

2  
20



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE QUIMICA**

**OBTENCION DE MODULOS DE YOUNG Y  
COEFICIENTES DE POISSON A PARTIR DE UN  
MODELO DE ELASTICIDAD A NIVEL  
MACROSCOPICO POR ENSAYO DE COMPRESION**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:**

**INGENIERO QUIMICO METALURGICO**

**P R E S E N T A :**

**HECTOR BADILLO ALVA**



**MEXICO, D. F.**

**1996**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Química

**OBTENCION DE MODULOS DE YOUNG Y  
COEFICIENTES DE POISSON A PARTIR DE UN  
MODELO DE ELASTICIDAD A NIVEL  
MACROSCOPICO POR ENSAYO DE COMPRESION**

*Héctor Badillo Alba*

Ingeniero Químico Metalúrgico

Jurado asignado:

Presidente Prof. NOGUEZ AMAYA MA. EUGENIA

Vocal Prof. ATLATENCO TLAPANCO EUSEBIO CANDIDO

Secretario Prof. ROBERT NUÑEZ TERESITA

1er. Suplente Prof. GARCIA HINOJOSA JOSE ALEJANDRO

2do. Suplente Prof. ARAMBURO PEREZ GERARDO

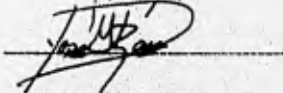
Edificio D de la Facultad de Química, UNAM.

Tersita del n. Jesús Robert Nuñez




(Asesor)

José G. Ramírez Vieyra



(Supervisor técnico)

Héctor Badillo Alva



(Sustentante)

A mis padres (Héctor y Ma. del Carmen), hermanos (Néstor Alberto y Raúl), a Rene, a mi familia, amigos en general y a todos aquellos que de alguna forma tomaron parte en la culminación de esta meta.

Un agradecimiento especial a mi asesora (Teresita Robert N.) y aquella persona que contesto a todas mis preguntas mas tontas (Ing. Oscar Rendón).

A mis dos grandes amigos Sergio Cabadas y José Agueda.

**PRÓLOGO.** El estudio de la cinemática de la deformación, la descripción del estado de esfuerzos y los tres principios básicos de la física del medio continuo, (el principio de conservación de masa, el principio de momento lineal y el principio de momento de momentum) son relaciones válidas para todo estado continuo.

Estas ecuaciones, sin embargo, no son suficientes para describir la respuesta de un material específico a una carga dada. Sabemos, por experiencia, que bajo las mismas condiciones de carga la respuesta de, por ejemplo, el acero es diferente a la de otro material.

En este trabajo se estudiará el acero inoxidable AISI 316 con variación de geometría, su deformación por la aplicación de cargas y la remoción de las mismas para posteriormente encontrar algunas de las constantes específicas de este material.

El comportamiento del material con cargas moderadas se llama elástico. Si la carga permanece deformando, el comportamiento del material será diferente y saldrá de la zona elástica entrando en la zona plástica.

## Contenido

<b>Capítulo I. Generalidades</b>	<b>7</b>
1. Introducción	7
2. Esfuerzo	8
3. Deformación	8
4. Elasticidad	9
5. Relación esfuerzo-deformación	9
6. Diagrama esfuerzo-deformación unitaria	10
7. En Mecánica del Medio Continuo	14
<b>Capítulo II. Cinemática de la Deformación</b>	<b>19</b>
1. Deformaciones Cortas	29
<b>Capítulo III. El Tensor de Esfuerzos y Balance de Momentos</b>	<b>33</b>
1. Leyes de Balance de Momentum	36
<b>Capítulo IV. Isotropía</b>	<b>39</b>

<b>Capítulo V. Teoría de Elasticidad Lineal</b>	<b>43</b>
1. Derivación de la Teoría Lineal	43
<b>Capítulo VI. Modelo Propuesto para el Campo de Desplazamientos</b>	<b>47</b>
<b>Capítulo VII. Experimentación</b>	<b>57</b>
<b>Capítulo VIII. Resultados y Análisis</b>	<b>61</b>
<b>Capítulo IX. Conclusiones</b>	<b>73</b>
1. Apéndice	74
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>



## CAPÍTULO I

### Generalidades

#### 1. Introducción

Una fuerza externa aplicada a un cuerpo hace que éste se deforme o cambie ligeramente de forma, también producen esfuerzos que actúan dentro del cuerpo. La mecánica de materiales es la ciencia que analiza los esfuerzos y las deformaciones producidas por la aplicación de fuerzas externas.

La carga axial se encuentra en una amplia variedad de aplicaciones prácticas en todas las disciplinas de ingeniería. Aunque las aplicaciones son muy interesantes, los conceptos, definiciones y procedimientos son de particular significado ya que forman la base del trabajo futuro, y se aplican y extienden para desarrollar la teoría y práctica para otros tipos de colocación de carga.

En la solución de todos los problemas de mecánica de materiales, es deseable tener un conocimiento de las acciones físicas que tienen lugar dentro del espécimen. Por consiguiente, es importante ser capaz de visualizar el esfuerzo y la deformación que ocurren en un cuerpo. Se necesita memorizar muy pocas fórmulas para la solución de estos problemas. Sin embargo, el hábito de hacer diagramas completos, cuidadosamente trazados, de los especímenes bajo carga, ayudará

enormemente a comprender esta materia.

## 2. Esfuerzo

El esfuerzo es una función de las fuerzas internas de un cuerpo que se producen por la aplicación de cargas exteriores. La mecánica de materiales es un estudio de la magnitud y distribución de estas fuerzas internas. Para entender la composición y distribución de las fuerzas internas, consideremos una barra simple sujeta a una fuerza axial  $P$  en cada extremo, la fuerza interior total de la barra es el resultado de todas las fuerzas y es igual a  $P$ . Sin embargo, no es común hablar de la fuerza total en la barra, sino más bien de la intensidad de la fuerza, esta intensidad de la fuerza se llama esfuerzo, o esfuerzo unitario. El esfuerzo unitario se define como la fuerza por unidad de área. En términos algebraicos

$$\sigma = P/A$$

donde  $\sigma$  es el esfuerzo unitario,  $P$  la carga aplicada y  $A$  el área sobre la cual actúa la carga.

## 3. Deformación

Considere una barra sujeta a una carga axial de compresión  $P$ , cuando se aplica esta carga se desarrolla un esfuerzo unitario en la barra que es igual a  $\sigma = P/A$ . además la barra se deforma ligeramente debido a la aplicación de la carga. En resistencia de materiales, estos cambios de longitud (también se conocen como elongaciones, o contracciones) se conocen como desplazamientos. Un desplazamiento es, por consiguiente, el cambio de la longitud de una parte.

La deformación unitaria se define como el cambio de longitud por unidad de longitud. Expresada algebraicamente, la deformación unitaria es

$$c = \frac{\Delta l}{L_0}$$

donde  $c$  es la deformación unitaria,  $\Delta l$  es el desplazamiento total y  $L_0$  es la longitud original.

#### 4. Elasticidad

El concepto de elasticidad es importante en mecánica de materiales. Elasticidad es la propiedad que hace que un cuerpo que ha sido deformado regrese a su forma original después de que se han removido las fuerzas deformadoras. Según esta definición, casi todos los materiales de ingeniería tales como el acero, aluminio, vidrio, concreto, madera, etc., pueden considerarse como elásticos. A los esfuerzos normales a los que se usan los materiales, generalmente se consideran como perfectamente elásticos. Sin embargo, si los esfuerzos en un cuerpo llegan a ser demasiado grandes, el cuerpo nunca regresará a sus dimensiones originales.

#### 5. Relación esfuerzo-deformación

Ya han sido discutidas dos de las definiciones más importantes y básicas de la mecánica de materiales -las que corresponden al esfuerzo y deformación unitaria. De igual importancia es la relación entre estos términos.

En el siglo diecisiete (1658), Robert Hooke publicó un artículo en el que estableció que el esfuerzo era directamente proporcional a la deformación unitaria. Este hecho se conoce como la Ley de Hooke. Matemáticamente puede expresarse

como  $\sigma \propto \epsilon$ .

Esta proposición puede convertirse en una ecuación introduciendo una constante de proporcionalidad. Esta constante de proporcionalidad fue calculada a principios del siglo diecinueve (1802) por Thomas Young, un científico inglés. Se conoce como el módulo de elasticidad, o módulo de Young. El módulo de elasticidad (al que se ha dado como símbolo  $E$ ) se ha determinado para los diversos materiales de ingeniería.

Al incluir el módulo de elasticidad, la ley de Hooke,  $\sigma \propto \epsilon$  se convierte en una ecuación importante y útil, que se expresa como

$$\sigma = E\epsilon$$

donde  $\sigma$  es el esfuerzo unitario,  $E$  el módulo de elasticidad y  $\epsilon$  la deformación unitaria.

## 6. Diagrama esfuerzo-deformación unitaria

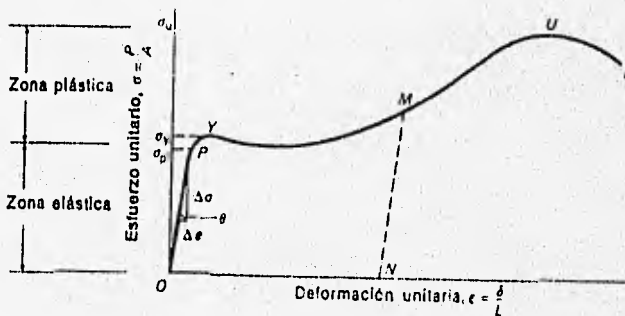
Cuando se elige un material para un edificio o una máquina, se deben conocer sus propiedades, así como su capacidad para soportar esfuerzos. Las diversas propiedades mecánicas de un material se determinan mediante una serie de pruebas de laboratorio.

Un ensayo a tensión para un material puede describirse, sencillamente, como sigue: se coloca un espécimen cilíndrico de diámetro conocido en una máquina de ensayos, la cual ejerce una fuerza sobre éste que puede medirse en cualquier tiempo durante el ensayo. Se adhiere a la probeta un extensómetro, que es un instrumento para medir cambios de longitud con exactitud. Después se aplica

al espécimen una carga de tensión que se va incrementando lentamente hasta que se presenta la fractura. A ciertos intervalos durante el ensayo, se registran simultáneamente la carga y el desplazamiento, a partir de estos datos se traza una gráfica de esfuerzo contra deformación unitarios.

Al construir esta gráfica, trazamos los valores del esfuerzo unitario ( $\sigma = P/A$ ) como las ordenadas y los valores correspondientes de las deformaciones unitarias ( $\epsilon = \Delta L/L_0$ ) como las abscisas. El resultado es una gráfica típica para el material dado, similar a la figura 1. Un análisis cuidadoso de esta curva ilustra varias definiciones y propiedades que debemos conocer cuando estudiamos mecánica de materiales.

Figura 1



La curva empieza en el origen y continúa como una línea recta hasta llegar al punto P. Más adelante se encuentra el punto Y donde la curva disminuye su pendiente, se hace más horizontal e incluso puede bajar ligeramente. Después de continuar aproximadamente horizontal en cierta distancia, la curva tiende otra vez a subir hasta U, y luego decrece hasta alcanzar el punto F, donde ocurre la fractura.

Cada uno de estos puntos, o segmentos de curva, recibe un nombre. El punto P es el límite de proporcionalidad del material. Para un esfuerzo mayor que este ya no se cumple la Ley de Hooke. Es muy importante notar que cualquiera de las fórmulas que se describan posteriormente son válidas solamente cuando el esfuerzo unitario en el material es menor que el esfuerzo en el límite de proporcionalidad. En diseño, el esfuerzo en el material se utiliza a valores menores que este límite (punto P).

