10
25j

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNDAMENTOS, ENTORNO Y VISION MATEMATICA DE LA FUNCION SUPERVIVENCIA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

JAIME AVIÑA ZAVALA

MEXICO, D. F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

FUNDAMENTOS, ENTORNO Y VISION MATEMATICA DE LA FUNCION SUPERVIVENCIA

realizado por JAIME AVIÑA ZAVALA

con número de cuenta 8955186-6 , pasante de la carrera de Actuaria

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Aurora Valdes Michel	
Propietario	Act. Noemí Velázquez Sanchez	
Propietario	Act. Hortensia Cano Granados	
Suplente	Act. Carlos Flavio Espinosa López	
Suplente	Act. Rafael Campos Tenorio	

Consejo Departamental de Matemáticas
ACT. CLAUDIA CARRILLO QUIROZ

A MI FAMILIA

A MI UNIVERSIDAD

ÍNDICE

CAPITULO 3

LA FUERZA DE MORTALIDAD $\mu(x)$

CAPITULO 4

LEYES DE MORTALIDAD

APÉNDICE 1

APÉNDICE 2

INTRODUCCIÓN

La Actuaría o Matemáticas Actuariales son una rama de la matemática aplicada, dedicada a la construcción de modelos para sistemas de Seguros. Dentro de sus especialidades, el cálculo actuarial ha surgido como resultado de la aplicación de las Matemáticas al estudio y solución de los problemas concretos derivados de la predicción de la mortalidad. A pesar de la juventud de la Actuaría como disciplina científica, la estrecha relación que guarda con la ciencia de la que ha surgido permite al Actuario beneficiarse de un acervo rico y abundante. Esta relación se encuentra permanentemente presente a lo largo de todo el desarrollo teórico de la Actuaría.

Para el Actuario, esta relación ha brindado los fundamentos para el desarrollo de una técnica de medición y predicción de la supervivencia y su contraparte, la mortalidad. El desarrollo teórico de la Actuaría es inseparable de los fundamentos matemáticos que le han dado origen.

La medición de la mortalidad es un área dinámica, en tanto cuanto las condiciones naturales que determinan su comportamiento sufren constantemente cambios, gracias a la intervención de otras disciplinas como la medicina, la química, la biología, y otras que permiten que el nivel y la esperanza de vida del ser humano no permanezcan constantes a través del tiempo.

Dentro de este contexto de constante evolución, resulta evidente que los modelos de medición que se desarrollan para una época o una experiencia determinada, pierden validez con el paso del tiempo, debido al avance de la ciencia y la tecnología y los cambios que estos factores ejercen sobre la población. Por ello la importancia para el Actuario de contar con una teoría sólida que le permita la actualización constante de dichos modelos.

OBJETIVO:

Presentar, en forma general, algunos de los razonamientos y cálculos que permiten pasar del conjunto de características de una Función Supervivencia a la construcción de una expresión algebraica para la medición y predicción de la mortalidad.

CAPITULO 1

ANTECEDENTES Y FUNDAMENTOS DEL SEGURO DE VIDA

1.1) MARCO HISTÓRICO DEL SEGURO

Desde la antigüedad el hombre ha creado mecanismos por medio de los cuales ha intentado protegerse de aquellos eventos probables que pudieran causarle un perjuicio. En estos mecanismos se encuentran los antecedentes más remotos del Seguro.

Existen evidencias en la antigüedad de prácticas comerciales que guardan algunos rasgos en común con el Seguro.

En el año 3000 antes de Cristo, los comerciantes chinos habían desarrollado un método para compartir riesgos inherentes al transporte de sus mercaderías. Estos comerciantes transportaban sus mercancías en embarcaciones fluviales de construcción no muy sólida. Debido a lo difícil y peligroso de la travesía, no todas las embarcaciones llegaban finalmente a su destino. Para reducir el impacto económico que las pérdidas ocasionadas por un accidente pudieran ejercer sobre un individuo que transportara todas sus mercaderías en una sola embarcación, los comerciantes idearon distribuir sus mercaderías a partes iguales entre las embarcaciones de todos ellos. De esta forma, cuando uno de los botes se hundía antes de llegar a su destino, la pérdida era compartida por todos ellos en lugar de recaer sobre un solo individuo.

En Mesopotamia, el Código de Hamurabi preveía la transferencia del riesgo de pérdida de los comerciantes a los prestamistas de dinero. Bajo las previsiones de dicho código, cualquier mercader cuyas propiedades se perdieran en el mar o fueran robadas por bandidos quedaba liberado de su deuda. Es indudable que los prestamistas de Babilonia cargaron en sus tasas de interés los costos ocasionados por la transferencia del riesgo. El interés cobrado por los prestamistas puede ser interpretado como un antecedente de la prima de Seguro.

Esta innovación fue adaptada mas tarde a los riesgos del tráfico comercial marítimo practicado por los mercaderes de Fenicia, y posteriormente por los mercaderes de Grecia. Cuando se hacía un préstamo a un comerciante o propietario de una embarcación, las mercancías o la embarcación quedaban como garantía colateral. Al prestatario se le ofrecía la opción por la cual, a cambio de una tasa de interés más elevada, el prestamista accedía a cancelar la deuda si las mercancías o la embarcación se perdían en el mar.

En el puerto marítimo de Rodas, según las Leyes, eran obligaciones de los cargadores contribuir a la indemnización de los daños causados en perjuicio común en caso de tempestad o rescate de buque apresado por enemigos o piratas.

De Grecia, este tipo de prácticas pasaron a Roma, donde, florecieron organizaciones de trabajadores, las cuales formaban una clase industrial interesada en actividades sociales, y afanada por el mejoramiento de sus propias condiciones de vida.

En este ambiente se desarrolló una tendencia social que se manifiesta en la organización de gremios. Tales grupos podían verse en todos los estratos de la estructura social, y su desarrollo fue fomentado particularmente entre los trabajadores de los diversos oficios y ocupaciones. Un rasgo muy parecido a la provisión del seguro de vida de la sociedad moderna hizo su aparición en estas antiguas organizaciones. A cambio de pagos regulares que se hacían con destino a un fondo común, el gremio tenía a su cargo el entierro de sus miembros. Este rasgo se amplió después, con la constitución de un fondo para apoyar financieramente a los herederos de los miembros fallecidos.

Aún cuando en la antigüedad se encuentran los anteriores antecedentes, no se puede considerar que existiera la noción de

"Seguro" propiamente dicha, pues se basaban en principios de asistencia mutua y seguridad social más que en el espíritu de empresa y ganancia que caracteriza al Seguro contemporáneo.

Durante la Edad Media, en Europa, la protección de los individuos, estaba, en gran parte, en manos de los gremios a los que pertenecían. El desarrollo de la previsión social se fue fomentando y ampliando al amparo de la Iglesia Católica, de cuyas enseñanzas de caridad, ayuda mutua y asistencia, en los momentos de dificultad, surgieron muchas de las disposiciones que se incluyeron entre los beneficios que, a manera de la moderna seguridad social, eran facilitados a los miembros de los gremios.

El aspecto de seguro que presentaban los gremios se hacía efectivo usualmente por medio de aportaciones regulares de los miembros, con destino a un fondo común, del cual se tomaban las cantidades necesarias para atender a quienes habían sufrido pérdidas pecuniarias como consecuencia de desastres especificados. Entre estos desastres, los más comunes, y los que más afectaban al patrimonio del individuo, eran el fuego, las inundaciones y el robo, aunque eventualmente el sistema de indemnizaciones del gremio se fue ampliando hasta cubrir la mayor parte de los riesgos implícitos en las actividades de aquella época. Se proporcionaba socorro a los pobres, los desvalidos, a los enfermos y a los ancianos; unas veces con dinero, y otras con alimentos o con vestidos. El socorro no era muy distinto al seguro de accidentes y de enfermedad de los tiempos modernos, y se prestaba, en caso de necesidad, a los ancianos, y cuando ocurría la pérdida de la vista o de algún miembro, o en casos de sordera o de mudez, o cuando se contraía una enfermedad grave, como la lepra.

