z'')}{2\pi\mu (1-k^2)^{1/2} (1+k^2)} \left[\frac{\delta(\rho'')}{\rho''} - \delta'(\rho'') \right]. \end{aligned}$$

Este par de ecuaciones escritas en estas variables son idénticas a la ecuación obtenida para el caso isótropo si escalamos la intensidad de la fuerza puntual como

$$F' = \frac{F}{(1+k^2)^{1/2} (1-k^2)}. \quad (5.22)$$

La solución de estas ecuaciones se obtiene usando el mismo esquema. Definimos la transformada coseno de Fourier

$$\bar{\Phi}_1(\rho', \alpha) = \int_0^{\infty} \Phi_1(\rho', z') \cos \alpha z' dz'; \quad \Phi_1(\rho', z') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_1(\rho', \alpha) \cos \alpha z' d\alpha$$

$$\bar{\Phi}_2(\rho'', \alpha) = \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_2(\rho'', z'') \cos \alpha z'' dz'' ; \quad \Phi_2(\rho'', z'') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_2(\rho'', \alpha) \cos \alpha z'' d\alpha ;$$

tomando la transformada coseno de Fourier, obtenemos las ecuaciones

$$\left\{ \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) - \alpha^2 \right\} \bar{\Phi}_1(\rho', \alpha) = \frac{F' \delta(z')}{8\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho')}{\rho'} - \delta'(\rho') \right], \quad (5.23)$$

$$\left\{ \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) - \alpha^2 \right\} \bar{\Phi}_2(\rho'', \alpha) = \frac{F' \delta(z'')}{8\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho'')}{\rho''} - \delta'(\rho'') \right]; \quad (5.24)$$

donde usamos las propiedades de la función delta.

La solución general de la ecuación homogénea es

$$\bar{\Phi}_1(\rho', \alpha) = A\rho' I_1(\alpha\rho') + B\rho' K_1(\alpha\rho'), \quad (5.25)$$

$$\bar{\Phi}_2(\rho'', \alpha) = C\rho'' I_1(\alpha\rho'') + D\rho'' K_1(\alpha\rho''); \quad (5.26)$$

donde A , B , C y D son constantes de integración e I_1 y K_1 son funciones modificadas de Bessel del primer y segundo tipo, respectivamente. Debido a la simetría de la solución, debemos tomar $A = C$ y $B = D$. La solución de la ecuación inhomogénea puede ser obtenida por el método de variación de parámetros. Esto conduce a la solución

$$\bar{\Phi}_1(\rho', \alpha) = A\rho' I_1(\alpha\rho') - \frac{\alpha F' \rho' K_1(\alpha\rho')}{8\pi\mu}, \quad (5.27)$$

$$\bar{\Phi}_2(\rho'', \alpha) = A\rho'' I_1(\alpha\rho'') - \frac{\alpha F' \rho'' K_1(\alpha\rho'')}{8\pi\mu}. \quad (5.28)$$

Ahora resolvemos la ecuación

$$(E^2 - k^2 D^2) \psi_1(\rho, z) + (E^2 + k^2 D^2) \psi_2(\rho, z) = \Phi_1(\rho, z) + \Phi_2(\rho, z). \quad (5.29)$$

Estas ecuaciones pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned} & \left\{ (1 - k^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 + k^2) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right\} \psi_1(\rho, z) + \\ & + \left\{ (1 + k^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 - k^2) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right\} \psi_2(\rho, z) = \\ & = \Phi_1(\rho, z) + \Phi_2(\rho, z); \end{aligned} \quad (5.30)$$

44 Fluidos No Isótropos

donde Φ está dada por

$$\begin{aligned}\Phi_1(\rho', z') &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{\Phi}_1(\rho', \alpha) \cos \alpha z' d\alpha = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[A\rho' I_1(\alpha\rho') - \frac{\alpha F' \rho' K_1(\alpha\rho')}{8\pi\mu} \right] \cos \alpha z' d\alpha \quad (5.31)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Phi_2(\rho'', z'') &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{\Phi}_2(\rho'', \alpha) \cos \alpha z'' d\alpha = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[A\rho'' I_1(\alpha\rho'') - \frac{\alpha F'' \rho'' K_1(\alpha\rho'')}{8\pi\mu} \right] \cos \alpha z'' d\alpha \quad (5.32)\end{aligned}$$

La ecuación puede ser reescrita usando la anterior definición como

$$\begin{aligned}&\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z''^2} + \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) \right\} \psi_1(\rho'', z'') \\ &+ \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) \right\} \psi_2(\rho', z') = \\ &= \Phi_1(\rho, z) + \Phi_2(\rho, z) \quad (5.33)\end{aligned}$$

Podemos separar esta ecuación en el siguiente par de ecuaciones

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z''^2} + \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) \right\} \psi_1(\rho'', z'') = \Phi_2(\rho'', z''), \quad (5.34)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) \right\} \psi_2(\rho', z') = \Phi_1(\rho', z') ; \quad (5.35)$$

donde el mezclado de términos es necesario para mantener la simetría y $\Phi_2(\rho'', z'')$ y $\Phi_1(\rho', z')$ están dadas por las transformadas coseno de Fourier

$$\Phi_1(\rho', z') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[A \frac{\rho'}{\varepsilon} I_1(\alpha\rho') - \alpha \varepsilon F' \rho' K_1(\alpha\rho') \right] \cos \alpha z' d\alpha \quad (5.36)$$

$$\Phi_2(\rho'', z'') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[A \frac{\rho''}{\varepsilon} I_1 \left(\frac{\alpha'' \rho''}{\varepsilon} \right) - \alpha'' F' \frac{\rho''}{2\varepsilon^2} K_1 \left(\frac{\alpha'' \rho''}{\varepsilon} \right) \right] \cos \alpha'' z'' d\alpha'' ; \quad (5.37)$$

y α'' se define como

$$\alpha'' = \alpha \varepsilon \quad (5.38)$$

Para resolver esta ecuación introducimos la transformada coseno de Fourier $\bar{\psi}_1(\rho', z')$ y $\bar{\psi}_2(\rho'', z'')$

$$\bar{\psi}_1(\rho', \alpha) = \int_0^{\infty} \psi_1(\rho', z') \cos \alpha z' dz' ; \quad \psi_1(\rho', z') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\psi}_1(\rho', \alpha) \cos \alpha z' d\alpha , \quad (5.39)$$

$$\bar{\psi}_2(\rho'', \alpha) = \int_0^{\infty} \psi_2(\rho'', z'') \cos \alpha z'' dz'' ; \quad \psi_2(\rho'', z'') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\psi}_2(\rho'', \alpha) \cos \alpha z'' d\alpha . \quad (5.40)$$

Tomando la transformada coseno de Fourier de la ecuación obtenemos

$$\left\{ \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) - \alpha^2 \right\} \bar{\psi}_1(\rho', \alpha) = A \rho' I_1(\alpha \rho') - \frac{\alpha F' \rho' K_1(\alpha \rho')}{8 \pi \mu} , \quad (5.41)$$

$$\left\{ \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) - \alpha^2 \right\} \bar{\psi}_2(\rho'', \alpha) = A \rho'' I_1(\alpha \rho'') - \frac{\alpha F \rho'' K_1(\alpha \rho'')}{8 \pi \mu} ; \quad (5.42)$$

donde la solución general de la ecuación homogénea está dada por

$$\bar{\psi}_{1H}(\rho', \alpha) = C \rho' I_1(\alpha \rho') + D \rho' K_1(\alpha \rho') , \quad (5.43)$$

$$\bar{\psi}_{2H}(\rho'', \alpha) = C \rho'' I_1(\alpha \rho'') + D \rho'' K_1(\alpha \rho'') ; \quad (5.44)$$

donde las constantes C y D se toman iguales en ambas soluciones para mantener la simetría. Una solución particular puede ser obtenida por el método de variación de parámetros. Esto lleva a la solución general

$$\bar{\psi}_{1H}(\rho', \alpha) = C \rho' I_1(\alpha \rho') + D \rho' K_1(\alpha \rho') + \frac{A \rho'^2 I_0(\alpha \rho')}{2\alpha} + \frac{\alpha F \rho'^2 K_0(\alpha \rho')}{16 \pi \mu} , \quad (5.45)$$

$$\bar{\psi}_{2H}(\rho'', \alpha) = C \rho'' I_1(\alpha \rho'') + D \rho'' K_1(\alpha \rho'') + \frac{A \rho''^2 I_0(\alpha \rho'')}{2\alpha} + \frac{\alpha F \rho''^2 K_0(\alpha \rho'')}{16 \pi \mu} . \quad (5.46)$$

Las constantes A y C se toman como cero para tener al fluido en reposo en infinito. La constante D se toma como cero para que el campo de velocidades sea finito sobre el eje z (excepto en el punto singular). La ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} \psi(\rho, z) &= \psi_1(\rho, z) + \psi_2(\rho, z) = \\ &= \frac{\alpha F \rho^{-2} K_0(\alpha \rho')}{16 \pi \mu} + \frac{\alpha F \rho^{-2} K_0(\alpha \rho'')}{16 \pi \mu} \end{aligned} \quad (5.47)$$

CONCLUSIONES

La utilización del tensor de cuarto orden está justificada siempre y cuando el sistema permanezca homogéneo durante el proceso de flujo. Esta hipótesis no puede ser garantizada *a priori*, por lo que tendrá que ser analizada en cada caso. Una vez analizada la validez de este método, ya hemos demostrado que hay una descomposición única del tensor de viscosidad que da 6 parámetros con significado en las ecuaciones de movimiento. Hay un esquema bien establecido para obtener la descomposición. El fluido transversalmente isótropo fue estudiado en diferentes situaciones de flujo a lo largo del capítulo. En un ejemplo mostramos un tensor de esfuerzos dependiente del tiempo (manteniéndose homogéneo).

Los resultados analíticos tienen la ventaja (además de su propia belleza) de mostrar explícitamente los cambios en la solución cuando los parámetros involucrados son modificados. Esto es algo que un análisis numérico no muestra explícitamente. Los resultados y método aquí utilizados son completamente analíticos.

Creemos que este método tiene sus ventajas para analizar fluidos anisótropos. Provee un esquema para incorporar las anisotropías en las ecuaciones de movimiento de manera única. La descomposición misma es una herramienta poderosa que permite determinar los parámetros importantes que aparecen en las ecuaciones de movimiento. En general, este método tiene un fundamento hidrodinámico fuerte que beneficia su uso en el análisis de fluidos anisótropos.

PARTE II.

FLUIDOS NO
HOMOGÉNEOS.

CAPÍTULO 6.

FLUIDOS NO HOMOGÉNEOS.

INTRODUCCIÓN.

La viscosidad efectiva de una suspensión de partículas^{20, 24} depende de diferentes variables que caracterizan al sistema; específicamente depende de: (a) la naturaleza del fluido, (b) la naturaleza de las partículas suspendidas, (c) la concentración de partículas suspendidas, (d) el movimiento de las partículas y del fluido. Hay excelentes revisiones en este tema^{21, 22}.

La viscosidad efectiva de una suspensión^{24, 7, 8, 9} se define a través de la comparación con la respuesta de un fluido newtoniano. Si la misma fuerza es aplicada a un fluido newtoniano y a una suspensión, se observará que ambos fluidos se mueven a velocidades diferentes. Si por ejemplo, la velocidad promedio del fluido es proporcional a la fuerza aplicada para el caso newtoniano, también lo será para la suspensión. El cociente entre las fuerzas será entonces proporcional al cociente de las velocidades promedio. La constante de proporcionalidad será precisamente el cociente entre las dos viscosidades. La viscosidad efectiva de la suspensión es entonces proporcional a la viscosidad del fluido newtoniano.

Despreciando las interacciones hidrodinámicas entre partículas o con las paredes, la viscosidad efectiva para sistemas diluidos depende, entre otras variables, de la

concentración de partículas. Para sistemas diluidos, la dependencia de la viscosidad como función de la concentración es lineal²⁰. Experimentalmente, se ha mostrado^{52, 55, 56} que después del comportamiento lineal, la viscosidad crece no linealmente con la concentración y finalmente diverge para un valor crítico de la misma. Tratamientos matemáticos, incluyendo interacciones hidrodinámicas, han sido desarrollados para describir la divergencia en el punto crítico.

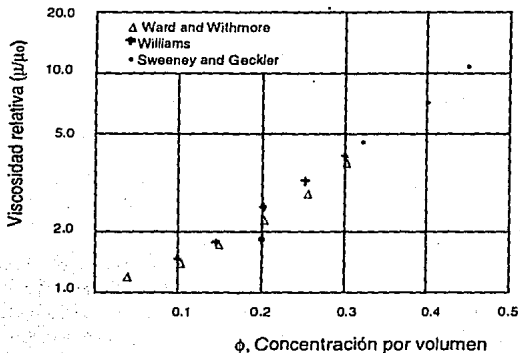


Figura 6.1. Dependencia de la viscosidad relativa como función de la concentración. Suponemos que tal relación es obtenible experimentalmente o modelada teóricamente.

Suponemos que la ecuación constitutiva que relaciona a la viscosidad con la concentración es obtenible, ya sea experimentalmente o modelada teóricamente. Una gráfica experimental mostrando la dependencia de la viscosidad relativa se puede apreciar en la figura 6.1. Si la suspensión es homogénea, la suspensión puede ser modelada como un fluido homogéneo con viscosidad efectiva dependiente de la concentración de partículas. En lo que respecta a la solución de las ecuaciones de movimiento, la viscosidad es un parámetro constante.

Si la suspensión no es homogénea, la viscosidad no puede ser considerada constante en todo el fluido. Los gradientes en la concentración conducirán a gradientes en la viscosidad. En este capítulo analizaremos los efectos de los gradientes de viscosidad en la solución de las ecuaciones de movimiento y las correspondientes fuerzas necesarias para mantener el flujo.

Si la concentración es una función conocida de la posición, y suponiendo un modelo para la relación funcional entre la viscosidad y la concentración, es posible encontrar la viscosidad como función de la posición. Utilizar una viscosidad que depende de la posición es válido a la misma escala de longitud donde la suspensión puede considerarse como un continuo homogéneo. La viscosidad aparece en las ecuaciones de movimiento como parte del tensor de esfuerzos y si no es constante afectará de manera distinta la dinámica del sistema. Términos adicionales aparecerán en las ecuaciones de movimiento modificando las soluciones. En esta parte II analizaremos los cambios producidos por una viscosidad que no es homogénea en todo el espacio ocupado por el fluido. Analizaremos cómo cambia la dinámica y cuál es el efecto de las fuerzas y torcas aplicadas al sistema. Como resultado, obtendremos las propiedades efectivas al comparar con los resultados newtonianos. El caso newtoniano es llamado aquí en ocasiones el caso homogéneo.

En las siguientes secciones escribiremos las ecuaciones de movimiento para la situación general no estacionaria y su simplificación para flujos estacionarios. El papel de la viscosidad como función de la posición será apreciado cuando explícitamente mostremos los términos adicionales. En los capítulos 7, 8 y 9 analizaremos flujos unidimensionales, los cambios introducidos por los términos adicionales y las fuerzas requeridas para mantener el flujo. El capítulo 10 está dedicado a la rotación de cuerpos con simetría axial.

LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

El problema general no estacionario incluye la concentración $\Phi(\mathbf{r}, t)$ como variable, en adición a los campos de velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ y presión $p(\mathbf{r}, t)$. Una ecuación adicional será necesaria para tener el problema matemático bien planteado. Esta ecuación aparece al aplicar el principio de conservación de partículas. Para una suspensión de partículas neutralmente suspendidas, no hay fuerza neta actuando sobre las partículas y éstas son transportadas por el fluido con la misma velocidad. No hay mecanismo físico para cambiar a las partículas de una línea de corriente a otra o para desplazarse con una

52 Fluidos No Homogéneos

velocidad diferente. Estos argumentos que suponemos válidos han sido probados bajo ciertas hipótesis^{12, 13}. No se consideran las interacciones hidrodinámicas como las que se efectúan entre las partículas o con las paredes por razones que a continuación se exponen. Estas interacciones pueden dar origen a fenómenos de migración y movimiento de partículas entre líneas de corriente^{10, 11, 34, 43, 49, 54}.

La concentración $\Phi(\mathbf{r}, t)$, como ya hemos mencionado, satisface una ecuación de conservación del mismo tipo que la de conservación de masa. La ecuación de conservación puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{u}) = 0, \quad (6.1)$$

donde $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ es el campo de velocidad. Las ecuaciones de continuidad y momento pueden ser escritas como

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}) = 0, \quad (6.2)$$

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}, \quad (6.3)$$

donde ρ_f es la densidad del fluido supuesta constante (suponiendo partículas neutralmente suspendidas, esto es, con fuerza de flotación cero debido a que la densidad de las partículas y la del fluido suspensor es la misma) y $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ es el tensor de esfuerzos dado por la ecuación constitutiva

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = - \underline{\underline{\mathbf{I}}} p + \mu (\Phi(\mathbf{r}, t)) [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\dagger}]. \quad (6.4)$$

donde p es la presión hidrostática, $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ es la diádica unidad y $\mu(\Phi)$ es una función conocida de la concentración. Estas constituyen un conjunto de 5 ecuaciones para las 5 variables \mathbf{u} , p y Φ . Estas ecuaciones deben ser resueltas bajo las condiciones iniciales y de frontera pertinentes. Esto constituye un problema matemático bien planteado.

Estamos interesados en las soluciones estacionarias del conjunto anterior de ecuaciones. En la siguiente sección, simplificaremos las ecuaciones para el régimen estacionario.

EL CASO ESTACIONARIO.

Supongamos que tenemos una suspensión de partículas esféricas neutralmente suspendidas y que la suspensión se encuentra en un tubo circular bajo un flujo originado por un gradiente de presión constante. Bajo la hipótesis de homogeneidad, se esperaría obtener un perfil parabólico definido por la viscosidad efectiva de la suspensión. Supongamos que por alguna razón, digamos interacción hidrodinámica entre las partículas y con la pared del tubo, las partículas empezaran a cambiar de línea de corriente en una especie de migración, hasta lograr un estado de equilibrio donde la concentración de partículas ya no es homogénea. El perfil de velocidades ha dejado de ser parabólico y el gasto total ha cambiado. Una pregunta interesante sería investigar la razón por la cual esa migración ocurrió y cuál es la situación de equilibrio. Nuestro esquema no permite contestar esta pregunta ya que considera sólo casos estacionarios, sin embargo, podemos plantear el problema al revés. Observamos un perfil de velocidades no parabólico con un gasto total diferente al esperado utilizando la viscosidad efectiva. Con base en esta información y suponiendo que el sistema puede ser analizado con nuestro esquema, podríamos encontrar la configuración de equilibrio, esto es, la concentración de partículas como función de la posición. A futuro, nos gustaría poder contestar la pregunta original y entender cuál es el mecanismo de esta migración y a qué obedece la situación de equilibrio. Para lograrlo, sería necesario introducir interacciones hidrodinámicas que permitieran a las partículas cambiar de una línea de corriente a otra y analizar el problema dinámico. Esto está fuera del alcance de este trabajo pero constituye el siguiente paso de investigación.

En el régimen estacionario la concentración de partículas permanece constante en el tiempo aun cuando es función de la posición. La concentración final del estado estacionario puede utilizarse para obtener la viscosidad como función de la posición. Las soluciones estacionarias pueden ser obtenidas resolviendo las ecuaciones estacionarias de conservación de momento y masa para la concentración dada. Sin resolver la ecuación no estacionaria, no seremos capaces de determinar la concentración final estacionaria para cualquier configuración inicial, pero al analizar las ecuaciones estacionarias para dependencias arbitrarias de la viscosidad, podremos estudiar todas las posibles soluciones estacionarias que constituyen un análisis más profundo de la reología y dinámica de suspensiones. Al considerar dependencias arbitrarias, no se necesita conocer la relación funcional entre la viscosidad y la concentración en lo que se refiere a la solución misma. La dependencia funcional está restringida a aquellas funciones que son siempre positivas y que son consistentes con la hipótesis de estado estacionario de la concentración. Esta

54 Fluidos No Homogéneos

condición implica que la concentración debe satisfacer la ecuación estacionaria de conservación :

$$\nabla \cdot [\mathbf{u}\Phi] = \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi = 0 \quad (6.5)$$

y como $\nabla \mu = \frac{d\mu}{d\Phi} \nabla \Phi$ la viscosidad debe satisfacer

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mu = 0 \quad ; \quad (6.6)$$

o en otras palabras, la viscosidad es constante a lo largo de las líneas de corriente.

Las ecuaciones de movimiento para un fluido no homogéneo, como el descrito en los párrafos anteriores, son obtenidas al permitir a la viscosidad depender de la posición en la ecuación constitutiva. Esta condición es satisfecha por una suspensión de partículas esféricas neutralmente suspendidas, donde la densidad de las partículas y del fluido son iguales. Como no se necesitan variables adicionales para describir al fluido, tampoco se necesitan ecuaciones adicionales. La conservación de masa y momento, junto con la condición de estado estacionario, proveen un sistema cerrado de ecuaciones para el sistema

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad , \quad (6.7)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} = 0 \quad , \quad (6.8)$$

donde $\underline{\mathbf{P}}$ es el tensor de esfuerzos dado por la ecuación constitutiva

$$\underline{\mathbf{P}} = -\underline{\mathbf{I}} p + \mu(\mathbf{r}) \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger \right] \quad (6.9)$$

donde $\mu(\mathbf{r})$ es una función arbitraria pero conocida de la posición. Para establecer el problema matemático, es necesario establecer condiciones de frontera para los campos de presión y velocidad. En particular, analizaremos casos donde el fluido está en reposo en infinito y satisface condiciones de adherencia sobre la superficie de paredes sólidas; adicionalmente, la presión alcanza un valor finito en infinito.

Para la misma geometría de flujo, se pueden tener distintas soluciones para distintas funciones de viscosidad. En general, las soluciones para el fluido de viscosidad constante y el no homogéneo son diferentes, aun en el caso de desviaciones pequeñas. La razón matemática para esta diferencia radica en que las ecuaciones para ambos casos son diferentes. Términos adicionales en las ecuaciones de movimiento son requeridos para considerar variaciones espaciales de la viscosidad. Utilizando la ecuación constitutiva para el tensor de esfuerzos, la ecuación de momento puede escribirse como

$$\nabla p = \mu(\mathbf{r}) \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \mu \cdot \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t \right], \quad (6.10)$$

donde los gradientes de la viscosidad dan origen a nuevos términos en las ecuaciones de movimiento. Es importante notar que los gradientes de la viscosidad son multiplicados por gradientes de la velocidad. Si la velocidad es una función decreciente de la posición, el laplaciano decrecerá más rápido que el gradiente de la velocidad, lo que implica que aun cuando los gradientes de viscosidad sean pequeños, el término adicional puede ser importante a grandes distancias. Es también importante notar que, aun cuando el orden de la ecuación diferencial no es afectado, el hecho de depender en las primeras derivadas de la velocidad puede traer nuevos fenómenos comparables con los de un oscilador mecánico simple, cuando resistencias y fuerzas externas son aplicadas. Estas complejidades matemáticas serán más claras cuando analicemos algunos ejemplos.

Las dependencias funcionales generales de la viscosidad son difíciles de manejar debido a la complejidad introducida en las ecuaciones. Sin embargo, las dependencias especiales darán ciertos comportamientos útiles para entender la física detrás de fluidos no homogéneos. Las funciones periódicas permitirán utilizar herramientas fuertes en la solución de las ecuaciones. Aun cuando las suspensiones periódicas pueden ser difíciles de manejar experimentalmente, el análisis puede ser llevado más lejos analíticamente y puede obtenerse un mayor entendimiento. Del resultado de los sistemas periódicos, pueden ser obtenidas algunas conclusiones para el caso general. En algunos casos, las dependencias generales pueden ser analizadas.

CAPÍTULO 7.

FLUJOS UNIDIMENSIONALES.

FLUJOS UNIDIMENSIONALES.

Este capítulo está dedicado a analizar flujos simples donde la viscosidad es una función de la posición, variando en la dirección perpendicular al flujo. Los problemas presentados en esta sección son unidimensionales en el sentido de que sólo hay una componente del campo de la velocidad que depende de una sola variable. La importancia de la solución de estos ejemplos simples radica en que son soluciones analíticas. La solución de estas ecuaciones involucra ecuaciones diferenciales ordinarias, sujetas a las condiciones de frontera pertinentes.

FLUJO ENTRE CAPAS PARALELAS.

Como un primer ejemplo de flujo unidimensional, consideremos el flujo entre placas paralelas. Un sistema cartesiano de coordenadas es escogido de tal manera que el eje z es perpendicular a las placas y el eje x es paralelo al flujo. Las placas están separadas una distancia h y la placa superior se mueve con velocidad constante U respecto a la placa inferior. Adicionalmente, un gradiente de presión constante actúa sobre el fluido en la dirección x . La geometría del problema está ilustrada en la figura 7.1.

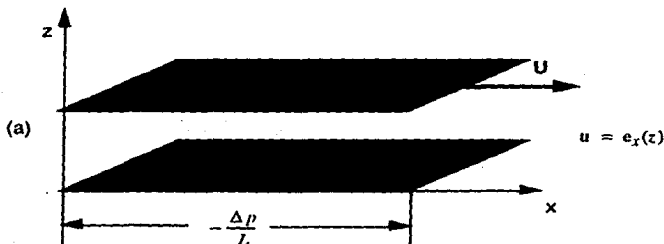


Figura 7.1 Geometría del flujo entre placas paralelas.

De acuerdo con la suposición de estado estacionario para la concentración de partículas, la viscosidad debe de ser constante a lo largo de las líneas de corriente. En este caso, la viscosidad puede ser una función arbitraria de z , que es perpendicular a la dirección de flujo:

$$\mu = \mu(z) = \mu_0 \mu_z(z); \quad (7.1)$$

donde μ_0 es una viscosidad característica y $\mu_z(z)$ es una función arbitraria de z .

Debido a la simetría, suponemos que sólo existe la componente x del campo de velocidad y sólo depende de z :

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_x u_x(z); \quad (7.2)$$

que satisface la ecuación de movimiento:

$$\frac{d}{dz} \left(\mu_0 \mu_z(z) \frac{du_x}{dz} \right) = \frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L} = \text{const}; \quad (7.3)$$

y la condición de frontera:

$$\begin{aligned} u_x(z=0) &= 0, \\ u_x(z=h) &= U. \end{aligned} \quad (7.4)$$

La ecuación de continuidad es idénticamente satisfecha. La solución de la ecuación de movimiento se obtiene fácilmente integrando directamente

$$u_x(z) = \int_0^z \frac{\Delta p}{L} \frac{z' + C_0}{\mu_0 \mu_z(z')} dz' + C_1 \quad (7.5)$$

donde C_0 y C_1 son constantes de integración que serán determinadas por las condiciones de frontera. Aplicando las condiciones de frontera, obtenemos:

$$u_x(z=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad (7.6)$$

$$u_x(z=h) = U \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{U - \frac{\Delta p}{L \mu_0} \int_0^h \frac{z'}{\mu_z(z')} dz'}{\frac{1}{\mu_0} \int_0^h \frac{1}{\mu_z(z')} dz'} \quad (7.7)$$

El campo de velocidad toma la forma:

$$u_x(z) = \frac{\Delta p}{L} \left[\int_0^z \frac{z' dz'}{\mu_0 \mu_z(z')} - \frac{\int_0^h \frac{z' dz'}{\mu_z(z')}}{\int_0^h \frac{1}{\mu_z(z')} dz'} \int_0^z \frac{dz'}{\mu_0 \mu_z(z')} \right] + U \int_0^z \frac{dz'}{\mu_z(z')} + \frac{h}{\int_0^h \frac{1}{\mu_z(z')} dz'} \quad (7.8)$$

donde se aprecia con claridad que el efecto de una viscosidad no constante modifica el campo de velocidad. Puede observarse que tanto el flujo producido por el gradiente externo de presión como el producido por el deslizamiento de la placa superior son afectados por la viscosidad no constante.

El límite cuando la viscosidad se hace constante es regular y la solución homogénea es recuperada. El análisis perturbativo puede ser aplicado suponiendo que la viscosidad es de la forma

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_z(z)} = \frac{1}{\mu_0} (1 + \varepsilon f(z)) \quad (7.9)$$

donde $\varepsilon \ll 1$ es el parámetro de perturbación y $f(z)$ es de orden uno. Su sustitución en la expresión para el campo de velocidades conduce a

$$\begin{aligned} u_x(z) &= \int_0^z \frac{\Delta p z' + C_0}{\mu_0 \mu_z(z')} dz' = \int_0^z \left[\frac{\Delta p}{L} z' + C_0 \right] \frac{1}{\mu_0} (1 + \varepsilon f(z)) dz' = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_0^z \left[\frac{\Delta p}{L} z' + C_0 \right] dz' + \frac{\varepsilon}{\mu_0} \int_0^z \left[\frac{\Delta p}{L} z' + C_0 \right] f(z) dz' = \\ &= \frac{\Delta p}{2L\mu_0} z^2 + \frac{C_0 U}{\mu_0 h} z + \frac{\varepsilon}{\mu_0} \int_0^z \left[\frac{\Delta p}{L} z' + C_0 \right] f(z) dz' \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{2L\mu_0} z^2 + \frac{C_0' U}{\mu_0 h} z = \frac{\Delta p}{2L\mu_0} z(z-h) + \frac{U}{h} z ; \quad (7.10) \end{aligned}$$

donde

$$C_0' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{U - \frac{\Delta p}{L\mu_0} \int_0^h z' (1 + \varepsilon f(z)) dz'}{\frac{1}{\mu_0} \int_0^h (1 + \varepsilon f(z)) dz'} = \frac{U - \frac{\Delta p}{2L\mu_0} h^2}{\frac{1}{\mu_0} h} \quad (7.11)$$

La fuerza sobre la placa superior, por unidad de longitud, por unidad de ancho, necesaria para mantener el movimiento estacionario es:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x &= \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dx = \frac{1}{L} \int_0^L \mu_0 \mu(z) \left. \frac{du_x}{dz} \right|_{z=h} dx = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\Delta p}{L} h + C_0 \right) dx = \\ &= \frac{\Delta p}{L} h + \frac{1}{L} \int_0^L C_0 dx = \frac{\Delta p}{L} h + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{U - \frac{\Delta p}{L\mu_0} \int_0^h z' \mu_z(z') dz'}{\frac{1}{\mu_0} \int_0^h \frac{1}{\mu_z(z')} dz'} dx = \\ &= \frac{\mu_0 U}{h \int_0^h \frac{1}{\mu_z(z')} dz'} + \frac{\Delta p}{L} h - \frac{\frac{\Delta p}{L} \int_0^h \frac{z' dz'}{\mu_z(z')}}{\int_0^h \frac{dz'}{\mu_z(z')}} \quad (7.12) \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (7.9) es fácil obtener el siguiente límite para el caso newtoniano:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x \rightarrow \frac{\mu_0 U}{h} + \frac{\Delta p h}{2L}, \text{ a medida que } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.13)$$

A continuación analizaremos un ejemplo específico y separaremos las dos contribuciones. El flujo producido por el desplazamiento a velocidad constante de la placa superior que da lugar a un perfil de velocidad lineal y el flujo producido por un gradiente de presión constante. Como ejemplo, supondremos que la viscosidad varía linealmente con la altura z de la forma:

$$\mu(z) = \mu_0 \mu_z(z) = \mu_0 (1 + az). \quad (7.14)$$

Dicha viscosidad se obtendría para un gradiente de concentración constante que pudiera ser originado por algún tipo de sedimentación. Hasta cierto punto, pudiera representar el agua de mar debido a la concentración de sales marinas. El parámetro $1/a$ define una longitud característica para cambios en los valores de la viscosidad. La diferencia en la viscosidad entre las placas inferior y superior es de $\Delta\mu = \mu_0 ah$. Para asegurar que la viscosidad es siempre positiva, debemos pedir que:

$$1 + az > 0 \text{ para } 0 < z < h \Rightarrow a > -\frac{1}{h}. \quad (7.15)$$

PLACA SUPERIOR MOVIENDOSE CON VELOCIDAD CONSTANTE.

El perfil de velocidades se convierte en:

$$u_x(z) = \frac{U \int_0^z \frac{dz'}{\mu_z(z')}}{\int_0^h \frac{1}{\mu_z(z')} dz'} = \frac{U \frac{1}{a} \ln(1+az)}{\frac{1}{a} \ln(1+ah)} = \frac{U \ln(1+az)}{\ln(1+ah)}. \quad (7.16)$$

Aplicando la regla de L'Hôpital, cuando a tiende a cero, se recupera fácilmente el perfil lineal de velocidad. La siguiente gráfica muestra esquemáticamente el efecto de la viscosidad no constante.

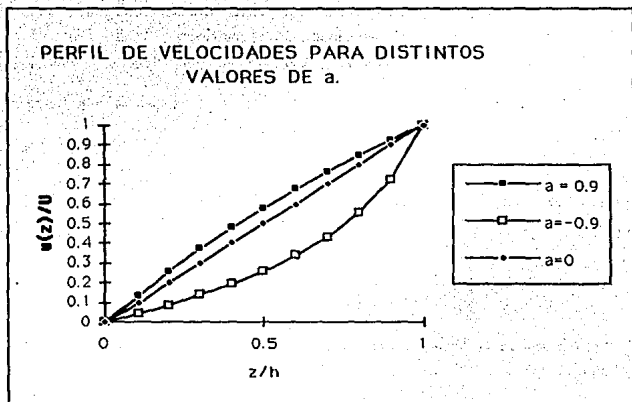
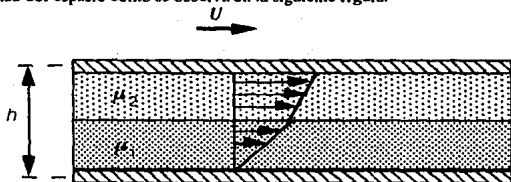


Figura 7.2. En esta gráfica se aprecia cómo el perfil de velocidades deja de ser lineal cuando la viscosidad deja de ser constante. Sin embargo, las condiciones de frontera siguen siendo válidas y el fluido se adhiere a ambas placas.

Consideremos ahora el siguiente ejemplo. Un fluido estratificado compuesto por dos fluidos, de viscosidades μ_1 y μ_2 , se coloca entre placas paralelas. Cada fluido ocupa la mitad del espacio como se observa en la siguiente figura.



La placa superior se desplaza con velocidad U constante respecto de la inferior. La solución de las ecuaciones indica perfiles lineales para ambos fluidos. Al aplicar las condiciones de frontera de adherencia del fluido a las placas y el hecho de que en la superficie de separación los esfuerzos son continuos de tal manera que la superficie

62 Fluidos No Homogéneos

permanece plana, obtenemos la velocidad de la superficie que separa ambos fluidos. El balance entre dichas fuerzas define la velocidad u de la superficie:

$$\mu_1 \frac{u}{h/2} = \mu_2 \frac{U-u}{h/2}, \quad (7.17)$$

donde u es la velocidad de la superficie y h es la distancia de separación entre las placas. De aquí, la velocidad de la superficie puede ser despejada

$$u = U \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right), \quad (7.18)$$

que puede ser escrita utilizando la diferencia $\Delta\mu = \mu_2 - \mu_1$ entre ambas viscosidades como

$$u = U \left(\frac{1}{2 - \frac{\Delta\mu}{\mu_2}} \right) = \frac{U}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta\mu}{2\mu_2}} \right) = \frac{U}{2} \left(1 + \frac{\Delta\mu}{2\mu_2} + \dots \right). \quad (7.19)$$

Si la viscosidad fuera la misma en ambos fluidos, obtendríamos el resultado para un fluido homogéneo donde la velocidad en el centro es

$$u = \frac{U}{2}. \quad (7.20)$$

Si analizamos el resultado del ejemplo anterior (7.14), observamos que la velocidad en el punto medio entre las placas está dada por la fórmula

$$\begin{aligned} u_x(z = h/2) &= \frac{U \ln(1+ah/2)}{\ln(1+ah)} = U \frac{az - 1/2 (az)^2 + \dots}{ah - 1/2 (ah)^2 + \dots} = \\ &= \frac{U}{2} \frac{1 - \frac{ah}{4} + \dots}{1 - 1/2 (ah) + \dots} = \frac{U}{2} \left(1 - \frac{ah}{4} + \dots \right). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Para hacer una analogía entre ambos ejemplos, dividamos el fluido con viscosidad dada por la ecuación (7.12) en dos partes, a semejanza con el fluido estratificado. Tomemos como viscosidad promedio la que se encuentra a la mitad en cada parte del fluido, esto es,

$$\mu_1^c = \mu(z = h/4) = \mu_0(1 + ah/4), \quad (7.22)$$

y

$$\mu_2^c = \mu(z = 3h/4) = \mu_0(1 + 3ah/4), \quad (7.23)$$

de donde la diferencia de viscosidades es

$$\Delta\mu^c = \mu_2^c - \mu_1^c = \mu_0 \frac{ah}{2}. \quad (7.24)$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta\mu^c}{2\mu_2^c} = \frac{\mu_0 \frac{ah}{2}}{2\mu_0(1 + 3ah/4)} = \frac{\frac{ah}{4}}{1 + 3ah/4} = \frac{ah}{4} - \frac{3(ah)^2}{16} + \dots \quad (7.25)$$

A primer orden en ah , la velocidad en el punto medio (7.19) puede entonces escribirse como:

$$u_x(z = h/2) = \frac{U}{2} \left(1 + \frac{\Delta\mu^c}{2\mu_0^2} + \dots \right), \quad (7.26)$$

esto es, a primer orden en ah , este resultado es idéntico al resultado para el fluido estratificado (7.17) compuesto por dos fluidos. Este proceso puede repetirse incluyendo un fluido estratificado de cuatro componentes y dividiendo en igual número de partes al fluido con viscosidad no homogénea (7.12). En el límite de un número infinito de subdivisiones, ambos fluidos serán idénticos al igual que sus campos de velocidad.

Finalmente, calculemos el gasto por unidad de longitud en la dirección y . El gasto está dado por la expresión:

$$Q = \int_0^h u_x(z') dz' = U \left(\frac{1+ah}{a} - \frac{h}{\ln(1+ah)} \right) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{Uh}{2}. \quad (7.27)$$

Para obtener el límite cuando a tiende a cero es necesario aplicar la regla de L'Hôpital.

GRADIENTE DE PRESIÓN CONSTANTE.

El perfil de velocidades originado por un gradiente externo de presión es cuadrático. Utilizando la misma función lineal de viscosidad y considerando sólo el flujo por gradiente de presión, el campo de velocidades es:

$$\begin{aligned} u_x(z) &= \frac{\Delta p}{L} \left[\int_0^z \frac{z' dz'}{\mu_0 \mu_z(z')} - \frac{\int_0^h \frac{z' dz'}{\mu_z(z')}}{\int_0^h \frac{1}{\mu_z(z')} dz'} \int_0^z \frac{dz'}{\mu_0 \mu_z(z')} \right] = \\ &= \frac{\Delta p}{L \mu_0} \left[\int_0^z \frac{z' dz'}{1+az'} - \frac{\int_0^h \frac{z' dz'}{1+az'}}{\int_0^h \frac{1}{1+az'} dz'} \int_0^z \frac{dz'}{1+az'} \right] = \\ &= \frac{\Delta p}{L \mu_0} \left[\frac{z}{a} - \frac{\ln(1+az)}{a^2} - \frac{\frac{h}{a} - \frac{\ln(1+ah)}{a^2}}{\frac{1}{a} \ln(1+ah)} \frac{1}{a} \ln(1+az) \right] = \\ &= \frac{\Delta p}{L \mu_0} \left[\frac{z}{a} - \frac{h \ln(1+az)}{a \ln(1+ah)} \right]. \end{aligned} \quad (7.28)$$

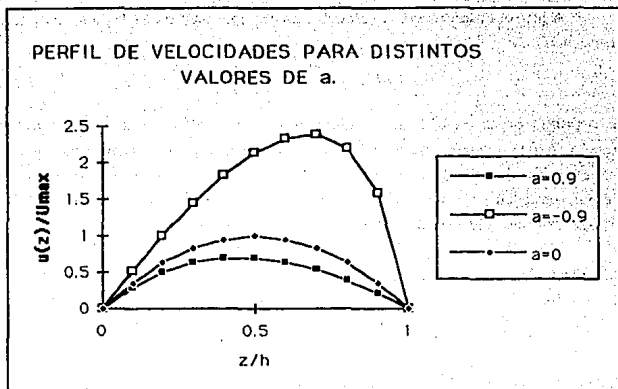


Figura 7.3. La figura muestra el perfil de velocidades para varios valores del parámetro a . Es posible apreciar cómo el flujo deja de ser simétrico para valores de a distintos de cero.

Aplicando la regla de L'Hôpital es posible encontrar el límite cuando a tiende a cero y recuperar la solución:

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{L\mu_0} \left[\frac{z}{a} - \frac{h \ln(1+az)}{a \ln(1+ah)} \right] &= \frac{\Delta p}{L\mu_0} \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{z \ln(1+ah) - h \ln(1+az)}{a \ln(1+ah)} \right] \\
 &= \frac{\Delta p}{L\mu_0} \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{d}{da} (z \ln(1+ah) - h \ln(1+az))}{\frac{d}{da} (a \ln(1+ah))} \right] = \frac{\Delta p}{L\mu_0} \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{zh}{1+ah} - \frac{zh}{1+az}}{\ln(1+ah) + \frac{ah}{1+ah}} \right] \\
 &= \frac{\Delta p}{L\mu_0} \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{d}{da} \left(\frac{zh}{1+ah} - \frac{zh}{1+az} \right)}{\frac{d}{da} \left(\ln(1+ah) + \frac{ah}{1+ah} \right)} \right] = \frac{\Delta p}{L\mu_0} \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{-\frac{zh^2}{(1+ah)^2} + \frac{z^2 h}{(1+az)^2}}{\frac{2h}{1+ah} - \frac{ah^2}{(1+ah)^2}} \right] \\
 &= \frac{\Delta p}{L\mu_0} \left[\frac{\lim_{a \rightarrow 0} \left(-\frac{zh^2}{(1+ah)^2} + \frac{z^2 h}{(1+az)^2} \right)}{\lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{2h}{1+ah} - \frac{ah^2}{(1+ah)^2} \right)} \right] = \frac{\Delta p}{L\mu_0} \left[\frac{z^2 h - zh^2}{2h} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta p}{2L\mu_0} z(z-h). \quad (7.29)$$

La gráfica (7.3) muestra la contribución al perfil de velocidades para el caso de gradiente de presión externo para diferentes valores de a . Finalmente, el gasto Q para este flujo está dado por la expresión:

$$Q = \int_0^h u_x(z') dz' = \frac{\Delta p}{L\mu_0} \left[\frac{h^2}{2a} - \frac{h}{a} \left(\frac{1+ah}{a} - \frac{h}{\ln(1+ah)} \right) \right] \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{\Delta p h^3}{12L\mu_0}. \quad (7.30)$$

COMPARACION ENTRE AMBOS FLUIOS.

Para el ejemplo analizado (7.14), la fuerza sobre la placa superior se convierte en:

$$\begin{aligned} F \cdot e_x &= \frac{\mu_0 U}{\int_0^h \frac{1}{\mu(z')} dz'} + \frac{\Delta p}{L} \left[h - \frac{\int_0^h \frac{z' dz'}{\mu(z')}}{\int_0^h \frac{dz'}{\mu(z')}} \right] = \frac{\mu_0 U}{\int_0^h \frac{1}{\mu(z')} dz'} + \frac{\Delta p}{L} \left[h - \frac{\int_0^h \frac{z' dz'}{(1+az')}}{\int_0^h \frac{dz'}{(1+az')}} \right] = \\ &= \frac{a\mu_0 U}{\ln(1+ah)} + \frac{\Delta p}{L} \left[h - \frac{\frac{h}{a} - \frac{1}{a^2} \ln(1+ah)}{\frac{1}{a} \ln(1+ah)} \right] = \\ &= \left(\frac{ah}{\ln(1+ah)} \right) \frac{\mu_0 U}{h} + 2 \left(1 - \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{h a^2} \ln(1+ah)}{\frac{1}{a} \ln(1+ah)} \right) \frac{\Delta p h}{2L}, \quad (7.31) \end{aligned}$$

donde es posible observar los efectos introducidos por la viscosidad no homogénea.

Si realizáramos un experimento donde la viscosidad varía linealmente como en (7.12) y la fuerza motriz fuera el desplazamiento de la placa superior, podríamos obtener una viscosidad efectiva dada por el término:

$$\mu_{ef} = \frac{\mu_{a \neq 0}}{\mu_{a=0}} = \left(\frac{ah}{\ln(1+ah)} \right). \quad (7.32)$$

La viscosidad efectiva se obtiene del cociente de la fuerza aplicada sobre la placa superior para el caso no homogéneo dividida por la fuerza en el caso newtoniano. De la misma manera, si la fuerza motriz fuera el gradiente externo de presión, la viscosidad efectiva sería:

$$\mu_{ef} = \frac{\mu_{a \neq 0}}{\mu_{a=0}} = 2 \left(1 - \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{h a^2} \ln(1+ah)}{\frac{1}{a} \ln(1+ah)} \right), \quad (7.33)$$

que es diferente a la anterior.

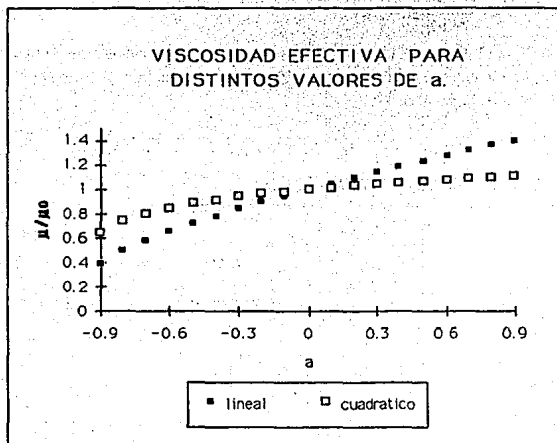


Figura 7.4. En esta gráfica se presentan las viscosidades efectivas para los casos donde la fuerza motriz es el desplazamiento de la placa superior (lineal) y un gradiente de presión externo (cuadrático). Para el mismo valor de α , esto es, el mismo perfil de velocidad, la viscosidad efectiva para el caso lineal se ve más afectado que el cuadrático.

La figura 7.4 presenta gráficamente las viscosidades efectivas para ambos flujos como función del parámetro α . Se observa que para un mismo valor del parámetro α , esto es, para la misma distribución de la concentración, la viscosidad efectiva es diferente. Las mediciones de viscosidad en un laboratorio recurren a este tipo de flujos donde se miden parámetros como la fuerza necesaria para mantener la placa superior en movimiento constante o la diferencia de presión necesaria para mantener el flujo estacionario. Si la viscosidad efectiva se define en términos de la viscosidad para el caso del fluido newtoniano, los valores reportados dependerían del tipo de flujo utilizado para su medición. Una conclusión similar se obtiene al analizar el gasto para ambos flujos.

CAPÍTULO 8.

FLUJO EN UN CILINDRO CIRCULAR.

FLUJO EN UN CILINDRO CIRCULAR.

Como segundo ejemplo, consideraremos el flujo en un cilindro circular de radio R . La fuerza motriz del flujo es un gradiente de presión constante actuando en la dirección z . La geometría del problema se muestra en la figura 8.1.

La viscosidad puede tomarse como una función arbitraria de la distancia radial ρ

$$\mu = \mu(\rho) = \mu_0 \mu_\rho(\rho), \quad (8.1)$$

68 Fluidos No Homogéneos

como es requerido por la suposición de estado estacionario y la simetría del problema; el campo de velocidad se supone de la forma

$$\mathbf{u} = e_z u_z(\rho) \quad (8.2)$$

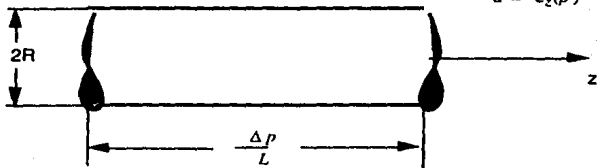


Figura 8.1. Flujo debido a un gradiente de presión dentro de un cilindro circular de radio R . La viscosidad cambia en la dirección radial modificando el perfil de velocidad.

La ecuación de continuidad es idénticamente satisfecha y la ecuación de momento para el flujo originado por el gradiente de presión es

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \tau_{\rho z}) ; \quad (8.3)$$

donde $\tau_{\rho z}$ está dado por

$$\tau_{\rho z} = \mu_0 \mu(\rho) \frac{du_z}{d\rho} \quad (8.4)$$

que conduce a la ecuación

$$-\frac{\Delta p}{L} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \mu_0 \mu(\rho) \frac{du_z}{d\rho} \right) \quad (8.5)$$

que debe ser resuelta sujeta a las condiciones de frontera:

$$u_z = 0, \quad \text{en } \rho = R$$

$$u_z \text{ es finito para todos los valores de } \rho \quad (8.6)$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden para $du_z/d\rho$ con solución dada por

$$\frac{du_z}{d\rho} = \frac{C_0}{\rho \mu_0 \mu(\rho)} + \left(-\frac{\Delta p}{2L} \right) \frac{\rho}{\mu_0 \mu(\rho)} ; \quad (8.7)$$

pidiendo que la velocidad sea finita en todos lados (en particular en $\rho = 0$), la constante de integración C_0 debe ser tomada como cero. Una segunda integración da el campo de velocidad

$$u_z(\rho) = C_1 + \left(-\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_0^\rho \frac{\rho' d\rho'}{\mu_\rho(\rho')} \quad (8.8)$$

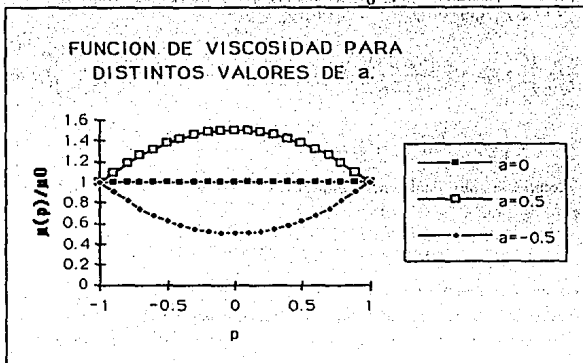


Figura 8.2. La gráfica muestra la función de viscosidad para valores positivos y negativos del parámetro a . Ambos son perfiles parabólicos.