Justamente después del límite de proporcionalidad, (en Y), la curva disminuye su pendiente y el material se deforma con muy poco o ningún aumento de la carga dependiendo del material. El material fluye o se deforma plásticamente en este punto. El esfuerzo para el cual empieza esta fluencia se llama el esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$ . Puede notarse que el límite de proporcionalidad y punto de fluencia están muy próximos. Es difícil notar la diferencia entre ambos, a menos que se hagan las medidas y los dibujos con mucha exactitud.

Posteriormente, la curva incrementa su pendiente y alcanza un valor máximo en el punto U. El esfuerzo correspondiente a este punto ( $\sigma_u$ ) se llama el esfuerzo último del material o resistencia a la tracción y es el máximo esfuerzo que el material es capaz de soportar. Después la curva desciende hasta el punto F,

donde ocurre la fractura.

**OBSERVACIÓN 1.** Cada día se hace más común el analizar los esfuerzos en el intervalo elástico o plástico con respecto a las diferentes teorías de diseño. El intervalo elástico de un material es el intervalo de esfuerzos dentro del cual el material permanece elástico, es decir, regresa a su forma original después de descargarlo. En el intervalo elástico, los esfuerzos son menores que en el punto de fluencia. Cuando los esfuerzos exceden el punto de fluencia, tiene lugar un flujo plástico, y el material nunca vuelve a recuperar su forma original. Este nuevo intervalo de esfuerzos se llama intervalo plástico.

El diagrama esfuerzo-deformación unitaria indica también la rigidez de un material. Considerando la porción recta de la curva (tramo OP), se encuentra que la pendiente de la recta es igual a la variación en el esfuerzo unitario dividido por la variación en la deformación unitaria.

La expresión para la pendiente puede escribirse como

$$\tan\theta = \frac{\text{VARIACION DE ESFUERZO}}{\text{VARIACION EN DEFORMACION}} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon}$$

Esto es también la definición del módulo de elasticidad ( $E = \sigma/\epsilon$ ). Una indicación del módulo de elasticidad (o rigidez relativa) del material puede obtenerse observando la pendiente de la porción inicial de la curva. Entre mayor es la pendiente mayor es el módulo de elasticidad del material.

Si el espécimen sujeto a tensión se carga hasta un esfuerzo menor que el límite de proporcionalidad y después se descarga, los puntos trazados sobre el diagrama durante la descarga quedarán sobre la recta original OP. Sin embargo, si el espécimen se carga por encima del límite de proporcionalidad, como en el

punto M, y después se descarga, los puntos trazados sobre el diagrama caerán sobre la recta MN. Si el esfuerzo se reduce a cero, se conservará una deformación permanente ON en la barra.

La descripción anterior para el ensayo de tensión es válida para el ensayo de compresión en todas sus características antes descritas.

### 7. En Mecánica del Medio Continuo

El propósito en este estudio es tener una representación del comportamiento elástico del material, el cual se considera independiente del tamaño del espécimen y de cualquier variable introducida por el sistema de experimentación.

Observemos la gráfica 2; esfuerzo ( $\sigma = P/A$ ) contra el desplazamiento por unidad de longitud axial o deformación unitaria ( $\epsilon_a = \frac{\Delta l}{l}$ ), del lado derecho se muestra una parte del resultado del ensayo de tracción (en la dirección longitudinal), en donde el segmento OA es la zona donde es válida la Ley de Hooke y donde nosotros propondremos un modelo matemático de desplazamientos. Del lado izquierdo tenemos la curva que nos representa el esfuerzo ( $\sigma_a$ ) contra la deformación transversal ( $\sigma_d$ ), esta gráfica es similar a la del ensayo de compresión. Ahora el resultado del ensayo aparece en una forma en la cual no depende de las dimensiones del espécimen. La inclinación de la línea OA nos proporciona el "Modulo de Young" (o módulo de elasticidad) del material.

$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_a}$$

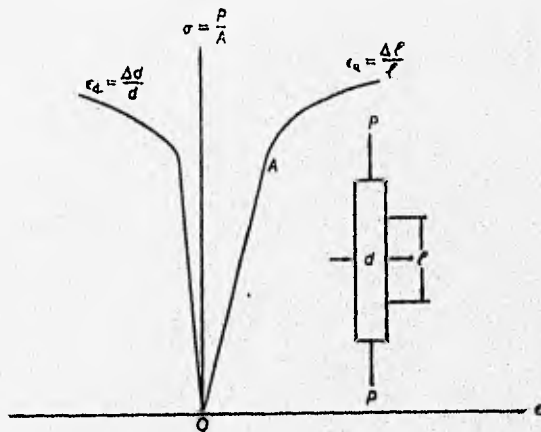
donde  $\sigma$  es el esfuerzo y  $\epsilon_a$  la deformación. Como uno espera, la deformación por unidad de longitud en el rango elástico lineal de los materiales es pequeña



por eso entonces usaremos en el desarrollo del modelo elongaciones unitarias infinitesimales para describir la deformación de los materiales.

En el ensayo de compresión queremos medir cambios en las dimensiones longitudinales y transversales o laterales. Si la barra es un cilindro circular, con diámetro  $d$ , al aplicar la carga habrá cambios en dicho diámetro. Si definimos  $\epsilon_d$  como la deformación por unidad de longitud transversal (igual a  $\frac{\Delta d}{d}$ ), encontramos entonces que la relación  $\frac{\epsilon_d}{\epsilon}$  es una constante.

Figura 2



Se llama a esta constante coeficiente o relación de Poisson y se denota por  $\nu$ .

Un valor típico de  $\nu$  para aceros inoxidables es de 0.30.

Hasta aquí se ha considerado un espécimen sencillo, entonces es concebible que tanto  $E_y$  como  $\nu$  dependan de la orientación de corte del espécimen relativo al bloque del material del que fue maquinado, si este es el caso, el material es llamado "Anisotrópico" con respecto a las propiedades elásticas. Los materiales con una estructura interna definida, por ejemplo un acero laminado en frío, presenta propiedades anisotrópicas. Por otro lado si el espécimen es cortado en orientaciones diferentes en una vecindad suficientemente reducida y si en todas las orientaciones se presenta el mismo comportamiento ( $\sigma - \epsilon$ ) entonces concluimos que el material es "Isotrópico" con respecto a las propiedades elásticas. En adición a una posible dependencia de la orientación sobre las propiedades elásticas, encontramos que éstas pueden variar de una vecindad a otra. En este caso llamaremos al material "no homogéneo". Si las propiedades no cambian en los resultados del ensayo para especímenes a diferentes vecindades, decimos que el material es llamado "Homogéneo".

Una suposición es que la sección transversal circular de nuestra barra se mantiene circular bajo la deformación. Este es el caso en el que el material es homogéneo e isotrópico con respecto a las propiedades elásticas.

Otra característica de un material elástico es el cambio de volumen de un espécimen homogéneo e isotrópico bajo presión uniforme  $P$ . El estado de esfuerzos de un material isotrópico y homogéneo se define como

$$T_{ij} = -P\delta_{ij}$$

donde  $\delta_{ij}$  es llamada la delta de Kronecker (ver apéndice I), las ecuaciones para  $T_{ij}$  expresan las componentes del esfuerzo en términos de las componentes de la deformación unitaria. Estas ecuaciones pueden ser invertidas como

$$E_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[ T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (T_{kk}) \delta_{ij} \right]$$

donde  $E_{ij}$  son las componentes de esfuerzo y  $\lambda$  y  $\mu$  son constantes del material conocidas como las constantes de Lamé (ver apéndice II). Nos referimos a un estado de esfuerzos de compresión axial, si solo una componente normal de esfuerzo no es cero. En particular, tomamos la dirección  $e_1$  axial y  $T_{11} \neq 0$ , y en este caso la ecuación para  $E_{ij}$  se reduce a

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{2\mu} \left[ T_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{11} \right] \\ &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{33} &= E_{22} \\ &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{11} \\ &= -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} E_{11} \end{aligned}$$

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$$

donde  $\frac{T_{11}}{E_{11}}$  corresponde a la relación  $\frac{\sigma}{\epsilon_a}$  y del ensayo de compresión tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\epsilon_a} &= \frac{T_{11}}{E_{11}} \\ &= E_y \\ &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

donde  $E_y$  es el módulo de Young o de elasticidad.

La relación de Poisson,  $\nu$ , es igual a la relación de la deformación unitaria transversal ( $E_{22}, E_{23}$ ) con la deformación unitaria axial y se encuentra que es

$$\begin{aligned} \frac{E_{33}}{E_{11}} &= \frac{E_{22}}{E_{11}} \\ &= \nu \\ &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{aligned}$$

Usando la ecuación para  $E_y$  y  $\nu$  escribimos la ecuación para  $E_{ij}$  en la forma usada en ingeniería como

$$\begin{aligned} E_{22} &= \frac{1}{E_y} [T_{22} - \nu(T_{11} + T_{33})] \\ E_{33} &= \frac{1}{E_y} [T_{33} - \nu(T_{11} + T_{22})] \\ E_{12} &= \frac{1}{2\mu} T_{12} \\ E_{13} &= \frac{1}{2\mu} T_{13} \\ E_{23} &= \frac{1}{2\mu} T_{23} \end{aligned}$$

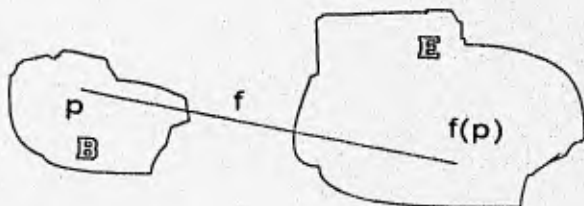
estas son dos de las tres constantes independientes de los metales isotrópicos. (la tercera es el módulo de corte, ver apéndice III)

## CAPITULO II

### Cinemática de la Deformación

Los cuerpos ocupan regiones del espacio euclidiano  $\mathbb{E}$  y tienen propiedades físicas distintas unos de otros. Aunque un cuerpo dado puede ocupar regiones diferentes en tiempos  $t$  diferentes, nosotros queremos encontrar una región, llamada  $\mathbb{B}$ , tal que el mapeo la ocupe en el tiempo  $t = 0$ . Formalmente entonces se considera un cuerpo  $\mathbb{B}$  como la configuración de referencia y los puntos  $p \in \mathbb{B}$  son llamados puntos materiales que limitan sub-regiones regulares de  $\mathbb{B}$  llamadas partes espaciales, es decir, necesitamos encontrar una región tal que al momento de trasladar puntos materiales  $p$  nos de la región que ocupa el punto  $p$  al tiempo  $t$  despues de la deformación (o mapeo), donde las sub-regiones de  $\mathbb{B}$  están en  $\mathbb{E}$ .

Figura 3



La mecánica del medio continuo es un estudio de la deformación de cuerpos. Matemáticamente, un cuerpo se deforma vía un mapeo  $f$  que transporta cada punto material  $p \in \mathbb{B}$  dentro de un punto del espacio  $\mathbb{E}$  que se desea encontrar (Figura 3).

$$x = f(p)$$

El requerimiento es que el cuerpo no se penetre en sí mismo y esto se expresa por la suposición de que  $f$  es uno a uno. Veremos después, que el  $\det \nabla f$  representa, localmente, el volumen después de la deformación por unidad de volumen original; entonces es razonable suponer que el  $\det \nabla f \neq 0$ , es decir, que si el  $\det \nabla f < 0$  la deformación no se presentará.