Había gremios que prestaban asistencia a quienes perdían su ganado. Otros facilitaban socorro en casos de naufragio, encarcelamiento, daños en el hogar, o para la defensa legal de sus miembros que tenían problemas con la justicia. Algunas veces se hacían previsiones para hacer regalos a los jóvenes, con objeto de que pudieran empezar sus vidas, y se disponían dotes para las doncellas. Frecuentemente, se prestaba asistencia a los miembros que, temporalmente, se encontraban en dificultades pecuniarias, cuando ello sucedía en circunstancias extraordinarias, pero incluso otras veces, se hacía así como rasgo normal y corriente de los beneficios del gremio.

En el siglo XIII se da un impulso definitivo al nacimiento del Seguro, con una Bula Papal de Gregorio IX, en el año 1230, prohibiendo expresamente el Contrato de Préstamo a la Gruesa.
La búsqueda de una nueva forma de protección al comercio marítimo

que no estuviera sujeta a la Bula Papal dio origen al desarrollo de los primeros esquemas de Seguros propiamente dichos.

Como consecuencia de lo anterior, en Italia, en el año de 1347, se encuentra el primer documento escrito que puede considerarse como una póliza de Seguro. Durante este periodo se dan los primeros intentos por reglamentar la actividad aseguradora, lo cual pone de manifiesto la importancia que esta actividad debe haber cobrado durante aquella época. De todos estos intentos cabe destacar las Ordenanzas de Barcelona de 1435, que representan el primer código general para la actividad aseguradora, y que permanecerían en vigor hasta 1536.

Desde Italia, el Seguro se extendió a otras naciones del continente y posteriormente pasó a Inglaterra a través de los comerciantes de Florencia, quienes llegaron a dominar el comercio y las finanzas Británicas durante el siglo XV.

Esta forma temprana de seguro marítimo era practicada por individuos y no por compañías de Seguros como se conocen hoy en día. Un comerciante o propietario de embarcación que deseaba proteger su mercancía o su embarcación preparaba un documento con información descriptiva del bote, su cargamento, su destino, y demás datos pertinentes. Aquellos que aceptaban una porción del riesgo escribían sus nombres bajo la descripción del riesgo y los términos del acuerdo.

Esto dio origen a la práctica de "suscribir" ('underwriting' en Inglés) los acuerdos de seguro. Los navieros que buscaban seguro y los individuos que se fueron organizando en grupos de suscriptores se reunían en los cafés de la ciudad de Londres. Uno de estos cafés, propiedad de Edward Lloyd, se convirtió eventualmente en el principal lugar de reunión, principalmente debido a que su propietario ofrecía todo tipo de servicios relacionados con el tráfico de Seguros, desde papel y plumas, hasta información relativa a los embarques, rutas comerciales, etc.

Si bien no se tienen noticias exactas sobre la fecha del surgimiento de Lloyd's, si se sabe que se encontraba ya en operaciones en el año de 1668. Lloyd's se fue convirtiendo paulatinamente en el principal sitio de reunión para aseguradores, lo que motivó que mudara sus instalaciones al distrito financiero de Londres, a la sazón uno de los más importantes de Europa. Para 1771, los suscriptores que hacían uso de las instalaciones de Lloyd's para tratar sus negocios firmaron un acuerdo formal, dando origen al "Lloyd's Exchange".

El seguro de incendios moderno tiene sus orígenes en Alemania, donde una asociación conocida como "Feuer Casse" fue organizada en el año de 1591.

Muchas otras asociaciones surgieron en fechas posteriores, sin que ninguna de ellas tuviera un impacto importante hasta mediados del siglo XVI.

En 1661, la ciudad de Londres fue consumida por un devastador incendio, conocido como el "Gran Fuego de Londres", mismo que hizo surgir un gran interés por el seguro de incendios. Un físico Inglés de nombre Nicholas Barbon se inició en el negocio de la construcción durante las tareas de reconstrucción de la ciudad, al mismo tiempo que se iniciaba en el negocio del seguro, asegurando las casas que construía contra pérdidas por incendio. Al principio actuaba como propietario único, pero en 1680 formó una compañía pública (o sociedad anónima) con varios socios, llamada "The Fire Office". Estos primeros pasos fueron pronto seguidos por otros empresarios interesados en el negocio, con lo que el ramo de incendios comenzó a tomar forma.

Durante el siglo XVIII se da un gran desarrollo de los Seguros, fundándose gran cantidad de compañías en diferentes países, donde destacan la Cámara General de Seguros de París, la

Compañia Sun y la Real Compañia de Cambios y Seguros del Reino Unido. Los primeros contratos de Seguros que tuvieron lugar en el continente Americano fueron pólizas de seguro marítimo suscritas por compañías Británicas en las colonias del Norte de América.

En cuanto al Seguro de Vida, el 18 de Junio de 1536, un grupo de suscriptores marítimos emitió en Londres lo que parece haber sido la primera póliza de Seguros de vida de la era moderna. En esa ocasión la póliza fue por un año y por la cantidad de 400 libras. Igualmente, se tienen pruebas de que el seguro de vida se llegó a practicar en las Ciudades Italianas de Florencia y Venecia.

En 1693, el físico, astrónomo y matemático Edward Halley elaboró la primera tabla de mortalidad de la era moderna, basada en sus observaciones particulares. Pero no fue sino hasta 100 años más tarde cuando se logro un cierto grado de precisión en la predicción de la mortalidad.

La primera compañia moderna dedicada al seguro de vida fue la "Society for the Assurance of Widows and Orphans", la cual fue fundada en 1699, y es de notar que en ese tiempo cobraba a todos sus asegurados las mismas primas.

Ya a mediados del siglo XVIII, las aseguradoras Británicas "Royal Exchange Assurance Corporation" y la "London Assurance Corporation" emitían pólizas de Seguro sobre la Vida. Estas pólizas se emitían con vigencias de un año, y consideraban la edad y el estado de salud del asegurado como elementos determinantes del monto de las primas. La mortalidad se estimaba en base a estadísticas muy restringidas, y era frecuentemente afectada de manera impredecible por los retiros. Resultaba en ese tiempo relativamente fácil determinar la rentabilidad de este tipo de contratos a corto plazo, y no existía la necesidad de establecer reservas actuariales.

En 1762, la "Equitable Society for the Assurance of Life and Survivorship" (Sociedad Igualitaria para el Seguro de Vida y Supervivencia) fue la primera compañía dedicada a los Seguros de vida en introducir la innovación de las primas variables dependiendo de la edad alcanzada por el asegurado, inaugurando la era del Seguro Científico. Para llevar a cabo sus cuantificaciones, esta compañía siguió los siguientes principios, planteados por James Dodson:

"1) La membresía (aceptación de un asegurado) no estará limitada, pero sí restringida a individuos que puedan demostrar, mediante examen médico, gozar de buena salud.

2) Una vez aceptado un asegurado, puede seguir renovando anualmente su póliza sin necesidad de ser sometido a otro examen médico.

3) La duración del Contrato de Seguro de Vida puede ser temporal (especificada por ambas partes) o por la vida entera del asegurado.

4) Se cobraran primas niveladas (las mismas primas durante toda la vigencia del Seguro).

5) Se cobrará una extra prima para los asegurados que desempeñen oficios peligrosos y para las mujeres menores de 50 años.

6) Los asegurados compartirán las pérdidas o ganancias generadas (Coaseguro)." ([1])

La aceptación de estos principios planteaba a los aseguradores una nueva variedad de problemas. Si hasta ese momento se habían tomado Seguros sobre la Vida de manera anual, tomando en cuenta únicamente la mortalidad, los gastos y los retiros para determinar las primas, al introducirse el Seguro de Vida Temporal y el Seguro de Vida-Entera era necesario introducir un cuarto elemento, el interés. La teoría y la práctica actuariales debieron entonces extenderse para incluir la

---

[1] FISHER, H.F. & YOUNG, J.,"*Actuarial Practice of Life Insurance.*", Cambridge University, 1965, pp.7.

evaluación de las nuevas obligaciones a largo plazo que surgían de este nuevo enfoque científico.

