31
2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

VNIVERSDAD NACIONAL AVPNºMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS CON HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL PARA SERIES DE TIEMPO UNIVARIADAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTAN:

JOSÉ LUIS THIERRY SALAS

Y

JOSÉ FRANCISCO CÁRDENAS GONZÁLEZ

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

MODELOS CON HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL PARA SERIES DE TIEMPO UNIVARIADAS

realizado por JOSE LUIS THIERRY SALAS Y
JOSE FRANCISCO CARDENAS GONZALEZ

con número de cuenta 8033023-3 y 8140493-3, pasante de la carrera de MATEMATICO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. VICTOR MANUEL GUERRERO GUZMAN	
Propietario	MAT. MARGARITA ELVIRA CHAVEZ CANO	
Propietario	DR. JOSE RODOLFO MENDOZA BLANCO	José Rodolfo Mendoza Blanco
Suplente	M. en C. JUAN GONZALEZ HERNANDEZ	Juan González Hernández
Suplente	M. en E. e I. de O. ALEJANDRO ALEGRIA HERNANDEZ	Alejandro Alegría

Consejo Departamental de Matemáticas
M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

A nuestros padres.

A nuestros profesores.

PRÓLOGO

Al realizar nuestro servicio social, tuvimos la oportunidad de familiarizarnos con la teoría de series de tiempo, y la construcción de modelos ARIMA. Posteriormente, elegimos el tema de esta tesis por ser un trabajo recientemente presentado y por sus amplias perspectivas de aplicación, en especial a las finanzas.

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a todas las personas que nos apoyaron durante la realización de esta tesis. De manera especial queremos agradecer al Dr. Víctor Manuel Guerrero Guzmán por su valiosa asesoría al dirigir este trabajo, así como a los sinodales Mat. Margarita Elvira Chávez Cano, Dr. José Rodolfo Mendoza Blanco, M. en C. Juan González Hernández y M. en E. e I. de O. Alejandro Alegría Hernández por sus comentarios y sugerencias. Si hay algún error, la responsabilidad es sólo nuestra.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está estructurado de tal manera que cualquier estudiante con los conocimientos básicos de Estadística pueda comprender el problema que se plantea y las soluciones que se han dado para resolverlo.

El propósito del presente trabajo es presentar modelos que permiten que la varianza condicional de una serie sea no constante, lo cual es útil ya que al usar los modelos tradicionales —como son los modelos de regresión o los modelos ARMA (autorregresivos y de promedios móviles) por ejemplo— para modelar series heteroscedásticas (con varianza no constante), el supuesto de homoscedasticidad impuesto por estos modelos impide extraer información aún contenida en los datos.

Primeramente se presenta un resumen de modelos lineales de regresión y de los modelos lineales enfocados a series de tiempo, es decir, modelos ARMA para series de tiempo univariadas y la metodología de Box-Jenkins para construirlos; y además, se explica en qué consiste el problema de varianza condicional no constante en modelos lineales.

Posteriormente se presentan los principales modelos que permiten heteroscedasticidad, de acuerdo al modelo para el valor medio de la serie. En el segundo capítulo se exponen algunos de los primeros intentos para resolver el problema de varianza condicional no constante, lo cual conduce a hablar de los modelos ARCH (introducidos por Engle (1982)), los modelos GARCH, modelos ARCH generalizados (Bollerslev (1986)), y los modelos ARCH-M, o sea, modelos ARCH en media (Engle, Lilien y Robins (1987)). En el tercer capítulo se presentan los modelos de series de tiempo con heteroscedasticidad condicional, estos son, modelos ARMA-ARCH, ARMA-GARCH, ARMA-GARCH en media, y ARMA-EGARCH en media.

En el cuarto capítulo se hacen algunas aplicaciones prácticas con el fin de ilustrar la metodología de construcción de los modelos GARCH. Las estimaciones se efectuaron mediante el uso del paquete estadístico RATS (Regression Analysis of Time Series) versión 4.0, el cual se eligió por ser uno de los más completos y porque, de los paquetes disponibles, es el único que permite estimar explícitamente los modelos a los que se refiere este trabajo. Finalmente, en el quinto capítulo se concluye y se sugieren trabajos futuros de investigación.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES Y MODELOS TRADICIONALES

La Econometría no sólo se encarga de la elaboración de estadísticas descriptivas, sino que utiliza los datos para estimar relaciones entre variables y para hacer inferencia estadística. Originalmente, surgió como una rama de la Economía cuyo objetivo era la estimación práctica de las relaciones económicas. Posteriormente se difundió la aplicación de estas técnicas en otras áreas como son la Psicología, la Sociología, la Demografía, etc.

El aspecto esencial en la Econometría es la construcción de modelos que representen apropiadamente el fenómeno en estudio. Esto se lleva a cabo a través del uso de técnicas estadísticas, con el fin de realizar un análisis estructural o un pronóstico. Por un modelo se entiende una representación simplificada del fenómeno en estudio, la cual se utiliza para explicar o predecir tal fenómeno.

Una característica importante en los modelos econométricos es que están formados por una parte determinista y por otra estocástica, las cuales son ponderadas a través del uso de parámetros desconocidos, usualmente fijos, que se incluyen en el modelo.

La parte determinista está formada por variables que pueden ser endógenas o exógenas. Los valores de las variables endógenas están determinados dentro del mismo modelo, por lo que se dice que los modelos son explicativos, y los valores de las variables exógenas son obtenidos fuera del modelo, pero influyen en él, éstos pueden ser datos históricos o valores determinados por algún otro mecanismo ajeno al modelo.

La parte estocástica está constituida por variables aleatorias (errores) que comúnmente se suponen aditivas y que se incluyen para terminar de explicar a las variables endógenas. La información que conllevan los términos de error representa la no explicada por el modelo, pero que afecta el comportamiento de las variables endógenas.

Los parámetros del modelo son coeficientes desconocidos, generalmente constantes, que multiplican a las variables del modelo con el fin de ponderarlas, para así obtener la representación buscada del fenómeno en estudio (estadísticamente hablando).

Para determinar el modelo que represente apropiadamente a la variable en estudio es necesario primeramente elegir la forma del modelo mediante un análisis preliminar de los datos. A esto se le llama identificación. Posteriormente se procede a aplicar las técnicas econométricas correspondientes, lo cual significa, en forma muy general, combinar la información de las variables endógenas con la de las variables exógenas (y/o endógenas retrasadas), para obtener la estimación de los parámetros del modelo.

Los modelos econométricos pueden ser lineales o no lineales, donde la linealidad es sobre los parámetros del modelo. Comúnmente se trabaja con modelos lineales, puesto que esta suposición permite aplicar una gran variedad de resultados estadísticos ya establecidos, los cuales proveen la herramienta necesaria para la construcción, elaboración y aplicación de tales modelos en la vida real. Por otra parte, se ha observado que muchas relaciones económicas son por su misma naturaleza lineales y una última razón, es que en muchos casos en que la relación no es lineal, se puede transformar en lineal aplicando alguna transformación linealizante, como por ejemplo la transformación logarítmica.

El modelo econométrico lineal con una variable endógena y m variables exógenas, comúnmente conocido como modelo de regresión lineal múltiple, se presenta en la Sección 1.1.

Por otra parte, un modelo econométrico pueden ser estático o dinámico. En un modelo estático, el papel de las variables involucradas no cambia a lo largo del tiempo, lo cual no sucede en un modelo dinámico. En este caso, el ser dinámico no implica necesariamente que los parámetros del modelo cambien a lo largo del tiempo, más bien se refiere al papel dinámico de las variables endógenas, como por ejemplo, si el modelo incluye variables endógenas retrasadas como variables explicativas (véase Intriligator (1978)). Esto conduce a hablar de las series de tiempo. En la Sección 1.2 se ven los conceptos básicos sobre las series de tiempo, los modelos ARMA y su metodología de construcción.

Finalmente, en la Sección 1.3 se menciona el problema de varianza condicional no constante, el cual constituye el fundamento del presente trabajo.

1.1. MODELOS DE REGRESIÓN.

Una de las principales aplicaciones de la estadística inferencial es el hecho de estimar la relación existente entre dos variables, por ejemplo, el costo de mantenimiento (y) de un automóvil por año está relacionado con su antigüedad (x); el peso de un individuo (y) está relacionado con su edad (x), etc.; en otras palabras, es de gran utilidad poder estimar de qué manera el comportamiento de una variable x afecta el comportamiento de la variable y, puesto que basados en esa estimación se pueden realizar pronósticos de la variable y.

La herramienta estadística que se utiliza comúnmente para realizar este tipo de inferencias es el modelo de regresión, el cual permite estimar la relación entre una variable y y una variable x, que cambia independientemente, dada una muestra de T valores de y con sus valores asociados de x. Teóricamente, la relación entre y y x puede ser cualquier función, aunque aquí sólo se hablará de la relación lineal.

Al decir que existe una relación entre la variable aleatoria y y la variable x, se está suponiendo que cualquier valor de la variable independiente x, tiene asociado una variable aleatoria y, con una función de densidad de probabilidad $f(y|x)$. En el modelo de regresión se supone que el valor esperado de la variable y, dado x, está dado por la relación

$$E[y|x] = b_1 + b_2x.$$

Las constantes b_1 y b_2 son desconocidas y se deben estimar a partir de una muestra de valores de y, así como de sus valores asociados x.

En general, la forma de un modelo econométrico lineal con m variables exógenas $x_1, x_2, \dots, x_m$, comúnmente conocido como regresión lineal múltiple, es la siguiente

$$y_t = b_1x_{1t} + \dots + b_mx_{mt} + \varepsilon_t = \sum_{i=1}^{m} b_ix_{it} + \varepsilon_t$$

donde b_i son los coeficientes de las variables exógenas, con $i = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, T$ (T es el tamaño de la muestra) y ε_t es un error aleatorio. Usando la siguiente notación matricial:

$$y_{T\times 1} = (y_1, \dots, y_T)'$$

$$\boldsymbol{b}_{m\times 1} = (b_1,\ldots,b_m)'$$

$$X_{T\times m} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{m1} \\ x_{12} & \cdots & x_{m2} \\ & \cdots & \\ x_{1T} & \cdots & x_{mT} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{T\times 1} = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_T)'$$

el modelo queda expresado como

$$y = X\boldsymbol{b} + \varepsilon. \qquad (1.1.1)$$

Además deben cumplirse los siguientes supuestos:

$E(\varepsilon_t) = 0, \forall\, t,$

$$E(\varepsilon_{t_1}\varepsilon_{t_2}) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } t_1 = t_2 \\ 0, & \text{si } t_1 \neq t_2 \end{cases} \quad \forall\, t_1 \text{ y } t_2.$$

La matriz X es de rango completo.

Para estimar estos parámetros puede utilizarse el método de mínimos cuadrados, el cual dice que el valor estimado de los parámetros es aquél que minimiza la suma de cuadrados de los residuales, es decir, sea $\hat{\varepsilon} = \boldsymbol{y} - X\hat{\boldsymbol{b}}$ el vector de residuales, con $\hat{\boldsymbol{b}}$ el vector de parámetros estimados, entonces la suma de cuadrados de los residuales está dada por

$$\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \boldsymbol{x}_t'\hat{\boldsymbol{b}})^2 = \left\|\boldsymbol{y} - X\hat{\boldsymbol{b}}\right\|^2, \quad \text{con } \boldsymbol{x}_t = (x_{1t},\ldots,x_{mt})'$$

$$= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\hat{\boldsymbol{b}}'X'\boldsymbol{y} + \hat{\boldsymbol{b}}'X'X\hat{\boldsymbol{b}} = S$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial S}{\partial \hat{\boldsymbol{b}}} = -2X'\boldsymbol{y} + 2X'X\hat{\boldsymbol{b}} = 0. \qquad (1.1.2)$$

Por otra parte, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial\hat{\boldsymbol{b}}'\partial\hat{\boldsymbol{b}}} = 2X'X$, la cual es una matriz definida positiva, por lo que si $\hat{\boldsymbol{b}}$ satisface (1.1.2) será un mínimo. Ahora, dado el supuesto de rango completo de la matriz X, se tiene que la inversa de $X'X$ existe por lo que se tiene explícitamente la expresión del estimador por mínimos cuadrados

$$\hat{\boldsymbol{b}} = (X'X)^{-1}X'\boldsymbol{y}.$$

Por otra parte, bajo los supuestos de que los errores ε_t se distribuyen independientemente como una Normal con media cero y varianza constante σ^2, la estimación por máxima verosimilitud significa maximizar la función de verosimilitud conjunta L, la cual, por la independencia de los errores, está dada por el producto de las verosimilitudes individuales.

$$\therefore \qquad L = (2\pi)^{\frac{-T}{2}} \sigma^{-T} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\hat{b})'(y - X\hat{b}) \right]$$

que es equivalente a maximizar el logaritmo de la misma

$$\ln(L) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - T\ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}(y - X\hat{b})'(y - X\hat{b})$$

y esto es equivalente a minimizar

$$(y - X\hat{b})'(y - X\hat{b})$$

que es la suma de residuales al cuadrado.

Por lo tanto la estimación por mínimos cuadrados es equivalente a la estimación por máxima verosimilitud bajo la suposición de distribución Normal con media cero, varianza constante e independencia de errores.

1.2. MODELOS ARMA Y METODOLOGÍA DE BOX-JENKINS.

En esta sección se mencionan los conceptos básicos para el análisis de las series de tiempo y se describe brevemente la metodología de Box-Jenkins para construir modelos ARMA.

A las observaciones numéricas efectuadas a intervalos de tiempo fijos, de ciertas características o variables, es a lo que se le llama una serie de tiempo.

Para el estudio de las series de tiempo se hace uso de la teoría de procesos estocásticos. Lo que se hace en la práctica es suponer que los datos son generados por algún proceso estocástico y, a partir de los datos observados, se procede entonces a construir un modelo para tal proceso.

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias, asociadas a un conjunto índice de números reales, de tal manera que a cada elemento del conjunto le corresponde una y sólo una variable aleatoria ($\{y(i), i \in S\}$, S = conjunto índice y $y(i)$ la variable aleatoria correspondiente a i). Con base en esto se define a una serie de tiempo como una sucesión de observaciones generadas por un proceso estocástico, cuyo conjunto índice se toma en relación al tiempo (sólo se consideran series de tiempo discretas).

Otra diferencia existente entre el enfoque de regresión y el enfoque de series de tiempo, es que en el primero generalmente se supone que no existe autocorrelación entre las observaciones de la variable, mientras que en el segundo se supone que sí existe autocorrelación y eso es lo que se pretende modelar.

Un concepto esencial para el estudio de series de tiempo es el concepto de estacionariedad. Se dice que una serie de tiempo es estrictamente estacionaria si la función de densidad para cualquier conjunto de variables de las serie es invariante respecto a desplazamientos en el tiempo.

Para fines prácticos, no se trabaja con estacionariedad estricta, sino con estacionariedad de primero o segundo orden.

Se dice que una serie es estacionaria de primer orden si su valor esperado no depende del tiempo, es decir, si

$$E(y_t) = E(y_{t+m}) = \mu, \text{ para toda } t \text{ y } m.$$

Y se dice que una serie tiene estacionariedad de segundo orden si sus momentos primero y segundo no dependen del tiempo, es decir, si:

1) $E(y_t) = E(y_{t+m}) = \mu$, para toda t y m.
2) $Var(y_t) = E\left[(y_t - \mu)^2\right] = E\left[(y_{t+m} - \mu)^2\right] = Var(y_{t+m}) = \gamma_0 < \infty$ para toda t y m.
3) $Cov(y_t, y_{t+i}) = E\left[(y_t - \mu)(y_{t+i} - \mu)\right] = E\left[(y_{t+m} - \mu)(y_{t+m+i} - \mu)\right] = \gamma_i$ para toda t, m e i.

A γ_i se le conoce como la autocovarianza de orden i de la serie $\{y_t\}$. Nótese que la condición 2 indica que la varianza de la serie es invariante en el tiempo.

Cabe hacer notar que si la densidad conjunta es Normal, la estacionariedad de segundo orden implica la estacionariedad estricta, dado que la distribución Normal está plenamente caracterizada por sus primeros dos momentos (Box-Jenkins (1976)).

En los siguientes párrafos se definen los modelos ARMA para series de tiempo univariadas. Es importante definir primero al operador de retraso B como

$$B\, y_t = y_{t-1},$$

mientras que el operador diferencia está dado por

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1}.$$

Por otra parte, se define el polinomio de retraso, el cual tiene la forma general

$$a(B) = I - a_1B^1 - a_2B^2 - \dots - a_rB^r = I - \sum_{i=1}^{r} a_iB^i$$

donde $a_1, \dots, a_r$, son constantes reales e I denota al operador identidad definido por

$$Iy_t = y_t.$$

Asimismo, se define a un polinomio racional $c(B)$ como aquél que satisface la relación $c(B)b(B) = a(B)$, escribiéndose

$$c(B) = \frac{a(B)}{b(B)}$$

con

$$a(B) = I - \sum_{i=1}^{r} a_iB^i \qquad \text{y} \qquad b(B) = I - \sum_{i=1}^{s} b_iB^i$$

polinomios finitos.

Los modelos para series de tiempo univariadas surgen de la suposición de que toda serie de tiempo puede generarse a partir de choques aleatorios $\{\varepsilon_t\}$ independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.), considerados como realizaciones de una variable aleatoria, usualmente con distribución Normal y con media cero, y cuya varianza es σ_ε^2. A esta sucesión de choques aleatorios se le llama ruido blanco.

En otras palabras, se está pensando en un filtro lineal que transforma a $\{\varepsilon_t\}$ en la serie $\{y_t\}$. Con base en esto y en los conceptos anteriores, se definen los modelos autorregresivos (AR) y los modelos de promedios móviles (MA) de la siguiente forma.

Un proceso AR(k), autorregresivo de orden k, está representado por la ecuación

$$(I - \sum_{i=1}^{k} \phi_i B^i)(y_t - \mu) = \varepsilon_t \tag{1.2.1}$$

donde $\phi_1, \dots, \phi_k$ son ponderaciones (parámetros autorregresivos) y μ es el nivel medio de la serie. El modelo puede escribirse equivalentemente como

$$\phi(B)(\tilde{y}_t) = \varepsilon_t, \qquad (1.2.2)$$

con $\phi(B) = I - \sum_{i=1}^{k} \phi_i B^i$ y $\tilde{y}_t = y_t - \mu$. Tal modelo se denomina autorregresivo porque al desarrollar (1.2.2) se obtiene

$$y_t = (1 - \phi_1 - \ldots - \phi_k)\mu + \phi_1 y_{t-1} + \ldots + \phi_k y_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (1.2.3)$$

la cual es una ecuación de regresión lineal, en donde el valor de y_t depende de valores pasados de la misma serie. La condición de estacionariedad de segundo orden para un proceso AR(k) está dada a través de la ecuación característica asociada al proceso, denotada por

$$\phi(x) = 0 \qquad (1.2.4)$$

que explícitamente tiene la forma

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \ldots - \phi_k x^k = 0 \qquad (1.2.5)$$

El proceso AR(k) será estacionario de segundo orden si y sólo si las raíces de la ecuación (1.2.5) se encuentran fuera del círculo unitario.

Un proceso MA(l), de promedios móviles de orden l, está representado por la ecuación

$$\tilde{y}_t = (I - \theta_1 B - \ldots - \theta_l B^l)\varepsilon_t = \theta(B)\varepsilon_t \qquad (1.2.6)$$

donde $\theta_1, \ldots, \theta_l$ son ponderaciones (parámetros de promedios móviles). Con estos modelos se pretende representar un proceso estocástico $\{y_t\}$ como una suma finita ponderada de choques aleatorios independientes $\{\varepsilon_t\}$. Así, todo proceso MA resulta ser estacionario de segundo orden. Si se tiene un proceso $\{y_t\}$ expresado en términos de la innovación actual y de las pasadas, o sea

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots,$$

una condición suficiente para que sea estacionario de segundo orden es que $\sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i|$ sea finita. En los procesos MA, esta expresión viene a ser $\sum_{i=1}^{l} |-\theta_i|$, la cual es una constante finita.

Un concepto análogo al de estacionariedad es el de invertibilidad que dice que cuando un proceso puede expresarse a través de un modelo AR con ponderaciones que sean absolutamente sumables, dicho proceso es invertible.

Con base en lo expuesto anteriormente, todo proceso MA es estacionario y todo proceso AR es invertible. La condición de invertibilidad es análoga a la de estacionariedad, en tanto que un modelo MA(l) es invertible si las raíces de la ecuación característica

$$\theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \dots - \theta_l x^l = 0 \qquad (1.2.7)$$

se encuentran fuera del círculo unitario.