Entonces requerimos que

$$(1) \quad \det \nabla f > 0$$

donde el  $\nabla f$  se define como

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

El párrafo anterior da pie a lo siguiente: Para una deformación de  $\mathbb{B}$  se propone una función  $f$  mapeando de uno a uno, la cual se aplica a  $\mathbb{B}$  sobre una región cerrada  $\delta$ , donde  $\delta$  no es más que una región finita y satisface (1). El vector

$$(2) \quad u(p) = p + u$$

representa el desplazamiento de  $p$  (gráfica 3), además  $u$  es una constante, con  $f$  una translación y en este caso  $f(p) = p + u$ .

El tensor

$$(3) \quad F(p) = \nabla f(p)$$

se llama el gradiente de deformación  $\nabla f(p)$  y por (1) corresponde a  $\text{Lin}+$  (ver apéndice I). Donde  $F(p)$  es una deformación constante y homogénea. Cualquier deformación homogénea admite la representación

$$(4) \quad f(p) = f(q) + F(p - q)$$

$\forall p, q \in \mathbb{B}$ . Análogamente, un punto del campo  $f$  sobre  $\mathbb{B}$  que satisface (4) con  $F \in \text{Lin}+$  es una deformación homogénea.

Para cualquier valor dado de  $q$  el lado derecho de (4) está bien definida  $\forall \delta$ . Entonces cualquier deformación homogénea de  $\mathbb{B}$  puede ser extendida para formar una deformación homogénea de  $\mathbb{E}$ , y encontramos deformaciones homogéneas definidas todas sobre  $\mathbb{E}$ .

Para futuros usos notaremos ahora la propiedad siguiente de las deformaciones homogéneas:

(i) dado un punto  $q$  y un tensor  $F$  en  $\text{Lin}+$ , donde  $F$  es deformación homogénea con  $\nabla f = F$  y  $q$  fijo, entonces  $f(q) = q$ , es decir tenemos una función que preserva distancias.

**PROPOSICIÓN II.0.1.** *Sea  $f$  una deformación homogénea, entonces para un punto  $q$  podemos descomponer a  $f$  como  $f = d_1 \circ g = g \circ d_2$ , donde  $g$  es una deformación homogénea con  $q$  fijo, y  $d_1, d_2$  como traslaciones. Además cada una de estas deformaciones son únicas (ver apéndice para el producto interno  $\circ$ ), en otras palabras, si queremos tener un cierto efecto, lo podemos obtener*

*trasladando y luego girando o primero girando y luego trasladando.*

La proposición anterior permite el concentrarnos sobre las deformaciones homogéneas con un punto fijo.

**EJEMPLO 0.1.** Una muestra importante de este tipo de deformación para  $q$ , es que

$$f(p) = q + R(p - q)$$

con  $R$  una rotación.

**EJEMPLO 0.2.** También es importante notar que en una extensión de  $q$  se tiene que

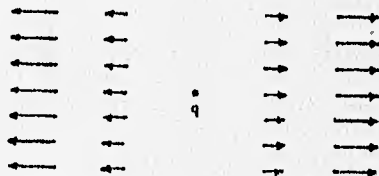
$$f(p) = q + U(p - q)$$

con  $U$  simétrico definido positivo. Si en particular

$$U = I + (\lambda - 1)e \otimes e$$

con  $U$  una extensión, donde  $I$  representa la matriz identidad,  $\lambda$  los eigen-valores (escalares) y  $e$  un vector unitario (vease apéndice II para  $\otimes$ ).

Figura 4





En la figura 4 observamos los campos de desplazamientos alrededor del punto  $p$ . Con  $\lambda > 0$  y tomando  $\{e\}$ , entonces  $f$  es una extensión de cantidad  $\lambda$  en dirección  $e$ . Aquí la matriz de  $U$  relativa a la coordenada buscada con  $e \approx e_1$  tiene la forma simple

$$[U] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el deslizamiento correspondiente mostrado en la figura 3 tiene componentes  $(u_1, 0, 0)$  con  $u_1(p) = (\lambda - 1)(p_1 - q_1)$ .

**PROPOSICIÓN 11.0.2.** *Sea  $f$  una deformación cerca de  $q$ , y  $s_1, s_2$  son extensiones para  $q$ , cada una de estas descomposiciones son únicas. En realidad, si  $F = RU = VR$  es la descomposición polar de  $F = \nabla f$ , entonces*

$$\nabla g = R = \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial x_3}$$

$$\nabla s_1 = U = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_1}{\partial x_3}$$

$$\nabla s_2 = V = \frac{\partial s_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_3}$$

*Cualquier deformación homogénea (con un punto fijo) puede descomponerse dentro de una extensión seguida por una rotación, o de una rotación seguida por una extensión. El siguiente teorema da un nuevo aspecto de la descomposición de cualquiera de estas extensiones dentro de una sucesión de tres extensiones mutuamente ortogonales.*

**TEOREMA 11.0.3.** *Cada extensión  $f$  para  $q$  puede descomponerse dentro de una sucesión de tres extensiones para  $q$  en direcciones mutuamente ortogonales. Las cantidades y direcciones de las extensiones son los llamados eigen-valores y los*

eigen-vectores de  $U$  respectivamente, en estas direcciones las extensiones son perdurables en cualquier orden.

Por las proposiciones y teorema anterior, cada extensión puede descomponerse dentro de una sucesión de extensiones, las cantidades de las extensiones son  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de  $U$ . Por estas razones referimos a  $\lambda_1$  como la extensión principal. Nótese que, ya que los tensores de extensión  $U$  y  $V$  tiene un espectro o imagen, los invariantes principales de  $U$  toman la forma

$$I_1(U) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2(U) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1$$

$$I_3(U) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Ahora estudiaremos las deformaciones generales de  $B$ ; para evitar repetir hipótesis asumiremos para el resto de este trabajo que  $f$  es una deformación de  $B$ : Ya que  $f$  es uno a uno y es inversa  $f^{-1} : f(B) \rightarrow B$ . Por (1),  $\nabla f(p)$  es invertible a cada punto de  $p$  en  $B$  y concluimos que  $f^{-1}$  es invertible y tiene un mapeo uno a uno. Otras dos propiedades importantes de  $f$  son

$$f(\dot{B}) = \dot{f(B)}$$

donde  $\dot{f(B)}$  denota el interior de  $f(B)$ , y

$$(5) \quad f(\partial B) = \partial f(B)$$

es decir que las fronteras son iguales despues de aplicar la función. El concepto de deformación por unidad de longitud es más fácil introducirlo por expansión

de la deformación de  $f$  cercana a un punto arbitrario  $q \in B$ .

$$f(p) = f(q) + F(q)(p - q) + o(p - q)$$

donde  $F$  es el gradiente de deformación (ec.3). Entonces en una vecindad de un punto  $q$  y para un error de  $o(p - q)$ , una deformación actúa como homogénea. Esto motiva la siguiente terminología. Sea

$$F = RU = VR$$

para los puntos de descomposición polar de  $F$ ; entonces  $R$  es un tensor de rotación,  $U$  el tensor derecho de extensión, y  $V$  el tensor izquierdo de la deformación  $f$ .  $R(p)$  mide la rotación rígida local de los puntos cerca de  $p$ . Mientras que  $U(p)$  y  $V(p)$  miden el estrechamiento local para  $p$ . Así  $U$  y  $V$  involucran a  $F^T F$  y  $F F^T$ , siendo este cálculo a menudo difícil. Por esta razón introduciremos el tensor de deformación izquierdo y derecho de Cauchy-Green, con  $C$  y  $B$  definidos por

$$(6) \quad \begin{aligned} C &= U^2 = F^T F \\ B &= V^2 = F F^T \end{aligned}$$

en forma tensorial

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_m \frac{\partial f_i}{\partial p_m} \frac{\partial f_j}{\partial p_j} \\ B_{ij} &= \sum_m \frac{\partial f_i}{\partial p_m} \frac{\partial f_j}{\partial p_m} \end{aligned}$$

nótese que

$$(7) \quad \begin{aligned} V &= R U R^T \\ B &= R C R^T \end{aligned}$$

entonces  $R$  es una rotación.

Definiendo que el ángulo  $\theta$  entre dos vectores diferentes de cero  $u$  y  $v$ , está dado por

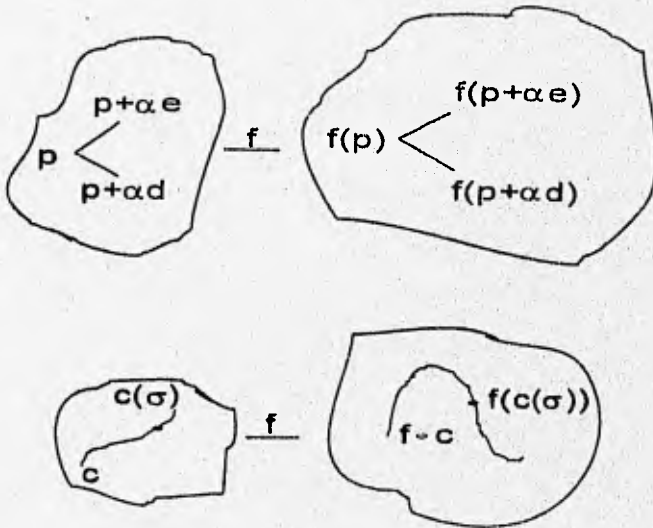
$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} ; 0 < \theta < \pi$$

PROPOSICIÓN 11.04. Sean  $d$  y  $e$  vectores unitarios y sea  $p \in B$ , entonces como  $\alpha \rightarrow 0$ , se tiene que

$$(8) \quad \frac{|f(p+\alpha e) - f(p)|}{|\alpha|} \rightarrow |U(p)e|$$

y el ángulo entre  $f(p+\alpha d) - f(p)$  y  $f(p+\alpha e) - f(p)$  tiende al ángulo entre  $U(p)d$  y  $U(p)e$ . (ver figura 5)

Figuras 5 y 6



La proposición anterior muestra que el tensor de extensión  $U$  mide localmente la distancia y el cambio de ángulo sobre la deformación. En particular  $|U(p)e|$  es la distancia entre  $p$  y  $q$  después de la deformación por unidad de distancia original. El siguiente resultado muestra que  $U$  también determina la longitud de la deformación de la curva ( $c$ ) en  $B$ , esto es que  $f \circ c = f(c(\sigma))$ , en donde  $0 < \sigma < 1$ . (ver figura 6)

PROPOSICIÓN II.0.5. *Dada cualquier curva  $c \in B$*

$$(9) \quad \text{Long}(f \circ c) = \int_0^1 |U(c(\sigma))| \, dV$$

entonces una deformación que preserva distancias es llamada rígida, más precisamente,  $f$  es rígida si

$$(10) \quad |f(p) - f(q)| = |p - q|$$

$\forall p, q \in B$ . Estas condiciones imponen severas restricciones como muestra el siguiente leorema. (Una deformación  $f$  es rígida si y solo si: (i)  $f$  es homogénea y (ii)  $\nabla f$  es una rotación)

TEOREMA II.0.6. (Caracterización de deformación rígida)

(a)  $f$  es una deformación rígida.

(b)  $f$  admite la representación de la forma

$$(11) \quad f(p) = f(q) + R(p - q)$$

para todo  $p, q \in B$  con  $R$  una rotación.

(c)  $F(p)$  es una rotación para  $p \in B$ .

(d)  $U(p) = I$  para cada  $p \in B$ .

(c) para cualquier curva  $c \in B$ , entonces  $Long(c) = Long(f \circ c)$ .