Adicionalmente, los métodos con los que se contaba para la medición y predicción de la mortalidad dejaban de resultar satisfactorios al incluir Seguros de Vida a largo plazo. No fue sino hasta que las compañías pudieron contar con la información sobre la mortalidad que en realidad sufrían, reflejando las fuerzas selectivas de la selección inicial y los retiros subsecuentes, que fue posible contar con una medición confiable de este elemento. A pesar de esto, las primeras tablas de mortalidad que prepararon las compañías de Seguros preveían un margen de holgura por sobre la mortalidad experimentada real.

Otro momento histórico particularmente importante fue la promulgación en Inglaterra de la llamada "Life Insurance Act of 1774." ("Ley del Seguro de Vida de 1774"), también conocida como "Gambling Act" ("Ley de Apuestas"). Esta ley enfrentaba, entre otras cosas, la creciente especulación ejercida por ciertos individuos que "apostaban" sobre la vida de otros, contratando pólizas sobre personas a quienes no conocían. Las medidas que preveía esta ley eran, entre otras, las de prohibir que una póliza fuera emitida sin especificar claramente el nombre de los beneficiarios, y prohibir que un individuo contratara una póliza de Seguro de Vida para tercero sobre el cual no tuviera intereses claros y legitimos. Esta ley fue fundamental para configurar el marco legal y operativo del Seguro de Vida, aún en nuestros dias.

1.2) MARCO CONCEPTUAL

1.2.1) EL CONCEPTO DE RIESGO

El campo de los Seguros es una disciplina en desarrollo de su marco teórico. Como consecuencia, se encuentran muchas definiciones del término "Riesgo" en la literatura de los Seguros.

Considerando la importancia de éste término, Elliot y Vaugham citan los siguientes elementos que idealmente deberian ser considerados en la búsqueda de una definición conceptual:

"1. El resultado debe ser desconocido. La idea de fortituidad es inherente a cada definición. Cuando se dice que existe un riesgo, implica que existen al menos dos resultados posibles. Si se sabe con anticipación cuál será el resultado, entonces el riesgo no existe...

2. Al menos uno de los posibles resultados debe ser indeseable. Este puede ser una pérdida en el sentido generalmente aceptado de que se pierde algo que estaba en posesión de un individuo, o puede ser considerado también como que se gana una cantidad menor a la que se esperaba ganar." ([2])

Los mismos autores proporcionan su propia definición, misma que abre las puertas al concepto de la medición matemática (o actuarial) del riesgo:

"Se define Riesgo como la posibilidad de una desviación adversa sobre un resultado deseable, que es anticipado o esperado." ([3])

Por desviación adversa se ha de entender que el resultado deseable no se produce, en absoluto o parcialmente. Pero al hablar de "posibilidad" se introduce el elemento "azar", mismo que es fundamento de la teoría de las probabilidades.

---

[2] ELLIOT, Curtis M. & VAUGHAN, Emmett J., *"Fundamentals of Risk and Insurance."*, New York, 1972, pp. 11.

[3] ELLIOT, Curtis M. & VAUGHAN, EMMETT J., Op. cit., pp. 12.

Otra forma, quizá mas clara, de definir el concepto de Riesgo es como; "La exposición a una eventualidad económicamente desfavorable".

I.2.2) EL GRADO DE RIESGO

Aceptando la anterior definición de riesgo, el grado de riesgo será medido por la probabilidad de que ocurra la citada desviación adversa.

Para un individuo, entre mayor sea la probabilidad de experimentar una pérdida, mayor será el riesgo. Igualmente, mientras más probable sea un ganancia menor o una pérdida mayor, el grado de riesgo será más elevado. A mayor probabilidad de pérdida, mayor será la desviación con respecto a lo que se esperaba ganar o conservar.

Ahora bien, el riesgo no es un asunto completamente indeseable, ya que junto a la posibilidad de la pérdida está la posibilidad de una ganancia.

I.2.3) CLASIFICACIONES DE RIESGO

En cuanto a la forma de exposición al riesgo, resulta importante reconocer la diferencia que existe entre el "Riesgo Puro" y el "Riesgo Especulativo".

Por "Riesgo Puro" se designará a aquellas situaciones las cuales involucran únicamente la ocurrencia o no ocurrencia de una pérdida. Generalmente la exposición a este tipo de riesgos no es de naturaleza voluntaria.

El "Riesgo Especulativo" se presenta en situaciones en las que existe la oportunidad de perder, pero también existe la oportunidad de ganar, que es lo que hace que el riesgo sea atractivo, y por lo tanto, sea de naturaleza voluntaria.

La importancia de ésta distinción radica en que solamente pueden asegurarse los Riesgos Puros. No es preocupación del seguro, en general, proteger al individuo de las pérdidas que pudiese sufrir a consecuencia de aceptar voluntariamente un Riesgo Especulativo.

1.2.3.1) Clasificaciones del Riesgo Puro

Los diferentes tipos de Riesgo Puro a los que se enfrenta un individuo pueden, a grandes rasgos, ser agrupados en las siguientes categorias, por lo menos desde el punto de vista de los Seguros:

i) "Riesgos Personales"; Son aquellos que involucran la posibilidad de que se sufra una pérdida de ingresos o propiedades como resultado de la pérdida de la capacidad para generar ingresos. Estos riesgos son:

a) Muerte Prematura;

b) Jubilación o Retiro;

c) Enfermedad, Invalidez o Incapacidad;

d) Desempleo.

La muerte prematura es un riesgo cubierto en general por el Seguro de Vida. Los riesgos de Jubilación, Retiro y Desempleo son cubiertos en general por los sistemas de seguridad social, si bien es cierto que en México no existe un Seguro de desempleo. Los riesgos de Enfermedad, Invalidez o Incapacidad son cubiertos en general tanto por el sistema de seguridad social como por algunas modalidades del seguro privado.

ii) "Riesgos a la Propiedad"; Son aquellos que involucran la posibilidad de perder propiedades, del uso y goce de dichas propiedades, o de los ingresos generados por dichas propiedades. Estos riesgos son:

a) Pérdida física directa o daños materiales a la propiedad;
b) Pérdida del uso y goce de la propiedad o de los ingresos generados por dicha propiedad;
c) Gastos adicionales generados por la pérdida de la propiedad.

Las tres categorias de riesgos comprendidas en esta clasificación son cubiertos por el ramo del Seguro de Daños.

iii) "Riesgo de Responsabilidad"; Son aquellos que involucran la posibilidad de pérdida de las propiedades presentes o ingresos futuros como resultado de reparaciones por daños causados o responsabilidades legales surgidas por perjuicios intencionales o no intencionales, o por violación o lesión de derechos ajenos.

Esta categoria es cubierta en el subramo de Responsabilidad Civil del ramo de Seguro de Daños.

1.2.4) *ACTITUDES ANTE EL RIESGO*

El riesgo, en cualquiera de sus formas, es una caracteristica siempre presente en todos los actos del hombre, y es inherente a su propia naturaleza humana.

La existencia del riesgo es fuente de intranquilidad y preocupación para el individuo, por lo que no es de extrañar que la naturaleza racional del hombre se ha planteado diferentes actitudes para hacerle frente. Estas actitudes son las siguientes:

1.2.4.1) Evitar el Riesgo.

El riesgo es evitado cuando el individuo se rehusa a aceptarlo. Esto se logra simplemente absteniéndose de tomar parte en una actividad que conlleve un riesgo.