Es importante hacer notar la dualidad existente entre modelos MA y modelos AR, esto es, un proceso AR(k) es equivalente a un MA(∞) si las raíces de su ecuación característica están fuera del círculo unitario, y un proceso MA(l) es equivalente a un AR(∞) si las raíces de su ecuación característica están fuera del círculo unitario (Fuller (1976)).

En la práctica existen series que tienen un comportamiento mixto tanto autorregresivo como de promedios móviles. Así, al combinar estos modelos se obtienen los modelos ARMA(k, l), autorregresivos y de promedios móviles, denotados por

$$\phi(B)\tilde{y}_t = \theta(B)\varepsilon_t \qquad (1.2.8)$$

Una generalización de estos modelos son los modelos ARIMA(k, d, l) los cuales surgen al observar que en ocasiones la no-estacionariedad de una serie se puede eliminar aplicando el operador

$$\nabla = I - B$$

un número apropiado de veces a la serie original. Entonces, se tiene que un modelo ARIMA(k, d, l) está dado por

$$\phi(B)\nabla^d \tilde{y}_t = \theta(B)\varepsilon_t \qquad (1.2.9)$$

Hasta este momento se ha presentado la forma general de los modelos, pero lo importante es cómo construirlos. Por este motivo se presenta a continuación la metodología de construcción de modelos para series de tiempo univariadas desarrollada por Box-Jenkins (1970) (véase Guerrero (1991) para mayores detalles).

La metodología de Box-Jenkins es un proceso iterativo para construir modelos ARIMA(k, d, l) que consta de tres etapas: identificación, estimación y verificación de supuestos. Sus principales herramientas son las estimaciones de la función de autocorrelación (FAC) y de la función de autocorrelación parcial (FACP) (ver apéndices 1 y 2).

La identificación consiste en hallar los órdenes adecuados de k, d y l, para lo cual los pasos a seguir son:

1. Hacer estacionaria la serie $\{y_t\}$, lo cual implica:

A) Estabilización de la varianza.- En caso de que la serie $\{y_t\}$ tenga varianza no constante,

$$Var(y_t) = \gamma_t$$

hallar una transformación de $\{y_t\}$, que se denotará por

$$\{\Lambda(y_t)\}$$

tal que su varianza sea constante, es decir,

$$Var[\Lambda(y_t)] = \gamma_0, \text{ para todo } t.$$

Por lo general, la transformación que se usa es una transformación potencia (ver Apéndice 3).

B) Estabilización del nivel.- Una vez que ya se obtuvo una serie con varianza constante, se debe verificar que tal serie tenga valor esperado también constante, es decir, que

$$E[\Lambda(y_t)] = \mu, \text{ para todo } t.$$

En caso contrario, esto es, si se tiene que

$$E[\Lambda(y_t)] = \mu_t$$

hallar una nueva serie tal que su valor esperado sea constante. Esto se puede lograr aplicando a la serie $\{\Lambda(y_t)\}$, un número d de diferencias adecuado, es decir, encontrando d tal que

$$E[\nabla^d \Lambda(y_t)] = \mu.$$

La base para hallar el número de diferencias d es la FAC, ya que las autocorrelaciones de un proceso no estacionario serán grandes aun en rezagos lejanos. Sin embargo, también deben tomarse en cuenta otros criterios para determinar d; como son la naturaleza de la serie en estudio y las recientemente desarrolladas pruebas de raíces unitarias (véase por ejemplo Mills (1993)), ya que al basarse sólo en la FAC se corre el riesgo de sobrediferenciar la serie. Finalmente, hay que hacer notar que en caso de que no se necesite aplicar alguna transformación potencia a $\{y_t\}$, la estabilización del nivel se cumple para $\Lambda(y_t) = y_t$.

2. Determinar el orden de k y l, es decir, el orden de los polinomios autorregresivo y de promedios móviles por incluir en el modelo ARIMA(k, d, l). Para ello se hace uso de la FAC y la FACP. Hay que hacer hincapié en que al elegir k y l no se debe olvidar el principio de parsimonia, que indica incluir el menor número de parámetros posible.

Esto es en general el proceso a seguir para identificar un modelo ARIMA(k, d, l). Una vez identificado el modelo, es necesario estimar los parámetros que lo forman para que quede completamente especificado. Esto puede hacerse por el método de máxima verosimilitud o por mínimos cuadrados no lineales.

El siguiente paso es la verificación de supuestos. En caso de que el modelo estimado cumpla con todos los supuestos, ya puede ser utilizado en los fines para los cuales haya sido construido; en caso de que no satisfaga los supuestos es necesario regresar al primer paso e identificar otro modelo. Este proceso se repite hasta hallar el modelo que satisfaga mejor los supuestos, es decir, el modelo que represente mejor el comportamiento de la serie.

Los supuestos que se verifican son en particular los supuestos hechos sobre los errores aleatorios $\{\varepsilon_t\}$, cuya verificación se hace sobre los residuales $\{\hat{\varepsilon}_t\}$, con

$$\hat{\varepsilon}_t = \left[\hat{\theta}(B)\right]^{-1} \hat{\phi}(B) w_t$$

donde $\hat{\theta}(B)$ y $\hat{\phi}(B)$ son las estimaciones de los polinomios MA y AR respectivamente, y

$$w_t = \nabla^d \Lambda(y_t).$$

Tales residuales miden la diferencia entre los verdaderos valores de la serie y los valores estimados por el modelo.

Los supuestos sobre $\{\varepsilon_t\}$ que se verifican con el análisis de residuales son los siguientes:

1. $\{\varepsilon_t\}$ tiene media cero.
2. $\{\varepsilon_t\}$ tiene varianza constante.
3. Los ε_t son mutuamente independientes.
4. $\varepsilon_t \sim$ Normal $\forall\, t$.
5. No existen observaciones aberrantes.

Además existen otros supuestos que no se verifican a través del análisis de residuales, sino con base en las condiciones dadas para estabilidad y estacionariedad de los modelos ARMA(k, l):

6. El modelo es parsimonioso (es decir, no se puede reducir el número de parámetros).

7. El modelo es admisible (condiciones para la estacionariedad y/o la invertibilidad).

8. El modelo es estable en los parámetros (no hay redundancia en los parámetros).

En caso de no cumplirse alguno de estos supuestos es necesario proponer un nuevo modelo efectuando nuevamente las tres etapas del proceso.

1.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE VARIANZA CONDICIONAL NO CONSTANTE.

Es muy común que cuando se ha obtenido un modelo para representar apropiadamente a una serie $\{y_t\}$, dicho modelo sea utilizado para pronosticar valores futuros de la serie. En tal caso, se consideran la media y la varianza condicionales de la serie (e. g. Guerrero (1991)). Más explícitamente, supóngase que se tiene la serie $\{y_t\}$ de la cual se conocen los valores $y_1, y_2, \ldots, y_{t-1}$ y se desea pronosticar el valor y_t. Este pronóstico estará dado por

$$E(y_t|H_{t-1}) \tag{1.3.1}$$

es decir, el pronóstico depende de la información hasta el tiempo t - 1, denotada por H_{t-1}.

Es claro que este pronóstico tendrá un cierto error, cuya varianza está dada por

$$\sigma_t^2 = Var(y_t|H_{t-1}) \tag{1.3.2}$$

Ahora bien, dado que la media condicional de la serie da un mejor pronóstico que la media incondicional, entonces, podría esperarse una mejor estimación de la varianza del error de pronóstico si se utiliza la varianza condicional (pudiendo ésta ser afectada por información adicional del pasado) en vez de la varianza incondicional.

Sin embargo, en los modelos tradicionales la información pasada no afecta a la varianza condicional, y esto, junto con el supuesto de que el término estocástico de error tiene varianza constante para todo t, ocasiona que la expresión (1.3.2) sea constante para todo t. Esto resulta ser una limitación fuerte si la serie en estudio es de naturaleza heteroscedástica al impedir extraer información aún contenida en los datos. En muchos casos, el supuesto de independencia de los errores en los modelos tradicionales se da por hecho al no encontrar autocorrelaciones regulares o parciales significativamente diferentes de cero, lo cual no ocurre con las autocorrelaciones de los residuales al cuadrado, que comúnmente no se revisan. De este modo, se trabaja con modelos con varianza constante a través del tiempo que estarán subestimando la verdadera varianza en períodos volátiles y sobreestimándola en períodos de estabilidad.

Por otra parte (ver Engle (1982)), la teoría económica frecuentemente sugiere que los agentes económicos responden no sólo a la media, sino también a mayores momentos de las variables aleatorias económicas. Por ejemplo, en teoría financiera, tanto la media como la varianza de las tasas de rendimiento son determinantes para la toma de decisiones que conciernen a la conformación de portafolios. También se sabe que altos niveles de inflación están generalmente asociados con gran variabilidad de la inflación.

Asimismo, una ventaja que se ha encontrado en la práctica es que en la mayoría de las aplicaciones de los modelos que se presentan en este trabajo, los errores estándar de los parámetros de la ecuación para la variable principal se reducen al considerar alguna ecuación de la clase ARCH apropiada (véase por ejemplo Weiss (1984)).

Por los motivos anteriormente expuestos, medir la varianza sobre el tiempo de cualquier serie que muestre heteroscedasticidad, puede ser de gran utilidad.

CAPÍTULO 2

MODELOS DE REGRESIÓN CON HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL

A continuación se hablará de los primeros modelos que permitieron varianza condicional no constante, éstos son los modelos ARCH, los modelos GARCH y los modelos ARCH-M.

2.1. MODELOS DE REGRESIÓN CON ERRORES ARCH.

Supóngase que una variable aleatoria y_t se comporta de acuerdo con la función de densidad $f(y_t|H_{t-1})$. En este caso, el pronóstico de su valor basado en la información pasada está dado por la esperanza condicional

$$E(y_t|H_{t-1}),$$

la cual depende de los valores de la historia H_{t-1}. La varianza condicional es

$$Var(y_t|H_{t-1}) = E\left[\{y_t - E(y_t|H_{t-1})\}^2|H_{t-1}\right].$$

En esta expresión puede apreciarse que la varianza condicional depende de la información pasada. Sin embargo, en los modelos tradicionales, esta varianza condicional no depende de la historia H_{t-1}. Así, los modelos ARCH (con heteroscedasticidad condicional autorregresiva) surgen al pensar en una cierta clase de modelos que permitan que la varianza condicional de una serie dependa del pasado de la misma.

El modelo lineal ARCH(q), ARCH de orden q, dado a conocer por Engle (1982), está dado por las siguientes expresiones:

$$y_t|H_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2),$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q y_{t-q}^2 \tag{2.1.1}$$

con α_0, α_1, ... , α_q parámetros constantes y desconocidos, y donde además se supone que los choques aleatorios $\eta_t \equiv y_t/\sigma_t$ son i.i.d. con $E(\eta_t) = 0$ y $Var(\eta_t) = 1$. Si definimos a $e_t \equiv y_t^2 - \sigma_t^2$, la ecuación de la varianza en (2.1.1) puede reescribirse como

$$y_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q y_{t-q}^2 + e_t \tag{2.1.2}$$

Aunque en la literatura no se menciona explícitamente por qué se les llama autorregresivos a estos modelos, la expresión (2.1.2) puede justificarlo.

Con las características antes mencionadas, estos modelos tienen las siguientes propiedades:

<u>Momentos incondicionales</u>.

- $E(y_t) = 0$.
- $Var(y_t) = E(y_t^2) = E(\sigma_t^2)$.
- El proceso será estacionario en covarianzas bajo ciertas condiciones que se enuncian en el Apéndice 4.

<u>Momentos condicionales</u>.

- $E(y_t|H_{t-1}) = 0$.
- $Var(y_t|H_{t-1}) = E(y_t^2|H_{t-1}) = \sigma_t^2$.
- Todas las autocovarianzas son cero.

Por simetría, se tiene que los momentos impares, en caso de existir, son cero. Los momentos pares, así como las condiciones para su existencia, están dadas por el siguiente teorema para los procesos lineales ARCH(1).

TEOREMA 1 (Engle(1982)).- Sea r un número natural. Entonces, el $2r$-ésimo momento de un proceso ARCH de primer orden con $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 \geq 0$ existe si y sólo si

$$\alpha_1^r \prod_{i=1}^{r}(2i-1) < 1.$$

Véase la demostración en el Apéndice 5.

De aquí se tiene que si $\alpha_1 < 1$, la varianza incondicional será finita, mientras que para que el cuarto momento sea finito se requiere que $3\alpha_1^2 < 1$. Si se cumplen estas condiciones, utilizando la ecuación (A.4) pueden calcularse estos momentos, los cuales son:

$$Var(y_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1},$$

$$E(y_t^4) = 3Var(y_t)^2\left[\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}\right].$$

Como puede apreciarse, el cuarto momento es 3 veces la varianza al cuadrado por un factor que es estrictamente mayor que uno si $\alpha_1 \neq 0$. Esto quiere decir que el proceso ARCH(1) lineal tiene una densidad con colas más gruesas que las de una Normal. A las densidades para las que el cuarto momento dividido por la varianza al cuadrado es mayor que 3, se les llama leptocúrticas (el adjetivo griego λεπτός significa delgado, refiriéndose en este caso a la parte central de la densidad que es relativamente más alta y aguda). Esta característica también la presentan los procesos de orden superior ARCH(q) (véase Bollerslev (1986)).

Modelos de regresión con errores ARCH. Con una pequeña variación en los modelos ARCH se obtienen los modelos de regresión con errores ARCH (Engle (1982)), al suponer que la media de y_t está dada por una combinación lineal de retrasos de la variable endógena y/o variables exógenas, esto es

$$y_t|H_{t-1} \sim N(\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{b},\ \sigma_t^2)$$

donde

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\ \varepsilon_{t-1}{}^2 + \ldots + \alpha_q\ \varepsilon_{t-q}{}^2 \tag{2.1.3}$$

con

$$\varepsilon_t = y_t - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{b},$$

donde $\boldsymbol{x}_t$ puede contener retrasos de la variable dependiente así como variables exógenas, y los choques aleatorios $\eta_t = \varepsilon_t/\sigma_t$ son i.i.d. con $E(\eta_t) = 0$ y $Var(\eta_t) = 1$.

Lo anterior puede interpretarse como un modelo de regresión lineal para el cual los errores no son un proceso estocástico de ruido blanco, como se supone comúnmente, sino un proceso ARCH(q).

Claramente los modelos ARCH(q) son un caso particular de los modelos de regresión con errores ARCH, ya que al substituir $\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{b}$ por cero, se obtiene la misma expresión que en (2.1.1).

Haciendo hincapié en la diferencia existente entre los modelos econométricos convencionales y los modelos ARCH, a continuación se analiza un modelo autorregresivo de orden 1 (AR(1)) sin errores ARCH y un modelo AR(1) con errores ARCH(1).

Considérese primeramente un modelo autorregresivo de orden 1

$$(I - \phi_1 B)\, y_t = \varepsilon_t \tag{2.1.4}$$

donde $\{\varepsilon_t\}$ es ruido blanco con varianza $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$. En este caso la <u>media incondicional</u> de y_t es cero, puesto que, suponiendo que el modelo es estacionario, (2.1.4) es equivalente a

$$\begin{aligned} y_t &= (I - \phi_1 B)^{-1}\, \varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t) + \phi_1 E(\varepsilon_{t-1}) + \phi_1^2 E(\varepsilon_{t-2}) + \ldots = 0, \tag{2.1.5}$$

mientras que la <u>media condicional</u> es

$$\begin{aligned} E(y_t|H_{t-1}) &= E(\phi_1\, y_{t-1} + \varepsilon_t|H_{t-1}) \\ &= \phi_1 E(y_{t-1}|H_{t-1}) + E(\varepsilon_t|H_{t-1}) \\ &= \phi_1\, y_{t-1}. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Por otra parte, la <u>varianza incondicional</u> del modelo es

$$\begin{aligned} Var(y_t) &= Var(\varepsilon_t) + \phi_1^2 Var(\varepsilon_{t-1}) + \phi_1^4 Var(\varepsilon_{t-2}) + \ldots \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1^4 \sigma_\varepsilon^2 + \ldots \\ &= (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \ldots)\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \phi_1^2) \tag{2.1.7}$$

y su varianza condicional está dada por

$$\begin{aligned} Var(y_t|H_{t-1}) &= Var(\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t|H_{t-1}) \\ &= Var(\phi_1 y_{t-1}|H_{t-1}) + Var(\varepsilon_t|H_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Nótese que la varianza condicional del pronóstico no depende de la información pasada, por lo cual todas las varianzas de pronóstico son constantes a través del tiempo, al igual que las varianzas incondicionales. Por tal motivo, para este tipo de modelos es imposible medir los cambios de las varianzas de pronóstico.

Ahora considérese un modelo AR(1) con errores ARCH(1), para el cual se observa que, al igual que para un modelo AR(1)

$$\begin{aligned} &E(y_t) = 0, \\ &E(y_t|H_{t-1}) = \phi_1\, y_{t-1}, \\ &Var(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \phi_1^2); \end{aligned}$$

que son los mismos valores de las expresiones (2.1.5) a (2.1.7). La diferencia es que la varianza condicional ya no es constante, es decir

$$\begin{aligned} Var(y_t|H_{t-1}) &= Var(\phi_1 y_{t-1}|H_{t-1}) + Var(\varepsilon_t|H_{t-1}) \\ &= Var(\varepsilon_t|H_{t-1}) \\ &= \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \end{aligned}$$

con

$$\varepsilon_t = y_t - E(y_t|H_{t-1}) = y_t - \phi_1 y_{t-1}.$$

Aquí se puede observar cómo la varianza condicional del pronóstico depende de la información pasada, por lo que pueden obtenerse mejores estimaciones de las varianzas de pronóstico para cada tiempo t.

Hasta el momento se ha visto la forma general de los procesos ARCH y para qué sirven, pero no se tiene un criterio para decidir si es apropiado o no aplicar un proceso ARCH a la serie en estudio. Este criterio lo proporcionan las pruebas para heteroscedasticidad, las cuales se presentan a continuación.

Como es sabido (Engle (1982)), en un modelo de regresión lineal, con o sin rezagos de la variable dependiente, el método apropiado para estimación de parámetros es el método de mínimos cuadrados, siempre y cuando la serie de los errores no presente heteroscedasticidad condicional. Dado que la estimación de modelos ARCH requiere de procesos iterativos, vale la pena probar, antes de estimar, si es apropiado o no este tipo de modelos.

Por otra parte, cuando existe heteroscedasticidad, hay una pérdida en la eficiencia de los estimadores que se obtienen a través del método de mínimos cuadrados, y peor aún, pueden hacerse inferencias estadísticas erróneas (ver Breusch y Pagan (1979)). Engle (1982), propone la prueba para heteroscedasticidad de la siguiente manera.

La hipótesis nula es

H_0: No existe heteroscedasticidad condicional.

Si H_0 es cierta, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q = 0$. La prueba se basa en la primera derivada de la log-verosimilitud y la matriz de información cuando H_0 es cierta. Considérese el modelo ARCH con $\sigma_t^2 = h(\upsilon_t'\alpha)$, donde h es alguna función diferenciable (lo cual abarca los casos lineal y exponencial además de muchos otros), $\upsilon_t = (1, \hat{\varepsilon}_{t-1}^2, \ldots, \hat{\varepsilon}_{t-q}^2)'$, siendo $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ los residuales obtenidos por el método de mínimos cuadrados, y $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q)'$. Entonces, bajo la hipótesis nula, σ_t^2 es una constante (denotada por h_0), y si se escribe

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha} = \dot{h}\,\upsilon_t$$

con $\dot{h}$ la derivada de h, se obtiene que la primera derivada de la log-verosimilitud (ver Apéndice 6) y la matriz de información cuando H_0 es cierta son

$$\left.\frac{\partial \ell}{\partial \alpha}\right|_0 = \frac{\dot{h}_0}{2h_0}\sum_{t=1}^{T} \upsilon_t\left(\frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{h_0} - 1\right) = \frac{\dot{h}_0}{2h_0}\, Y' f_0,$$

$$\mathcal{I}_{\alpha\alpha}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{h}_0}{h_0}\right)^2 E(Y'Y);$$

con $Y = (\upsilon_1, \ldots, \upsilon_T)'$ y $f_0 = \left(\frac{\hat{\varepsilon}_1^2}{h_0} - 1, \ldots, \frac{\hat{\varepsilon}_T^2}{h_0} - 1\right)'$. Entonces, el estadístico de multiplicadores de Lagrange puede ser consistentemente estimado a través de

$$\xi^* = f_0'Y(Y'Y)^{-1}Y'f_0/2$$

(ver Engle (1982, p. 1000)), el cual es asintóticamente equivalente a

$$\xi = Tf_0'Y(Y'Y)^{-1}Y'f_0/f_0'f_0 = T\mathrm{R}^2$$

(donde R^2 es el cuadrado de la correlación múltiple entre f_0 e Y) puesto que bajo el supuesto de normalidad

$$\operatorname{plim} f_0'f_0/T = 2$$

(para la definición de plim véase el Apéndice 7). El estadístico ξ se distribuye asintóticamente como una $\chi^2(q)$ bajo la hipótesis nula.