Remarquemos que  $U(p)$  puede ser reemplazada por  $c$ ,  $\forall \delta \in B$ .

PROPOSICIÓN 11.0.7. Sea  $f$  una deformación de  $B$ , y sea  $s$  un escalar continuo en el campo sobre  $f(B)$ , entonces dado cualquier  $p$  en  $B$

$$(12) \quad \int_{f(\delta)} s(x)m(x)dA_x = \int_{\partial p} (f(p))G(p)n(p)df_p$$

donde

$$(13) \quad G = (\det F)F^T$$

mientras  $m$  y  $n$  son las normas unitarias exteriores de campo sobre  $\partial f(p)$  y  $\partial p$  respectivamente.

De una parte  $P$

$$(14) \quad vol(f(p)) = \int_{f(p)} dV$$

representa el volumen de  $p$  después de ser deformado sobre  $f$ , en vista de (12)

$$(15) \quad vol(f(P)) = \int_P \det F dV$$

y entonces

$$(16) \quad \det F(p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{vol(f(\Omega_\delta))}{vol(\Omega_\delta)}$$

donde  $\Omega_\delta$  es un círculo cerrado de radio  $\delta$  y centro en  $p$ , el  $\det F$  da el volumen después de la deformación por unidad original de volumen.

## 1. Deformaciones Cortas

Ahora estudiaremos el desarrollo de los varios campos cinemáticos donde el gradiente de desplazamientos  $\nabla u$  es pequeño, ya que

$$f(p) \approx p + u(p)$$

seguida de

$$(17) \quad F = I + \nabla u$$

por eso los tensores de deformación por unidad de longitud de Cauchy-Green, obedecen a las relaciones

$$(18) \quad C = I + \nabla u + \nabla u^T$$

cuando la deformación es rígida,  $C = B = I$  y

$$(19) \quad \nabla u + \nabla u^T = 0$$

en este caso  $\nabla u$  es constante, por que  $F$  es el tensor de campo, esto implica que su deformación tiende a cero. Ahora tomando la parte simétrica de  $u$  obtenemos

$$(20) \quad {}^s E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

donde  $E$  es llamado la deformación unitaria infinitesimal, sustituyendo en  $C = B$  obtenemos

$$C = I + 2E + \nabla u^T + \nabla u$$

$$(21) \quad B = I + 2E + \nabla u + \nabla u^T$$

donde  $C$  y  $B$  son deformaciones rígidas.

PROPOSICIÓN II.1.1. Sea  $f(0 < \epsilon < \epsilon_0)$  una familia de deformaciones con

$$|\nabla_\epsilon| = \epsilon$$

entonces

$$(22) \quad 2E_\epsilon = C_\epsilon + I + o(\epsilon) = B_\epsilon - I + o(\epsilon)$$

cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Adicionalmente, si cada  $f_\epsilon$  es rígida, entonces

$$(23) \quad \nabla u_\epsilon = -\nabla_\epsilon^T + o(\epsilon)$$

Esta proposición aclerta en que para un error de orden  $o(\epsilon)$  los tensores  $2E_\epsilon$ ,  $C_\epsilon - I$  y  $B_\epsilon - I$  coinciden, en adición de que algun error del gradiente de desplazamiento corresponda a la deformación rígida y antisimétrica.

La discusión anterior muestra motivos para dar la siguiente definición

DEFINICIÓN II.1.2. Un desplazamiento rígido infinitesimal de B es un vector de campo,  $u$  sobre B con  $\nabla u$  constante y antisimétrico, o igualmente, un vector de campo  $u$  que admite la representación

$$(24) \quad u(p) = u(q) + W(p - q)$$

para todo  $p, q \in B$ , donde  $W$  es antisimétrico ( $W = -W$ ), usando la relación entre tensores antisimétricos y vectores podemos escribir  $u$  en la forma

$$u(p) = u(q) + w \times (p - q)$$

con  $w$  el vector axial correspondiente a  $W$ .



**TEOREMA II.1.3.** *(Caracterización de desplazamientos rígidos)*

Sea un vector de campo suave sobre  $M$ , entonces las siguientes equivalencias:

- (a)  $u$  es un desplazamiento infinitesimal rígido.
- (b)  $u$  tiene proyección propia;  $\forall p, q \in M$  y  $(p - q) \cdot [u(p) - u(q)] = 0$ .
- (c)  $\nabla u(p)$  es antisimétrico a cada  $p \in M$ .
- (d) la deformación por unidad de longitud infinitesimal  $E(p) = 0$  a cada  $p \in M$ .

### CAPITULO III

#### El Tensor de Esfuerzos y Balance de Momentos

El siguiente teorema es uno de los resultados centrales de la mecánica del medio continuo. La principal afirmación es que  $s(\mathbf{n})$  es lineal en  $\mathbf{n}$ .

**TEOREMA III.0.1. (Teorema de Cauchy, Existencia de esfuerzos)**

Sea  $(s, b)$  un sistema de fuerzas para  $B$  durante un movimiento, entonces son condiciones necesarias y suficientes que las leyes de balance de momentum se satisfagan y que exista un tensor espacial de campo  $T$  (llamado el esfuerzo de CAUCHY) tal que

(a) para cada vector unitario  $\mathbf{n}$  se tiene que

$$(25) \quad s(\mathbf{n}) = T\mathbf{n}$$

(b)  $T$  sea simétrico

(c)  $T$  satisfaga la ecuación de movimiento

$$(26) \quad \text{div}T + b = \rho \dot{\mathbf{v}}$$

Realmente, uno puede mostrar que (a) y (c) son equivalentes al balance de momento lineal y observamos también que el tensor simétrico de  $T$  es equivalente al balance de momento angular.

Sea  $T = T(\mathbf{x}, t)$  el esfuerzo en un tiempo y lugar particular, si

$$T\mathbf{n} = \sigma\mathbf{n} ; \text{ con } \sigma = |\mathbf{n}|$$

entonces  $\sigma$  es un esfuerzo principal y  $\mathbf{n}$  es una dirección principal, así que los esfuerzos principales y direcciones principales son los eigen-valores y los eigen-vectores respectivamente de  $T$ .

Ya que  $T$  es simétrico, aquí existen tres direcciones principales mutuamente ortogonales y tres esfuerzos principales correspondientes.

Ahora considere una superficie plana orientada arbitrariamente con norma unitaria positiva  $\mathbf{n}$  en  $\mathbf{x}$ . Entonces la fuerza superficial ( $T\mathbf{n}$ ) puede descomponerse en una suma de una fuerza normal

$$(\mathbf{n} \cdot T\mathbf{n}) = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})T\mathbf{n}$$

y una fuerza cortante

$$(T - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})T\mathbf{n}$$

y se sigue que  $\mathbf{n}$  es una dirección principal si y solo si la correspondiente fuerza cortante desaparece.

**EJEMPLO 0.1.** Un fluido en reposo es incapaz de ejercer esfuerzos cortantes. En esta instancia  $T\mathbf{n}$  es paralela a  $\mathbf{n}$  para cada vector unitario  $\mathbf{n}$ , y cada vector es un eigen-valor de  $T$ . Analizando las implicaciones del teorema de Cauchy se da la siguiente observación:

$T$  tiene solo un espacio característico,  $\mathbb{V}$  (el mismo), y por (c) del teorema de Cauchy antes descrito, implica que

$$T = -\pi I$$

con  $\pi$  un escalar, donde  $l$  es llamado la presión del fluido. Nótese que en este caso la fuerza por unidad de área sobre cualquier superficie en el fluido es  $-\pi n$ .

Otros dos casos importantes son:

(a) compresión pura con esfuerzos compresivos  $\sigma$  en la dirección  $e$ , donde  $|e| = 1$ , entonces

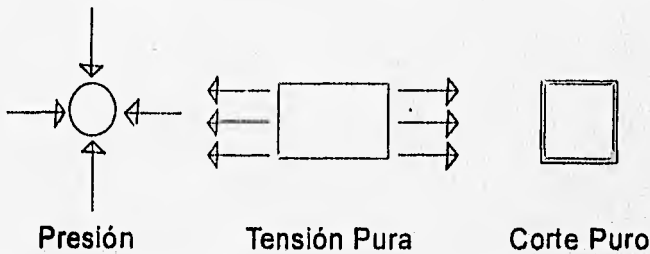
$$T = \sigma(e \otimes e)$$

(b) cortante puro con esfuerzo cortante  $\tau$  relativo a las direcciones paralelas y de sentido opuesto  $(k, n)$ , donde  $k$  y  $n$  son vectores ortogonales unitarios:

$$T = \tau(k \otimes n + n \otimes k)$$

La fuerza superficial de campo corresponde a los ejemplos de la figura 7 con  $T$  constante.

Figura 7



En la figura 7 observamos una compresión, una tensión pura y un esfuerzo cortante puro.

### 1. Leyes de Balance de Momentum

Los axiomas básicos conectados a los movimientos y fuerzas son las Leyes de Balance de Momentum. Estas afirman que para cada parte  $P$  y tiempo  $t$

$$\begin{aligned} \dot{f}(P, t) &= i(P, t) \\ (27) \quad \dot{m}(P, t) &= \dot{a}(P, t) \end{aligned}$$

estas expresan respectivamente balances de momento lineal y balances de momento angular.

El significado de los axiomas anteriores son la existencia de un observador (marco de referencia) relativa a la cual el movimiento y las fuerzas son medibles. La existencia semejante a la de un observador es no trivial, ya que las leyes de balance de momentum son generalmente no variables sobre cambios en el observador.

Observe que los axiomas también son llamados de Inercia. En la práctica los inicios fijos son a menudo utilizados para definir la clase de observador inercial.

Una consecuencia obvia de estos axiomas es

$$f(B, t) = m(B)\dot{a}(t)$$

donde  $B$  está limitado, así que la fuerza total sobre un cuerpo finito es igual a la masa ( $m$ ) del cuerpo por la aceleración ( $\dot{a}$ ) del centro de masa.

Por medio de la ley de balance de momentum podemos escribir

$$\int_{\partial P_t} s(n) dA + \int_{P_t} b dV = \int_{P_t} \dot{v} \rho dV$$

$$(28) \quad \int_{\partial P_t} \mathbf{r} \times \mathbf{s}(\mathbf{n}) dA + \int_{P_t} \mathbf{r} \times \mathbf{h} dV = \int_{P_t} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \rho dV$$

si introducimos la fuerza total de cuerpo

$$(29) \quad \mathbf{b}_* = \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}}$$

que influye en la fuerza inercial de cuerpo  $-\rho \dot{\mathbf{v}}$ , y define

$$\mathbf{f}_*(P, t) = \int_{\partial P_t} \mathbf{s}(\mathbf{n}) dA + \int_{P_t} \mathbf{b}_* dV$$

$$(30) \quad \mathbf{m}_*(P, t) = \int_{\partial P_t} \mathbf{r} \times \mathbf{s}(\mathbf{n}) dA + \int_{P_t} \mathbf{r} \times \mathbf{b}_* dV$$

entonces los axiomas toman la forma simple de

$$\mathbf{f}_*(P, t) = 0$$

$$(31) \quad \mathbf{m}_*(P, t) = 0$$

nuestro siguiente resultado da la caracterización de las leyes de balance de momentum. Recordando que un desplazamiento infinitesimal rígido de  $\mathbb{E}$  es un mapeo, entonces

$$(32) \quad \mathbf{w}(x) = \mathbf{w}_0 + W(x - 0)$$

con  $\mathbf{w}_0$  un vector y  $W$  un tensor antisimétrico.