Las condiciones de frontera sobre la superficie del cilindro fijan el valor de C_1

$$C_1 = \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{\mu_\rho(\rho')} \quad (8.9)$$

que conduce a la solución

$$\begin{aligned} u_z(\rho) &= \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{\mu_\rho(\rho')} + \left(-\frac{\Delta p}{2L} \right) \int_0^\rho \frac{\rho' d\rho'}{\mu_\rho(\rho')} \\ &= \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_\rho^R \frac{\rho' d\rho'}{\mu_\rho(\rho')} \end{aligned} \quad (8.10)$$

El límite de viscosidad constante es regular y el campo de velocidad se convierte regularmente en la solución homogénea. Si escribimos la serie perturbativa para la viscosidad

$$\mu_\rho(\rho) = 1 + \varepsilon f_1(\rho) + \varepsilon^2 f_2(\rho) + \dots \quad (8.11)$$

donde $\varepsilon \ll 1$ es el parámetro de perturbación, su sustitución en la solución conduce a

$$\begin{aligned}
 u_z(\rho) &= \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_{\rho}^R \frac{1}{\mu_{\rho}(\rho')} \rho' d\rho' = \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_{\rho}^R [1 - \varepsilon f_1(\rho) + \dots] \rho' d\rho' = \\
 &= \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_{\rho}^R \rho' d\rho' - \varepsilon \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_{\rho}^R f_1(\rho) \rho' d\rho' + \dots \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_{\rho}^R \rho' d\rho' = \\
 &= \left(\frac{\Delta p}{4L\mu_0} \right) (R^2 - \rho^2). \quad (8.12)
 \end{aligned}$$

Como ejemplo, analizamos el siguiente caso donde la viscosidad no es constante:

$$\mu(\rho) = \mu_0 \left[1 + a \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) \right], \quad (8.13)$$

que se muestra esquemáticamente en la figura 8.2. El flujo de una suspensión de partículas neutralmente suspendidas en un tubo circular podría conducir a fenómenos de migración obteniéndose una concentración no homogénea. Cerca de las paredes es donde se tienen los mayores gradientes de velocidad y en consecuencia donde existe la mayor disipación de energía mecánica. Debido a la simetría, suponemos que una distribución parabólica podría indicar algunos de los efectos que serían detectados en el caso de una distribución de partículas no homogéneas. Con este tipo de distribución podemos diferenciar los valores de la viscosidad entre el centro del tubo y cerca de las paredes. El valor de a indica el incremento porcentual de la viscosidad en el centro del tubo. Potencias mayores para la concentración podrían conducir a distribuciones donde la concentración es prácticamente homogénea en el interior excepto cerca de las paredes del tubo.

Sustituyendo en la solución para la velocidad, obtenemos la expresión:

$$\begin{aligned}
 u_z(\rho) &= \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_{\rho}^R \frac{\rho' d\rho'}{\mu_{\rho}(\rho')} = \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_{\rho}^R \frac{\rho' d\rho'}{\mu_0 \left[1 + a \left(1 - \frac{\rho'^2}{R^2} \right) \right]} = \\
 &= \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \left(-\frac{R^2}{2a} \right) \ln \left[1 + a \left(1 - \frac{\rho'^2}{R^2} \right) \right]_{\rho}^R = \left(\frac{\Delta p R^2}{4aL\mu_0} \right) \ln \left[1 + a \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) \right] \quad (8.14)
 \end{aligned}$$

La figura 8.3 muestra los perfiles de velocidad para las funciones de viscosidad mostradas en la figura 8.2. La fuerza por unidad de longitud actuando sobre la superficie del cilindro está dada por la expresión

$$\begin{aligned}
 E_z &= \mathbf{e}_z \cdot \int \underline{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \mathbf{e}_z \cdot \int \left[(\hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_\rho + \hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_z) \mu_0 \mu_\rho(\rho) \frac{du_z}{d\rho} \right] \cdot \mathbf{e}_\rho \, dS = \\
 &= \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\mu_0 \mu_\rho(\rho) \frac{du_z}{d\rho} \right]_{\rho=R} \rho' \, d\phi \, dz = \\
 &= 2\pi \left[\mu_0 \mu_\rho(\rho) \frac{du_z}{d\rho} \right]_{\rho=R} = 2\pi \left[-\frac{\Delta p}{2L} R^2 \right] = \\
 &= -\frac{\pi \Delta p}{L} R^2 ; \tag{8.15}
 \end{aligned}$$

que es independiente de la viscosidad, como se especificó al inicio del problema.

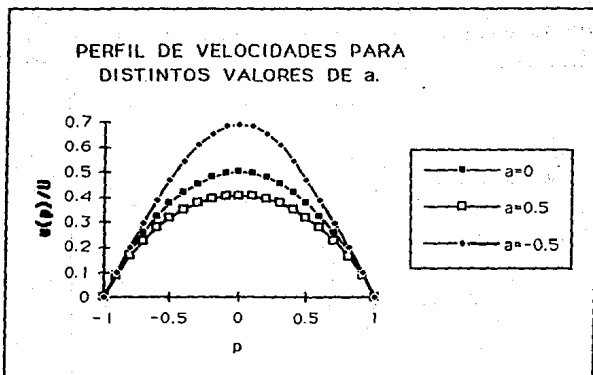


Figura 8.3. Los perfiles de velocidad mantienen su simetría pero dejan de ser perfiles parabólicos.

Si consideramos el flujo total, obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^R u_z(\rho) \rho \, d\rho \, d\theta = \left(\frac{\Delta p R^2}{4 a L \mu_0} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^R \ln \left[1 + a \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) \right] \rho \, d\rho \, d\theta = \\
 &= \left(\frac{2\pi \Delta p R^2}{4 a L \mu_0} \right) \int_0^R \ln \left[1 + a \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) \right] \rho \, d\rho =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{2\pi\Delta p R^2}{4aL\mu_0} \right) \frac{R^2}{a} \int_0^{a^{1/2}} \ln(1+a-y^2) y dy = \\
 &= \left(\frac{2\pi\Delta p R^2}{4aL\mu_0} \right) \frac{R^2}{a} \frac{1}{2} \left\{ -(1+a-y^2) \ln(1+a-y^2) - y^2 \right\}_{y=0}^{y=a^{1/2}} = \\
 &= \left(\frac{2\pi\Delta p R^2}{4aL\mu_0} \right) \frac{R^2}{a} \frac{1}{2} \{-a + (1+a) \ln(1+a)\} = \\
 &= \left(\frac{2\pi\Delta p R^2}{4aL\mu_0} \right) \frac{R^2}{a} \frac{1}{2} \{(1+a) \ln(1+a) - a\} = \\
 &= \left(\frac{\pi\Delta p R^4}{8L\mu_0} \right) \frac{2}{a^2} \{(1+a) \ln(1+a) - a\} \quad (8.16)
 \end{aligned}$$

La gráfica 8.4 muestra el gasto Q como función del parámetro a .

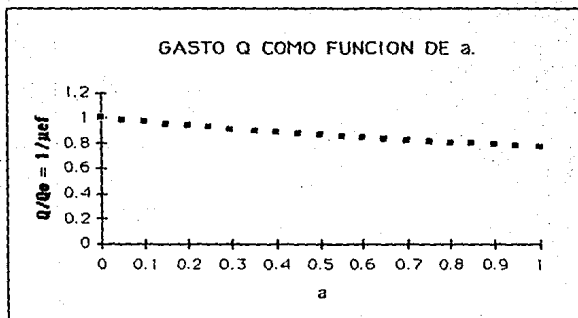


Figura 8.4. El gasto Q como función del parámetro a . Conforme a crece, la viscosidad promedio aumenta y el flujo disminuye. Como el flujo Q es inversamente proporcional a la viscosidad, la gráfica anterior puede interpretarse también como la gráfica de uno entre la viscosidad efectiva.

La disipación de energía mecánica Φ está dada por la expresión:

$$\Phi = \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}} = \mu_0 \mu(\rho) \left(\frac{\partial u_x}{\partial \rho} \right)^2 = \left(\frac{\Delta p}{L} \right)^2 \frac{\rho^2}{4\mu_0 \mu(\rho)} \quad (8.17)$$

Esta expresión debe ser integrada sobre la sección recta para obtener la disipación de energía mecánica por unidad de volumen. Puede inferirse que dependiendo de la función de viscosidad, la disipación de energía mecánica puede variar. Introduciendo una ecuación que relacione a la viscosidad con la concentración y utilizando técnicas de cálculo variacional es posible, en principio, encontrar la concentración que minimice la disipación de energía mecánica.

PROBLEMAS DE FUENTE Y SUMIDERO.

Otro ejemplo de problemas unidimensionales es el de fuente y sumidero para fluidos no acotados. Una fuente simple es un punto por donde sale y fluye un fluido uniformemente en todas direcciones (ver figura 8.5). El flujo total, sobre cualquier superficie cerrada conteniendo a la fuente, se denomina como la fuerza Q de la fuente. Las fuentes de fuerza Q negativa se denominan sumideros. El campo de velocidad está determinado por la condición cinemática de incompresibilidad y la simetría radial. La viscosidad puede ser tomada como una función arbitraria de la distancia radial a la fuente.

El campo de presión está determinado por la ecuación de momento y será función de la dependencia funcional de la viscosidad. La viscosidad se supone de la forma

$$\mu = \mu_0 \mu_r(r) \quad (8.17)$$

La componente radial de la ecuación de momento en coordenadas esféricas está dada por

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= \mu_0 \mu_r(r) \left[\nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} \right] + \mu_0 \frac{\partial \mu_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ &= \mu_0 \mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{2u_r}{r^2} \right] + \mu_0 \frac{\partial \mu_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (8.18) \end{aligned}$$

la sustitución del campo de velocidad conduce a una ecuación diferencial de primer orden para el campo de presión

$$\frac{dp}{dr} = -\mu_0 \frac{d\mu_r}{dr} \frac{Q}{2\pi r^3} \quad (8.19)$$

una integración directa da el campo de presión

$$p(r) = p_\infty + \mu_0 \int_r^\infty \frac{d\mu_r}{dr} \frac{Q}{2\pi r^3} dr \quad (8.20)$$

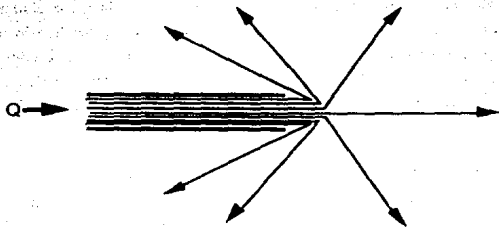


Figura 8.5. Una fuente es un punto por donde sale y fluye uniformemente un líquido en todas direcciones. El flujo total a través de cualquier superficie cerrada que contenga a la fuente es llamada la fuerza Q de la fuente. Fuentes de fuerza negativa son llamadas sumideros.

Debido a la simplicidad de la ecuación es posible considerar las ecuaciones completas estacionarias de Navier-Stokes

$$\rho_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mu_0 \mu_r \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 \nabla \mu_r \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*]; \quad (8.21)$$

la sustitución de la velocidad radial conduce a la ecuación

$$\rho_f \mu_r \frac{d u_r}{d r} = \frac{d p}{d r} - \mu_0 \frac{d \mu_r}{d r} \frac{Q}{2 \pi r^3}; \quad (8.22)$$

explícitamente

$$\frac{d p}{d r} = \rho_f \frac{Q^2}{8 \pi r^5} - \mu_0 \frac{d \mu_r}{d r} \frac{Q}{2 \pi r^3}, \quad (8.23)$$

que puede ser directamente integrada para dar el campo de presión

$$p(r) = p_\infty + \mu_0 \int_r^\infty \frac{d \mu_r}{d r'} \frac{Q}{2 \pi r'^3} dr' + \rho_f \int_r^\infty \frac{Q^2}{8 \pi r'^5} dr' \quad (8.24)$$

y efectuando la integral, el campo de presión se convierte en

$$p(r) = p_\infty - \frac{\rho_f Q^2}{32 \pi r^4} + \mu_0 \int_r^\infty \frac{d \mu_r}{d r'} \frac{Q}{2 \pi r'^3} dr' \quad (8.25)$$

Como ejemplo, podemos suponer que la viscosidad es una función de la forma:

$$\mu = \mu_0 \mu_r(r) = \mu_0 \left(1 + b \ln \left(\frac{1+2r}{1+r} \right) \right). \quad (8.26)$$

Se ha adimensionalizado la variable r de tal manera que $1 + br$ no tiene dimensiones. La siguiente figura muestra la función de viscosidad para varios valores del parámetro b . El caso homogéneo se obtiene cuando $b = 0$.

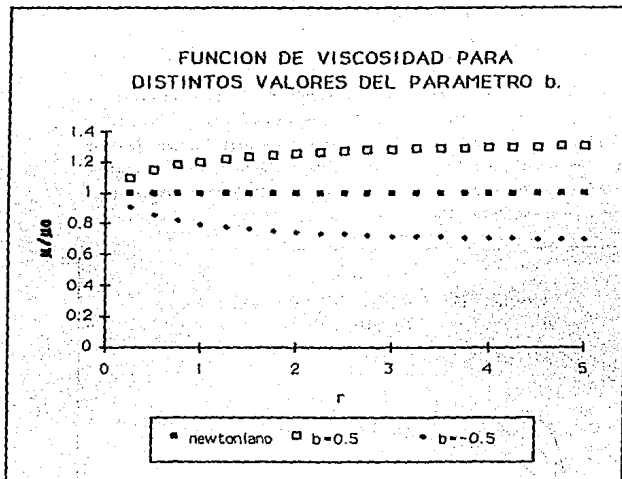


Figura 8.6. La figura muestra la función de viscosidad para varios valores del parámetro b . Los casos no homogéneos tienden asintóticamente a valores por encima y abajo del valor constante.

El campo de presión para esta función de viscosidad se convierte en:

$$\begin{aligned}
 p(r) &= p_{\infty} - \frac{\rho_j Q^2}{32\pi r^4} + \mu_0 \int_r^{\infty} \frac{d \left(1 + b \ln \left(\frac{1+2r'}{1+r'} \right) \right)}{dr'} \frac{Q}{2\pi r'^3} dr' \\
 &= p_{\infty} - \frac{\rho_j Q^2}{32\pi r^4} + \frac{\mu_0 b Q}{2\pi} \int_r^{\infty} \frac{dr'}{(1+3r'+2r'^2)r'^3} = \\
 &= p_{\infty} - \frac{\rho_j Q^2}{32\pi r^4} + \frac{\mu_0 b Q}{2\pi} \left[\frac{-7}{2} \ln \left(\frac{r'^2}{1+3r'+2r'^2} \right) + \frac{3}{r'} - \frac{1}{2r'^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{-9}{2} \left[\ln \left(\frac{1+2r^4}{1+r^4} \right) \right] \Bigg|_r^\infty - \\
 = p_\infty & - \frac{\rho_f Q^2}{32 \pi r^4} - \frac{\mu_0 b Q}{2\pi} \left[\frac{-7}{2} \ln \left(\frac{2r^2}{1+3r+2r^2} \right) + \frac{3}{r} - \frac{1}{2r^2} + \right. \\
 & \left. - \frac{9}{2} \left[\ln \left(\frac{1+2r^4}{2(1+r)} \right) \right] \right] \quad (8.27)
 \end{aligned}$$

El campo de presión puede apreciarse en la siguiente figura. Se puede observar que inicialmente el campo se ve modificado pero eventualmente converge al mismo valor que en el caso homogéneo. Esto se debe a que el término adicional en la ecuación depende de las derivadas de la función de viscosidad: esto es, no depende de los valores intrínsecos de la viscosidad y como en ambos casos no homogéneos tienden a valores constantes (aún cuando son diferentes), el campo de presión converge al mismo valor.

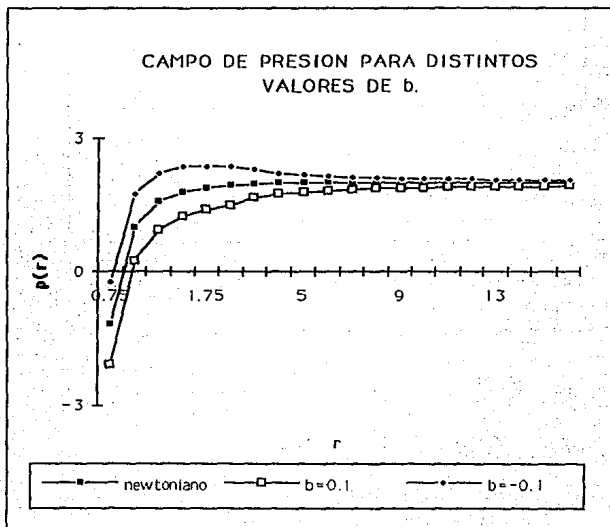


Figura 8.7. El campo de presión se ve modificado por cambios en el gradiente de la viscosidad pero finalmente convergen hacia el caso homogéneo.

CAPÍTULO 9.

ROTACIÓN DE UNA ESFERA.

ROTACIÓN DE UNA ESFERA.

El último ejemplo analizado en esta sección no es un flujo unidimensional pero su solución involucra ecuaciones diferenciales ordinarias. La descripción del problema es como sigue: una esfera de radio a está rotando con velocidad angular Ω constante inmersa en un fluido infinito. La viscosidad del fluido es una función arbitraria de la distancia radial medida desde el centro de la esfera. Un sistema de coordenadas esféricas es colocado de tal manera que su origen coincide con el centro de la esfera. El eje z es tomado paralelo a la velocidad angular de la esfera. La geometría puede ser visualizada en la figura 9.1

En este sistema de coordenadas, la viscosidad es una función arbitraria de la forma

$$\mu = \mu_0 \mu_r(r); \quad (9.1)$$

conduciendo a la correspondiente ecuación de movimiento

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (9.2)$$

$$\nabla p = \mu_0 \mu_r(r) \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 \nabla \mu_r(r) \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]; \quad (9.3)$$

que están sujetas a las siguientes condiciones de frontera

$$\mathbf{u} = \bar{\Omega} \times \mathbf{r} = \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = e_\phi \Omega r \sin \theta \quad \text{at } r = a$$

$$|\mathbf{u}| \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty$$

$$p \rightarrow p_\infty \quad \text{as } r \rightarrow \infty. \quad (9.4)$$

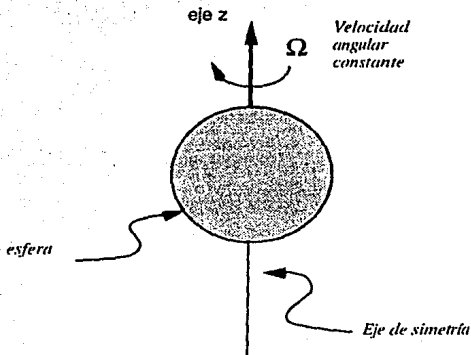


Figura 9.1. Esfera rotando con velocidad angular constante a lo largo del eje de simetría. El eje z de un sistema de coordenadas esféricas se coloca a lo largo del eje de simetría.

Debido a la simetría del flujo, suponemos que sólo la componente ϕ del campo de velocidad es diferente de cero

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\phi u_\phi(r, \theta); \quad (9.5)$$

la ecuación de continuidad es idénticamente satisfecha y la ecuación de momento se convierte en

$$\begin{aligned} \nabla p &= \mathbf{e}_\phi \mu_0 \mu_r(r) \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + \\ &+ \mu_0 \frac{d\mu_r}{dr} \mathbf{e}_r \cdot \left\{ (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_r) \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right] - (\mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\phi) \left[\frac{\cot \theta}{r} u_\phi \right] \right\} \\ &= \mathbf{e}_\phi \mu_0 \mu_r(r) \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + \mu_0 \frac{d\mu_r}{dr} \mathbf{e}_\phi \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right] \end{aligned} \quad (9.6)$$

que conduce a la conclusión de que la presión es constante en todo el fluido. La componente ϕ de la velocidad se puede reescribir como

$$\mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + \frac{d\mu_r}{dr} \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right] = 0. \quad (9.7)$$

Haciendo la sustitución

$$u_\phi(r, \theta) = U(r) \sin \theta \quad (9.8)$$

sugerida por las condiciones de frontera que debe satisfacer el campo de velocidad, la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} & \mu_r(r) \left[\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) + \frac{U}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{d \sin \theta}{d \theta} \right) - \frac{U}{r^2 \sin \theta} \right] + \\ & + \sin \theta \frac{d\mu_r}{dr} \left[\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right] = \\ = & \mu_r(r) \left[\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) + \frac{U}{r^2 \sin \theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \frac{U}{r^2 \sin \theta} \right] + \\ & + \sin \theta \frac{d\mu_r}{dr} \left[\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right] = \\ = & \mu_r(r) \left[\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) + \frac{U}{r^2 \sin \theta} (-2 \sin^2 \theta) \right] + \sin \theta \frac{d\mu_r}{dr} \left[\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right] = \\ = & \mu_r(r) \left[\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) - \frac{2U \sin \theta}{r^2} \right] + \sin \theta \frac{d\mu_r}{dr} \left[\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right] = 0. \quad (9.9) \end{aligned}$$

Dividiendo por $\sin \theta$, obtenemos la ecuación diferencial para $U(r)$

$$\mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) - \frac{2U}{r^2} \right] + \frac{d\mu_r}{dr} \left[\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right] = 0. \quad (9.10)$$

Haciendo la sustitución

$$U(r) = rW(r) \quad (9.11)$$

obtenemos una ecuación diferencial de primer orden para la derivada dW/dr

80 Fluidos No Homogéneos

$$\begin{aligned}
 & \mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(rW)}{dr} \right) - \frac{2W}{r} \right] + \frac{d\mu_r}{dr} \left[\frac{d(rW)}{dr} - W \right] = \\
 & = \mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dW}{dr} + r^2 W \right) - \frac{2W}{r} \right] + \frac{d\mu_r}{dr} \left[r \frac{dW}{dr} + W - W \right] = \\
 & = \mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \left(3r^2 \frac{dW}{dr} + 4r^2 \frac{dW}{dr} + 2rW \right) - \frac{2W}{r} \right] + \frac{d\mu_r}{dr} r \frac{dW}{dr} = \\
 & = \mu_r(r) \left(r \frac{d^2 W}{dr^2} + 4 \frac{dW}{dr} \right) + \frac{d\mu_r}{dr} r \frac{dW}{dr} = \\
 & = \mu_r(r) r \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{dW}{dr} \left(\frac{d\mu_r}{dr} r + 4\mu_r(r) \right) = 0. \tag{9.12}
 \end{aligned}$$

Dividiendo por $\mu_0 \mu_r(r) r$ se convierte en

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{dW}{dr} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{d\mu_r}{dr} + \frac{4}{r} \right) = 0. \tag{9.13}$$

Una primera integral da como resultado

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dr} &= C_0 \exp \left[- \int \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{d\mu_r}{dr'} + \frac{4}{r'} \right) dr' \right] = \\
 &= C_0 \exp \left[- \ln(\mu_r r^4) \right] = \frac{C_0}{\mu_r r^4}; \tag{9.14}
 \end{aligned}$$

una segunda integral da como resultado

$$W(r) = C_\infty - \int_r^\infty \frac{C_0 dr'}{\mu_r r'^4}. \tag{9.15}$$

Con esta solución, el campo de velocidad se convierte en

$$u_\phi(r, \theta) = r \sin \theta W(r) = C_\infty r \sin \theta - r \sin \theta \int_r^\infty \frac{C_0 dr'}{\mu_r r'^4}, \tag{9.16}$$

donde las dos constantes de integración son evaluadas usando las condiciones de frontera:

$$|u| \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty \Rightarrow C_\infty = 0$$

$$u = e_{\phi} \Omega r \sin \theta \quad \text{at } r = a \Rightarrow -C_0 \int_r^{\infty} \frac{dr'}{\mu_r r'^4} = \Omega ; \quad (9.17)$$

lo cual implica

$$C_0 = - \frac{\Omega}{\int_a^{\infty} \frac{dr'}{\mu_r r'^4}} \quad (9.18)$$

La sustitución de la constante de integración conduce a la solución para el campo de velocidad en términos de la dependencia arbitraria de la viscosidad

$$u_{\phi}(r, \theta) = \frac{\Omega r \sin \theta \int_r^{\infty} \frac{dr'}{\mu_r r'^4}}{\int_a^{\infty} \frac{dr'}{\mu_r r'^4}} \quad (9.19)$$

El campo de velocidades se recupera al hacer un análisis perturbativo. Suponiendo que la viscosidad es de la forma:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r(r)} = \frac{1}{\mu_0} (1 + \varepsilon f(r) + \dots) \quad (9.20)$$

El campo de velocidades se convierte en:

$$\begin{aligned} u_{\phi}(r, \theta) &= \frac{\Omega r \sin \theta \int_r^{\infty} \frac{dr'}{\mu_r r'^4}}{\int_a^{\infty} \frac{dr'}{\mu_r r'^4}} = \frac{\Omega r \sin \theta \int_r^{\infty} \frac{1}{\mu_0} (1 + \varepsilon f(r) + \dots) \frac{dr'}{r'^4}}{\int_a^{\infty} \frac{1}{\mu_0} (1 + \varepsilon f(r) + \dots) \frac{dr'}{r'^4}} = \\ &= \frac{\Omega r \sin \theta \left[\int_r^{\infty} \frac{1}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} + \varepsilon \int_r^{\infty} \frac{f(r)}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} + \dots \right]}{\int_a^{\infty} \frac{1}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} + \varepsilon \int_a^{\infty} \frac{f(r)}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} + \dots} = \\ &= \frac{\Omega r \sin \theta \left[\frac{1}{3r^3} + \varepsilon \int_r^{\infty} \frac{f(r)}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} + \dots \right]}{\frac{1}{3a^3} + \varepsilon \int_a^{\infty} \frac{f(r)}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} + \dots} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Omega r \sin \theta \left[\frac{1}{3r^3} \right]}{\frac{1}{3a^3} + \varepsilon \int_a^{\infty} \frac{f(r)}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} + \dots} + \frac{\Omega r \sin \theta \left[\varepsilon \int_r^{\infty} \frac{f(r)}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} \right]}{\frac{1}{3a^3} + \varepsilon \int_a^{\infty} \frac{f(r)}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} + \dots} + \dots = \\
 &= \frac{\Omega a^3 \sin \theta}{r^2} \left(1 - \varepsilon 3a^3 \int_a^{\infty} \frac{f(r)}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} + \dots \right) + \\
 &+ \varepsilon 3a^3 \Omega r \sin \theta \left[\int_r^{\infty} \frac{f(r)}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} \right] \left(1 - \varepsilon 3a^3 \int_a^{\infty} \frac{f(r)}{\mu_0} \frac{dr'}{r'^4} + \dots \right) + \dots = \\
 &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega a^3 \sin \theta}{r^2}; \quad (9.21)
 \end{aligned}$$

por lo que tiende homogéneamente al resultado Newtoniano.

Como ejemplo analizamos el caso en el que la función de viscosidad es de la forma:

$$\mu = \mu_0 \mu_r(r) = \mu_0 \left(1 - b \frac{a^3}{r^3} \right). \quad (9.22)$$

La función de viscosidad puede observarse en la gráfica 9.2 para varios valores del parámetro b . El parámetro b representa la diferencia de viscosidad entre el origen e infinito. La concentración decae inversamente proporcional al volumen. La sedimentación bajo un campo centrífugo⁴⁵ produce perfiles de concentración que decaen con la distancia. La función de viscosidad (9.22) conduce al campo de velocidad:

$$\begin{aligned}
 u_{\phi}(r, \theta) &= \frac{\Omega r \sin \theta \int_r^{\infty} \frac{dr'}{\left(1 - b \frac{a^3}{r'^3} \right) r'^4}}{\int_a^{\infty} \frac{dr'}{\left(1 - b \frac{a^3}{r'^3} \right) r'^4}} = \\
 &= \frac{\Omega r \sin \theta \left[-\left(\frac{1}{3ba^3} \right) \ln \left(1 - b \frac{a^3}{r^3} \right) \right]_r^{\infty}}{\left[-\left(\frac{1}{3ba^3} \right) \ln \left(1 - b \frac{a^3}{r^3} \right) \right]_a^{\infty}} =
 \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{\Omega r \sin \theta \ln \left(1 - b \frac{a^3}{r^3} \right)}{\ln(1-b)} \quad (9.23)$$

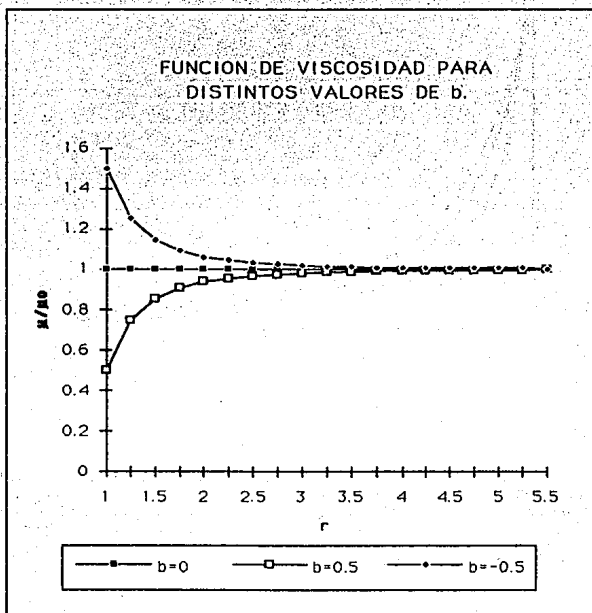


Figura 9.2. Gráficas de la función de viscosidad para diferentes valores del parámetro b .

La gráfica 9.3 muestra la dependencia en r del campo de velocidad para los mismos valores de r mostrados en la gráfica anterior.

DEPENDENCIA EN r DE $\frac{u_\phi}{\Omega \text{sen} \theta}$ PARA DISTINTOS VALORES DE b .

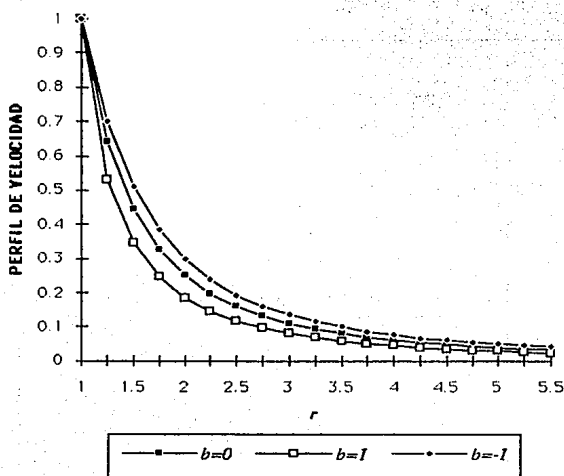


Figura 9.3. La gráfica muestra la dependencia en r del campo de velocidad para distintos valores de b . Cuando b es negativa, la viscosidad es mayor y el campo de velocidad decae más lentamente. Cuando la viscosidad aumenta, el fluido tiende a rotar cada vez más como "un sólido" y por ello la velocidad decae más lentamente. Cuando b es positiva tenemos la situación inversa. La condición de adherencia hace que los tres perfiles coincidan sobre la superficie de la esfera.

El campo de velocidad (9.23) se ve modificado con respecto a la solución homogénea. Los valores sobre la superficie de la esfera y en infinito no cambian debido a las condiciones de frontera establecidas. Un sistema que puede presentar este tipo de viscosidad puede ser una suspensión de partículas con una densidad un poco mayor que la del fluido solvente. La diferencia debe de ser pequeña como para suponer que se tiene un estado estacionario.

La torca requerida para mantener la rotación estacionaria puede ser obtenida evaluando primero el tensor de esfuerzos:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}} &= -\underline{\mathbf{I}}p + \mu_0 \mu_r(r) [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] = \\ &= -\underline{\mathbf{I}}p + \mu_0 \mu_r(r) \left[(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_r) \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) - (\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\theta) \left(\frac{\cot \theta u_\phi}{r} \right) \right] = \\ &= -\underline{\mathbf{I}}p + \mu_0 \mu_r(r) \left[(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_r) r \sin \theta \frac{\partial W}{\partial r} - (\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\theta) \cos \theta W \right]; \quad (9.24)\end{aligned}$$

la torca está dada por la expresión :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{r} \times (\underline{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) r^2 \sin \theta \Big|_{r=a} d\theta d\phi = \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{r} \times \left(\mathbf{e}_\phi \mu_r(r) r \sin \theta \frac{dW}{dr} \right) r^2 \sin \theta \Big|_{r=a} d\theta d\phi = \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{e}_\rho r \sin \theta + \mathbf{e}_z r \cos \theta) \times \left(\mathbf{e}_\phi \mu_r(r) \frac{dW}{dr} \right) r^3 \sin^2 \theta \Big|_{r=a} d\theta d\phi = \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{e}_z \sin \theta - \mathbf{e}_\rho \cos \theta) \mu_r(r) \frac{\partial W}{\partial r} r^4 \sin^2 \theta \Big|_{r=a} d\theta d\phi = \\ &= \mathbf{e}_z \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mu_r(a) \frac{dW}{dr} a^4 \sin^3 \theta \Big|_{r=a} d\theta d\phi. \quad (9.25)\end{aligned}$$

Usando la identidad

$$\int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta = 0, \quad (9.26)$$

la torca se convierte en :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mu_0 C_0 \sin^3 \theta d\theta d\phi = \\ &= \mathbf{e}_z 2\pi \mu_0 C_0 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta =\end{aligned}$$

$$= \hat{e}_z \frac{8\pi}{3} \mu_0 C_0 = -\hat{e}_z \frac{\frac{8\pi}{3} \mu_0 \Omega}{\int_a^\infty \frac{dr'}{\mu_r r'^4}}; \quad (9.27)$$

donde el efecto de una viscosidad no constante puede ser observado en el denominador de la expresión para la torca. Suponiendo que la viscosidad es una función bien comportada de la coordenada radial, podemos efectuar un análisis perturbativo para recuperar el caso homogéneo. Escribiendo la viscosidad en la forma:

$$\frac{1}{\mu_r} = 1 + \varepsilon f(r) \quad (9.28)$$

y sustituyéndola en la expresión para la torca se llega a la siguiente expansión perturbativa en términos del parámetro pequeño ε :

$$\begin{aligned} T &= -\hat{e}_z \frac{\frac{8\pi}{3} \mu_0 \Omega}{\int_a^\infty \frac{dr'}{\mu_r r'^4}} = -\hat{e}_z \frac{\frac{8\pi}{3} \mu_0 \Omega}{\int_a^\infty \frac{1}{r'^4} (1 + \varepsilon f(r)) dr'} = \\ &= -\hat{e}_z \frac{\frac{8\pi}{3} \mu_0 \Omega}{\int_a^\infty \frac{1}{r'^4} dr' + \varepsilon \int_a^\infty \frac{f(r)}{r'^4} dr'} = -\hat{e}_z \frac{\frac{8\pi}{3} \mu_0 \Omega}{\frac{1}{3a^3} + \varepsilon \int_a^\infty \frac{f(r)}{r'^4} dr'} \\ &= -\hat{e}_z \frac{\frac{8\pi}{3} \mu_0 \Omega}{\frac{1}{3a^3} + \varepsilon \int_a^\infty \frac{f(r)}{r'^4} dr'} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\hat{e}_z 8\pi a^3 \mu_0 \Omega. \quad (9.29) \end{aligned}$$

En el último paso tomamos el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ y recuperamos el resultado homogéneo.

Para el ejemplo anteriormente analizado, la torca como función del parámetro b está dada por la expresión:

$$T = -\hat{e}_z \frac{\frac{8\pi}{3} \mu_0 \Omega}{\int_a^\infty \frac{dr'}{\left(1 - b \frac{a^3}{r^3}\right) r'^4}} = -\hat{e}_z \frac{\frac{8\pi}{3} \mu_0 \Omega}{\left[-\left(\frac{1}{3ba^3}\right) \ln\left(1 - b \frac{a^3}{r^3}\right) \right]_a^\infty} =$$

$$= \hat{e}_z \frac{8\pi r^3 \mu_0 \Omega}{\left(\frac{1}{b}\right) \ln(1-b)} \quad (9.30)$$

Tomando en cuenta que la torca requerida para mantener un movimiento estacionario es proporcional a la viscosidad para el caso newtoniano clásico, podemos definir una viscosidad efectiva como el cociente entre las torcas para los casos inhomogéneo y homogéneo. La siguiente figura ilustra la torca como función del parámetro b .

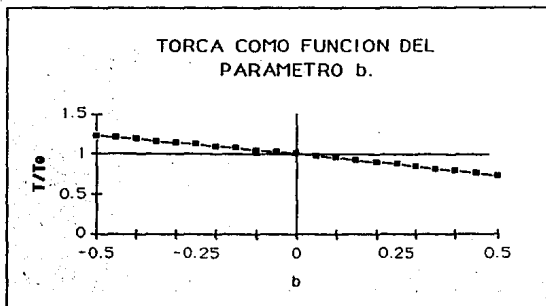


Figura 9.4. La figura muestra la torca requerida para mantener el movimiento estacionario en función del parámetro b . Cuando $b=0$ recuperamos el caso homogéneo. Cuando b es negativa, la viscosidad es mayor y por tanto la torca necesaria para mantener el movimiento estacionario es mayor. Cuando b es positiva sucede el caso opuesto.

Es posible apreciar como la torca cambia para distintos valores del parámetro b . Una concentración no homogénea puede obtenerse si consideramos una suspensión de partículas cuya densidad es un poco mayor que la del fluido solvente. Necesitamos que la diferencia en densidades sea pequeña de tal manera que la hipótesis de estado estacionario es aplicable.

CAPÍTULO 10.

ROTACIÓN DE CUERPOS CON SIMETRÍA AXIAL.

ROTACIÓN DE CUERPOS CON SIMETRÍA AXIAL.

En esta sección analizaremos el flujo inducido por la rotación de cuerpos axisimétricos. El cuerpo axisimétrico, o cuerpo de revolución, se supone que gira alrededor de su eje de simetría con velocidad angular constante. Debido a la geometría del problema, un sistema de coordenadas cilíndricas es apropiado para escribir las ecuaciones de movimiento. El eje z se toma a lo largo del eje de simetría del cuerpo como se observa en la figura 10.1.

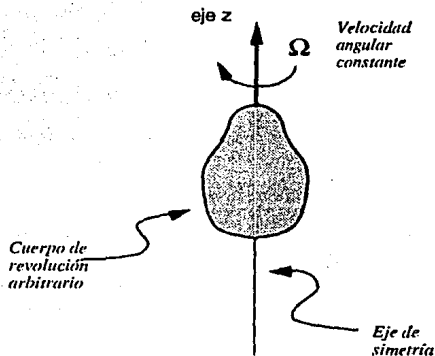


Figura 10.1. Cuerpo de revolución arbitrario rotando con velocidad angular constante sobre su eje de simetría. El eje z de un sistema de coordenadas cilíndricas se toma a lo largo del eje de simetría.

La naturaleza de la solución depende de la geometría de la partícula. Para un cilindro circular infinito, esperamos tener un flujo unidimensional donde sólo la componente ϕ del campo de velocidad es diferente de cero y dependiente sólo de la coordenada radial ρ . Este resultado se mantendrá válido para funciones arbitrarias de la viscosidad. Para el caso de la esfera la función dependerá también de la coordenada z como se vio anteriormente y el hecho de que la viscosidad no es constante afecta la naturaleza de la solución. Observaremos cómo distintas longitudes de onda son introducidas en el problema por la viscosidad no constante.

En esta sección derivamos las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas y resolveremos el problema para un cilindro circular infinito. En la siguiente sección obtendremos la solución fundamental y analizaremos el caso de partículas finitas.

ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS CILINDRICAS.

El sistema de coordenadas cilíndricas es tomado de tal forma que el eje z coincide con el eje de simetría del cuerpo de revolución. Debido a la simetría del problema, suponemos que los campos de velocidad y de presión son funciones de ρ y z .

$$p = p(\rho, z) \quad (10.1)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{e}}_\rho u_\rho(\rho, z) + \hat{\mathbf{e}}_z u_z(\rho, z) + \hat{\mathbf{e}}_\phi u_\phi(\rho, z) \quad (10.2)$$

Consideraremos el caso general donde la viscosidad puede escribirse como un producto de una función de ρ multiplicada por una función de z

$$\mu = \mu_0 \mu_\rho(\rho) \mu_z(z) \quad (10.3)$$

donde μ_0 es una viscosidad característica y las funciones $\mu_\rho(\rho)$ y $\mu_z(z)$ son adimensionales y de orden uno. Este caso general está restringido a las funciones que satisfacen la condición de estado estacionario establecida en secciones anteriores. Esta condición requiere que la viscosidad sea constante a lo largo de las líneas de corriente. Para flujos axisimétricos donde sólo la componente ϕ de la velocidad es diferente de cero, las líneas de corriente son círculos concéntricos alrededor del eje z . La condición estacionaria requiere que la viscosidad no dependa de la variable ϕ . Esto es ciertamente satisfecho por la expresión general anterior y debe ser satisfecho por relaciones más generales no expresables como un producto de funciones. La dependencia general supuesta tiene la ventaja de ser consistente con el método de separación de variables que de otra forma no sería aplicable. Sin embargo, el tipo de flujos que puede ser investigado es amplio y muchas situaciones pueden ser estudiadas. Casos donde la viscosidad es una función de z solamente, (como en el caso de materiales en capas) o cuando sólo depende de ρ son considerados especiales. El tensor de deformación está dado por

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+ &= 2\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + (\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_\phi + \hat{\mathbf{e}}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\rho) \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} - \frac{u_\phi}{\rho} \right] + \\ &+ (\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_\rho) \left[\frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z} \right] + 2\hat{\mathbf{e}}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{u_\rho}{\rho} + (\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_\phi + \hat{\mathbf{e}}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\rho) \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \\ &+ 2\hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (10.4)$$

Las ecuaciones de movimiento pueden ser reescritas como

$$\nabla p = \nabla \cdot \left\{ \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+ \right] \right\} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \mu \cdot \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+ \right] \quad (10.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (10.6)$$

donde $\nabla\mu$ está dada por

$$\nabla\mu = \hat{e}_\rho \mu_{0\rho} \frac{\partial \mu_\rho}{\partial \rho} + \hat{e}_z \mu_{0z} \frac{\partial \mu_z}{\partial z} \quad (10.7)$$

En coordenadas cilíndricas, las ecuaciones de movimiento se convierten en

$$(\rho) \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = \mu(\rho, z) \left[\nabla^2 u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \quad (10.8)$$

$$(z) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu(\rho, z) \nabla^2 u_z + \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (10.9)$$

$$(\phi) \quad \mu(\rho, z) \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{\rho^2} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} - \frac{u_\phi}{\rho} \right] \quad (10.10)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\rho) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (10.11)$$

La componente ϕ de las ecuaciones de movimiento está desacoplada de las otras dos. Este conjunto de ecuaciones debe ser resuelto bajo condiciones de frontera de los campos de velocidad y presión. El campo de velocidad satisface la condición de adherencia sobre la superficie de la partícula y se hace cero en infinito; el campo de presión se aproxima a un valor constante en infinito.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{U}_s, & \text{sobre la superficie de la partícula;} \\ |\mathbf{u}| &\rightarrow 0, & \text{as } r \rightarrow \infty; \\ p &\rightarrow p_\infty, & \text{as } r \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (10.12)$$

donde \mathbf{U}_s es la velocidad de la partícula.

Para ciertas geometrías de la partícula, podemos suponer que sólo hay una componente del campo de velocidad, pero en general las tres componentes se necesitarán para satisfacer las condiciones de frontera.

ROTACION DE UN CILINDRO CIRCULAR INFINITO EN UN FLUIDO NO ACÓTADO.

El primer ejemplo que analizaremos es el de un cilindro circular infinito. Este ejemplo es lo suficientemente sencillo para incorporar dependencias arbitrarias de la viscosidad. Debido a la simetría del problema, no hay longitud característica en la dirección

92 Fluidos No Homogéneos

z diferente a la introducida por la viscosidad. En problemas con geometrías más complicadas, las longitudes características aparecerán y jugarán un papel muy importante como se observará en la siguiente sección.

Para el caso del cilindro circular infinito (ver figura 10.2) de radio a rotando con velocidad angular Ω constante, podemos suponer que sólo hay una componente no cero del campo de velocidad

$$\mathbf{u} = e_{\phi} u_{\phi}(\rho, z) ; \quad (10.13)$$

que satisface la ecuación de momento

$$\mu(\rho, z) \left[\nabla^2 u_{\phi} - \frac{u_{\phi}}{\rho^2} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \left[\frac{\partial u_{\phi}}{\partial \rho} - \frac{u_{\phi}}{\rho} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_{\phi}}{\partial z} = 0 , \quad (10.14)$$

y las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u_{\phi} &= \Omega a & \text{at } \rho = a, \forall z; \\ u_{\phi} &\rightarrow 0 & \text{as } \rho \rightarrow \infty, \forall z; \end{aligned} \quad (10.15)$$

la presión es constante en todo el fluido como requieren las ecuaciones de movimiento.

La ecuación de continuidad es idénticamente satisfecha dado que se trata de un problema unidimensional. La solución de la ecuación de momento depende de la forma funcional de la viscosidad. Debido a la simetría de ambas condiciones de frontera y la dependencia funcional de la viscosidad, el método de separación de variables puede ser utilizado para obtener la solución de las ecuaciones de movimiento. Suponiendo que la velocidad es de la forma

$$u_{\phi}(\rho, z) = U(z)V(\rho) , \quad (10.16)$$

obtenemos el conjunto no acoplado de ecuaciones

$$\frac{d^2 V}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dV}{d\rho} - \frac{V}{\rho^2} + \frac{1}{\mu_{\rho}(\rho)} \frac{d\mu_{\rho}}{d\rho} \left[\frac{dV}{d\rho} - \frac{V}{\rho} \right] = \alpha^2 V , \quad (10.17)$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{1}{\mu_z(z)} \frac{d\mu_z}{dz} \frac{dU}{dz} = -\alpha^2 U \quad (10.18)$$

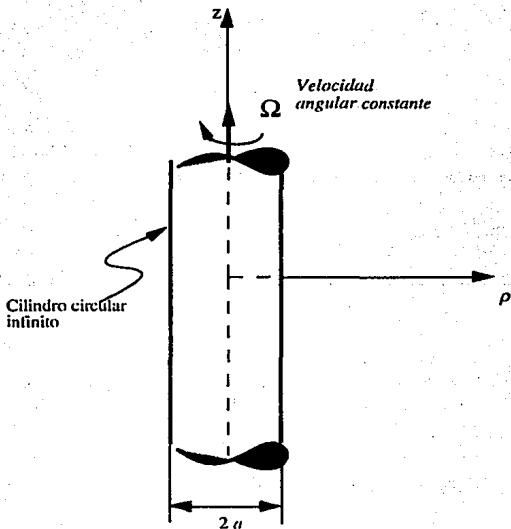


Figura 10.2. Cilindro circular infinito rotando con velocidad angular Ω constante en un fluido inhomogéneo no acotado. Debido a la simetría de las condiciones de frontera, sólo hay una componente no cero del campo de velocidad.

donde α^2 es la constante de separación. Las condiciones de frontera sobre la superficie del cilindro son independientes de z y debido a esta simetría traslacional, suponemos que la solución no depende de z . La constante de separación se toma como cero y entonces la solución para $V(\rho)$ se obtiene haciendo la sustitución

$$V(\rho) = \rho W(\rho) \tag{10.19}$$

en las ecuaciones de movimiento y condiciones de frontera; esto conduce a la siguiente ecuación y condiciones de frontera para W

94 Fluidos No Homogéneos

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \left(\frac{3}{\rho} + \frac{1}{\mu_\rho(\rho)} \frac{d\mu_\rho}{d\rho} \right) \frac{dW}{d\rho} = 0, \quad (2.5.20)$$

$$\begin{aligned} W &= \Omega & \text{at } \rho &= a, \\ \rho W &\rightarrow 0 & \text{as } \rho &\rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (10.21)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden para la derivada $dW/d\rho$. Una primera integración conduce a la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dW}{d\rho} = C_0 \exp \left[-\int \left(\frac{3}{\rho'} + \frac{1}{\mu_\rho} \frac{d\mu_\rho}{d\rho'} \right) d\rho' \right] = \frac{C_0}{\mu_\rho \rho^3}; \quad (10.22)$$

donde C_0 es una constante de integración. Una segunda integración da la solución

$$W(\rho) = -\int \frac{C_0}{\mu_\rho \rho^3} d\rho' + C_1; \quad (10.23)$$

la condición de frontera en infinito requiere que $C_1 = 0$ y sobre la superficie requiere que

$$C_0 = -\frac{\Omega}{\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho^3} d\rho'}. \quad (10.24)$$

El campo de velocidad se convierte en

$$u_\phi(\rho) = \Omega \rho \frac{\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho^3} d\rho'}{\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho^3} d\rho'}. \quad (10.25)$$

Es importante notar que el campo de velocidad es independiente de la elección de $\mu_z(z)$ y consecuentemente independiente de cualquier escala de longitud en la dirección z . Esta es una consecuencia de la simplicidad de las condiciones de frontera del problema. Para condiciones de frontera más complicadas dependientes de z , el campo de velocidad dependerá también de z . Si la viscosidad es una función de z solamente, el campo de velocidades no será afectado y será el mismo que en el caso homogéneo.

El caso límite donde la viscosidad se vuelve constante es regular y la solución homogénea es recuperada. Una perturbación regular puede ser aplicada como sigue: suponiendo que la viscosidad se puede expandir como

$$\frac{1}{\mu_\rho} = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (10.26)$$

donde $\varepsilon \ll 1$ es el parámetro de perturbación y las funciones f_i son de orden uno. Esto conduce al límite

$$u_\phi(\rho) = \Omega \rho \frac{\int_a^\infty [1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots] \frac{1}{\rho'^3} d\rho'}{\int_a^\infty [1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots] \frac{1}{\rho'^3} d\rho'} =$$

$$= \Omega \rho \frac{\int_a^\infty \frac{1}{\rho'^3} d\rho' + \varepsilon \int_a^\infty \frac{f_1}{\rho'^3} d\rho' + \dots}{\int_a^\infty \frac{1}{\rho'^3} d\rho' + \varepsilon \int_a^\infty \frac{f_1}{\rho'^3} d\rho' + \dots} \rightarrow \frac{\Omega a^2}{\rho} \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10.27)$$

Para que esta solución sea válida, requerimos que la integral

$$\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho'^3} d\rho' \quad (10.28)$$

converja. Esta condición es satisfecha si μ_ρ está acotada y es de orden uno para toda ρ . Como ejemplo analizaremos el caso particular donde la viscosidad está dada por la expresión:

$$\mu(\rho) = \mu_0 \left(1 + b \frac{a^2}{\rho^2} \right). \quad (10.29)$$

El parámetro b representa la diferencia de viscosidad entre el origen e infinito. La sedimentación bajo un campo centrífugo⁴⁵ produce perfiles de concentración que decaen con la distancia.