En conclusión, lo que Engle sugiere para probar heteroscedasticidad es estimar la regresión de los residuales al cuadrado contra los siguientes q rezagos de ellos mismos y una constante, y probar $T\mathrm{R}^2$ como una $\chi^2(q)$.

2.2. MODELOS DE REGRESIÓN CON ERRORES GARCH.

Bollerslev (1986) propone los modelos GARCH(p, q) (*generalized ARCH*) siguiendo la idea de generalizar modelos AR o MA a modelos ARMA. Es decir, en los modelos ARCH se supone que la varianza condicional σ_t^2 depende de los errores de pronóstico. Pues bien, para los modelos GARCH se supondrá que tal serie depende además de las varianzas condicionales rezagadas, es decir

$$y_t|H_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

con

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q y_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha(B) y_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2, \qquad (2.2.1)\end{aligned}$$

donde p, $q \geq 0$; $\alpha_0 > 0$; $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$, y $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$.

Claramente, si $p = 0$ se obtiene un modelo ARCH(q), y si $p = q = 0$ $\{y_t\}$ es ruido blanco. Como puede verse, en un modelo ARCH la varianza condicional es función de retrasos de y_t^2 solamente, mientras que en un modelo GARCH la varianza condicional es función también de retrasos de la misma varianza condicional.

Las condiciones para la estacionariedad de segundo orden se dan en el siguiente teorema.

TEOREMA 2 (Bollerslev (1986)).- El proceso GARCH(p, q) es estacionario en covarianzas con $E(y_t) = 0$, $Var(y_t) = \alpha_0(1 - \alpha(1) - \beta(1))^{-1}$ y $Cov(y_t, y_s) = 0$ para $t \neq s$, si y sólo si $\alpha(1) + \beta(1) < 1$.

Bollerslev proporciona también condiciones para la existencia de los momentos pares del proceso GARCH(1, 1), lo cual es una generalización del Teorema 1 de la Sección 2.1. Asimismo, hace notar que este proceso es leptocúrtico. Esta propiedad la tiene también el proceso general GARCH(p, q) (véase Bollerslev, Chou y Kroner (1992)) al igual que los procesos ARCH(q).

Como se indica en Bollerslev (1986), definiendo a $e_t \equiv y_t^2 - \sigma_t^2$, puede reescribirse a (2.2.1) alternativamente como

$$y_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i y_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{p} \beta_i e_{t-i} + e_t. \tag{2.2.2}$$

Esta expresión permite ver al proceso GARCH(p, q) como un proceso ARMA en y_t^2

$$y_t^2 = c + \sum_{i=1}^{\text{máx}\{p,q\}} \phi_i y_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{p} \theta_i e_{t-i} + e_t,$$

de donde se derivan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= c, \\ \alpha_i &= \phi_i - \theta_i \quad \text{para } i = 1, \dots, q; \quad \text{y} \\ \beta_i &= \theta_i \qquad\quad \text{para } i = 1, \dots, p; \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

donde $\theta_i = 0$ para $i > p$.

Análogamente a como se obtuvieron los modelos de regresión con errores ARCH(q), se obtienen los modelos de regresión con errores GARCH(p, q). Es decir, se tiene el modelo

$$y_t | H_{t-1} \sim N(\mathbf{x}_t'\mathbf{b}, \sigma_t^2)$$

donde

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{2.2.4}$$

con

$$\varepsilon_t = y_t - x_t'b$$

y en el cual x_t es un vector de variables explicativas y b un vector de parámetros.

2.3 MODELOS ARCH-M.

La precisión con que los agentes económicos pueden predecir el futuro puede variar significativamente a través del tiempo. En períodos relativamente estables, pueden realizarse pronósticos suficientemente confiables sin incurrir en mucho riesgo. En cambio, en períodos con mucha volatilidad, las predicciones se vuelven menos seguras. Por ejemplo, en el ámbito financiero, un pronóstico alejado del verdadero valor de una tasa de rendimiento, puede disminuir drásticamente las utilidades obtenidas. Esto induce la demanda de un rendimiento adicional (premio) que compense la inseguridad que implica la inversión en un activo riesgoso. Así, al modificarse la incertidumbre sobre los rendimientos de los activos a través del tiempo, las compensaciones demandadas por los agentes financieros también varían.

Los modelos ARCH-M aparecen publicados por primera vez en el artículo de Engle, Lilien y Robins (1987) para modelar primas de riesgo cambiantes en el tiempo, asociadas a diversas tasas de interés (una versión anterior de este artículo es Engle, Lilien y Robins (1982)). Un modelo ARCH-M es una extensión del modelo de regresión con errores ARCH, que permite que la varianza condicional influya en la media. De este modo, el valor esperado de la serie cambia conforme el riesgo varía, cuando éste es medido por la varianza condicional. La forma general de estos modelos que proponen los autores es la siguiente

$$\begin{aligned} y_t | \boldsymbol{x}_t, H_t &\sim N(\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{b} + d\sigma_t, \sigma_t^2), \\ \sigma_t^2 &= \alpha' W \upsilon_t + z_t'\delta; \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

donde $\boldsymbol{x}_t$ y z_t son vectores $m \times 1$ y $r \times 1$ de variables débilmente exógenas (ver el Apéndice 8) y variables dependientes rezagadas, el vector z_t incluye una constante, cuyo coeficiente representa el componente constante de la varianza σ_t^2;

$\upsilon_t = (\varepsilon_{t-1}^2, \ldots, \varepsilon_{t-q}^2)'$, siendo ε_t los residuales dados por $y_t - \boldsymbol{x}_t{}'\boldsymbol{b} - d\sigma_t$;

W es una matriz $j \times q$ de constantes que puede usarse para imponer restricciones sobre la forma en que la varianza condicional responde a los cuadrados de los residuales rezagados, en el caso menos restringido W sería la matriz identidad;

$\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\delta}$, los vectores de parámetros de la varianza, son por lo tanto $j \times 1$ y $r \times 1$ respectivamente; mientras que

$\boldsymbol{b}$ y d, los vectores de parámetros de la media son $m \times 1$ y 1×1.

En su aplicación empírica se consideran otras alternativas de la influencia de la varianza sobre la media (como son σ_t^2, $\exp(\sigma_t)$, $\ln(\sigma_t)$), por lo que el modelo (2.3.1) podría generalizarse, incluyendo a $f(\sigma_t)$ en lugar de σ_t en la ecuación de la media, donde $f(\sigma_t)$ es una función de la desviación estándar.

Algunos detalles sobre la estimación y la verificación de supuestos de estos modelos se encuentran en el Apéndice 9.

CAPÍTULO 3

MODELOS ARMA CON HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL

En el capítulo anterior se vieron modelos que se caracterizan por tener errores no autocorrelacionados. En este capítulo se consideran los modelos ARMA para la variable principal, junto con diversas variantes de modelos de varianza condicional. Esto permite considerar una cierta estructura de autocorrelación para la variable en estudio.

3.1. MODELOS ARMA-ARCH.

Los modelos ARMA con errores ARCH (ARMA-ARCH) son considerados someramente en Engle y Kraft (1983). Sin embargo, Weiss (1984) presenta más detalles sobre ellos. El modelo que sigue la variable principal es entonces

$$\phi(B)(y_t - \mu) = \theta(B)\varepsilon_t \tag{3.1.1}$$

mientras que la ecuación para la varianza condicional que propone Weiss es

$$\begin{aligned} Var\left(\varepsilon_t | H_{t-1}\right) &= E\left(\varepsilon_t^2 | H_{t-1}\right) = \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + \delta_0(\hat{y}_t - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{r} \delta_i (y_{t-i} - \mu)^2 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

donde $\hat{y}_t = E[y_t|H_{t-1}] = y_t - \varepsilon_t$. Las condiciones de regularidad básicas para estos modelos se dan en el Apéndice 10.

Conviene hacer las siguientes observaciones:

- El polinomio $\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$ es la ecuación ARCH de acuerdo con el contexto de Engle.
- Dentro del modelo para la varianza condicional se encuentra de manera explícita la serie $\{\tilde{y}_t^2\}$, donde $\tilde{y}_t$ denota a $y_t - \mu$.

- Los valores ε_{t-i} son desconocidos, pero se pueden estimar mediante $\hat{\varepsilon}_{t-i}$ a través de la ecuación ARMA.
- Todos los parámetros son constantes y desconocidos.

A continuación se presenta la técnica de construcción de estos modelos, la cual es una extensión de la metodología de Box-Jenkins. Esta técnica de construcción consta de tres facetas: identificación tanto de la ecuación ARMA como de la ecuación ARCH (lo cual conlleva pruebas para detectar si es factible o no la heteroscedasticidad), o en otras palabras, determinar los órdenes k, l, q y r; estimación de parámetros y verificación de supuestos de las ecuaciones ARMA y ARCH por separado, y luego sobre el modelo completo. Según Weiss, los pasos que deben seguirse para construir los modelos ARMA con errores ARCH son los siguientes:

Primer paso.

- Identificar la ecuación ARMA de la manera usual.
- Estimar sus parámetros por mínimos cuadrados.
- Verificación de supuestos (los ya mencionados en la Sección 1.2). En su artículo, Weiss (1984) muestra la distribución asintótica de los estimadores de los parámetros, de donde se tomarían los errores estándar requeridos en esta etapa.

Segundo paso.

- Identificar la ecuación ARCH con herramientas tales como la prueba de multiplicadores de Lagrange (ML), la FAC de $\hat{\varepsilon}_t^2$, la correlación entre $\hat{\varepsilon}_t^2$ y $\hat{y}_t^2$ ($\hat{y}_t$ es el pronóstico de y_t usando mínimos cuadrados), y la función de correlación cruzada (FCC) entre $\hat{\varepsilon}_t^2$ y rezagos de y_t^2 (ver el Apéndice 11).
- Estimar los parámetros por mínimos cuadrados.
- Verificar supuestos en un modo similar al utilizado para la ecuación ARMA. En este punto, el análisis de la FAC de los residuales de la ecuación ARCH y de las correlaciones entre éstos y $\hat{y}_t^2$, y rezagos de y_t^2, puede sugerir errores de especificación.

Tercer paso.

- Estimar conjuntamente las ecuaciones ARMA y ARCH obtenidas de los pasos anteriores, por máxima verosimilitud.
- Verificación de supuestos mediante herramientas análogas a las empleadas anteriormente.

Guegan (1990) comenta que Pantula (1988) realizó comparaciones de las propiedades de los estimadores por máxima verosimilitud, mínimos cuadrados ordinarios y mínimos cuadrados generalizados, para este tipo de modelos. Los estimadores por máxima verosimilitud parecen ser más eficientes, mientras que los estimadores por mínimos cuadrados, tanto ordinarios como generalizados, son asintóticamente normales. Weiss menciona que los estimadores por máxima verosimilitud son también asintóticamente normales.

3.2 MODELOS ARMA-GARCH.

Para la estimación de estos modelos puede utilizarse el algoritmo de Berndt, Hall, Hall y Hausman (1974). Algunos detalles sobre esto se encuentran en Mills (1993, pp. 105 y 106).

Baillie y Bollerslev (1992) consideran el pronóstico de modelos ARMA-GARCH dados por

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{k} \phi_i y_{t-i} - \sum_{i=1}^{l} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \tag{3.2.1}$$

suponiendo que la varianza incondicional de ε_t es constante (posiblemente infinita), mientras que la varianza condicional depende de la información al tiempo t - 1, mediante un modelo GARCH

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2, \tag{3.2.2}$$

donde $\omega > 0$, y α_i y β_i se restringen a modo de que los coeficientes de la representación infinita de la varianza condicional, en términos de valores rezagados de ε_t^2, sean positivos. No se especifica una distribución particular para los residuales ε_t. Baillie y Bollerslev mencionan que este modelo puede generalizarse fácilmente al incluir variables exógenas tanto en la ecuación de la media como en la de la varianza, sin embargo sus resultados se basan en la forma dada por (3.2.1) y (3.2.2).

3.3. MODELOS ARMA-GARCH EN MEDIA.

Los modelos GARCH-M son una generalización natural de los modelos ARCH-M en donde, al igual que en la generalización de los modelos ARCH a los modelos GARCH, las varianzas condicionales rezagadas participan como regresores en la ecuación de la varianza.

Una vez dados a conocer los modelos ARCH-M, las aplicaciones de modelos GARCH-M se realizaron de manera casi inmediata. Entre los primeros trabajos se encuentran los de Bollerslev, Engle y Wooldridge (1985), Engle y Watson (1985) (citado en Engle y Bollerslev (1986)) y French, Schwert y Stambaugh (1985).

Desafortunadamente, al igual que para los modelos ARCH-M, la teoría asintótica para estos modelos es aún muy vaga y no se conocen todavía condiciones suficientes para la consistencia y normalidad asintótica de los estimadores (véase Nelson (1991) a este respecto).

En cuanto a los modelos ARMA-GARCH en media, como es el caso de varias extensiones de modelos de la clase ARCH, no se mencionan resultados teóricos específicos, simplemente se reportan aplicaciones. Por ejemplo, French, Schwert y Stambaugh (1987), en un estudio sobre el mercado accionario de Estados Unidos, utilizan modelos de la forma

$$y_t = c + d\sigma_t^p + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

donde p denota una potencia a la que se eleva la desviación estándar condicional y ε_t sigue un modelo GARCH(1, 2).

3.4. MODELOS ARMA-EGARCH EN MEDIA.

Conforme se avanza en la aplicación de modelos a series reales, se van descubriendo ciertas limitaciones de los modelos convencionales. Así, en el campo de los modelos para varianzas heteroscedásticas, se han detectado algunas limitaciones de los modelos GARCH:

i) Los modelos GARCH son simétricos en los residuales, de modo que sólo la magnitud y no el signo de las innovaciones es lo que importa. Entre otros trabajos, puede mencionarse el de French y Sichel (1993), en donde se encuentra evidencia de que la varianza condicional del producto nacional bruto real de Estados Unidos aumenta luego de innovaciones negativas pero no luego de innovaciones positivas, por lo que las varianzas son asimétricas.

ii) Otra limitación de los modelos GARCH son las restricciones de no negatividad para asegurar que la varianza condicional sea no negativa para todo t.

Recientemente, Nelson (1991) desarrolló los modelos asimétricos exponenciales GARCH (EGARCH) con los que se evitan los inconvenientes antes mencionados. Estos modelos para la varianza condicional y sus condiciones de estacionariedad se presentan en la primera parte de esta sección. Posteriormente, al final de la sección, se verá el modelo completo ARMA-EGARCH en media.

Sea $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$ el error de algún modelo en el momento t, con σ_t^2 la varianza de ε_t dada la información al tiempo t y η_t i.i.d. con media cero y varianza unitaria. Para asegurar que la varianza condicional sea no negativa, se expresa al $\ln\left(\sigma_t^2\right)$ como una combinación lineal de alguna función del tiempo y de los choques η_t rezagados, de la siguiente manera

$$\ln\left(\sigma_t^2\right) = z_t + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g(\eta_{t-i}), \quad \xi_1 \equiv 1, \tag{3.4.1}$$

$$\Rightarrow \qquad \sigma_t^2 = \exp[z_t]\exp\left[\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g(\eta_{t-i})\right] \text{ y } \varepsilon_t = \exp\left[\frac{z_t}{2}\right]\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g(\eta_{t-i})\right]\eta_t;$$

donde $\{z_t\}_{t=-\infty,\infty}$ y $\{\xi_i\}_{i=1,\infty}$ son sucesiones de escalares reales, no estocásticos. Por otra parte, para captar la asimetría anteriormente mencionada, $g(\eta_t)$ debe ser una función tanto de la magnitud como del signo de η_t. Nelson eligió la siguiente forma

$$g(\eta_t) \equiv \vartheta\eta_t + \zeta\left[|\eta_t| - E|\eta_t|\right].$$

Por construcción, $\{g(\eta_t)\}_{t=-\infty,\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media cero, por lo que el valor esperado de $\ln\left(\sigma_t^2\right) - z_t$ es cero. Nótese que no hay restricciones de no negatividad en ninguno de los parámetros.

Las condiciones de estacionariedad se establecen en el siguiente teorema

TEOREMA 3 (Nelson (1991)).- Supóngase que ϑ y ζ no son ambos cero. Entonces $\{e^{-z_t}\sigma_t^2\}$, $\{e^{-\frac{z_t}{2}}\varepsilon_t\}$ y $\left\{\ln\left(\sigma_t^2\right)-z_t\right\}$ son estrictamente estacionarias y $\left\{\ln\left(\sigma_t^2\right)-z_t\right\}$ es estacionaria en covarianzas $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2<\infty$.

Una representación más parsimoniosa que (3.4.1) se obtiene mediante la parametrización ARMA

$$\ln\left(\sigma_t^2\right)=z_t+\frac{I+\alpha_1 B+\ldots+\alpha_q B^q}{I-\beta_1 B-\ldots-\beta_p B^p}g(\eta_{t-1}). \qquad (3.4.2)$$

De este modo, por el teorema anterior, $\{e^{-z_t}\sigma_t^2\}$ y $\{e^{-\frac{z_t}{2}}\varepsilon_t\}$ son estrictamente estacionarias $\Leftrightarrow$ todas las raíces del polinomio $\left[1-\sum_{i=1}^{p}\beta_i x^i\right]$ están fuera del círculo unitario.

Considérese ahora específicamente la estacionariedad en covarianzas. Por el teorema anterior se tiene que $\sum\xi_i^2<\infty$ implica que $\{e^{-z_t}\sigma_t^2\}$ y $\{e^{-\frac{z_t}{2}}\varepsilon_t\}$ son estrictamente estacionarias. Sin embargo, la estacionariedad estricta no implica estacionariedad en covarianzas. Para algunas distribuciones de $\{\eta_t\}$, $\{e^{-z_t}\sigma_t^2\}$ y $\{e^{-\frac{z_t}{2}}\varepsilon_t\}$ generalmente no tienen momentos incondicionales finitos. La familia de distribuciones GED (Generalized Error Distribution) contiene algunos casos que pueden generar momentos incondicionales finitos de cualquier orden. Box y Tiao (1973) la llaman distribución potencia exponencial (*exponential power distribution*). La densidad de una variable aleatoria GED, normalizada para que tenga media cero y varianza unitaria, es

$$f(\eta)=\frac{\nu\exp\left(-\frac{1}{2}\left|\frac{\eta}{\lambda}\right|^{\nu}\right)}{\lambda 2^{1+\frac{1}{\nu}}\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)},\quad -\infty<\eta<\infty,\ 0<\nu\leq\infty,$$

con

$$\lambda \equiv \left[2^{-\frac{2}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) \Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

ν es un parámetro relacionado con el grosor de las colas de la distribución. Como casos particulares incluye a la distribución Normal con $\nu = 2$ y, con colas más gruesas que las de la Normal, a la exponencial doble con $\nu = 1$. El siguiente teorema determina casos de la familia GED con los que se obtienen momentos incondicionales finitos de cualquier orden.

TEOREMA 4 (Nelson (1991)).- Sea $\{\eta_t\}_{t=-\infty,\infty}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. GED con media cero, varianza uno, y parámetro $\nu > 1$, y supóngase que $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 < \infty$. Entonces $\{e^{-z_t}\sigma_t^2\}$ y $\{e^{-\frac{z_t}{2}}\varepsilon_t\}$ poseen momentos finitos invariantes en el tiempo, de orden arbitrario.

Las demostraciones de los teoremas anteriores así como expresiones para los momentos condicionales e incondicionales (incluyendo covarianzas) bajo diversas distribuciones incluyendo la Normal, GED y t de Student se encuentran en Nelson (1991).

Hasta aquí se ha visto el modelo EGARCH para la varianza condicional. Ahora se hablará de la forma general a la que se refiere el título de esta sección. En su aplicación empírica, Nelson utiliza un modelo AR(1) con la siguiente forma

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + d\sigma_t^2 + \varepsilon_t. \tag{3.4.3}$$

Comenta que igualmente pudo haberse usado un modelo MA(1), como sugieren otros autores para la variable en estudio. Asimismo, sobre la influencia de la varianza condicional en la media dice que no hay justificaciones teóricas fuertes para usar la forma en (3.4.3). Usa esa forma porque varios investigadores la han encontrado estadísticamente significativa.