## CAPÍTULO IV

### Isotropía

DEFINICIÓN IV.0.1. Se dice que el material es isotrópico en  $p$  si

$$\mathbb{G}_p = \text{orth}^+$$

asi que cada rotación es una transformación simétrica. Es anisotrópica si

$$\mathbb{G}_p \neq \text{orth}^+$$

PROPOSICIÓN IV.0.2. Las funciones correspondientes  $T, T, \hat{T}$  y  $\bar{T}$  son los invariantes sobre  $\mathbb{G}$ , asi las funciones pueden relacionarse de la siguiente forma:

$$QT(F)Q^T = T(QFQ^T)$$

$$(33) \quad QT(C)Q^T = T(QCQ^T)$$

$\forall Q \in \mathbb{G}$ ,  $F \in \text{Lin}^+$ , y  $C \in \text{Psym}$ . (ver apéndice I para  $\text{orth}^+$ ,  $\text{Lin}^+$  y  $\text{Psym}$ )

Esta proposición y la anterior definición se emplean con la siguiente proposición

PROPOSICIÓN IV.0.3. Suponemos que el material es isotrópico en  $p$ , entonces cada una de las funciones correspondientes  $\hat{T}, T, \bar{T}$ , y  $T$  (en  $p$ ) son funciones

isotrópicas o de campo, por lo tanto el esfuerzo

$$T_H = \hat{T}(I)$$

es llamado el esfuerzo residual en  $p$ ;  $T_H$  es el esfuerzo en  $p$  cuando el cuerpo no se deforma. De acuerdo con el teorema de descomposición polar, tenemos que

$C = U = RI$  donde  $F = I$ , esto implica que

$$T_H = \hat{T}(I) = \tilde{T}(I) = \bar{T}(I) = \hat{T}(I)$$

PROPOSICIÓN IV.0.A. Si el material en  $p$  es isotrópico, entonces  $T_H$  es una presión.

El tensor derecho  $U$  y el tensor izquierdo  $V$  en el lado derecho del tensor de deformación de longitud derecho  $C$  e izquierdo  $B$  de Cauchy-Green están relacionados por

$$V = RU R^T ; B = RC R^T$$

donde  $R \in orth+$  es el correspondiente tensor rotación. Por tanto, cuando el material es isotrópico y con la ayuda de la ecuación (34) obtenemos que

$$(\hat{F}) = R\hat{T}(U)R^T = \tilde{T}(RU R^T) = \hat{T}(V)$$

$$\hat{T}(F) = R\hat{T}(C)R^T = \tilde{T}(RC R^T) = \tilde{T}(B)$$

y así la ecuación  $T = \hat{T}(F)$  se puede escribir en formas alternas como

$$(34) \quad \begin{aligned} T &= \hat{T}(V) \\ &= \tilde{T}(B) \end{aligned}$$

con  $\hat{T}$  y  $\tilde{T}$  funciones isotrópicas; esto tiene la siguiente correspondencia:



**TEOREMA IV.0.5. (Ecuación Constitutiva para un Material Isótropico)**

Suponemos que el material es isótropico en  $p$ , entonces la relación constitutiva se escribe en la forma

$$T = \beta_0(J_\beta)I + \beta_1(J_\beta)B + \beta_2(J_\beta)B^{-1}$$

donde  $B = FF^T$  es el tensor deformación por unidad de longitud izquierdo de Cauchy-Green y  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  son funciones escalares de la lista  $J_B$  de invariantes principales de  $B$  (ver apéndice para  $J_B$ ).

Por medio de la ecuación (34) y la ecuación constitutiva (12), para un punto material isótropico, podemos expresar a  $T$  como

$$\begin{aligned} T &= \alpha_0(J_\beta)I + \alpha_1(J_\beta)B + \alpha_2(J_\beta)B^2 \\ &= k_0(J_v)I + k_1(J_v)V + k_2(J_v)V^{-1} \\ &= \delta_0(J_v)I + \delta_1(J_v)V + \delta_2(J_v)V^2 \end{aligned}$$

donde  $V = B^{\frac{1}{2}}$  es el tensor de extensión izquierdo de Cauchy-Green.

Retornando a la teoría general, la lista del sistema completo de las ecuaciones isotrópicas de campo junto con la ecuación constitutiva dan las siguientes ecuaciones

$$(35) \quad T = F^T(C)F^T : \text{con } C = F^T F,$$

la ecuación de movimiento

$$\operatorname{div} T + b = \rho \ddot{v}$$

y la ecuación de balance de masa

$$(36) \quad \varphi \operatorname{det} F = \varphi_0$$

donde  $\varphi_0$  es la densidad de la configuración de referencia.

Si el cuerpo es isotrópico (36) y puede ser reemplazado por

$$T = \beta_0(J_\beta)I + \beta_1(J_\beta)B + \beta_2(J_\beta)B^{-1}$$

con  $B = FF^T$ .

Decimos entonces que el cuerpo es homogéneo. Para un cuerpo homogéneo el correspondiente esfuerzo  $T = \hat{T}(F)$  es constante porque  $f$  es constante. Así  $T$  satisface la ecuación de equilibrio

$$\operatorname{div}T = 0$$

y la coordenada  $(x, t)$  es una solución de (35) y (36) cuando  $b = 0$ . Así un cuerpo homogéneo puede deformarse homogéneamente sin considerar a las fuerzas de cuerpo (por ejemplo la aceleración de la gravedad y los campos magnéticos).

CAPITULO V  
Teoría de Elasticidad Lineal

1. Derivación de la Teoría Lineal

Deduciremos la teoría lineal para situaciones en las cuales el gradiente de desplazamientos  $\nabla u$  es pequeño. El paso crucial en la linealización de la ecuación constitutiva es

$$S = S(F)$$

Por el tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff se tiene que

$$H = \nabla u ; H \text{ es el esfuerzo residual}$$

consideramos  $\hat{S}(F)$  como una función  $H$  usando

$$F = I + H$$

y tomando en cuenta el teorema V.I.I obtenemos los resultados siguientes:

**TEOREMA V.I.I. (Forma Asintótica de la Relación Constitutiva)**

*Este teorema nos dice que*

$$\hat{S}(F) = C[E] + o(H)$$

Suponemos que si el esfuerzo residual desaparece, es decir los esfuerzos remanentes debidos al ensayo no se consideran (esto es que  $H \rightarrow 0$ ), por lo tanto tenemos que

$$\hat{S}(F) = C[E]$$

donde  $C$  es el tensor elástico y  $E$  es el tensor de deformación por unidad de longitud infinitesimal y está dado por

$$(37) \quad E = \frac{1}{2}(H + H^T)$$

Usando  $\hat{S}(F) = S$  y  $H = \nabla u$  podemos escribir la forma asintótica de la ecuación constitutiva como

$$(38) \quad S = C[E] + o(\nabla u)$$

En donde se observa que el esfuerzo residual está en la configuración de referencia y desaparece. Ya que  $C$  tiene valores simétricos para el mismo error simétrico de  $S$ , tanto los términos  $o(\nabla u)$  como  $\nabla u \rightarrow 0$ , entonces el esfuerzo  $S$  es una función lineal de la deformación  $E$  infinitesimal.

La teoría lineal esta basada en la ley de esfuerzo-deformación sin considerar los términos de  $o(\nabla u)$ , la relación desplazamiento-deformación y la ecuación de movimiento quedan entonces como

$$S = C[E]$$

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u^T)$$

$$(39) \quad \operatorname{div} S + b_0 = \varphi_0 \ddot{u}$$

nótese que estas ecuaciones están expresadas en términos del desplazamiento

$$U(p, t) = x(p, t) - p$$

donde  $x$  es el desplazamiento y  $p$  el punto en la configuración de referencia.

Es importante enfatizar que la derivación formal de la linealización de la ecuación constitutiva está basada en:

- (a) la desaparición del esfuerzo residual en la configuración de referencia.
- (b) el gradiente de desplazamientos pequeño.

Es importante observar que por las ecuaciones de movimiento y el teorema de Caracterización de desplazamientos rígidos infinitesimales tenemos que  $E = S = 0$  y por tanto es un desplazamiento rígido infinitesimal. Esta es una propiedad importante de la teoría de la linealización.

Dado  $C$ ,  $\varphi_0$ , y  $b_0$  en las ecuaciones de movimiento se obtiene un sistema lineal de ecuaciones diferenciales parciales para el campo  $U$ ,  $E$  y  $S$ , donde se supone que el cuerpo es isotrópico y que puede ser reemplazado por

$$S = 2\mu E + \lambda(\text{tr} E)I$$

donde el cuerpo es homogéneo y  $\varphi_0$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  son constantes y la  $\text{tr} E$  es la suma de la diagonal principal del tensor  $E$ . (ver apéndice VII para  $\mu$  y  $\lambda$ )

Ahora, si  $B$  es homogéneo e isotrópico, entonces

$$\text{div}(\nabla u + \nabla u^T) = \text{lap} u + \nabla \text{div} u$$

donde el *lap*  $u$  es

$$\begin{aligned} \text{lap } u &= \nabla^2 u \\ &= \nabla \cdot (\nabla u) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \end{aligned}$$

con la

$$\text{tr} E = \text{div } u$$

Las ecuaciones de  $E$ ,  $\text{div} S + b_0$  y  $S$  son fácilmente combinadas para dar la ecuación del desplazamiento, obteniéndose así

$$\mu \text{lap } u + (\lambda + \mu) \nabla \text{div } u + b_0 = \varphi_0 \ddot{u}$$

donde por la teoría de elasticidad  $\ddot{u} = 0$  y tenemos el desplazamiento de la ecuación de equilibrio como

$$\mu \text{lap } u + (\lambda + \mu) \nabla \text{div } u + b_0 = 0$$

## CAPÍTULO VI

### Modelo Propuesto para el Campo de Desplazamientos

Se considera que una barra cilíndrica elástica de sección transversal arbitraria está bajo la acción de la oposición normal a la compresión  $\sigma$  sobre las caras, las superficies laterales están libres para cualquier compresión superficial y para cualquier fuerza de cuerpo, no obstante consideramos que estas no existen.

Intuitivamente esperamos que el estado de esfuerzos en cualquier punto no dependa de la longitud de la barra ni de las dimensiones laterales. En otras palabras, el estado de esfuerzos en la barra es el mismo en cualquier punto.

Para obtener el campo de desplazamientos es necesario conocer las ecuaciones constitutivas relacionadas al esfuerzo. En nuestro caso, cuando las deformaciones son pequeñas podemos expresar a  $T$  como

$${}^3T = T(E)$$

donde  $T(E)$  es una función de  $E$ . Como la función es lineal, podemos expresarla como una combinación lineal; en componentes tenemos

$$T_{11} = C_{1111}E_{11} + C_{1112}E_{12} + \dots + C_{1133}E_{33}$$

$$T_{12} = C_{1211}E_{11} + C_{1212}E_{12} + \dots + C_{1233}E_{33}$$

hasta

$$T_{33} = C_{3311} E_{11} + C_{3312} E_{12} + \dots + C_{3333} E_{33}$$

también las podemos escribir en forma tensorial como

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$$

donde  $T_{ij}$  y  $E_{kl}$  son las componentes de tensores de segundo orden y  $C_{ijkl}$  son las componentes del tensor de cuarto orden y es llamado el tensor de elasticidad. Este tensor caracteriza las propiedades mecánicas de una partícula anisotrópica elástica.