Evitar el riesgo es una técnica negativa para hacer frente al riesgo, ya que en diversas actividades esto es simplemente imposible. En general no se puede evitar el riesgo de un terremoto o una inundación, y la mejor forma de evitar el riesgo de sufrir el robo de un automóvil sería no poseyendo uno. Estas razones hacen que la evasión sea un enfoque insatisfactorio, pues si se usara extensivamente podría causar consecuencias importantes al individuo y la sociedad.

En general, la actitud de evitar un riesgo se toma en relación a actividades que no resultan indispensables, ya sea por su naturaleza superflua o accesoria, o por que las ganancias esperadas no compensan las pérdidas probables.

1.2.4.2) Reducir el Riesgo

Reducir un riesgo significa llevar a cabo un esfuerzo para reducir la posibilidad de que se produzca una pérdida. Un riesgo se puede reducir de varias formas. La primera es mediante la prevención y el control de las pérdidas.

Prácticamente no existe ningún caso en el que no se pueda llevar a cabo un esfuerzo para evitar que se produzca una pérdida, o para reducir la posibilidad de que ésta ocurra.

Desde el punto de vista de los bienes materiales, la prevención de una pérdida es la mejor forma de afrontar un riesgo. Si la posibilidad de una pérdida puede ser completamente eliminada, también el riesgo es completamente eliminado.

1.2.4.3) Transferir el Riesgo

Transferir un riesgo significa que una persona que se encuentra expuesta al mismo, pero que no cuenta con la voluntad o los elementos para asumirlo, lo transmite a otra persona que se encuentra mejor dispuesta para asumirlo.

La transferencia del riesgo es una actitud que se presenta preferentemente cuando la magnitud de la pérdida ligada al riesgo sobrepasa su margen de contingencias o la capacidad del propio individuo para soportarla, mientras que las alternativas para reducir el riesgo no resultan suficientes para que la posibilidad de que se produzca una pérdida sea completamente eliminada.

A la vez que la transferencia del riesgo es una actitud humana ante el mismo, constituye el fundamento de Seguro. La transferencia del riesgo es el principio del seguro, ya que las Aseguradoras son entidades financieras dispuestas y preparadas para asumir riesgos que sobrepasan las capacidades de ciertos individuos.

Mediante el pago, por la parte expuesta al riesgo de una cantidad especificada, una segunda accede, mediante la firma de un contrato, a indemnizar al primero hasta una cierta cantidad límite por las pérdidas especificadas que pueden o no ocurrir.

Una forma especial de transferencia del riesgo que merece ser comentada es la distribución del riesgo.

Un individuo que se encuentra en posición desventajosa para asumir un riesgo lo transmite a una entidad que se encuentra en mejor disposición, es decir, a un grupo de individuos, del que él mismo forma parte, que en conjunto reúnen las condiciones suficientes para hacer frente a la pérdida de uno de los miembros. Al ocurrir una pérdida, esta se distribuye entre el total de los miembros del grupo, y no solamente sobre el individuo que la experimentó.

1.2.4.4) Asumir o Aceptar el Riesgo

Asumir o Aceptar un riesgo es quizá la forma más frecuente de enfrentarlo. Asumir un riesgo puede ser un proceso voluntario o involuntario.

Asumir voluntariamente un riesgo es un proceso que se caracteriza por el reconocimiento consciente de la existencia del mismo, y un acuerdo tácito de asumir la posibilidad de pérdida involucrada.

Generalmente, la decisión de asumir voluntariamente un riesgo se toma debido a la falta de otras alternativas, o debido a que la posibilidad de que lo que se teme efectivamente ocurra parece ser muy remota, o simplemente por que el riesgo parece ser muy insignificante como para tomar otro tipo de medidas.

Pero también puede ser motivada por el hecho de que, a pesar de que la pérdida involucrada puede ser muy severa y la probabilidad de que esta se produzca muy alta, simplemente no queda otra alternativa.

El asumir un riesgo de manera involuntaria ocurre generalmente cuando el individuo expuesto al riesgo no reconoce como tal la existencia de dicho riesgo. En estos casos, la persona así expuesta asume las consecuencias de una posible pérdida aún sin darse cuenta de que lo está haciendo.

Asumir el riesgo es una actitud legitima ante el riesgo; en muchos casos será la mejor forma de hacer frente a un riesgo.

La decisión de asumir o no un riesgo debe ser tomada por el individuo en base a su margen de contingencias o su capacidad para soportar la pérdida.

1.3) EL CONCEPTO DEL SEGURO

Cualquier plan de Seguros, en su aspecto más simple, posee las siguientes características fundamentales:

a) Transfiere el riesgo de un individuo o grupo a otro individuo o grupo.

b) Distribuye las pérdidas, sobre alguna base de proporcionalidad o igualdad entre todos los miembros de un grupo.

Es a partir de estas caracteristicas que parte, de manera más amplia, el aspecto formal y operativo del Seguro.

1.3.1) ASPECTO FORMAL DE UN PLAN DE SEGUROS

Un plan de Seguros es, de acuerdo con Larson y Gaumnitz:

> "Un acuerdo cooperativo mediante el cual los miembros de una asociación o tenedores de póliza de una compañia de Seguros se reúnen para compartir una pérdida financiera que puede ser demasiado seria para ser tolerada por el individuo afectado". ([4])

La función principal del seguro es la creación de la contraparte del riesgo, la seguridad, El Seguro no implica una disminución del riesgo, pero si reduce el impacto de una pérdida financiera relacionada con la ocurrencia del evento. Este evento es llamado igualmente "Contingencia".

El primer elemento es el establecimiento del acuerdo o convenio entre ambas partes, mismo que se conoce comúnmente como

[4] LARSON, Robert E. y GAUMNITZ, Erwin A., *"Life Insurance Mathematics."*, London, England, pp. 11.

Contrato de Seguros o Póliza de Seguros, entre la parte asegurada, la que está expuesta al riesgo, y la parte aseguradora, a la que se transfiere el riesgo.

Todo contrato o póliza de Seguros supone cuando menos dos contratantes: el **Asegurador**, que se obliga a pagar capitales o rentas en caso de la ocurrencia de cierto evento; y el **Asegurado**, que se obliga a pagar el precio convenido en el contrato (prima).

Supone además un clausulado específico y concreto en el que se expongan, por un lado las obligaciones y derechos que contrae el Asegurado al cubrir la prima (por ejemplo monto y periodicidad de las primas, riesgos asegurados y cobertura para cada riesgo, condiciones de pago, exclusiones, etc.), mientras que por el otro lado presenta los derechos y obligaciones recíprocos que contrae el asegurador al cobrar la prima.

1.3.2) ENFOQUE INDIVIDUAL DEL SEGURO

Desde el punto de vista del individuo, el seguro es un mecanismo económico que le permite substituir un cierto costo reducido (la prima) por una pérdida financiera grande pero incierta (la contingencia contra la que se asegura), que se producirìa en caso de no existir el contrato de Seguros.

Supone el seguro una garantía para el individuo de que ni patrimonio ni nivel de vida, suyo y de su familia, se verán seriamente afectados por la aparición de una contingencia.

1.3.3) ENFOQUE SOCIAL DEL SEGURO

Además de eliminar los riesgos individuales mediante la transferencia de los mismos, el seguro reduce el monto agregado de los riesgos en la economía al substituir costos ciertos por pérdidas inciertas, si bien al operar la ley de los grandes números esta disminución puede no ser considerable en el plano macroeconómico.

Desde el punto de vista social, el seguro es un mecanismo económico para reducir el impacto económico de los riesgos a los que están expuestos los miembros de la sociedad, a través del proceso de combinar en un grupo un número suficientemente grande de sujetos homogéneamente expuestos al riesgo de tal forma que puedan ser predecibles las pérdidas del grupo como un todo.