En general, la forma de un modelo ARMA-EGARCH en media sería la siguiente

$$\phi(B)y_t = c + d \cdot h\left(\sigma_t^2\right) + \theta(B)\varepsilon_t \tag{3.4.4}$$

donde $h\left(\sigma_t^2\right)$ denota alguna función de la varianza condicional.

Ahora bien, dada la función de densidad de los choques aleatorios $f(\eta_t)$, por el teorema de cambio de variable, la función de densidad de los residuales será igual a $f(\eta_t)/\sigma_t$. Si los choques aleatorios siguen una distribución GED, entonces la log-verosimilitud será

$$\ell = \sum_t \left\{ \ln\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) - \frac{1}{2}\left|\frac{\eta_t}{\lambda}\right|^{\nu} - \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\ln(2) - \ln\left[\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] - \frac{\ln\left(\sigma_t^2\right)}{2} \right\}.$$

Esta verosimilitud se calcula generando recursivamente las series $\{\eta_t\}$ y $\{\sigma_t^2\}$ a partir de los datos $\{y_t\}$ y valores iniciales para las varianzas condicionales. En (3.4.1) puede apreciarse que, en caso de existir, la esperanza incondicional de $\ln\left(\sigma_t^2\right)$ es z_t, de donde se obtienen valores iniciales para las varianzas condicionales. Las series antes mencionadas se calculan utilizando la ecuación de la varianza en la forma (3.4.2) y la expresión que se obtiene al despejar η_t de (3.4.4).

Nelson indica que bajo condiciones de regularidad suficientes, los estimadores por máxima verosimilitud son consistentes y siguen asintóticamente una distribución Normal. No menciona cuáles son esas condiciones, pero dice que la verificación de éstas ha sido muy difícil. Todavía hace falta desarrollar una teoría asintótica satisfactoria. En la práctica se trabaja suponiendo que las propiedades de consistencia y normalidad se cumplen.

CAPÍTULO 4

APLICACIONES NUMÉRICAS DE MODELOS GARCH A CASOS PRÁCTICOS

El objetivo de este capítulo es llevar a la práctica los conceptos y resultados presentados en este trabajo, así como ilustrar el empleo del programa RATS para efectuar los cálculos y estimaciones necesarios. Esto se hará a través de dos ejemplos. El primero de ellos consiste en analizar la serie tipo de cambio dólar-libra esterlina estudiada por Mills (1993) y mostrar que las estimaciones obtenidas mediante la metodología aplicada conllevan a los mismos resultados obtenidos por Mills. El segundo ejemplo consiste en hacer uso de la metodología antes mencionada para construir un modelo para los rendimientos de las acciones de Telmex, serie L. Esta serie fue analizada en Hernández (1994).

4.1. MODELO GARCH PARA EL TIPO DE CAMBIO DÓLAR-LIBRA ESTERLINA.

En esta sección se estima un modelo GARCH(1, 1) para el tipo de cambio dólar-libra esterlina con el propósito de reproducir los resultados reportados por Mills (1993, p. 112). Esto se hace con el fin de asegurarse de que la metodología aplicada para la estimación es confiable. En el Apéndice 12, se observan las 470 observaciones semanales utilizadas por Mills y que corresponden al período de enero de 1980 a diciembre de 1988. Como puede observarse en la Gráfica 1, el nivel de esta serie no es constante. Además, en la gráfica de la FAC muestral (Gráfica 2), se observa un decaimiento bastante lento de las autocorrelaciones. Esto indica que es necesario aplicar el operador diferencia para lograr estabilizar el nivel de la serie. Al aplicar el operador diferencia se obtiene la serie DIFF1, la cual aparece en la Gráfica 3. En la Gráfica 4 se observan las FAC y FACP muestrales para DIFF1. Como puede apreciarse, hay un decaimiento bastante rápido de la

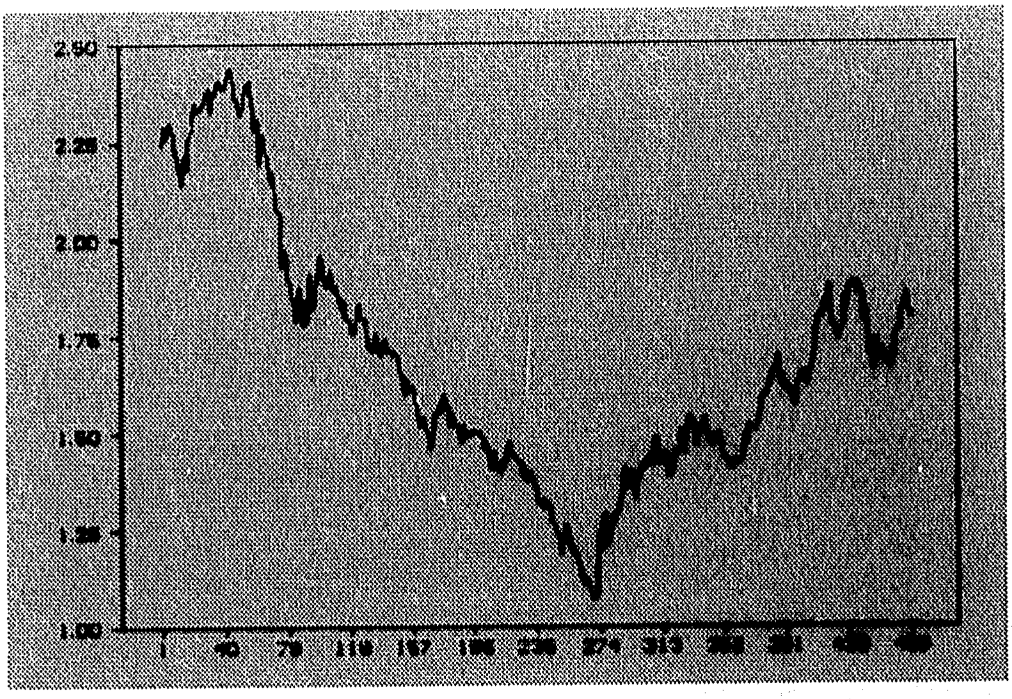
FAC, por lo cual se supone que la serie DIFF1 es estacionaria. Por lo tanto, al estudiar el comportamiento de las autocorrelaciones regulares y parciales de la Gráfica 4, se encuentra que un modelo razonable para $\{\text{DIFF1}_t\}$ podría ser

$$\text{DIFF1}_t = c + \varepsilon_t.$$

Sin embargo c resulta no ser significativamente diferente de cero, por lo que se postula el modelo

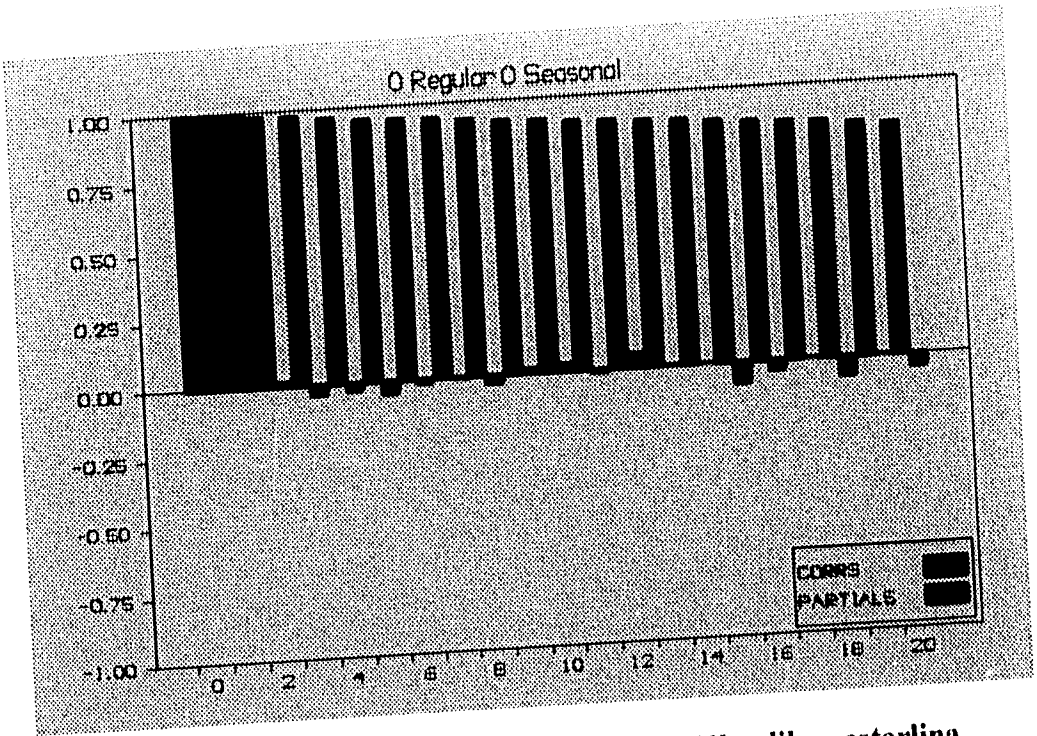
$$\text{DIFF1}_t = \varepsilon_t$$

esto es, la serie $\{\text{DIFF1}_t\}$ representa a los errores mismos del modelo.

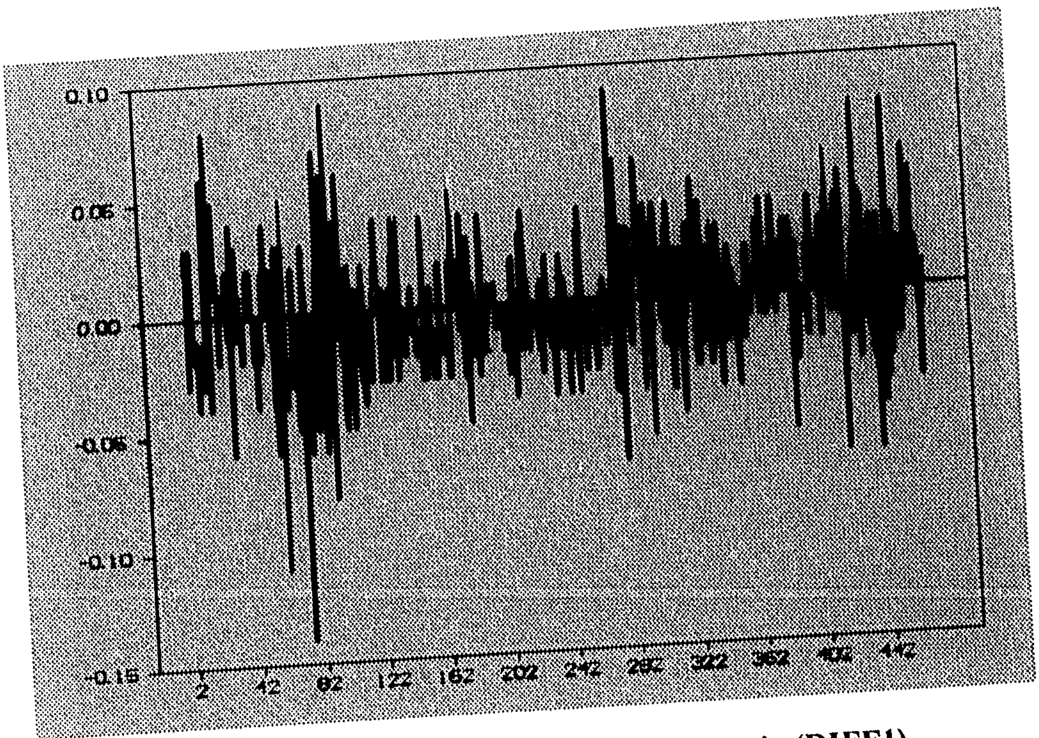


Gráfica 1. Tipo de cambio dólar-libra esterlina.

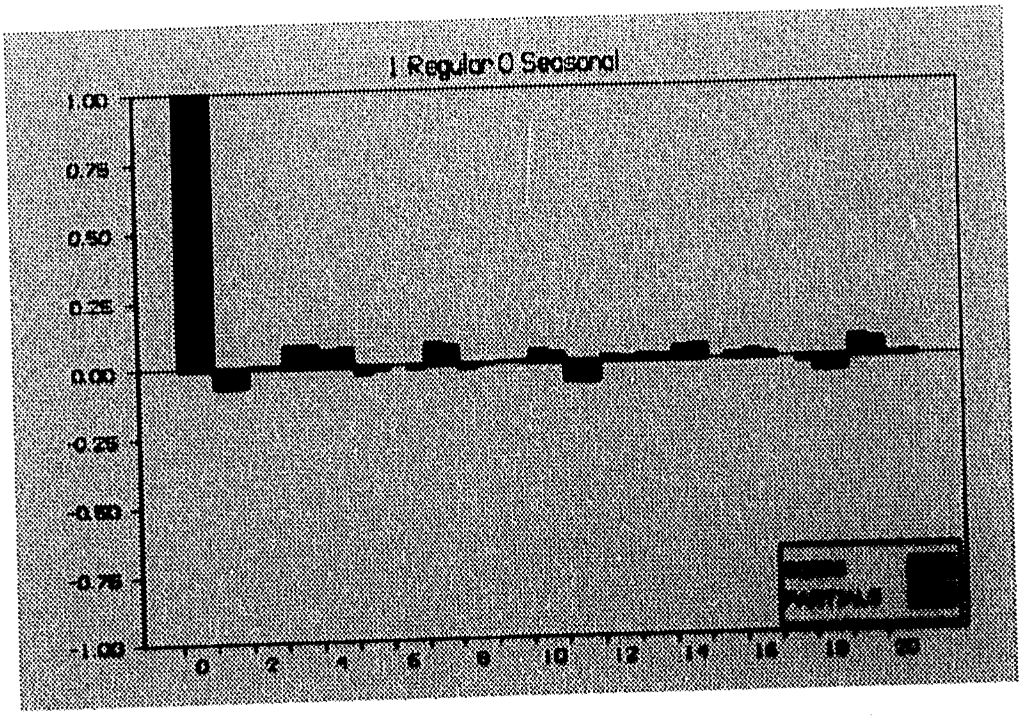
El siguiente paso fue realizar la prueba de heteroscedasticidad. Como se menciona en la Sección 2.1, lo primero que se hace es correr una regresión de los residuales al cuadrado vs. una constante y q rezagos. Mills realiza la prueba con q = 4, posiblemente para considerar los efectos de las distintas semanas en el mes. Esta regresión dio como resultado que el valor de la estadística TR^2 fuese 18.7083, el cual tiene un nivel de significancia marginal de 0.0009 al compararse contra la distribución $\chi^2(4)$. Por lo tanto, se rechaza la hipótesis de que, en conjunto, los parámetros ARCH sean todos iguales a cero, es decir, hay evidencia de que la serie tiene heteroscedasticidad condicional.



Gráfica 2. FAC de la serie tipo de cambio dólar-libra esterlina.



Gráfica 3. Tipo de cambio con una diferencia (DIFF1).



Gráfica 4. FAC y FACP para DIFF1.

Mills decide estimar un modelo GARCH(1, 1) para la varianza condicional. Como en esta sección sólo se quiere reproducir sus resultados, se procede a estimar dicho modelo. Basándose en la expresión alternativa para los modelos GARCH (2.2.2), se estima un modelo ARMA(1, 1) para los residuales al cuadrado, con el fin de obtener valores iniciales de los parámetros. Para ello, se utilizan las relaciones (2.2.3). En el Apéndice 13, p. 63, se encuentran los resultados de esta estimación. Hay que tener en cuenta que RATS reporta los parámetros de promedios móviles con el signo contrario respecto a la notación usual. En el Cuadro 1 se muestran los resultados obtenidos y los que reporta Mills.

Cuadro 1.

	Valores obtenidos en este trabajo			Parámetros de la estimación de Mills
	Parámetros iniciales	Valores finales		
		Parámetros	Errores est.	
α_0	0.000765	0.000087	0.000022	0.000784
α_1	0.054491	0.096132	0.027793	0.050
β_1	0.903941	0.793767	0.040498	0.871

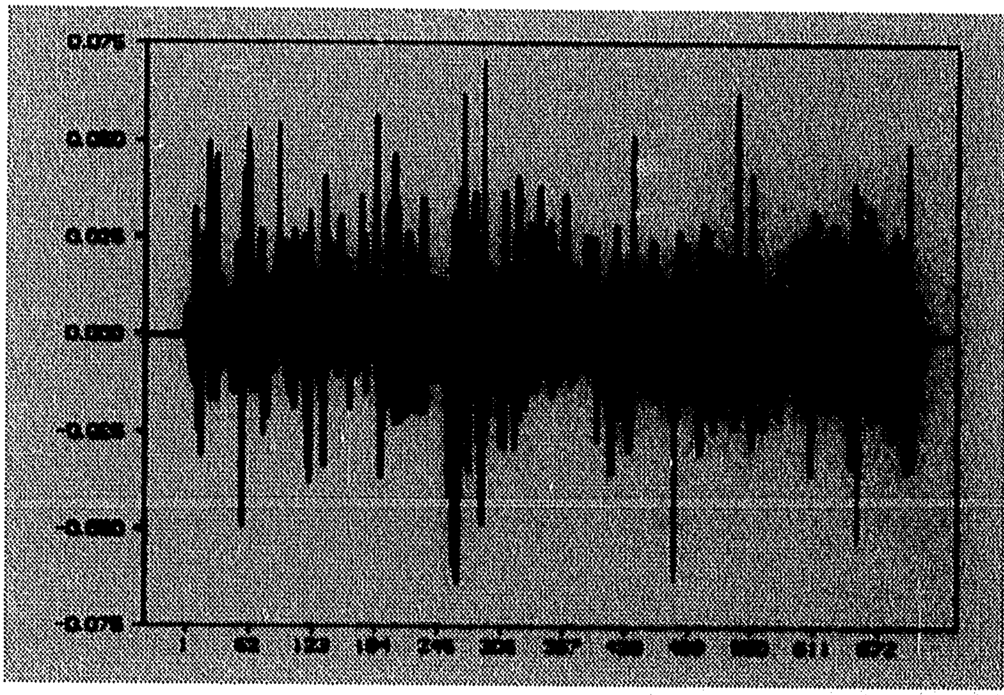
Se observa que los parámetros que reporta Mills se encuentran dentro de los intervalos de ± 2 desviaciones estándar respecto a los valores finales de los parámetros obtenidos en este trabajo, excepto para α_0. Sin embargo, los parámetros y desviaciones estándar reportados por Mills no corresponden a la expresión (2.2.1), sino a la (2.2.2). Nótese que los parámetros obtenidos en este trabajo a partir de la estimación de la expresión (2.2.2) (parámetros iniciales) son bastante parecidos a los de Mills. Esto hace pensar que la estimación de Mills se basó en la expresión (2.2.2) y que no utilizó el método de estimación propuesto por Bollerslev, lo cual puede explicar las diferencias resultantes.

Las instrucciones que se utilizaron en RATS, así como sus resultados, se encuentran en el Apéndice 13.

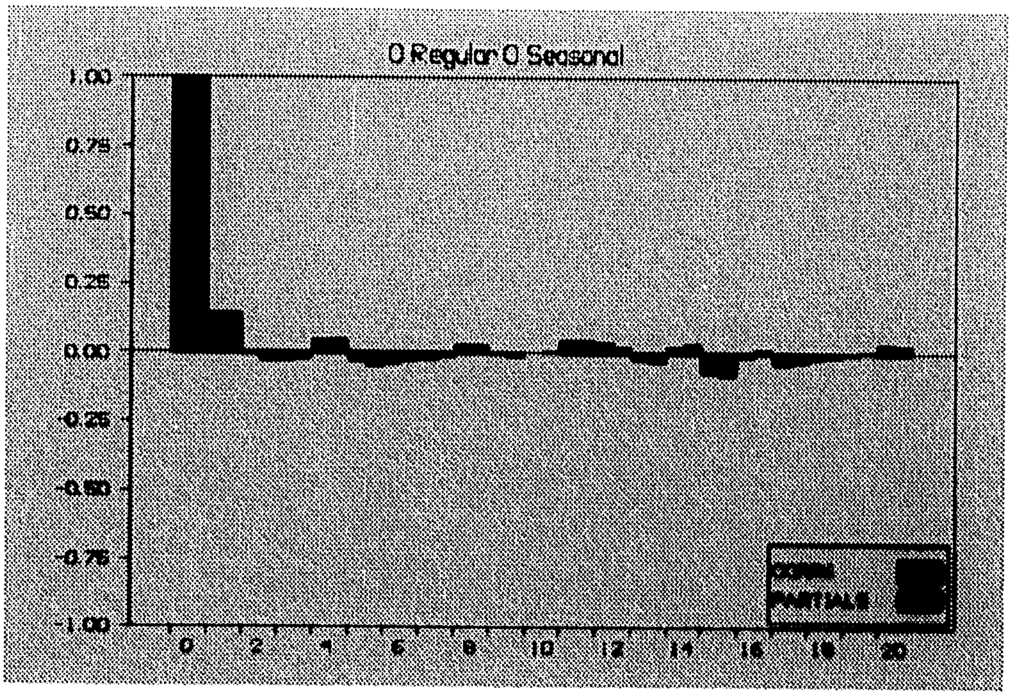
4.2. UN MODELO ARCH PARA LOS RENDIMIENTOS DE LAS ACCIONES DE TELMEX, SERIE L.