Dicha función de viscosidad conduce a la expresión para el campo de velocidad:

$$u_\phi(\rho) = \Omega \rho \frac{\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho'^3} d\rho'}{\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho'^3} d\rho'} = \Omega \rho \frac{\int_a^\infty \frac{1}{\rho \left(1 + b \frac{a^2}{\rho'^2} \right) \rho'^3} d\rho'}{\int_a^\infty \frac{1}{\left(1 + b \frac{a^2}{\rho'^2} \right) \mu_\rho \rho'^3} d\rho'} =$$

$$= \Omega \rho \frac{\left(\frac{-1}{2a^2 b} \ln \left(1 + b \frac{a^2}{\rho^2} \right) \right) \Big|_a^\infty}{\left(\frac{-1}{2a^2 b} \ln \left(1 + b \frac{a^2}{\rho^2} \right) \right) \Big|_a^\infty} = \Omega \rho \frac{\ln \left(1 + b \frac{a^2}{\rho^2} \right)}{\ln(1+b)} \quad (10.30)$$

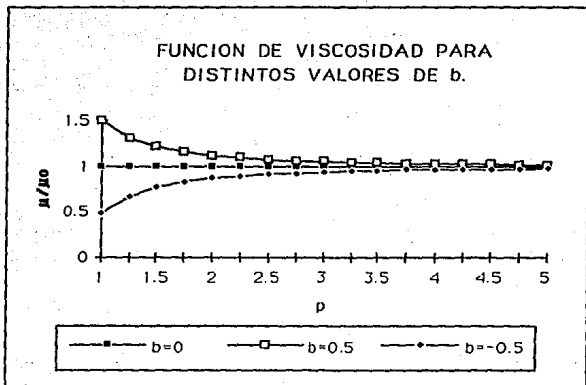


Figura 10.4. La figura muestra la función de viscosidad para varios valores del parámetro b .

La viscosidad efectiva del fluido será obtenida en términos de la torca necesaria para mantener una rotación estacionaria del cilindro. La torca, por unidad de longitud, es una función de la sección del cilindro considerada. El tensor de esfuerzo está dado por la siguiente expresión

$$\underline{\underline{\tau}} = -\underline{\underline{I}} p_\infty + (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\rho) \mu_0 \mu_2(z) \left[\frac{C_0}{\rho^2} \right] ; \quad (10.31)$$

donde C_0 es la misma constante que aparece en la expresión de la velocidad. La torca por unidad de longitud se convierte en

$$\begin{aligned} T &= e_z T = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \int_0^L \mathbf{r} \times (\underline{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{n}) \rho dz d\phi = e_z \frac{2\pi C_0}{L} \int_0^L \mu_z(z') dz' \\ &= e_z \frac{2\pi \Omega}{L} \int_0^L \mu_z(z') dz' \\ &= e_z \frac{1}{\int_a^\infty \mu \rho^3 d\rho'} \end{aligned} \quad (10.32)$$

PERFIL DE VELOCIDAD PARA DISTINTOS VALORES DE b .

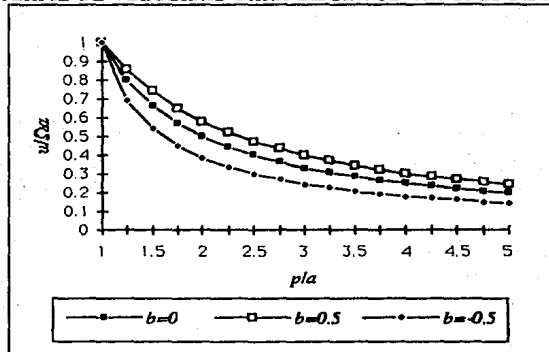


Figura 10.5. La figura muestra los perfiles de velocidad para las funciones de viscosidad mostradas en la figura 10.4. La condición de adherencia sobre la superficie del cilindro implica que los tres perfiles coinciden con la velocidad del cilindro en su superficie ($\rho/la = 1$). El caso en el que b es positiva, resulta en una viscosidad que es mayor cerca de la superficie del cilindro y por tanto la velocidad debe decaer más lentamente en la medida que "semeja más a un sólido y debiera rotar con mayor velocidad". El caso en el que b es negativa, la velocidad debe decaer más rápidamente como sería de esperarse en el caso opuesto.

La viscosidad efectiva se define en términos del cociente entre la torca del caso no homogéneo y la del caso homogéneo. La viscosidad efectiva se convierte en

$$\frac{\mu_{eff}}{\mu_0} = \frac{\frac{1}{L} \int_0^L \mu_x(z') dz'}{\frac{1}{2a^2} \int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho^3} d\rho'} \quad (10.33)$$

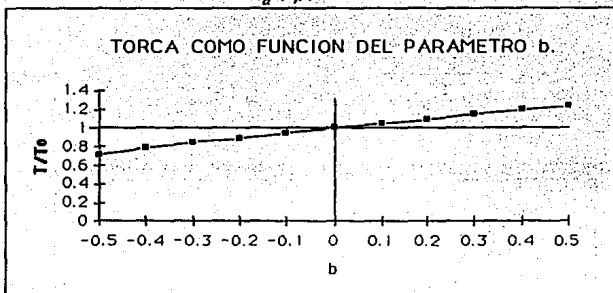


Figura 10.6. La figura muestra la torca como función del parámetro b . Cuando $b = 0$ se recupera el caso homogéneo. Cuando b es positiva, el fluido es más viscoso y por tanto debe de esperarse una torca mayor para mantener el movimiento estacionario. Por el contrario, cuando b es negativo, la viscosidad es menor al igual que la torca requerida.

La viscosidad efectiva se ve afectada en dos formas: primero, hay una contribución proveniente del hecho de que el flujo es distinto al del caso homogéneo como se puede observar en el denominador y, segundo, la viscosidad misma cambia sobre la superficie del cilindro. El caso límite cuando la viscosidad se vuelve constante es regular y se recupera la solución homogénea para la torca. El límite puede ser evaluado de la misma forma que para el caso de la velocidad,

$$T = e_z \frac{2\pi\Omega}{L} \frac{\int_0^L \mu_x(z') dz'}{\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho^3} d\rho'} \rightarrow e_z 4\pi\mu_0 a^2 \Omega, \quad \text{as } \mu \rightarrow \mu_0. \quad (10.34)$$

Para el ejemplo previamente analizado, la torca está dada por la expresión

$$\begin{aligned}
 T &= e_z \frac{2\pi\Omega}{\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho^3} d\rho'} = \\
 &= e_z \frac{2\pi\mu_0 \Omega}{\left(\frac{-1}{2a^2b}\right) \ln\left(1 + b \frac{a^2}{\rho^2}\right)\Big|_a^\infty} = \\
 &= e_z \frac{4\pi\mu_0 \Omega a^2 b}{\ln(1+b)} \quad (10.35)
 \end{aligned}$$

En el caso en el que la viscosidad es periódica en z , es posible calcular la torca requerida integrando sobre un periodo de la viscosidad. Estos resultados son válidos para dependencias generales de la viscosidad y no hay necesidad de pedir periodicidad a la viscosidad.

Como ejemplo de cómo el campo de velocidad es afectado por una viscosidad no constante resolveremos un problema particular. Suponemos que la viscosidad es una función periódica de la forma:

$$\frac{1}{\mu_\rho(\rho)} = 1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi\rho}{R}\right); \quad (10.36)$$

donde ε no es necesariamente pequeño pero es menor a 1. Si ε es pequeño, este término puede ser considerado como el primer término en un análisis de Fourier. La solución exacta analítica está disponible

$$u_\phi = \Omega\rho \frac{\left[\frac{1}{2\rho^2} - \varepsilon \left\{ \frac{\cos\left(\frac{2\pi\rho}{R}\right)}{2\rho^2} + \frac{2\pi}{R} \frac{\sin\left(\frac{2\pi\rho}{R}\right)}{\rho} - \left(\frac{2\pi}{R}\right)^2 \left(\log(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\left(\frac{2\pi\rho}{R}\right)^{2n}}{2n(2n)!} \right] \right) \right\} \right]}{\left[\frac{1}{2a^2} - \varepsilon \left\{ \frac{\cos\left(\frac{2\pi a}{R}\right)}{2a^2} + \frac{2\pi}{R} \frac{\sin\left(\frac{2\pi a}{R}\right)}{a} - \left(\frac{2\pi}{R}\right)^2 \left(\log(a) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\left(\frac{2\pi a}{R}\right)^{2n}}{2n(2n)!} \right] \right) \right\} \right]}$$

donde se puede apreciar que en el límite de viscosidad constante ($\varepsilon \rightarrow 0$), el campo de velocidad se reduce al caso homogéneo

$$u_\phi = \frac{\Omega a^2}{\rho} \quad (10.37)$$

regularmente conforme $\varepsilon \rightarrow 0$.

CAPÍTULO 11.

PARTÍCULA PUNTUAL EN UN FLUIDO DE DENSIDAD Y VISCOSIDAD VARIANTE.

PARTÍCULA PUNTUAL EN UN FLUIDO DE VISCOSIDAD Y DENSIDAD VARIANTE.

Un problema interesante es el del descenso de una partícula esférica "puntual" dentro de un fluido donde tanto la viscosidad como la densidad no son constantes. Suponemos que la viscosidad cambia periódicamente en la dirección del movimiento de la partícula con un período L . La densidad es también supuesta periódica con período diferente l :

$$\mu(z) = \mu(z + L), \quad \forall z \in \mathfrak{R} \quad (11.1)$$

$$\rho_f(z) = \rho_f(z + l), \quad \forall z \in \mathfrak{R} \quad (11.2)$$

La partícula descende debido a la acción de la gravedad. La fuerza de gravedad menos la fuerza de flotación es el mecanismo para el movimiento. La fuerza actuando sobre la partícula está dada por la ley de Stokes para una partícula esférica de tamaño finito. Consideramos el radio a de la esfera como pequeño comparado con los dos periodos l y L :

$$\frac{a}{l} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{a}{L} \ll 1; \quad (11.3)$$

es en este sentido que se considera "puntual" la partícula.

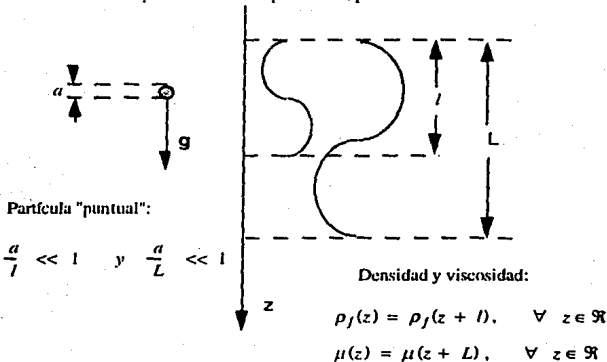


Figura 11.1. Una partícula puntual inmersa en un fluido descende debido a la acción de la gravedad. Tanto la densidad del fluido como su viscosidad son funciones periódicas.

La ecuación de movimiento para la esfera está dada por

$$6 \pi a \mu(z) U(z) = \Delta m g = \frac{4}{3} \pi a^3 [\rho - \rho_f(z)] g; \quad (11.4)$$

donde ρ es la densidad de la partícula, ρ_f es la densidad del fluido, g es la gravedad y hemos supuesto que ni la viscosidad ni la densidad cambian sobre la superficie de la partícula pequeña. En este sentido es que estamos considerando una partícula puntual. La velocidad de descenso de la partícula es entonces

$$U(z) = \dot{z} = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{f(z)}{\mu(z)} ; \quad (11.5)$$

donde

$$f(z) = \frac{2a^2 g}{9} [\rho - \rho_f(z)] . \quad (11.6)$$

Integrando respecto al tiempo obtenemos:

$$t = \int_0^Z \frac{dz'}{U(z')} . \quad (11.7)$$

Definiendo la velocidad promedio como el límite:

$$\frac{1}{\bar{U}} = \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{1}{Z} \int_0^Z \frac{dz'}{U(z')} , \quad (11.8)$$

y sustituyendo la expresión de la velocidad:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{U}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int_0^m \frac{\mu(z)}{f(z)} dz = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{it}^{(i+1)t} \frac{\mu(z)}{f(z)} dz = \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{f(z)} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(z + it) \right] dz . \end{aligned} \quad (11.9)$$

Para evaluar la suma infinita, definimos el conjunto Ξ de números:

$$\Xi = \{x \in [0, L] / x = z + it - jL; i, j = 0, 1, 2, \dots \text{ tal que } x \in [0, L]\} \subseteq [0, L] . \quad (11.10)$$

que es un subconjunto del intervalo $[0, L]$ y representa los puntos muestreados. Si el cociente es irracional, el conjunto de puntos es infinito y muestrea uniformemente el intervalo. En este caso, la sumatoria se convierte en una integral directamente. Si el cociente es racional, el conjunto de puntos es finito y no muestrea uniformemente el intervalo^{14, 25}.

Debido a que la función está acotada, podemos asegurar que el límite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(z + it) , \quad (11.11)$$

existe y está acotado ya que

$$\min \text{ de } \mu(z) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(z + il) \leq \max \text{ de } \mu(z) \quad , \quad \forall m \text{ entero} \quad (11.12)$$

Dependiendo del cociente de los dos períodos, el límite tendrá valores diferentes. El cociente puede ser un número racional o irracional :

i) si $\frac{l}{L}$ es un número racional $y \exists$ tiene un número finito de elementos

y el conjunto no muestrea uniformemente el intervalo. La velocidad terminal puede escribirse en términos de la integral:

$$\frac{1}{\bar{U}} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{f(z)} \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(z + il) \right\} dz ,$$

donde $M = nl = mL$, con n y m enteros.

ii) si $\frac{l}{L}$ es un número irracional $y \exists$ tiene un número infinito de elementos y muestrea uniformemente el intervalo; el límite es entonces (Bohr, H., 1951)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(z + il) = \frac{1}{L} \int_0^L \mu(z) dz = \bar{\mu} \quad (11.13)$$

que da la velocidad promedio :

$$\bar{U} = \frac{\bar{\mu}}{\bar{f}} \quad (11.14)$$

Donde \bar{f} está definido:

$$\frac{1}{\bar{f}} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{f(z)} dz .$$

Como ilustración, consideremos el ejemplo donde :

$$\mu(z) = \mu_0 + A \cos(2\pi z / L) \quad (11.15)$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{g}{2a^2} \frac{1 + B \cos(2\pi z / l)}{\rho - \rho_j} \quad (11.16)$$

La expresión para la velocidad se convierte en :

$$\begin{aligned} \frac{1}{U} &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{f(z)} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(z+il) \right] dz = \\ &= \frac{9}{2\alpha^2 g l} \int_0^l \frac{1 + B \cos(2\pi z/l)}{\rho - \rho f_0} \left[\mu_0 + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} A \cos(2\pi(z+il)/L) \right] dz = \\ &= \frac{9\mu_0}{2\alpha^2 g \Delta\rho} + \\ &+ \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1 + B \cos(2\pi z/l)}{\Delta\rho} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} A \cos(2\pi(z+il)/L) \right] dz. \end{aligned} \quad (11.17)$$

El término de la derecha es cero si el cociente l/L es irracional ya que la sumatoria se convierte en la integral. Si el cociente es racional, el término de la derecha puede ser diferente de cero: por ejemplo, si $l=L$, el término de la derecha es igual a $B \cos \phi / \mu_0$:

$$\frac{1}{U} = \frac{9\mu_0}{2\alpha^2 g \Delta\rho} + \frac{AB}{2\Delta\rho} \quad (11.18)$$

Las siguientes dos figuras ilustran las gráficas para casos donde el cociente es racional e irracional.

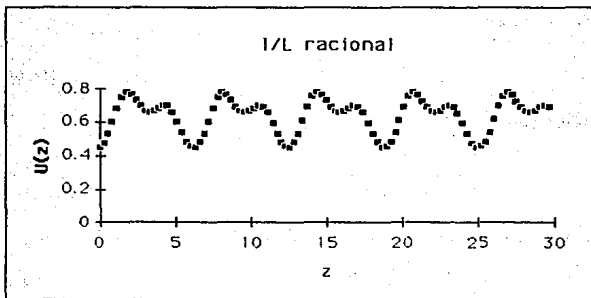


Figura 11.2. La velocidad de la partícula sigue un movimiento periódico cuando el cociente de los dos periodos es racional.

Cuando el cociente es racional, el movimiento de la partícula es periódico. Sin embargo, las variaciones en la viscosidad y en la densidad interfieren mutuamente, por lo que la viscosidad y densidad efectivas son interdependientes.

Cuando el cociente es irracional, el movimiento no es periódico. Sin embargo, las variaciones de la densidad y la viscosidad no interfieren.

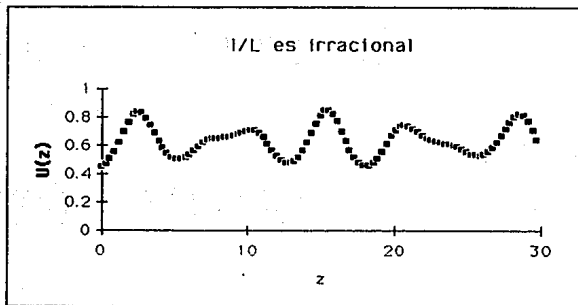


Figura 11.3. La velocidad de la partícula sigue un movimiento irregular no periódico cuando el cociente de los períodos es irracional.

El ejemplo analizado aquí supone que tanto la viscosidad como la densidad varían en forma continua y que la ley de Stokes puede ser aplicada en todo momento. Si el sistema por el que atraviesa la esfera fuera una suspensión neutralmente suspendida de partículas, el tamaño de la esfera debe ser lo suficientemente grande comparada con el tamaño de las partículas como para considerar a la suspensión como un continuo. Si la esfera fuera de un tamaño comparable, su trayectoria se vería modificada por colisiones con las partículas suspendidas y el movimiento de la esfera no sería descrito apropiadamente por la ecuación (11.4). Si la esfera se descendiera en un fluido estratificado, su tamaño debe ser pequeño comparado con la altura de las capas de los distintos fluidos componentes. De otra forma, la esfera observaría diferentes viscosidades sobre su superficie y la fuerza neta tendría que ser evaluada. El movimiento de la esfera puede modificar la estructura del sistema, ya sea la concentración y orientación local de las partículas cercanas o destruyendo la interface entre los distintos fluidos del un sistema estratificado.

CAPITULO 12.

DISCUSIÓN.

DISCUSIÓN

El análisis aquí presentado tiene puntos en su construcción que necesitan ser discutidos para entender su alcance y limitaciones. Primeramente, el esquema se desarrolla bajo la hipótesis de estado estacionario. Consecuentemente, sólo se estudian los casos donde el flujo se ha desarrollado completamente, esto es, no es posible predecir si una cierta distribución de viscosidad evolucionará en el tiempo. No es posible predecir los procesos de migración, por lo que no podemos calcular el campo de velocidades final dada cierta condición inicial. Sin embargo, al analizar funciones arbitrarias de la viscosidad y

obtener los campos de velocidad y presión, fuerzas, torcas y gastos en términos de esta función arbitraria de la viscosidad, podemos revertir el problema. Conociendo el perfil de velocidad, podemos calcular la función de viscosidad que condujo a dicho perfil de velocidad. Si se observan cambios en el flujo total o gasto, es posible relacionarlos con inhomogeneidades de la viscosidad. Aun cuando no podemos describir el proceso que llevó a un sistema a su estado no homogéneo estacionario, sí podemos describir dicho estado en detalle.

La ecuación de conservación de partículas llevó a la conclusión de que la viscosidad es constante a lo largo de las líneas de flujo. El análisis utilizando una suspensión de esferas neutralmente suspendidas permitió identificar cambios en la función viscosidad con cambios en la concentración de partículas. Si las partículas siguen las líneas de flujo, no habrá cambios en la concentración y consecuentemente no habrá cambios en la viscosidad. Tal situación se presenta cuando no hay fuerza externa alguna que obligue a las partículas a cambiar de línea de flujo y simplemente son "arrastradas" con la misma velocidad que el fluido. Dicho resultado es consecuencia de ignorar la interacción hidrodinámica entre partículas o con las paredes. La introducción de interacciones hidrodinámicas, especialmente con las paredes, puede introducir el mecanismo por el cual las partículas pueden cambiar de línea de corriente y por tanto estudiar el proceso de migración desde un punto de vista dinámico. De esta manera, sería posible predecir si el flujo de una suspensión presentará un fenómeno de migración y calcular el estado final estacionario.

El análisis perturbativo mostró que las soluciones no presentan singularidades para recuperar el caso homogéneo ya que dependen directamente de la viscosidad y si ésta es una función bien portada, la solución también lo será. Esto también indica que las

soluciones son estables ante cambios pequeños en la viscosidad, al menos en la misma manera que los flujos newtonianos lo sean.

En cada flujo presentado se calcularon el campo de velocidades, las torcas o fuerzas necesarias para mantener el estado estacionario así como el gasto en términos de la funciones arbitrarias de viscosidad. En algunos casos fuimos un paso adelante sustituyendo funciones de viscosidad especiales que representarían alguna situación que pudiera ser observada. Se compararon los resultados newtonianos clásicos y los obtenidos al permitir a la viscosidad ser una función de la posición. Se observaron los cambios en los perfiles de velocidad evidenciando las diferencias. Fue posible calcular las viscosidades efectivas para todos estos casos indicando que los valores medidos de la viscosidad pueden depender no sólo del sistema en consideración sino también de la geometría del flujo al que se sometieron. Esto es, el mismo fluido puede ofrecer dos valores distintos de viscosidad si se somete a diferentes procesos. Es importante notar que los cambios en la viscosidad pudieran ser pequeños dependiendo del sistema y de los flujos bajo consideración. Para determinar si el cambio sería detectable en un laboratorio, necesitan efectuarse cálculos específicos.

Por otro lado, para que estos cambios sean detectables, el sistema fluido bajo consideración debe de ser tal que permita cambios en su estructura, como sería el caso de una suspensión de partículas. Otros sistemas, como los fluidos poliméricos serían un buen ejemplo. De hecho, muchos fluidos poliméricos son sistemas compuestos en el sentido de que contienen una distribución de pesos moleculares abierta, esto es, las cadenas son de varios tamaños. En particular, la fabricación de filamentos, donde el sistema polimérico es extruido a través de pequeños tubos circulares, aprovecha este tipo de fenómenos para producir estructuras concéntricas, ofreciendo propiedades diferentes en el centro y en la superficie del filamento.

APENDICE A.

LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

LA HIPOTESIS DEL CONTINUO.

Las ecuaciones de movimiento de la dinámica de fluidos tienen su fundamento en los principios básicos de conservación de masa, momento y energía. En la derivación de las ecuaciones correspondientes tenemos que hacer una suposición importante: la hipótesis del continuo⁶ que permite utilizar ecuaciones diferenciales continuas para describir la dinámica del fluido. Vamos a discutir ideas atrás de esta hipótesis ya que nos ayudarán a derivar las ecuaciones constitutivas a través de este trabajo.

Todos los materiales están formados por átomos y moléculas que van de unos cuantos angstroms (átomo de hidrógeno) a cientos de angstroms (moléculas orgánicas, polímeros). Esta es una descripción atómica. Los virus de plantas son aún mayores y las cenizas de tabaco son de unas décimas de micrón en longitud. La arena se encuentra entre 0.1 y 0.01 cm. Un grano de arena verá al agua como un continuo en su escala de longitud. Esta escala será considerada aquí como microscópica. La hipótesis del continuo requiere que las dimensiones del flujo sean mucho mayores que las de sus constituyentes. Esto asegurará que el fluido puede ser descrito como continuo independientemente de su composición discreta. Este es el paso principal que conecta la descripción microscópica (considerando pequeñas partículas o constituyentes principales) y la descripción macroscópica continua.

Esta hipótesis no establece cómo se debe establecer esta conexión o cuáles son los efectos de la geometría de las partículas microscópicas sobre la descripción macroscópica. Esto es modelado por una ecuación constitutiva que debe contener la información microscópica (tamaño y forma de partícula, su interacción con el fluido circunvecino, etc.) generalmente en términos de parámetros macroscópicos como la viscosidad. En resumen, la descripción macroscópica debe de incluir la descripción microscópica relevante. En el capítulo 3 se analizará esto con mayor detalle.

PRINCIPIOS DE CONSERVACION.

Los principios básicos de conservación pueden ser aplicados para derivar las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía^{3, 24, 32}. Consideramos aquí sólo flujos isotérmicos donde la ecuación de energía está desacoplada de las ecuaciones de momento y continuidad. Luego entonces, consideraremos como variables macroscópicas a los campos de velocidad y presión (4 variables satisfaciendo las 4 ecuaciones de momento y continuidad). La densidad será considerada como constante. Una derivación completa, incluyendo la ecuación de energía, puede ser encontrada en los libros de las referencias antes mencionadas. Tomaremos como inicio las ecuaciones de conservación de masa y momento²⁴ que pueden ser escritas como:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad , \quad (\text{A.1})$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F} \quad , \quad (\text{A.2})$$

donde \mathbf{u} es el campo de velocidad, ρ es la densidad, \mathbf{F} es la fuerza externa por unidad de masa y $\underline{\mathbf{P}}$ es el tensor de esfuerzo dado por

$$\underline{\mathbf{P}} = -I\rho + \underline{\boldsymbol{\tau}} \quad , \quad (\text{A.3})$$

y $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ es la parte viscosa del tensor de esfuerzo y cuya expresión debe ser dada por una ecuación constitutiva.

Para un fluido de densidad constante pueden ser reducidas a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F} \quad , \quad (\text{A.5})$$

LA ECUACION CONSTITUTIVA NEWTONIANA.

Las ecuaciones constitutivas son, desde el punto de vista matemático, necesarias para obtener un problema cerrado, esto es, el mismo número de ecuaciones que de variables. Desde el punto de vista físico, la relación entre el tensor de esfuerzos y el tensor de deformación tiene un significado muy especial. La termodinámica indica que el tensor de esfuerzos debe de ser función de la deformación y de las variables termodinámicas presión y temperatura (no se consideran reacciones químicas). El tensor de esfuerzos debe de ser simétrico (termodinámica).

La ecuación constitutiva newtoniana es la ecuación más sencilla que toma en cuenta efectos viscosos. Esta ecuación está dada por una relación lineal entre los tensores de esfuerzo y deformación. La relación lineal más general tiene 81 coeficientes. Los fluidos newtonianos se suponen homogéneos e isótropos. La condición de isotropía reduce el número de coeficientes independientes a 2. Hay sólo dos tensores de segundo orden simétricos independientes y por eso sólo dos coeficientes independientes. Estos coeficientes son denotados viscosidades dinámica y volumétrica. La hipótesis de homogeneidad implica que estos coeficientes no dependen de la posición, i. e., no cambian dentro y a lo largo del fluido. Con estas hipótesis, los coeficientes sólo pueden depender de los invariantes del tensor de deformación y de variables termodinámicas como la temperatura y la presión. No consideraremos aquí variaciones debidas a la presión o a la temperatura. La condición de incompresibilidad reducirá el número de coeficientes independientes en las ecuaciones de movimiento. Los términos que involucran a la viscosidad volumétrica se cancelan en la ecuación aún cuando la viscosidad volumétrica sea distinta de cero. En resumen, el fluido newtoniano incompresible está caracterizado por un parámetro de viscosidad. La ecuación constitutiva newtoniana está dada por:

$$\underline{\tau} = - \underline{I} p + \mu_0 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t] , \quad (\text{A.6})$$

donde μ_0 es la viscosidad que es constante en todo el fluido.

Las correspondientes ecuaciones de Navier-Stokes, estacionarias, de número de Reynolds cero para un fluido incompresible son:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla p = \mu_0 \nabla^2 \mathbf{u} , \quad (\text{A.8})$$

que deben de ser resueltas bajo las condiciones de frontera pertinentes. En la siguiente sección presentaremos la solución de problemas hidrodinámicos clásicos que serán la base de comparación con los resultados de flujos no homogéneos y no isótropos.

APÉNDICE B.

RESULTADOS NEWTONIANOS.

INTRODUCCION.

En esta sección presentaremos los resultados newtonianos de problemas hidrodinámicos clásicos que se usarán para comparar con los resultados no homogéneos y no isótropos que serán analizados en los capítulos 2 y 3. Estas soluciones pueden ser encontradas en numerosos libros de dinámica de fluidos ^{6, 9, 24, 31, 32.}

Para fluidos no homogéneos, la viscosidad es considerada como una función de la posición y encontraremos el problema de definir una viscosidad efectiva asociada con el proceso dinámico. La fuerza o torque requerida para mantener el flujo en ambos casos será la

clave para determinar la viscosidad efectiva. Generalmente la fuerza o torca son linealmente dependientes de la viscosidad para fluidos newtonianos: para los casos no homogéneos supondremos que la fuerza o torca siguen siendo linealmente dependientes de la viscosidad y su cociente definirá la viscosidad efectiva. El mismo procedimiento será aplicado a los fluidos anisótropos.

Presentaremos las soluciones de flujo entre placas paralelas donde las fuerzas motrices son gradientes constantes de presión y un movimiento relativo entre las dos placas, el flujo dentro de un tubo circular producido por un gradiente constante de presión, problemas de fuente y sumidero, la rotación de un cilindro circular infinito y de una esfera inmersa en un fluido infinito.

FLUJO ENTRE PLACAS PARALELAS.

Un fluido newtoniano incompresible está localizado en el espacio entre dos placas paralelas separadas una distancia h . La placa superior se mueve con velocidad constante U respecto de la placa inferior en la dirección $x+$. Adicionalmente, hay un gradiente constante de presión aplicado $\partial p/\partial x$ contribuyendo al movimiento del fluido. La geometría se muestra en la figura B.1.

Debido a la simetría del problema, el flujo es unidimensional con sólo la componente x de la velocidad diferente de cero:

$$u_x = u_x(y) \quad (B.1)$$

$$u_y = 0 \quad (B.2)$$

$$u_z = 0 \quad (B.3)$$

La ecuación de continuidad es satisfecha idénticamente. Las componentes y y z de las ecuaciones de movimiento son irrelevantes y la componente x se convierte en:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} \quad (\text{B.4})$$

donde la viscosidad μ es constante en todo el fluido. Esta ecuación se resolverá bajo las siguientes condiciones de frontera :

$$u_x = U, \quad \text{at } y = H, \quad (\text{B.5})$$

$$u_x = 0, \quad \text{at } y = 0; \quad (\text{B.6})$$

que conducen a la solución newtoniana para el campo de velocidad :

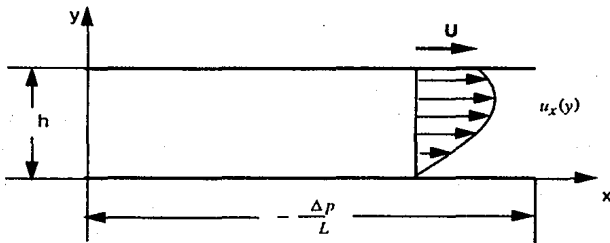


Figura B. 1. Flujo entre placas paralelas separadas una distancia h . La placa superior se mueve con velocidad U respecto de la inferior. Un gradiente de presión constante se aplica a lo largo de la dirección x .

$$u_x = U \left(\frac{y}{H} \right) - \frac{H^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\left(\frac{y}{H} \right) - \left(\frac{y}{H} \right)^2 \right]; \quad (\text{B.7})$$

donde las dos contribuciones de las diferentes fuerzas motrices están claramente separadas debido a la linealidad del problema. El gasto Q para placas de ancho W es :

$$Q = \frac{1}{2} WHU - \frac{WH^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{B.8})$$

FLUJO EN UN TUBO CIRCULAR.

Un fluido newtoniano fluye dentro un tubo circular infinito de radio R debido a un gradiente constante de presión externo $\partial p / \partial z$ actuando en la dirección del eje del tubo. El eje z se toma a lo largo del eje de simetría del tubo como se observa en la figura B.2.

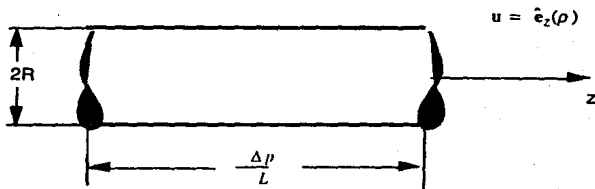


Figura B.2. Flujo debido a gradiente de presión constante dentro de un tubo circular de radio R . El gradiente actúa a lo largo del eje z .

Debido a la simetría del problema, postulamos una solución en coordenadas cilíndricas de la forma :

$$u_z = u_z(\rho) \quad , \quad (\text{B.9})$$

$$u_\rho = 0 \quad , \quad (\text{B.10})$$

$$u_\theta = 0 \quad , \quad (\text{B.11})$$

La ecuación de continuidad es idénticamente satisfecha y la componente z de la ecuación de movimiento se convierte en

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du_z}{d\rho} \right) ; \quad (\text{B.12})$$

que debe ser resuelta sujeta a las siguientes condiciones de frontera :

$$u_z = 0 \quad , \quad \text{at } \rho = R \quad , \quad (\text{B.13})$$

$$u_z \quad \text{finito en } \rho = 0 \quad . \quad (\text{B.14})$$

La solución newtoniana está dada por el campo de velocidad

$$u_z = - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right], \quad (\text{B.15})$$

y el gasto está dado por

$$Q = - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\pi R^4}{8\mu}; \quad (\text{B.16})$$

que es el resultado famoso de Hagen-Poiseuille (G. Hagen 1839; J. L. Poiseuille 1840, 1841).

FUENTE Y SUMIDERO.

Una fuente sencilla es un punto de donde un fluido sale y fluye uniformemente en todas direcciones (ver figura B.3). El flujo total sobre cualquier superficie cerrada que incluya a la fuente es llamado la fuerza Q de la fuente. Las fuentes de fuerza Q negativa son llamadas sumideros. El campo de velocidades es determinado por la condición cinemática de incompresibilidad y la simetría radial.

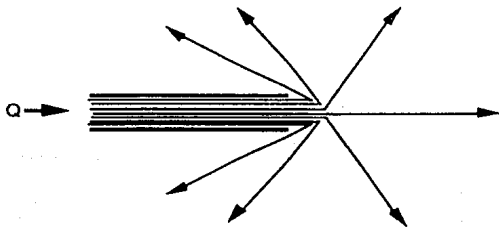


Figura B.3 Una fuente es un punto de donde el fluido sale y fluye uniformemente en todas direcciones. El flujo total a través de una superficie cerrada que contiene a la fuente es llamada la fuerza de la fuente. Fuentes de fuerza Q negativa son llamados sumideros.

Colocando el origen de un sistema de coordenadas esféricas en la posición de la fuente, el campo de velocidades tiene sólo la componente radial y es isótropo :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_r u_r(r). \quad (\text{B.17})$$

Debido a que el fluido es incompresible, el flujo a través de cualquier superficie cerrada es el mismo. Esta condición es suficiente para determinar la dependencia funcional de la velocidad. Tomando esferas concéntricas con su centro localizado en el origen, la condición de flujo total constante se traduce en que la velocidad debe decrecer en la misma proporción en la que la superficie de la esfera aumenta. El flujo total sobre cualquier esfera es proporcional a la superficie de la esfera y a la velocidad del fluido evaluado sobre la superficie de la esfera (que es constante sobre toda la superficie debido a la simetría radial). La superficie de la esfera aumenta como r^2 y por lo tanto, el campo de velocidad debe disminuir como $1/r^2$ para mantener el flujo constante. La dependencia funcional puede ser también fácilmente obtenida resolviendo la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = Q\delta(\mathbf{r}), \quad (\text{B.18})$$

donde la fuente se localiza en el origen del sistema de coordenadas esféricas. La ecuación se puede reescribir como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) = \frac{Q}{4\pi} \frac{\delta(r)}{r^2}. \quad (\text{B.19})$$

Una integración directa da el campo de velocidad

$$u_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad (\text{B.20})$$

que es independiente de la viscosidad. La presión es determinada por la ecuación de momento. Debido a la simetría del problema, es posible considerar las ecuaciones estacionarias completas de Navier Stokes:

$$\rho_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mu_0 \mu_r \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{B.21})$$

La sustitución de la suposición de velocidad radial conduce a la ecuación

$$\rho_f u_r \frac{du_r}{dr} = \frac{dp}{dr}. \quad (\text{B.22})$$

y usando el campo de velocidades anteriormente derivado, la ecuación se convierte en

$$\frac{dp}{dr} = \rho_f \frac{Q^2}{8\pi r^5} ; \quad (\text{B.23})$$

que puede ser integrada directamente para obtener el campo de presión

$$\begin{aligned} p(r) &= p_\infty + \rho_f \int_r^\infty \frac{Q^2}{8\pi r'^5} dr' \\ &= p_\infty - \frac{\rho_f Q^2}{32\pi r^4} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

CILINDRO CIRCULAR INFINITO ROTANDO CON VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE.

Un cilindro circular infinito de radio R , inmerso en un fluido newtoniano infinito, está rotando con velocidad angular Ω constante a lo largo de su eje de simetría. El eje z de un sistema de coordenadas cilíndricas se toma a lo largo del eje de simetría del cilindro como se muestra en la figura B.4.

Para el caso de un cilindro circular infinito, podemos suponer que sólo hay una componente no cero del campo de velocidad

$$\mathbf{u} = e_\phi u_\phi(\rho, z) ; \quad (\text{B.25})$$

que satisface la ecuación de momento

$$\mu(\rho, z) \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{\rho^2} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} - \frac{u_\phi}{\rho} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_\phi}{\partial z} = 0 , \quad (\text{B.26})$$

y las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u_\phi &= \Omega a & \text{en } \rho = a, \forall z ; \\ u_\phi &\rightarrow 0 & \text{a medida que } \rho \rightarrow \infty, \forall z . \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

La presión es constante en todo el fluido como requiere la ecuación de movimiento. El campo de velocidad está dado por la expresión

$$u_{\phi}(\rho) = \frac{\Omega a^2}{\rho} \quad (\text{B.28})$$

y la torca requerida para mantener el movimiento es

$$T = e_z 4\pi\mu_0 a^2 \Omega \quad (\text{B.29})$$

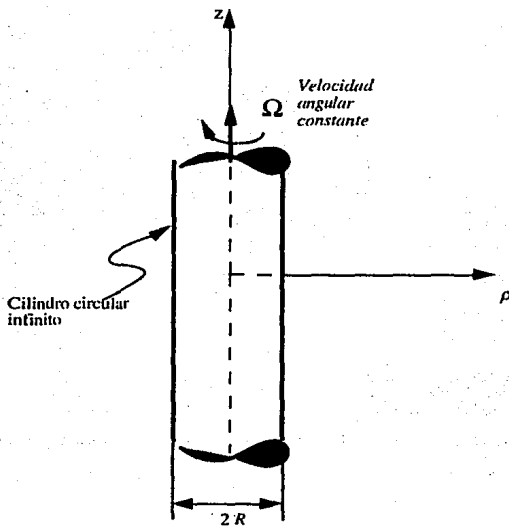


Figura B.4. Cilindro circular infinito de radio R rotando con velocidad angular Ω constante en un fluido newtoniano infinito. Debido a la simetría de las condiciones de frontera, sólo hay una componente del campo de velocidad.

ROTACION DE UNA ESFERA.

Una esfera de radio R inmersa en un fluido infinito está rotando con velocidad angular Ω constante. El fluido se encuentra en reposo en infinito, un sistema de coordenadas cilíndricas se coloca con su origen coincidiendo con el centro de la esfera y el eje z se escoge paralelo a la dirección de la velocidad angular. La geometría se muestra en la figura B.5.

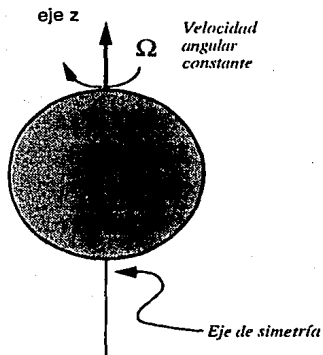


Figura B.5. Una esfera de radio R está rotando con velocidad angular constante. El eje z de un sistema de coordenadas cilíndricas es colocado paralelo a la velocidad angular y su origen en el centro de la esfera.

Debido a la simetría del problema, sólo la componente ϕ del campo de velocidad es diferente de cero :

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{e}}_{\phi} u_{\phi}(r, \theta) . \quad (\text{B.30})$$

La ecuación de movimiento debe ser resuelta bajo las siguientes condiciones de frontera :

$$\mathbf{u} = \bar{\Omega} \times \mathbf{r} = \Omega \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \Omega r \sin \theta \quad \text{en } r = a, \quad (\text{B.31})$$

$$|u| \rightarrow 0 \quad \text{a medida que } r \rightarrow \infty, \quad (\text{B.32})$$

$$p \rightarrow p_\infty \quad \text{a medida que } r \rightarrow \infty. \quad (\text{B.33})$$

La ecuación de continuidad es idénticamente satisfecha y la ecuación de momento se convierte en

$$\begin{aligned} \nabla p &= \hat{e}_\phi \mu_0 \mu_r(r) \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] = \\ &= \hat{e}_\phi \mu_0 \mu_r(r) \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right]; \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

que conduce a la conclusión de que la presión es constante en todo el fluido y la componente ϕ puede ser escrita como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0, \quad (\text{B.35})$$

y la torca requerida para mantener el movimiento es

$$\mathbf{T} = = \hat{e}_z \, 8 \pi R^3 \mu \Omega. \quad (\text{B.36})$$

APENDICE C.

FLUIDO
TRANSVERSALMENTE
ISÓTROPO DE DOS
CONSTANTES.

Materiales transversalmente isotropos están caracterizados por tener un eje de simetría. 27, 35, 36, 44. Un material en capas es un buen ejemplo de material transversalmente isotropo de dos constantes. Hay una dirección especial en el espacio que es diferente a las otras dos direcciones independientes. Esta propiedad es independiente de las fronteras del sistema. El tensor de esfuerzo debe satisfacer las siguientes relaciones de simetría

$$\begin{aligned}
 \text{i) } & \mu_{ijkl} = \mu_{ijlk} , \\
 \text{ii) } & \mu_{ijkl} = \mu_{jikl} , \\
 \text{iii) } & \mu_{ijkl} = \mu_{klij} .
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

La relación lineal más general involucra un tensor de cuarto orden. La ecuación constitutiva para materiales transversalmente isotrópos puede derivarse como sigue. Un tensor transversalmente isotrópico de cuarto orden puede ser construido utilizando deltas de Kronecker y productos del vector unitario en la dirección especial $\hat{n} \equiv \hat{e}_3$. Existen diez tensores que pueden formarse en total, pero sólo 5 satisfaciendo las simetrías requeridas en CI:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{ijkl}^1 & \equiv \delta_{ij} \delta_{kl} , \\
 \mathbf{T}_{ijkl}^2 & \equiv \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} , \\
 \mathbf{T}_{ijkl}^3 & \equiv \delta_{ij} \delta_{k3} \delta_{l3} + \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{kl} , \\
 \mathbf{T}_{ijkl}^4 & \equiv \delta_{i3} \delta_{l3} \delta_{jk} + \delta_{i3} \delta_{k3} \delta_{jl} + \delta_{j3} \delta_{l3} \delta_{ik} + \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{il} , \\
 \mathbf{T}_{ijkl}^5 & \equiv \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{l3} .
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

El tensor transversalmente isotrópico más general de cuarto orden satisfaciendo las simetrías es

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \sum_{\alpha=1}^5 c_{\alpha} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{\alpha} . \tag{C.3}$$

donde c_{α} son coeficientes constantes arbitrarios. El tensor de esfuerzos viscoso asociado a este material transversalmente isotrópico es

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} & = \underline{\underline{\mathbf{T}}} : [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] = \sum_{\alpha=1}^5 c_{\alpha} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{\alpha} : [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] = \\
 & = 2 c_1 \underline{\underline{\mathbf{U}}} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2 c_2 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] + 2 c_3 [\underline{\underline{\mathbf{U}}} \partial_3 u_3 + \hat{n} \hat{n} (\nabla \cdot \mathbf{u})] + \\
 & \quad + 4 c_4 \text{sim} [\hat{n} \partial_3 \mathbf{u} + \hat{n} \nabla u_3] + 2 c_5 \hat{n} \hat{n} \partial_3 u_3 .
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

En general, el fluido transversalmente isotrópico tiene 5 constantes. Las constantes c_1 y c_2 están relacionadas con un fluido isotrópico. c_1 está relacionada con la viscosidad en

fenómenos de compresión y c_2 en fenómenos de esfuerzo cortante. Las otras tres constantes son asociadas a la no isotropía del fluido.

El fluido transversalmente isótropo de dos constantes.

Los fluidos estratificados están caracterizados por tener reacciones diferentes dependiendo de la dirección del esfuerzo: dichas reacciones están caracterizadas por viscosidades diferentes. La característica principal de dichos fluidos es la de tener un eje de simetría. Los componentes del tensor de esfuerzos son invariantes bajo rotaciones alrededor de su eje de simetría.

Definiremos un fluido transversalmente isótropo de dos constantes como una generalización del fluido estratificado; esto es, como un fluido con el mismo tensor de viscosidad pero completamente homogéneo (sin capas). El vector unitario en la dirección del eje de simetría del fluido se toma como $\hat{n} = \hat{e}_3$. El tensor de viscosidad está dado por la ecuación constitutiva

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mu}}}}} = \mu_{\parallel} \underline{\underline{\underline{\underline{U}}}}} + (\mu_{\perp} - \mu_{\parallel}) \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}}, \quad (C.5)$$

donde $\underline{\underline{\underline{\underline{U}}}}}$ es el tensor unitario isótropo de cuarto orden y $\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}}$ es un tensor unitario de cuarto orden transversalmente isótropo; μ_{\parallel} y μ_{\perp} son las viscosidades paralela y perpendicular respectivamente, que se suponen constantes. Las componentes cartesianas del tensor de viscosidad son

$$\begin{aligned} \mu_{ijkl} &= \mu_{\parallel} U_{ijkl} + (\mu_{\perp} - \mu_{\parallel}) H_{ijkl} \\ &= \mu U_{ijkl} + \Delta\mu H_{ijkl} \end{aligned} \quad (C.6)$$

donde

$$U_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (C.7)$$

$$H_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{i3} \delta_{l3} \delta_{jk} + \delta_{i3} \delta_{k3} \delta_{jl} + \delta_{j3} \delta_{l3} \delta_{ik} + \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{il} - 4 \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{l3}) \quad (C.8)$$

y $\mu = \mu_{\parallel}$ y $\Delta\mu = \mu_{\perp} - \mu_{\parallel}$. En términos de las constantes establecidas en la primera sección, el tensor de esfuerzos es:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = c_2 \left(\underline{\underline{\mathbf{T}}}^2 - \frac{2}{3} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^1 \right) + c_4 \left(\underline{\underline{\mathbf{T}}}^4 - 4 \underline{\underline{\mathbf{T}}}^3 \right) = \mu \left(\underline{\underline{\mathbf{T}}}^2 - \frac{2}{3} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^1 \right) + \frac{\Delta\mu}{2} \left(\underline{\underline{\mathbf{T}}}^4 - 4 \underline{\underline{\mathbf{T}}}^3 \right). \quad (C.9)$$

El problema de eigenvalores para el fluido transversalmente isotrópico.

Siguiendo el procedimiento establecido en el capítulo 2, la ecuación que satisface la función de corriente requiere el conocimiento de los eigenvalores del tensor de viscosidad. El conjunto de ecuaciones asociado con el problema de eigenvalores para el fluido transversalmente isotrópico es

$$\mu_{ijkl} D_{ik}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{ij}^{\alpha}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (C.10)$$

donde μ_{ijkl} está dado por la expresión C.6. Explícitamente, el conjunto de ecuaciones es

$$\begin{aligned} \mu D^{\alpha}_{11} &= \lambda^{\alpha} D_{11}, \\ \mu D^{\alpha}_{22} &= \lambda^{\alpha} D_{22}, \\ \mu D^{\alpha}_{33} &= \lambda^{\alpha} D_{33}, \\ \mu D^{\alpha}_{12} &= \lambda^{\alpha} D_{12}, \\ (\mu + \Delta\mu) D^{\alpha}_{13} &= \lambda^{\alpha} D_{13}, \\ (\mu + \Delta\mu) D^{\alpha}_{23} &= \lambda^{\alpha} D_{23}; \end{aligned} \quad (C.11)$$

para $\alpha = 1, \dots, 6$.

Los eigenvalores están dados por la solución de la ecuación característica :

$$\det \begin{bmatrix} \mu - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\mu + \Delta\mu) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\mu + \Delta\mu) - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{C.12})$$

que conduce a una ecuación algebraica trivial

$$(\lambda - \mu - \Delta\mu)^2 (\lambda - \mu)^4 = 0. \quad (\text{C.13})$$

La solución de la ecuación característica da el siguiente conjunto de eigenvalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \mu, \\ \lambda_5 = \lambda_6 = \mu + \Delta\mu; \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

donde podemos ver que sólo hay dos eigenvalores distintos de cero como se esperaba. Los correspondientes eigenvectores son

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{D}}}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \underline{\underline{\mathbf{D}}}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}^6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

El tensor de viscosidad puede ser escrito en la forma

$$\underline{\underline{\mu}} = \mu [\underline{\underline{\mathbf{D}}}^1 \underline{\underline{\mathbf{D}}}^1 + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^3 \underline{\underline{\mathbf{D}}}^3 + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^4 \underline{\underline{\mathbf{D}}}^4] + (\mu + \Delta\mu) [\underline{\underline{\mathbf{D}}}^5 \underline{\underline{\mathbf{D}}}^5 + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^6 \underline{\underline{\mathbf{D}}}^6]. \quad (\text{C.16})$$

Las ecuaciones de movimiento.

Los operadores asociados con esta descomposición son dados por la expresión general

$$E_{\alpha}^2 = \left[\underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla (\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{\alpha} \cdot \nabla) \underline{\underline{\varepsilon}}_z \right], \quad (\text{C.17})$$

se convierten en

$$\begin{aligned}
 E_1^2 &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad E_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad E_3^2 = 0, \quad E_4^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \\
 E_5^2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}, \quad E_6^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{C.18}$$

que conduce a la ecuación que satisface la función de corriente

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha E_\alpha^2 E_\alpha^2 \psi = \\
 &= \sum_{\alpha=1}^6 \mu E_\alpha^2 E_\alpha^2 \psi + \Delta \mu \left[E_5^2 E_5^2 + E_6^2 E_6^2 \right] \psi = \\
 &= \mu \left[2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \psi + \\
 &\quad + \Delta \mu \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \psi = \\
 &= \mu \nabla^2 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \right] + \Delta \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \\
 &= \mu \nabla^2 \left[\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi \right] + \Delta \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi.
 \end{aligned}
 \tag{C.19}$$

Esta ecuación puede ser derivada de forma alternativa para confirmar resultados.