1.4) ASEGURABILIDAD

Si bien en la teoría cualquier riesgo puro, o posibilidad de pérdida, es susceptible de ser asegurada, en la práctica esto no se aplica. En algunos casos, por razones prácticas, los aseguradores no se encuentran en condiciones de aceptar todos los riesgos que los individuos desean transferir. Para que un riesgo sea asegurable en la práctica se piden los siguientes requisitos ideales, si bien es factible que un riesgo que no reúna todos ellos sea asegurado, a juicio del suscriptor.

1. El número de sujetos expuestos homogéneamente al riesgo debe ser lo suficientemente grande como para permitir que las pérdidas sean razonablemente predecibles.

2. La pérdida financiera producida por el riesgo debe ser cuantificable y determinada.

3. La pérdida debe ser fortuita o accidental.

4. La pérdida no debe ser catastrófica. No debe existir la posibilidad de que la mayoría de los sujetos expuestos experimenten pérdidas simultáneas.

1.5) EL SEGURO DE VIDA

1.5.1) CARACTERÍSTICAS

El seguro de vida es un esquema de transferencia del riesgo concreto de una muerte prematura de un individuo a un grupo o asegurador. Este riesgo de una muerte prematura se denomina comúnmente mortalidad. La ocurrencia de la mortalidad sobre un individuo tiene efectos financieros adversos para las personas que dependen económicamente de él.

La muerte es un evento que se distingue de cualquier otro por su inevitabilidad. No importa el número ni la naturaleza de las medidas que se tomen para prevenir su acontecimiento, tarde o temprano todos los seres vivos mueren. Y sin embargo, el seguro de vida de ninguna manera constituye una violación a los principios que hacen que un riesgo sea asegurable. La incertidumbre que rodea al seguro de vida no es si el individuo va a morir, sino cuándo es que va a morir.

El riesgo se incrementa año con año, conforme aumenta la edad del individuo, circunstancia que permite ver que la muerte prematura no es un riesgo evitable, si bien, los efectos financieros que de el emanan son, al menos, transferibles, y precisamente la transferencia de dichos efectos financieros recibe el nombre de Seguro de Vida. En su forma más simple, el seguro de vida se compromete a proteger a la familia del asegurado, acreedores u otras personas, contra las pérdidas pecuniarias que puedan resultar a consecuencia de la muerte inoportuna del asegurado.

La diferencia esencial entre el seguro de vida y otras formas de seguro exclusivamente destinadas a asumir el peso de un peligro incierto radica en el hecho de que el seguro de vida, además de la función de proteger contra una incertidumbre, cumple con la función de acumular recursos.

Una parte de la prima que se paga por el seguro de vida representa una contribución, por parte del asegurado, a un fondo de inversión que debe ser administrado por el asegurador. El establecimiento de un patrimonio, así como su manejo e inversión en interés del asegurado y sus beneficiarios designados, son los rasgos particulares del Seguro de Vida.

El impacto económico originado por la muerte es un riesgo asegurable, ya que el Seguro de Vida supone la existencia de un grupo de individuos, expuestos homogéneamente al Riesgo, cuyo número es lo suficientemente grande como para permitir que las pérdidas sean razonablemente predecibles.

La pérdida financiera producida por la muerte es cuantificable y determinable. Si bien la vida humana es invaluable, los efectos financieros que la muerte produce si son cuantificables, en la medida en la que un individuo pueda presupuestar las necesidades pecuniarias de sus beneficiarios en caso de producirse su fallecimiento.

El Seguro de Vida contempla únicamente los patrones normales de mortalidad. Las muertes registradas en las tablas de mortalidad son fortuitas o accidentales, ignorándose aquellas que abandonan significativamente los márgenes de contingencia establecidos, como ocurre en casos de guerra o conmoción civil generalizada. No debe existir la posibilidad de que la mayoría de los sujetos expuestos al riesgo experimenten pérdidas simultáneas.

1.5.2) ELEMENTOS DEL SEGURO DE VIDA

En la integración de un contrato de Seguro de Vida es practica común que se tengan en cuenta los siguientes elementos:

"a) Mortalidad; La probabilidad de que un individuo muera durante un período de tiempo dado.

b) Interés; La tasa de interés que puede ser obtenida sobre una inversión de fondos monetarios.

c) Gastos; Todo desembolso inherente a la venta y sostenimiento de una póliza de seguro de vida."([5])

Adicionalmente, es necesario considerar:

d) Suma asegurada.

La mortalidad es, a grandes rasgos, la medida del grado de riesgo de una muerte prematura al que se encuentra expuesto un individuo. Esta opera retirando, año con año, a los miembros de un grupo cerrado de sujetos expuestos homogéneamente al riesgo muerte. Esta reducción en el número de miembros del grupo es relativamente ligera durante la juventud, aumentando marcadamente su intensidad conforme aumenta la edad del asegurado.

La suma asegurada es el monto monetario que un individuo asigna, en el momento de contratar el Seguro de Vida, a las necesidades y obligaciones financieras que habrían de ser

---

[5] LARSON, Robert E. & GAUMNITZ, Erwin A., Op. Cit., pp. 1.

cubiertas, en caso de su fallecimiento, por parte de sus beneficiarios.

1.5.3) PREDICCIÓN DE LA MORTALIDAD

El principio sobre el que se basa el ramo del seguro de vida es el siguiente, según Magee:

> "Los miembros de un grupo de personas, suficientemente grande para que caiga dentro de la operación de la ley de los grandes números, hacen pagos a un fondo común que debe ser lo suficientemente grande para pagar los beneficios convenidos" ([6])

Aplicando principios de la teoría de las probabilidades y la ley de los grandes números ([7]) se puede predecir el número de muertes y el momento en que han de ocurrir en cualquier grupo lo suficientemente grande de personas. Según Hickman, los

---

[6] MAGEE, John H., *"Seguros Generales."* *Tomo I*, México, 1967, pp. 678.

[7] Se ha considerado importante incluir la Ley de los Grandes Números, asi como las implicaciones que tiene en la medición de la mortalidad, en el Apéndice 3.

supuestos sobre los que se construyen los modelos de seguro de vida son los siguientes:

a) El tiempo transcurrido entre el nacimiento y la muerte es una variable aleatoria continua.

b) El capital crece." ([6])

1.5.3.1) Primas

Se llama prima a la consideración por la cual el asegurador se compromete a pagar el importe del seguro, de acuerdo a los términos de la póliza.

Para calcular el importe de la prima es necesario tener en cuenta, por una lado, que la prima debe permitir la acumulación de los fondos necesarios y suficientes para pagar las reclamaciones, a medida que se van venciendo, y por el otro lado, al computar el importe de las primas, es necesario tomar en cuenta los gastos en que se incurre para sostener la póliza.

---

[6] HICKMAN, James C., *"Updating Life Contingencies."*, *"Lecture notes prepared for the American Mathematical Society's short course"*, en "Actuarial Mathematics" vol.35, Providence, Rhode Island, 1986, pp. 4.

La parte de la prima destinada al fondo de inversión que se debe usar para el pago de las pólizas, según se van venciendo, recibe el nombre de **prima neta.** La suma que se añade a la prima neta para hacer frente a los gastos de administración y adquisición del negocio, y para proporcionar una suma que absorba las mermas debidas a cualquier contingencia imprevista, se denomina el recargo. La prima neta mas el recargo constituyen la prima total. La prima total es la cantidad que paga el asegurado por la póliza. En la práctica se suman a la prima total los impuestos correspondientes que marque la ley.

La prima neta depende del grado de riesgo que la mortalidad ejerza sobre el solicitante del seguro. El importe que se debe cargar se deriva de los datos reunidos en la llamada tabla de mortalidad.

Existen diversas modalidades para el pago de las primas, desde el pago único hasta los pagos fraccionados y diferidos, pero cualquier forma de pago es calculada en base a la prima neta calculada para el asegurado.

1.5.3.2) Reservas

Al cobrar las primas, la compañía de Seguros está obligada a constituir un fondo en beneficio de los asegurados, mismo que debe ser suficiente para hacer frente a las reclamaciones por siniestros que sean presentadas. Este fondo recibe el nombre de reserva.