Hernández (1994) analiza los rendimientos de las acciones con mayor bursatilidad en la Bolsa Mexicana de Valores. Su objetivo principal es encontrar carteras con riesgo diversificado, por lo que no reporta los modelos individuales. Menciona que, para los datos diarios, ajusta modelos AR(1) para los rendimientos de las distintas acciones, y modelos ARCH(1) para las varianzas condicionales correspondientes, sin embargo no reporta los valores de los parámetros estimados. En esta sección mostramos el proceso completo para construir un modelo ARMA con heteroscedasticidad condicional para los rendimientos de las acciones de Telmex. Esta serie se encuentra dentro de las analizadas por Hernández. Se eligieron estas acciones por su importancia, medida a través de su volumen de operación.

En el Apéndice 14 se muestran los precios diarios de las acciones de Telmex, serie L, en el período del 31 de mayo de 1991 al 30 de marzo de 1994, de donde se obtuvieron los rendimientos correspondientes. Se realizó el procedimiento de coeficiente de variación mínimo para determinar la transformación potencia que estabilice la varianza encontrándose un valor de $\lambda = -1.5$ (véase Guerrero (1993)). Sin embargo, al observar la gráfica de los rendimientos (Gráfica 5), no se encuentra un patrón definido de heteroscedasticidad que pudiera corregirse mediante una transformación potencia. Por esto, y por la dificultad en la interpretación del parámetro λ estimado, se decidió trabajar con la serie sin transformaciones. Al analizar las FAC muestrales de los rendimientos (Gráfica 6), se concluye que no es necesario aplicar el operador diferencia para volver estacionaria la serie. Por otra parte, sólo la primera autocorrelación regular y la primera autocorrelación parcial de los rendimientos resultaron significativas, por lo que se decidió considerar los modelos AR(1), MA(1) y ARMA(1, 1). Los parámetros del modelo ARMA(1, 1) no fueron significativamente distintos de cero al nivel del 5%, mientras que los modelos AR(1) y MA(1) resultaron muy similares en su significancia, por lo que podría usarse cualquiera de los dos. Finalmente se decidió trabajar con un modelo AR(1), por ser éste el utilizado por Hernández. El parámetro autorregresivo resultó significativo al 5%. Por otra parte, el análisis de los residuales no indica la necesidad de incluir una tendencia determinista y el estadístico Q de Ljung-Box para probar la significancia conjunta de las autocorrelaciones muestra un nivel de significancia marginal de 76%. Asimismo, Hernández indica que el estadístico Q* (de Box-Pierce) que obtiene es satisfactorio. Con esto se considera satisfactorio el modelo para la media.



Gráfica 5. Rendimientos de las acciones Telmex-L.



Gráfica 6. FAC para rendimientos de Telmex-L.

Trabajando con los residuales al cuadrado con el fin de identificar un modelo para la varianza condicional, se encontró que las autocorrelaciones regulares y las parciales fueron significativas al nivel del 5% para los rezagos 2, 3 y 5 (ver Gráfica 7). Esto sugiere considerar diversas combinaciones de errores al cuadrado y de varianzas condicionales en los rezagos indicados. De acuerdo a esto, se estimó la expresión (2.2.2) para diversas especificaciones GARCH, pero generaban algunos valores iniciales negativos. Finalmente se encontró que un modelo autorregresivo en los rezagos 2, 3 y 5 proporcionaba valores iniciales apropiados. Esta especificación corresponde a un modelo ARCH en donde la ecuación para la varianza condicional es

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_3 \varepsilon_{t-3}^2 + \alpha_5 \varepsilon_{t-5}^2 .$$

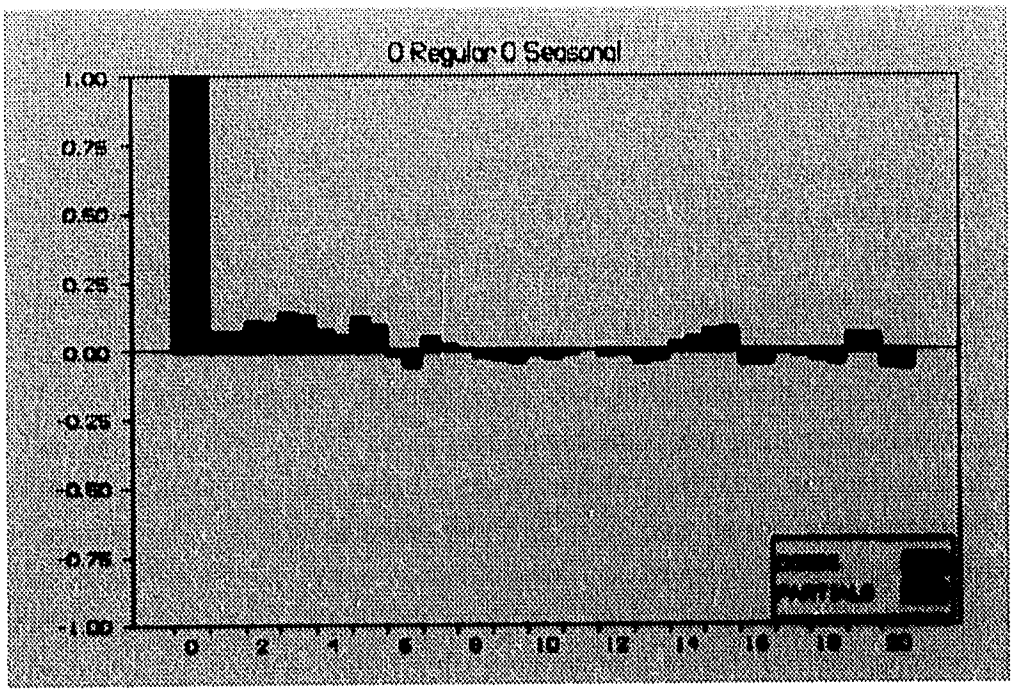
Por otra parte, la prueba de hipótesis correspondiente

$$H_0\text{: } \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$$

vs.

H_A: al menos uno de los parámetros α_2, α_3 ó α_5 es distinto de cero

mostró que sí existen efectos ARCH al obtenerse un valor de la estadística TR^2 de 25.4584, que comparado con una distribución $\chi^2(3)$, tiene un nivel de significancia marginal de 0.012%. Por su parte Hernández realiza pruebas considerando modelos ARCH(1) y ARCH(4), las cuales resultan significativas.

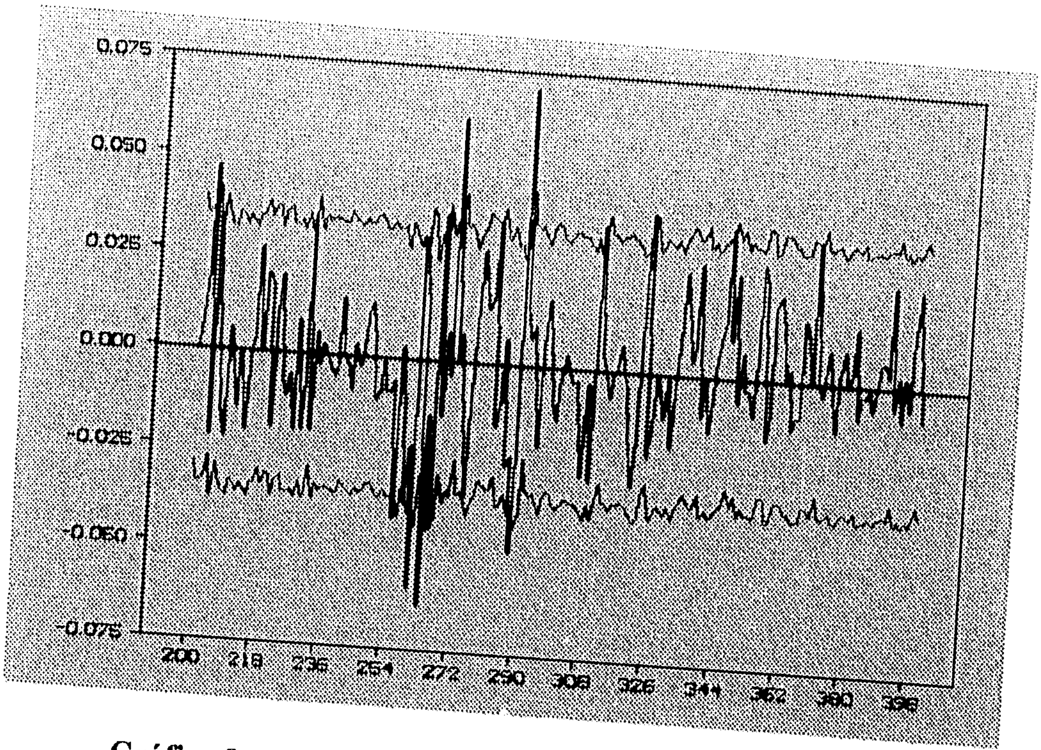


Gráfica 7. FAC y FACP para los residuales al cuadrado del modelo para el nivel medio de los rendimientos de Telmex-L.

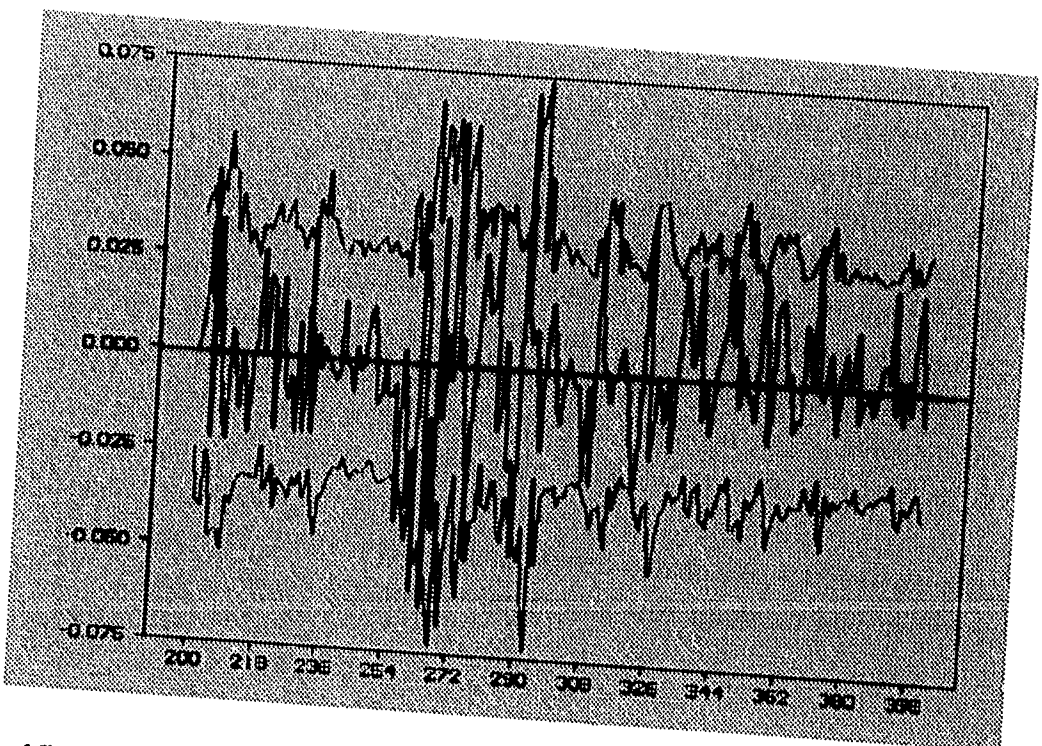
La estimación conjunta proporcionó parámetros significativos al 5%, y los parámetros de la ecuación de la varianza resultaron no negativos. Además se realizaron las siguientes pruebas para la verificación del modelo: Con el fin de verificar el supuesto de independencia de los choques aleatorios η_t, se calcularon las FAC y FACP de éstos y de sus cuadrados η_t^2. Dichas autocorrelaciones no resultaron ser significativamente diferentes de cero al no exceder $2/\sqrt{703}$, que es la desviación estándar calculada en el supuesto de ruido blanco. En cuanto a su media, ésta no muestra ser significativamente diferente de cero. Como una prueba adicional, aunque informal, se checaron los "residuales" de la ecuación de la varianza $\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}_t^2$. Si el modelo está bien especificado, $E\left(\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}_t^2 \middle| H_{t-1}\right) = 0$. Su media fue -5.1×10^{-6}, la cual no excede dos veces su desviación estándar, o sea 4.2×10^{-5}. Asimismo, sus autocorrelaciones parciales no exceden el valor $2/\sqrt{703}$, por lo cual no son significativamente distintas de cero. Por lo tanto, se considera que el modelo estimado es apropiado para describir la heteroscedasticidad que exhiben los rendimientos de las acciones Telmex-L. Se estimó también el modelo que aplica Hernández (AR(1)-ARCH(1)), sin embargo, aunque los parámetros resultaron significativos, el análisis de residuales sugería incluir los rezagos 2, 3 y 5. Es posible que haya utilizado un modelo simple, para simplificar el número de estimaciones que debía realizar.

En las gráficas 8 y 9 se muestran los rendimientos de las acciones Telmex-L junto con los intervalos de confianza al 95% para los errores de pronóstico de los modelos AR(1) y AR(1) con errores ARCH, respectivamente. En ellas se puede apreciar la ventaja de estimar un modelo ARCH, el cual proporciona varianzas condicionales que van cambiando a través del tiempo de acuerdo a períodos de gran volatilidad o de estabilidad. Obsérvese por ejemplo el período comprendido entre las observaciones 250 y 275 en el que se presenta una gran variabilidad de los rendimientos. Este es un período relativamente corto en el que aumenta la incertidumbre al ampliarse el rango de posibles valores de los rendimientos. En la Gráfica 8 se distinguen varias observaciones que exceden en mucho la varianza condicional del modelo AR(1). Por otra parte, en la Gráfica 9 puede apreciarse la propiedad de los modelos ARCH de proporcionar varianzas que cambian en el tiempo. En particular, para este período, los intervalos de confianza se amplían y aunque las mismas observaciones antes mencionadas siguen excediendo estos intervalos, lo hacen sólo marginalmente. Asimismo, pueden apreciarse periodos estables en los que el modelo AR(1)-ARCH genera intervalos de confianza ligeramente menores a los del AR(1) tradicional.

Las instrucciones y resultados del programa en RATS que se utilizaron para realizar los cálculos y generar las gráficas se encuentran en el Apéndice 15.



Gráfica 8. Intervalos de confianza para el modelo AR(1).



Gráfica 9. Intervalos de confianza para el modelo AR(1) con errores ARCH.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS PARA TRABAJOS FUTUROS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se mencionan algunos trabajos que se han desarrollado en relación con el tema de heteroscedasticidad y que no fueron abordados en los capítulos anteriores. Asimismo, se formulan conclusiones y se sugieren diversas líneas de aplicación y desarrollo de modelos heteroscedásticos.

5.1. OTROS TEMAS RELACIONADOS CON LA HETEROSCEDASTICIDAD.

1. Densidades condicionales no normales.- La distribución asociada con series de tiempo que siguen un modelo GARCH, tiene colas más gruesas que las de una Normal (véase la sección 2.1). Sin embargo, para algunos datos, esta distribución aún no los describe apropiadamente. Una variante que ha proporcionado resultados satisfactorios consiste en suponer que los errores siguen condicionalmente una distribución t de Student (véase por ejemplo Bollerslev (1987)). Otras distribuciones que se han empleado se mencionan en Bollerslev, Chou y Kroner (1992, p. 11). En esta última referencia (p. 12) se dan también citas de trabajos en los que se aproxima la función de densidad de los datos en estudio mediante el uso de densidades semiparamétricas. Con esto se consigue mayor flexibilidad en la especificación.

2. Modelos IGARCH. Para algunas series estudiadas a través de modelos GARCH, se han obtenido parámetros estimados que implican que el polinomio característico

$$1-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i x^i-\sum_{i=1}^{p}\beta_i x^i \qquad (5.1.1)$$

tenga raíces cercanas a la unidad. Esto ocasiona que la información actual tenga un efecto importante aún en horizontes lejanos. Lo anterior llevó a Engle y Bollerslev (1986) a proponer los modelos IGARCH (*integrated GARCH*), que se caracterizan porque el polinomio (5.1.1) tiene al menos una raíz unitaria. A la propiedad de estos modelos, de que la información actual mantiene su influencia en las varianzas de pronóstico para todos los horizontes, se le llama persistencia en la varianza.

3. Modelos CHARMA. Dentro de las investigaciones efectuadas para permitir heteroscedasticidad condicional, se han estudiado los modelos RCA (autorregresivos con coeficientes aleatorios), los cuales tienen la característica de permitir que la varianza condicional esté en función de las observaciones pasadas de la variable principal. Por otro lado, la varianza condicional en los modelos ARCH depende sólo de las innovaciones previas. Así, los modelos CHARMA propuestos por Tsay (1987), surgen pensando en una clase de modelos que permitan que la varianza condicional dependa, tanto de las innovaciones previas, como de rezagos de la variable principal, con el fin de obtener una representación más parsimoniosa. En estos modelos se supone un modelo ARMA con coeficientes fijos para la variable principal y que los errores se comportan de acuerdo a una ecuación con coeficientes aleatorios, la cual incorpora la influencia de errores rezagados, del pronóstico de la variable principal y rezagos de ésta, más un término de error de la ecuación, que se supone se comporta como ruido blanco. El uso de estos modelos no se ha generalizado, posiblemente porque la idea de parsimonia que persiguen se ha conseguido con éxito mediante el uso de modelos GARCH, cuyo tratamiento es muy semejante al de los modelos ARCH.

4. Modelos multivariados. Se han realizado diversos estudios en donde se aplican modelos con heteroscedasticidad condicional multivariados. Uno de los primeros de tales trabajos publicados, es el de Kraft y Engle (1983) (citado en Bollerslev, Chou y Kroner (1992)). En estos modelos pueden considerarse, además de las varianzas condicionales, las covarianzas condicionales entre los distintos errores involucrados, que cambian en el tiempo. En la práctica, se utilizan diversos tipos de supuestos para manejar un número relativamente moderado de parámetros. Una de estas simplificaciones consiste en suponer que algunas de las matrices de parámetros involucradas son diagonales. Para mayores detalles sobre ésta y otros tipos de simplificaciones empleados véase Bollerslev, Chou y Kroner (1992).

5.2. CONCLUSIONES.

A partir de la presentación de los modelos ARCH en 1982, las investigaciones sobre representaciones de la heteroscedasticidad condicional se han desarrollado considerablemente generando diversos tipos de modelos. Esto ha permitido una amplia aplicación en estudios bursátiles, tipos de cambio, tasas de interés, etc. En el siguiente cuadro se presentan los trabajos básicos que han permitido el desarrollo teórico y práctico de modelos para la heteroscedasticidad condicional en series univariadas.

PRINCIPALES MODELOS DESARROLLADOS PARA MODELAR LA HETEROSCEDASTICIDAD CONDICIONAL.

Modelo	Desarrollado por
Modelos de regresión con errores ARCH.	Engle (1982).
Modelos de regresión con errores GARCH.	Bollerslev (1986).
Modelos ARCH-M.	Engle, Lilien y Robins (1987).
Modelos ARMA-ARCH.	Weiss (1984).
Modelos ARMA-EGARCH en media.	Nelson (1991).

En general, hace falta todavía desarrollar una teoría asintótica satisfactoria para este tipo de modelos. De hecho lo que actualmente existe deja qué desear, ya que, por ejemplo, para los modelos ARCH y EGARCH, se han determinado condiciones suficientes para la consistencia y normalidad asintótica de los parámetros, sin embargo dichas condiciones son muy restrictivas y son pocas las series que logran satisfacerlas. Para los modelos GARCH-M, la teoría asintótica es más incierta y aún no se conocen condiciones suficientes para la consistencia y normalidad asintótica de los parámetros. En la práctica se trabaja suponiendo que los estimadores máximo-verosímiles son consistentes y asintóticamente normales sin que haya el resultado teórico que garantice esto.

No obstante lo anterior, la utilidad de estos modelos se hace evidente por la gran cantidad de aplicaciones prácticas a diversas variables financieras y económicas de diferentes países. Algunos ejemplos que pueden citarse son la determinación de primas de riesgo en tasas de interés y tipo de cambio, la toma de decisiones relacionadas a la inversión en diversos tipos de activos, los mecanismos de transmisión de información, la determinación de precios de instrumentos derivados, así como el estudio de diversas variables económicas como son los índices de precios, el producto interno bruto, etc. Para mayores detalles sobre éstas y otras aplicaciones consúltese Bollerslev, Chou y Kroner (1992).