La ecuación de movimiento en coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_i \mu_{ijkl} (\partial_j u_k + \partial_k u_j) \\
 &= \partial_i \left(\mu U_{ijkl} + \Delta \mu H_{ijkl} \right) (\partial_k u_j + \partial_j u_k) = \\
 &= -\mu \partial_i \partial_j \varepsilon_{jmn} \partial_m \psi - \Delta \mu \partial_i H_{ijkl} (\partial_k \varepsilon_{lmn} \delta_{n3} \partial_m \psi + \partial_j \varepsilon_{kmn} \delta_{n3} \partial_m \psi) = \\
 &= -\mu \partial_i \partial_j \varepsilon_{jmn} \partial_m \psi - \Delta \mu \partial_i \left[\delta_{i3} (\partial_j \varepsilon_{jmn} \partial_m \psi) + \delta_{j3} (\partial_3 \varepsilon_{imn} \partial_m \psi) \right] =
 \end{aligned}$$

130 Apéndice C

$$= -\mu \partial_i \partial_i \epsilon_{jmn} \partial_m \psi - \Delta \mu [\partial_3 \partial_3 \epsilon_{jmn} \partial_m \psi]; \quad (\text{C.20})$$

tomando el rotacional se convierte en

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon_{pnj} \partial_n \left[\mu \partial_i \partial_i \epsilon_{jmn} \partial_m \psi + \Delta \mu [\partial_3 \partial_3 \epsilon_{jmn} \partial_m \psi] \right] = \\ &= \partial_n \left[\mu \partial_i \partial_i (\delta_{pm} \delta_{n3} - \delta_{p3} \delta_{mn}) \partial_m \psi + \Delta \mu \partial_3 \partial_3 (\delta_{pm} \delta_{n3} - \delta_{p3} \delta_{mn}) \partial_m \psi \right]; \quad (\text{C.21}) \end{aligned}$$

donde usamos la identidad

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}; \quad (\text{C.22})$$

rearrreglando términos la ecuación se puede escribir como

$$0 = \mu \partial_i \partial_i (\partial_3 \partial_p \psi - \delta_{p3} \partial_m \partial_m \psi) + \Delta \mu \partial_3 \partial_3 (\partial_3 \partial_p \psi - \delta_{p3} \partial_m \partial_m \psi), \quad (\text{C.23})$$

multiplicando por δ_{p3}

$$0 = \mu \partial_i \partial_i (\partial_3 \partial_3 \psi - \partial_m \partial_m \psi) + \Delta \mu \partial_3 \partial_3 (\partial_3 \partial_3 \psi - \partial_m \partial_m \psi), \quad (\text{C.24})$$

que es exactamente la misma ecuación que la obtenida en el método general. Usando coordenadas cilíndricas, la ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \nabla^2 \left[\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi \right] + \Delta \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = \\ &= \mu \nabla^2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right] + \Delta \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right] = \\ &= \left[\mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + (\mu + \Delta \mu) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right], \quad (\text{C.25}) \end{aligned}$$

y si definimos la nueva variable z' como

$$z' = \frac{z}{\left(\frac{\mu + \Delta \mu}{\mu} \right)^{1/2}}, \quad (\text{C.26})$$

la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right] \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right] = \\ & = \nabla'^2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

que es la ecuación isótropa en la variable escalada z' .

APENDICE D.

EL TENSOR DE VISCOSIDAD DE CUARTO ORDEN.

LA DESCOMPOSICION DEL TENSOR DE CUARTO ORDEN.

Es usual el descomponer tensores de segundo orden en ejes principales. Dicha descomposición permite obtener los coeficientes del tensor que son realmente relevantes, esto es, aquellos que no dependen del sistema de coordenadas y que dan información intrínseca sobre el tensor. Los tensores de cuarto orden también son susceptibles de ser descompuestos de manera similar. Aún cuando su interpretación geométrica no es tan

obvia como en el caso de tensores de segundo orden, sigue ofreciendo el beneficio de mostrar los coeficientes que realmente definen al tensor.

Esta descomposición no solamente reducirá el número de componentes independientes, sino también determinará aquéllas que tienen significado físico en las ecuaciones de movimiento. Mostraremos que hay una analogía directa con la descomposición de tensores de segundo orden en términos de sus invariantes y ejes principales.

La descomposición se propone que es de la forma:

$$\underline{\underline{\mu}} = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha}, \quad (D.1)$$

donde $\underline{\underline{D}}^{\alpha}$ es un tensor simétrico de segundo orden asociado con el eigenvalor λ^{α} . Es fácil demostrar que esta representación tiene todas las simetrías antes pedidas al tensor de viscosidad de cuarto orden. Preguntas relacionadas con la naturaleza y existencia de tal descomposición serán más fácilmente contestadas una vez establecida la conexión con problemas usuales de eigenvalores en álgebra lineal. Mostraremos que esta descomposición conduce a un problema de eigenvalores, que es equivalente a un problema usual en álgebra lineal. Esto se probará mostrando un isomorfismo con un problema de eigenvalores en el espacio cartesiano de seis dimensiones. Este isomorfismo nos permitirá utilizar todos los resultados del álgebra lineal, incluyendo la existencia y unicidad de tal descomposición.

EL PROBLEMA DE EIGENVALORES.

El problema de eigenvalores asociado con esta descomposición, puede ser escrito en la siguiente forma invariante:

$$\underline{\underline{\mu}} : \underline{\underline{D}}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha}, \quad (D.2)$$

donde los tensores de segundo rango $\underline{\underline{D}}^{\alpha}$ son simétricos por definición. Esta es una ecuación tensorial que es equivalente a 9 ecuaciones escalares. Debido a las simetrías del tensor de viscosidad, sólo seis de ellas son linealmente independientes.

134 Apéndice D

Para resolver el problema de eigenvalores, fijaremos un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional y nos referiremos a él como el sistema original de referencia. En este sistema de coordenadas el tensor de viscosidad tiene 81 componentes:

$$\mu_{ijkl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 ; \quad (D.3)$$

de las cuales sólo 21 son independientes debido a las simetrías. El valor numérico de dichas componentes depende del sistema de coordenadas y del fluido en cuestión. El conjunto de ecuaciones lineales asociado al problema de eigenvalores puede ser escrito en la siguiente forma compacta:

$$\mu_{ijkl} D_{jk}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{ij}^{\alpha} \quad i, j = 1, 2, 3 ; \quad (D.4)$$

y como μ_{ijkl} es simétrico en su primer par de índices, sólo hay seis ecuaciones independientes. Explícitamente, el conjunto de 9 ecuaciones es:

$$\begin{aligned} \mu_{1111} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1122} D_{22}^{\alpha} + \mu_{1133} D_{33}^{\alpha} + \mu_{1112} D_{21}^{\alpha} + \mu_{1121} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{1113} D_{31}^{\alpha} + \mu_{1131} D_{13}^{\alpha} + \mu_{1123} D_{32}^{\alpha} + \mu_{1132} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{11}^{\alpha} . \end{aligned} \quad (D.5a)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2211} D_{11}^{\alpha} + \mu_{2222} D_{22}^{\alpha} + \mu_{2233} D_{33}^{\alpha} + \mu_{2212} D_{21}^{\alpha} + \mu_{2221} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{2213} D_{31}^{\alpha} + \mu_{2231} D_{13}^{\alpha} + \mu_{2223} D_{32}^{\alpha} + \mu_{2232} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{22}^{\alpha} . \end{aligned} \quad (D.5b)$$

$$\begin{aligned} \mu_{3311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{3322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{3333} D_{33}^{\alpha} + \mu_{3312} D_{21}^{\alpha} + \mu_{3321} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{3313} D_{31}^{\alpha} + \mu_{3331} D_{13}^{\alpha} + \mu_{3323} D_{32}^{\alpha} + \mu_{3332} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{33}^{\alpha} . \end{aligned} \quad (D.5c)$$

$$\begin{aligned} \mu_{1211} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1222} D_{22}^{\alpha} + \mu_{1233} D_{33}^{\alpha} + \mu_{1212} D_{21}^{\alpha} + \mu_{1221} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{1213} D_{31}^{\alpha} + \mu_{1231} D_{13}^{\alpha} + \mu_{1223} D_{32}^{\alpha} + \mu_{1232} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{12}^{\alpha} . \end{aligned} \quad (D.5d)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2111} D_{11}^{\alpha} + \mu_{2122} D_{22}^{\alpha} + \mu_{2133} D_{33}^{\alpha} + \mu_{2112} D_{21}^{\alpha} + \mu_{2121} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{2113} D_{31}^{\alpha} + \mu_{2131} D_{13}^{\alpha} + \mu_{2123} D_{32}^{\alpha} + \mu_{2132} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{21}^{\alpha} . \end{aligned} \quad (D.5e)$$

$$\mu_{1311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{1333} D_{33}^{\alpha} + \mu_{1312} D_{21}^{\alpha} + \mu_{1321} D_{12}^{\alpha} +$$

$$+ \mu_{1313} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1331} D_{13}^{\alpha} + \mu_{1323} D_{32}^{\alpha} + \mu_{1332} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{13}^{\alpha} \quad (D.5d)$$

$$\begin{aligned} \mu_{3111} D_{11}^{\alpha} + \mu_{3122} D_{22}^{\alpha} + \mu_{3133} D_{33}^{\alpha} + \mu_{3112} D_{21}^{\alpha} + \mu_{3121} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{3113} D_{31}^{\alpha} + \mu_{3131} D_{13}^{\alpha} + \mu_{3123} D_{32}^{\alpha} + \mu_{3132} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{31}^{\alpha} \end{aligned} \quad (D.5g)$$

$$\begin{aligned} \mu_{3211} D_{11}^{\alpha} + \mu_{3222} D_{22}^{\alpha} + \mu_{3233} D_{33}^{\alpha} + \mu_{3212} D_{21}^{\alpha} + \mu_{3221} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{3213} D_{31}^{\alpha} + \mu_{3231} D_{13}^{\alpha} + \mu_{3223} D_{32}^{\alpha} + \mu_{3232} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{32}^{\alpha} \end{aligned} \quad (D.5h)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{2322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{2333} D_{33}^{\alpha} + \mu_{2312} D_{21}^{\alpha} + \mu_{2321} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{2313} D_{31}^{\alpha} + \mu_{2331} D_{13}^{\alpha} + \mu_{2323} D_{32}^{\alpha} + \mu_{2332} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{23}^{\alpha} \end{aligned} \quad (D.5i)$$

Usando las simetrías del tensor de viscosidad, las ecuaciones D.5d y D.5e son idénticas; análogamente, las ecuaciones D.5f y D.5g y las ecuaciones D.5h y D.5i son también equivalentes. Este conjunto de 9 ecuaciones es equivalente al siguiente conjunto de 6 ecuaciones independientes:

$$\begin{aligned} \mu_{1111} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1122} D_{22}^{\alpha} + \mu_{1133} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{1112} D_{12}^{\alpha} + \\ + 2\mu_{1113} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{1123} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{11}^{\alpha} \end{aligned} \quad (D.6a)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2211} D_{11}^{\alpha} + \mu_{2222} D_{22}^{\alpha} + \mu_{2233} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{2212} D_{12}^{\alpha} + \\ + 2\mu_{2213} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{2223} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{22}^{\alpha} \end{aligned} \quad (D.6b)$$

$$\begin{aligned} \mu_{3311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{3322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{3333} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{3312} D_{12}^{\alpha} + \\ + 2\mu_{3313} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{3323} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{33}^{\alpha} \end{aligned} \quad (D.6c)$$

$$\begin{aligned} \mu_{1211} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1222} D_{22}^{\alpha} + \mu_{1233} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{1212} D_{12}^{\alpha} + \\ + 2\mu_{1213} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{1223} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{12}^{\alpha} \end{aligned} \quad (D.6d)$$

$$\mu_{1311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{1333} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{1312} D_{12}^{\alpha} +$$

$$+ 2\mu_{1313} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{1323} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{13}^{\alpha}, \quad (\text{D.6c})$$

$$\mu_{2311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{2322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{2333} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{2312} D_{12}^{\alpha} +$$

$$+ 2\mu_{2313} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{2323} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{23}^{\alpha}; \quad (\text{D.6f})$$

que constituye un conjunto de 6 ecuaciones lineales para las seis variables D_{11}^{α} , D_{22}^{α} , D_{33}^{α} , D_{12}^{α} , D_{13}^{α} and D_{23}^{α} .

EL ISOMORFISMO Y EL ESPACIO ASOCIADO DE 6 DIMENSIONES.

Para poder usar los resultados de la teoría del álgebra lineal, tenemos que probar que existe un isomorfismo entre el espacio de todos los tensores simétricos de segundo orden y el espacio cartesiano de 6 dimensiones. Para probar tal relación, tenemos que definir un producto interno en el espacio de tensores simétricos de segundo orden y una transformación lineal al espacio cartesiano de 6 dimensiones.

Consideremos el conjunto Ψ de todos los tensores simétricos de segundo orden

$$\Psi = \left\{ \underline{\mathbf{T}} / T_{ij} = T_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3 \right\}, \quad (\text{D.7})$$

con el producto interno entre dos tensores simétricos de segundo orden $(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{S}})$ definido como

$$(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{S}}) = \underline{\mathbf{T}} : \underline{\mathbf{S}} = T_{ij} S_{ji}, \quad (\text{D.8})$$

y la suma de tensores definida en la forma usual

$$(\underline{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{S}})_{ij} = T_{ij} + S_{ij}. \quad (\text{D.9})$$

Este producto interno tiene todas las propiedades requeridas para ser llamado producto interno en un espacio vectorial y el conjunto Ψ es cerrado respecto a la operación de suma. El conjunto Ψ tiene todas las propiedades de un espacio vectorial.

Ahora consideremos el espacio vectorial de seis dimensiones, cuyos elementos serán denotados por letras mayúsculas en negritas. Definamos la transformación lineal \mathfrak{S} entre elementos en estos dos espacios:

$$\mathfrak{S}: \Psi \rightarrow \mathfrak{R}^6,$$

$$\mathbf{v} = \mathfrak{S}(\mathbf{D}) ; \quad (\text{D.10})$$

dada por la expresión

$$\mathbf{v} = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6) = (D_{11}, D_{22}, D_{33}, \sqrt{2} D_{12}, \sqrt{2} D_{13}, \sqrt{2} D_{23}), \quad (\text{D.11})$$

o introduciendo la regla de índices

<i>índices de matriz</i>	<i>I</i>	1	2	3	4	5	6	(D.12)
<i>índices de tensor</i>	<i>i, j</i>	11	22	33	$\overline{12, 21}$	$\overline{13, 31}$	$\overline{23, 32}$	

la transformación lineal puede ser escrita como

$$V_I = \begin{cases} D_I = D_{ij}, & I = 1, 2, 3 \\ \sqrt{2} D_I = D_{ij}, & I = 4, 5, 6. \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

El tensor de viscosidad de cuarto orden está representado por una matriz de 6×6 M_{IJ} cuyos elementos se definen así:

$$M_{IJ} = \begin{cases} \mu_{IJ}, & I, J = 1, 2, 3 \\ \sqrt{2} \mu_{IJ}, & I, J = 4, 5, 6 \\ 2\mu_{IJ}, & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

La matriz \mathbf{M} es simétrica por construcción y tiene sólo 21 componentes independientes.

El conjunto de ecuaciones D.5 es, por construcción, equivalente a

$$M_{IJ} V_J^\alpha = \lambda^\alpha V_I^\alpha, \quad I, J = 1, 2, \dots, 6 ; \quad (\text{D.15})$$

o explícitamente

$$M_{11} V_1^\alpha + M_{12} V_2^\alpha + M_{13} V_3^\alpha + M_{14} V_4^\alpha + M_{15} V_5^\alpha + M_{16} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_1^\alpha, \quad (\text{D.16a})$$

$$M_{21} V_1^\alpha + M_{22} V_2^\alpha + M_{23} V_3^\alpha + M_{24} V_4^\alpha + M_{25} V_5^\alpha + M_{26} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_2^\alpha, \quad (\text{D.16b})$$

$$M_{31} V_1^\alpha + M_{32} V_2^\alpha + M_{33} V_3^\alpha + M_{34} V_4^\alpha + M_{35} V_5^\alpha + M_{36} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_3^\alpha, \quad (\text{D.16c})$$

$$M_{41} V_1^\alpha + M_{42} V_2^\alpha + M_{43} V_3^\alpha + M_{44} V_4^\alpha + M_{45} V_5^\alpha + M_{46} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_4^\alpha, \quad (\text{D.16d})$$

$$M_{51} V_1^\alpha + M_{52} V_2^\alpha + M_{53} V_3^\alpha + M_{54} V_4^\alpha + M_{55} V_5^\alpha + M_{56} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_5^\alpha, \quad (\text{D.16e})$$

$$M_{61} V_1^\alpha + M_{62} V_2^\alpha + M_{63} V_3^\alpha + M_{64} V_4^\alpha + M_{65} V_5^\alpha + M_{66} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_6^\alpha; \quad (\text{D.16f})$$

que constituye un problema regular de eigenvalores en álgebra lineal.

Por construcción, el producto interno es el mismo en los dos espacios. Si tomamos el producto interno de dos elementos en el espacio de 6 dimensiones, y el producto interno de sus contrapartes en el espacio de tensores simétricos, el valor numérico del producto interno es el mismo en ambos casos.

$$\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^2 = \underline{\mathbf{D}}^1 : \underline{\mathbf{D}}^2, \quad (\text{D.17})$$

donde

$$\mathbf{v}^1 = \mathfrak{I}(\underline{\mathbf{D}}^1), \quad (\text{D.18})$$

$$\mathbf{v}^2 = \mathfrak{I}(\underline{\mathbf{D}}^2). \quad (\text{D.19})$$

Con estas definiciones, el conjunto Ψ y el espacio cartesiano de dimensión 6 forman un isomorfismo. Todos los resultados del álgebra lineal son aplicables al conjunto Ψ .

RESULTADOS DE ALGEBRA LINEAL.

En la sección anterior establecimos el isomorfismo que ahora nos permite usar todos los resultados del álgebra lineal. La descomposición del tensor de viscosidad es equivalente a la descomposición de \mathbf{M} en la forma

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha}, \quad (\text{D.20})$$

donde λ^α y \mathbf{V}^α son los eigenvalores y eigenvectores de \mathbf{M} . Todo lo que se concluye acerca de \mathbf{M} es aplicable a $\underline{\underline{\mu}}$. Hay que notar que ésta es una descomposición en términos de los invariantes λ^α de \mathbf{M} y sus "ejes principales" \mathbf{V}^α .

Lo primero que podemos concluir es que tal descomposición existe y es única. Tal descomposición existe para cualquier matriz cuadrada \mathbf{M} y su demostración puede ser encontrada en muchos textos de álgebra lineal. El número de elementos distintos de cero en la suma corresponde al número de eigenvalores diferentes asociados a \mathbf{M} . Una matriz es hermitiana si es igual a su transpuesta conjugada. Por construcción \mathbf{M} está definida como una matriz real simétrica y por lo tanto es hermitiana. Para matrices hermitianas todos los eigenvalores son reales y para matrices de 6×6 hay hasta 6 eigenvalores reales diferentes. Si todos los eigenvalores son diferentes entonces los correspondientes eigenvectores son perpendiculares entre sí y \mathbf{V}^α constituye una base para el espacio de 6 dimensiones. Aún si todos los eigenvalores no son diferentes, siempre se puede ejecutar un procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt y obtener un conjunto completo de eigenvectores unitarios.

Estos resultados nos permiten escribir la descomposición como la suma:

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \mathbf{V}^\alpha \mathbf{V}^\alpha, \quad (\text{D.21})$$

donde usamos los eigenvectores unitarios \mathbf{V}^α que satisfacen la relación

$$\mathbf{V}^\alpha \cdot \mathbf{V}^\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{D.22})$$

donde $\delta_{\alpha\beta}$ es la función delta de Kronecker. Análogamente, el tensor de viscosidad puede ser descompuesto en la forma

$$\underline{\underline{\mu}} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{\mathbf{D}}}^\alpha \underline{\underline{\mathbf{D}}}^\alpha, \quad (\text{D.23})$$

y las propiedades ortonormales se traducen directamente en ortonormalidad de los correspondientes tensores $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^\alpha$

$$\underline{\underline{D}}^\alpha : \underline{\underline{D}}^\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (D.24)$$

En conclusión, la descomposición existe y es única. Para cada fluido hay seis eigenvalores y seis tensores de segundo orden únicos. La sección siguiente da una interpretación de la existencia y unicidad de la descomposición vía los ejes principales de cualquier cuerpo mecánico.

EJES PRINCIPALES.

La descomposición

$$\underline{\underline{\mu}} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha \quad (D.25)$$

es equivalente a la descomposición

$$\underline{\underline{M}} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{v}}^\alpha \underline{\underline{v}}^\alpha ; \quad (D.26)$$

como ya hemos demostrado que existe un isomorfismo entre los dos espacios asociados. Daremos una analogía de tal descomposición utilizando los ejes principales de cualquier tensor. Para ser específicos, usaremos el espacio de tres dimensiones donde los resultados son más fácilmente visualizables. Supongamos que tenemos un tensor de segundo orden en tres dimensiones. En términos de diádicas, el tensor puede ser expresado en la forma:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} = & \mathbf{ii} T_{11} + \mathbf{ij} T_{12} + \mathbf{ik} T_{13} + \\ & + \mathbf{ji} T_{11} + \mathbf{jj} T_{12} + \mathbf{jk} T_{13} + \\ & + \mathbf{ki} T_{11} + \mathbf{kj} T_{12} + \mathbf{kk} T_{13} = \\ = & \mathbf{aa} T_1 + \mathbf{bb} T_2 + \mathbf{cc} T_3 \quad (D.27) \end{aligned}$$

donde T_1 , T_2 y T_3 son los invariantes del tensor y \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son los ejes principales. La descomposición en ejes principales es única para cada tensor. Este resultado es válido en cualquier dimensión.

Finalmente, la tasa de disipación de energía mecánica Φ para este fluido generalizado está dada por la expresión

$$\Phi = \underline{\tau} : \underline{S} = \left(\underline{\mu} : \underline{S} \right) : \underline{S} = \left(\left(\sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \underline{D}^{\alpha} \underline{D}^{\alpha} \right) : \underline{S} \right) : \underline{S} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} (\underline{D}^{\alpha} : \underline{S})^2 \geq 0, \quad (D.28)$$

la cantidad Φ debe ser no negativa y sólo cero cuando $\underline{S} = \underline{0}$, correspondiendo a una rotación de cuerpo rígido. La desigualdad implica

$$\lambda^{\alpha} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6. \quad (D.29)$$

APENDICE E.

ECUACIONES DE MOVIMIENTO FTI.

FLUJO CON SIMETRIA AXIAL.

El uso de una función de corriente es una herramienta fuerte para resolver flujos bidimensionales. Reduce el problema a encontrar una función escalar. Este método no es en general aplicable a flujos tridimensionales. Sólo en casos especiales, es posible usar la función de corriente en flujos tridimensionales. Estos flujos poseen ciertas simetrías que hacen posible su uso.

Flujo de función de corriente alrededor de un sólido de revolución, paralelo a su eje de simetría, es un ejemplo de dichos flujos. Otro tipo de flujos es el de rotación de cuerpos axisimétricos. En esta sección obtendremos las ecuaciones de movimiento para ambos tipos de flujo.

ROTACION DE CUERPOS CON SIMETRIA AXIAL.

Para la rotación de cuerpos axisimétricos, podemos definir una función de corriente ψ como sigue. El cuerpo está rotando alrededor de su eje de simetría, que coincide con el eje z de un sistema de coordenadas cilíndricas. Debido a la simetría del problema, esperamos que el flujo sea concéntrico alrededor del eje z y sólo la componente ϕ del campo de velocidad se espera sea diferente de cero.

La función de corriente ψ asociada con este tipo de flujo, está conectada con el campo de velocidad a través de la ecuación

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{e}_z \times \nabla \psi(\rho, z) \\ &= -\mathbf{e}_\phi \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \mathbf{e}_\phi u_\phi(\rho, z) \\ &= \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Tomando el rotacional de las ecuaciones de movimiento, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla \times \nabla p = \nabla \times \left[\left(\sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \nabla \cdot \underline{\underline{D}}^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha \right) : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+) \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{\epsilon}} : \nabla \left[\nabla \cdot \underline{\underline{D}}^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+) \right] \\ &= - \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{\epsilon}} : \nabla \left[\nabla \cdot \underline{\underline{D}}^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha : \left\{ \nabla \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi + (\nabla \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi)^+ \right\} \right] \quad ; (\text{E.2}) \end{aligned}$$

y como es simétrico

$$\sum_{\alpha=1}^6 2\lambda^\alpha \underline{\underline{\epsilon}} : \nabla \left[\nabla \cdot \underline{\underline{D}}^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha : \nabla \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi \right] = \mathbf{0} \quad , \quad (\text{E.3})$$

que es una ecuación vectorial. Multiplicando esta ecuación por el vector unitario \mathbf{e}_z obtenemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{\alpha=1}^6 2\lambda^\alpha \mathbf{e}_z \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla \left[\nabla \cdot \underline{\underline{D}}^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha : \nabla \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi \right] \\
 &= \sum_{\alpha=1}^6 2\lambda^\alpha \left[\underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla (\underline{\underline{D}}^\alpha \cdot \nabla) \mathbf{e}_z \right] \left[\underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla (\underline{\underline{D}}^\alpha \cdot \nabla) \mathbf{e}_z \right] \\
 &= \sum_{\alpha=1}^6 2\lambda^\alpha E_\alpha^2 E_\alpha^2 \psi
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

La ecuación que satisface la función de corriente está dada por la expresión

$$\sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha E_\alpha^2 E_\alpha^2 \psi = 0 ; \tag{E.5}$$

donde el operador E_α^2 está definido como

$$E_\alpha^2 \equiv \left[\underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla (\underline{\underline{D}}^\alpha \cdot \nabla) \hat{\mathbf{e}}_z \right]. \tag{E.6}$$

Esta es la ecuación generalizada que satisface la función de corriente. Para un fluido isótropo sólo hay un eigenvalor diferente de cero y la ecuación se reduce a la forma normal para fluidos newtonianos

$$E^4 \psi = 0 ; \tag{E.7}$$

donde la viscosidad no aparece dado que es el único eigenvalor y podemos dividir la ecuación por μ . En el caso general, los cocientes de los diferentes eigenvalores aparecerán en las ecuaciones de movimiento.

FLUJO ALREDEDOR DE UN CUERPO DE REVOLUCION.

El flujo alrededor de un cuerpo de revolución, es un flujo axisimétrico que puede ser analizado utilizando el método de la función de corriente. Para derivar la ecuación de movimiento correspondiente a la función de corriente, usaremos un sistema de coordenadas cilíndricas con el eje z paralelo al eje de simetría del cuerpo de revolución. El flujo de función de corriente se supone paralelo al eje de simetría. La función de corriente $\psi(\rho, z)$

está relacionada con el campo de velocidad $u(\rho, z)$ a través de la siguiente relación (Happel & Brenner, Low Reynolds Hydrodynamics)

$$u(\rho, z) = -\nabla \times \left(\hat{e}_\phi \frac{\psi}{\rho} \right) = \underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla \hat{e}_\phi \left(\frac{\psi}{\rho} \right); \quad (\text{E.8})$$

que en coordenadas cilíndricas se convierte en

$$u(\rho, z) = \hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi}{\rho} \right) - \hat{e}_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\psi}{\rho} \right), \quad (\text{E.9})$$

que conduce al siguiente tensor de deformación

$$\begin{aligned} \nabla u + (\nabla u)^+ &= \\ &= 2 \text{sym} \left[\hat{e}_\rho \hat{e}_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - \hat{e}_z \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \hat{e}_\phi \hat{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\hat{e}_\rho \hat{e}_z + \hat{e}_z \hat{e}_\rho) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right) = \\ &= \left[2 \hat{e}_\rho \hat{e}_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - 2 \hat{e}_z \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + 2 \hat{e}_\phi \hat{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + (\hat{e}_\rho \hat{e}_z + \hat{e}_z \hat{e}_\rho) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right). \quad (\text{E.10}) \end{aligned}$$

El análisis se restringirá a fluidos que sean invariantes ante rotaciones alrededor del eje z . Esta suposición es hecha para mantener la simetría del flujo. Los fluidos con esta propiedad son llamados transversalmente isotrópicos. La simetría puede ser destruida durante el flujo y ciertas restricciones deben ser consideradas. Usando la descomposición del tensor de viscosidad, la parte viscosa del tensor de esfuerzos se convierte en

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} &= \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha : \left[2 \hat{e}_\rho \hat{e}_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - 2 \hat{e}_z \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + 2 \hat{e}_\phi \hat{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + (\hat{e}_\rho \hat{e}_z + \hat{e}_z \hat{e}_\rho) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right). \quad (\text{E.11}) \end{aligned}$$

Tomando la divergencia del tensor de esfuerzos, incluyendo la presión, la ecuación de movimiento se convierte en

$$\nabla \rho = \nabla \cdot \left\{ \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left[2\hat{\mathbf{e}}_{\rho} \hat{\mathbf{e}}_{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - 2\hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + 2\hat{\mathbf{e}}_{\phi} \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + (\hat{\mathbf{e}}_{\rho} \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_{\rho}) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \right\}; \quad (\text{E.12})$$

tomando el rotacional, la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla \times \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left\{ \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left[2\hat{\mathbf{e}}_{\rho} \hat{\mathbf{e}}_{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - 2\hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + 2\hat{\mathbf{e}}_{\phi} \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + (\hat{\mathbf{e}}_{\rho} \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_{\rho}) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \right\} = \\ &= \nabla \times \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left\{ 2 \left[D_{\rho\rho}^{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - D_{zz}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{\phi\phi}^{\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^{\alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \right\} = \\ &= 2\nabla \times \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left[D_{\rho\rho}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - D_{zz}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{\phi\phi}^{\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^{\alpha} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \psi; \quad (\text{E.13}) \end{aligned}$$

y finalmente, multiplicando por el vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_{\phi}$, la ecuación se convierte en

$$\hat{\mathbf{e}}_{\phi} \cdot \left\{ \nabla \times \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left[D_{\rho\rho}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - D_{zz}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{\phi\phi}^{\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^{\alpha} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \psi \right\} = 0. \quad (\text{E.14})$$

Evaluando explícitamente el operador que aparece en la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned}
& \hat{e}_\phi \cdot \{ \nabla \times [\nabla \cdot \underline{D}^\alpha] \} = \\
& = \hat{e}_\phi \cdot \left\{ \nabla \times \left[\hat{e}_\rho \left(D_{\rho\rho}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) + \hat{e}_z \left(D_{\rho z}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \hat{e}_\phi \left(D_{\rho\phi}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\phi}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) \right] \right\} = \\
& = \hat{e}_\phi \cdot \left\{ -\hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\rho\phi}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\phi}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \hat{e}_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \left(D_{\rho\phi}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\phi}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \hat{e}_\phi \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\rho\rho}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(D_{\rho z}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \right\} = \\
& = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\rho\rho}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(D_{\rho z}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \cdot \quad (E.15)
\end{aligned}$$

La ecuación se convierte en

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\rho\rho}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(D_{\rho z}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \\
& \left[D_{\rho\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} - D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + D_{\phi\phi}^\alpha \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^\alpha \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi = \\
& = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\rho\rho}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(D_{\rho z}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \\
& \frac{1}{\rho} \left[D_{\rho\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + D_{\phi\phi}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \left[D_{\rho\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{z\alpha}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \frac{1}{\rho} \\
& \left[D_{\rho\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - D_{z\alpha}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + D_{\phi\phi}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi - \\
& - \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \frac{1}{\rho} \left[D_{\rho\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + D_{z\rho}^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{z\alpha}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \right] \\
& \left[D_{\rho\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - D_{z\alpha}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + D_{\phi\phi}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi \quad (E.16)
\end{aligned}$$

FLUJO ALREDEDOR DE UN CUERPO DE REVOLUCION.

1.8.1 Ecuaciones de movimiento.

Otro ejemplo relativo al fluido transversalmente isoótrofo es del flujo alrededor de un cuerpo de revolución. Flujo axisimétrico ocurrirá si los ejes de simetría del fluido y del cuerpo de revolución coinciden. Para flujos axisimétricos, podemos derivar una ecuación para la función de corriente.

Consideremos un cuerpo de revolución inmerso en un fluido transversalmente isotrópico. Los ejes del fluido y del cuerpo coinciden. Usaremos un sistema de coordenadas cilíndricas con el eje z a lo largo del eje de simetría. El campo de velocidades está relacionado con la función de corriente por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi \times \nabla \psi - \\
&= \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi \times \left[\mathbf{e}_\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\rho} \left[\mathbf{e}_\rho \frac{\partial \psi}{\partial z} - \mathbf{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right] \quad (\text{E.17})$$

El tensor de deformación está dado por

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+ &= 2\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] + (\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right] + \\ &+ 2\mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] + 2\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

El tensor de viscosidad está dado por

$$\underline{\underline{\mu}} = \mu \underline{\underline{\mathbf{U}}} + \Delta \mu \underline{\underline{\mathbf{H}}} \quad (\text{E.19})$$

dónde

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{H}}} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho + \right. \\ &\left. + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z \right] ; \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

el tensor de esfuerzos es entonces

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{P}}} &= -\underline{\underline{\mathbf{I}}} p + \underline{\underline{\mu}} : [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] = \\ &= -\underline{\underline{\mathbf{I}}} p + \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] + \Delta \mu (\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

La ecuación de movimiento se convierte en

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\mathbf{e}_\rho \frac{\partial \psi}{\partial z} - \mathbf{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right] \right\} + \\ &+ \Delta \mu \left(\mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right) ; \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

tomando el rotacional

$$\begin{aligned}
& \mu \nabla \times \left\{ \epsilon_\rho \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \epsilon_z \nabla^2 \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right\} + \\
& + \epsilon_\phi \Delta \mu \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right) = \\
& \mu \nabla \times \left\{ \epsilon_\rho \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \epsilon_z \nabla^2 \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right\} + \\
& + \epsilon_\phi \Delta \mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right) = \\
& = \mu \epsilon_\phi \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right\} + \\
& \quad + \epsilon_\phi \frac{\Delta \mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right) \frac{\Psi}{\rho} = \\
& = \mu \epsilon_\phi \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right\} + \\
& \quad + \epsilon_\phi \frac{\Delta \mu}{\rho} D^2 D^2 \Psi = \\
& = \mu \epsilon_\phi \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right) \Psi + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right\} + \\
& \quad + \epsilon_\phi \frac{\Delta \mu}{\rho} D^2 D^2 \Psi = \\
& = \mu \epsilon_\phi \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right) \Psi + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Psi \right\} + \\
& \quad + \epsilon_\phi \frac{\Delta \mu}{\rho} D^2 D^2 \Psi = \\
& = \mu \epsilon_\phi \left\{ \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Psi \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e_\phi \frac{\Delta\mu}{\rho} D^2 D^2 \psi = \\
& = \frac{1}{\rho} e_\phi \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \right\} \psi + \\
& + e_\phi \frac{\Delta\mu}{\rho} D^2 D^2 \psi = \\
& = e_\phi \frac{\mu}{\rho} E^2 E^2 \psi + e_\phi \frac{\Delta\mu}{\rho} D^2 D^2 \psi ; \tag{E.23}
\end{aligned}$$

donde los operadores D^2 y E^2 se definen como

$$\begin{aligned}
D^2 &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\
E^2 &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) ; \tag{E.24}
\end{aligned}$$

y multiplicando por el vector unitario e_ϕ la ecuación de movimiento se convierte en

$$\frac{\mu}{\rho} E^2 E^2 \psi + \frac{\Delta\mu}{\rho} D^2 D^2 \psi = 0 , \tag{E.25}$$

y reorganizando términos

$$\left(E^4 + \frac{\Delta\mu}{\mu} D^4 \right) \psi = 0 , \tag{E.26}$$

donde

$$E^4 \equiv E^2 E^2 , \tag{E.27}$$

$$D^4 \equiv D^2 D^2 . \tag{E.28}$$

BIBLIOGRAFIA.

1. Abnik, N. C.; An effective anisotropy parameter in transversely isotropic media. *Geophysics*, **52**, No. 12, 1654-1664, 1987.
2. Ackerson, B. J.; Shear induced order and shear processing of model hard sphere suspensions. *Journal Rheology*, **34**(4), pp. 553, 1990.
3. Acrivos, A. y Shaqfeh, E. S. G.; The effective thermal conductivity and elongational viscosity of a nondilute suspension of aligned slender rods. *Phys. Fluids*, **31**, (7), pp. 1841, 1988.
4. Adler, P. M. y Brenner, H.; Spatially periodic suspensions of convex particles in linear shear flows. I. Description and Kinematics. *Int. J. Multiphase Flow*, **11**, No.3, 361-385, 1985.
5. Adler, P. M., Zuzovsky, M. y Brenner, H.; Spatially periodic suspensions of convex particles in linear shear flows. II. Rheology. *Int. J. Multiphase Flow*, **11**, No.3, 387-417, 1985.
6. Batchelor, G. K.; *Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1988.
7. Billmeyer, F. W.; *Textbook of Polymer Science*. Wiley, 1984.
8. Bird, R. B., Armstrong, R. C. y Hassager, O.; *Dynamics of Polymeric Liquids*, Wiley, 1987.

9. Bird, R. B., Stewart, W. E. y Lightfoot, E. N., Fenómenos de Transporte, Ed. Reverté, 1993.
- 9a. Boon, J. P. y Yip, S., Molecular Hydrodynamics, Ed. Dover, 1980.
10. Brenner, H.; A General theory of Taylor dispersion phenomena. Physicochemical Hydrodynamics, **1**, 91-123, 1980.
11. Brenner, H.; A General theory of Taylor dispersion phenomena. II An extension. Physicochemical Hydrodynamics, **3**, No.2, 139-157, 1982.
12. Brenner, H.; Effect of finite boundaries on the Stokes resistance of an arbitrary particle. Part II. Asymmetrical orientation. J. Fluid Mech., **18**, 144-158, 1964.
Brenner, H.; The Stokes resistance of a slightly deformed sphere. Chem Engrg. Sci., **19**, 519-539, 1964.
Brenner, H.; The Stokes resistance of an arbitrary particle. Part II. An extension. Chem Engrg. Sci., **19**, 599-629, 1964.
Brenner, H.; The Stokes resistance of an arbitrary particle. Part III. Shear fields. Chem Engrg. Sci., **19**, 631-651, 1964.
Brenner, H.; The Stokes resistance of an arbitrary particle. Part IV. Arbitrary fields of flow. Chem Engrg. Sci., **19**, 703-727, 1964.
13. Brenner, H. y O'Neill, M. E.; On the Stokes resistance of multiparticle systems in a linear shear field. Chem. Engrg. Sci., **27**, 1421-1439, 1972.
14. Bohr, H.; Almost periodic functions, Chelsea Publishing Co., 1951.
- 14a. Borishenko, A. I. y Tarapov, I. E., Vector and Tensor Analysis, Dover, 1968.
15. Byun, B. K. y Cheng, S. W.; Apparent axial properties of transversely isotropic media. Geophysics, **51**, No.4, 1012-1013, 1986.
16. Claeys, I. L. y Brady, J. F.; Suspensions of prolate spheroids in Stokes flow. Part I. Dynamics of finite number of particles in an unbounded fluid. J. of Fluid Mech., vol. **251**, pp. 411-442, 1993.
17. De Gennes, P. G.; The physics of liquid crystals. Clarendon Press, 1974.

154 Bibliografía

- Ericksen, J. L. y Kinderlehrer, D.; Theory and Applications of Liquid Crystals, Springer Verlag, 1987.
18. De Groot, S. R. y Mazur, P.; Non-Equilibrium Thermodynamics, Dover, 1984.
19. Dinh, S. M., Armstrong, R. C.; A Rheological equation for semiconcentrated fiber suspensions. *Journal of Rheology*, **28**(3), 207-227, 1984.
20. Einstein, A. *Ann. Physik* **19**, (1906), 289, with correction **34** (1911) 591. The theory of brownian movement, dover 1956.
21. Frisch, H. L. y Simha, R.; in *Rheology - Theory and Applications*, vol I.
22. Eirich, F. R. Academic Press, Capítulo 14, 1956.
23. Gradshteyn, I. S. y Ryzhik, I. M.; Tables of Integrals, series and products, Academic Press, 1980.
24. Happel, J. y Brenner, H.; *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice Hall, 1965.
25. Hardy, G. H. y Wright, E. M.; *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, Oxford, 1979.
26. Hearmon, R. F. S.; *An introduction to applied anisotropic elasticity*, Oxford University Press, 1961.
27. Iosolevskii, G., Mendoza-Blanco, A. y Brenner, H.; The slow axisymmetric rotation of a sphere in a transversely isotropic fluid, *Jl. Mech. Appl. Math.*, vol **46**, 153, 1993.
28. Jeffery, G. B., On the slowly rotation of a solid of revolution in a viscous fluid, *Phil. Mag.*, 1915, pp. 327.
29. Kevorkian, J. y Cole, J. D.; *Perturbation methods in applied mathematics*, Springer Verlag, 1981.
30. Koch, D. L. y Brady, J. F.; The symmetry properties of the effective diffusivity tensor in anisotropic media. *Phys. Fluids*, **30**(3), pp. 642, 1987.
31. Lamb, H.; *Hydrodynamics*, Dover, 6th edition, 1945.

32. Landau, L. D. y Lifshitz, E. M.; *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon Press, 1989.
33. Landau, L. D. y Lifshitz, E. M.; *Theory of Elasticity*, 3rd edition, Pergamon Press, 1986.
34. Leighton, D. y Acrivos, A.; The shear induced migration of particles in concentrated suspensions. *J. Fluid Mech.*, **181**, 415-439, 1987.
35. Lekhnitskii, S. G.; *Theory of elasticity of an anisotropic body*, MIR, 1981.
36. Macmillan, E. H.; Slow flows of anisotropic fluids, *Journal of Rheology*, **33** (7), pp. 1071, 1989.
37. Meyer, R. B., Lonberg, F., Taratuta, V., Fraden, S., Lee, S., y Hurd, A.; Measurements of anisotropic viscous and elastic properties of lyotropic polymer nematics. *Faraday, Discuss. Chem. Soc.*, **79**, 125-132, 1985.
38. Mochizuki, E.; The stress-strain relation for transversely isotropic, incompressible fluid. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **45**, 240-241, 1987.
39. Nott, P. R. y Brady, J. F.; Pressure-driven flow of suspensions: simulation and theory. *J. of Fluid Mech.*, vol. **275**, pp. 157-199, 1994.
40. Pastor, J., Turgeman, S. y Boehler, P.; Solution of anisotropic plasticity problems by using associated isotropic problems. *Int. Journal of Plasticity*, vol **6**, pp. 143-168, 1990.
41. Perrins, W. T., McKenzie, D. R. y McPhedran, R. C.; Transport properties of regular arrays of cylinders. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **369**, 207-225, 1979.
42. Phan-Tien, H. y Graham, A. L.. A new constitutive model for fibre suspensions: flow past a sphere, to be published.
43. Phillips, R. J., Armstrong, R. C., Brown, R., Graham, A. L. y Abbot, J. R.; A constitutive equation of concentrated suspensions that accounts for shear induced particle migration, to be published.

156 Bibliografía

44. Podio-Guidugli, P. y Virga, E. G.; Transversely isotropic elasticity tensors. Proc. R. Soc. Lond. A **411**, 85-93, 1987.
45. Probst, R.; Physicochemical Hydrodynamics, Butterworths, 1989.
46. Rodríguez, F.; Principios de sistemas poliméricos, Manual Moderno, 1984.
47. Sangani, A. S. y Acrivos, A.; The effective conductivity of a periodic array of spheres. Proc. R. Soc. Lond. A, **386**, 263-275, 1983.
48. Perrins, W. T., McKenzie, D. R. y McPhedran, R. C.; Transport properties of regular arrays of cylinders. Proc. R. Soc. Lond. A, **369**, 207-225, 1979.
49. Shaqfeh, E. S. G.; The effect of hydrodynamic interactions on the orientation of axisymmetric particles flowing through a fixed bed of spheres or fibers. Phys. Fluids **31** (4), pp. 728, 1988.
50. Standard Mathematical Tables, CRC Press, 28th Edition, 1973.
51. Stokes, V. K.; Theory of fluids with microstructure, Springer Verlag, 1984.
52. Sweeny, K.H. y Geckler, R.D., J. Appl. Phys, **25** (1954), 1135.
53. Synge, J. L. y Schild, A.; Tensor Calculus, Dover, 1949.
54. Szeri, A. J. y Leal, L. G.; A new computational method for the solution of flow problems of microstructured fluids. Part 2. Inhomogeneous shear flow of a suspension. J. of Fluid Mech., vol **262**, pp. 171-204, 1994.
55. Ward, S.G. y Withmore, R.L.; Brit. J. Appl. Phys., **1** (1950), 286.
56. Williams, P.S., J. Appl. Chem. **3** (1953), 120.
57. Yourgrau, W., van der Merwe, A. y Raw, G.; Treatise on irreversible and statistical thermophysics, Dover, 1982.
58. Zuzovsky, M., Adler, P. M. y Brenner, H.; Spatially periodic suspensions of convex particles in linear shear flows. III. Dilute arrays of spheres suspended in Newtonian fluids. Phys. Fluids., **26**(7), pp. 1714, 1983.
59. Sokolnikoff, I. S., Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1956.

***ANISOTROPIC
AND
INHOMOGENEOUS
FLUIDS.***

CONTENTS

ANISOTROPIC AND INHOMOGENEOUS FLUIDS

INTRODUCTION	2
Chapter 1. ANISOTROPIC FLUIDS	7
1.1 ANISOTROPIC FLUIDS	7
1.1.1 Introduction	7
1.1.2 Suspensions of particles: non-isotropic systems	8
1.1.3 Anisotropic fluids	9
1.1.4 Generalized Hooke's Law	9
1.1.5 Overview	10
1.2 MATHEMATICAL DESCRIPTION	11
1.2.1 The fourth-rank viscosity tensor	11
1.2.2 Symmetries of $\underline{\underline{\mu}}$	13
1.2.3 The governing equations	14
1.3 DECOMPOSITION: THE EIGENVALUE PROBLEM	15
1.3.1 Analogy with heat-transfer problems	15
1.3.2 The eigenvalue problem	16
1.3.3 The isomorphism and the associated six-dimensional problem	18
1.3.4 Linear algebra results	21
1.3.5 Principal axes	22
1.4 THE HYDRODYNAMIC EQUATIONS FOR AN ANISOTROPIC FLUID	24
1.4.1 The micro-macro association	24
1.4.2 An example	25
1.5 A TRANSVERSELY-ISOTROPIC LAYERED FLUID	28
1.5.1 The constitutive equation	28
1.5.2 Constant shearing flow of a transversely-isotropic fluid	29
1.6 AXISYMMETRIC BODIES	35
1.6.1 Rotation of axisymmetric bodies	35
1.6.2 Streaming flow past a body of revolution	37
1.7 SPECIAL TRANSVERSELY-ISOTROPIC FLUIDS	42
1.7.1 Definition	43
1.7.2 The eigenvalue problem for the layered transversely-isotropic fluid	44
1.7.3 The equations of motion	45

1.7.4 The fundamental rotlet solution	47
1.7.5 Rotation of a sphere	49
1.8 STREAMING FLOW PAST A BODY OF REVOLUTION	56
1.8.1 Equations of motion	56
1.8.2 Fundamental Stokeslet solution for the layered transversely-isotropic fluid	59
1.9 CONCLUSIONS	68
Chapter 2. NON-HOMOGENEOUS FLUIDS	73
2.1 INTRODUCTION	73
2.2 THE GOVERNING EQUATIONS	76
2.3 THE STEADY-STATE EQUATIONS OF MOTION	77
2.4 UNIDIMENSIONAL FLOWS	81
2.4.1 Flow between parallel plates	81
2.4.2 Flow in a circular cylinder	85
2.4.3 Source and sink problems	88
2.4.4 Rotation of a sphere	90
2.5 ROTATION OF AXISYMMETRIC BODIES	98
2.5.1 Equations of motion in cylindrical coordinates	99
2.5.2 Infinitely long cylinder rotating in an unbounded fluid	102
2.6 POINT-SIZE PARTICLE IN A FLUID OF VARIABLE VISCOSITY AND DENSITY	109
2.7 CONCLUSIONS	115
APPENDIX I. NEWTONIAN RESULTS	117
THE GOVERNING EQUATIONS	118
I.1 Continuum hypothesis	118
I.2 Conservation principles	119
I.3 The Newtonian Constitutive Equation	121
I.4 Homogeneous Newtonian Results	123
I.4.1 Laminar Flow Between Parallel Plates	123
I.4.2 Laminar Flow in a Circular Tube	125
I.4.3 Source and Sink Problems	126
I.4.4 Infinite circular cylinder rotating with constant angular velocity about its symmetry axis	128
I.4.5 Rotating Sphere in a Viscous Liquid	130
I.4.6 Flow around a Translating Sphere	132
APPENDIX II. TRANSVERSELY-ISOTROPIC FLUIDS	135
BIBLIOGRAPHY	137

INTRODUCTION.

The equations of motion are derived from the continuum hypothesis and the utilization of the conservation principles of mass, momentum, and energy. In this work we consider only isothermal flows, for which the energy equation is not coupled with the mass and momentum equations. In this case, the description of the fluid is in terms of the velocity and pressure fields, so that the equations of mass and momentum are the only ones used to describe the flow. To define a closed system of equations, it is necessary to introduce a constitutive equation relating the stress tensor to the velocity gradients. Additionally, it is necessary to pose initial and boundary conditions.

The conservation equations of mass and momentum for an incompressible fluid are:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}} + \rho_f \mathbf{F}$$

where \mathbf{u} is the velocity field, ρ_f is the fluid density, $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ is the stress tensor and \mathbf{F} the external force density, e.g. gravity. The constitutive equation must depend on the problem's variables. It is easy to demonstrate (Landau and Lifshitz, 1987) that with the

4 Introduction

pressure and the velocity fields as variables, the only possible functional dependence of the stress tensor is on the pressure and the velocity gradient. For example, it cannot directly depend on the velocity because it will not be invariant under changes of the reference frame. It cannot depend on second derivatives of velocity for thermodynamical reasons. The hydrostatic pressure is found on the diagonal of the stress tensor, so it can be rewritten in the form:

$$\underline{\underline{P}} = -\underline{\underline{I}}p + \underline{\underline{\tau}}$$

where $\underline{\underline{\tau}}$ is the viscous part of the tensor that only depends on the velocity gradients. The explicit form of such dependence is determined by the specific fluid. The fluid properties need to be modeled by taking into account its symmetries and structure.

To obtain the newtonian constitutive equation, thermodynamic arguments and hypotheses about the symmetry of the fluid are made. As required by angular momentum conservation, the stress tensor depends only on the symmetric part of the velocity gradient. Additionally, it is assumed that the fluid is isotropic and homogeneous. These arguments and hypotheses lead to the following constitutive equation for incompressible newtonian fluids:

$$\underline{\underline{P}} = -\underline{\underline{I}}p + \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\dagger} \right]$$

where μ is the viscosity, which is assumed constant throughout the fluid. This constitutive model does not describe certain flow situations, most of all when the system is not simple, as in the case of a concentrated suspension of neutrally buoyant particles.