La anisotropía de un material está representada por el hecho de que las componentes del tensor  $C_{ijkl}$  son en general distintas para diferentes bases. Suponemos que el cuerpo es homogéneo, entonces las propiedades mecánicas son las mismas para cualquier vecindad en el cuerpo, entonces  $C_{ijkl}$  es constante (esto es, independiente de la posición).

Ahora ya que supusimos que tenemos un material homogéneo y sabemos también que el tensor  $E$  (tensor de deformación) es simétrico, entonces las nueve ecuaciones a resolver se reducen solo a seis. Estas seis componentes del esfuerzo independientes ( $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$ ) se relacionan con las seis componentes de deformación independientes ( $E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23}$ ).

Un concepto más que debemos tomar en cuenta es el relativo a los materiales isotrópicos. Llamamos isotrópico a un material si las propiedades mecánicas obtenidas son las mismas para cualquier dirección en la cual se haya maquinado la probeta a partir del bloque original. Cuando esto no es cierto llamamos al material anisotrópico, como se mencionó anteriormente.



Entonces sabemos que para un material elástico lineal tenemos la representación como

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$$

si el material es isotrópico, entonces las componentes del tensor de elasticidad  $C_{ijkl}$  permanecen sin cambio, es decir

$$C_{ijkl} = c_{ijkl}$$

Un tensor que tiene las mismas componentes con respecto a cualquier base es llamado un tensor isotrópico. Por ejemplo, el tensor identidad  $I$  es isotrópico ya que sus componentes  $\delta_{ij}$  son las mismas para cualquier base cartesiana.

También conocemos que un tensor se puede representar como una combinación lineal de sus elementos, entonces para un material elástico lineal e isotrópico, el tensor de elasticidad puede representarse como

$$C_{ijkl} = \lambda A_{ijkl} + \alpha B_{ijkl} + \beta H_{ijkl}$$

si sustituimos la ecuación anterior en la ecuación constitutiva del esfuerzo ( $T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$ ), obtenemos

$$T_{ij} = (\lambda A_{ijkl} + \alpha B_{ijkl} + \beta H_{ijkl}) E_{kl}$$

donde

$$A_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$B_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

$$H_{ijkl} = \delta_{il} \delta_{jk}$$

los anteriores tensores son isotrópicos.

## OBSERVACIÓN 2.

$$A_{1111} = 1 ; A_{1312} = 0 ; A_{1221} = 0$$

$$B_{1111} = 1 ; B_{1212} = 1 ; B_{1221} = 0$$

$$H_{1111} = 1 ; H_{1212} = 0 ; H_{1221} = 1$$

son tensores isotrópicos de cuarto orden.

Utilizando la delta de Kronecker (ver apéndice V) obtenemos de la observación (2) que  $i = j$ , y  $k = l$ , entonces encontramos que  $E_{kk} = A_{ijkl}E_{kl}$ .

Análogamente tenemos  $E_{ij} = B_{ijkl}E_{kl}$  y  $E_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}$ . Sustituyendo las igualdades encontradas para los tensores de cuarto orden obtenemos

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \lambda E_{kk} + \alpha E_{ij} + \beta E_{ij} \\ &= \lambda E_{kk} + (\alpha + \beta) E_{ij} \end{aligned}$$

Hacemos la sustitución de  $(\alpha + \beta) = 2\mu$  y tenemos que

$$T_{ij} = \lambda E_{kk} + 2\mu E_{ij}$$

donde  $E_{kk}$  puede ser representado como

$$E_{kk} = \text{tr} \tilde{E} I$$

con  $I$  la identidad y la traza ( $\text{tr}$ ) la suma de las componentes  $E_{11} + E_{22} + E_{33}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Podemos expresar a  $T_{ij}$  en forma matricial como

$${}^2\tilde{T} = \lambda(\text{tr} \tilde{E}) \tilde{I} + 2\mu \tilde{E}^2$$

y a partir de ahora notaremos a los tensores como  $\tilde{E}$ , por ejemplo. Aplicando la traza a la igualdad anterior tenemos

$$\text{tr}\tilde{T} = \lambda(\text{tr}\tilde{E})\text{tr}\tilde{I} + 2\mu\text{tr}\tilde{E}$$

donde la traza de  $I$  es igual al escalar 3 y obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}\text{tr}\tilde{T} &= 3\lambda(\text{tr}\tilde{E}) + 2\mu\text{tr}\tilde{E} \\ &= (3\lambda + 2\mu)\text{tr}\tilde{E}\end{aligned}$$

de esta última ecuación despejamos

$$\text{tr}\tilde{E} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\text{tr}\tilde{T}$$

ahora sustituimos la traza de  $\tilde{E}$  en la ecuación del esfuerzo y tenemos el siguiente desarrollo

$$\tilde{T} = \lambda\left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu}\text{tr}\tilde{T}\right)\tilde{I} + 2\mu\tilde{E}$$

$$2\mu\tilde{E} = \tilde{T} - \lambda\left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu}\text{tr}\tilde{T}\right)\tilde{I}$$

de la ecuación anterior despejamos a  $\tilde{E}$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2\mu}\left[\tilde{T} - \lambda\left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu}\text{tr}\tilde{T}\right)\tilde{I}\right]$$

donde el tensor de esfuerzos está dado con las siguientes componentes

$$T_{11} = \sigma$$

y

$$\begin{aligned}
 T_{22} &= T_{33} \\
 &= T_{13} \\
 &= T_{23} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

por lo tanto la matriz queda de la siguiente forma

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la traza del tensor de esfuerzos es

$$tr \hat{T} = \sigma$$

El siguiente paso es sustituir el valor de los tensores en la ecuación para  $\tilde{E}$

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} &= \frac{1}{2\mu} \left( \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\sigma\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{2\mu} \left( \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

sustituimos el tensor de deformación y realizamos las operaciones

$$\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \sigma - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

donde  $\gamma = \frac{\sigma\lambda}{3\lambda+2\mu}$ .

Igualando las componentes a cada valor correspondiente obtenemos

$$E_{11} = \frac{1}{2\mu}(\sigma - \gamma)$$

$$E_{22} = E_{33}$$

$$= \frac{1}{2\mu}\gamma$$

$$E_{12} = E_{13}$$

$$= E_{21}$$

$$= E_{23}$$

$$= E_{31}$$

$$= E_{32}$$

$$= 0$$

donde  $\frac{\sigma}{\epsilon_x} = \frac{T_{11}}{E_{11}} = E_y$ , que es el módulo de Young, sustituimos los valores de las componentes y obtenemos

$$E_y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

y donde  $\frac{E_{22}}{E_{11}} = \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ , por lo tanto las componentes de la diagonal principal quedan

$$E_{11} = \frac{\sigma}{E_y}$$

$$E_{22} = \nu \frac{\sigma}{E_y}$$

$$E_{33} = \nu \frac{\sigma}{E_y}$$

si colocamos las componentes del tensor de deformación  $\tilde{E}$  y considerando únicamente a la parte simétrica, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{E_y} & 0 & 0 \\ 0 & \nu \frac{\sigma}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \nu \frac{\sigma}{E_y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\nabla \tilde{U} + \nabla \tilde{U}^T)$$

donde  $\tilde{U}$  describe el movimiento en un medio elástico debido a la ecuación de movimiento gobernante (descrita anteriormente).

Ahora sustituimos los tensores por sus componentes

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{E_y} & 0 & 0 \\ 0 & \nu \frac{\sigma}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \nu \frac{\sigma}{E_y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x} & \frac{\partial U_1}{\partial y} & \frac{\partial U_1}{\partial z} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} & \frac{\partial U_2}{\partial y} & \frac{\partial U_2}{\partial z} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x} & \frac{\partial U_3}{\partial y} & \frac{\partial U_3}{\partial z} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x} & \frac{\partial U_2}{\partial x} & \frac{\partial U_3}{\partial x} \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} & \frac{\partial U_2}{\partial y} & \frac{\partial U_3}{\partial y} \\ \frac{\partial U_1}{\partial z} & \frac{\partial U_2}{\partial z} & \frac{\partial U_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

e igualando las componentes obtenemos las nueve ecuaciones a resolver

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{E_y} &= \frac{\partial U_2}{\partial x} \\ \nu \frac{\sigma}{E_y} &= \frac{\partial U_2}{\partial y} \\ &= \frac{\partial U_3}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} \\ &= \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial x} \\ &= \frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial y} \\ &= \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \\ &= \frac{\partial U_3}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \\ &= \frac{\partial U_3}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial z} \end{aligned}$$

resolviendo las ecuaciones tenemos las siguientes soluciones

$$U_1 = \frac{\sigma x}{E_y} + c_1$$

$$U_2 = \nu \frac{\sigma y}{E_y} + c_2$$

$$U_3 = \nu \frac{\sigma z}{E_y} + c_3$$

encontramos el valor de las constantes por medio de la siguiente condición:

$$U(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

de aquí encontramos que  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ , por tanto el vector del campo de desplazamientos queda de la forma

$$U(x, y, z) = \left( \frac{\sigma x}{E_y}, \nu \frac{\sigma y}{E_y}, \nu \frac{\sigma z}{E_y} \right).$$

Si consideramos a las coordenadas iniciales como  $U(X, 0, 0)$  donde  $X$  representa la longitud de los especímenes a ensayar, entonces mostramos que

$$\| U(X, 0, 0) \| = \left\| \left( \frac{\sigma X}{E_y}, 0, 0 \right) \right\|$$

lo cual nos representa físicamente el cambio de longitud con respecto a la dirección  $X$ . Por consecuencia obtenemos la siguiente representación

$$\left\| \left( \frac{\sigma X}{E_y} \right) \right\| = \Delta l$$

donde  $\| U(X, 0, 0) \| = \frac{\sigma X}{E_y}$ , en conclusión obtenemos que

$$\Delta l = \frac{Pl}{A_0 E_y}$$

donde  $P$  representa la carga,  $l$  la longitud de los especímenes,  $A_0$  el área inicial de contacto y  $E_y$  la propiedad buscada en este trabajo. De la misma forma

encontramos que

$$\Delta d = \nu \frac{Pd}{A_0 E_y}$$

donde  $d$  es el diámetro inicial,  $\nu$  es la segunda propiedad buscada y  $E_y$  es el módulo de Young reportado en la literatura.



## CAPÍTULO VII

### Experimentación

El objetivo principal de la experimentación es obtener dos de las tres constantes de los materiales, a partir del campo de desplazamientos.

Como se dijo anteriormente, para materiales isotrópicos y homogéneos, el valor del módulo de Young y el coeficiente o relación de Poisson no dependen de las dimensiones del espécimen, así que se tomó un material con estas características y se mostrará que ni las dimensiones, ni las direcciones del corte sobre las barras cilíndricas influyen en los resultados.

Para el experimento se tomará un acero inoxidable 316 con un diámetro de media pulgada y variando la relación  $H/D$  (altura/diámetro) desde 1 hasta 2.5, con máxima fricción entre las muestras y las placas compresivas, ya que el modelo propuesto trabaja bajo la condición de que las superficies planas de las muestras no sufren deformación a cualquier tiempo; esto se logra sometiendo a un acabado superficial producido por una lija 60 al igual que las placas entre las cuales se efectúa la compresión.

Las probetas serán sometidas a la acción de cargas compresivas y las mediciones que realizaremos serán el cambio de longitud ( $\Delta l$ ) y el cambio del diámetro ( $\Delta d$ )

con los que obtendremos, a partir del campo de desplazamientos, las constantes buscadas para validar el modelo propuesto.

El modelo lo estaremos validando al confrontar los valores numéricos de las constantes elásticas mencionadas obtenidas con el campo de desplazamientos con los valores reportados en la literatura y con los valores obtenidos de la curva esfuerzo-deformación experimental.