Como se ilustró en el capítulo 4, la estimación de los modelos GARCH mediante el empleo del paquete estadístico RATS, versión 4, es relativamente sencilla, sin tener que realizar mucha programación, ya que este paquete tiene una opción para llevar a cabo el algoritmo BHHH que se sugiere en la literatura, y proporciona ejemplos específicos de cómo emplear instrucciones y variables auxiliares en la estimación de los modelos ARCH, GARCH y ARCH-M. Asimismo, es posible que, mediante modificaciones sencillas a estos procedimientos, pueda también llevarse a cabo la estimación de modelos GARCH-M, ARMA-GARCH y ARMA-EGARCH en media.

Por otra parte, una propiedad interesante de los modelos de la clase ARCH es que la sucesión de varianzas condicionales de pronóstico pude no ser monótonamente creciente, como sucede con los modelos tradicionales. Esto se explica por el hecho de que, al igual que en los modelos tradicionales, el límite de la sucesión de varianzas condicionales de pronóstico, conforme el horizonte de pronóstico tiende a infinito, es la varianza incondicional de la serie (véase Engle y Kraft (1983)). Dada esta propiedad, si algún choque aleatorio es suficientemente grande, la varianza condicional de pronóstico puede exceder a la varianza incondicional de la serie. Como esta varianza es el límite de la sucesión de varianzas condicionales, esta sucesión debe decrecer.

Cabe aclarar que el tratamiento de la heteroscedasticidad por medio del uso de transformaciones estabilizadoras de varianza en la construcción de modelos ARMA, no implica que la serie transformada no presente efectos ARCH, ya que dicchas transformaciones buscan homogeneizar la varianza incondicional, mientras que los modelos de la clase ARCH presentan varianza condicional no constante, pero de hecho, su varianza incondicional es constante.

Por último, hay que enfatizar que la importancia de estos modelos no se encuentra en el pronóstico puntual, ya que los parámetros del modelo para la variable principal no cambian mucho al incluir la ecuación ARCH. Lo relevante es que la incertidumbre que se tiene al realizar un pronóstico, medida a través de la varianza condicional, cambia a través del tiempo. De este modo, el tener una mejor estimación de la incertidumbre asociada al pronóstico de alguna variable aleatoria en estudio, permite tomar decisiones más realistas.

APÉNDICES

El número de apéndice indica el orden en que aparecen las referencias a ellos en el texto principal.

1.- <u>FAC</u> - Función de autocorrelación. Ya que comúnmente se supone que la distribución asociada a las series de tiempo es la Normal, es suficiente conocer la media y la función de autocovarianzas $\{\gamma_i\}$ para caracterizar completamente a una serie estacionaria, sin embargo, es más conveniente trabajar con la función de autocorrelaciones $\{\rho_i\}$ la cual está definida por

$$\rho_i = \frac{E[(y_t - \mu)(y_{t+i} - \mu)]}{E(y_t - \mu)^2} = \frac{\gamma_i}{\gamma_0}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Debido a que sólo se cuenta con una realización finita del proceso y a que $\gamma_i = \gamma_{-i}$, en la práctica se trabaja con la función de autocorrelación muestral dada por

$$\hat{\rho}_i = \frac{\hat{\gamma}_i}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=1}^{T-i}(y_t - \hat{\mu})(y_{t+i} - \hat{\mu})}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{\mu})^2}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

con

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t;$$

y tiene la propiedad de proporcionar estimaciones bastante cercanas a las autocorrelaciones reales (cuando se tienen más de 50 observaciones).

Algunas propiedades típicas de la FAC son las siguientes:

- Cuando la FAC muestra una convergencia a cero de manera lenta, es un indicativo de que la serie de tiempo es no estacionaria (se recomienda aplicar el operador diferencia (∇) un número apropiado de veces para volver estacionaria la serie).

- Cuando sólo las primeras l autocorrelaciones son distintas de cero es un indicativo de que posiblemente un modelo apropiado para la serie es un proceso MA de orden l.
- Cuando las primeras l autocorrelaciones tienen un comportamiento irregular y después muestran convergencia a cero es un indicativo de que posiblemente un modelo apropiado para la serie es un proceso ARMA(k, l).
- Una autocorrelación es significativamente distinta de cero si su valor absoluto es mayor de dos veces la varianza de la misma autocorrelación.

Para mayores detalles véase Guerrero (1991).

2.- <u>FACP</u> - Función de autocorrelación parcial. Esta función es útil para determinar el orden de un proceso AR. Se define como la sucesión de valores $\{\phi_{ii}\}$ dados por

$$\phi_{11}=\rho_1,\quad \phi_{22}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_1 & \rho_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1\end{vmatrix}},\quad \phi_{33}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \rho_2\\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \rho_2\\ \rho_1 & 1 & \rho_1\\ \rho_2 & \rho_1 & 1\end{vmatrix}},\ \dots,$$

y en general

$$\phi_{ii}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{i-2} & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{i-3} & \rho_2\\ & & & \cdots & & \\ \rho_{i-1} & \rho_{i-2} & \rho_{i-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{i-2} & \rho_{i-1}\\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{i-3} & \rho_{i-2}\\ & & & \cdots & & \\ \rho_{i-1} & \rho_{i-2} & \rho_{i-3} & \cdots & \rho_1 & 1\end{vmatrix}}.$$

A la i-ésima autocorrelación parcial ϕ_{ii} se le ve como una función del rezago i. En la práctica, su estimación se obtiene substituyendo las autocorrelaciones ρ_j por sus correspondientes estimaciones $\hat{\rho}_j$.

Algunas propiedades típicas de la FACP son las siguientes:

- Cuando sólo las primeras k autocorrelaciones parciales son distintas de cero es un indicativo de que posiblemente un modelo apropiado para la serie es un proceso AR de orden k.
- Cuando se comporta como una sucesión infinita convergente a cero es necesario analizar la FAC para determinar un posible modelo.
- Una autocorrelación parcial es significativamente distinta de cero si su valor absoluto es mayor de dos veces la varianza estimada de la misma autocorrelación parcial.

Para mayores detalles véase Guerrero (1991).

3.- Transformaciones potencia. En el proceso de construcción de modelos para series de tiempo, las transformaciones potencia son usualmente utilizados para estabilizar la varianza de una serie. Así, si a cada tiempo t, y_t, variable aleatoria positiva, tiene varianza γ_t, el objetivo es encontrar una transformación potencia del tipo

$$\Lambda(y_t)=\begin{cases} y_t^{\lambda} & \text{si } \lambda\neq 0 \\ \ln(y_t) & \text{si } \lambda=0 \end{cases}$$

de modo que la nueva serie $\{\Lambda(y_t)\}$ tenga varianza constante. Sin embargo, un inconveniente de esta técnica es que a veces es difícil determinar la interpretación práctica de la serie transformada $\{\Lambda(y_t)\}$ con respecto a la serie original $\{y_t\}$. Sobre el procedimiento para elegir el parámetro λ, véase Guerrero (1993) o Guerrero (1991).

4.- TEOREMA.- Estacionariedad de los modelos ARCH (Engle (1982)). Un proceso ARCH lineal de orden q, con $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$, es estacionario en covarianzas si y sólo si todas las raíces de la ecuación característica asociada están fuera del círculo unitario. Además, la varianza del proceso está dada por

$$E\left(y_t^2\right)=\frac{\alpha_0}{1-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i}.$$

Demostración. (Nota.- En esta demostración se supone que el proceso comienza indefinidamente lejos en el pasado, con varianza finita.) Sean $\boldsymbol{w}_t = \left(y_t^2, y_{t-1}^2, \ldots, y_{t-p}^2\right)'$, $\boldsymbol{b} = (\alpha_0, 0, \ldots, 0)'$, y

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$E\left(\boldsymbol{w}_t \middle| H_{t-1}\right) = \boldsymbol{b} + A\,\boldsymbol{w}_{t-1}.$$

Tomando esperanzas sucesivas se tiene que

$$E\left(\boldsymbol{w}_t \middle| H_{t-k}\right) = \left(I + A + A^2 + \ \ldots \ + A^{k-1}\right)\boldsymbol{b} + A^k \boldsymbol{w}_{t-1}.$$

Dado que la serie empieza indefinidamente lejos en el pasado con varianza finita, el límite de esta expresión existe si y sólo si todos los valores propios de la matriz A están dentro del círculo unitario, y está dado por

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\boldsymbol{w}_t \middle| H_{t-k}\right) = (I - A)^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{A.1}$$

Esta expresión no depende de condiciones iniciales o del tiempo, $\therefore$ este vector da la varianza común para todo t. Como es sabido, la condición sobre los valores propios antes mencionada es equivalente a que todas las raíces de la ecuación característica formada por los α's se encuentren fuera del círculo unitario (véase Anderson (1958, p. 177)). Finalmente, el límite del primer elemento de (A.1) puede reescribirse como

$$E\left(y_t^2\right) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i}.$$

5.- <u>Demostración del TEOREMA 1</u>. (Nota.- En esta demostración se supone que el proceso comienza indefinidamente lejos en el pasado, con los primeros $2r$ momentos finitos.) Sea $\boldsymbol{w}_t = \left(y_t^{2r}, y_t^{2(r-1)}, \ldots, y_t^2\right)'$.

Primeramente, se probará que existen una matriz $r \times r$ triangular superior A y un vector $r \times 1$ $\boldsymbol{b}$ tales que

$$E(\boldsymbol{w}_t | H_{t-1}) = \boldsymbol{b} + A\boldsymbol{w}_{t-1}. \tag{A.2}$$

Para cualquier variable aleatoria u con distribución $N(0, \sigma^2)$ se tiene que

$$E\left(u^{2m}\right) = \sigma^{2m}\prod_{i=1}^{m}(2i-1).$$

Dado que la distribución condicional de y_t es Normal,

$$E\left(y_t^{2m}\middle|H_{t-1}\right) = \sigma_t^{2m}\prod_{i=1}^{m}(2i-1)$$

$$= \left(\alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_0\right)^m\prod_{i=1}^{m}(2i-1). \qquad \text{(A.3)}$$

Si $m \le r$, al expandir esta última expresión se observa que el momento es una combinación lineal de $\boldsymbol{w}_{t-1}$. Además, sólo están involucradas las potencias pares menores o iguales a $2m$, por lo que la matriz A es triangular superior. Conformando al vector $\boldsymbol{b}$ con los términos constantes de (A.3) para $m = 1, \ldots, r$; se tiene que la relación (A.2) es válida.

Así,

$$E(\boldsymbol{w}_t|H_{t-2}) = \boldsymbol{b} + A(\boldsymbol{b} + A\boldsymbol{w}_{t-2})$$

y, en general,

$$E(\boldsymbol{w}_t|H_{t-k}) = (I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1})\boldsymbol{b} + A^k\boldsymbol{w}_{t-k}).$$

Como la serie empieza indefinidamente lejos en el pasado con $2r$ momentos finitos, el límite cuando k tiende a infinito existe si y sólo si todos los valores propios de la matriz A están dentro del círculo unitario. El límite puede escribirse como

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\boldsymbol{w}_t\middle|H_{t-k}\right) = (I - A)^{-1}\boldsymbol{b},$$

que no depende ni de variables condicionantes ni del tiempo. ∴, esta es una expresión de los momentos estacionarios de la distribución incondicional de y

$$E\left(\boldsymbol{w}_t\right) = (I - A)^{-1}\boldsymbol{b}. \qquad \text{(A.4)}$$

Lo que hace falta ahora es establecer que la condición del teorema es necesaria y suficiente para que todos los valores propios se encuentren dentro del círculo unitario. Como la matriz es triangular superior, sus valores propios son los elementos de la diagonal. En (A.3) se observa que dichos elementos son simplemente

$$\alpha_1^m\prod_{i=1}^{m}(2i-1) = \prod_{i=1}^{m}\alpha_1(2i-1) \equiv \theta_m, \text{ para } m = 1, \ldots, r.$$

Si no se da la condición del teorema $\Rightarrow$ $\theta_r \ge 1$, esto es, no todos los valores propios se encuentran dentro del círculo unitario, ∴ la condición es necesaria. Para ver la suficiencia, nótese que θ_m es un producto de m factores positivos que son monótonamente crecientes. Primeramente, el que se cumpla la condición garantiza que $\theta_r < 1$. Falta probar que esto implica también que $\theta_m < 1$ para $m < r$. Si el m-ésimo factor es menor que uno, todos los demás factores en θ_m también serán menores que uno, $\therefore\ \theta_m < 1$. Si el m-ésimo factor es mayor que uno, los siguientes factores también lo serán, así como su producto $\prod_{i=m+1}^{r} \alpha_1(2i-1)$.

$$\therefore \qquad 1 < \prod_{i=m+1}^{r} \alpha_1(2i-1) \quad \Rightarrow \quad \theta_m < \theta_m \prod_{i=m+1}^{r} \alpha_1(2i-1) = \theta_r < 1.$$

6.- Estimación de parámetros ARCH. Supóngase que cada observación y_t se distribuye condicionalmente como una Normal con media cero y varianza σ_t^2,

$$y_t \mid H_t \sim N(0,\ \sigma_t^2),$$

donde σ_t^2 está dada por (A.5)

$$\sigma_t^2 = h(y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-q}, \alpha),$$

con α un vector de parámetros desconocidos. El vector de observaciones $y = (y_1, \ldots, y_T)'$ tiene una función de densidad conjunta dada por el producto de las densidades condicionales (véase Engle (1982)), es decir, si la función de densidad de la t-ésima observación es

$$f(y_t|0,\sigma_t^2) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_t^2} y_t^2\right) \Big/ \sqrt{2\pi\sigma_t^2} = \exp\left(-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \Big/ \sqrt{2\pi\sigma_t^2},$$

entonces, la densidad conjunta es

$$\prod_{t=1}^{T} f(y_t|0,\sigma_t^2) = \prod_{t=1}^{T} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \Big/ \sqrt{2\pi\sigma_t^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{T}{2}} \exp\left(-\sum_{t=1}^{T} \frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \Big/ \prod_{t=1}^{T} \sqrt{\sigma_t^2}$$

y la función de verosimilitud correspondiente es

$$L(\alpha|y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{T}{2}} \exp\left(-\sum_{t=1}^{T} \frac{y_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \Big/ \prod_{t=1}^{T} \sqrt{\sigma_t^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \ln[L(\alpha|y)] = \ln\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{T}{2}}\right] - \sum_{t=1}^{T}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sigma_t^2\right) + \frac{1}{2}\frac{y_t^2}{\sigma_t^2}\right],$$

Si se denota por ℓ al logaritmo de la verosimilitud (log-verosimilitud) y por ℓ_t a la log-verosimilitud de la t-ésima observación, se tiene que, salvo algunas constantes irrelevantes para la maximización,

$$\ell = \sum_{t=1}^{T}\ell_t,$$

$$\ell_t = -\frac{1}{2}\ln\left(\sigma_t^2\right) - \frac{1}{2}\frac{y_t^2}{\sigma_t^2}.$$

Entonces, los estimadores del vector de parámetros $\boldsymbol{\alpha}$ pueden obtenerse maximizando a esta verosimilitud. La primera derivada es

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ell_t}{\partial\alpha} &= -\frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2}\right)\\ &= -\frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha} + \frac{1}{2}\left(y_t^2\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha}\Big/\sigma_t^4\right)\\ &= -\frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha} + \frac{y_t^2}{2\sigma_t^4}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha}\\ &= \frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha}\left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right),\end{aligned}$$

y el hessiano está dado por

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ell_t}{\partial\alpha'\partial\alpha} &= \frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha'}\left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right) + \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right)\frac{\partial}{\partial\alpha'}\left(\frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha}\right)\\ &= -\frac{y_t^2}{2\sigma_t^6}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha'} + \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right)\frac{\partial}{\partial\alpha'}\left(\frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha}\right)\\ &= -\frac{1}{2\sigma_t^4}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha'}\frac{y_t^2}{\sigma_t^2} + \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right)\frac{\partial}{\partial\alpha'}\left(\frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha}\right).\end{aligned} \qquad \text{(A.6)}$$

Por otra parte, la matriz de información, definida como menos el promedio de las esperanzas de las esperanzas condicionales de los hessianos (véase Engle (1982)), tiene la forma

$$\Im_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} E\left(E\left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\alpha'\partial\alpha} \middle| H_{t-1} \right)\right)$$
$$= \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{2T} E\left(\frac{1}{\sigma_t^4} \frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha} \frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha'} \right)$$

puesto que bajo el supuesto (A.5), $E\left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2} \middle| H_{t-1} \right) = 1$, y la esperanza condicional del segundo término de (A.6) es cero. Esta matriz de información, puede estimarse consistentemente a través de

$$\hat{\Im}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{2\sigma_t^4} \frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha} \frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha'} \right)$$

Un caso particular es aquél en el que la función h es una función lineal de orden q, de modo que la varianza condicional puede escribirse como

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \ \dots \ + \alpha_q y_{t-q}^2,$$

o equivalentemente como

$$\sigma_t^2 = \upsilon_t' \alpha,$$

con

$$\upsilon_t = (1,\ y_{t-1}^2, \dots ,\ y_{t-q}^2)'$$

y

$$\alpha = (\alpha_0, \dots , \alpha_q)'$$

En este caso, el gradiente y la matriz de información adquieren una forma particular dada por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial\ell_t}{\partial\alpha} = \frac{1}{2\sigma_t^2}\upsilon_t\left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right)$$

puesto que $\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\alpha} = \upsilon_t$, y análogamente

$$\hat{\Im}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2T}\sum_{t=1}^{T}\left(\upsilon_t \upsilon_t' / \sigma_t^4 \right).$$

7.- <u>Límite en probabilidad</u>. Se dice que la variable aleatoria y es el límite en probabilidad de la sucesión de variables aleatorias $\{y_n\}$, y se denota

$$\text{plim}\, y_n = y,$$

si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \text{P}\{|y_n - y| > \varepsilon\} = 0$ (Fuller (1976)).

8.- <u>Exogeneidad</u>. Esencialmente, una variable aleatoria z_t en un modelo es débilmente exógena para estimar un conjunto de parámetros de interés, si la especificación precisa de la densidad de z_t es irrelevante para el análisis. Si además z_t no es causada en el sentido de Granger por ninguna de las variables endógenas, se dice que es fuertemente exógena (para mayores detalles véase Engle, Hendry y Richard (1983)).

9.- <u>Estimación de modelos ARCH-M</u>. Estos modelos se estiman por máxima verosimilitud. A continuación se muestra la expresión analítica de la primera derivada de la verosimilitud.

Denótese por $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{b}', d)' = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{j+r+m+1})'$ al vector de parámetros del modelo (2.3.1). Omitiendo algunas constantes irrelevantes, la función de log-verosimilitud está dada por

$$\ell(\varphi) = \sum_t \ell_t(\varphi), \qquad \ell_t(\varphi) = -\frac{1}{2}\ln\left(\sigma_t^2\right) - \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}.$$

Se presenta primeramente la expresión de la derivada de $\dfrac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}$ para utilizarla posteriormente en la obtención de la derivada de la log-verosimilitud.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varepsilon_t^2}{\partial\varphi} &= 2\varepsilon_t\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\varphi} = 2\varepsilon_t\left(-\frac{\partial\boldsymbol{b}'}{\partial\varphi}\boldsymbol{x}_t - \left(d\frac{\partial\sigma_t}{\partial\varphi} + \sigma_t\frac{\partial d}{\partial\varphi}\right)\right)\\ &= -2\varepsilon_t\left(\frac{\partial\boldsymbol{b}'}{\partial\varphi}\boldsymbol{x}_t + \frac{d}{2\sigma_t}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\varphi} + \sigma_t\frac{\partial d}{\partial\varphi}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right) &= \left[\sigma_t^2\frac{\partial\varepsilon_t^2}{\partial\varphi} - \varepsilon_t^2\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\varphi}\right]\sigma_t^{-4}\\ &= \left[-2\sigma_t^2\varepsilon_t\left(\frac{\partial\boldsymbol{b}'}{\partial\varphi}\boldsymbol{x}_t + \sigma_t\frac{\partial d}{\partial\varphi}\right) - \left(\sigma_t\varepsilon_t d + \varepsilon_t^2\right)\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\varphi}\right]\sigma_t^{-4}.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \varphi} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_t^2 - \sigma_t \varepsilon_t d - \varepsilon_t^2\right)\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \varphi} - 2\sigma_t^2 \varepsilon_t\left(\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \varphi}x_t + \sigma_t \frac{\partial d}{\partial \varphi}\right)\right]\sigma_t^{-4},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \ell}{\partial \varphi} = \sum_t \frac{1}{2}\left(\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 + \sigma_t \varepsilon_t d\right)\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \varphi}\sigma_t^{-4} + \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t^2}\left(\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \varphi}x_t + \sigma_t \frac{\partial d}{\partial \varphi}\right). \qquad \text{(A.7)}$$

Esta última expresión presenta errores y omisiones tipográficos en el artículo de Engle, Lilien y Robins (1987).