Fluid microstructure can lead to anisotropic effects, e.g., fluid responses may vary with the direction of the driven force. A layered (i.e., stratified) fluid in layers or stratified is a simple example of an anisotropic system. If the fluid is situated between parallel plates, one of which is displaced with respect to the other, the force required to maintain

the motion will be different if the layers are parallel or perpendicular to the plates. This example is later analyzed.

Fluid microstructure can also be manifested by non-homogeneous effects. As an example, the viscosity of a suspension of particles is a function of the particle concentration. If for any reason the particles migrate towards certain regions of the system, the local viscosity will adopt different values depending on the local particle concentration. Such inhomogeneities in viscosity can lead to changes in the fluid dynamics.

This thesis introduces of models and mathematical techniques to describe such behavior. Several problems are analytically solved to illustrate the effects of anisotropy or inhomogeneity. Changes in the flow pattern and on the force/torques required to maintain stationary flow are studied. For small deviations from the homogeneous or isotropic cases, a perturbative analysis is conducted and the classical homogenous / isotropic solutions recovered.

One of the conclusions of this work is to show that the microstructure of the fluid can modify the macroscopic behavior of the system. The relationship between both descriptions has practical applications in fluid dynamics and rheology. Most of the methods used to measure viscosity are based on simple flows, where a solution can be found analytically. Analyzing the relation between forces or torques applied to the fluids and the effects thereby produced, enable rheological properties such as viscosity to be measured. Nevertheless, the result can depend on the homogeneity and/or orientation of the fluid, as will be shown in several examples. In other words, the measured "viscosity" may not coincide with other measurements due to such effects.

Chapter 1

ANISOTROPIC FLUIDS.

1.1. ANISOTROPIC FLUIDS.

1.1.1 Introduction.

In the Introduction we presented the constitutive equation for an incompressible Newtonian fluid. Most liquids found in nature behave like Newtonian fluids under a wide variety of circumstances. Water, air, glycerine and alcohol are typical examples of Newtonian fluids. The Newtonian constitutive equation provides the simplest relationship between the stress and rate-of-strain tensors that accounts for viscous effects. Such fluids are homogeneous and isotropic, and are often characterized by a spatially uniform constant viscosity throughout.

The homogeneity and isotropy properties of fluids are direct consequences of their structure.* From a microscopic point of view, fluids are formed by atoms and molecules that move about and interact with one another. The positions and orientations of

* Molecular Hydrodynamics provides an alternative scheme to analyze fluids possessing microstructure. The analysis presented here is directed toward systems with components (such as suspended particles) that are larger than the molecular dimensions. At all times, we assume that the flow process consists of thermodynamic equilibrium states. The length scales lengths involved are always larger than molecular dimensions, and the frequencies small enough such that the classical hydrodynamic equations are valid.

the molecules change very rapidly with time in a very complicated way, even if macroscopically the fluid seems to be at rest.

In this chapter we will present some mathematical techniques to deal with viscous non-isotropic fluids. Such fluids offer different responses in different directions. There exist many fluid systems that behave non-isotropically under certain circumstances. Suspensions of neutrally buoyant particles possessing a dipole moment in a field may behave non isotropically.

1.1.2. Suspensions of particles : non-isotropic systems.

In dealing with suspensions of neutrally buoyant particles it is usually assumed (Hinch & Leal, 1972; Bibbo et al, 1989; Ganani & Powell, 1985; Graham, A. L. et al, 1987) that the background fluid is Newtonian and incompressible. Dilute suspensions of neutrally buoyant spherical particles, are usually modeled as Newtonian fluids possessing an effective viscosity which is larger than that of the background fluid. The suspension is considered homogeneous and isotropic, and the model has been proved to be experimentally appropriate under a wide variety of circumstances. Suspensions of non-spherical particles can display inhomogeneous and anisotropic responses. Experimentally, it has been observed that suspensions often respond differently to external driving forces than do pure Newtonian fluids. In such cases, the suspension can no longer be described as a Newtonian fluid with an effective viscosity.

Non-homogeneous behavior will be studied in the next chapter, with anisotropic response the subject of the present chapter. The systems considered in this chapter are assumed to be homogeneous, in which case the coefficients used to characterize the fluid are constant throughout the fluid, independent of position. Characterization of anisotropic fluids require more than one viscosity parameter, as opposed to the incompressible Newtonian situation. Throughout, the anisotropic fluids considered will be assumed incompressible.

1.1.3. Anisotropic fluids.

Anisotropic fluids possess the property of directionality in their response, depending upon the orientation of the driving force relative to axes fixed in the fluid. Examples of anisotropic fluids are nematic polymer liquid crystals and dipolar suspensions. Shearing the fluid in different directions will usually lead to different flow responses. A mathematical description of the intrinsic material properties of such fluids can be effected in terms of a generalized stress/rate-of-strain constitutive equation which allows the fluid to display an anisotropic response. Conventional, isotropic Newtonian fluids will be considered as a special case of this more general constitutive equation. Nematic liquid crystals (De Gennes 1974; Stokes 1984; Landau & Lifshitz 1989), as its name suggests, manifest an intermediate physical state between crystalline solids and liquids, showing properties of both. We will not follow the classical analysis presented by Leslie and Ericksen (De Gennes 1974; Ericksen & Kinderlehrer 1987), but rather will pursue an analogy more akin to anisotropic elastic solids. The fundamental hydrodynamic foundation underlying our analysis will allow us to interpret and justify the different elements of the subsequent anisotropic constitutive equation from a hydrodynamic standpoint.

1.1.4 Generalized Hooke's law.

A generalized Hooke's law (Love 1944; Sokolnikoff 1956; Timoshenko & Goodier 1934) is widely used as a constitutive equation to describe the anisotropic stress/strain response of elastic solids. Such solids are characterized by a fourth-rank body-fixed, material elasticity tensor, linearly relating the stress and strain tensors. We propose to model anisotropic fluids by using a comparable stress vs. rate of strain approach. This analogy provides the key starting point for all of the subsequent analysis.

Explicitly, we will introduce a fourth-rank viscosity tensor, linearly relating the stress and shear-rate tensors.

While most anisotropic elastic solids retain their body-fixed, material properties during the shearing process, anisotropic fluids generally do not. Rather, as the fluid flows, its anisotropic properties can change, at least in the classical infinitesimal deformation theory limit, whence the material coefficients appearing in the constitutive equation will in general be functions of position and time. In contrast, to effect the simplest possible analysis, we will only consider situations where the fluid remains homogeneous during the flow, and, consequently, the phenomenological coefficients appearing in the constitutive equation remain constant in space and time. Evidently, the microstructure of the heterogeneous continuum will determine whether or not the intrinsic material properties remain homogeneous during the flow. For instance, consider a neutrally-buoyant suspension of non-spherical particles, each possessing a permanent magnetic dipole. Upon applying a strong magnetic field, all the particles will be aligned with the field, thereby constituting a spatially and orientationally homogeneous suspension. Nematic liquid crystals could be taken as another example.

This chapter presents one problem whose structure is sufficiently simple to enable us to consider changes in the microscopic structure. For this example, we will calculate the temporal evolution of the fourth-rank viscosity tensor. Subsequently, the remaining problems addressed in this chapter assume that homogeneity is preserved throughout the entire flow process.

1.1.5. Overview.

In section 1.2, we introduce a fourth-rank viscosity tensor serving to characterize anisotropic fluids. We will analyze its properties, and subsequently derive the corresponding equations of motion. Section 1.3 is devoted to decomposing the fourth-rank tensor into an invariant form. This fundamental decomposition allows us to express this

fourth-rank tensor in terms of six second-rank unit tensors (with scalar multipliers), thereby demonstrating the existence of six scalar parameters that are physically meaningful in so far as the equations of motion are concerned. Such a decomposition enhances understanding of the underlying physics and mathematics. The remainder of the chapter is then dedicated to exploring solutions of the equations of motion and its consequences for specific anisotropies.

Appendix II is devoted to the transversely-anisotropic fluids, whose behavior is extensively studied throughout this chapter. Derivation of the properties of such fluids are studied, and their response, compared with Newtonian fluids, is analyzed through a variety of examples.

1.2. MATHEMATICAL DESCRIPTION.

In the preceding section it was observed that the macroscopic properties of anisotropic fluids may change in time due to physical (*e.g.*, orientational) changes in the structure of the fluid accompanying the flow. If the structure-scale solution of the fundamental interstitial flow problems is available, it is possible, in principle, to derive the macroscopic flow behavior through a pertinent averaging procedure. The next section addresses an example wherein the microscale problem can be solved exactly, and the macroscopic properties calculated analytically therefrom.

1.2.1 The fourth-rank viscosity tensor.

In deriving the equations of motion, we will assume that the system is homogeneous throughout space. The case of non-homogeneous systems is the subject of Chapter 2. In complete analogy with the generalized Hooke's law for anisotropic elastic solids (Love 1944), we introduce a fourth-rank viscosity tensor $\underline{\underline{\mu}}$ relating the viscous part of the stress tensor linearly to the rate-of-deformation tensor. The latter deformation (shear-rate) tensor $\underline{\underline{S}}$ is defined in Appendix I as

$$\underline{\underline{S}} \equiv \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\dagger}], \quad (1.2.1.1)$$

which is symmetric by definition. The generalized constitutive equation for fluids, anisotropic or not, can be written as

$$\underline{\underline{P}} = -\underline{\underline{I}} p + \underline{\underline{\tau}}, \quad (1.2.1.2)$$

where p is the hydrostatic pressure and $\underline{\underline{\tau}}$ the viscous part of the stress tensor, which for incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) anisotropic 'Newtonian' fluids is given by the constitutive equation

$$\underline{\underline{\tau}} \equiv 2 \underline{\underline{\mu}} : \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\mu}} : [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\dagger}]. \quad (1.2.1.3)$$

This is the most general linear relationship existing between the viscous stress and shear-rate tensors. In contrast, for an isotropic incompressible newtonian fluid, the viscous part of the stress tensor is proportional to the rate-of-deformation tensor :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{S}}, \quad (1.2.1.4)$$

where μ is the viscosity, which will be taken to be constant throughout the fluid. The latter constitutive equation represents a special case of (1.2.1.3) if we take the viscosity tensor to be of the form

$$\underline{\underline{\mu}} = \mu \underline{\underline{U}}, \quad (1.2.1.5)$$

where $\underline{\underline{U}}$ is a fourth-rank isotropic unit tensor with cartesian components given by

$$U_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (1.2.1.6)$$

with δ_{mn} the Kronecker delta.

In general, there exist three fourth-rank isotropic unit tensors (Borishenko & Tarapov 1968; Syngé & Schild 1949). Thus most general fourth-rank isotropic tensor is of the form

$$U_{ijkl} = a (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + b \delta_{ij} \delta_{kl} + c (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (1.2.1.7)$$

where a , b and c are arbitrary constants. The term multiplied by c is antisymmetric and hence cannot contribute to the equation of motion since the contraction of any antisymmetric tensor with a symmetric tensor is identically zero. The term multiplied by b originates a contribution to $\underline{\underline{\tau}}$ which is proportional to $\nabla \cdot \mathbf{u}$, and therefore does not contribute to the equation of motion because of the assumption of incompressibility. Only the remaining isotropic unit tensor appearing in (1.2.1.7), given by equation (1.2.1.6), contributes to the transition from (1.2.1.3) to (1.2.1.4).

1.2.2 Symmetries of $\underline{\underline{\mu}}$

The most general fourth-rank tensor possesses 81 independent components (for three dimensions). However, the functional anisotropic viscosity tensor in (1.2.1.3) will possess fewer independent components due to various symmetries arising from its definition, as well as from thermodynamic arguments. In particular, the viscosity tensor μ_{ijkl} has three different kinds of symmetries: (i) Since it appears multiplying the shear tensor S_{mn} that is itself symmetric, no loss of generality results from assuming the viscosity tensor to be symmetric in the last pair of indices; (ii) The stress tensor is considered to be symmetric* and therefore the viscosity tensor is symmetric in the first pair of indices; and (iii) The rate of mechanical energy dissipation is obtained through a double contraction of τ_{ij} with S_{kl} . Since τ_{ij} and S_{kl} are both symmetric, we can without loss of generality assume the viscosity tensor is symmetric under interchange of its first and last pair of indices. These symmetries can be respectively summarized as follows:

* The theoretical possibility of having a non-symmetric stress tensor is analyzed by J. S. Dahler & L. E. Scriven, *Nature*, 192, 36-37 (1961). Bird, Armstrong & Hassager indicate in their book⁸ that up to date (1987) no experiments have shown asymmetry in the stress tensor for amorphous liquids. Furthermore, almost all of the molecular theories for amorphous liquids give expressions for the stress tensor that are symmetrical. G. K. Batchelor⁹ calculates the total force acting on a volume V ; then he uses the divergence theorem to prove that, in the limit when the volume tends to zero, that $\epsilon_{ijk} \tau_{kj} = 0$ unless there is a body-couple such as the produced by an external electric field over a dielectric polarized medium; this is, the stress tensor is symmetric.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \mu_{ijkl} = \mu_{ijlk}, \\
 (ii) \quad & \mu_{ijkl} = \mu_{jikl}, \\
 (iii) \quad & \mu_{ijkl} = \mu_{klij}.
 \end{aligned}
 \tag{1.2.2.1}$$

This set of symmetries reduces the number of independent components to 21. [As subsequently discussed, fluid incompressibility ($S_{ii} = 0$) further reduces the number of independent scalar components to 18.] Note that for the case of classical newtonian fluids, material isotropy prevails. This reduces to two the number of independent components. Fluid incompressibility further reduces this number to one!

1.2.3 The governing equations.

The equations of motion arising from the mass and momentum conservation laws adopt a special form when the constitutive equation is anisotropic. Substitution of the constitutive equation (1.2.1.3) into the steady, inertialess conservation of linear momentum equation, $\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \mathbf{0}$, leads to the following set of equations:

$$\nabla p = \nabla \cdot \left[\underline{\underline{\mu}} : (\nabla u + (\nabla u)^{\dagger}) \right], \tag{1.2.2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1.2.2.3}$$

which must be solved subject to the pertinent boundary conditions. The boundary conditions imposed upon the pressure and velocity fields are assumed to be of the same nature as in the isotropic newtonian case. Accordingly, we will usually impose a non-slip boundary condition at solid surfaces, and require that the pressure and velocity fields approach prescribed values at infinity in unbounded problems, corresponding to the given undisturbed flow (e.g., a uniform shear flow at infinity). The classical newtonian case is recovered when we utilize the corresponding isotropic constitutive equation (1.2.1.5).

1.3 DECOMPOSITION : THE EIGENVALUE PROBLEM.

1.3.1 Analogy with heat-transfer problems.

By analogy with anisotropic heat conduction problems (Appendix III), involving a second-rank material tensor (the thermal conductivity dyadic) and its canonical decomposition into its principal conductivities along the principal axes of conduction, we seek a comparable canonical decomposition of the fourth-rank viscosity tensor. This decomposition will enable us to determine which of the 21 independent components are the physically meaningful parameters appearing in the equations of motion. Explicitly, we will exploit a direct analogy with the decomposition of a second-rank material tensor into its invariants and principal axes (see Section 1.3.4).

We seek a decomposition of the viscosity tensor into the form

$$\underline{\underline{\mu}} = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} , \quad (1.3.1.1)$$

where $\underline{\underline{D}}^{\alpha}$ is a symmetric second-rank tensor associated with the scalar eigenvalue λ^{α} .

It is easy to prove that this representation retains all of the symmetries embodied in Eq. (1.2.2.1). Basic questions pertaining to the nature and existence of such a decomposition will be more easily answered once we establish its connection with standard eigenvalue problems in linear algebra. We will show that the decomposition (1.3.1.1) leads to an eigenvalue problem that is equivalent to the usual eigenvalue problem in linear algebra. This will be accomplished by showing the existence of an isomorphism with the cartesian, six-dimensional-space eigenvalue problem. This isomorphism will allow us to use standard results from linear algebra theory, including the existence and uniqueness of such a decomposition.

1.3.2 The eigenvalue problem.

The eigenvalue problem associated with the decomposition (1.3.1.1) can be stated in invariant form as

$$\underline{\underline{\mu}} : \underline{\underline{D}}^\alpha = \sum_\alpha \lambda^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha, \quad (1.3.2.1)$$

where the second-rank tensors $\underline{\underline{D}}^\alpha$ are symmetric by definition. This tensorial equation is equivalent to nine scalar equations. Due to the symmetries of the viscosity tensor, only six of these scalars are linearly independent.

In order to solve the eigenvalue problem, we will choose an otherwise arbitrary three-dimensional cartesian coordinate system (hereafter referred to as the 'original' coordinate system). In this coordinate system, the viscosity tensor has 81 cartesian components:

$$\mu_{ijkl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (1.3.2.2)$$

of which only 21 are independent due to the symmetries described in Eq. (1.2.2.1). The numerical values of these components will depend on the orientation of the original coordinate system relative to axes fixed in the anisotropic fluid under analysis. The set of nine linear equations associated with the eigenvalue problem can be written in compact form as

$$\mu_{ijkl} D_{jk}^\alpha = \lambda^\alpha D_{ij}^\alpha \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.3.2.3)$$

Since μ_{ijkl} is symmetric in its first pair of indices, the latter constitute only 6 independent equations. Explicitly, the set of nine equations is

$$\begin{aligned} \mu_{1111} D_{11}^\alpha + \mu_{1122} D_{22}^\alpha + \mu_{1133} D_{33}^\alpha + \mu_{1112} D_{21}^\alpha + \mu_{1121} D_{12}^\alpha + \\ + \mu_{1113} D_{31}^\alpha + \mu_{1131} D_{13}^\alpha + \mu_{1123} D_{32}^\alpha + \mu_{1132} D_{23}^\alpha = \lambda^\alpha D_{11}^\alpha, \end{aligned} \quad (1.3.2.4a)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2211} D_{11}^\alpha + \mu_{2222} D_{22}^\alpha + \mu_{2233} D_{33}^\alpha + \mu_{2212} D_{21}^\alpha + \mu_{2221} D_{12}^\alpha + \\ + \mu_{2213} D_{31}^\alpha + \mu_{2231} D_{13}^\alpha + \mu_{2223} D_{32}^\alpha + \mu_{2232} D_{23}^\alpha = \lambda^\alpha D_{22}^\alpha, \end{aligned} \quad (1.3.2.4b)$$

$$\begin{aligned} \mu_{3311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{3322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{3333} D_{33}^{\alpha} + \mu_{3312} D_{21}^{\alpha} + \mu_{3321} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{3313} D_{31}^{\alpha} + \mu_{3331} D_{13}^{\alpha} + \mu_{3323} D_{32}^{\alpha} + \mu_{3332} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{33}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.4c)$$

$$\begin{aligned} \mu_{1211} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1222} D_{22}^{\alpha} + \mu_{1233} D_{33}^{\alpha} + \mu_{1212} D_{21}^{\alpha} + \mu_{1221} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{1213} D_{31}^{\alpha} + \mu_{1231} D_{13}^{\alpha} + \mu_{1223} D_{32}^{\alpha} + \mu_{1232} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{12}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.4d)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2111} D_{11}^{\alpha} + \mu_{2122} D_{22}^{\alpha} + \mu_{2133} D_{33}^{\alpha} + \mu_{2112} D_{21}^{\alpha} + \mu_{2121} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{2113} D_{31}^{\alpha} + \mu_{2131} D_{13}^{\alpha} + \mu_{2123} D_{32}^{\alpha} + \mu_{2132} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{21}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.4e)$$

$$\begin{aligned} \mu_{1311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{1333} D_{33}^{\alpha} + \mu_{1312} D_{21}^{\alpha} + \mu_{1321} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{1313} D_{31}^{\alpha} + \mu_{1331} D_{13}^{\alpha} + \mu_{1323} D_{32}^{\alpha} + \mu_{1332} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{13}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.4f)$$

$$\begin{aligned} \mu_{3111} D_{11}^{\alpha} + \mu_{3122} D_{22}^{\alpha} + \mu_{3133} D_{33}^{\alpha} + \mu_{3112} D_{21}^{\alpha} + \mu_{3121} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{3113} D_{31}^{\alpha} + \mu_{3131} D_{13}^{\alpha} + \mu_{3123} D_{32}^{\alpha} + \mu_{3132} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{31}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.4g)$$

$$\begin{aligned} \mu_{3211} D_{11}^{\alpha} + \mu_{3222} D_{22}^{\alpha} + \mu_{3233} D_{33}^{\alpha} + \mu_{3212} D_{21}^{\alpha} + \mu_{3221} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{3213} D_{31}^{\alpha} + \mu_{3231} D_{13}^{\alpha} + \mu_{3223} D_{32}^{\alpha} + \mu_{3232} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{32}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.4h)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{2322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{2333} D_{33}^{\alpha} + \mu_{2312} D_{21}^{\alpha} + \mu_{2321} D_{12}^{\alpha} + \\ + \mu_{2313} D_{31}^{\alpha} + \mu_{2331} D_{13}^{\alpha} + \mu_{2323} D_{32}^{\alpha} + \mu_{2332} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{23}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.4i)$$

Using the symmetries of the of the viscosity tensor, Eqs. (1.3.2.4d) and (1.3.2.4e) are seen to be identical; similarly, Eqs. (1.3.2.4f) and (1.3.5g) as well as Eqs. (1.3.2.4h) and (1.3.2.4i) are equivalent. This set of nine equations is equivalent to the following set of six independent equations :

$$\begin{aligned} \mu_{1111} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1122} D_{22}^{\alpha} + \mu_{1133} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{1112} D_{12}^{\alpha} + \\ + 2\mu_{1113} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{1123} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{11}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.5a)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2211} D_{11}^{\alpha} + \mu_{2222} D_{22}^{\alpha} + \mu_{2233} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{2212} D_{12}^{\alpha} + \\ + 2\mu_{2213} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{2223} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{22}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.5b)$$

$$\begin{aligned} \mu_{3311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{3322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{3333} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{3312} D_{12}^{\alpha} + \\ + 2\mu_{3313} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{3323} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{33}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.5c)$$

$$\begin{aligned} \mu_{1211} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1222} D_{22}^{\alpha} + \mu_{1233} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{1212} D_{12}^{\alpha} + \\ + 2\mu_{1213} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{1223} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{12}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.5d)$$

$$\begin{aligned} \mu_{1311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{1322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{1333} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{1312} D_{12}^{\alpha} + \\ + 2\mu_{1313} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{1323} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{13}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.6c)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2311} D_{11}^{\alpha} + \mu_{2322} D_{22}^{\alpha} + \mu_{2333} D_{33}^{\alpha} + 2\mu_{2312} D_{12}^{\alpha} + \\ + 2\mu_{2313} D_{13}^{\alpha} + 2\mu_{2323} D_{23}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{23}^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.2.7f)$$

which constitutes a set of six linear equations for the six variables D_{11}^{α} , D_{22}^{α} , D_{33}^{α} , D_{12}^{α} , D_{13}^{α} and D_{23}^{α} .

1.3.3 The isomorphism and the associated six-dimensional problem.

In order to avail ourselves of existing results from linear algebra theory, we have to prove that there exists an isomorphism between the space of all second-rank symmetric tensors and the cartesian six-dimensional space. In order to prove such relationship, it is necessary to define an inner product for the second-rank symmetric tensor space and a linear transformation of the latter to the six-dimensional cartesian space.

Consider the set Ψ of all second-rank symmetric tensors :

$$\Psi = \left\{ \underline{T} / T_{ij} = T_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3 \right\}, \quad (1.3.3.1)$$

with the inner product of two second-rank symmetric tensors $(\underline{T}, \underline{S})$ defined as

$$(\underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{S}}) = \underline{\mathbf{T}} : \underline{\mathbf{S}} = T_{ij} S_{ji} \quad (1.3.3.2)$$

together with the usual sum of tensors defined as

$$(\underline{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{S}})_{ij} = T_{ij} + S_{ij}. \quad (1.3.3.3)$$

This inner product possesses all of the properties required to qualify as an inner product in a vector space, the set Ψ being closed under the sum operation. The set Ψ possesses all the properties of a vector space.

Consider the six-dimensional vector space, whose elements will be denoted by capital bold letters. Define the linear transformation \mathfrak{S} between elements in these two spaces :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} : \Psi &\rightarrow \mathfrak{R}^6, \\ \mathbf{V} &= \mathfrak{S}(\underline{\mathbf{D}}), \end{aligned} \quad (1.3.3.4)$$

given by the expression

$$\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6) = (D_{11}, D_{22}, D_{33}, \sqrt{2} D_{12}, \sqrt{2} D_{13}, \sqrt{2} D_{23}). \quad (1.3.3.5)$$

Alternatively, upon introducing the index rule

<i>matrix index</i>	<i>I</i>	1	2	3	4	5	6	
<i>tensor indices</i>	<i>ij</i>	11	22	33	{2, 21}	{3, 31}	{23, 32}	(1.3.3.6)

the linear transformation can be written as

$$V_I = \begin{cases} D_I = D_{ij} & (I = 1, 2, 3), \\ \sqrt{2} D_I = D_{ij} & (I = 4, 5, 6). \end{cases} \quad (1.3.3.7)$$

The fourth-rank tensor viscosity is represented by a 6×6 matrix M_{IJ} whose elements are defined as

$$M_{IJ} = \begin{cases} \mu_{IJ} & (I, J = 1, 2, 3), \\ \sqrt{2} \mu_{IJ} & (I, J = 4, 5, 6), \\ 2\mu_{IJ} & (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (1.3.3.8)$$

The matrix \mathbf{M} is symmetric by construction and thus possesses only 21 independent components.

The set of equations (1.3.2.5) is, by construction, mathematically equivalent to

$$M_{IJ} V_J^\alpha = \lambda^\alpha V_I^\alpha \quad (I, J = 1, 2, \dots, 6), \quad (1.3.3.9)$$

or explicitly

$$M_{11} V_1^\alpha + M_{12} V_2^\alpha + M_{13} V_3^\alpha + M_{14} V_4^\alpha + M_{15} V_5^\alpha + M_{16} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_1^\alpha, \quad (1.3.3.10a)$$

$$M_{21} V_1^\alpha + M_{22} V_2^\alpha + M_{23} V_3^\alpha + M_{24} V_4^\alpha + M_{25} V_5^\alpha + M_{26} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_2^\alpha, \quad (1.3.3.10b)$$

$$M_{31} V_1^\alpha + M_{32} V_2^\alpha + M_{33} V_3^\alpha + M_{34} V_4^\alpha + M_{35} V_5^\alpha + M_{36} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_3^\alpha, \quad (1.3.3.10c)$$

$$M_{41} V_1^\alpha + M_{42} V_2^\alpha + M_{43} V_3^\alpha + M_{44} V_4^\alpha + M_{45} V_5^\alpha + M_{46} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_4^\alpha, \quad (1.3.3.10d)$$

$$M_{51} V_1^\alpha + M_{52} V_2^\alpha + M_{53} V_3^\alpha + M_{54} V_4^\alpha + M_{55} V_5^\alpha + M_{56} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_5^\alpha, \quad (1.3.3.10e)$$

$$M_{61} V_1^\alpha + M_{62} V_2^\alpha + M_{63} V_3^\alpha + M_{64} V_4^\alpha + M_{65} V_5^\alpha + M_{66} V_6^\alpha = \lambda^\alpha V_6^\alpha, \quad (1.3.3.10f)$$

which constitutes a standard eigenvalue problem in linear algebra.

By construction, the inner product is the same in both spaces. If we form the inner product of two elements in the normal six-dimensional space, and the inner product of their counterpart in the space of symmetric tensors, the numerical value of the inner product is the same, namely

$$\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^2 = \underline{\mathbf{D}}^1 : \underline{\mathbf{D}}^2, \quad (1.3.3.11)$$

wherein

$$\mathbf{v}^1 = \mathfrak{I}(\underline{\mathbf{D}}^1), \quad (1.3.3.12)$$

$$\mathbf{v}^2 = \mathfrak{I}(\underline{\mathbf{D}}^2). \quad (1.3.3.13)$$

With these definitions, the set Ψ and the six-dimensional cartesian space constitute an isomorphism. All linear algebra results are thus applicable to the set Ψ . Q.E.D.

1.3.4 Linear algebra results.

In the last section, we established an isomorphism enabling use of existing linear algebra results. The decomposition of the viscosity tensor is equivalent to the decomposition of \mathbf{M} into the form

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha}, \quad (1.3.4.1)$$

where λ^{α} and \mathbf{v}^{α} are the eigenvalues and eigenvectors of \mathbf{M} . Everything we conclude about \mathbf{M} is applicable to $\underline{\mu}$. Observe that this decomposition is expressed in terms of the invariants, λ^{α} , of \mathbf{M} and its 'principal axis', \mathbf{v}^{α} .

Our first conclusion is that such decomposition exists and is unique. Such a decomposition exists for any square matrix \mathbf{M} , the proof of which can be found in any elementary linear algebra book (Friedberg, Insel & Spence 1982). The number of non-zero elements in the sum corresponds to the number of different eigenvalues associated with \mathbf{M} . A matrix is hermitian if it is equal to its complex-conjugate transpose. By construction, \mathbf{M} is defined as a real symmetric matrix and is therefore hermitian. For hermitian matrices all eigenvalues are real. For 6×6 matrices there exist as many as 6 different real eigenvalues. If all the eigenvalues are different, the corresponding eigenvectors are then perpendicular to one another, whereupon \mathbf{v}^{α} constitutes a basis for the six-dimensional space. Even if all the eigenvalues are not distinct one can always perform a Gram-Schmidt orthonormalization procedure, thereby obtaining a complete set of normalized unit eigenvectors.

The preceding results allow us to write the decomposition as the sum

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha}, \quad (1.3.4.2)$$

with orthonormal eigenvectors \mathbf{v}^{α} satisfying the relationship

$$\mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.3.4.3)$$

where $\delta_{\alpha\beta}$ is the Kronecker delta. Analogously, the viscosity tensor can be expressed in the form

$$\underline{\underline{\mu}} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha \quad (1.3.4.4)$$

with the orthonormal property translating directly into a comparable property of the corresponding tensors $\underline{\underline{D}}^\alpha$, namely

$$\underline{\underline{D}}^\alpha : \underline{\underline{D}}^\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.3.4.5)$$

In conclusion, the decomposition (1.3.3.1) of the viscosity tensor exists and is unique. For every fluid system there are six unique eigenvalues λ^α and six unique second-rank tensors $\underline{\underline{D}}^\alpha$. The next section furnishes a physical interpretation of the existence and uniqueness of such decomposition.

1.3.5 Principal axes.

The 'three-dimensional' decomposition,

$$\underline{\underline{\mu}} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha \quad (1.3.5.1)$$

is equivalent to the 'six-dimensional' decomposition

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \mathbf{v}^\alpha \mathbf{v}^\alpha \quad (1.3.5.2)$$

as demonstrated by the isomorphism shown to exist between the two associated spaces. Furthermore, an analogy will be shown to exist between such a decomposition and the principal axis of a tensor. To be specific, we will use a space of three dimensions, where results are more easily visualized. Assume $\underline{\underline{T}}$ to be a second-rank tensor in three dimensions. In terms of dyadics, this tensor can be expressed in the cartesian form (with $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ a right-handed system of mutually perpendicular unit vectors):

$$\underline{\underline{T}} = \mathbf{i}\mathbf{i} T_{11} + \mathbf{i}\mathbf{j} T_{12} + \mathbf{i}\mathbf{k} T_{13} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{j}\mathbf{j} T_{11} + \mathbf{j}\mathbf{j} T_{12} + \mathbf{j}\mathbf{k} T_{13} + \\
 & + \mathbf{k}\mathbf{i} T_{11} + \mathbf{k}\mathbf{j} T_{12} + \mathbf{k}\mathbf{k} T_{13} = \\
 & = a\mathbf{a} T_1 + b\mathbf{b} T_2 + c\mathbf{c} T_3, \quad (1.3.5.3)
 \end{aligned}$$

where (T_1, T_2, T_3) are the invariants of the tensor and $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ are unit vectors in the directions of the principal axes of $\underline{\underline{T}}$. Such decomposition in terms of principal axes is unique for every tensor. This is valid in a space of any number of dimensions.

Finally, the rate of mechanical energy dissipation Φ for this anisotropic fluid is given by the expression

$$\Phi = \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}} = \left(\underline{\underline{\mu}} : \underline{\underline{S}} \right) : \underline{\underline{S}} = \left[\left(\sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha \right) : \underline{\underline{S}} \right] : \underline{\underline{S}} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha (\underline{\underline{D}}^\alpha : \underline{\underline{S}})^2 \geq 0. \quad (1.3.5.4)$$

Now, the scalar Φ is necessarily nonnegative, vanishing if and only if $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{0}}$, corresponding to a rigid-body rotation. This inequality implies that

$$\lambda^\alpha \geq 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 6). \quad (1.3.5.5)$$

1.4 THE HYDRODYNAMIC EQUATIONS FOR AN ANISOTROPIC FLUID.

1.4.1 The micro-macro association.

As already observed, the fourth-rank viscosity tensor can always be uniquely decomposed into the form

$$\underline{\underline{\mu}} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \quad (1.4.1.1)$$

where $\underline{\underline{D}}^{\alpha}$ constitutes a complete set of symmetric second-rank unit tensors, and the λ^{α} denote the corresponding eigenvalues. This decomposition leads to a stress tensor given by the following constitutive equation :

$$\underline{\underline{P}} = -\underline{\underline{U}} p + \left(\sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \right) : (\nabla u + (\nabla u)^{\dagger}) \quad (1.4.1.2)$$

The governing hydrodynamic equations become, upon using this decomposition,

$$\nabla p = \nabla \cdot \left[\left(\sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \right) : (\nabla u + (\nabla u)^{\dagger}) \right] \quad (1.4.1.3)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1.4.1.4)$$

wherein the six eigenvalues λ^{α} appear explicitly in the equations of motion. Note that it has been assumed that the fourth-rank tensor is constant in space and time.

The simplest flow field that can be analyzed corresponds to the spatially homogeneous shear flow of an unbounded fluid. For an isotropic fluid, such a simple shear produces a linear velocity profile in the direction of the shear, as depicted in figure 1.4.2. The material properties of the fluid remain invariant during the flow, independently of the shearing direction. For composite materials, like layered fluids (Appendix I), it cannot be assured, *a priori*, that the microstructural symmetries of the fluid will be preserved during flow; to the contrary, these properties will generally change in most cases as the material properties of the fluid are convected and rotated with the flowing fluid.

Such changes in the microstructure will lead to concomitant changes in the macroscopic description of the equations of motion. Specifically, the fourth-rank viscosity tensor may not remain constant in time or may not remain a homogeneous property of the fluid, as assumed in the analysis performed in this chapter. To provide a simple example of this phenomenon, we will now analyze a special problem of this genre, where the microscale problem can be solved exactly and the macroscale properties evaluated therefrom as a function of time.

1.4.2 An example.

Assume that the system under consideration is a suspension of neutrally buoyant particles, rheologically modeled by a constitutive equation involving a fourth-rank viscosity tensor. This model is valid on a scale large compared with the fluid microstructure; explicitly, in the case of a suspension, the macroscale length is large compared with the size of the suspended particles as well as the distance between them. This macroscale description does not recognize the microstructure of the fluid, and the coefficients appearing in such a description (e. g., the fourth-rank viscosity tensor) are obtained through performing averages over spatial volumes large compared with the microstructure but sufficiently small to be regarded as "points" in the macroscale description.

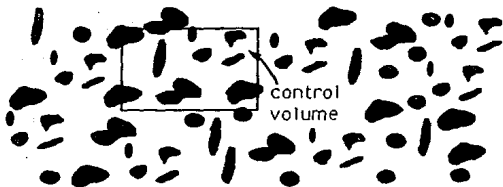


Figure 1.4.1 The macroscopic properties of the fluid are obtained through averages over control volumes. Control volumes are large compared with the microscale structure but small compared with the macroscale.

During the flow process the microstructure within the averaging volumes can change and, concomitantly, so can the macroscale coefficients used to quantify the fluid's rheological properties. In such cases the viscosity tensor does not remain constant during the flow. We will, however, restrict the subsequent analysis to the flow of anisotropic fluids whose viscosity tensor remains constant during the flow. If, for instance, each particle possesses a magnetic moment, and a strong magnetic field is applied to the system, the orientation of the particles will remain constant. If, at the same time, the number density of particles is spatially homogeneous, the macroscopic viscosity tensor will also remain constant.

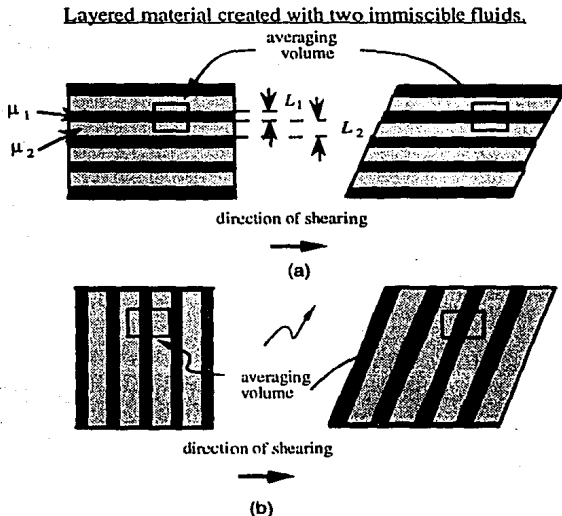


Figure 1.4.2. A layered material created by the superposition of two immiscible fluids. Shearing the system in the direction of the layers as in (a) maintains the structure, and hence the macroscale rheological properties of the system. Shear in the perpendicular direction destroys the structure, whence the macroscale rheological properties change.

Mathematically, the tensor field at a point is a particular set of scalar point functions which are independent of the values of these functions at neighboring points. Physically, the values of the components of the tensor are usually obtained by averaging microscale quantities over volumes that are small compared with the macroscale dimensions of the flow. We will require that the microstructure within the averaging volume remain constant in order to keep the macroscale properties invariant during the flow.

This requirement may be illustrated by the following example. Consider a layered material formed by the superposition of infinitely-extended layers of a pair of fluids, as depicted in figure 1.4.2. This material possesses a transverse symmetry axis normal to the layers and hence will give rise to a transversely anisotropic macrofluid. The configuration is invariant under rotation around this symmetry axis. Shearing this material parallel to the layers leaves the symmetry unchanged. Shear perpendicular to this direction fails to preserve this symmetry in time; nevertheless, as will be seen, the fluid remains transversely isotropic with the axis of symmetry changing with time.

1.5 A TRANSVERSELY-ISOTROPIC LAYERED FLUID.

1.5.1 The constitutive equation.

Imagine an unbounded layered fluid, formed from n basic different immiscible layers with different lengths L_i and viscosities μ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). The infinite system is formed by repetition of the the n basic different layers, in a periodic form as depicted in figure 1.4.2 for a binary system ($n = 2$). The period of the system is the total length L of the n layers :

$$L = \sum_{i=1}^n L_i \quad (1.5.1.1)$$

In a macroscopic description, where distances are large compared with the period L , the system will possess a special direction, \hat{n} . Such a system is termed transversely-isotropic and its fourth-rank viscosity tensor is given by the following expression (see Appendix II for details) :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mu}}}} = \mu \underline{\underline{\underline{\underline{U}}}} + \Delta\mu \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}} \quad (1.5.1.2)$$

where, in cartesian tensor notation,

$$U_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (1.5.1.3)$$

$$H_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{i3} \delta_{l3} \delta_{jk} + \delta_{i3} \delta_{k3} \delta_{jl} + \delta_{j3} \delta_{l3} \delta_{ik} + \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{il} - 4 \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{l3} \right), \quad (1.5.1.4)$$

the latter being transversely isotropic with respect to the $x_3 \equiv z$ direction. Note that this is not the most general form of a fourth-rank transversely-isotropic tensor (Synge & Schild 1949); rather the form (1.5.1.2) also embodies the existence of a plane of reflection symmetry normal to the symmetry axis.

1.5.2 Constant shearing flow of a transversely-isotropic fluid.

There exist two special directions of simple shearing with respect to the symmetry axis of a transversely-isotropic fluid, namely the directions parallel and perpendicular to the axis. The parallel shearing case is special in the sense that the macroscale fluid properties remain unchanged for all time as the fluid is sheared. The perpendicular case leads to a change in the direction of the symmetry axis during shear, but does not affect the numerical values of its rheological parameters. As the time tends to infinity, the direction of the symmetry axis tends to lie parallel to the streamlines, thereby recovering the parallel situation.

Shearing in the parallel direction

Simple shearing in a direction parallel to the layers preserves the lamellae structure of the fluid. When the fluid is sandwiched between two parallel plates, separated by a distance H (such that the symmetry axis is perpendicular to the plates), and the top plate moved with a steady velocity U , there will then arise a uniform shearing flow at a shear rate $\dot{\gamma}_0 = U/H$. Choose a cartesian coordinate system with the x axis parallel to the plates and

the y axis perpendicular to them, as depicted in figure 1.5.1. The symmetric portion of the velocity gradient is given by

$$\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t = (\hat{\mathbf{e}}_x \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{e}}_y \hat{\mathbf{e}}_x) \dot{\gamma}_0, \quad (1.5.2.1)$$

whence the stress tensor is

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} &= -\underline{\underline{I}}p + \underline{\underline{\mu}} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) = -\underline{\underline{I}}p + \underline{\underline{\mu}} : (\hat{\mathbf{e}}_x \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{e}}_y \hat{\mathbf{e}}_x) \dot{\gamma}_0 \\ &= -\underline{\underline{I}}p + \mu (\hat{\mathbf{e}}_x \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{e}}_y \hat{\mathbf{e}}_x) \dot{\gamma}_0 + \Delta \mu (\hat{\mathbf{e}}_x \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{e}}_y \hat{\mathbf{e}}_x) \dot{\gamma}_0 = \\ &= -\underline{\underline{I}}p + (\mu + \Delta \mu) (\hat{\mathbf{e}}_x \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{e}}_y \hat{\mathbf{e}}_x) \dot{\gamma}_0. \end{aligned} \quad (1.5.2.2)$$

This implies that the pressure is constant throughout the fluid, and that the continuity equation is identically satisfied. The force per unit area on the upper plate is the same as in the isotropic problem, but with a viscosity $\mu + \Delta \mu$; explicitly,

$$\mathbf{F} = (\mu + \Delta \mu) \dot{\gamma}_0 \hat{\mathbf{e}}_x. \quad (1.5.2.3)$$

No other dynamical, rheological effects arise such as a stress in the perpendicular direction.

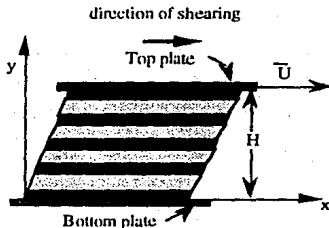


Figure 1.5.1. Shearing parallel to the lamellae.

Shearing in the perpendicular direction

Due to the geometric simplicity of the problem, it is possible to analytically solve the general case corresponding to an arbitrary direction of shearing relative to the laminae.

The case where the symmetry axis initially lies perpendicular to the direction of shear is particularly simple (Figure 1.4.2.a). If we start shearing the fluid in this direction, the symmetry will be preserved for all time t . On the other hand, if we start shearing the fluid with the symmetry axis parallel to the plates (Figure 1.4.2b), the configuration of the lamellae will change in time. As will be seen, the orientation of the symmetry axis of the fluid will change from initially being parallel to the plates to ultimately being perpendicular as the time goes from zero to infinity. It is in this sense that the case where the symmetry axis lies perpendicular to the plates constitutes a very special circumstance.

If at time $t = 0$ the symmetry axis lies parallel to the plates, and the upper plate is moved (with constant velocity) parallel to itself, the symmetry axis will eventually be perpendicular to the plates at $t = \infty$. At any time t , the surfaces between layers will be flat and parallel to each other. Though the orientation will change with time, due to the geometric simplicity of the problem it is possible to calculate the orientation of the symmetry axis as a function of time. By continuity, the thickness of the layers will change in time, but the thickness ratios will remain constant. As can be seen from figure 1.5.2, the distance between adjacent layers will change in time according with the formula

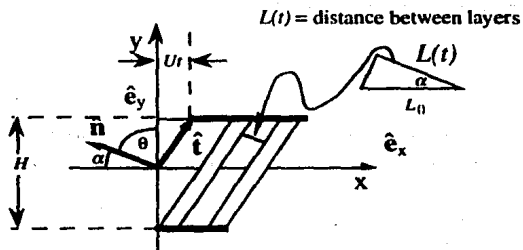


Figure 1.5.2. The direction of the unit normal vector \hat{n} to the lamellae changes with time. In the perpendicular shearing situation, it changes from being parallel to the $-x$ axis, to ultimately being parallel to the y axis as $t \rightarrow \infty$.

$$\frac{L(t)}{L_0} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + U^2 t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{\gamma}_0^2 t^2}} \quad (1.5.2.5)$$

Upon introducing the angle α between the symmetry axis and the x axis, defined as

$$\tan \theta \equiv \frac{H}{U t} = \frac{1}{\dot{\gamma}_0 t} = \frac{1}{\tan \alpha} \quad (1.5.2.6)$$

the distance between layers is found to be

$$L(t) = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \dot{\gamma}_0^2 t^2}} \quad (1.5.2.7)$$

Equivalently,

$$L(t) = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = L_0 \cos \alpha \quad (1.5.2.8)$$

The unit vector \hat{n} in the direction of the symmetry axis is given by the expression

$$\hat{n}(t) = -\hat{e}_x \cos \alpha + \hat{e}_y \sin \alpha \quad (1.5.2.9)$$

and the tangent unit vector by

$$\hat{t}(t) = \hat{e}_x \sin \alpha + \hat{e}_y \cos \alpha \quad (1.5.2.10)$$

Inversion of this pair of relations yields

$$\hat{e}_x = -\hat{n} \cos \alpha + \hat{t} \sin \alpha \quad (1.5.2.11)$$

$$\hat{e}_y = \hat{n} \sin \alpha + \hat{t} \cos \alpha \quad (1.5.2.12)$$

As the viscosity tensor is more fundamentally expressed in terms of \hat{n} and \hat{t} than \hat{e}_x and \hat{e}_y , it is convenient to express the deformation tensor in terms of these same unit vectors. Explicitly,

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\dagger &= (\hat{e}_x \hat{e}_y + \hat{e}_y \hat{e}_x) \dot{\gamma}_0 \\ &= [(-\hat{n} \cos \alpha + \hat{t} \sin \alpha)(\hat{n} \sin \alpha + \hat{t} \cos \alpha) + (\hat{n} \sin \alpha + \hat{t} \cos \alpha)(-\hat{n} \cos \alpha + \hat{t} \sin \alpha)] \dot{\gamma}_0 \\ &= [\hat{n} \hat{n} (-2 \cos \alpha \sin \alpha) + \hat{t} \hat{t} (2 \cos \alpha \sin \alpha) + (\hat{t} \hat{n} + \hat{n} \hat{t}) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)] \dot{\gamma}_0 = \end{aligned}$$

$$\equiv \left[-\hat{n}\hat{n}2CS + \hat{i}\hat{i}2CS + (\hat{i}\hat{n} + \hat{n}\hat{i})(S^2 - C^2) \right] \dot{\gamma}_0, \quad (1.5.2.13)$$

where $S \equiv \sin \alpha$ and $C \equiv \cos \alpha$. Likewise, the stress tensor adopts the form

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} &= -\underline{\underline{I}}p + \underline{\underline{\mu}} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) = -\underline{\underline{I}}p + \underline{\underline{\mu}} : (\hat{\mathbf{e}}_x \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{e}}_y \hat{\mathbf{e}}_x) \dot{\gamma}_0 \\ &= -\underline{\underline{I}}p + \underline{\underline{\mu}} : \left[\hat{n}\hat{n}(-2CS) + \hat{i}\hat{i}(2CS) + (\hat{i}\hat{n} + \hat{n}\hat{i})(S^2 - C^2) \right] \dot{\gamma}_0 = \\ &= -\underline{\underline{I}}p + \mu \left[\hat{n}\hat{n}(-2CS) + \hat{i}\hat{i}(2CS) + (\hat{i}\hat{n} + \hat{n}\hat{i})(S^2 - C^2) \right] \dot{\gamma}_0 + \\ &\quad + \Delta\mu (\hat{i}\hat{n} + \hat{n}\hat{i})(S^2 - C^2) \dot{\gamma}_0, \end{aligned} \quad (1.5.2.14)$$

whereas the force per unit area acting on the upper plate becomes

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \underline{\underline{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \underline{\underline{\tau}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cos \alpha + \hat{\mathbf{i}} \sin \alpha) = \\ &= \mu \dot{\gamma}_0 \hat{\mathbf{e}}_x + \Delta\mu \dot{\gamma}_0 (S^2 - C^2) \left[\hat{\mathbf{e}}_x (S^2 - C^2) + \hat{\mathbf{e}}_y 2CS \right], \end{aligned} \quad (1.5.2.15)$$

In the limit $t \rightarrow \infty$ this reduces to the result already obtained for the parallel shearing configuration. Also note that a normal component of the force exists, which however disappears in the exactly parallel and perpendicular cases. This result embodies a normal stress caused by the fluid's anisotropy. Figure 1.5.3 depicts a particular example.

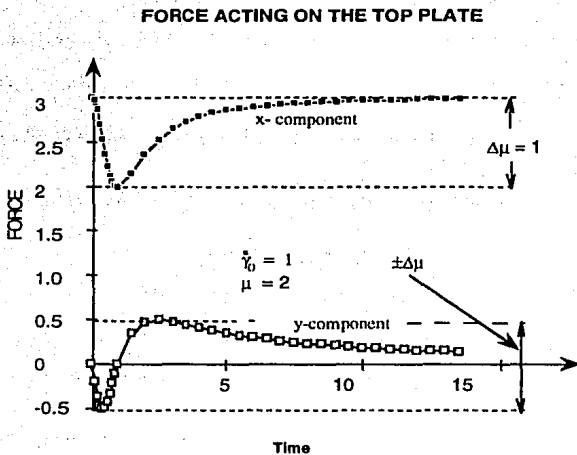


Figure 1.5.3. The figure illustrates the force acting on the top plate. A normal stress, pushing up and downwards the top plate, appears with time and vanishes as t tends to infinity.

1.6 AXISYMMETRIC BODIES.

The stream function provides a powerful tool for solving two-dimensional flow problems. It reduces the original velocity vector and pressure fields problem to the calculation of a single scalar function. This method is not generally applicable to three-dimensional flows. In special circumstances, however, it is possible to use a stream function for three-dimensional flows, provided that these flows possess certain symmetries about an axis.

Streaming flow past a body of revolution, parallel to its symmetry axis, provides an example of such a flow. Another type of flow is represented by the rotation of axisymmetric bodies. In this section we obtain the equations of motion for both types of flows.