Como primer paso utilizaremos especímenes cilíndricos con un diámetro de 0.5 pulgadas. Los ensayos se realizarán con relaciones de  $H/D=1.0, 1.5, 2.0$  y  $2.5$ , por tanto las alturas de cada espécimen fueron de 0.5, 0.75, 1.0 y 1.25 pulgadas respectivamente.

El segundo paso es realizar compresiones preliminares de cilindros de las dimensiones mencionadas con el fin de determinar las regiones elástica y plástica del material.

Como en este trabajo nos interesa el valor del límite elástico, se utilizan valores de carga dentro de la zona lineal, en la cual se pretende que el modelo funcione, ya que las ecuaciones empleadas son válidas en esta zona. La carga seleccionada estuvo en el rango de 18.50kN-18.70kN. Experimentando con 3 muestras para cada  $H/D$ .

**OBSERVACIÓN 3.** La carga seleccionada fue determinada con las gráficas carga-desplazamiento obtenidas experimentalmente.

Como tercer paso, se procede a realizar el ensayo de compresión a cada una de las muestras de las diferentes relaciones  $H/D$ . En total se ensayaron 12 muestras. Las pruebas se efectuaron en una máquina universal MTS modelo 810 con una

velocidad de desplazamiento de cabezal de  $5 \frac{mm}{min}$ .

## CAPÍTULO VIII

### Resultados y Análisis

Como ejemplo de los cálculos efectuados a todas las curvas carga-deformación obtenidas experimentalmente presentamos la primera relación de  $H/D=1.0$ , en un punto seleccionado obtenemos mediciones de  $\Delta l = 9.3306 * 10^{-3}mm$  y de  $\Delta d = 2.9549 * 10^{-3}mm$ , donde la forma de obtener los resultados anteriores es de la siguiente forma

En principio tomamos los valores de carga y  $\Delta l_{experimental}$  de la gráfica realizada por la máquina de ensayos que se muestra en la pagina siguiente y obtenemos la tabla.

$P_{exp}(kN)$	$\Delta l_{exp}(mm)$
6.2078	$5.0435 * 10^{-2}$
12.4156	0.1009
18.6234	0.1513
24.8312	0.2017
31.0390	0.2522
37.2468	0.3026



Si obtenemos las curvas esfuerzo-deformación a partir de los datos experimentales (gráfica 3), se aprecia una variación en la pendiente, lo cual nos indicaría que el módulo de Young es función de la geometría de la probeta, que es contradictorio a las premisas establecidas en el capítulo I.

**OBSERVACIÓN 4.** Sin embargo es necesario considerar la influencia de la rigidez del sistema de compresión. La deformación leída de la gráfica original, obtenida directamente de la máquina en el ensayo de compresión, tuvo que ser corregida tomando en cuenta lo anterior.

Para la mayoría de los materiales, ensayados tanto en tracción como en compresión, el cambio del desplazamiento del cabezal es igual a la suma de los desplazamientos elástico y plástico de la muestra y el desplazamiento elástico del sistema (mordazas, máquina, etc.), matemáticamente se puede escribir como:

$$\epsilon_c = \epsilon_e + \epsilon_p + \epsilon_m$$

donde  $\epsilon_c$  representa el desplazamiento del cabezal,  $\epsilon_e$  el desplazamiento elástico de la muestra,  $\epsilon_p$  el desplazamiento plástico de la muestra y  $\epsilon_m$  el desplazamiento elástico del sistema de la máquina. La relación entre el esfuerzo aplicado y la deformación elástica que sufre el sistema de prueba se conoce como la rigidez del sistema,  $K$ , y está definida como:

$$K = \left[ \frac{S}{A_0 \delta} - \frac{L_0}{A_0 E} \right]^{-1}$$

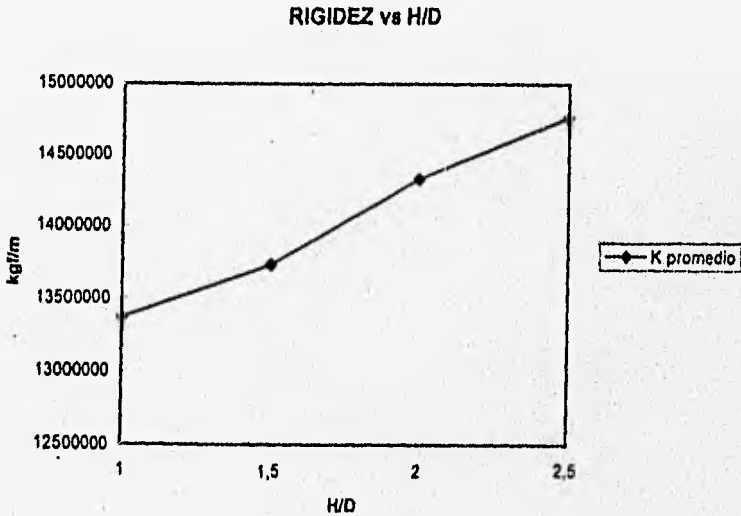
donde la rigidez esta en términos de cantidades medibles. La rapidez de carga esta expresada como  $\frac{S}{A_0 \delta} = dF/dT$ ,  $S$  es la rapidez del desplazamiento del cabezal, la dimensión del espécimen ( $A_0$  y  $L_0$ ) y el módulo de elasticidad de

la muestra son cantidades que se pueden calcular o investigar.

En la última ecuación, el valor del módulo de Young puede obtenerse de los resultados reportados en la literatura cuando el material es conocido. Para determinaciones experimentales de este módulo, la deformación real en el espécimen debe medirse con un extensómetro o con galgas de deformación (strain gages, ref. 7); en el inicio del ensayo donde el porcentaje de deformación plástica es cero ( $\epsilon_p = 0$ ), si el desplazamiento del cabezal se iguala al de la muestra el aparente módulo de elasticidad será muy pequeño por un factor de  $(1 + \frac{A_0 E}{K L_0})$ .

En la gráfica 2 se muestra el valor de la rigidez promedio de la máquina  $K$  en función de la relación  $H/D$  de las muestras.

Gráfica 2



Lo cual es evidente por la definición de  $K$ . Para obtener el valor de  $K$  en un punto dado consideramos la rapidez del desplazamiento del cabezal de  $\frac{5 \text{ mm}}{\text{min}} = 8.3333 \times 10^{-2} \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  usado experimentalmente. En un punto seleccionado en  $\Delta l_{exp} = 0.1513 \text{ mm}$  y  $P_1 = 18.6234 \text{ kN}$  tenemos el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
 A_0 \dot{s} &= \frac{\Delta P}{\Delta t} \\
 &= \frac{P_1 - P_0}{t_1 - t_0} \\
 &= \frac{18.6234 \text{ kN} - 0}{\frac{\Delta l_{exp}}{s} - 0} \\
 &= \frac{18.6234 \text{ kN} - 0}{\frac{0.1513 \text{ mm}}{8.3333 \times 10^{-2} \frac{\text{mm}}{\text{s}}} - 0} \\
 &= 10.2574 \frac{\text{kN}}{\text{s}} \\
 &= 1045.2285 \frac{\text{kg}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

ademas  $E$  es el valor del módulo de Young reportado en la literatura y es igual a  $29 \times 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$  o  $199.965 \text{ GPa}$  y  $l_0 = 0.0127 \text{ m}$  la longitud inicial del espécimen antes de efectuar cada compresión,  $A_0$  el area inicial de la muestra, sustituyendo en la ecuación para  $K$  obtenemos el valor de rigidez de la máquina de ensayos en el punto seleccionado. De la misma forma encontramos el valor de la rigidez en diferentes puntos de la zona elástica de la curva carga-desplazamiento, en la



tabla se muestran los valores obtenidos.

$$K \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right)$$

133366670.62

133362435.28

13367141.38

13369495.67

13365258.54

13367141.38

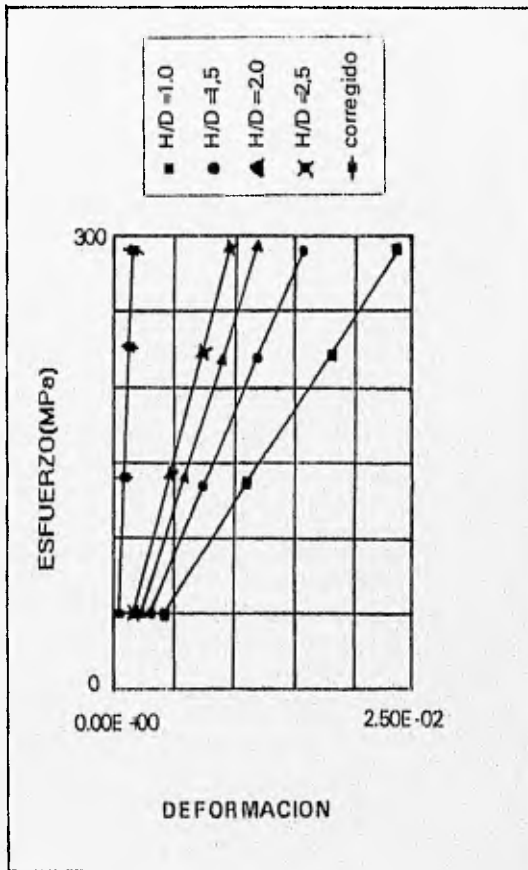
de acuerdo con la ref. 7, la corrección que se debe efectuar en la zona elástica debido a la rigidez de la máquina de prueba esta dada por  $\Delta l_{real} = \Delta l_{exp} - \frac{P}{K}$  y con esta ecuación obtenemos los desplazamientos reales, también se muestran los valores de esfuerzo y deformación ingenieril en la tabla siguiente.

$\Delta l_{real}(mm)$	$\epsilon$	$\sigma(MPa)$
$3.1102 * 10^{-3}$	$2.4490 * 10^{-4}$	49.0049
$6.2204 * 10^{-3}$	$4.8980 * 10^{-4}$	98.0099
$9.3306 * 10^{-3}$	$7.3469 * 10^{-4}$	147.0149
$1.2441 * 10^{-2}$	$9.7961 * 10^{-4}$	196.0199
$1.5555 * 10^{-2}$	$1.2245 * 10^{-3}$	245.0249
0.0187	$1.4724 * 10^{-3}$	294.0299

ya teniendo los valores de  $\sigma$  y  $\epsilon$  de todas las muestras deformadas se construye la gráfica 3.

Gráfica 3

## ESFUERZO-DEFORMACION



OBSERVACIÓN 5. En la gráfica anterior tenemos los comportamientos esfuerzo-deformación corregidos y experimentales, en estos últimos observamos que la pendiente cambia considerablemente. Mientras que con los datos de deformación corregidos se obtiene una misma pendiente para los cuatro casos. Nótese que el valor del esfuerzo se mantiene, por lo que se concluye que la rigidez influye únicamente en la deformación.

La pendiente de la gráfica que representa el valor de módulo de Young experimental es de  $199.7462\text{GPa}$ .