La complicación principal que se presenta en la estimación de este tipo de modelos es la evaluación de $\partial \sigma_t^2 / \partial \varphi$, ya que esta derivada depende de las derivadas de innovaciones previas, y éstas a su vez dependen de las derivadas de σ si d es distinto de cero. Es por esto que el cálculo de las derivadas en cuestión debe realizarse de manera recursiva suponiendo que los valores iniciales no dependen de los parámetros.

En los primeros análisis reportados en Engle, Lilien y Robins (1982) se calcularon recursivamente derivadas analíticas para evaluar (A.7). Sin embargo, al emplear derivadas numéricas se obtuvieron resultados similares, los cálculos fueron más fáciles y se consiguió mayor flexibilidad para cambios en la especificación del modelo. En consecuencia, los autores consideran que esta última puede ser la mejor manera de estimar los modelos ARCH-M.

Para maximizar la función de verosimilitud se sugiere utilizar el algoritmo iterativo de Berndt, Hall, Hall y Hausman (1974) (en lo sucesivo BHHH). Bajo condiciones de regularidad suficientes, se tiene que

$$(S'S)^{1/2}(\varphi_* - \varphi_0) \overset{A}{\sim} N(\mathbf{0}, I),$$

donde S es la matriz de $T \times (j + r + m + 1)$ cuya t,i-ésima entrada es $\dfrac{\partial \ell_t}{\partial \varphi_i}$,

φ_* es el estimador obtenido por medio del método BHHH, y

φ_0 es el verdadero valor de los parámetros

(cf. Engle, Lilien y Robins (1987)).

A diferencia de los modelos de regresión con errores ARCH, la matriz de información de los modelos ARCH-M no es diagonal por bloques entre los parámetros de la media y los de la varianza, por lo que la estimación consistente de este tipo de modelos requiere que el modelo completo esté correctamente especificado (Bollerslev, Chou y Kroner (1992)).

Engle, Lilien y Robins indican que la teoría sobre la distribución asintótica para estos modelos queda por investigarse.

10.- Condiciones de regularidad para los modelos ARMA-ARCH. Para que el proceso esté bien definido se requiere que α_i y $\delta_i \geq 0$. También se tiene que la ecuación en diferencias en $E\left(\sigma_t^2\right)$ que se obtiene al substituir expresiones para $\left(\hat{y}_t - \mu\right)^2$ y $\left(y_{t-i} - \mu\right)^2$ de (3.1.1) en (3.1.2) es estable si

$$\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{i=0}^{r}\delta_i\left(\frac{Var\left(y_t\right)}{Var\left(\varepsilon_t\right)}\right) - \delta_0 < 1$$

(ver Weiss (1984)).

11.- FCC - Función de correlación cruzada. Sea $\{x_t, y_t\}$ un proceso estocástico discreto bivariado estacionario. Entonces x_t y y_t tienen medias μ_x y μ_y y varianzas σ_x^2 y σ_y^2 constantes. Asimismo, las cantidades $E[(x_t - \mu_x)(x_{t+i} - \mu_x)]$ y $E[(y_t - \mu_y)(y_{t+i} - \mu_y)]$ son invariantes en el tiempo y se denotarán por $\gamma_{xx}(i)$ y $\gamma_{yy}(i)$, las autocovarianzas de x y de y, respectivamente. En el análisis del proceso bivariado $\{x_t, y_t\}$, hace falta considerar también las covarianzas cruzadas

$$E[(x_t - \mu_x)(y_{t+i} - \mu_y)], \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

las cuales no dependen de t, y se les denotará por $\gamma_{xy}(i)$. En la misma forma, puede definirse $\gamma_{yx}(i)$, sin embargo nótese que $\gamma_{xy}(i) = \gamma_{yx}(-i)$. Las correlaciones cruzadas están dadas por

$$\rho_{xy}(i) = \frac{\gamma_{xy}(i)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

A $\rho_{xy}(i)$ vista como función del desfase i se le conoce como la función de correlación cruzada del proceso bivariado $\{x_t, y_t\}$. Cabe hacer notar que, en general, $\rho_{xy}(i) \neq \rho_{xy}(-i)$, por lo que, a diferencia de la función de autocorrelación, la función de correlación cruzada no es simétrica respecto a $i = 0$. La FCC sirve para detectar causalidades entre los procesos $\{x_t\}$ y $\{y_t\}$; su dirección y su distancia (i). Para mayores detalles véase Box y Jenkins (1976).

12.- Tipo de cambio nominal dólar-libra esterlina
(datos semanales de enero de 1980 a diciembre de 1988).

1:	51:	101:	151:	201:	251:	301:	351:	401:	451:
2.24	2.34	1.94	1.63	1.49	1.19	1.41	1.48	1.65	1.70
2.26	2.34	1.89	1.60	1.49	1.22	1.41	1.44	1.65	1.69
2.29	2.38	1.88	1.64	1.47	1.26	1.43	1.44	1.66	1.68
2.26	2.40	1.89	1.61	1.46	1.26	1.42	1.43	1.64	1.70
2.27	2.39	1.91	1.61	1.46	1.25	1.44	1.43	1.62	1.68
2.30	2.41	1.92	1.61	1.44	1.22	1.42	1.41	1.65	1.67
2.30	2.37	1.87	1.62	1.41	1.20	1.42	1.41	1.66	1.69
2.28	2.34	1.87	1.61	1.43	1.20	1.45	1.43	1.68	1.70
2.27	2.28	1.88	1.58	1.45	1.19	1.49	1.43	1.72	1.76
2.23	2.31	1.86	1.57	1.41	1.18	1.48	1.42	1.78	1.76
2.21	2.20	1.84	1.54	1.41	1.16	1.44	1.43	1.77	1.77
2.18	2.19	1.85	1.52	1.40	1.15	1.42	1.43	1.80	1.77
2.17	2.22	1.82	1.54	1.40	1.12	1.44	1.43	1.81	1.82
2.14	2.27	1.84	1.54	1.43	1.12	1.44	1.43	1.80	1.82
2.20	2.23	1.80	1.53	1.41	1.11	1.45	1.46	1.84	1.84
2.22	2.21	1.80	1.51	1.45	1.12	1.44	1.49	1.84	1.86
2.18	2.18	1.79	1.50	1.47	1.11	1.39	1.48	1.83	1.85
2.26	2.15	1.79	1.49	1.48	1.10	1.41	1.52	1.88	1.81
2.27	2.17	1.76	1.46	1.46	1.08	1.40	1.52	1.81	1.80
2.28	2.14	1.76	1.48	1.45	1.07	1.42	1.51	1.78	1.81
2.33	2.12	1.77	1.50	1.44	1.07	1.45	1.51	1.78	
2.35	2.07	1.79	1.55	1.44	1.08	1.45	1.52	1.77	
2.33	2.07	1.83	1.55	1.43	1.17	1.45	1.53	1.76	
2.34	2.07	1.83	1.56	1.43	1.24	1.46	1.55	1.74	
2.34	1.93	1.80	1.58	1.42	1.20	1.51	1.59	1.75	
2.35	1.96	1.79	1.57	1.40	1.26	1.48	1.58	1.77	
2.36	1.97	1.80	1.56	1.41	1.29	1.45	1.60	1.77	
2.38	1.95	1.77	1.60	1.38	1.22	1.48	1.60	1.85	
2.37	1.89	1.75	1.57	1.39	1.21	1.52	1.61	1.82	
2.39	1.89	1.72	1.57	1.38	1.23	1.54	1.63	1.84	
2.33	1.86	1.73	1.52	1.40	1.26	1.52	1.63	1.88	
2.37	1.84	1.71	1.55	1.39	1.26	1.54	1.66	1.88	
2.38	1.84	1.72	1.53	1.38	1.29	1.53	1.67	1.89	
2.37	1.79	1.76	1.54	1.36	1.27	1.50	1.67	1.88	
2.40	1.81	1.74	1.52	1.36	1.28	1.47	1.67	1.88	
2.41	1.88	1.71	1.52	1.32	1.29	1.50	1.70	1.86	
2.41	1.85	1.70	1.52	1.32	1.31	1.52	1.64	1.89	
2.39	1.84	1.74	1.49	1.32	1.33	1.50	1.63	1.86	
2.39	1.78	1.74	1.48	1.31	1.39	1.53	1.65	1.86	
2.39	1.84	1.73	1.52	1.33	1.40	1.54	1.62	1.79	
2.40	1.79	1.71	1.50	1.31	1.41	1.50	1.61	1.82	
2.42	1.82	1.71	1.50	1.32	1.37	1.50	1.61	1.78	
2.44	1.91	1.71	1.49	1.31	1.36	1.48	1.61	1.75	
2.44	1.83	1.70	1.50	1.31	1.40	1.49	1.61	1.70	
2.42	1.82	1.71	1.50	1.27	1.40	1.47	1.60	1.70	
2.40	1.84	1.70	1.50	1.27	1.39	1.49	1.59	1.66	
2.36	1.88	1.70	1.51	1.25	1.33	1.49	1.57	1.74	
2.36	1.91	1.68	1.50	1.24	1.34	1.49	1.59	1.71	
2.34	1.90	1.66	1.50	1.24	1.37	1.50	1.63	1.69	
2.32	1.96	1.65	1.50	1.23	1.41	1.48	1.63	1.72	

Fuente: Apéndice de datos en Mills (1993).

13.- Programa en RATS para el ejemplo de Mills.

```
* Envía resultados al archivo SALIDA-M.
OPEN OUTPUT SALIDA-M
CAL(IRR)
ALL 470
OPEN DATA EXCH.WKS
DATA(ORG=OBS,FOR=WKS) / Y
GRAPH
# Y

* MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN BOX-JENKINS.
* Calcula la FAC y FACP de la serie original y de su primera diferencia.
SOURCE(NOECHO) BJIDENT.SRC
@BJIDENT(DIFFS=1) Y
DIFFERENCE(DIFFS=1) Y / DIFF1
GRAPH
# DIFF1
COR(NUM=12, PAR=FACP) DIFF1

* Prueba de multiplicadores de Lagrange para detectar efectos ARCH.
SET RES2 = DIFF1**2
LINREG RES2
# CONSTANT RES2{1 TO 4}
COMPUTE CHISTAT=%NOBS*%RSQUARED
CDF CHISQR CHISTAT 4

* ESTIMACIÓN.

* Cálculo de valores iniciales para la ecuación GARCH.
BOXJENK(CONSTANT,AR=1,MA=1) RES2

* Estimación del modelo completo.
SET U = 0.0
SET V = 0.0
NONLIN A0 A1 B1
FRML REGRESID = DIFF1
FRML GARCHVAR = A0 + A1*U{1}**2 + B1*V{1}
FRML GARCHLOGL = V(T)=GARCHVAR(T), U(T)=REGRESID(T), $
                 -.5 * (LOG(V) + U**2 / V)
COMPUTE A0=%BETA(1), A1=%BETA(2)+%BETA(3), B1=-%BETA(3)
MAXIMIZE(ITE=30, METHOD=BHHH, RECURSIVE) GARCHLOGL 2 *
```

Resultados del programa del ejemplo de Mills.

```
CAL(IRR)
ALL 470
OPEN DATA EXCH.WKS
DATA(ORG=OBS,FOR=WKS) / Y
GRAPH
# Y
```

```
* MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN BOX-JENKINS.
* Calcula la FAC y FACP de la serie original y de su primera diferencia.
SOURCE(NOECHO) BJIDENT.SRC
@BJIDENT(DIFFS=1) Y
DIFFERENCE(DIFFS=1) Y / DIFF1
GRAPH
# DIFF1
COR(NUM=12, PAR=FACP) DIFF1
Correlations of Series DIFF1
Autocorrelations
     1: -0.0641614  0.0085976  0.0790585  0.0565657 -0.0228446  0.0035278
     7:  0.0806070 -0.0125529  0.0086327  0.0437975 -0.0668933  0.0178771

Partial Autocorrelations
     1: -0.0641614  0.0044995  0.0802283  0.0674198 -0.0162606 -0.0070412
     7:  0.0718197 -0.0027130  0.0084323  0.0331574 -0.0711562  0.0105843


* Prueba de multiplicadores de Lagrange para detectar efectos ARCH.
SET RES2 = DIFF1**2
LINREG RES2
# CONSTANT RES2{1 TO 4}

Dependent Variable RES2 - Estimation by Least Squares
Usable Observations    465      Degrees of Freedom   460
Centered R**2      0.040233     R Bar **2   0.031887
Uncentered R**2    0.228733     T x R**2    106.361
Mean of Dependent Variable      0.0007608602
Std Error of Dependent Variable 0.0015407032
Standard Error of Estimate      0.0015159399
Sum of Squared Residuals        0.0010571140
Regression F(4,460)                   4.8207
Significance Level of F           0.00081099
Durbin-Watson Statistic             1.999000
Q(36)                              82.752569
Significance Level of Q           0.00001524

   Variable                        Coeff        Std Error       T-Stat     Signif
*******************************************************************************
1.  Constant                  0.0005107047 0.0000941104     5.426655  0.00000009
2.  RES2{1}                   0.0469668296 0.0463415519     1.013493  0.31135760
3.  RES2{2}                   0.0336193681 0.0459537990     0.731591  0.46479099
4.  RES2{3}                   0.1380688979 0.0459721692     3.003315  0.00281614
5.  RES2{4}                   0.1098854546 0.0463736935     2.369564  0.01822088

COMPUTE CHISTAT=%NOBS*%RSQUARED
CDF CHISQR CHISTAT 4
Chi-Squared(4)=      18.708321 with Significance Level 0.00089672
```

```
* ESTIMACIÓN.

* Cálculo de valores iniciales para la ecuación GARCH.
BOXJENK(CONSTANT,AR=1,MA=1) RES2

Dependent Variable RES2 - Estimation by Box-Jenkins
Iterations Taken    20
Usable Observations     468      Degrees of Freedom   465
Centered R**2      0.034223      R Bar **2    0.030070
Uncentered R**2    0.224491      T x R**2     105.062
Mean of Dependent Variable       0.0007600427
Std Error of Dependent Variable 0.0015360778
Standard Error of Estimate       0.0015128069
Sum of Squared Residuals         0.0010641919
Durbin-Watson Statistic             2.026152
Q(36)                              91.970898
Significance Level of Q           0.00000031

   Variable                     Coeff       Std Error      T-Stat     Signif
*******************************************************************************
1.  CONSTANT                  0.000764585  0.000164431    4.649885  0.00000433
2.  AR{1}                     0.958432043  0.032065077   29.890215  0.00000000
3.  MA{1}                    -0.903941329  0.048085045  -18.798804  0.00000000

* Estimación del modelo completo.
SET U = 0.0
SET V = 0.0
NONLIN A0 A1 B1
FRML REGRESID = DIFF1
FRML GARCHVAR = A0 + A1*U{1}**2 + B1*V{1}
FRML GARCHLOGL = V(T)=GARCHVAR(T), U(T)=REGRESID(T), $
                 -.5 * (LOG(V) + U**2 / V)
COMPUTE A0=%BETA(1), A1=%BETA(2)+%BETA(3), B1=-%BETA(3)
MAXIMIZE(ITE=30, METHOD=BHHH, RECURSIVE) GARCHLOGL 2 *

Estimation by BHHH
Usable Observations     469      Degrees of Freedom   466
Function Value                     1461.54664898

   Variable                     Coeff       Std Error      T-Stat     Signif
*******************************************************************************
1.  A0                       0.0000866862 0.0000217622    3.983334  0.00006796
2.  A1                       0.0961320865 0.0277932834    3.458824  0.00054254
3.  B1                       0.7937673931 0.0404984378   19.599951  0.00000000
```

14.- <u>Precios de las acciones de Telmex serie L</u>

(datos diarios del 31 de mayo de 1991 al 30 de marzo de 1994).

1:	51:	101:	151:	201:	251:	301:	351:
4.090	4.620	6.630	7.325	8.400	8.775	7.300	7.675
4.150	4.610	6.550	7.550	8.450	8.700	7.275	7.650
4.160	4.720	6.500	7.650	8.600	8.700	7.300	7.625
4.190	4.830	6.480	7.600	9.000	8.625	7.300	7.550
4.190	4.870	6.450	7.600	8.800	8.550	7.275	7.575
4.160	4.870	6.330	7.750	9.100	8.500	7.250	7.800
4.150	4.630	6.500	7.750	9.100	8.150	7.150	8.000
4.110	4.740	6.530	7.900	8.950	8.175	6.950	7.875
4.060	4.940	6.580	7.850	8.750	8.100	6.925	7.800
4.020	4.980	6.600	7.800	8.800	7.800	6.725	7.950
4.150	5.080	6.600	7.650	8.775	7.625	6.725	8.125
4.140	5.350	6.600	7.650	8.650	7.175	6.975	8.250
4.090	5.600	6.530	7.750	8.650	7.400	7.000	8.250
3.990	5.730	6.680	7.750	8.575	7.525	7.000	8.275
3.970	5.650	6.680	7.675	8.400	7.050	6.950	8.175
3.880	5.600	6.850	7.675	8.400	6.950	6.950	8.100
3.760	5.700	6.950	7.600	8.425	6.650	6.950	8.025
3.820	5.750	6.980	7.600	8.650	6.900	7.000	8.150
3.830	5.680	6.830	7.550	8.650	6.800	7.000	8.250
3.930	5.600	6.600	7.550	8.825	6.850	6.975	8.250
3.900	5.580	6.350	7.525	8.975	6.825	6.850	8.550
3.960	5.650	6.550	7.800	8.800	7.250	6.650	8.550
3.980	5.580	6.530	7.850	8.900	7.250	6.525	8.525
4.000	5.730	6.480	8.050	9.075	7.300	6.700	8.550
4.200	5.850	6.450	8.250	9.000	7.225	6.975	8.625
4.130	5.830	6.550	8.375	8.900	6.975	6.825	8.575
4.120	5.680	6.550	8.250	8.850	6.875	6.750	8.475
4.250	5.650	6.600	8.275	8.675	6.900	6.750	8.500
4.370	5.730	6.580	8.300	8.750	7.100	6.725	8.575
4.390	5.750	6.600	8.325	8.575	7.250	6.650	8.575
4.550	5.630	6.680	8.325	8.500	7.350	6.650	8.600
4.760	5.700	6.600	8.375	8.800	7.475	6.525	8.725
4.680	5.650	6.630	8.325	8.625	7.750	6.525	8.650
4.690	5.700	6.550	8.400	8.675	7.625	6.600	8.625
4.760	5.700	6.330	8.375	8.650	7.550	6.775	8.600
4.800	5.680	6.130	8.850	8.675	7.600	6.875	8.600
4.810	5.630	6.380	8.800	8.675	7.400	6.900	8.550
4.770	5.680	6.550	8.825	8.650	7.225	6.950	8.550
4.770	5.780	6.530	8.900	8.600	6.875	7.150	8.600
4.760	5.750	6.480	8.925	8.575	6.700	7.075	8.650
4.740	5.880	6.450	8.600	8.700	7.175	7.075	8.675
4.790	6.200	6.500	8.600	8.700	7.275	6.975	8.900
4.780	6.200	6.650	8.400	8.675	7.325	6.925	8.850
4.790	6.180	6.780	8.425	8.600	7.400	6.950	8.875
4.780	6.330	6.900	8.500	8.625	7.375	7.025	8.800
4.780	6.480	7.000	8.350	8.600	7.225	7.125	8.825
4.720	6.500	7.150	8.200	8.600	7.275	7.400	8.775
4.650	6.530	7.225	8.200	8.700	7.400	7.475	8.875
4.580	6.580	7.350	8.125	8.820	7.475	7.675	9.100
4.590	6.730	7.275	8.400	8.875	7.400	7.625	9.175

Precios de las acciones de Telmex serie L (continuación).