Los fondos acumulados en la reserva siempre son asequibles a los tenedores de las pólizas. Si desea retirarse del grupo después de un cierto número de años, puede obtener su reserva, menos un cargo por los gastos en los que se incurra. El fondo así pagado se llama valor efectivo de rescate, y la mayor parte de las pólizas indican cual será este de año en año. Además, si el asegurado prefiere, puede obtener préstamos contra su reserva, pagando intereses por la suma que, de esta manera, haya tomado a préstamo. En este caso, el asegurado no cancela su seguro. El importe que se puede obtener como préstamo sobre una póliza, aumenta a medida que aumenta la reserva, y se denomina valor de préstamo.

Con referencia a cada póliza, la reserva crece a medida que pasan los años. La diferencia entre la reserva y el valor de carátula de la póliza en cualquier momento dado representa un importe denominado, por las compañías de Seguros, importe en riesgo. A medida que pasa el tiempo, por lo tanto, el importe en riesgo disminuye hasta que, finalmente desaparece, a menos que la muerte intervenga para hacer que se consolide el derecho.

CAPITULO 2.

MEDICIÓN DE LA MORTALIDAD

2.1) EL FENÓMENO MORTALIDAD

El elemento más importante del Seguro de Vida es la capacidad de poder determinar el grado de riesgo al que está expuesto un individuo. Si bien resulta imposible saber con certeza en que momento morirá un individuo en particular, es absolutamente cierto que eventualmente toda persona muere. Más aún, si se acepta la suposición de que las condiciones que afectan o producen los patrones de mortalidad no difieren significativamente de aquellas que han imperado en un pasado cercano, es posible establecer una metodología que permita hacer predicciones generales sobre los patrones de mortalidad en el futuro, en base a los patrones observados en el presente.

En el terreno práctico, el trabajo actuarial en el estudio de las contingencias de la vida humana depende en buena medida de la observación, la recopilación y el análisis de datos referentes al comportamiento de la mortalidad en un determinado grupo de individuos sujetos a las mismas condiciones determinantes de la mortalidad.

En este sentido, el trabajo actuarial es eminentemente una disciplina científica, que depende en gran medida de la teoría y la práctica matemática. Para enfrentarse a los problemas que plantea el estudio de las contingencias, el actuario debe emplear su juicio para establecer las hipótesis apropiadas con respecto al futuro, en base a su conocimiento de los hechos observados.

Los procesos de observación en los que se ve involucrado un actuario generalmente van dirigidos hacia propósitos particulares, y están organizados en relación a modelos conceptuales que se han desarrollado a partir de experiencias previas y que se consideran adecuadas como procedimientos para problemas posteriores de naturaleza análoga.

2.2) TABLAS DE MORTALIDAD

El modelo conceptual típico usado en la ciencia actuarial recibe el nombre de tabla de mortalidad, la cual exhibe, para los miembros de una población hipotética, todos ellos de edad x, su historia en lo que se refiere a supervivencia y muerte. Para poder calcular las primas que deben cobrar las Compañías de Seguros, o las sumas que ellas se comprometen a entregar en caso de ocurrir la contingencia asegurada, es preciso conocer la probabilidad de supervivencia de la persona.

Los resultados y conclusiones obtenidos de estas observaciones son presentados, en forma matricial, en una Tabla de Mortalidad.

En cuanto al carácter estadístico de la mortalidad, Haycocks agrega la siguiente consideración:

> "Desde un punto de vista meramente estadístico, la muerte es un evento simple, a diferencia del matrimonio o la fertilidad, ya que ocurre a un individuo solamente una vez, y debe ocurrir en algún momento a todo individuo. La mortalidad opera retirando al individuo que muere, del grupo de las personas que le sobreviven, lo que le confiere el carácter de 'fenómeno de decrecimiento'". ([9])

El actuario considera, para llevar a cabo las observaciones que serán presentadas en la tabla de mortalidad, un grupo cerrado

---

[9] HAYCOCKS, H.W. & PERKS, W., *"Mortality and other investigations."*, Cambridge University, 1955, pp. 8.

de individuos. El tamaño de esta población se denota como k, y se conoce como **radix**.

Mediante la observación de la ocurrencia de la contingencia muerte sobre individuos inicialmente sujetos a observación se determina el número de aquellos que han llegado con vida a la edad **x** (denotado usualmente como l_x), así como el número de los mismos que han muerto entre las edades **x** y **x+1** (denotado usualmente como d_x). La unidad de tiempo asociada con la edad alcanzada por el individuo al momento de morir es el año, ya que, como menciona Haycocks:

> "Una razón poderosa para elegir al año como el intervalo de tiempo - además de su influencia sobre convenciones tales como los aniversarios anuales (sic), la contabilidad anual, etc.,- es que en climas extremosos, la mortalidad varía con las estaciones del año.... Por el momento, se asumirá que la mortalidad no fluctúa con las estaciones el año." ([10])

Todo lo anterior permite afirmar que la tabla de mortalidad es una función de distribución de la probabilidad de un individuo

[10] HAYCOCKS H.W. & PERKS W., Op. Cit., pp. 12.

de morir a la edad a cierta edad, ya que denota la probabilidad de que una persona nacida con vida, sobreviva hasta alcanzar una determinada edad. Esto permite plantear que la probabilidad de supervivencia estará en función de la edad alcanzada. Este supuesto es el que da origen a la llamada función supervivencia.

2.3) LA FUNCIÓN SUPERVIVENCIA

2.3.1) FUNCIÓN DISCRETA vs. FUNCIÓN CONTINUA

Existe el problema de que los datos son recopilados únicamente para la edad exacta entera alcanzada por el individuo al momento de morir, siendo que en realidad esto pocas veces sucede. A este respecto, Smith dice lo siguiente:

> "Desde un punto de vista puramente matemático así como por razones de índole práctica, nos gustaría considerar estos valores tabulados como valores de las funciones continuas $\mathbf{l_x}$ y $\mathbf{d_x}$ para valores enteros n de la variable **x**. " ([11])

[11] SMITH F.C., "The force of Mortality function.", en "The American Mathematical Monthly",. MAYO 1948, pp.277.

Sin embargo, dado que ambas funciones denotan número de personas, no resulta lógico que sean continuas, sino por el contrario, necesariamente deben ser discretas.

A este respecto, Smith agrega:

" Es posible, sin embargo, suponer la existencia de una función continua l_x cuyos valores para valores enteros de x son iguales al número de personas con vida exactamente a la edad x y cuyos valores intermedios proporcionan una aproximación cercana al número de personas con vida en dichas edades intermedias." ([12])

Para lograr exitosamente el paso de un parámetro discreto a un parámetro continuo, en aras de un análisis menos limitado, es posible descartar el radix y definir una función que exprese los datos proporcionados por l_x en términos probabilisticos.

La anterior consideración permite establecer una nueva relación:

---

[12] SMITH F.C., op. cit., pp. 277.

Definición 2.1

$$s(x) = {}^{l_x}\!/_{k}$$

Esto se interpreta de la siguiente manera; Sea x una variable continua que representa el rango de edad en años que puede alcanzar una persona. Entonces, x puede tomar cualquier valor entre 0 (el momento del nacimiento) y w , el extremo superior del intervalo, y la máxima edad que puede alcanzar una persona antes de morir. Debe notarse que la elección de w como edad terminal es meramente una simplificación convencional.