1.6.1 Rotation of axisymmetric bodies.

For the slow rotation of axisymmetric bodies, we can define a scalar quantity analogous to the Stokes (axisymmetric) stream function ψ as follows. Suppose that the body rotates about its symmetry axis, coincident with the z -axis of a circular cylindrical coordinate system (ρ, ϕ, z) . Due to the symmetry of the problem (and the absence of centrifugal effects), we expect the fluid streamlines to lie in concentric circles centered along the z -axis, with only the ϕ -component of the velocity field expected to be nonzero.

The 'stream function' ψ associated with this type of flow is related to the velocity field through the equation

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{e}_z \times \nabla \psi(\rho, z) \\ &= \underline{\underline{\mathbf{e}_z}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi \\ &= -\mathbf{e}_\phi \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \mathbf{e}_\phi u_\phi(\rho, z), \end{aligned} \quad (1.6.1.1)$$

where $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ are unit vectors in the respective directions indicated by the subscripts.

This velocity field automatically satisfies the continuity equation (1.4.1.4) for any choice of $\psi(\rho, z)$.

Forming the curl of the equations of motion (1.4.1.3) yields the following equation:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla \times \nabla p = \nabla \times \left[\left(\sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^\alpha \underline{\mathbf{D}}^\alpha \right) : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) \right] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla \left[\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^\alpha \underline{\mathbf{D}}^\alpha : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger) \right] = \\ &= - \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla \left[\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^\alpha \underline{\mathbf{D}}^\alpha : \left\{ \nabla \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi + \left(\nabla \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi \right)^\dagger \right\} \right], \quad (1.6.1.2) \end{aligned}$$

and, since $\left\{ \nabla \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi + \left(\nabla \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi \right)^\dagger \right\}$ is symmetric (the contraction of a symmetric and an antisymmetric tensor is zero),

$$\sum_{\alpha=1}^6 2 \lambda^\alpha \underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla \left[\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^\alpha \underline{\mathbf{D}}^\alpha : \nabla \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi \right] = \mathbf{0}, \quad (1.6.1.3)$$

which is a vector equation. Multiply this equation by the unit vector \mathbf{e}_z to obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha=1}^6 2 \lambda^\alpha \mathbf{e}_z \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla \left[\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^\alpha \underline{\mathbf{D}}^\alpha : \nabla \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbf{e}_z \nabla \psi \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^6 2 \lambda^\alpha \left[\underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla (\underline{\mathbf{D}}^\alpha \cdot \nabla) \mathbf{e}_z \right] \left[\underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla (\underline{\mathbf{D}}^\alpha \cdot \nabla) \mathbf{e}_z \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^6 2 \lambda^\alpha E_\alpha^2 E_\alpha^2 \psi. \quad (1.6.1.4) \end{aligned}$$

The equation satisfied by the stream function is thus

$$\sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha E_\alpha^2 E_\alpha^2 \psi = 0, \quad (1.6.1.5)$$

where the operator E_{α}^2 is defined as

$$E_{\alpha}^2 \equiv \left[\underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla (\underline{\underline{D}}^{\alpha} \cdot \nabla) \hat{e}_z \right]. \quad (1.6.1.6)$$

This is the generalized equation satisfied by the stream function for a tensor viscosity fluid. For an isotropic fluid only one eigenvalue differs from zero, whence the equation reduces to the usual equation for newtonian fluids:

$$E^4 \psi = 0, \quad (1.6.1.7)$$

where

$$E^4 = E^2 E^2, \quad (1.6.1.8)$$

in which, in circular cylindrical coordinates (Happel & Brenner 1965),

$$E^2 = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.6.1.9)$$

In this isotropic case, the viscosity does not appear since $\lambda^1 = \mu$ is the only eigenvalue, and $\mu E^4 \psi = 0$ requires that to $E^4 \psi = 0$. However, in the general anisotropic case, ratios of the different eigenvalues will appear in the equation of motion.

1.6.2 Streaming flow past a body of revolution.

Streaming flow past a body a revolution constitutes an axisymmetric flow that can be expressed in terms of the stream function. In order to derive the corresponding equation of motion for the stream function, we will use a circular cylindrical coordinate system (ρ, ϕ, z) with the z -axis coinciding with the symmetry axis of the body of revolution. The uniform streaming flow is assumed to be parallel to the symmetry axis. The stream function $\psi(\rho, z)$ is related to the velocity field $\mathbf{u}(\rho, z)$ through the relation (Happel & Brenner 1965)

$$\mathbf{u}(\rho, z) = -\nabla \times \left(\hat{e}_{\phi} \frac{\psi}{\rho} \right) = \underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla \hat{e}_{\phi} \left(\frac{\psi}{\rho} \right), \quad (1.6.2.1)$$

which becomes in cylindrical coordinates,

$$\mathbf{u}(\rho, z) = \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi}{\rho} \right) - \hat{\mathbf{e}}_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\psi}{\rho} \right). \quad (1.6.2.2)$$

This leads to the following expression for the rate-of-strain tensor:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T &= \\ &= 2\text{sym} \left[\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \hat{\mathbf{e}}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_\rho) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right) = \\ &= \left[2\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - 2\hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + 2\hat{\mathbf{e}}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + (\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_\rho) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right). \quad (1.6.2.3) \end{aligned}$$

The subsequent analysis will be restricted to those anisotropic fluids whose material rheological properties remain invariant under rotation around the z axis. Fluids possessing this property are termed transversely-isotropic. This restriction in conjunction with the body geometry and the uniform streaming flow, results in an axially symmetric fluid motion. As this material symmetry can be destroyed during the flow process (owing to rotation of the local fluid elements which carry the fluid's material properties), certain restrictions must be considered. These will be addressed subsequently.

Using the decomposition for the viscosity tensor, the viscous part of the stress is

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} &= \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha \underline{\underline{D}}^\alpha: \left[2\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - 2\hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + 2\hat{\mathbf{e}}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + (\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_\rho) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right). \quad (1.6.2.4) \end{aligned}$$

Upon forming the divergence of the stress tensor, including the pressure, the equation of motion becomes

$$\nabla p = \nabla \cdot \left\{ \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left[2 \hat{\mathbf{e}}_{\rho} \hat{\mathbf{e}}_{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - 2 \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + 2 \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + (\hat{\mathbf{e}}_{\rho} \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_{\rho}) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \right\}. \quad (1.6.2.5)$$

Forming the curl the above equation yields

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left\{ \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left[2 \hat{\mathbf{e}}_{\rho} \hat{\mathbf{e}}_{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - 2 \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + 2 \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + (\hat{\mathbf{e}}_{\rho} \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_{\rho}) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \right\} = \\ &= \nabla \times \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left\{ 2 \left[D_{\rho\rho}^{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} - D_{zz}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{\phi\phi}^{\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^{\alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \left(\frac{\psi}{\rho} \right) \right\} = \\ &= 2 \nabla \times \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left[D_{\rho\rho}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} - D_{zz}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{\phi\phi}^{\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^{\alpha} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \psi. \quad (1.6.2.6) \end{aligned}$$

Finally, multiplication by the unit vector $\hat{\mathbf{e}}_{\phi}$ gives

$$\hat{\mathbf{e}}_{\phi} \cdot \left\{ \nabla \times \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}^{\alpha} \left[D_{\rho\rho}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} - D_{zz}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{\phi\phi}^{\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^{\alpha} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right] \psi \right\} = 0. \quad (1.6.2.7)$$

Explicit evaluation of the operator appearing in the above equation of motion yields

$$\begin{aligned}
& \hat{e}_\phi \cdot \left\{ \nabla \times [\nabla \cdot \underline{\underline{D}}^\alpha] \right\} = \\
& = \hat{e}_\phi \cdot \left\{ \nabla \times \left[\hat{e}_\rho \left(D_{\rho\rho}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) + \hat{e}_z \left(D_{\rho z}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \hat{e}_\phi \left(D_{\rho\phi}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\phi}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \frac{D_{\phi\rho}^\alpha}{\rho} \right) \right] \right\} = \\
& = \hat{e}_\phi \cdot \left\{ -\hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\rho\phi}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\phi}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \frac{D_{\phi\rho}^\alpha}{\rho} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \hat{e}_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \left(D_{\rho\phi}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\phi}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \frac{D_{\phi\rho}^\alpha}{\rho} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \hat{e}_\phi \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\rho\rho}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(D_{\rho z}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \right\} = \\
& = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\rho\rho}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(D_{\rho z}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]. \quad (1.6.2.8)
\end{aligned}$$

Accordingly, the equation of motion is

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\rho\rho}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(D_{\rho z}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \\
& \left[D_{\rho\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} - D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + D_{\phi\phi}^\alpha \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^\alpha \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi = \\
& = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D_{\rho\rho}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} - \frac{D_{\phi\phi}^\alpha}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(D_{\rho z}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \\
& \frac{1}{\rho} \left[D_{\rho\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - D_{zz}^\alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + D_{\phi\phi}^\alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \left[D_{\rho\rho}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_{z\rho}^{\alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) - \frac{D_{\phi\phi}^{\alpha}}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{zz}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \frac{1}{\rho} \\
&\left[D_{\rho\rho}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - D_{zz}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + D_{\phi\phi}^{\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^{\alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi = \\
&= \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^{\alpha} \frac{1}{\rho} \left[D_{\rho\rho}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + D_{z\rho}^{\alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{D_{\phi\phi}^{\alpha}}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{zz}^{\alpha} \rho \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \\
&\left[D_{\rho\rho}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) - D_{zz}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + D_{\phi\phi}^{\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + D_{\rho z}^{\alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi. \quad (1.6.2.9)
\end{aligned}$$

1.7 SPECIAL TRANSVERSELY-ISOTROPIC FLUIDS.

Transversely-isotropic materials are characterized by the existence of a rotational symmetry axis (Abnik 1987; Lekhnitskii 1981; Podio & Virga 1987). A layered material such as that discussed in section 1.5.2 constitutes a simple example, but is not representative of the most general transversely-isotropic fluid.

The most general linear relationship involves a fourth-rank viscosity tensor whose components must satisfy the symmetry conditions (1.2.21) discussed in Section 1.2, namely

$$\begin{aligned} (i) \quad \mu_{ijkl} &= \mu_{jikl} \\ (ii) \quad \mu_{ijkl} &= \mu_{jilk} \\ (iii) \quad \mu_{ijkl} &= \mu_{klij} \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

The most general transversely-isotropic tensor $\underline{\underline{T}}$ is constructed by combining in suitable combinations the Kronecker delta functions $\underline{\delta}$ with the unit vector $\hat{n} \equiv \hat{e}_3$ in the direction of the symmetry axis. There exist 10 possible arrangements that satisfy the above symmetry conditions (1.2.21). This leads to 5 independent tensors whereby the fourth-rank, transversely-isotropic tensor $\underline{\underline{T}}$ can be expressed in the form

$$\underline{\underline{T}} = \sum_{\alpha=1}^5 c_{\alpha} \underline{\underline{T}}^{\alpha}. \quad (1.7.0.1)$$

In the above, the c_{α} are independent scalar parameters whereas the independent unit tensors $\underline{\underline{T}}^{\alpha}$ possess the following cartesian components:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}_{ijkl}^1 &\equiv \delta_{ij} \delta_{kl} \\ \underline{\underline{T}}_{ijkl}^2 &\equiv \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \\ \underline{\underline{T}}_{ijkl}^3 &\equiv \delta_{ij} \delta_{k3} \delta_{l3} + \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{kl} \\ \underline{\underline{T}}_{ijkl}^4 &\equiv \delta_{i3} \delta_{l3} \delta_{jk} + \delta_{i3} \delta_{k3} \delta_{jl} + \delta_{j3} \delta_{l3} \delta_{ik} + \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{il} \\ \underline{\underline{T}}_{ijkl}^5 &\equiv \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{l3} \end{aligned} \quad (1.7.0.2)$$

The examples analyzed in the previous sections involving a layered transversely-isotropic fluid involves only two tensors from the more general above representation. Specifically, we have used the tensor combination $\mu \underline{\underline{T}}_{ijkl}^2 + \Delta \mu \underline{\underline{T}}_{ijkl}^4$.

1.7.1 Definition

In this section we will limit the subsequent analysis to the class of transversely-isotropic fluids of the type discussed in Eq. (1.5.1.2), deriving from the layered example of Fig. 1.4.2. composed of two different viscosity fluids.

Let a unit vector in the direction of the fluid symmetry axis be denoted by $\hat{n} = \hat{e}_3$. From Eq. (1.5.1.2), the viscosity tensor for the class of transversely-isotropic fluids being considered is given by the following constitutive equation :

$$\underline{\underline{\mu}} = \mu_{\parallel} \underline{\underline{U}} + (\mu_{\perp} - \mu_{\parallel}) \underline{\underline{H}}, \quad (1.7.1.1)$$

with $\underline{\underline{U}}$ a fourth-rank isotropic unit tensor and $\underline{\underline{H}}$ a fourth-rank transversely-isotropic unit tensor; μ_{\parallel} and μ_{\perp} are the parallel and perpendicular viscosities respectively, which are assumed to be constants. The cartesian tensor representation of the above viscosity tetradic is

$$\begin{aligned} \mu_{ijkl} &= \mu_{\parallel} U_{ijkl} + (\mu_{\perp} - \mu_{\parallel}) H_{ijkl} \\ &= \mu U_{ijkl} + \Delta\mu H_{ijkl}, \end{aligned} \quad (1.7.1.2)$$

where

$$U_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}), \quad (1.7.1.3)$$

$$\begin{aligned} H_{ijkl} &= \frac{1}{2} (\delta_{l3} \delta_{B3} \delta_{jk} + \delta_{B3} \delta_{k3} \delta_{jl} + \delta_{B3} \delta_{l3} \delta_{ik} + \\ &\quad + \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{il} - 4 \delta_{B3} \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{l3}), \end{aligned} \quad (1.7.1.4)$$

and in which $\mu = \mu_{\parallel}$ and $\Delta\mu = \mu_{\perp} - \mu_{\parallel}$. In terms of the notation introduced in the previous section,

$$\underline{\underline{T}} = c_2 \left(\underline{\underline{T}}^2 - \frac{2}{3} \underline{\underline{T}}^1 \right) + c_4 \left(\underline{\underline{T}}^4 - 4 \underline{\underline{T}}^5 \right) = \mu \left(\underline{\underline{T}}^2 - \frac{2}{3} \underline{\underline{T}}^1 \right) + \frac{\Delta\mu}{2} \left(\underline{\underline{T}}^4 - 4 \underline{\underline{T}}^5 \right). \quad (1.7.1.5)$$

1.7.2 The eigenvalue problem for the layered transversely-isotropic fluid

Following the scheme outlined in section 1.3, the equation of motion satisfied by the stream function requires knowledge of the eigenvalues of the viscosity tensor. The set of equations associated with the eigenvalue problem for the transversely-isotropic fluid is

$$\mu_{ijkl} D_{jk}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} D_{ij}^{\alpha} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.7.2.1)$$

where μ_{ijkl} is given by Eqs. (1.7.1.3) and (1.7.1.4). Explicitly, the set of equations is

$$\begin{aligned} \mu D_{11} &= \lambda D_{11} \\ \mu D_{22} &= \lambda D_{22} \\ \mu D_{33} &= \lambda D_{33} \\ \mu D_{12} &= \lambda D_{12} \\ (\mu + \Delta\mu) D_{13} &= \lambda D_{13} \\ (\mu + \Delta\mu) D_{23} &= \lambda D_{23} \end{aligned} \quad (1.7.2.2)$$

where we use the fact that the tensor is traceless, as required by fluid incompressibility.

The eigenvalues are given by the solution of the characteristic equation

$$\det \begin{bmatrix} \mu - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\mu + \Delta\mu) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\mu + \Delta\mu) - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (1.7.2.3)$$

which leads to the characteristic algebraic equation,

$$(\lambda - \mu - \Delta\mu)^2 (\lambda - \mu)^4 = 0. \quad (1.7.2.4)$$

The solution of this characteristic equation gives the following set of eigenvalues:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 &= \mu, \\ \lambda_5 = \lambda_6 &= \mu + \Delta\mu, \end{aligned} \quad (1.7.2.5)$$

involving only two eigenvalues, as expected. The corresponding eigenvectors are

$$\underline{\mathbf{D}}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{D}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{D}}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{D}}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{D}}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{D}}^6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7.2.6)$$

The viscosity tensor can thus be written in the canonical form

$$\underline{\underline{\mu}} = \mu [\underline{\mathbf{D}}^1 \underline{\mathbf{D}}^1 + \underline{\mathbf{D}}^2 \underline{\mathbf{D}}^2 + \underline{\mathbf{D}}^3 \underline{\mathbf{D}}^3 + \underline{\mathbf{D}}^4 \underline{\mathbf{D}}^4] + (\mu + \Delta\mu) [\underline{\mathbf{D}}^5 \underline{\mathbf{D}}^5 + \underline{\mathbf{D}}^6 \underline{\mathbf{D}}^6]. \quad (1.7.2.7)$$

1.7.3 The equations of motion

The operators associated with the above decomposition are

$$E_\alpha^2 \equiv \left[\underline{\underline{\varepsilon}} : \nabla (\underline{\mathbf{D}}^\alpha \cdot \nabla) \mathbf{e}_z \right]. \quad (1.7.3.1)$$

Explicitly,

$$E_1^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad E_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad E_3^2 = 0, \quad E_4^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

$$E_5^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}, \quad E_6^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}. \quad (1.7.3.2)$$

These lead to the following equation satisfied by the stream function:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha=1}^6 \lambda^\alpha E_\alpha^2 E_\alpha^2 \psi = \\ &= \sum_{\alpha=1}^6 \mu E_\alpha^2 E_\alpha^2 \psi + \Delta\mu [E_5^2 E_5^2 + E_6^2 E_6^2] \psi = \\ &= \mu \left[2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big] \psi + \\ &+ \Delta\mu \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \psi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu \nabla^2 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \right] + \Delta \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \\
 &= \mu \nabla^2 \left[\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi \right] + \Delta \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi. \quad (1.7.3.3)
 \end{aligned}$$

This equation can be derived in an alternative way to confirm the above results.

The equation of motion in cartesian coordinates is

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_i \mu_{ijkl} (\partial_l u_k + \partial_k u_l) \\
 &= \partial_i (\mu U_{ijkl} + \Delta \mu H_{ijkl}) (\partial_k u_l + \partial_l u_k) = \\
 &= -\mu \partial \partial_i \epsilon_{jmn} \partial_m \psi - \Delta \mu \partial_i H_{ijkl} (\partial_k \epsilon_{lmn} \delta_{n3} \partial_m \psi + \partial_l \epsilon_{kmn} \delta_{n3} \partial_m \psi) = \\
 &= -\mu \partial \partial_i \epsilon_{jmn} \partial_m \psi - \Delta \mu \partial_i \left[\delta_{i3} (\partial_3 \epsilon_{jmn} \partial_m \psi) + \delta_{j3} (\partial_3 \epsilon_{imn} \partial_m \psi) \right] = \\
 &= -\mu \partial \partial_i \epsilon_{jmn} \partial_m \psi - \Delta \mu \left[\partial_3 \partial_3 \epsilon_{jmn} \partial_m \psi \right], \quad (1.7.3.4)
 \end{aligned}$$

the curl of which yields

$$\begin{aligned}
 0 &= \epsilon_{pnj} \partial_n \left[\mu \partial \partial_i \epsilon_{jmn} \partial_m \psi + \Delta \mu \left[\partial_3 \partial_3 \epsilon_{jmn} \partial_m \psi \right] \right] = \\
 &= \partial_n \left[\mu \partial \partial_i (\delta_{pm} \delta_{n3} - \delta_{p3} \delta_{mn}) \partial_m \psi + \Delta \mu \partial_3 \partial_3 (\delta_{pm} \delta_{n3} - \delta_{p3} \delta_{mn}) \partial_m \psi \right], \quad (1.7.3.5)
 \end{aligned}$$

where we have used the identity

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}. \quad (1.7.3.6)$$

Upon rearranging terms, this equation can be rewritten as

$$0 = \mu \partial \partial_i (\partial_3 \partial_p \psi - \delta_{p3} \partial_m \partial_m \psi) + \Delta \mu \partial_3 \partial_3 (\partial_3 \partial_p \psi - \delta_{p3} \partial_m \partial_m \psi). \quad (1.7.3.7)$$

Contracting with δ_{p3} gives

$$0 = \mu \partial \partial_i (\partial_3 \partial_3 \psi - \partial_m \partial_m \psi) + \Delta \mu \partial_3 \partial_3 (\partial_3 \partial_3 \psi - \partial_m \partial_m \psi). \quad (1.7.3.8)$$

which is exactly the same equation obtained from our more general scheme.

Using circular cylindrical coordinates, the latter equation may be written as

$$\begin{aligned}
 0 &= \mu \nabla^2 \left[\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi \right] + \Delta\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = \\
 &= \mu \nabla^2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right] + \Delta\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right] = \\
 &= \left[\mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + (\mu + \Delta\mu) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right]. \quad (1.7.3.9)
 \end{aligned}$$

Upon introducing a new variable z' , defined as

$$z' = \frac{z}{\left(\frac{\mu + \Delta\mu}{\mu} \right)^{1/2}}. \quad (1.7.3.10)$$

the preceding equation becomes

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right] \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right] = \\
 &= \nabla'^2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right] = 0. \quad (1.7.3.11)
 \end{aligned}$$

This represents an isotropic equation in the stretched variable z' .

1.7.4 The fundamental rotlet solution

The fundamental solution for a point couple can be obtained by using the isotropic rotlet solution. The effect of a point couple in a 'layered' transversely-isotropic fluid can be approached by the same scheme used in the last section. To solve that problem we use the velocity field rather than the stream function. Explicitly, both the velocity and pressure fields have to be determined. The velocity field, as already mentioned, has only one component u_ϕ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\phi u_\phi(\rho, z), \quad (1.7.4.1)$$

$$p = p(\rho, z), \quad (1.7.4.2)$$

where ϕ -independence is assumed.

The point couple is located at $z = c$, so that

$$\mathbf{L} = L_0 \mathbf{e}_z \delta(\mathbf{r} - c\mathbf{e}_z) = L_0 \mathbf{e}_z \frac{\delta(\rho)\delta(z-c)}{2\pi\rho}. \quad (1.7.4.3)$$

The equation of motion for the point couple is

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_r \times (\nabla \cdot \mathbf{p}). \quad (1.7.4.4)$$

Upon writing the equation in circular cylindrical coordinates we obtain

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_\rho \times \nabla p - \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi \left\{ \mu \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} \right] + \Delta \mu \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} \right\}, \quad (1.7.4.5)$$

which leads to the set of equations

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = 0, \quad (1.7.4.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (1.7.4.7)$$

$$\mu \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} \right] + \Delta \mu \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} = L_0 \frac{\delta(\rho)\delta(z-c)}{2\pi\rho}. \quad (1.7.4.8)$$

These can be rewritten as

$$\mu \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} \right] + (\mu + \Delta \mu) \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} = L_0 \frac{\delta(\rho)\delta(z-c)}{2\pi\rho},$$

i.e.,

$$\mu \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} \right] = L_0 \frac{\delta(\rho)\delta[k(z'-c)]}{2\pi\rho}, \quad (1.7.4.9)$$

where k is given by

$$k = \left(\frac{\mu + \Delta\mu}{\mu} \right)^{1/2} \quad (1.7.4.10)$$

If we use the Dirac delta function property

$$\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{k} \quad (1.7.4.11)$$

Eq. (1.7.4.9) can then be rewritten as

$$\left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z'^2} \right] = \frac{L_0 \delta(\rho) \delta(z'-c)}{\mu k 2\pi \rho} \quad (1.7.4.12)$$

This equation is identical to the that for the corresponding isotropic fluid rotlet, with $z-c$ replaced by $z'-c$, and the couple strength by L_0/k . Accordingly, the rotlet solution of the layered transversely-isotropic problem is

$$u_\phi = \frac{L_0}{8\pi k \mu} \frac{\rho}{\left(\rho^2 + (z'-c)^2 \right)^{3/2}} \quad (1.7.4.13)$$

and

$$p = \text{const.} \quad (1.7.4.14)$$

1.7.5 Rotation of a sphere

As will be shown, the symmetrical rotation of a sphere of radius R , in a layered, transversely-isotropic fluid, is mathematically equivalent to the rotation of an ellipsoid in an isotropic fluid. The solution for the rotation of an ellipsoid (prolate or oblate) is known (Jeffrey, 1915).

The equation of motion for the rotation of the sphere immersed in a layered transversely-isotropic fluid about an axis parallel to the symmetry axis of the fluid is

$$\mu \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} \right] + (\mu + \Delta\mu) \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z'^2} = 0, \quad (1.7.5.1)$$

which is required to satisfy the following boundary conditions:

$$u_\phi = \Omega \rho \quad \text{at } r = (\rho^2 + z^2)^{1/2} = R, \quad (1.7.5.2)$$

and

$$u_\phi \rightarrow 0 \quad \text{as } r = (\rho^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty. \quad (1.7.5.3)$$

Alternatively, in terms of the stretched variable z' :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{z}{\left(\frac{\mu + \Delta\mu}{\mu}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{z}{k}, \end{aligned} \quad (1.7.5.4)$$

where k is defined as

$$k \equiv \left(\frac{\mu + \Delta\mu}{\mu}\right)^{1/2}, \quad (1.7.5.5)$$

the equation of motion becomes

$$\left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{u_\phi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z'^2} \right] = 0, \quad (1.7.5.6)$$

together with the boundary conditions

$$u_\phi = \Omega \rho \quad \text{at } r = (\rho^2 + k^2 z'^2)^{1/2} = R, \quad (1.7.5.7)$$

$$u_\phi \rightarrow 0 \quad \text{as } r = (\rho^2 + k^2 z'^2)^{1/2} \rightarrow \infty. \quad (1.7.5.8)$$

These are isomorphic with the corresponding equations for the rotation of an ellipsoid, $\rho^2 + k^2 z'^2 = R^2$, in an unbounded isotropic fluid. The ellipsoid is prolate or oblate according as $k^2 < 1$ or $k^2 > 1$, respectively. We will first present the prolate solution and then, in an analogous form, the solution for the oblate case (See figure 1.5.1).

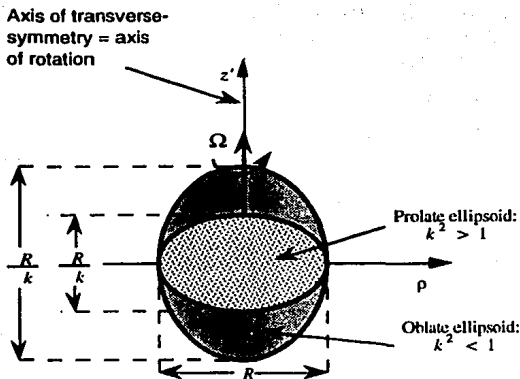


Figure 1.5.1. The problem of a sphere rotating in a layered transversely-isotropic fluid is converted in the problem of an ellipsoid (prolate or oblate) rotating in an isotropic fluid.

The prolate solution is more easily obtained if we introduce a prolate spheroidal coordinate system defined by the following transformation (Happel & Brenner, 1965)

$$z' + ip = c \cosh(\xi + i\eta), \quad (1.7.5.9)$$

where c will be related, a posteriori, by the radius R of the sphere.

Equivalently,

$$z' = c \cosh \xi \cos \eta, \quad (1.7.5.10)$$

$$\rho = c \sinh \xi \sin \eta. \quad (1.7.5.11)$$

The coordinate surfaces $\xi = \text{const}$ are a family of prolate spheroids having their common center at the origin. The coordinate surfaces $\eta = \text{const}$ are a confocal family of two-sheeted hyperboloids of revolution having the z axis as their axis of rotation and their foci located at $z = \pm c$, $\rho = 0$. Appropriate solutions of the Laplace's equation are

$$u_\phi = P_n^1(\cos \eta) P_n^1(\cosh \xi), \quad (1.7.5.12)$$

$$u_\phi = P_n^1(\cos \eta) Q_n^1(\cosh \xi), \quad (1.7.5.13)$$

involving associated Legendre functions of the first kind of degree n . In order to obtain a finite solution we must set $n = 1$. Jeffery (1915) considered the more general case where the fluid fills the space between two prolate spheroids defined by the equations $\xi = \xi_0, \xi_1$. The solution for the unbounded fluid can ultimately be obtained by setting $\xi_1 = \infty$.

Assume a trial solution of the form

$$u_\phi = \sin \eta \left[A P_1^1(\cosh \xi) + B Q_1^1(\cosh \xi) \right]. \quad (1.7.5.14)$$

The two boundary conditions, namely $u_\phi = \Omega_0 \rho$ on ξ_0 and $u_\phi = \Omega_1 \rho$ on ξ_1 , require that

$$A P_1^1(\cosh \xi) + B Q_1^1(\cosh \xi) = c \Omega_0 \sinh \xi_0 \quad (1.7.5.15)$$

and

$$A P_1^1(\cosh \xi) + B Q_1^1(\cosh \xi) = c \Omega_1 \sinh \xi_1. \quad (1.7.5.16)$$

Upon introducing the function f defined as

$$f(\xi) = \log \coth \left(\frac{\xi}{2} \right) - \frac{\cosh \xi}{\sinh^2 \xi}, \quad (1.7.5.17)$$

the solution can be written as

$$u_\phi = c \sinh \xi \sin \eta \left\{ \Omega_0 \frac{f(\xi) - f(\xi_1)}{f(\xi_0) - f(\xi_1)} + \Omega_1 \frac{f(\xi_0) - f(\xi)}{f(\xi_0) - f(\xi_1)} \right\}. \quad (1.7.5.18)$$

Following Jeffery (1915), the couple required to maintain the steady rotation of the ellipsoid ξ_0 is

$$T = \frac{16}{3} \pi \mu c^3 \frac{\Omega_0 - \Omega_1}{f(\xi_0) - f(\xi_1)}. \quad (1.7.5.19)$$

The unbounded fluid solution is obtained by setting $\xi_1 = \infty$, whence the velocity field is

$$u_\phi = c \sinh \xi \sin \eta \Omega_0 \frac{f(\xi)}{f(\xi_0)}. \quad (1.7.5.20)$$

Additionally, the required torque is

$$T = \frac{16}{3} \pi \mu c^3 \frac{\Omega_0}{f(\xi_0)}. \quad (1.7.5.21)$$

With R/k and R are the polar and equatorial radii respectively, we have that

$$\frac{R}{k} = c \cosh \xi_0, \quad R = c \sinh \xi_0. \quad (1.7.5.22)$$

Inversely,

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{R/k+R}{R/k-R} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+k}{1-k} \right). \quad (1.7.5.23)$$

The couple may be written as

$$T = \frac{\frac{16}{3} \pi \mu \Omega_0 c^3}{\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+k}{1-k} \right) - \frac{c}{Rk}}, \quad (1.7.5.23)$$

where

$$c^2 = \frac{R^2}{k^2} - R^2. \quad (1.7.5.24)$$

The case of a rotating sphere of radius R is obtained in the limit

$$k \rightarrow 1-, \quad c \rightarrow 0, \quad (1.7.5.25)$$

along with the corresponding expression for the couple,

$$T = 8 \pi \mu \Omega_0 a^3. \quad (1.7.5.26)$$

The oblate case is obtained in a completely similar way by introducing an oblate spheroidal coordinate system (Happel & Brenner), defined by the transformation

$$z' + i\rho = c' \sinh(\xi + i\eta), \quad (1.7.5.27)$$

where c' will subsequently be expressed in terms of the radius R . The transformation is equivalent to

$$z' = c' \sinh \xi \cos \eta, \quad \rho = c' \cosh \xi \sin \eta. \quad (1.7.5.28)$$

The unbounded fluid solution can be expressed in terms of the function

$$F(\xi) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\sinh \xi}{\cosh^2 \xi} - \cot^{-1}(\sinh \xi), \quad (1.7.5.29)$$

by the following expression :

$$u_\phi = c' \cosh \xi \sin \eta \Omega_0 \frac{F(\xi)}{F(\xi_0)}. \quad (1.7.5.30)$$

Likewise, the couple required to maintain steady rotation of the ellipsoid is

$$T = \frac{16}{3} \pi \mu c'^3 \frac{\Omega_0}{F(\xi_0)}. \quad (1.7.5.31)$$

Alternatively, in terms of the polar and equatorial radii, i.e.,

$$\frac{R}{k} = c' \sinh \xi_0, \quad R = c' \cosh \xi_0, \quad (1.7.5.32)$$

the couple becomes

$$T = \frac{\frac{16}{3} \pi \mu \Omega_0 c'^3}{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2} - \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{k\sqrt{k^2-1}}\right)}, \quad (1.7.5.33)$$

where

$$c'^2 = R^2 - \frac{R^2}{k^2}. \quad (1.7.5.34)$$

This also reduces to sphere solution in the limit $k \rightarrow 1+$.

If we observe that

$$i \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{k\sqrt{k^2-1}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+i\sqrt{k^2-1}}{1-i\sqrt{k^2-1}}\right), \quad (1.7.5.35)$$

the oblate and the prolate case solutions are seen to have the same mathematical form. Figure 1.5.2 illustrates the solution for dimensionless couple as a function of the parameter k .

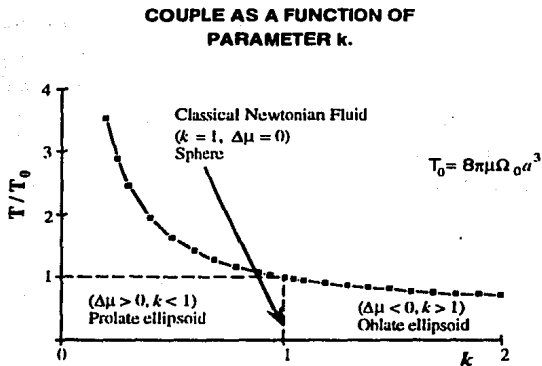


Figure 1.5.2. This figure shows the couple as a function of the parameter k . For $k < 1$, the ellipsoid is prolate, and for $k > 1$ is prolate. The sphere (Newtonian case) is recovered at $k = 1$.

1.8 STREAMING FLOW PAST A BODY OF REVOLUTION.

1.8.1 Equations of motion.

Another simple example pertaining to 'layered' transversely-isotropic fluids involves axisymmetric streaming flow past a body of revolution in an unbounded fluid. Axisymmetric flow occurs when the symmetry axes of both the anisotropic fluid and body coincide. Such axisymmetric flows, can be expressed in terms of a stream function. Choose a circular cylindrical coordinate system with the z axis along the symmetry axis of the body. The velocity field is related to the stream function by the following equation:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi \times \nabla \Psi = \\ &= \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi \times \left[\mathbf{e}_\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] = \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\mathbf{e}_\rho \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \mathbf{e}_z \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right]. \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

The rate of deformation tensor is given in terms of the stream function by the expression

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+ &= 2\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right] + (\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right] + \\ &+ 2\mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] + 2\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

The viscosity tensor for the 'layered' fluid is

$$\underline{\underline{\mu}} = \mu \underline{\underline{\mathbf{U}}} + \Delta\mu \underline{\underline{\mathbf{H}}}, \quad (1.8.3)$$

where

$$\underline{\underline{\mathbf{H}}} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho + \right. \\ \left. + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z \right]. \quad (1.8.4)$$

Interms of the stream function, the stress tensor becomes

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = -\underline{\underline{\mathbf{I}}}\rho + \underline{\underline{\mu}} : [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] = \\ = -\underline{\underline{\mathbf{I}}}\rho + \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] + \Delta \mu (\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right]. \quad (1.8.5)$$

Hence the inertialess equation of motion is

$$\mathbf{0} = \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}} = -\nabla \rho + \mu \nabla^2 \left[\frac{1}{\rho} \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \mathbf{e}_z \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right] + \\ + \Delta \mu \left(\mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right]. \quad (1.8.6)$$

Upon forming the curl of the above we obtain

$$\mathbf{0} = \mu \nabla \times \left[\mathbf{e}_\rho \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \mathbf{e}_z \nabla^2 \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right] + \\ + \mathbf{e}_\phi \Delta \mu \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right] = \\ \mu \nabla \times \left[\mathbf{e}_\rho \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \mathbf{e}_z \nabla^2 \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right] + \\ + \mathbf{e}_\phi \Delta \mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right] = \\ = \mu \mathbf{e}_\phi \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \right] + \\ + \mathbf{e}_\phi \frac{\Delta \mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \frac{\Psi}{\rho} =$$

$$\begin{aligned}
&= \mu e_\phi \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \right] \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right\} + \\
&\quad + e_\phi \frac{\Delta \mu}{\rho} D^2 D^2 \psi = \\
&= \mu e_\phi \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi + \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right\} + \\
&\quad + e_\phi \frac{\Delta \mu}{\rho} D^2 D^2 \psi = \\
&= \mu e_\phi \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right\} + \\
&\quad + e_\phi \frac{\Delta \mu}{\rho} D^2 D^2 \psi = \\
&= \mu e_\phi \left\{ \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi \right\} \\
&\quad + e_\phi \frac{\Delta \mu}{\rho} D^2 D^2 \psi = \\
&= \frac{1}{\rho} e_\phi \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \psi + \\
&\quad + e_\phi \frac{\Delta \mu}{\rho} D^2 D^2 \psi = \\
&= e_\phi \left(\frac{\mu}{\rho} E^2 E^2 \psi + \frac{\Delta \mu}{\rho} D^2 D^2 \psi \right), \tag{1.8.7}
\end{aligned}$$

where the operators D^2 and E^2 are respectively defined as

$$D^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$$

and

$$E^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right). \quad (1.8.8)$$

Accordingly, in terms of the stream function, the equation of motion adopts the form

$$\frac{\mu}{\rho} E^2 E^2 \psi + \frac{\Delta\mu}{\rho} D^2 D^2 \psi = 0, \quad (1.8.9)$$

or, rearranging terms,

$$\left(E^4 + \frac{\Delta\mu}{\mu} D^4 \right) \psi = 0, \quad (1.8.10)$$

where

$$E^4 \stackrel{\text{def.}}{=} E^2 E^2 \quad (1.8.11)$$

and

$$D^4 \stackrel{\text{def.}}{=} D^2 D^2. \quad (1.8.12)$$

1.8.2 Fundamental Stokeslet solution for the layered transversely-isotropic fluid.

The equation of motion for a point force is

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} = \mathbf{F} \delta(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z F \delta(\mathbf{r}), \quad (1.8.13)$$

where $\delta(\mathbf{r})$ is the Dirac delta function. In (symmetrical) circular cylindrical coordinates (ρ, ϕ, z) , $\delta(\mathbf{r})$ is given by the expression

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{\delta(z) \delta(\rho)}{2\pi\rho}. \quad (1.8.14)$$

The solution of the inhomogeneous equation requires the use of certain properties of the Dirac delta function (ref), which are given below:

$$\int_0^{\infty} \delta(r) dr = \frac{1}{2}; \quad \int_0^{\infty} \delta(z) dz = \frac{1}{2}; \quad \int_0^{\infty} \delta(\rho) d\rho = 1;$$

$$\int_0^{\infty} \delta(z) u(z) dz = \frac{1}{2} u(0); \quad \int_0^{\infty} \delta'(z) u(z) dz = -\frac{1}{2} u'(0). \quad (1.8.15)$$

In terms of the stream function introduced in the last section, the equation of motion becomes

$$\left(\frac{\mu}{\rho} E^2 E^2 + \frac{\Delta\mu}{\rho} D^2 D^2 \right) \Psi = \frac{F \delta(z)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} \right]. \quad (1.8.16)$$

or, upon rearranging terms,

$$\left(E^2 E^2 + \frac{\Delta\mu}{\mu} D^2 D^2 \right) \Psi = \frac{F \delta(z)}{2\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} - \delta'(\rho) \right]. \quad (1.8.17)$$

Upon letting $\Delta\mu \rightarrow 0$ we recover the isotropic equation for the stokeslet. The equation of motion can be rewritten by introducing the parameter k^2 defined as

$$k^4 = -\frac{\Delta\mu}{\mu}. \quad (1.8.18)$$

By definition, k^2 is a real number if $\Delta\mu \leq 0$ and a pure imaginary number if $\Delta\mu \geq 0$. Since the equation depends on k^4 rather than on k^2 , the solution must be symmetric under the interchange of k^2 and $-k^2$. This property will allow us to rewrite the equations of motion in a symmetric way, namely

$$(E^2 + k^2 D^2)(E^2 - k^2 D^2)\Psi = \frac{F \delta(z)}{2\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} - \delta'(\rho) \right]. \quad (1.8.19)$$

Alternatively, in the even more symmetrical form, we have that

$$\left[\frac{1}{2}(E^2 + k^2 D^2)(E^2 - k^2 D^2) + \frac{1}{2}(E^2 - k^2 D^2)(E^2 + k^2 D^2) \right] \Psi =$$

$$= \frac{F \delta(z)}{2\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} - \delta'(\rho) \right]. \quad (1.8.20)$$

where the operators $E^2 + k^2 D^2$ and $E^2 - k^2 D^2$ are given by the expressions

$$E^2 + k^2 D^2 = (1 + k^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 - k^2) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right), \quad (1.8.21)$$

$$E^2 - k^2 D^2 = (1 - k^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 + k^2) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right). \quad (1.8.22)$$

This equation will be solved following the procedure used by Happel & Brenner (1965) for the comparable isotropic problem. The fourth-order differential equation can be separated into two second-order equations. First we define the functions $\Phi_1(\rho, z)$ and $\Phi_2(\rho, z)$ as

$$\Phi_1(\rho, z) \equiv (E^2 - k^2 D^2) \Psi \quad (1.8.23)$$

and

$$\Phi_2(\rho, z) \equiv (E^2 + k^2 D^2) \Psi, \quad (1.8.24)$$

satisfying the second-order equation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (E^2 + k^2 D^2) \Phi_1(\rho, z) + \frac{1}{2} (E^2 - k^2 D^2) \Phi_2(\rho, z) = \\ = \frac{F \delta(z)}{2\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} - \delta'(\rho) \right]. \end{aligned} \quad (1.8.25)$$

Upon using the expressions for the operators (1.8.21) and (1.8.22), the above can be rewritten as

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ (1 + k^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 - k^2) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right\} \Phi_1(\rho, z) + \\ + \frac{1}{2} \left\{ (1 - k^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1 + k^2) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right\} \Phi_2(\rho, z) = \\ = \frac{F \delta(z)}{2\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho)}{\rho} - \delta'(\rho) \right]. \end{aligned} \quad (1.8.26)$$

Upon introducing the new variables

$$\rho' \equiv \frac{\rho}{(1-k^2)^{1/2}} \quad (1.8.27)$$

$$z' \equiv \frac{z}{(1+k^2)^{1/2}} \quad (1.8.28)$$

$$z'' \equiv \frac{z}{(1-k^2)^{1/2}} = \frac{(1+k^2)^{1/2}}{(1-k^2)^{1/2}} z' = \frac{z'}{\varepsilon} \quad (1.8.29)$$

and

$$\rho'' \equiv \frac{\rho}{(1+k^2)^{1/2}} = \frac{(1-k^2)^{1/2}}{(1+k^2)^{1/2}} \rho' = \varepsilon \rho' \quad (1.8.30)$$

where

$$\varepsilon = \frac{(1-k^2)^{1/2}}{(1+k^2)^{1/2}} \quad (1.8.31)$$

Eq. (1.8.2.6) becomes

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) \right\} \Phi_1(\rho', z') + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z''^2} + \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) \right\} \Phi_2(\rho'', z'') = \\ & = \frac{F \delta(z')}{2\pi\mu (1+k^2)^{1/2} (1-k^2)} \left[\frac{\delta(\rho')}{\rho'} - \delta'(\rho') \right] = \\ & = \frac{F \delta(z'')}{2\pi\mu (1-k^2)^{1/2} (1+k^2)} \left[\frac{\delta(\rho'')}{\rho''} - \delta'(\rho'') \right] \quad (1.8.32) \end{aligned}$$

By construction $\Phi_1(\rho, z)$ is the same as $\Phi_2(\rho, z)$ upon replacing k^2 by $-k^2$.

The function $\Phi(\rho, z)$, defined as the sum

$$\Phi(\rho, z) \equiv \Phi_1(\rho, z) + \Phi_2(\rho, z), \quad (1.8.33)$$

is then symmetric under the exchange of k^2 by $-k^2$. Due to the symmetry, this equation can be decomposed into two equations:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) \right\} \Phi_1(\rho', z') = \frac{1}{2} \frac{F \delta(z')}{2\pi\mu (1+k^2)^{1/2} (1-k^2)} \left[\frac{\delta(\rho')}{\rho'} - \delta'(\rho') \right], \quad (1.8.34)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z''^2} + \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) \right\} \Phi_2(\rho'', z'') = \frac{1}{2} \frac{F \delta(z'')}{2\pi\mu (1-k^2)^{1/2} (1+k^2)} \left[\frac{\delta(\rho'')}{\rho''} - \delta'(\rho'') \right]. \quad (1.8.35)$$

Each of this pair of equations, written in these variables, is identical to the equation obtained in the isotropic case provided that we scale the strength of the point force as

$$F' = \frac{F}{(1+k^2)^{1/2} (1-k^2)}. \quad (1.8.36)$$

The solutions of these equations are obtained in the same way as previously.

Explicitly, define the Fourier cosine transform

$$\bar{\Phi}_1(\rho', \alpha) = \int_0^{\infty} \Phi_1(\rho', z') \cos \alpha z' dz'; \quad \Phi_1(\rho', z') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_1(\rho', \alpha) \cos \alpha z' d\alpha;$$

$$\bar{\Phi}_2(\rho'', \alpha) = \int_0^{\infty} \Phi_2(\rho'', z'') \cos \alpha z'' dz''; \quad \Phi_2(\rho'', z'') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_2(\rho'', \alpha) \cos \alpha z'' d\alpha.$$

Upon forming the Fourier cosine transform of Eqs. (1.8.34) and (1.8.35) we obtain

$$\left\{ \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) - \alpha^2 \right\} \bar{\Phi}_1(\rho', \alpha) = \frac{F' \delta(z')}{8\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho')}{\rho'} - \delta'(\rho') \right], \quad (1.8.39)$$

$$\left\{ \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) - \alpha^2 \right\} \bar{\Phi}_2(\rho'', \alpha) = \frac{F'' \delta(z'')}{8\pi\mu} \left[\frac{\delta(\rho'')}{\rho''} - \delta'(\rho'') \right], \quad (1.8.40)$$

wherein we have used various properties of the delta function set forth previously.

The general solutions of the homogeneous equations are, respectively

$$\bar{\Phi}_1(\rho', \alpha) = A\rho' I_1(\alpha\rho') + B\rho' K_1(\alpha\rho'), \quad (1.8.41)$$

$$\bar{\Phi}_2(\rho'', \alpha) = C\rho'' I_1(\alpha\rho'') + D\rho'' K_1(\alpha\rho''), \quad (1.8.42)$$

where A , B , C and D are constants of integration, and I_1 and K_1 are modified Bessel functions of the first and second kinds, respectively. Due to the symmetry of the solution we must take $A = C$ and $B = D$. The inhomogeneous solution can be obtained using the method of variation of parameters. This leads to the solutions

$$\bar{\Phi}_1(\rho', \alpha) = A\rho' I_1(\alpha\rho') - \frac{\alpha F' \rho' K_1(\alpha\rho')}{8\pi\mu}, \quad (1.8.43)$$

$$\bar{\Phi}_2(\rho'', \alpha) = A\rho'' I_1(\alpha\rho'') - \frac{\alpha F'' \rho'' K_1(\alpha\rho'')}{8\pi\mu}. \quad (1.8.44)$$

Next, we have to solve the following second-order equation, obtained by substitution of the previous solution into the original equation (1.8.20):

$$\left(E^2 - k^2 D^2 \right) \psi_1(\rho, z) + \left(E^2 + k^2 D^2 \right) \psi_2(\rho, z) = \Phi_1(\rho, z) + \Phi_2(\rho, z) \quad (1.8.45)$$

This equation may be rewritten as

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - k^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(1 + k^2 \right) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi_1(\rho, z) + \\ & + \left[\left(1 + k^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(1 - k^2 \right) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \psi_2(\rho, z) = \\ & = \Phi_1(\rho, z) + \Phi_2(\rho, z), \end{aligned} \quad (1.8.46)$$

where Φ_1 and Φ_2 are the Fourier transform of solutions (1.8.43) and (1.8.44), i.e.,

$$\begin{aligned}\Phi_1(\rho', z') &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_1(\rho', \alpha) \cos \alpha z' d\alpha = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[A \rho' I_1(\alpha \rho') - \frac{\alpha F' \rho' K_1(\alpha \rho')}{8 \pi \mu} \right] \cos \alpha z' d\alpha\end{aligned}\quad (1.8.47)$$

and

$$\begin{aligned}\Phi_2(\rho'', z'') &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_2(\rho'', \alpha) \cos \alpha z'' d\alpha = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[A \rho'' I_1(\alpha \rho'') - \frac{\alpha F'' \rho'' K_1(\alpha \rho'')}{8 \pi \mu} \right] \cos \alpha z'' d\alpha\end{aligned}\quad (1.8.48)$$

Equation (1.8.46) can be rewritten using the new variables (1.8.27) through (1.8.30) as

$$\begin{aligned}&\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z''^2} + \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) \right\} \psi_1(\rho'', z'') \\ &+ \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) \right\} \psi_2(\rho', z') = \\ &= \Phi_1(\rho, z) + \Phi_2(\rho, z)\end{aligned}\quad (1.8.49)$$

This equation can be split into the following pair of equations:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z''^2} + \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) \right\} \psi_1(\rho'', z'') = \Phi_2(\rho'', z''),\quad (1.8.50)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) \right\} \psi_2(\rho', z') = \Phi_1(\rho', z')\quad (1.8.51)$$

where the mixed grouping of terms is necessary to maintain the symmetry. In the above $\Phi_1(\rho', z')$ and $\Phi_2(\rho'', z'')$ are given by the Fourier cosine transforms

$$\Phi_1(\rho', z') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[A \frac{\rho'}{\varepsilon} I_1(\alpha \rho') - \alpha \varepsilon F' \rho' K_1(\alpha \rho') \right] \cos \alpha z' d\alpha\quad (1.8.52)$$

$$\Phi_2(\rho'', z'') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[A \frac{\rho''}{\varepsilon} I_1 \left(\frac{\alpha'' \rho''}{\varepsilon} \right) - \alpha'' F' \frac{\rho''}{2\varepsilon^2} K_1 \left(\frac{\alpha'' \rho''}{\varepsilon} \right) \right] \cos \alpha'' z'' d\alpha'' \quad (1.8.53)$$

with α'' defined as

$$\alpha'' \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \varepsilon \quad (1.8.54)$$

In order to solve Eqs. (1.8.50) and (1.8.51) we introduce the Fourier cosine of transform $\psi_1(\rho', z')$ and $\psi_2(\rho'', z'')$:

$$\bar{\psi}_1(\rho', \alpha) = \int_0^{\infty} \psi_1(\rho', z') \cos \alpha z' dz'; \quad \psi_1(\rho', z') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\psi}_1(\rho', \alpha) \cos \alpha z' d\alpha; \quad (1.8.55)$$

$$\bar{\psi}_2(\rho'', \alpha) = \int_0^{\infty} \psi_2(\rho'', z'') \cos \alpha z'' dz''; \quad \psi_2(\rho'', z'') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\psi}_2(\rho'', \alpha) \cos \alpha z'' d\alpha, \quad (1.8.56)$$

Upon taking the Fourier cosine transform of Eq. (1.8.50) and (1.8.51) we obtain the following equations:

$$\left\{ \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) - \alpha^2 \right\} \bar{\psi}_1(\rho', \alpha) = A \rho' I_1(\alpha \rho') - \frac{\alpha F' \rho' K_1(\alpha \rho')}{8 \pi \mu} \quad (1.8.57)$$

$$\left\{ \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho''} \left(\frac{1}{\rho''} \frac{\partial}{\partial \rho''} \right) - \alpha^2 \right\} \bar{\psi}_2(\rho'', \alpha) = A \rho'' I_1(\alpha \rho'') - \frac{\alpha F' \rho'' K_1(\alpha \rho'')}{8 \pi \mu} \quad (1.8.58)$$

The general solutions of the homogeneous equations are respectively given by

$$\bar{\psi}_{1H}(\rho', \alpha) = C \rho' I_1(\alpha \rho') + D \rho' K_1(\alpha \rho') \quad (1.8.59)$$

$$\bar{\psi}_{2H}(\rho'', \alpha) = C \rho'' I_1(\alpha \rho'') + D \rho'' K_1(\alpha \rho'') \quad (1.8.60)$$

where the constants C and D are taken to be same in both solutions in order to maintain the symmetry. Particular solutions can be found by the method of variation of parameters. This leads to the general solutions

$$\bar{\psi}_{1H}(\rho', \alpha) = C \rho' I_1(\alpha \rho') + D \rho' K_1(\alpha \rho') +$$

$$+ \frac{A\rho'^2 I_0(\alpha\rho')}{2\alpha} + \frac{\alpha F\rho'^2 K_0(\alpha\rho')}{16\pi\mu}, \quad (1.8.61)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{2H}(\rho'', \alpha) = & C\rho'' I_1(\alpha\rho'') + D\rho'' K_1(\alpha\rho'') + \\ & + \frac{A\rho''^2 I_0(\alpha\rho'')}{2\alpha} + \frac{\alpha F\rho''^2 K_0(\alpha\rho'')}{16\pi\mu}. \end{aligned} \quad (1.8.62)$$

The constants A and C are set equal to zero in order that the fluid be at rest at infinity. The constant D is taken to be zero in order that the velocity to be finite along the z axis (except at the singular point). The solution to Eq. (1.8.20) thereby reduces to

$$\begin{aligned} \psi(\rho, z) = & \psi_1(\rho, z) + \psi_2(\rho, z) = \\ = & \frac{\alpha F\rho'^2 K_0(\alpha\rho')}{16\pi\mu} + \frac{\alpha F\rho''^2 K_0(\alpha\rho'')}{16\pi\mu}. \end{aligned} \quad (1.8.63)$$

1.9 CONCLUSIONS.

The use of a fourth-rank viscosity tensor is justified provided that the transversely-isotropic continuum remains homogeneous during the flow process. Such homogeneity cannot be assured *a priori*; rather, each situation must be analyzed on its merits to decide whether homogeneity is a valid assumption. However, once having established the validity of the homogeneity assumption, a unique decomposition of the viscosity tensor exists that furnishes the six pertinent rheological parameters appearing in the equations of motion. Moreover, a well-established scheme exists to obtain the above mentioned decomposition. As a special case, the layered, transversely-isotropic fluid case was extensively studied throughout the chapter under different flow situations, including an example where the viscosity tensor evolves in time as the fluid is sheared (although remaining homogeneous).