401:	451:	501:	551:	601:	651:	701:
9.100	8.250	7.450	8.000	8.560	10.650	10.140
8.850	8.125	7.225	7.775	8.500	10.700	10.180
8.750	8.150	7.150	8.100	8.680	10.500	10.080
8.625	8.250	7.050	8.060	8.520	9.940	10.580
8.575	8.450	7.250	8.120	8.360	10.300	10.760
8.550	8.400	7.350	8.140	8.580	10.350	10.560
8.550	8.550	7.200	8.160	8.420	10.300	10.200
8.575	8.575	7.150	8.300	8.460	10.100	10.280
8.675	8.575	7.200	8.360	8.160	10.250	10.000
8.675	8.450	7.400	8.400	7.960	10.350	
8.725	8.375	7.350	8.340	8.120	10.500	
8.775	8.400	7.450	8.440	8.380	10.700	
8.800	8.425	7.500	8.440	8.500	10.900	
8.700	8.550	7.525	8.240	8.760	10.850	
8.500	8.625	7.350	8.240	8.720	10.700	
8.200	8.550	7.375	8.260	8.920	10.700	
8.075	8.550	7.250	8.300	8.880	11.050	
8.225	8.450	7.350	8.280	8.920	11.200	
8.100	8.475	7.500	8.240	8.820	11.400	
8.075	8.375	7.550	8.340	8.700	11.500	
8.300	8.425	7.400	8.320	8.600	11.500	
8.200	8.300	7.375	8.240	8.600	11.650	
8.075	8.350	7.325	8.180	8.760	11.450	
8.075	8.200	7.325	8.080	8.860	11.500	
8.200	8.025	7.200	8.000	8.760	11.750	
8.100	7.950	7.275	7.940	8.600	11.700	
8.075	7.450	7.400	7.780	8.640	11.500	
7.900	7.425	7.450	7.660	8.820	11.550	
7.725	7.475	7.450	7.620	9.000	11.520	
7.600	7.325	7.550	7.760	9.260	11.440	
7.700	7.450	7.525	7.860	9.220	11.520	
7.625	7.650	7.500	7.920	9.440	11.480	
7.400	7.650	7.475	7.900	9.440	11.220	
7.275	7.575	7.525	7.960	9.480	11.100	
7.300	7.500	7.350	7.980	9.560	10.920	
7.675	7.375	7.300	7.900	9.400	10.820	
7.750	7.400	7.200	7.840	9.440	10.760	
7.900	7.425	7.650	7.900	9.580	10.800	
8.050	7.600	7.800	7.900	9.780	10.780	
8.025	7.625	7.825	7.900	9.880	10.500	
8.150	7.650	7.675	7.820	9.800	10.780	
8.275	7.650	7.825	7.860	9.900	10.840	
8.325	7.575	7.825	8.040	10.100	10.860	
8.400	7.600	7.975	8.240	10.150	11.080	
8.375	7.625	7.900	8.320	10.250	10.960	
8.275	7.550	7.975	8.380	10.200	10.740	
8.275	7.500	7.975	8.560	10.350	10.620	
8.400	7.550	7.950	8.420	10.450	10.720	
8.325	7.550	7.925	8.500	10.100	10.460	
8.300	7.525	7.850	8.500	10.250	10.100	

Fuente: Bolsa Mexicana de Valores.

15.- Programa en RATS para rendimientos de Telmex-L.

```
* Envía resultados al archivo SALIDA-H.
OPEN OUTPUT SALIDA-H
CAL(IRR)
ALLOCATE 708
OPEN DATA REND-T_L.WKS
DATA(FORMAT=WKS,ORG=OBS) / Y
GRAPH
# Y

* MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN BOX-JENKINS.
* Calcula la FAC y FACP de la serie original.
SOURCE(NOECHO) BJIDENT.SRC
@BJIDENT Y
COR(NUM=12, PAR=FACP) Y

BOXJENK(AR=1) Y / RESAR
* En FI se guarda el parámetro autorregresivo estimado para usarlo como
*     valor inicial en la estimación del modelo completo.
COMPUTE FI=%BETA(1)
TABLE / RESAR
SET PRONAR = FI*Y{1}
SET LI = PRONAR - 2*SQRT(%SEESQ)
SET LS = PRONAR + 2*SQRT(%SEESQ)

* Prueba de multiplicadores de Lagrange para detectar efectos ARCH.
SET RESAR2 = RESAR**2
@BJIDENT RESAR2
COR(NUM=12, PAR=FACP) RESAR2
DIS %NOBS 2/SQRT(%NOBS)
LINREG RESAR2
# CONSTANT RESAR2{2 TO 3} RESAR2{5}
COMPUTE CHISTAT=%NOBS*%RSQUARED
CDF CHISQR CHISTAT 3

* ESTIMACIÓN.

* Cálculo de valores iniciales para la ecuación ARCH.
BOXJENK(CON, AR=||2,3,5||) RESAR2

* Estimación del modelo completo.
SET U = 0.0
SET V = 0.0
NONLIN FI A0 A2 A3 A5
FRML REGRESID = Y - FI*Y{1}
FRML ARCHVAR = A0 + A2*U{2}**2 + A3*U{3}**2 + A5*U{5}**2
FRML ARCHLOGL = V(T)=ARCHVAR(T), U(T)=REGRESID(T), $
                -.5 * (LOG(V) + U**2 / V)
* Los valores para A0, A2, A3 y A5 son los estimados en el
*     modelo auxiliar para la varianza.
COMPUTE A0=%BETA(1), A2=%BETA(2), A3=%BETA(3), A5=%BETA(4)
MAXIMIZE(METHOD=BHHH, RECURSIVE) ARCHLOGL 6 *
```

```
* Matriz de correlaciones.
DEC SYM MCOR(5,5)
EWI MCOR(I, J) = %XX(I, J) / SQRT(%XX(I, I)*%XX(J, J))
WRI(NOSKIP) MCOR

* Verificación de la ecuación GARCH.
SET ETA = U/SQRT(V)
SET ETA2 = ETA**2
COR(NUM=12, PAR=FACP) ETA
COR(NUM=12, PAR=FACP) ETA2
DIS %NOBS 2/SQRT(%NOBS)
SET RESECVAR 6 * = U**2 - V
TABLE / ETA RESECVAR
COR(NUM=12) RESECVAR

GRAPH 3
# Y 200 400 1
# LI 200 400 2
# LS 200 400 2
SET LI 6 * = FI*Y{1} - 2*SQRT(V)
SET LS 6 * = FI*Y{1} + 2*SQRT(V)
GRAPH 3
# Y 200 400 1
# LI 200 400 2
# LS 200 400 2
```

Resultados del programa para los rendimientos de Telmex-L.

```
CAL(IRR)
ALLOCATE 708
OPEN DATA REND-T_L.WKS
DATA(FORMAT=WKS,ORG=OBS) / Y
GRAPH
# Y

* MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN BOX-JENKINS.
* Calcula la FAC y FACP de la serie original.
SOURCE(NOECHO) BJIDENT.SRC
@BJIDENT Y
COR(NUM=12, PAR=FACP) Y
Correlations of Series Y
Autocorrelations
     1:  0.1380684 -0.0054944 -0.0208685  0.0443311 -0.0284728 -0.0343787
     7: -0.0193344  0.0255400 -0.0020540  0.0025202  0.0413326  0.0371087

Partial Autocorrelations
     1:  0.1380684 -0.0250345 -0.0169683  0.0505021 -0.0432918 -0.0240947
     7: -0.0098475  0.0254046 -0.0078912  0.0057232  0.0420127  0.0212826
```

```
BOXJENK(AR=1) Y / RESAR

Dependent Variable Y - Estimation by Box-Jenkins
Iterations Taken      2
Usable Observations     707       Degrees of Freedom   706
Centered R**2      0.014425       R Bar **2    0.014425
Uncentered R**2    0.020742       T x R**2       14.664
Mean of Dependent Variable        0.0013951209
Std Error of Dependent Variable 0.0173829973
Standard Error of Estimate        0.0172571667
Sum of Squared Residuals          0.2102537212
Durbin-Watson Statistic              1.990307
Q(36)                               28.915327
Significance Level of Q             0.75592967

   Variable                        Coeff        Std Error      T-Stat     Signif
*******************************************************************************
1.  AR{1}                       0.1442691660 0.0373076496    3.867013  0.00012035
* En FI se guarda el parámetro autorregresivo estimado para usarlo como
*     valor inicial en la estimación del modelo completo.
COMPUTE FI=%BETA(1)

TABLE / RESAR

Series               Obs        Mean        Std Error      Minimum         Maximum
RESAR                707  0.0011882836  0.0172161490 -0.0655599027  0.0745678284

SET PRONAR = FI*Y{1}
SET LI = PRONAR - 2*SQRT(%SEESQ)
SET LS = PRONAR + 2*SQRT(%SEESQ)

* Prueba de multiplicadores de Lagrange para detectar efectos ARCH.
SET RESAR2 = RESAR**2
@BJIDENT RESAR2
COR(NUM=12, PAR=FACP) RESAR2
Correlations of Series RESAR2
Autocorrelations
     1:  0.0657484  0.1046943  0.1360417  0.0742156  0.1185535 -0.0140113
     7:  0.0510111  0.0090009 -0.0296613 -0.0082419 -0.0089837 -0.0108751

Partial Autocorrelations
     1:  0.0657484  0.1008072  0.1250298  0.0514217  0.0902277 -0.0526225
     7:  0.0207787 -0.0187377 -0.0408497 -0.0206160  0.0023991 -0.0072771

DIS %NOBS 2/SQRT(%NOBS)
707        0.07522
LINREG RESAR2
# CONSTANT RESAR2{2 TO 3} RESAR2{5}

Dependent Variable RESAR2 - Estimation by Least Squares
Usable Observations     702       Degrees of Freedom   698
Centered R**2       0.036265      R Bar **2    0.032123
Uncentered R**2     0.246273      T x R**2      172.884
Mean of Dependent Variable        0.0002993541
Std Error of Dependent Variable 0.0005675245
```

```
Standard Error of Estimate        0.0005583347
Sum of Squared Residuals          0.0002175929
Regression F(3,698)                     8.7553
Significance Level of F             0.00001049
Durbin-Watson Statistic               1.922151
Q(36)                                32.972378
Significance Level of Q             0.61336525

   Variable                         Coeff        Std Error      T-Stat     Signif
*******************************************************************************
*
1.  Constant                   0.0002107023 0.0000273495    7.704066  0.00000000
2.  RESAR2{2}                  0.0830036616 0.0375687946    2.209378  0.02747232
3.  RESAR2{3}                  0.1205395709 0.0374557603    3.218185  0.00134971
4.  RESAR2{5}                  0.0951320333 0.0377173958    2.522232  0.01188256

COMPUTE CHISTAT=%NOBS*%RSQUARED
CDF CHISQR CHISTAT 3
Chi-Squared(3)=      25.458369 with Significance Level 0.00001238


* ESTIMACIÓN.

* Cálculo de valores iniciales para la ecuación ARCH.
BOXJENK(CON, AR=||2,3,5||) RESAR2

Dependent Variable RESAR2 - Estimation by Box-Jenkins
Iterations Taken      4
Usable Observations     702      Degrees of Freedom   698
Centered R**2      0.036265      R Bar **2    0.032123
Uncentered R**2    0.246273      T x R**2     172.884
Mean of Dependent Variable       0.0002993541
Std Error of Dependent Variable  0.0005675245
Standard Error of Estimate       0.0005583347
Sum of Squared Residuals         0.0002175929
Durbin-Watson Statistic              1.922151
Q(36)                               32.972378
Significance Level of Q            0.46860294

   Variable                         Coeff        Std Error      T-Stat     Signif
*******************************************************************************
*
1.  CONSTANT                   0.0003004347 0.0000300490    9.998165  0.00000000
2.  AR{2}                      0.0830036615 0.0375687946    2.209378  0.02747232
3.  AR{3}                      0.1205395709 0.0374557603    3.218185  0.00134971
4.  AR{5}                      0.0951320333 0.0377173958    2.522232  0.01188256
```

```
* Estimación del modelo completo.
SET U = 0.0
SET V = 0.0
NONLIN FI A0 A2 A3 A5
FRML REGRESID = Y - FI*Y{1}
FRML ARCHVAR = A0 + A2*U{2}**2 + A3*U{3}**2 + A5*U{5}**2
FRML ARCHLOGL = V(T)=ARCHVAR(T), U(T)=REGRESID(T), $
                -.5 * (LOG(V) + U**2 / V)
* Los valores para A0, A2, A3 y A5 son los estimados en el
*     modelo auxiliar para la varianza.
COMPUTE A0=%BETA(1), A2=%BETA(2), A3=%BETA(3), A5=%BETA(4)
MAXIMIZE(METHOD=BHHH, RECURSIVE) ARCHLOGL 6 *

Estimation by BHHH
Usable Observations    703      Degrees of Freedom   698
Function Value                    2520.73782807

   Variable                      Coeff        Std Error       T-Stat      Signif
*******************************************************************************
*
1.  FI                        0.1493210572 0.0330160114     4.522686   0.00000611
2.  A0                        0.0001897473 0.0000155869    12.173512   0.00000000
3.  A2                        0.1286567479 0.0397066339     3.240183   0.00119453
4.  A3                        0.1817980330 0.0508395039     3.575921   0.00034900
5.  A5                        0.0750558587 0.0349659276     2.146543   0.03182970

* Matriz de correlaciones.
DEC SYM MCOR(5,5)
EWI MCOR(I, J) = %XX(I, J) / SQRT(%XX(I, I)*%XX(J, J))
WRI(NOSKIP) MCOR
     1.00000
    -0.08495       1.00000
     0.21865      -0.31832       1.00000
     0.06279      -0.47971      -0.04526       1.00000
    -0.12227      -0.27138      -0.10690      -0.12508       1.00000


* Verificación de la ecuación GARCH.
SET ETA = U/SQRT(V)
SET ETA2 = ETA**2
COR(NUM=12, PAR=FACP) ETA
Correlations of Series ETA
Autocorrelations
     1: -0.0002284 -0.0181186 -0.0288360  0.0375376 -0.0326639 -0.0400310
     7: -0.0029226  0.0197603 -0.0074351  0.0002319  0.0266594  0.0494132

Partial Autocorrelations
     1: -0.0002284 -0.0181186 -0.0288538  0.0372240 -0.0337788 -0.0396151
     7: -0.0018960  0.0151029 -0.0074726  0.0025322  0.0251398  0.0462696

COR(NUM=12, PAR=FACP) ETA2
Correlations of Series ETA2
Autocorrelations
     1:  0.0434657 -0.0118001 -0.0152332  0.0500988  0.0075429 -0.0296150
     7: -0.0110864 -0.0226785 -0.0374222 -0.0342622 -0.0174341 -0.0337504
```

```
Partial Autocorrelations
     1:  0.0434657 -0.0137153 -0.0141465  0.0513444  0.0027076 -0.0292366
     7: -0.0067879 -0.0250584 -0.0372659 -0.0290853 -0.0152318 -0.0330321

DIS %NOBS 2/SQRT(%NOBS)
703       0.07543

SET RESECVAR 6 * = U**2 - V
TABLE / ETA RESECVAR

Series        Obs       Mean         Std Error       Minimum        Maximum
ETA           703  0.0677143969  0.9984176604 -3.4497088837  3.9356165161
RESECVAR      703 -0.0000051024  0.0005588705 -0.0012720634  0.0050546951

COR(NUM=12) RESECVAR
Correlations of Series RESECVAR
Autocorrelations
     1:  0.0368514 -0.0569320 -0.0540799  0.0524380  0.0119224 -0.0425412
     7:  0.0269887 -0.0114645 -0.0416403 -0.0268082 -0.0045265 -0.0265003


GRAPH 3
# Y 200 400 1
# LI 200 400 2
# LS 200 400 2
SET LI 6 * = FI*Y{1} - 2*SQRT(V)
SET LS 6 * = FI*Y{1} + 2*SQRT(V)
GRAPH 3
# Y 200 400 1
# LI 200 400 2
# LS 200 400 2
```

REFERENCIAS

1.- Anderson, T. W. (1958).
The Statistical Analysis of Time Series.
N. Y.: John Wiley and Sons.

2.- Baillie, R. T. y Bollerslev, T. (1992).
"Prediction in dynamic models with time-dependent conditional variances."
Journal of Econometrics 52, pp. 91-113.

3.- Berndt, E. K., Hall, B. H., Hall, R. E. y Hausman, J. A. (1974).
"Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models."
Annals of Economic and Social Measurement 4, pp. 653-665.

4.- Bollerslev, T. (1986).
"Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity."
Journal of Econometrics 31, pp. 307-327.

5.- Bollerslev, T. (1987).
"A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return."
The Review of Economics and Statistics 69, pp. 542-547.

6.- Bollerslev, T., Chou, R. Y. y Kroner, K. F. (1992).
"ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence."
Journal of Econometrics 52, pp. 5-59.

7.- Bollerslev, T., Engle, R. F. y Wooldridge, J. M. (1985).
"A capital asset pricing model with time varying covariances."
UCSD, Department of Economics, Discussion Paper No. 85-28.

8.- Box, G. E. P. y Jenkins, G. (1970).
Time Series Analysis, Forecasting and Control.
San Francisco: Holden-Day.

9.- Box, G. E. P. y Jenkins, G. (1976).
Time Series Analysis, Forecasting and Control.
Edición revisada. San Francisco: Holden-Day.

10.- Box, G. E. P. y Tiao, G. C. (1973).
Bayesian Inference in Statistical Analysis.
MA: Addison-Wesley Publishing Co.

11.- Breusch, T. S. y Pagan, A. R. (1979).
"A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation."
Econometrica 47, No. 5, pp. 1287-1294.

12.- Engle, R. F. (1982).
"Autorregresive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation."
Econometrica 40, No. 4, pp. 987-1007.

13.- Engle, R. F. y Bollerlev, T. (1986).
"Modelling the persistence of conditional variances."
Econometric Reviews 5, pp. 1-50.

14.- Engle, R. F., Hendry, D. y Richard, J. F. (1983).
"Exogeneity."
Econometrica 51, pp. 277-304.

15.- Engle, R. F. y Kraft, D. F. (1983).
"Multiperiod forecast error variances of inflation estimated from ARCH models."
Applied Time Series Analysis of Economic Data.
Ed. por A. Zellner, Bureau of the Census, Washington, DC: pp. 293-302.

16.- Engle, Robert F., Lilien, David M. y Robins, Russell P. (1982).
"Estimation of Time Varying Risk Premiums in the Term Structure."
UCSD Discussion Paper 82-4.

17.- Engle, R. F., Lilien, D. M. y Robins, R. P. (1987).
"Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model."
Econometrica 55, No. 2, pp. 391-407.

18.- Engle, R. F. y Watson, M. (1985).
"Applications of Kalman Filtering in Econometrics."
Artículo invitado al **Fifth World Congress of the Econometric Society**, Cambridge, Mass. También **UCSD, Department of Economics, Discussion Paper** No. 85-31.

19.- French, K. R., Schwert, G. W. y Stambaugh, R. F. (1985).
"Expected Stock Returns and Volatility."
University of Rochester, Graduate School of Management, Working Paper Series No. MERC 85-10.

20.- French, K. R., Schwert, G. W. y Stambaugh, R. F. (1987).
"Expected Stock Returns and Volatility."
Journal of Financial Economics 19, pp. 3-29.

21.- French, M. W. y Sichel, D. E. (1993)
"Cyclical Patterns in the Variance of Economic Activity."
Journal of Business and Economic Statistics 11, pp. 113-119.

22.- Fuller, W. A. (1976).
Introduction to Statistical Time Series.
N. Y.: John Wiley and Sons.

23.- Guegan, D. (1990).
"Les modèles ARCH univariés."
Université Paris-Nord, C. S. P., Département de Mathématiques et Informatique. Prépublications: Série Mathématique 90-2.

24.- Guerrero, V. M. (1991).
Análisis estadístico de series de tiempo económicas.
México: Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa.

25.- Guerrero, V. M. (1993).
"Time-series analysis supported by Power Transformations."
Journal of Forecasting 12, pp. 37-48.

26.- Hernández T., F. (1994).
"Volatilidad y diversificación financiera: una aplicación para el mercado mexicano."
Investigación y Finanzas 2, pp. 163-173.

27.- Intriligator, M. D. (1978).
Econometric models, techniques and applications.
Prentice-Hall, Inc.

28.- Kraft, D. F. y Engle, R. F. (1983).
"Autorregressive conditional heteroskedasticity in multiple time series."
UCSD, Department of Economics, manuscrito no publicado.

29.- Mills, T. C. (1993).
The econometric modelling of financial time series.
Cambridge University Press.

30.- Nelson, D. B. (1991).
"Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach."
Econometrica 59, pp. 347-370.

31.- Pantula, S. G. (1988).
"Estimation of autorregresive models with ARCH errors."
Sankhya, serie B, vol. 50, pp. 119-138.

32.- Tsay, R. S. (1987).
"Conditional Heteroscedastic Time Series Models."
Journal of the American Statistical Association 82, pp. 590-604.

33.- Weiss, A. A. (1984).
"ARMA models with ARCH errors."
Journal of Time Series Analysis 5, No. 2, pp. 129-143.