C.W. Jordan indica al respecto de la elección de w:

"Ningún hecho experimental respalda la suposición de que una persona pueda sobrevivir hasta la edad de n años, pero no hasta la edad de n años más un segundo. Por otro lado, las probabilidades de sobrevivir hasta una edad avanzada son extremadamente pequeñas, y para efectos prácticos, es conveniente suponer que esta probabilidad se vuelve despreciable a partir de una cierta edad determinada." ([13])

Ampliando a este respecto, Jordan añade:

"Sería mucho más realista afirmar que los valores de $s(x)$ son despreciables para toda $x \geq w$; Sin embargo, se retendrá la más precisa condición $s(w)=0$, debido a su conveniencia para el análisis matemático que se presentará posteriormente." ([14])

2.3.2) LA VARIABLE ALEATORIA $s(x)$

Considérese la probabilidad de que una persona nacida con vida (lo que se denotará como edad (0) sobreviva hasta la edad x. Es posible considerar esta probabilidad como una función, o más correctamente como una variable aleatoria, de la edad alcanzada **x**, y se denotará como **función supervivencia**, $s(x)$.

---

13 JORDAN Chester.W., *"Life Contingencies."*, Chicago, Illinois, 1967,.pp.4.

14 JORDAN Chester W., OP. CIT., pp. 4.

Definición 2.2

"Una variable aleatoria es una función definida en un espacio muestral dado, esto es, la asignación de un número real a cada punto muestral".

Basado en la anterior definición, se puede hacer una primera formalización de la **función supervivencia** $s(x)$, de la cual partirán algunas sus propiedades más importantes. Las consecuencias de suponer que efectivamente se trata de una variable aleatoria se trataran más adelante.

Definición 2.3 (Función Supervivencia, definición preliminar)

Se designará como función supervivencia, denotada por $s(x)$ a la regla que asocia a cada edad **x** la probabilidad de que una persona sobreviva de la edad 0 a la edad **x**.

El dominio de ésta función será el intervalo $[0,w]$, donde 0 representa el momento del nacimiento, y **w** la máxima edad que puede alcanzar con vida un individuo. En otras palabras, el dominio de la función será el conjunto de todas las **x** contenidas en los números reales tales que cumplen la condición: $0 \leq x \leq w$, es decir:

$$x \in \Re \mid x \in [0,w]$$

Dado que el valor que se asocia a cada x es una probabilidad, la imagen de ésta función será el intervalo $[0,1]$.

En notación matemática se tiene;

$$\forall x \in [0,w] \exists s(x) \in \Re \mid 0 \leq s(x) \leq 1$$

Para comprender con mayor claridad la naturaleza especifica de esta función, será necesario extenderse a las condiciones que caracterizan a la **función supervivencia**.

2.3.2.1) Consecuencias de la continuidad de $s(x)$

Si conforme a los planteamientos que se han vertido sobre $s(x)$ se acepta como un hecho el supuesto de que la **función supervivencia** es una función continua, entonces $s(x)$ puede tomar cualquier valor dentro del intervalo $[0,w]$. Esto implica que para todo x en el dominio de la función existe $s(x)$ en el codominio: $\forall x \in [0,w] \exists s(x) \in [0,1]$.

Recordando la definición de una función continua.

Definición 2.4

"La función f es continua en a si

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$" ([15])

se tiene que por ser $s(x)$ una función continua, entonces existe el limite:

$$\lim_{x \to x_0} s(x) = s(x_0)$$

2.3.2.2) Existencia de Cotas

De la continuidad de $s(x)$, surgen una serie de consideraciones relativas a la existencia de un valor máximo y de un valor mínimo. Para analizar la existencia de un valor máximo se citan los siguientes teoremas:

---

[15] SPIVAK, Michael, "*CALCULUS*", 2a. Edición, México, 1993, pp.142.

Teorema 2.1

"Si f es continua en $[a,b]$, entonces está acotada superiormente en $[a,b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo $x \in [a,b]$." [16].

Teorema 2.2

"Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe algún número $y \in [a,b]$ tal que $f(y) \geq f(x)$, para todo $x \in [a,b]$." [17]

La demostración de estos teoremas, como algunos otros que serán empleados posteriormente, escapa al objetivo de este trabajo. Sin embargo, éstos permiten establecer la existencia de una cota superior mínima (o Supremo) de la función $s(x)$. Aceptando su existencia, resulta interesante exhibirla.

Se recuerda que el punto inicial $x=0$ representa el momento en el que un individuo nace con vida y se encuentra en la edad de 0 años. Dado que solamente se consideran los sujetos que están vivos al inicio de la observación, resulta que el valor

---

[16] SPIVAK, Michael, Op. cit., pp. 152.

[17] SPIVAK, Michael, Op. cit., pp. 152.

correspondiente a $s(0)$ siempre será 1, es decir $s(0)=1$, mientras que existe una edad, que se ha denotado como w, y para la cual se estima que ningún individuo llegaría con vida.

Por lo anterior se tiene que el valor que se asocia a x bajo $s(x)$ en $x=0$ es 1, es decir $s(0)=1$. Introduciendo conceptos probabilísticos, la probabilidad de estar vivo en el instante $x=0$ dado que se nació con vida equivale a 1, lo cual queda justificado por el siguiente hecho, que se deriva inmediatamente de la definición (2.1), donde $l_0=k$:

$$s(0)=\frac{l_0}{k}=\frac{k}{k}=1$$

Por lo tanto, $s(0)=1$.

Si se considera detenidamente, se tiene que no existe ningún valor dentro del dominio para el cual la función alcance un valor superior a 1, ya que quedaría fuera de la imagen de la función (espacio muestral). Lo anterior se desprende de que al ser l_0 el tamaño original de una grupo cerrado, su población podrá disminuir o permanecer constante, pero nunca aumentar.

Por lo tanto, un Supremo de $s(x)$ se presenta en $s(0)=1$.

En cuanto a la existencia de una cota inferior, resulta útil considerar los conceptos planteados por los siguientes teoremas:

Teorema 2.3

" Si f es una función continua en (a,b), entonces f está acotada inferiormente en $[a,b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \geq N$ para todo $x \in [a,b]$." ([18])

Teorema 2.4

" Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces existe algún número $y \in [a,b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$." ([19])

Al igual que con los teoremas anteriores, éstos se darán por demostrados. Estos permiten afirmar la existencia de una cota inferior máxima.

[18] SPIVAK, Michael, Op. cit., pp. 155.

[19] SPIVAK, Michael, Op. cit., pp. 155.

Partiendo de la definición (2.1), supóngase ahora que se tiene $x = w$, caso para el cual se ha afirmado que ninguna persona llega con vida a la edad w. Se obtiene, en consecuencia, que $l_w = 0$, lo que implica, aplicando la definición 2.1:

$$s(w) = \frac{l_w}{k} = \frac{0}{k} = 0$$

Por lo tanto, un Ínfimo de $s(x)$ se presenta en $s(w) = 0$.

Si bien se ha comprobado la existencia de un Supremo y un Ínfimo, no se ha verificado que éstos sean únicos. Para poder afirmar que lo sean, es necesario demostrar que la función supervivencia es una función monótona decreciente.

2.3.2.3) Fenómeno de decrecimiento

Como puede apreciarse, existe una relación entre la continuidad de $s(x)$ y la existencia de sus cotas, por un lado, y el carácter probabilistico de $s(x)$ por el otro. Al plantear que $s(x)$ era una variable aleatoria, y que $s(0) = 1 > s(w) = 0$ hacia suponer que sus valores mínimo y máximo serían, respectivamente, 0 y 1, por lo que $s(x)$ bien podría ser una función decreciente.

Al considerarse una población experimental cerrada, una vez que un miembro de la misma se ha extinguido, su lugar no vuelve a ser ocupado por otro, por lo que es de esperarse que una vez que $s(x)$ alcanza un valor en cualquier punto del intervalo, el valor asociado a $s(x_0)$ en cualquier momento posterior será siempre igual o menor para cualquier valor x_0 que sea mayor que x

En términos matemáticos, la afirmación de que $s(x)$ es una función decreciente equivale a decir:

COROLARIO 1

Para toda pareja (x,x_0) de elementos contenidos en el intervalo $[0,w]$, tales que cumplan la condición $x < x_0$, se tiene que $s(x) \geq s(x_0)$.