Analytical results possess the distinct advantage (apart from their own intrinsic beauty) of revealing the explicit changes occurring in the solution as the pertinent physical parameters are varied, a quality that strictly numerical approaches cannot readily display. Our approach and results are completely analytical.

We believe that the approach outlined in this chapter possesses advantages when dealing with anisotropic fluids. It provides a transparent scheme to incorporate the relevant rheological anisotropies into the equations of motion in a unique way. The decomposition itself provides a very powerful tool, which allows one to determine the important parameters appearing in the equations of motion. In general, this approach has a strong hydrodynamic foundation which benefits its use in dealing with anisotropic fluids.

Chapter 2

Non-Homogeneous fluids

2.1 INTRODUCTION

The effective viscosity of a suspension of particles (Happel & Brenner 1965) depends upon different variables characterizing the system, specifically : (a) the rheological properties of the suspending fluid; (b) the size and shape of the suspended particles; (c) the concentration (i.e., number density) of the suspended particles; (d) the type of undisturbed shearing motion of the particles and fluid. Several excellent reviews exist on this subject (e.g., Eirich, Frisch & Simha 1956). In our study we will be interested in suspensions of neutrally buoyant spheres, where the suspension viscosity can be considered a function of the concentration of spheres, the extent of their hydrodynamic interaction, and the viscosity of the background fluid. The effective viscosity is defined as the ratio of the suspension viscosity relative to the viscosity of the suspending fluid (which we will consider to be both Newtonian and

incompressible). Neglecting hydrodynamic interactions among spheres and with the surrounding walls, for dilute systems the effective viscosity depends only on the concentration.

The effective viscosity of a suspension of spheres will be then considered a function of its concentration. For dilute systems, the dependence is linear (Einstein, 1905,1911,1956). Experimentally, it has been shown (Ward & Whitmore, 1950; Williams, 1953; Sweeney & Geckler, 1954) that the viscosity increases non-linearly with the concentration, diverging at a critical value of the concentration. Mathematical treatments, including hydrodynamic interactions, had been performed to describe the divergence at a critical value of the concentration (Simha, 1952; Happel, 1957).

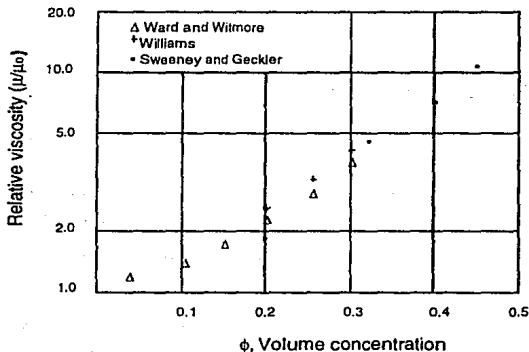


Figure 2.1. Dependence of the relative viscosity upon particle concentration

We assume that a constitutive equation relating the viscosity and the concentration is available, either experimentally or theoretically derived. An

experimental graph showing the concentration dependence of the relative viscosity is shown in figure 2.1. If the suspension is homogeneous, the system can be modeled as an homogeneous fluid with an effective viscosity which depends upon the sphere concentration. As far as the solution of the equations of motion is concerned, the viscosity will be a constant parameter.

If the suspension is not homogeneous, the viscosity can no longer be considered constant throughout the fluid. Gradients in the concentration will lead to gradients in the viscosity. In this chapter, we analyze the effect of gradients in the viscosity upon the solution of the equations of motion and the corresponding forces required to maintain the flow.

Were the particle concentration a known function of position, the functional dependence of the viscosity on the concentration, would enable one to obtain the viscosity as a function of position. Use of a position-dependent viscosity is valid at the same length scale wherein concentration can equally be considered a function of position. The viscosity appears in the equations of motion through the constitutive equation for the stress tensor and, if not constant, will consequently affect the dynamics of the system. Extra terms reflecting spatial viscosity variations will arise in the equations of motion, thereby modifying their solutions. In this chapter, we analyze the changes produced by a spatially variable viscosity. Of interest in the subsequent analysis is how the dynamics changes, and what is the effect of such variations upon the applied forces and torques. We also characterize such non-homogeneous fluids by assigning them effective rheological properties when compared with newtonian homogeneous fluids. The constant newtonian viscosity case will generally be referred to as the homogeneous case.

In the next section we write the equations of motion for the general non-steady situation and its simplification for steady-state flows. The role of the position-dependence of the viscosity will be appreciated when we explicitly write the extra terms arising in the equations of motion. In section 2.3 we analyze unidimensional flows and the changes induced by the extra terms in the equations of motion, as well as the forces required to maintain the flow. Section 2.4 is dedicated to the rotation of axisymmetric bodies.

2.2 The governing equations

The general non-steady problem will include the particle volumetric concentration $\Phi(\mathbf{r}, t)$ as a variable, in addition to the velocity $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ and pressure $p(\mathbf{r}, t)$ fields. An additional equation is required in order to have a well-posed mathematical problem. This equation arises when applying a particle conservation principle. For a neutrally buoyant suspension of particles, no net force acts on the particles. In consequence, they are carried along by the fluid, moving with the same velocity as the latter. No physical mechanism exists for the particles to move from one streamline to another, or to move with a different velocity than the fluid. These arguments, which we now assume to be true, have been proved (Brenner 1964, Brenner & O'Neill 1972). No hydrodynamic interactions are considered, either among particles or with the walls.

The concentration $\Phi(\mathbf{r}, t)$ satisfies a volumetric conservation equation of the same type as that for conservation of mass. This conservation equation can be written in the form

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{u}) = 0, \quad (2.2.1)$$

where $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ is the velocity field. Continuity and momentum equations can be written as

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}) = 0, \quad (2.2.2)$$

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}, \quad (2.2.3)$$

where ρ_f is the density of the fluid (assumed to be constant), and the stress tensor $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ is given by the constitutive equation

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = - \underline{\underline{\mathbf{I}}} p + \mu (\Phi(\mathbf{r}, t)) \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right], \quad (2.2.4)$$

where p is the hydrostatic pressure, $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ the dyadic idemfactor; the viscosity $\mu(\Phi)$ is a given function of the concentration Φ . These equations constitute a set of five equations for the five scalar variables \mathbf{u} , p and Φ . These equations must be solved subject to initial and boundary conditions imposed on the variables. This constitutes a well-posed mathematical problem.

In the next section we will simplify the equations for the steady-state regime.

2.3 The steady-state equations of motion

In the steady-state regime, the concentration of particles, though remaining constant in time, can vary with position. The final steady-state concentration can be used to obtain the viscosity as a function of position. Steady-state solutions can be obtained by solving steady continuity and momentum equations for the given concentration. Without solving the general non-steady problem, we will not be able to determine this final steady-state configuration for every possible initial configuration; but, by analyzing the steady-state equations of motion for an arbitrary functional dependence of the viscosity, all possible steady-state solutions can be studied, thereby providing a deeper understanding of the rheology and dynamics of suspensions. By considering arbitrary functional dependences, it will no longer be necessary to consider the relation between the viscosity and the concentration explicitly; rather, viscosity will be regarded as a prescribed function for every problem which follows. This functional dependence is restricted to the class of functions which are always positive and are consistent with the steady-state concentration assumption. This condition implies that the concentration field must satisfy a steady-state conservation equation, namely

$$\nabla \cdot [\mathbf{u}\phi] = \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 . \quad (2.3.1)$$

Since $\nabla \mu = \frac{d\mu}{d\phi} \nabla \phi$, the viscosity must satisfy the equation

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mu = 0 . \quad (2.3.2)$$

In other words, the viscosity must be constant along streamlines.

The viscosity, regarded as a known function of position, can be considered as an initial condition in the sense that it is a given function. Flow stability analysis can be used to show that some configurations are more stable than others; consequently, some configurations may not be observed experimentally.

The governing equations of motion for a nonhomogeneous fluid, like the one described in the preceding paragraphs, are obtained by allowing the viscosity to depend on position in the constitutive equation. This condition is satisfied by a neutrally buoyant suspension of spherical particles, where the density of particles and the fluid is the same. Since no extra variables are required to describe the fluid, no extra equations are needed. Conservation of mass and momentum, together with the steady-state condition, provide a closed set of equations for the system:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.3.3)$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}} = 0, \quad (2.3.4)$$

where the stress tensor $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ is given by the newtonian constitutive equation

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = -\underline{\underline{\mathbf{I}}} p + \mu(\mathbf{r}) [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*], \quad (2.3.5)$$

with $\mu(\mathbf{r})$ a given, but arbitrary, function of position. Boundary conditions on the velocity and pressure fields must be prescribed in order to have a well-posed mathematical problem. Particular interest centers on the case where the velocity vanishes at infinity, satisfies non-slip boundary conditions at solid surfaces, and wherein the pressure field approaches a constant value at infinity.

For the same flow geometry, different solutions can exist for different viscosity functions. In general, the solutions for the case of a constant viscosity fluid will differ from their counterparts of the comparable non-homogeneous case, even for small deviations from homogeneity. The mathematical reason for this difference depends upon the fact that the governing equations are different for homogeneous and non-homogeneous fluids. Additional terms in the equations of motion arise from the spatial variations of the viscosity field. Using the constitutive equation for the stress tensor, the momentum equation can be written as

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \mu \cdot [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*], \quad (2.3.6)$$

wherein viscosity gradients give rise to new terms in the equation of motion. It is important to note that the viscosity gradients are multiplied by gradients of velocity. If the velocity field is a decaying function of position, the Laplacian term will decay faster than the velocity gradient term, which means that even if the viscosity gradients are small, the extra term can become important at large distances. It is also important to notice that even though the order of the differential equation is not affected by the extra terms, the fact that it depends on the first derivatives of the velocity, can create new flow phenomena comparable to those arising in the simple mechanical oscillator in circumstances wherein damping and external driving forces are included. This mathematical complexities will become clearer when we analyze different examples in the subsequent sections.

General functional dependences of the viscosity are difficult to analyze because of the mathematical complexity of the equations. As such, special dependences will be invoked to provide some insights; these will hopefully prove helpful in understanding the new physics underlying non-homogeneous fluids. Explicitly, the use of periodic functions will allow the use of powerful mathematical tools in the solution of these equations. Even though periodic suspensions would be difficult to deal with experimentally, the analysis can be taken quite far analytically in such circumstances, allowing a deeper understanding to be obtained. From the results for periodic systems, some conclusions for the general case can be drawn. In some cases, we will be able to analyze general spatial dependences.

2.4 Unidimensional flows

This section is devoted to this analysis of some simple unidirectional flows, with the spatially-dependent viscosity μ usually varying only in the direction perpendicular to the streamlines. The problems presented in this section are unidimensional in the sense that there exists only one component of the vector velocity field, which in turn depends on only one variable. The importance of these simple examples lies in the fact that exact analytical solutions can be obtained. Solving these problems requires the solution of ordinary differential equations, subject to the pertinent boundary conditions.

2.4.1 Flow between parallel plates

As a first example of unidimensional flows, consider the flow between parallel plates. A cartesian coordinate system is chosen, such that the z axis is perpendicular to the plates and the x axis is parallel to the flow, as in figure 2.2. The two plates are separated by a distance h from each other, and the upper plate moved at a constant velocity U relative to the lower plate. Additionally, a constant external pressure gradient acts on the fluid on the x direction.

In compliance with the steady-state assumption regarding the concentration of particles, the viscosity must be a constant along streamlines. In this case, the viscosity is allowed to be an arbitrary function of z , which lies perpendicular direction to the flow direction:

$$\mu = \mu(z) = \mu_0 \mu_z(z). \quad (2.4.1)$$

Here the constant μ_0 is a characteristic viscosity and the dimensionless viscosity $\mu_z(z)$ is an arbitrary function of z , being an order one function with respect to the distance z .

Due to the prevailing symmetry, we assume subject to a posteriori verification that there exists only an x -component of the velocity field, and that it depends only on z :

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_x u_x(z) \quad (2.4.2)$$

Thus, the equation of motion becomes

$$\frac{d}{dz} \left(\mu_0 \mu_z(z) \frac{du_x}{dz} \right) = \frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L} = \text{const}, \quad (2.4.3)$$

which is to be solved subject to the following boundary conditions :

$$\begin{aligned} u_x(z=0) &= 0, \\ u_x(z=h) &= U. \end{aligned} \quad (2.2.3-4)$$

The continuity equation is identically satisfied by (2.4.2). The solution of the equation of motion is easily obtained by direct integration as

$$u_x(z) = \int_0^z \frac{\frac{\Delta p}{L} z' + C_0}{\mu_0 \mu_z(z')} dz' + C_1, \quad (2.4.5)$$

where C_0 and C_1 are integration constants to be determined from the boundary conditions. Application of the boundary conditions furnishes the following values for these constants :

$$u_x(z=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad (2.4.6)$$

$$u_x(z=h) = U \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{U - \frac{\Delta p}{L \mu_0} \int_0^h \frac{z'}{\mu_z(z')} dz'}{\frac{1}{\mu_0} \int_0^h \frac{1}{\mu_z(z')} dz'}. \quad (2.4.7)$$

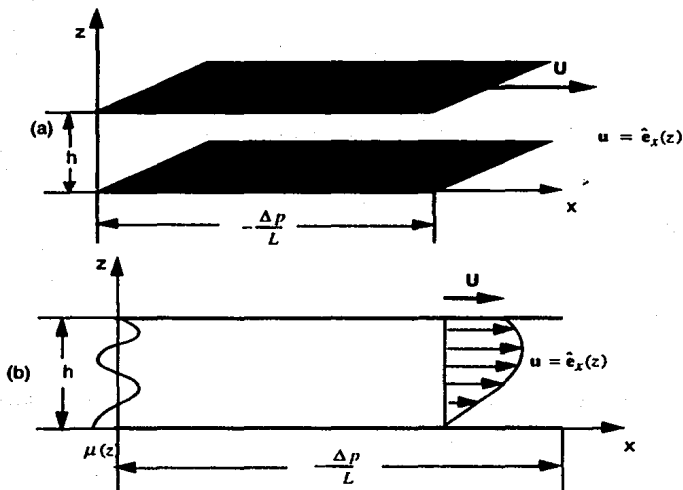


Figure 2.2. (a) Flow between parallel plates separated by a distance h . The upper plate is moving with constant velocity U with respect to the lower one. A constant pressure gradient acts in the x -direction. (b) The viscosity is a function of z only. Due to the symmetry of the problem the velocity is parallel to the plates and depends only on x .

The classic limit when the viscosity approaches a constant value is regular, and the homogeneous solution is recovered. Small perturbation analysis about this state can be applied. Thus, we suppose that the viscosity variation is of the functional form

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_z(z)} = \frac{1}{\mu_0} [1 + \varepsilon f(z)], \quad (2.4.7)$$

where $|\varepsilon| \ll 1$ is a perturbation parameter and $f(z)$ is of order one. Substitution into the expression for the velocity field yields

$$\begin{aligned}
 u_x(z) &= \int_0^z \frac{\frac{\Delta p}{L} z' + C_0}{\mu_0 \mu_z(z')} dz' = \int_0^z \left[\frac{\Delta p}{L} z' + C_0 \right] \frac{1}{\mu_0} (1 + \varepsilon f(z')) dz' = \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \int_0^z \left[\frac{\Delta p}{L} z' + C_0 \right] dz' + \frac{\varepsilon}{\mu_0} \int_0^z \left[\frac{\Delta p}{L} z' + C_0 \right] f(z') dz' = \\
 &= \frac{\Delta p}{2L\mu_0} z^2 + \frac{C_0 U}{\mu_0 h} z + \frac{\varepsilon}{\mu_0} \int_0^z \left[\frac{\Delta p}{L} z' + C_0 \right] f(z') dz' \\
 &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{2L\mu_0} z^2 + \frac{C_0' U}{\mu_0 h} z = \frac{\Delta p}{2L\mu_0} z(z-h) + \frac{U}{h} z \quad (2.4.8)
 \end{aligned}$$

where

$$C_0' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{U - \frac{\Delta p}{L\mu_0} \int_0^h z' (1 + \varepsilon f(z')) dz'}{\frac{1}{\mu_0} \int_0^h (1 + \varepsilon f(z')) dz'} = \frac{U - \frac{\Delta p}{2L\mu_0} h^2}{\frac{1}{\mu_0} h} \quad (2.4.9)$$

The force per unit length, per unit width (i.e., per unit area), required to maintain the steady-state motion of the upper plate for arbitrary functional dependence of the viscosity is

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x &= \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} dx = \frac{1}{L} \int_0^L \mu_0 \mu(z) \left. \frac{du_x}{dz} \right|_{z=h} dz = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\Delta p}{L} h + C_0 \right) dx = \\
 &= \frac{\Delta p}{L} h + \frac{1}{L} \int_0^L C_0 dx = \frac{\Delta p}{L} h + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{U - \frac{\Delta p}{L\mu_0} \int_0^z \frac{z'}{\mu_z(z')} dz'}{\frac{1}{\mu_0} \int_0^h \frac{1}{\mu_z(z')} dz'} dx =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 U}{h} + \frac{\Delta p}{L} \left[h - \frac{\int_0^h z' dz'}{\int_0^h \mu(z') dz'} \right] \quad (2.4.10)$$

Application of a similar perturbation analysis shows that the above reduces to the classical homogeneous solution when the viscosity approaches a constant value; explicitly,

$$F \cdot e_x \rightarrow \frac{\mu_0 U}{h} + \frac{\Delta p h}{2L}, \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.4.11)$$

2.4.2 Flow in a circular cylinder

As a second example, we consider the flow in a circular cylinder of radius R as in Fig. 2.3. The z axis of a circular cylindrical coordinate system (ρ, ϕ, z) coincides with the symmetry axis of the cylinder. The driven force for the flow is a constant pressure gradient acting in the z direction.

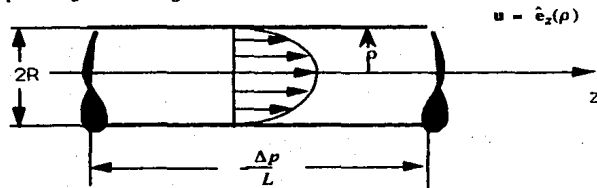


Figure 2.3. Pressure-driven flow in a circular cylinder of radius R . The viscosity changes in the radial direction modifying the velocity profile from its usual parabolic Poiseuille form.

The viscosity will be taken to be an arbitrary function of the radial distance ρ :

$$\mu = \mu(\rho) = \mu_0 \mu_\rho(\rho), \quad (2.4.12)$$

$$= \frac{\mu_0 U}{h} + \frac{\Delta p}{L} \left[h - \frac{\int_0^h \frac{z' dz'}{\mu(z')} \right] \quad (2.4.10)$$

Application of a similar perturbation analysis shows that the above reduces to the classical homogeneous solution when the viscosity approaches a constant value; explicitly,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x \rightarrow \frac{\mu_0 U}{h} + \frac{\Delta p h}{2L}, \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.4.11)$$

2.4.2 Flow in a circular cylinder

As a second example, we consider the flow in a circular cylinder of radius R as in Fig. 2.3. The z axis of a circular cylindrical coordinate system (ρ, ϕ, z) coincides with the symmetry axis of the cylinder. The driven force for the flow is a constant pressure gradient acting in the z direction.

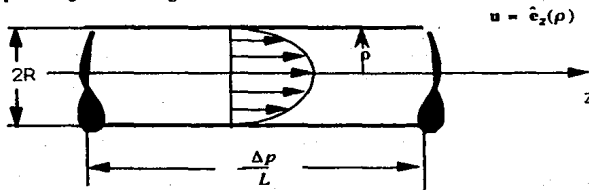


Figure 2.3 Pressure-driven flow in a circular cylinder of radius R . The viscosity changes in the radial direction modifying the velocity profile from its usual parabolic Poiseuille form.

The viscosity will be taken to be an arbitrary function of the radial distance ρ :

$$\mu = \mu(\rho) = \mu_0 \mu_p(\rho), \quad (2.4.12)$$

As required by the steady-state assumption in conjunction with the symmetry of the problem the velocity field is assumed to be of the unidirectional form

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_z u_z(\rho), \quad (2.4.13)$$

where \mathbf{e}_z is a unit vector in the z -direction.

The continuity equation is identically satisfied by this choice for any function $u_z(\rho)$, while the momentum equation for the pressure driven flow is

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \tau_{\rho z}) \quad (2.4.14)$$

where the stress component $\tau_{\rho z}$ given by

$$\tau_{\rho z} = \mu_0 \mu(\rho) \frac{du_z}{d\rho}. \quad (2.4.15)$$

This leads to the equation

$$-\frac{\Delta p}{L} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \mu_0 \mu(\rho) \frac{du_z}{d\rho} \right), \quad (2.4.16)$$

which must be solved subject to the boundary conditions

$$\begin{aligned} u_z &= 0, \quad \text{at } \rho = R, \\ u_z &\text{ finite for all values of } \rho. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

This first-order differential equation for $du_z/d\rho$ possesses the solution

$$\frac{du_z}{d\rho} = \frac{C_0}{\rho \mu_0 \mu(\rho)} + \left(-\frac{\Delta p}{2L} \right) \frac{\rho}{\mu_0 \mu(\rho)}. \quad (2.4.18)$$

The requirement that the velocity be finite everywhere (in particular at $\rho = 0$) necessitates that the integration constant C_0 be taken as zero. A second integration gives the velocity field

$$u_z(\rho) = C_1 + \left(-\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_0^\rho \frac{\rho' d\rho'}{\mu(\rho')}. \quad (2.4.19)$$

The non-slip boundary condition at the surface of the cylinder requires that

$$C_1 = \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{\mu_\rho(\rho')} \quad (2.4.20)$$

and hence leads to the solution

$$\begin{aligned} u_z(\rho) &= \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{\mu_\rho(\rho')} + \left(-\frac{\Delta p}{2L} \right) \int_0^\rho \frac{\rho' d\rho'}{\mu_\rho(\rho')} = \\ &= \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_\rho^R \frac{\rho' d\rho'}{\mu_\rho(\rho')} \quad (2.4.21) \end{aligned}$$

The limit of a uniform viscosity is regular, whence the velocity field approaches the classical Poiseuille flow homogeneous solution regularly. Write the perturbation series for the dimensionless viscosity as

$$\mu_\rho(\rho) = 1 + \varepsilon f_1(\rho) + \varepsilon^2 f_2(\rho) + \dots \quad (2.4.22)$$

where $|\varepsilon| \ll 1$ is the perturbation parameter; substitution into (2.4.21) gives

$$\begin{aligned} u_z(\rho) &= \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_\rho^R \frac{1}{\mu_\rho(\rho')} \rho' d\rho' = \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_\rho^R [1 - \varepsilon f_1(\rho) + \dots] \rho' d\rho' = \\ &= \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_\rho^R \rho' d\rho' - \varepsilon \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_\rho^R f_1(\rho) \rho' d\rho' + \dots \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta p}{2L\mu_0} \right) \int_\rho^R \rho' d\rho' = \\ &= \left(\frac{\Delta p}{4L\mu_0} \right) (R^2 - \rho^2) \quad (2.4.23) \end{aligned}$$

The force per unit length acting on the surface of the cylinder is given by the expression

$$F_z = \hat{e}_z \cdot \int \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \hat{e}_z \cdot \int \left[(\hat{e}_z \hat{e}_\rho + \hat{e}_\rho \hat{e}_z) \mu_0 \mu_\rho(\rho) \frac{du_z}{d\rho} \right] \cdot \hat{e}_\rho \, dS =$$

$$\begin{aligned}
 &= \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\mu_0 \mu_\rho(\rho) \frac{d u_z}{d \rho} \right]_{\rho=R} d\phi dz = \\
 &= 2\pi \left[\mu_0 \mu_\rho(\rho) \frac{d u_z}{d \rho} \right]_{\rho=R} = 2\pi \left[-\frac{\Delta p}{2L} R^2 \right] = \\
 &= -\frac{\pi \Delta p}{L} R^2, \tag{2.4.24}
 \end{aligned}$$

which is independent of the viscosity.

2.4.3 Source and sink problems

Another unidimensional flow example is provided by the flow out of a source or into a sink in an unbounded fluid. A simple source is a point from which fluid issues uniformly in all directions (see figure 2.4). The total volumetric flow rate through any closed surface enclosing the source quantifies the (algebraically-signed) strength Q of the source. Sources of negative strength are called sinks. The velocity field is determined by the kinematical condition of incompressibility together with the assumption of radial symmetry, and is

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_r u_r(r), \tag{2.4.25}$$

where

$$u_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}. \tag{2.4.26}$$

This fluid satisfies the continuity equation. In what follows, the viscosity will be taken to be an arbitrary function of the radial distance from the source. Explicitly, the viscosity is assumed to be of the form

$$\mu = \mu_0 \mu_r(r). \tag{2.4.27}$$

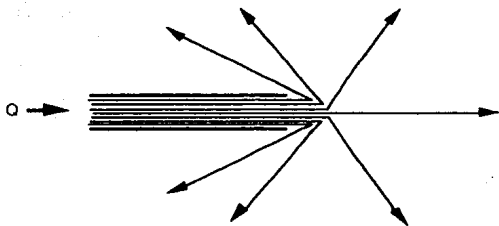


Figure 2.4. A source is a point from which fluid flows out uniformly in all directions. The total volumetric flow rate across any closed surface enclosing the source is called the strength Q . Sources of negative strength are called sinks.

The pressure field $p = p(r)$ is determined by the momentum equation, and hence will reflect the functional dependence of the viscosity.

The radial component of the momentum equation (2.3.6) in spherical coordinates is here of the form

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= \mu_0 \mu_r(r) \left[\nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} \right] + \mu_0 \frac{\partial \mu_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ &= \mu_0 \mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{2u_r}{r^2} \right] + \mu_0 \frac{\partial \mu_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

Substitution of the velocity field into the above leads to the following ordinary first-order differential equation for the pressure field:

$$\frac{dp}{dr} = -\mu_0 \frac{d\mu_r}{dr} \frac{Q}{2\pi r^3}. \quad (2.4.29)$$

Direct integration gives the pressure field

$$p(r) = p_\infty + \mu_0 \int_r^\infty \frac{d\mu_r}{dr'} \frac{Q}{2\pi r'^3} dr'. \quad (2.4.30)$$

Due to the fact that the velocity field is known a priori, it is possible to consider the full steady-state Navier-Stokes equation, rather than the linearized version thereof. Thus, the linear momentum equation is

$$\rho_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mu_0 \mu_r \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 \nabla \mu_r \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*]. \quad (2.4.31)$$

Substitution of the radial velocity assumption leads to the equation

$$\rho_f u_r \frac{du_r}{dr} = \frac{dp}{dr} - \mu_0 \frac{d\mu_r}{dr} \frac{Q}{2\pi r^3}. \quad (2.4.32)$$

whence using the expression (2.4.26) for the velocity field gives

$$\frac{dp}{dr} = \rho_f \frac{Q^2}{8\pi r^5} - \mu_0 \frac{d\mu_r}{dr} \frac{Q}{2\pi r^3}. \quad (2.4.33)$$

This can be directly integrated to give the pressure field

$$p(r) = p_\infty + \mu_0 \int_r^\infty \frac{d\mu_r}{dr'} \frac{Q}{2\pi r'^3} dr' + \rho_f \int_r^\infty \frac{Q^2}{8\pi r'^5} dr'. \quad (2.4.34)$$

Explicitly,

$$p(r) = p_\infty - \frac{\rho_f Q^2}{32\pi r^4} + \mu_0 \int_r^\infty \frac{d\mu_r}{dr'} \frac{Q}{2\pi r'^3} dr'. \quad (2.4.35)$$

2.4.4 Rotation of a sphere

The last example that we analyze in this section is not a unidimensional flow, although its solution still only requires the solution of an ordinary differential equation. The statement of the problem is as follows: A sphere of radius a immersed in an infinite fluid rotates with constant angular velocity Ω , while the viscosity of the fluid is an arbitrary function of the radial distance measured from the center of the sphere.

As in figure 2.5, a spherical coordinate system (r, θ, ϕ) is placed in such a way that its origin coincides with the center of the sphere. The z axis is chosen to coincide with the axis of rotation.

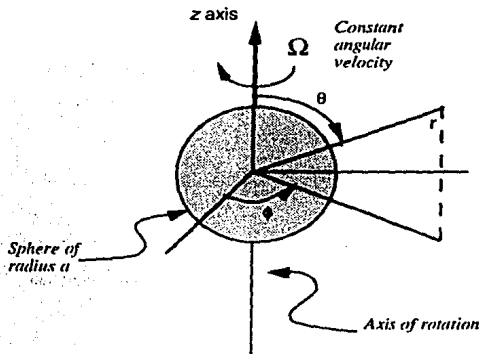


Figure 2.5. Sphere rotating with constant angular velocity about an axis passing through its center.

In this coordinate system the viscosity $\mu(r)$ is taken to be an arbitrary function of the form

$$\mu = \mu_0 \mu_r(r), \quad (2.4.36)$$

leading to the following equations of motion :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.4.37)$$

$$\nabla p = \mu_0 \mu_r(r) \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 \nabla \mu_r(r) \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+], \quad (2.4.38)$$

which are subject to the following boundary conditions :

$$\mathbf{u} = \bar{\Omega} \times \mathbf{r} = \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_\phi \Omega r \sin \theta \quad \text{at} \quad r = a,$$

$$\begin{aligned} |\mu| &\rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty, \\ p &\rightarrow p_\infty = \text{const. as } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

Due to the symmetry of the flow (subject to a posteriori verification) we assume that only the ϕ component of the velocity field is different from zero, and that the resulting tangential speed is independent of the angle ϕ ,

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{e}}_\phi u_\phi(r, \theta). \quad (2.4.40)$$

Similarly, for the pressure field,

$$p = p(r, \theta). \quad (2.4.41)$$

The continuity equation is identically satisfied, whereas the momentum equation adopts the form

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \frac{\partial p}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \mathbf{e}_\phi \mu_0 \mu_r(r) \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + \\ &+ \mu_0 \frac{d\mu_r}{dr} \mathbf{e}_r \cdot \left\{ (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_r) \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right] - (\mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\phi) \left[\frac{\cot \theta}{r} u_\phi \right] \right\} \\ &= \mathbf{e}_\phi \mu_0 \mu_r(r) \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + \mu_0 \frac{d\mu_r}{dr} \mathbf{e}_\phi \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

This leads to the conclusion that the pressure is a constant throughout the fluid and that the ϕ velocity component satisfies the equation

$$\begin{aligned} \mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + \\ + \frac{d\mu_r}{dr} \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

Making the trial substitution

$$u_{\phi}(r, \theta) = U(r) \sin \theta, \quad (2.4.44)$$

suggested by boundary conditions satisfied by the velocity field, the equation of motion becomes

$$\begin{aligned} & \mu_r(r) \left[\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) + \frac{U}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{d \sin \theta}{d \theta} \right) - \frac{U}{r^2 \sin \theta} \right] + \\ & \quad + \sin \theta \frac{d \mu_r}{dr} \left[\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right] = \\ & = \mu_r(r) \left[\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) + \frac{U}{r^2 \sin \theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \frac{U}{r^2 \sin \theta} \right] + \\ & \quad + \sin \theta \frac{d \mu_r}{dr} \left[\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right] = \\ & = \mu_r(r) \left[\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) + \frac{U}{r^2 \sin \theta} (-2 \sin^2 \theta) \right] + \sin \theta \frac{d \mu_r}{dr} \left[\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right] = \\ & = \mu_r(r) \left[\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) - \frac{2U \sin \theta}{r^2} \right] + \sin \theta \frac{d \mu_r}{dr} \left[\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right] = 0. \quad (2.4.45) \end{aligned}$$

Upon dividing $\sin \theta$ by we obtain the following ordinary differential equation for $U(r)$:

$$\mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) - \frac{2U}{r^2} \right] + \frac{d \mu_r}{dr} \left[\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right] = 0. \quad (2.4.46)$$

Upon making the substitution

$$U(r) = rW(r), \quad (2.4.44)$$

we obtain a first-order differential equation for the derivative dW/dr , namely

$$\begin{aligned} & \mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(rW)}{dr} \right) - \frac{2W}{r} \right] + \frac{d \mu_r}{dr} \left[\frac{d(rW)}{dr} - W \right] = \\ & = \mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dW}{dr} + r^2 W \right) - \frac{2W}{r} \right] + \frac{d \mu_r}{dr} \left[r \frac{dW}{dr} + W - W \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu_r(r) \left[\frac{1}{r^2} \left(r^3 \frac{d^2 W}{dr^2} + 4r^2 \frac{dW}{dr} + 2rW \right) - \frac{2W}{r} \right] + \frac{d\mu_r}{dr} r \frac{dW}{dr} = \\
 &= \mu_r(r) \left(r \frac{d^2 W}{dr^2} + 4 \frac{dW}{dr} \right) + \frac{d\mu_r}{dr} r \frac{dW}{dr} = \\
 &= \mu_r(r) r \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{dW}{dr} \left(\frac{d\mu_r}{dr} r + 4\mu_r(r) \right) = 0. \quad (2.4.48)
 \end{aligned}$$

Division by $\mu_r(r)r$ gives

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{dW}{dr} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{d\mu_r}{dr} + \frac{4}{r} \right) = 0. \quad (2.4.49)$$

A first integral of the latter yields

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dr} &= C_0 \exp \left[- \int \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{d\mu_r}{dr} + \frac{4}{r} \right) dr \right] = \\
 &= C_0 \exp \left[- \ln(\mu_r r^4) \right] = \frac{C_0}{\mu_r r^4}. \quad (2.4.50)
 \end{aligned}$$

which leads to the solution

$$W(r) = C_\infty - \int \frac{C_0 dr'}{\mu_r r'^4}. \quad (2.4.51)$$

With this solution the velocity field is found to be

$$u_\phi(r, \theta) = r \sin \theta W(r) = C_\infty r \sin \theta - r \sin \theta \int \frac{C_0 dr'}{\mu_r r'^4}, \quad (2.4.52)$$

wherein the two integration constants are evaluated using the boundary conditions. This gives

$$|u| \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty \Rightarrow C_\infty = 0,$$

$$u = e_\phi \Omega r \sin \theta \quad \text{at } r = a \Rightarrow -C_0 \int \frac{dr'}{\mu_r r'^4} = \Omega, \quad (2.4.53)$$

$$C_0 = -\frac{\Omega}{\int_a^{\infty} \frac{dr'}{\mu_r r'^4}} \quad (2.4.54)$$

Introduction of the above values for integration constants into (2.4.52) leads to the following solution for the velocity field in terms of the arbitrary viscosity dependence :

$$u_\phi(r, \theta) = \frac{\Omega r \sin \theta \int_a^{\infty} \frac{dr'}{r' \mu_r r'^4}}{\int_a^{\infty} \frac{dr'}{r' \mu_r r'^4}} \quad (2.4.55)$$

The torque required to maintain a steady rotation of the sphere can now be calculated by evaluation of the stress tensor :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P}} &= -\underline{\underline{I}}p + \mu_0 \mu_r(r) [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] = \\ &= -\underline{\underline{I}}p + \mu_0 \mu_r(r) \left[(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_r) \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right) - (\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\theta) \left(\frac{\cot \theta u_\phi}{r} \right) \right] = \\ &= -\underline{\underline{I}}p + \mu_0 \mu_r(r) \left[(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_r) r \sin \theta \frac{\partial W}{\partial r} - (\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\theta) \cos \theta W \right] \quad (2.4.56) \end{aligned}$$

The torque is given by the expression :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{r} \times (\underline{\underline{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) r^2 \sin \theta \Big|_{r=a} d\theta d\phi = \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{r} \times \left(\mathbf{e}_\phi \mu_r(r) r \sin \theta \frac{dW}{dr} \right) r^2 \sin \theta \Big|_{r=a} d\theta d\phi = \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{e}_\phi r \sin \theta + \mathbf{e}_z r \cos \theta) \times \left(\mathbf{e}_\phi \mu_r(r) \frac{dW}{dr} \right) r^3 \sin^2 \theta \Big|_{r=a} d\theta d\phi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\mathbf{e}_z \sin \theta - e_\rho \cos \theta) \mu_r(r) \frac{\partial W}{\partial r} r^4 \sin^2 \theta \Big|_{r=a} d\theta d\phi = \\
 &= e_z \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mu_r(a) \frac{dW}{dr} a^4 \sin^3 \theta \Big|_{r=a} d\theta d\phi . \quad (2.4.57)
 \end{aligned}$$

By using the identity

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta = 0 , \quad (2.4.58)$$

the torque is found to be :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= e_z \mu_0 C_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta d\phi = \\
 &= \hat{\mathbf{e}}_z 2\pi \mu_0 C_0 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \\
 &= \hat{\mathbf{e}}_z \frac{8\pi}{3} \mu_0 C_0 = -\hat{\mathbf{e}}_z \frac{\frac{8\pi}{3} \mu_0 \Omega}{\int_a^{\infty} \frac{dr}{\mu_r r^4}} , \quad (2.4.59)
 \end{aligned}$$

where the effect of a non-constant viscosity can be observed in the denominator of the above expression for the torque. Assuming that the viscosity is a well-behaved function of the radial coordinate we can perform the perturbation expansion to recover the classical homogeneous case result. Writing the viscosity in the form :

$$\frac{1}{\mu_r} = 1 + \varepsilon f(r) \quad (2.4.60)$$

and substituting it into the expression for the torque gives the following perturbation expansion in terms of the small parameter ε :

$$\mathbf{T} = -e_z \frac{\frac{8\pi}{3} \mu_0 \Omega}{\int_a^{\infty} \frac{dr}{\mu_r r^4}} = -e_z \frac{\frac{8\pi}{3} \mu_0 \Omega}{\int_a^{\infty} \frac{1}{r^4} (1 + \varepsilon f(r)) dr} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\hat{e}_z \frac{\frac{8\pi}{3}\mu_0\Omega}{\int_a^\infty \frac{1}{r^4} dr + \varepsilon \int_a^\infty \frac{f(r)}{r^4} dr} = -\hat{e}_z \frac{\frac{8\pi}{3}\mu_0\Omega}{\frac{1}{3a^3} + \varepsilon \int_a^\infty \frac{f(r)}{r^4} dr} = \\
&= -\hat{e}_z 8\pi\mu_0 a^3 \Omega \left[1 - \varepsilon 3a^3 \int_a^\infty \frac{f(r)}{r^4} dr + O(\varepsilon^2) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\hat{e}_z 8\pi a^3 \mu_0 \Omega.
\end{aligned}
\tag{2.4.61}$$

2.5 Rotation of axisymmetric bodies

In this section, we analyze the flow induced by the rotation of axisymmetric bodies. The axisymmetric body, or body of revolution, is assumed to spin around its symmetry axis with constant angular velocity Ω . Due to the geometry of the problem, cylindrical coordinates are appropriate for writing the equations of motion. The z axis is taken to be along the symmetry axis of the body, as depicted in figure 2.6.

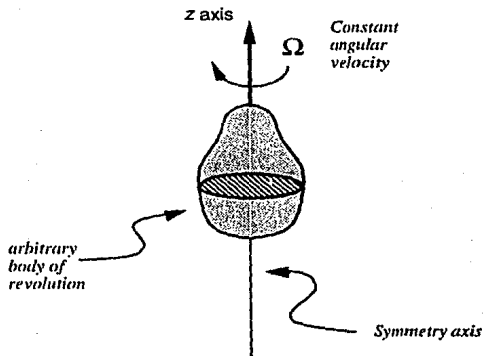


Figure 2.6. Arbitrary body of revolution rotating with constant angular velocity along its symmetry axis. The z axis of a cylindrical coordinate system coincides with the symmetry axis.

The nature of the solution depends upon the geometry of the particle. For infinitely long circular cylinders, we expect to have a one-dimensional problem where only the ϕ component of the velocity field is different from zero and depends only on the radial coordinate ρ . This result will hold for arbitrary choices of the viscosity. For the case of the sphere, the solution will depend also upon the variable z , and the fact

that the viscosity is not constant will play an important role modifying the nature of the solution. We will show how different wave lengths are introduced into the problem by non-constant viscosities.

2.5.1 Equations of motion in cylindrical coordinates

In this section we derive the equations of motion in cylindrical coordinates and solve the problem for an infinitely long circular cylinder. In the next section we will obtain the fundamental rotlet solution in addition to analyzing the case of finite-size bodies.

The cylindrical coordinate system is chosen such that the z axis coincides with the symmetry axis of the body of revolution. Due to the symmetry of the problem we assume that both the velocity and pressure fields are functions only of ρ and z :

$$p = p(\rho, z), \quad (2.5.1)$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{e}}_\rho u_\rho(\rho, z) + \hat{\mathbf{e}}_z u_z(\rho, z) + \hat{\mathbf{e}}_\phi u_\phi(\rho, z). \quad (2.5.2)$$

Consider the case when the viscosity can be expressed as the separable product

$$\mu = \mu_0 \mu_\rho(\rho) \mu_z(z), \quad (2.5.3)$$

where μ_0 is a characteristic viscosity and the functions $\mu_\rho(\rho)$ and $\mu_z(z)$ are dimensionless and of order one. This general case is restricted to those functions satisfying the steady-state condition Eq. (2.3.2) stated previously in the chapter. This condition requires that the viscosity be constant along streamlines. For axisymmetric flows with only ϕ component of the velocity, the streamlines are concentric circles

around the z axis. The steady condition requires that the viscosity should not depend on the ϕ variable. This is certainly satisfied by the general dependence posed in Eq. (2.5.3) but also for more general dependences that cannot be expressed as the separable product of two functions. The general product dependence we have assumed has the advantage of being consistent with a separation of variables method of solution which would otherwise not be available. Nevertheless, the classes of flows that can be investigated is still quite diverse, and many flow phenomena can be studied for these special circumstances. Even more special cases, where the viscosity is a function of z only (as in the case of layered materials), or when it depends only on ρ , fall within the purview of our scheme.

The rate-of-deformation tensor is given by the expression

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+ &= 2\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + (\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_\phi + \hat{\mathbf{e}}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\rho) \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} - \frac{u_\phi}{\rho} \right] + \\ &+ (\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_z + \hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_\rho) \left[\frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z} \right] + 2\hat{\mathbf{e}}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{u_\rho}{\rho} + (\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_\phi + \hat{\mathbf{e}}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\rho) \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \\ &+ 2\hat{\mathbf{e}}_z \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial u_z}{\partial z} . \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

The equations of motion

$$\nabla p = \nabla \cdot \left\{ \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+ \right] \right\} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \mu \cdot \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+ \right] , \quad (2.5.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \quad (2.5.6)$$

with $\nabla \mu$ given by

$$\nabla \mu = \hat{\mathbf{e}}_\rho \mu_{0\rho} \frac{\partial \mu_\rho}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{e}}_z \mu_{0z} \frac{\partial \mu_z}{\partial z} , \quad (2.5.7)$$

can be expressed in cylindrical coordinates as

$$(\rho\text{-component}) \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = \mu(\rho, z) \left[\nabla^2 u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad (2.5.8)$$

$$(z\text{-component}) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu(\rho, z) \nabla^2 u_z + \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \left[\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2.5.9)$$

$$(\phi\text{-component}) \quad \mu(\rho, z) \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{\rho^2} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} - \frac{u_\phi}{\rho} \right], \quad (2.5.10)$$

$$(\text{continuity}) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\rho) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (2.5.11)$$

The ϕ -component of the equations of motion is uncoupled from the other two components. This set of equations is to be solved subject to boundary conditions imposed on the velocity and pressure fields. The velocity field satisfies non-slip boundary conditions at the surface of the particle, and vanishes at infinity. The pressure field approaches a constant value at infinity. Thus,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{U}_s, & \text{at the surface of the particle,} \\ \mathbf{u} &\rightarrow 0, & \text{as } r \rightarrow \infty, \\ p &\rightarrow p_0, & \text{as } r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

where \mathbf{U}_s is the velocity of the particle, and $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$.

For certain geometries of the rotating particle we can assume that there is only one component of the velocity field, but in general the three components are needed in order to satisfy the boundary conditions.

2.5.2 Infinitely-long cylinder rotating in an unbounded fluid

The first example we will analyze is the case of an infinitely-long circular cylinder. This example is simple enough to be solved for general functional dependences of the viscosity. Due to the symmetry of the problem, there exists no characteristic length in the z direction other than that introduced by the viscosity itself. Due to the high degree of symmetry of this problem, these viscous characteristic lengths will not appear. In contrast, in problems with more complicated boundary conditions, these characteristic lengths play an important role, as will be seen in the next section.

We assume that the viscosity is of the form :

$$\mu(\rho, z) = \mu_1(\rho) \mu_2(z). \quad (2.5.13)$$

For the case of an infinitely circular cylinder (see figure 2.7) of radius a rotating with constant angular velocity Ω , we assume, subject to a posteriori verification, that there is only one component of the velocity field, namely

$$\mathbf{u} = e_\phi u_\phi(\rho, z). \quad (2.5.14)$$

This satisfies the momentum equation

$$\mu(\rho, z) \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{\rho^2} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} - \frac{u_\phi}{\rho} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_\phi}{\partial z} = 0 \quad (2.5.15)$$

and the boundary conditions

$$\begin{aligned} u_\phi &= \Omega a & \text{at } \rho = a & \quad (\forall z), \\ u_\phi &\rightarrow 0 & \text{as } \rho \rightarrow \infty & \quad (\forall z). \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Moreover, the pressure is a constant throughout the fluid, as required by the equations of motion.