Trabajando con la norma del vector del campo de desplazamientos obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \|U(x, 0, 0)\| &= \Delta l_{real} \\ &= \frac{l_0 \sigma}{E_y} \end{aligned}$$

de la ecuación anterior despejamos el módulo de Young y encontramos el valor de la constante buscada con respecto a la carga de trabajo con un  $\Delta l_{real} = 9.3306 * 10^{-3}\text{mm}$

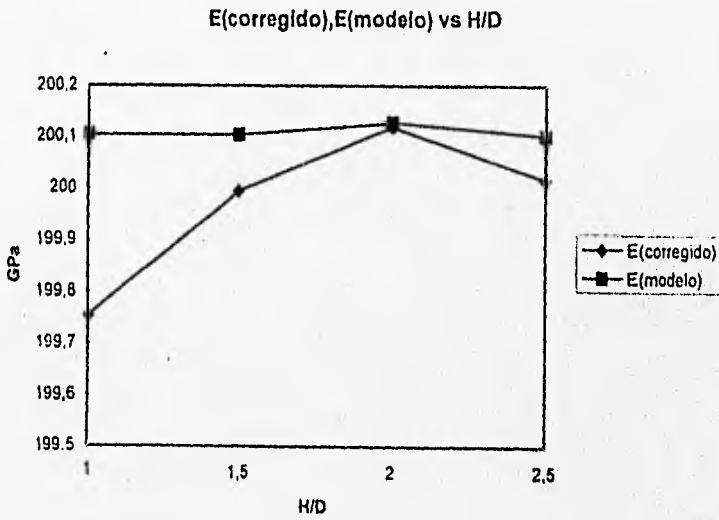
$$E_y = \frac{12.7\text{mm} * 147.0149\text{MPa}}{9.3306 * 10^{-3}\text{mm}} = 200.1038\text{GPa}$$

En la gráfica 4 se muestran los valores del módulo de Young obtenidos por la pendiente de las gráficas esfuerzo-deformación corregidas y los módulos obtenidos por el modelo donde la máxima diferencia es de  $0.3526\text{GPa}$  que nos representa un porcentaje de  $0.17$ .

OBSERVACIÓN 6. Los valores obtenidos del módulo de Young dados por la norma del campo de desplazamientos son respaldados con la corrección hecha a

la gráfica dada por la máquina de ensayos y con los reportados en la literatura.

Gráfica 4



De igual manera, tomando la norma del vector campo de desplazamientos en el punto  $U(0, y, 0)$  encontramos que el coeficiente de Poisson,  $\nu$  esta dado por

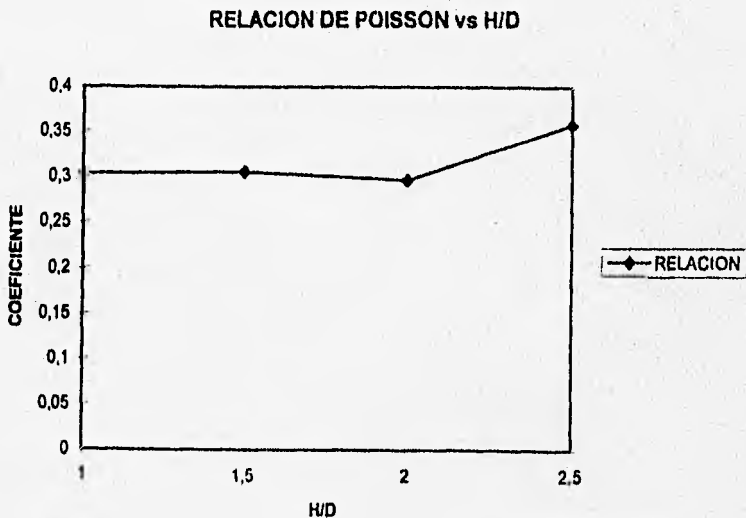
$$\nu = \frac{\Delta d E}{\sigma d_0}$$

donde  $\Delta d = 2.9550 \cdot 10^{-3} \text{mm}$  medido experimentalmente, con  $E$  el módulo de Young reportado en la literatura,  $\sigma$  el esfuerzo relacionado al último valor de  $P$  reportado por la máquina de ensayos y  $d_0$  el diámetro original, sustituyendo los valores correspondientes encontramos que

$$\nu = \frac{2.9550 \cdot 10^{-3} \text{mm} \cdot 199964.6959 \text{MPa}}{153.1534 \text{MPa} \cdot 12.7 \text{mm}} = 0.3038$$

de la misma forma que para  $H/D = 1.0$  podemos encontrar los resultados de las otras relaciones y obtenemos la gráfica 5.

Gráfica 5



El coeficiente o relación de Poisson reportado en la literatura es de 0.30, en la gráfica 13 se observa este valor para las tres primeras relaciones  $H/D$  y existe una desviación en el último valor que se debe a que el espécimen no permaneció completamente vertical al momento del ensayo de compresión. Ahora mostramos la tabla final de resultados donde estableceremos el análisis final de los mismos.

$H/D$	$E_{exp}(GPa)$	$E_y(GPa)$	$\nu$
1.0	199.7512	200.1038	0.3038
1.5	199.9923	200.1036	0.3060
2.0	200.1176	200.1260	0.2971
2.5	200.0145	200.1002	0.3583

como podemos observar en la tabla final de resultados los valores experimentales y los obtenidos a partir del modelo son muy similares y concuerdan con los reportados en la literatura, con lo que se valida el modelo.

## CAPTULO IX

### Conclusiones

Los módulos de Young obtenidos con el modelo propuesto y con las pendientes de las curvas esfuerzo-deformación corregidas son muy aproximados al valor reportado en la literatura.

Los valores del coeficiente de Poisson obtenidos con el modelo son precisos con respecto al valor reportado.

En general, el modelo se valida con la semejanza entre los resultados obtenidos y los reportados en la literatura.

El modelo propuesto, en su estructuración nos da la posibilidad de obtener resultados confiables. Se espera que funcione para condiciones diferentes de carga y geometría siempre y cuando estemos en el rango elástico.

## I. Apéndice

## Apéndice I

## FUNCIONES ISOTROPICAS

Sea  $G \subset Orth$ . Un conjunto  $A \subset Lin$  son invariantes bajo  $G$  si  $QBQ^T \in A$  cuando  $B \in A$  y  $Q \in G$ .

PROPOSICIÓN IX.1.1. *Los siguientes conjuntos son invariantes bajo  $Orth$ :*

$$Lin, Lin^+, Orth, Orth^+, Sym, Skw, Psym$$

donde  $Lin^+$  representa el conjunto de todos los tensores  $S$  con  $detS > 0$ ,  $Orth^+$  es el conjunto de todas las rotaciones,  $Psym$  es el conjunto de todos los simétricos y tensores definidos positivos. Los conjuntos  $Lin^+$  y  $Orth^+$  son grupos bajo multiplicación, en realidad,  $Orth^+$  es un sub-grupo de  $Lin^+$ , y  $Orth^+$  es un grupo rotación (propiedades ortogonales de grupo).

## Apéndice II

## PRODUCTO TENSORIAL.

El producto tensorial  $a \otimes b$  de dos vectores  $a$  y  $b$  es el tensor que asigna a cada vector  $v$  el vector  $(b \cdot v)a$ :

$$(a \otimes b)v = (b \cdot v)a$$



entonces

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}),$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d},$$

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j; \\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

$$\sum_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = I$$

Sea  $\mathbf{e}$  un vector unitario, entonces aplicamos para  $\mathbf{a}$  el  $\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$  para el vector  $\mathbf{v}$ , entonces tenemos que

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$$

la expresión anterior es la proyección de  $\mathbf{v}$  en la dirección de  $\mathbf{e}$ , donde  $I - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$  se aplica a  $\mathbf{v}$  dando

$$\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}.$$

### Apéndice III

#### TEOREMA DE DESCOMPOSICION POLAR

Sea  $F \in Lin^+$ , entonces en estos existen definidos positivos, tensores simétricos  $U, V$  y una rotación  $R$  tal que  $F = RU = VR$ , cada una de estas descomposiciones son únicas, en realidad

$$U = (F^T F)^{\frac{1}{2}}, \quad V = (F F^T)^{\frac{1}{2}}$$

llamamos la representación  $F = RU$  ( $F = VR$  el izquierdo) el derecho como la descomposición polar de  $F$ .

entonces

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T &= (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}), \\ (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}, \\ (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) &= \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j; \\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i & \text{si } i = j. \end{cases} \\ \sum_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

Sea  $\mathbf{e}$  un vector unitario, entonces aplicamos para  $\mathbf{a}$  el  $\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$  para el vector  $\mathbf{v}$ , entonces tenemos que

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$$

la expresión anterior es la proyección de  $\mathbf{v}$  en la dirección de  $\mathbf{e}$ , donde  $\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$  se aplica a  $\mathbf{v}$  dando

$$\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}.$$

### Apéndice III

#### TEOREMA DE DESCOMPOSICION POLAR

Sea  $F \in \text{Lin}^+$ , entonces en estos existen definidos positivos, tensores simétricos  $U, V$  y una rotación  $R$  tal que  $F = RU = VR$ , cada una de estas descomposiciones son únicas, en realidad

$$U = (F^T F)^{\frac{1}{2}}, \quad V = (F F^T)^{\frac{1}{2}}$$

llamamos la representación  $F = RU$  ( $F = VR$  el izquierdo) el derecho como la descomposición polar de  $F$ .

## Apéndice IV

## FUNCIONES ESCALARES ISOTROPICAS

Una función

$$\varphi : A \rightarrow \mathbb{R} \quad (A \subset \text{Sym})$$

es isotrópico si y solo si existe una función  $\tilde{\varphi} : J(A) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\varphi(B) = \tilde{\varphi}(J_B)$$

para cada  $B \in A$ .

## Apéndice V

## DELTA DE KRONECKER

Una base para  $V$ ;  $\{v_1, v_2, v_3\}$  se llama ortogonal si  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2, 3$

y  $\delta_{ij}$  es llamada la función delta de Kronecker y esta dada por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j; \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

## Apéndice VI

## MODULO DE CORTE

Definimos el módulo de corte como la relación de los esfuerzos cortantes y esta

dada por

$$\mu \equiv \frac{T_{12}}{2E_{12}}$$

## I. APÉNDICE

## Apéndice VII

## CONSTANTES DE LAME

$$\mu \equiv \frac{T_{12}}{2E_{12}}$$

$$\lambda = \frac{\nu E_y}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

## Apéndice VIII

## PRODUCTO INTERNO

El producto  $ST$  de tensores se define como

$$ST = S \circ T$$

y por un escalar como

$$(ST)v = S(Tv)$$

$\forall v \in \mathbb{R}^3$ , y usando la notación estandar tenemos que

$$S^2 = SS$$

generalmente,  $ST \neq TS$ , y  $ST = TS$  si  $S$  y  $T$  son conmutables.

## Bibliografia

- [1] Morton E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, 3ra ed. N. Y., N. Y.: 1981.
- [2] Truesdell C., and R. Toupin, *The classical field theories Handbooch der Physik III / 1*, Ed. S. Flugge. Berlin: Springer-Verlag.: 1960.
- [3] W. Michael Lai, David Rubin and Erhard K., *Introduction to Continuum Mechanics. Division of Mechanics, Rauselaer Polytechnic Institute.:* 1974.
- [4] Lawrence E. Malvern (Professor of Mechanics), *Introduction to the Mechanics of a Continous Medium*, Ed. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.: 1969.
- [5] Martin A. Eisenberg, *Introduction to the Mechanics of Solids*, University of Florida, Ed. Addison-Wesley Publishing Company.: 1980.
- [6] Timoshenko S. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, Ed. McGraw-Hill, 3ra ed. N. Y.: 1970.
- [7] *Metals Handbook*, Ninth Edition, Vol. 8, *Mechanical Testing*, Prepared under the direction of the ASM Handbook Committee.
- [8] Robert W. Fitzgerald, *Mechanics of Materials*, second ed., Worcester Polytechnic Institute, Alfaomega.: 1990.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

... para Ma. Elena R.