The continuity equation is identically satisfied since the problem is one-dimensional. The solution of the momentum equation depends on the functional dependence of the viscosity. Due to the symmetry of the boundary conditions expressed by Eq. (2.5.16), together with the functional dependence of the viscosity Eq.(2.5.13), separation of variables can be used to obtain the solution of the equation of motion. Assuming that the velocity is of the form

$$u_{\phi}(\rho, z) = U(z)V(\rho), \quad (2.5.17)$$

we obtain the following uncoupled set of equations :

$$\frac{d^2 V}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dV}{d\rho} - \frac{V}{\rho^2} + \frac{1}{\mu_{\rho}(\rho)} \frac{d\mu_{\rho}}{d\rho} \left[\frac{dV}{d\rho} - \frac{V}{\rho} \right] = \alpha^2 V, \quad (2.5.18)$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{1}{\mu_z(z)} \frac{d\mu_z}{dz} \frac{dU}{dz} = -\alpha^2 U, \quad (2.5.19)$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{1}{\mu_z(z)} \frac{d\mu_z}{dz} \frac{dU}{dz} = -\alpha^2 U, \quad (2.5.20)$$

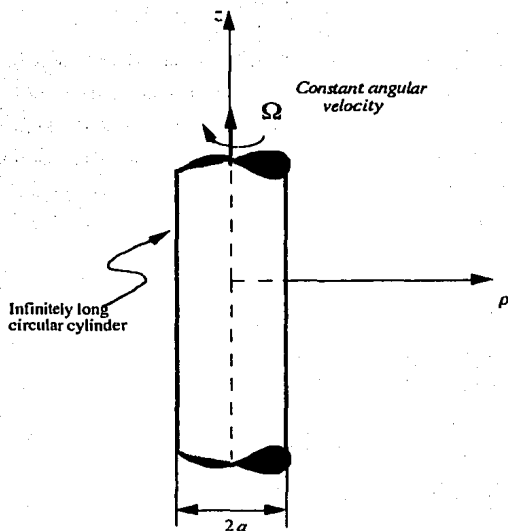


Figure 2.7. Infinite cylinder rotating with constant angular velocity Ω in an unbounded non-homogeneous fluid. Due to the symmetry of the boundary conditions there is only one component of the velocity field, namely u_ϕ .

where α^2 is the separation constant. The boundary conditions on the surface of the circular cylinder are independent of z . Due to this translational symmetry, we assume that there is no z dependence of the solution. The separation constant is then taken to be zero, and the solution for $V(\rho)$ obtained by making the substitution

$$V(\rho) = \rho W(\rho) \quad (2.5.20)$$

into the equation of motion and boundary conditions. This leads to the following equation and boundary conditions for W :

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \left(\frac{3}{\rho} + \frac{1}{\mu_\rho(\rho)} \frac{d\mu_\rho}{d\rho} \right) \frac{dW}{d\rho} = 0, \quad (2.5.21)$$

$$\begin{aligned} W &= \Omega & \text{at } \rho &= a, \\ \rho W &\rightarrow 0 & \text{as } \rho &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

The former is a first-order ordinary differential equation for the derivative $dW/d\rho$. A first integration leads to a first-order differential equation,

$$\frac{dW}{d\rho} = C_0 \exp \left[- \int \left(\frac{3}{\rho'} + \frac{1}{\mu_\rho} \frac{d\mu_\rho}{d\rho'} \right) d\rho' \right] = \frac{C_0}{\mu_\rho \rho^3}, \quad (2.5.23)$$

where C_0 is an integration constant. A second integration gives the solution

$$W(\rho) = - \int \frac{C_0}{\mu_\rho \rho^3} d\rho' + C_1. \quad (2.5.24)$$

The boundary condition at infinity requires that $C_1 = 0$, whereas the condition at the surface of the cylinder requires that

$$C_0 = - \frac{\Omega}{\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho^3} d\rho'}. \quad (2.5.25)$$

Thus, the velocity field becomes

$$u_\phi(\rho) = \Omega \rho \frac{\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho'^3} d\rho'}{\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho'^3} d\rho'}. \quad (2.5.26)$$

It is important to notice that the velocity field is independent of the choice of $\mu_z(z)$, and consequently independent of any length scale in the z direction. This is a consequence of the simplicity of the boundary conditions governing the problem. For

more complicated boundary conditions dependent upon z the velocity field will also depend on z . If the viscosity is a function only of z , the velocity field will be unaffected, and will be exactly the same as in the homogeneous case.

The limiting case where the viscosity approaches a constant value is regular and the classical homogeneous solution is recovered. A regular perturbation analysis can be performed as follows. Assume that the viscosity can be expanded as

$$\frac{1}{\mu_p} = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (2.5.27)$$

where $|\varepsilon| \ll 1$ is the perturbation parameter, and the functions f_i are of order one.

This leads to the limit

$$\begin{aligned} u_\phi(\rho) &= \Omega \rho \frac{\int_a^\infty [1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots] \frac{1}{\rho'^3} d\rho'}{\int_a^\infty [1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots] \frac{1}{\rho'^3} d\rho'} = \\ &= \Omega \rho \frac{\int_a^\infty \frac{1}{\rho'^3} d\rho' + \varepsilon \int_a^\infty \frac{f_1}{\rho'^3} d\rho' + \dots}{\int_a^\infty \frac{1}{\rho'^3} d\rho' + \varepsilon \int_a^\infty \frac{f_1}{\rho'^3} d\rho' + \dots} \rightarrow \frac{\Omega a^2}{\rho} \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.5.28) \end{aligned}$$

In order for this solution to be valid we require only that the integral

$$\int_a^\infty \frac{1}{\mu_p \rho'^3} d\rho' \quad (2.5.29)$$

must converge. This condition is satisfied if μ_p is bounded and of order one for all ρ .

The effective viscosity of the fluid will be defined in terms of the required torque needed to maintain the steady rotation of the cylinder. The torque per unit length

is a function of the section of the cylinder considered owing to the z dependence of the viscosity. The stress tensor is given by the expression

$$\underline{\underline{T}} = -\underline{\underline{I}} p_\infty + (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\rho) C_0 \mu_0 \mu_z(z) / \rho^2, \quad (2.5.30)$$

where C_0 is the constant appearing in the expression for the velocity field. The torque per unit length is found to be

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{e}_z T = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{r} \times (\underline{\underline{T}} \cdot \mathbf{n}) \rho dz d\phi = \mathbf{e}_z \frac{2\pi \mu_0 C_0}{L} \int_0^L \mu_z(z') dz' \\ &= \mathbf{e}_z \frac{\frac{2\pi \mu_0 \Omega}{L} \int_0^L \mu_z(z') dz'}{\int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho \rho^3} d\rho'} \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

The effective viscosity is defined in terms of the ratio of the non-homogeneous and homogeneous torques. Thus,

$$\frac{\mu_{eff}}{\mu_0} = \frac{\frac{1}{L} \int_0^L \mu_z(z') dz}{2a^2 \int_a^\infty \frac{1}{\mu_\rho(\rho') \rho^3} d\rho'}. \quad (2.5.32)$$

The effective viscosity is affected in two different ways: (i) a contribution arises from the fact that the actual flow is different from that for the homogeneous case, as in the term in the denominator of the above, (ii) the viscosity itself varies over the surface of the cylinder, as in the numerator. The limiting case where the viscosity approaches a constant is regular, and the classical homogeneous viscosity result is recovered for the torque. The limit can be evaluated in exactly the same way as in the case of the velocity; explicitly,

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_z \frac{\frac{2\pi\Omega}{L} \int_0^L \mu_x(z') dz'}{\int_a^{\infty} \frac{1}{\mu_\nu \rho^3} d\rho'} \rightarrow \mathbf{e}_z 4\pi\mu_0 a^2 \Omega, \quad \text{as } \mu \rightarrow \mu_0. \quad (2.533)$$

In the case when the viscosity is periodic in z , it is possible to calculate the torque required by integrating over one period of the viscosity, although, the present results are, in fact, valid for general dependences of the viscosity. As an example of how the velocity field is affected by a non-constant viscosity we solve a particular problem. Assume that the viscosity is a periodic function of the form

$$\frac{1}{\mu_\nu(\rho)} = 1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi\rho}{R}\right), \quad (2.534)$$

where ε , though not necessarily small, is less than one. R is an arbitrary period. If, however, ε is small the above can be considered as the first term in a Fourier decomposition of the viscosity function. The exact solution is available analytically, namely

$$u_\phi = \Omega\rho \left[\frac{\frac{1}{2\rho^2} - \varepsilon \left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi\rho}{R}\right)}{2\rho^2} + \frac{2\pi}{R} \frac{\sin\left(\frac{2\pi\rho}{R}\right)}{\rho} - \left(\frac{2\pi}{R}\right)^2 \left(\log(\rho) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{2\pi\rho}{R}\right)^{2n}}{2n(2n)!} \right) \right]}{\frac{1}{2a^2} - \varepsilon \left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi a}{R}\right)}{2a^2} + \frac{2\pi}{R} \frac{\sin\left(\frac{2\pi a}{R}\right)}{a} - \left(\frac{2\pi}{R}\right)^2 \left(\log(a) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{2\pi a}{R}\right)^{2n}}{2n(2n)!} \right) \right]} \right]$$

where it can be seen that in the limit of constant viscosity ($\varepsilon \rightarrow 0$) the velocity field reduces to the homogeneous solution,

$$u_\phi = \frac{\Omega a^2}{\rho}, \quad (2.534)$$

regularly as $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.6 Point-size particle in a fluid of variable viscosity and density

An interesting problem to consider is that of the settling of an effectively point-size spherical particle in a fluid where both the viscosity and the density are not constant. We assume that the viscosity changes periodically in the direction of the particle motion with a period L . Likewise, the density will also be assumed to be a periodic function, but of a different period l :

$$\mu(z) = \mu(z + L), \quad (\forall z \in \mathfrak{R}) \quad (2.6.1)$$

$$\rho_f(z) = \rho_f(z + l), \quad (\forall z \in \mathfrak{R}). \quad (2.6.2)$$

Assume the particle to sediment due to a gravity force. The gravitational body force on the particle minus the buoyant force constitutes the driving force for the settling motion. The resisting, hydrodynamic drag force acting on the particle is given by Stokes law for a finite-size spherical particle. In effect, consider the radius a of the sphere to be small compared with both of the two periods l and L , so that the following two inequalities are satisfied:

$$\frac{a}{l} \ll 1 \quad \text{and} \quad \frac{a}{L} \ll 1. \quad (2.6.3)$$

The equation of quasistatic motion for the sphere is thus given by

$$6\pi a\mu(z)U(z) = \Delta mg = \frac{4}{3}\pi a^3[\rho - \rho_f(z)]g, \quad (2.6.4)$$

where ρ is the density of the particle, ρ_f is the density of the fluid, and g is the acceleration of gravity. The above equation assumes that neither the viscosity nor the density change sensibly over the surface of the small particle. It is in this sense that we

are considering a point-size particle. The instantaneous settling velocity of the particle is then

$$U(z) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{f(z)}{\mu(z)}, \quad (2.6.5)$$

where

$$f(z) = \frac{2a^2 g}{9} [\rho - \rho_f(z)]. \quad (2.6.6)$$

Upon integrating respect to time we obtain

$$t = \int_0^Z \frac{dz'}{U(z')}. \quad (2.6.7)$$

This is the time t needed to travel a distance Z . From this time t , we can define an average settling velocity as the limit

$$\frac{1}{\bar{U}} = \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{1}{Z} \int_0^Z \frac{dz'}{U(z')} \quad (2.6.8)$$

and substitute into the above the expression for the velocity $U(z')$ to obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{U}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m\Delta} \int_0^m \frac{\mu(z)}{f(z)} dz = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m\Delta} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} \frac{\mu(z)}{f(z)} dz = \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_0^1 \frac{1}{f(z)} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(z + i\Delta) \right] dz, \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

since $f(z + i\Delta) = f(z)$.

In order to evaluate the infinite sum we define the set of numbers $\Xi \subseteq [0, L]$
 $\Xi = \{x \in [0, L] \mid x = z + i\Delta - j\Delta; i, j = 0, 1, 2, \dots \text{ such that } x \in [0, L]\}, \quad (2.6.10)$

which is a subset of the interval and represents the points sampled. Because the function is bounded we are assured that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(z + i\Delta) \quad (2.6.11)$$

exists and is bounded by

$$\min \text{ of } \mu(z) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(z + il) \leq \max \text{ of } \mu(z), \quad \forall \text{ integers } m. \quad (2.6.12)$$

Depending on the ratio l/L of the two periods the limit will have a different value. The ratio can be either a rational or irrational number; that is, the periods l and L may either be commensurate or incommensurate. Thus,

i) if $\frac{l}{L}$ is a rational number, Ξ has a finite number of elements

and the set does not uniformly sample the interval;

ii) if $\frac{l}{L}$ is an irrational number, Ξ has an infinite number of elements

and uniformly samples the interval. The limit is then (Bohr, H., 1951)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(z + il) = \frac{1}{L} \int_0^L \mu(z) dz = \bar{\mu}, \quad (2.6.13)$$

which in turn gives the average velocity:

$$\bar{U} = \frac{\bar{J}}{\bar{\mu}} \quad (2.6.14)$$

where $\bar{\mu}$ is defined as

$$\bar{\mu} = \frac{1}{L} \int_0^L \mu(z) dz \quad (2.6.15)$$

and \bar{J} as

$$\frac{1}{\bar{J}} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{J(z)} dz \quad (2.6.16)$$

As an example, consider the following viscosity and density functional dependences:

$$\mu(z) = \mu_0 + A \cos(2\pi z / L) \quad (2.6.17)$$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{9}{2a^2g} \frac{1 + B\cos(2\pi z/l)}{\rho - \rho f_0} \quad (2.6.18)$$

Upon substitution of the above into the average velocity (2.6.9), we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{v}} &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{f(z)} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mu(z + il) \right] dz = \\ &= \frac{9}{2a^2g l} \int_0^l \frac{1 + B\cos(2\pi z/l)}{\rho - \rho f_0} \left[\mu_0 + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} A\cos(2\pi(z + il)/L) \right] dz = \\ &= \frac{9\mu_0}{2a^2g \Delta\rho} + \\ &+ \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1 + B\cos(2\pi z/l)}{\Delta\rho} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} A\cos(2\pi(z + il)/L) \right] dz. \quad (2.6.19) \end{aligned}$$

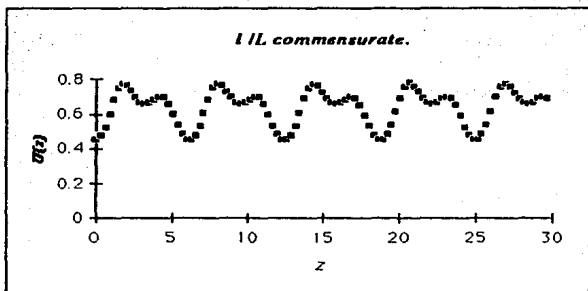


Figure 2.8.1. When l/L is rational, the instantaneous velocity is a periodic function of position.

If l/L is irrational, the second term becomes the integral of the cosine function with a zero average and therefore disappears from the above result. If on the other hand, the ratio l/L is rational, this term can have a non-zero contribution. For

instance, if $l = L$, the second term becomes equal to $AB/2\Delta\rho$ and the average velocity turns out to be:

$$\frac{1}{\bar{U}} = \frac{9\mu_0}{2a^2 g \Delta\rho} + \frac{AB}{2\Delta\rho} \quad (2.6.20)$$

The following two figures (2.8.1) and (2.8.2) illustrate both situations for l/L .

When l/L is rational the particle executes a periodic motion. Nevertheless, the variations in the viscosity and the density interact at the same time, so that the average viscosity and density are interdependent. In other words, the value of the average viscosity depends on the functional dependence of the density and vice-versa. When l/L is irrational, the particle motion is not periodic and the average density and viscosity are independent from one another.

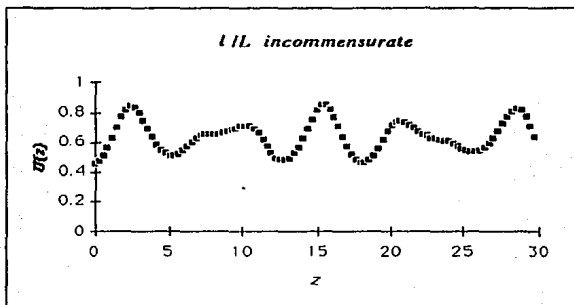


Figure 2.8.2. When l/L is irrational, the instantaneous particle velocity is a non-periodic function of position.

Interactions between two driving forces have been studied in other fields. In particular, resonance phenomena can occur when the oscillation of commensurate frequencies act at the same time. In the situation analyzed here, we observed particular phenomenon associated with the ratio l/L .

2.7 CONCLUSIONS

The analysis of falling-ball rheometry in suspensions gave origin to our study of non-homogeneous fluids. Although interesting by itself, the study of non-homogeneous suspensions is a powerful tool in understanding the dynamics of real suspension flow problems. As already mentioned in the introduction to this chapter, experimental evidence exists that non-homogeneous effects are present in real flow problems. It is reported that cross-streamline migration of particles has been observed in the flow of neutrally buoyant suspensions in a circular pipe. The particles migrate from regions of high shear rate to regions of lower shear rate, i.e., from the vicinity of the wall to the tube axis. This has been observed at small Reynolds number (10^{-4}). This migration produces a very non-uniform concentration, leading to changes in the local viscosity. A final steady-state situation is reached with a non-uniform radial concentration.

Even though our analysis does explicitly not predict any driving force capable of moving particles from one streamline to another (and consequently no migration is predicted), it illustrates one way in which such problems can be approached. It is important to mention that our analysis was not meant to solve such migration problems, but rather those related to the falling-ball rheometry, which will be the next future step.

In this chapter we presented steady-state solutions of several different classical hydrodynamic problems for which the viscosity was considered to be an arbitrary function of position. It is this arbitrariness which gives rise to a wider applicability and a deeper understanding of phenomena associated with non-uniformity of the particle concentration in suspensions. Given any concentration, one can determine what is the effective viscosity when compared to the homogeneous situation. It is in this context that the strength of this variable viscosity approach lies.

For each example presented in this chapter an exact analytical solution was obtained for the velocity and pressure fields. Using this exact solution the corresponding torque or force acting on the particle or solid walls was calculated. These forces and

torques, as well as the velocity and pressure fields, were compared with the corresponding homogeneous viscosity results. During the course of this comparison, we defined the effective viscosity associated with the non-homogeneous fluid. This effective viscosity was expressed in terms of the still arbitrary local viscosity, and served to demonstrate how the effective viscosity was modified by the particular geometry of the problem. It is here that the main strength of our analysis lies. It allows use of an arbitrary local viscosity, and shows how this choice affects the experimentally measurable variables (forces and torques).

APPENDIX

NEWTONIAN RESULTS

THE GOVERNING EQUATIONS

I.1 Continuum hypothesis

The governing equations for the dynamics of fluids has its foundation in the basic conservation principles of mass, momentum, and energy. In deriving the corresponding equations one has to make an important assumption, namely the continuum hypothesis (G. K. Batchelor, 1967), which allows the use of continuum differential equations to describe the dynamics of the fluid. We will discuss the ideas behind this assumption since this will prove to be helpful in deriving the constitutive equations used throughout this work.

All materials are composed of atoms and molecules ranging in size from a few angstroms (hydrogen atom) to hundreds of angstroms (organic molecules, polymers, etc.). This is an atomistic description. Plant viruses are even larger, while tobacco smoke is a few tenths of a micron long (see figure 1.1 for details). Sand sizes range from about 0.01 to 0.1 cm. A sand particle will "see" water as being continuous. This will be considered here as a being microscopic description (or sometimes, depending on the sizes, as a mesoscopic description). Atoms, molecules, plant viruses, small particles of dust and many other entities constitute are the fundamental units underlying fluid systems such as suspensions, liquid crystals, etc. The continuum assumption requires the flow apparatus dimensions to be much larger than those of its constituents. This assures that the fluid can be described as a continuum regardless of its discrete composition. This is the main step connecting the microscopic description (considering small particles or main constituents) with the continuous macroscopic description.

This hypothesis does not establish how this connection should be made, nor does it explain what effects the geometric structure of the microscopic particles may have on the macroscopic rheological description of the phenomenon. This is modeled by a constitutive equation, which must explicitly or implicitly contain the microscopic information (particle size and shape, its interaction with the surrounding fluid, interparticle hydrodynamic interactions, etc.), usually in terms of macroscopic parameters, such as the suspension

viscosity. In effect, the macroscopic description should depend functionally on the relevant microscopic description. In Appendix I.3 we will discuss this connection in detail.

I.2 Conservation principles

The basic conservation principles that can be applied to derive the equations of motion are the laws of mass, momentum, and energy conservation (Happel and Brenner, 1965; G. K Batchelor, 1967; Landau and Lifshitz, 1987). We will consider here only isothermal flows, for which the energy equation is uncoupled from the momentum and continuity equations. Therefore, we will consider as macroscopic variables the vector velocity and pressure fields (4 scalar variables) satisfying the vector linear momentum and continuity equations (4 scalar equations). The density will be considered as a constant. A complete derivation, including the energy equation, can be found in any of the previously mentioned books. We will take as a starting point the momentum and mass conservation equations (Happel and Brenner, 1965), which can be written as:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.2.1)$$

and

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}} + \rho \mathbf{F}, \quad (1.2.2)$$

where \mathbf{u} is the velocity field, ρ is the density, \mathbf{F} is the external force per unit mass, and $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ is the stress tensor, given by

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = -\underline{\underline{\mathbf{I}}}\rho + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}, \quad (1.2.3)$$

with ρ the pressure and $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$ the viscous part of the stress tensor. The latter must be given by a constitutive equation.

For a constant density fluid, the above reduces to

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.2.4)$$

The linear momentum equation may be written as

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}} + \rho \mathbf{F}. \quad (1.2.5)$$

1.3 THE NEWTONIAN CONSTITUTIVE EQUATION

The Newtonian constitutive equation is the simplest equation that accounts for viscous effects. This equation is given by a linear relationship between the stress and shear-rate tensors. The most general linear relationship between two second-rank tensors requires 81 scalar coefficients. Newtonian fluids are assumed to be homogeneous and isotropic. The isotropy condition reduces the number of independent coefficients from 81 to only 2 in cases where the stress tensor is symmetric. These two scalar coefficients represent the dynamic and bulk viscosities. The assumed homogeneity hypothesis implies that these two coefficients do not depend on the spatial coordinates, i. e., they do not vary throughout the fluid. With this hypothesis, these coefficients can only depend upon the invariants of the shear-rate tensor and on thermodynamic variables, such as the pressure and temperature. We will not consider temperature or pressure effects, the latter being a consequence of the incompressibility and the former a consequence of the assumed isothermal flow hypothesis. The incompressibility condition decreases the number of independent coefficients in the equations of motion. Terms involving the bulk viscosity disappear due to incompressibility, even if the bulk viscosity is different from zero. Consequently, an incompressible Newtonian fluid is characterized by a single scalar constant viscosity parameter. In particular, the incompressible Newtonian constitutive equation is given by

$$\underline{\underline{\mathbf{p}}} = -\underline{\underline{\mathbf{I}}}p + \mu_0 \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\dagger} \right] \quad (1.3.1)$$

where μ_0 is the viscosity, taken to be constant throughout the fluid.

The corresponding steady or quasi-steady-state, zero Reynolds number, Navier-Stokes equations for an incompressible homogeneous fluid are :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.3.2)$$

$$\nabla p = \mu_0 \nabla^2 \mathbf{u} . \quad (1.3.3)$$

which must be solved subject to pertinent boundary conditions. In the next section we will present the solution of several classical hydrodynamic problems, which will ultimately be compared with the non-homogeneous and anisotropic fluid results derived in this thesis.

I.4 HOMOGENEOUS NEWTONIAN RESULTS

In this section we review the solutions of several classical hydrodynamic problems, which will subsequently be used as comparisons with the corresponding anisotropic and non-homogeneous problems analyzed in chapters 1 and 2. These elementary solutions can be found in many fluid-dynamics books (Landau & Lifshitz, 1989; Batchelor, 1987).

We will outline the following solutions: (i) flow between parallel plates, where the driving forces are a constant pressure gradient (two-dimensional Poiseuille flow) and/or a relative motion of the two plates (simple shear flow); (ii) Poiseuille flow in a circular tube induced by a constant pressure gradient; (iii) source and sink problems in unbounded fluids; (iv) the symmetric rotation of an infinitely long circular cylinder; and (v) the rotation of a sphere in an unbounded fluid.

I.4.1 Laminar Flow between Parallel Plates.

As on Fig I.1, an incompressible newtonian fluid is located in the space between two parallel plates separated by a distance h . The upper plate is moving in the $+x$ direction with constant velocity U with respect to the bottom plate. Additionally, a constant applied pressure gradient $\Delta p/L$ contributes to the motion of the fluid.

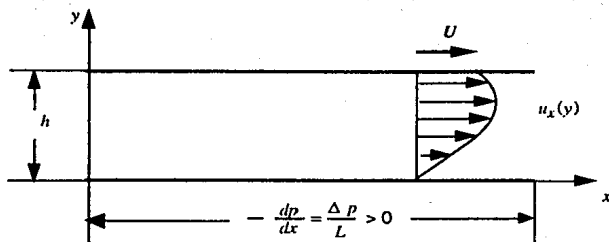


Figure I.1. Flow between parallel plates separated a distance h . The upper plate moves with constant velocity U relative to the lower one. A homogeneous pressure gradient acts along the x axis.

Due to the symmetry of the problem the flow is unidirectional, with only an x -component of the velocity field different from zero :

$$u_x = u_x(y) , \quad (\text{I.4.1})$$

$$u_y = 0 , \quad (\text{I.4.2})$$

$$u_z = 0 . \quad (\text{I.4.3})$$

The continuity equation is identically satisfied. The y and z components of the equations of motion are trivial and the x component becomes :

$$\frac{dp}{dx} = \mu_0 \frac{d^2 u_x}{dy^2} , \quad (\text{I.4.4})$$

where the viscosity μ is taken to be a constant throughout the fluid. This equation is to be solved with the following boundary conditions :

$$u_x = U , \quad \text{at } y = h , \quad (\text{I.4.5})$$

$$u_x = 0 , \quad \text{at } y = 0 , \quad (\text{I.4.6})$$

leading to the following solution for the velocity field :

$$u_x = U \left(\frac{y}{h} \right) + \frac{h^2}{2\mu_0} \frac{\Delta p}{L} \left[\left(\frac{y}{h} \right) - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right], \quad (1.4.7)$$

where the two contributions of the different driving forces, U and $\Delta p/L$, are clearly separated due to the linearity of the problem. The volume flow rate Q for plates of width W is

$$Q = \frac{1}{2} WhU + \frac{Wh^3}{12\mu_0} \frac{\Delta p}{L}. \quad (1.4.8)$$

1.4.2 Laminar Flow in a Circular Tube

As in Fig. 1.2, a newtonian fluid flows through an infinite circular tube of radius R due to an external constant pressure gradient $-dp/dz = \Delta p/L$ acting along the tube axis z .

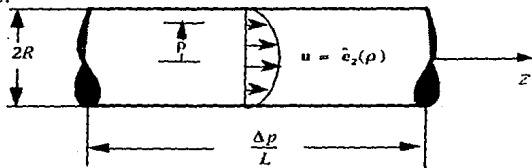


Figure 1.2. Pressure-driven Poiseuille flow in a circular cylinder of radius R . The driving force is a homogeneous pressure gradient $-dp/dz = \Delta p/L$ acting along the z axis.

Due to the symmetry of the problem we postulate the following solution in cylindrical coordinates:

$$u_z = u_z(\rho), \quad (1.4.9)$$

$$u_r = 0, \quad (1.4.10)$$

$$u_\theta = 0. \quad (1.4.11)$$

The continuity equation is identically satisfied, whereas the z component of the equation of motion adopts the form

$$\frac{dp}{dz} = \mu_0 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du_z}{d\rho} \right) \quad (\text{I.4.12})$$

which must be solved subject to the following boundary conditions :

$$u_z = 0 \quad \text{at } \rho = R, \quad (\text{I.4.13})$$

$$u_z = \text{finite at } \rho = 0. \quad (\text{I.4.14})$$

The solution is given by the following velocity and pressure fields :

$$u_z = \frac{\Delta p}{L} \frac{R^2}{4\mu_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right], \quad (\text{I.4.15a})$$

$$p = -x \frac{\Delta p}{L} + \text{const}, \quad (\text{I.4.15b})$$

from which the volume flow rate is found to be

$$Q = \frac{\Delta p}{L} \frac{\pi R^4}{8\mu_0}. \quad (\text{I.4.16})$$

This is the famous Hagen-Poiseuille result (G. Hagen 1839; J. L. Poiseuille 1840, 1841).

I.4.3 Source and Sink Problems.

A simple source represents a point from which fluid flows out uniformly in all directions (see figure I.3). The total volumetric flux at any closed surface enclosing the source is called the strength Q of the source. Sources of negative strength ($Q < 0$) are called sinks. The velocity field is determined by the kinematical condition of incompressibility and radial symmetry.

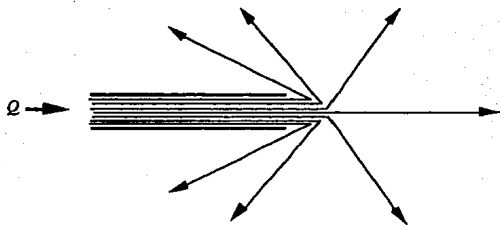


Figure 1.3 A source is a point from which fluid flows out uniformly in all directions. The total flux across any closed surface enclosing the source is called the strength Q . Sources of negative strength are called sinks.

Placing the origin of a spherical coordinate system at the location of the source, the velocity field has only a radial component and is isotropic :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = e_r u_r(r) \quad (1.4.17)$$

where r is the distance from the source and e_r is a unit vector in the radial direction.

Since the fluid is incompressible, the total volumetric flow rate Q across any closed surface is the same. This condition is enough to determine the functional dependence of the velocity. Taking concentric spheres centered at the location of the source, the condition of total flux constant translates into the condition that the velocity should decrease in the same amount that the surface area of the sphere increases. The total flux at any sphere is proportional to the surface area of the sphere and the velocity of the fluid evaluated at the surface (which is constant over the surface due to the radial symmetry). The surface area of the spheres increases like r^2 and therefore the velocity field must decrease like $1/r^2$ in order to maintain the flux constant. This functional dependence can also be easily obtained by solving the continuity equation,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = Q\delta(\mathbf{r}) \quad (1.4.18)$$

which becomes, in spherical coordinates,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) = \frac{Q}{4\pi} \frac{\delta(r)}{r^2} \quad (1.4.19)$$

Direct integration gives the velocity field,

$$u_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad (1.4.20)$$

which is independent of the viscosity. The pressure is determined by the momentum equation.

Due to the simplicity of the problem it is possible to consider the full steady-state Navier-Stokes equation :

$$\rho_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mu_0 \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.4.21)$$

Substitution of the radial velocity assumption leads to the equation

$$\rho_f u_r \frac{du_r}{dr} = \frac{dp}{dr} \quad (1.4.22)$$

Thus, using the velocity field (1.4.20), which holds irrespective of the Reynolds number, the above becomes

$$\frac{dp}{dr} = \rho_f \frac{Q^2}{8\pi r^5} \quad (1.4.23)$$

which can be directly integrated to give the pressure field

$$p(r) = p_\infty + \rho_f \int_r^\infty \frac{Q^2}{8\pi r^5} dr \quad (1.4.24)$$

$$= p_\infty - \frac{\rho_f Q^2}{32\pi r^4} \quad (1.4.25)$$

where p_∞ is the constant pressure field at infinity.

1.4.4 Infinite circular cylinder rotating with constant angular velocity about its symmetry axis.

An infinitely long circular cylinder of radius R , immersed in a laterally unbounded Newtonian fluid rotates with constant angular velocity Ω about its symmetry axis. The z

axis of a cylindrical coordinate system is taken to coincide with the cylinder symmetry axis, as shown in figure I.4.

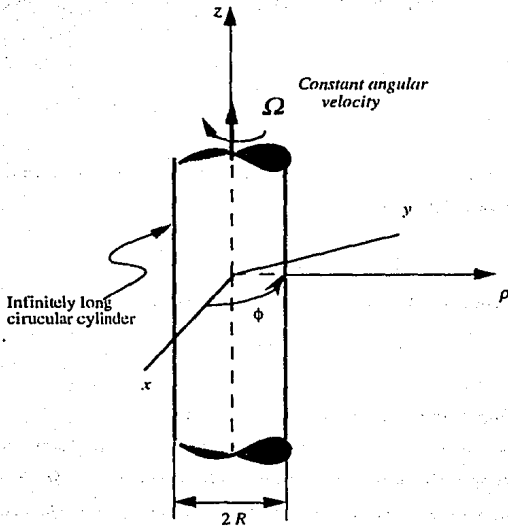


Figure I.4. Infinite cylinder of radius R rotating with constant angular velocity Ω in an unbounded Newtonian fluid. Due to the symmetry of the boundary conditions there is only one component of the velocity field, namely u_ϕ .

Since the circular cylinder is infinitely long, only one non-vanishing component of the velocity field exists, namely :

$$\mathbf{u} = e_\phi u_\phi(\rho), \quad (\text{I.4.26})$$

which satisfies the momentum equation

$$\mu_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho u_\phi) - \frac{u_\phi}{\rho^2} \right] = 0 \quad (I.4.27)$$

and the boundary conditions

$$\begin{aligned} u_\phi &= \Omega R & \text{at } \rho = R, \forall z, \\ u_\phi &\rightarrow 0 & \text{as } \rho \rightarrow \infty, \forall z. \end{aligned} \quad (I.4.28)$$

The pressure is a constant throughout the fluid as required by the equations of motion. The velocity field is found to be

$$u_\phi(\rho) = \frac{\Omega R^2}{\rho} \quad (I.4.29)$$

and the torque per unit length required to maintain the motion is

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_z 4\pi \mu_0 R^2 \Omega. \quad (I.4.30)$$

I.4.5 Rotating Sphere in a Viscous Liquid.

A sphere of radius R immersed in an unbounded newtonian fluid at rest at infinity is rotating about an axis through its center with constant angular velocity Ω . A spherical coordinate system is placed with its origin coinciding with the sphere's center and the z -axis is chosen to lie along the axis of rotation. The geometry is shown in figure I.5.

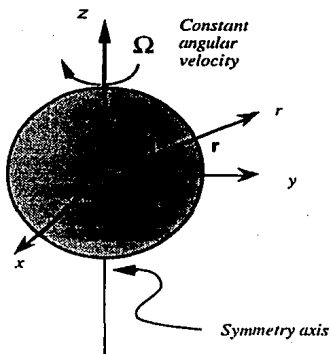


Figure I.5. A sphere of radius R is rotating with constant angular velocity Ω . The z axis of a cylindrical coordinate system coincides with the axis of rotation.

Due to the symmetry of the problem only the ϕ component of the velocity field is different from zero :

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\phi u_\phi(r, \theta). \quad (\text{I.4.31})$$

The equation of motion is to be solved subject to the following boundary conditions :

$$\mathbf{u} = \bar{\Omega} \times \mathbf{r} = \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_\phi \Omega r \sin \theta \quad \text{at } r = R, \quad (\text{I.4.32})$$

$$[\mathbf{u}] \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty, \quad (\text{I.4.33})$$

$$p \rightarrow p_\infty = \text{const as } r \rightarrow \infty. \quad (\text{I.4.34})$$

The continuity equation is identically satisfied, while the momentum equation adopts the form

$$\nabla p = \mathbf{e}_\phi \mu_0 \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right]. \quad (\text{I.4.35})$$

This leads to the conclusion that the pressure is a constant throughout the fluid, so that the ϕ velocity component satisfies the equation

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (I.4.36)$$

The solution of this equation satisfying the boundary conditions is

$$u_\phi = \Omega \left(\frac{r}{R} \right)^3 \sin \theta. \quad (I.4.37)$$

The torque required to maintain the motion is found to be

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_z \ 8\pi \mu_0 R^3 \Omega. \quad (I.4.38)$$

I.4.6 Flow around a Translating Sphere.

Flow around a translating sphere is an important problem in classical fluid dynamics. There is no exact closed analytical solution of the full Navier-Stokes equation for this problem. In what follows, we present the solution for zero Reynolds number or "creeping flow", in which the inertial terms are neglected.

Consider a stationary sphere of radius R with its center at the origin of a spherical coordinate system, (r, θ, ϕ) . Fluid streams past the sphere with velocity U in the z direction. The resulting flow is axisymmetric, consequently, the ϕ component of the velocity vanishes.

The r and θ components of the creeping equations of motion are

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu_0 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 u_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right], \quad (I.4.39)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu_0 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], \quad (I.4.40)$$

subject to the boundary conditions

$$u_r \rightarrow -U \cos \theta, \quad \text{as } r \rightarrow \infty,$$

$$u_{\theta} \rightarrow U \sin \theta, \quad \text{as } r \rightarrow \infty,$$

$$u_r = 0, \quad \text{at } r = R,$$

$$u_{\theta} = 0, \quad \text{at } r = R,$$

$$p \rightarrow p_{\infty} = \text{const}, \quad \text{as } r \rightarrow \infty. \quad (1.4.41)$$

The stream function method is a powerful technique for axisymmetrical problems. In terms of the stream function ψ , the two non-vanishing components of the velocity field can be expressed as

$$u_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (1.4.42)$$

$$u_{\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.4.43)$$

The continuity equation is identically satisfied by using the stream function, whereupon the equation of motion turns out to be

$$E^4 \psi = 0. \quad (1.4.44)$$

where $E^4 = E^2 E^2$, in which E^2 is the operator given by the expression

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (1.4.46)$$

The boundary conditions are expressed in terms of the stream function become

$$\psi \rightarrow \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \quad \text{as } r \rightarrow \infty, \quad (1.4.47)$$

$$\psi = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r = R. \quad (1.4.48)$$

A trial solution of the form

$$\psi(r) = \sin^2 \theta F(r), \quad (1.4.49)$$

is suggested by the boundary conditions. Applying the operator E^2 we obtain,

$$E^2 \psi = \sin^2 \theta \left(F'' - \frac{1}{r^2} F \right) = \sin^2 \theta f(r) \quad (1.4.50)$$

$$E^4 \psi = \sin^2 \theta \left(f'' - \frac{1}{r^2} f \right) = 0. \quad (1.4.51)$$

In order to satisfy this equation it is required that

$$f'' - \frac{1}{r^2} f = 0, \quad (1.4.52)$$

which is satisfied by

$$f(r) = Ar^2 + \frac{B}{r}. \quad (1.4.53)$$

Substitution into (1.4.50) leads to the equation

$$F'' - \frac{1}{r^2} F = Ar^2 + \frac{B}{r}, \quad (1.4.54)$$

whose solution is

$$F(r) = \frac{A}{10} r^4 - \frac{1}{2} Br + Cr^2 + \frac{D}{r}. \quad (1.4.55)$$

Applying the boundary conditions, we obtain the stream function

$$\psi(r) = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 - \frac{3R}{2r} + 1 \right]. \quad (1.4.56)$$

APPENDIX II. TRANSVERSELY-ISOTROPIC FLUIDS

Transversely isotropic materials are characterized by having one symmetry axis (S. G. Lekhnitskii, 1981). A periodically layered material is an example of a transversely isotropic material, with the symmetry axis normal to the layers. This represents a special direction in space which is different from the other two independent directions.

The constitutive equation for a transversely isotropic Newtonian fluid can be obtained as follows. A transversely isotropic fourth-rank tensor can be constructed (Synge & Schild, 1949) by using combinations of Kronecker deltas and products of the special direction unit vector $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_3$. For a fourth-rank tensor satisfying the symmetries set forth in chapter 1, there exist but five such possible combinations which are also transversely isotropic, namely

$$\begin{aligned} \mu_{ijkl}^1 &\equiv \delta_{ij} \delta_{kl} , \\ \mu_{ijkl}^2 &\equiv \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} , \\ \mu_{ijkl}^3 &\equiv \delta_{ij} \delta_{k3} \delta_{l3} + \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{kl} , \\ \mu_{ijkl}^4 &\equiv \delta_{i3} \delta_{l3} \delta_{jk} + \delta_{i3} \delta_{k3} \delta_{jl} + \delta_{j3} \delta_{l3} \delta_{ik} + \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{il} , \\ \mu_{ijkl}^5 &\equiv \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{k3} \delta_{l3} , \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

and scalar multiples thereof.

The most general transversely-isotropic fourth rank tensor satisfying the symmetries specified in chapter 1 is

$$\underline{\underline{\mu}} = \sum_{\alpha=1}^5 c_{\alpha} \underline{\underline{\mu}}^{\alpha} \quad (\text{II.2})$$

where the c_{α} are arbitrary scalar coefficients. The viscous stress tensor associated with this transversely isotropic material is

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} &= \underline{\underline{\mu}} : [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] = \sum_{\alpha=1}^5 c_{\alpha} \underline{\underline{\mu}}^{\alpha} : [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] = \\ &= 2 c_1 \underline{\underline{u}} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2 c_2 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] + 2 c_3 [\underline{\underline{u}} \partial_3 u_3 + \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} (\nabla \cdot \mathbf{u})] + \end{aligned}$$

$$+ 2c_4 [\hat{n} \partial_3 \mathbf{u} + \hat{n} \nabla u_3 + \partial_3 \mathbf{u} \hat{n} + \nabla u_3 \hat{n}] + 2c_5 \hat{n} \hat{n} \partial_3 u_3. \quad (\text{II.3})$$

The stress tensor is traceless for both shear and shear-free flows (Bird, Armstrong and Hassager, 1987). This condition requires that

$$\text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) = \underline{\underline{\mathbf{U}}} : \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}} : \left\{ \underline{\underline{\mu}} : [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^+] \right\} = 0. \quad (\text{II.4})$$

In terms of the material phenomenological constants this is equivalent to

$$\begin{aligned} \text{tr} \underline{\underline{\tau}} &= 6c_1 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 4c_2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2c_3 \left[3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + 8c_4 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + 2c_5 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \\ &= [6c_1 + 4c_2 + 2c_3] (\nabla \cdot \mathbf{u}) + [6c_3 + 8c_4 + 2c_5] \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

As this condition must be satisfied in all circumstances the following two relations must hold:

$$\begin{aligned} 6c_1 + 4c_2 + 2c_3 &= 0, \\ 6c_3 + 8c_4 + 2c_5 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Forming the divergence of the stress tensor leads to

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} &= 2c_2 \nabla^2 \mathbf{u} + 2c_3 \nabla \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \\ &+ 2c_4 \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_3^2} \right) + \nabla \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \hat{e}_3 \nabla^2 u_3 \right] + 2c_5 \hat{e}_3 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

BIBLIOGRAPHY.

- ABNIK, N. C. 1987; An effective anisotropy parameter in transversely isotropic media. *Geophysics*, **52**, No. 12, 1654-1664.
- ACKERSON, B. J. 1990; Shear induced order and shear processing of model hard sphere suspensions. *J. Rheology*, **34**(4), pp. 553.
- ACRIVOS, A. & SHAQFEH, E. S. G. 1988; The effective thermal conductivity and elongational viscosity of a nondilute suspension of aligned slender rods. *Phys. Fluids*, **31**, (7), pp. 1841.
- ADLER, P. M. & BRENNER, H. 1985; Spatially periodic suspensions of convex particles in linear shear flows. I. Description and kinematics. *Int. J. Multiphase Flow*, **11**, No.3, 361-385.
- ADLER, P. M., ZUZOVSKY, M. & BRENNER, H. 1985; Spatially periodic suspensions of convex particles in linear shear flows. II. Rheology. *Int. J. Multiphase Flow*, **11**, No.3, 387-417.
- BATCHELOR, G. K. 1988; *Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.
- BILLMEYER, F. W. 1984; *Textbook of Polymer Science*, Wiley.
- BIRD, R. B., ARMSTRONG, R. C. & HASSAGER, O. 1987; *Dynamics of Polymeric Liquids*, Wiley.

- BIRD, R. B., STEWART, W. E. & LIGHTFOOT, E. N. 1993, Fenómenos de Transporte, Ed. Reverté.
- BRENNER, H. 1980; A General theory of Taylor dispersion phenomena. *Physicochemical Hydrodynamics*, **1**, 91-123.
- BRENNER, H. 1982; A General theory of Taylor dispersion phenomena. II An extension. *Physicochemical Hydrodynamics*, **3**, No.2, 139-157.
- BRENNER, H. 1964; Effect of finite boundaries on the Stokes resistance of an arbitrary particle. Part II. Asymmetrical orientation. *J. Fluid Mech.*, **18**, 144-158.
- BRENNER, H. 1964; The Stokes resistance of a slightly deformed sphere. *Chem Engng. Sci.*, **19**, 519-539.
- BRENNER, H. 1964; The Stokes resistance of an arbitrary particle. Part II. An extension. *Chem Engng. Sci.*, **19**, 599-629.
- BRENNER, H. 1964; The Stokes resistance of an arbitrary particle. Part III. Shear fields. *Chem Engng. Sci.*, **19**, 631-651.
- BRENNER, H. 1964; The Stokes resistance of an arbitrary particle. Part IV. Arbitrary fields of flow. *Chem Engng. Sci.*, **19**, 703-727.
- BRENNER, H. & O'NEILL, M. E. 1972; ON THE Stokes resistance of multiparticle systems in a linear shear field. *Chem. Engng. Sci.*, **27**, 1421-1439.
- BOHR, H. 1951; Almost periodic functions, Chelsea Publishing Co.
- BYUN, B. K. & CHENG, S. W. 1986; APPARent axial properties of transversely isotropic media. *Geophysics*, **51**, No.4, 1012-1013.
- CLAEYS, I. L. & BRADY, J. F. 1993; SUSPENSions of prolate spheroids in Stokes flow. Part I. Dynamics of finite number of particles in an unbounded fluid. *J. of Fluid Mech.*, vol. **251**, pp. 411-442.
- DE GENNES, P. G. 1974; The physics of liquid crystals, Clarendon Press.
- ERICKSEN, J. L. & KINDERLEHRER, D. 1987; Theory and Applications of Liquid Crystals, Springer Verlag.

- DE GROOT, S. R. & MAZUR, P. 1984; *NON-EQUILIBRIUM Thermodynamics*, Dover.
- DINH, S. M. & ARMSTRONG, R. C. 1984; A Rheological equation for semiconcentrated fiber suspensions. *Journal of Rheology*, **28**(3), 207-227, 1984.
- EINSTEIN, A. 1956; *Ann. Physik* 19, (1906), 289, with correction 34 (1911) 591. The theory of brownian movement, Dover.
- FRISCH, H. L. & SIMHA, R.; In *Rheology - Theory and Applications*, vol I.
- EIRICH, F. R. 1956; Academic Press, Capítulo 14.
- GRADSHTEYN, I. S. & RYZHIK, I. M. 1980; *Tables of Integrals, series and products*, Academic Press.
- HAPPEL, J. & BRENNER, H. 1965; *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice Hall.
- HAPPEL, J. 1957; *J. Appl. Phys.* **28**, pp. 1288.
- HARDY, G. H. & WRIGHT, E. M. 1979; *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, Oxford.
- HEARMON, R. F. S. 1961; *An introduction to applied anisotropic elasticity*, Oxford University Press.
- IOSOLEVSKII, G., MENDOZA-BLANCO, A. & BRENNER, H. 1993; The slow axisymmetric rotation of a sphere in a transversely isotropic fluid, *Jl. Mech. Appl. Math.*, vol **46**, 153.
- JEFFERY, G. B. 1915; On the slowly rotation of a solid of revolution in a viscous fluid, *Phil. Mag.*, 1915, pp. 327.
- KEVORKIAN, J. & COLE, J. D. 1981; *Perturbation methods in applied mathematics*, Springer Verlag.
- KOCH, D. L. & BRADY, J. F. 1987; The symmetry properties of the effective diffusivity tensor in anisotropic media. *Phys. Fluids*, **30**(3), pp. 642.
- LAMB, H. 1945; *Hydrodynamics*, Dover, 6th edition.

140 *Bibliografia*

- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. 1989; *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon Press.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. 1986; *Theory of Elasticity*, 3rd edition, Pergamon Press.
- LEIGHTON, D. & ACRIVOS, A. 1987; The shear induced migration of particles in concentrated suspensions. *J. Fluid Mech.*, **181**, 415-439.
- LEKHNITSKII, S. G. 1981; *Theory of elasticity of an anisotropic body*, MIR.
- MACMILLAN, E. H. 1989; Slow flows of anisotropic fluids, *Journal of Rheology*, **33** (7), pp. 1071.
- MEYER, R. B., LONBERG, F., TARATUTA, V., FRADEN, S., LEE, S., & HURD, A. 1985; Measurements of anisotropic viscous and elastic properties of lyotropic polymer nematics. *Faraday, Discuss. Chem. Soc.*, **79**, 125-132.
- MOCHIZUKI, E. 1987; The stress-strain relation for transversely isotropic, incompressible fluid. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **45**, 240-241.
- NOTT, P. R. & BRADY, J. F. 1994; Pressure-driven flow of suspensions: simulation and theory. *J. of Fluid Mech.*, vol. **275**, pp. 157-199.
- PASTOR, J., TURGEMAN, S. & BOEHLER, P. 1990; Solution of anisotropic plasticity problems by using associated isotropic problems. *Int. Journal of Plasticity*, vol **6**, pp. 143-168.
- PERRINS, W. T., MCKENZIE, D. R. & MCPHEDRAN, R. C. 1979; Transport properties of regular arrays of cylinders. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **369**, 207-225.
- PHAN-TIEN, H. & GRAHAM, A. L., A new constitutive model for fibre suspensions: flow past a sphere, to be published.
- PHILLIPS, R. J., ARMSTRONG, R. C., BROWN, R., GRAHAM, A. L. & ABBOT, J. R. ; A constitutive equation of concentrated suspensions that accounts for shear induced particle migration, to be published.

- PODIO-GUIDUGLI, P. Y VIRGA, E. G. 1987; Transversely isotropic elasticity tensors. *Proc. R. Soc. Lond. A* **411**, 85-93.
- PROBSTEIN, R. 1989; *Physicochemical Hydrodynamics*, Butterworths.
- RODRÍGUEZ, F. 1984; *Principios de sistemas poliméricos*, Manual Moderno.
- SANGANI, A. S. & ACRIVOS, A. 1983; The effective conductivity of a periodic array of spheres. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **386**, 263-275.
- PERRINS, W. T., MCKENZIE, D. R. & MCPHEDRAN, R. C. 1979; Transport properties of regular arrays of cylinders. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **369**, 207-225.
- SHAQFEH, E. S. G. 1988; The effect of hydrodynamic interactions on the orientation of axisymmetric particles flowing through a fixed bed of spheres or fibers. *Phys. Fluids* **31** (4), pp. 728.
- SIMHA, R. 1952; *J. Appl. Phys.* **23**, pp. 1020.
- STANDARD MATHEMATICAL TABLES, 1973, CRC Press, 28th Edition.
- STOKES, V. K. 1984; *Theory of fluids with microstructure*, Springer Verlag.
- SWEENEY, K.H. & GECKLER, R.D. 1954; *J. Appl. Phys.* **25**, 1135.
- SYNGE, J. L. & SCHILD, A. 1949; *Tensor Calculus*, Dover.
- SZERI, A. J. Y LEAL, L. G. 1994; A new computational method for the solution of flow problems of microstructured fluids. Part 2. Inhomogeneous shear flow of a suspension. *J. of Fluid Mech.*, vol **262**, pp. 171-204.
- WARD, S.G. & WITHMORE, R.L. 1950; *Brit. J. Appl. Phys.*, **1**, 286.
- WILLIAMS, P.S., 1953; *J. Appl. Chem.* **3**, 120.
- YOURGRAU, W., VAN DER MERWE, A. & RAW, G. 1982; *Treatise on irreversible und statistical thermophysics*, Dover.
- ZUZOVSKY, M., ADLER, P. M. & BRENNER, H. 1983; Spatially periodic suspensions of convex particles in linear shear flows. III. Dilute arrays of spheres suspended in Newtonian fluids. *Phys. Fluids.*, **26**(7), pp. 1714.