Como consecuencia inmediata de lo anterior resulta posible afirmar que tanto el Supremo como el Ínfimo de una función supervivencia serán únicos, presentándose en $s(0)=1$ y en $s(w)=0$ respectivamente.

Las observaciones sobre el comportamiento del conjunto de funciones de supervivencia planteadas hasta el momento permiten afirmar que los elementos de dicho conjunto serán continuas y decrecientes.

De lo anterior, y no existiendo ningún elemento hasta ahora que permita afirmar que una función de supervivencia continua en el intervalo $[0,w]$ será derivable en todo $(0,w)$, podemos inferir la existencia de dos grupos de funciones que pueden reunir las características indicadas, las que son derivables y las que no.

Para entender con mayor claridad en que consiste la diferencia entre los dos grupos de funciones, considérense primero las dos definiciones más comunes de la derivada:

Definición 2.5

"La función f es derivable en a si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{existe"} \ ^{(20)}$$

[20] SPIVAK, Michael, Op. cit., pp. 201.

Definición 2.6 (Definición alterna)

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ [21]

En ambos casos el límite se designa por *f'(a)* y recibe el nombre de derivada de *f* en a. (Se dice también que *f* es derivable si *f* es derivable en a para todo a del dominio de *f*.

Luego entonces , sea $\theta(x)$ una función continua decreciente, de la que se supone puede ser una función supervivencia. El afirmar que no es derivable equivale a decir que existe al menos un punto $a \in (0,w)$ para el cual no existen los limites mencionados en las definiciones 2.5 y 2.6, pero que para cualquier par de puntos $a_0 \in (0,a)$ y $a_1 \in (a,w)$ si existan dichos limites.

De las definiciones 2.5 y 2.6 resulta evidente que si $\theta(x)$ no es derivable en a implica que:

---

21 SWOKOWSKI, Earl W., "Cálculo con Geometría Analítica.", 2A. Edición, México, 1988,pp.95.

$$\lim_{a_0 \to a} \frac{\theta(a_0) - \theta(a)}{a_0 - a} \neq \lim_{a_1 \to a} \frac{\theta(a_1) - \theta(a)}{a_1 - a}$$

Como por hipótesis se había supuesto que la función si era derivable en los intervalos $(0,a)$ y (a,w), se tiene entonces que la función $\theta(x)$ presenta un comportamiento distinto para cada uno de dichos intervalos. Resulta entonces lógico suponer que en el punto a sucede "algo" que altera abruptamente el comportamiento de la supervivencia de un grupo de individuos que se supone es lo suficientemente grande.

Desde esta óptica, ese "algo" sería un evento que, súbitamente, retiraría o dejaría de retirar a un grupo importante de individuos que hasta antes de ese momento habían presentado un comportamiento uniforme en lo que a mortalidad se refiere. Esto se debería necesariamente o a un evento catastrófico (una guerra, una epidemia, etc.), lo cual anularía su asegurabilidad, o quizá de un descubrimiento médico o científico no solo magnífico, sino que además fuera instantáneamente accesible a toda la población. Un evento como este último no solamente sería muy extraño, sino que además tampoco podría ser muy frecuente.

Ahora bien, si la función descrita no fuera derivable en más de un punto resultaria bastante dificil poderla interpretar como una descripción de los patrones predecible de mortalidad susceptibles de ser asegurados.

Por lo tanto, a las condiciones planteadas ha de agregarse que una función supervivencia deberá ser derivable en todo $(0,w)$.

Por lo anterior se tiene entonces que existe:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{s(x)-s(x_0)}{x-x_0}=s'(x)$$

Si a lo anterior se le aplica el corolario 1, se tiene que:

$s(x)-s(x_0)\geq 0$ y

$x-x_0\leq 0$

sustituyendo se obtiene;

$$\lim_{x\to x_0}\frac{s(x)-s(x_0)}{x-x_0}\leq 0\Rightarrow -s'(x)\geq 0$$

que equivale a decir que la derivada de $s(x)$ siempre será negativa, es decir, que $s(x)$ es una función continua monótona decreciente.

2.3.3) ANÁLISIS DE LA VARIABLE ALEATORIA $s(x)$.

Hasta ahora se ha mencionado que $s(x)$ es una variable aleatoria sin justificar dicha afirmación. Se procede ahora a subsanar dicha omisión.

Hickman señala lo siguiente:

> "... Sea X la variable aleatoria continua 'tiempo transcurrido desde el nacimiento hasta la muerte. Se tienen, como consecuencia, dos funciones:

función supervivencia $s(x) = P[X \geq x]$ y

función de densidad de probabilidad $-s'(x)$" . ([22])

---

[22] HICKMAN, James c., Op. cit., p. 5.

Hasta ahora, se ha comprobado que la función supervivencia es derivable y decreciente, lo que concuerda plenamente con la afirmación de Hickman. El siguiente paso lógico es demostrar que, efectivamente, la función $s(x)$ cumple las condiciones de una variable aleatoria continua.

Se afirma que su función de densidad de probabilidad es $-s'(x)$.

En efecto, de acuerdo a la definición de variable aleatoria:

Definición 2.7

"Una variable aleatoria continua es una función X cuya función de densidad de probabilidad satisface las siguientes condiciones":

i) $f(x) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Ha quedado establecida la primera condición dado que su ínfimo es 0. Ahora se establecerá la condición ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} -s'(x)dx = 1$$

donde es necesario cambiar los limites de integración de tal forma que coincidan con los extremos del intervalo [0,w];

$$\int_{0}^{w} -s'(x)dx = -\int_{0}^{w} s'(x)dx$$

$$= -[s(w) - s(0)]$$

pero como se vio anteriormente

$$s(w) = 0 \quad \text{y}$$

$$s(0) = 1\,;$$

$$\Rightarrow -[(s(w) - s(0)] = -(0-1)$$

$$= 1$$

Con lo que se queda demostrado ii)

Todo lo anterior permite establecer la siguiente caracterización de una función supervivencia.

Definición 2.8 (Función Supervivencia)

Sea $s(x)$ una función, definida por: $[0,w] \xrightarrow{s(x)} [0,1]$, que cumple con las siguientes condiciones:

i) $s(x)$ es continua en el intervalo $[0,1]$,

para todo $x_0 \in [o,w]$

ii) $s(x)$ tiene supremo $s(0) = 1$ e ínfimo $s(w) = 0$

iii) $s(x)$ es derivable en todo $x_0 \in (0.w)$

Su derivada se denota $s'(x)$

iv) $s'(x_0) \leq 0$, para todo $x_0 \in (0,w)$, es decir, si $x \leq x_0$, se tiene $s(x) \geq s(x_0)$

v) $-s'(x)$ es una función de densidad de probabilidad.

Esto es lo mismo que decir:

$-s'(x) \geq 0$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} -s'(x)dx = 1$$

Entonces $s(x)$ es una función supervivencia.

A partir de esta caracterización, es posible pasar a la derivación de otros resultados que son importantes para el desarrollo del cálculo de probabilidades asociadas con la función supervivencia, es decir, con el impacto de la mortalidad sobre una población.

2.4) CALCULO DE PROBABILIDADES ASOCIADAS A $s(x)$.

Se ha mencionado que $s(x)$ es la probabilidad de que una persona de edad 0 llegue con vida a la edad $\boldsymbol{x}$.

Considérese ahora la utilidad de conocer otras probabilidades asociadas a las contingencias de mortalidad o supervivencia, partiendo de los supuestos que ya han sido planteados en la definición de la función supervivencia $s(x)$.

Algunos de los problemas que se plantean entonces son los de encontrar una expresión que permita calcular:

i) La probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a la edad x_0, con $x_0 = x + h$,donde se cumple que: $0 \leq x \leq x_0 \leq w$, para cualquier $h \geq 0$.

ii) La probabilidad de que una persona de edad x muera antes de llegar a la edad x_0, con $x_0 = x + h$,donde se cumple que: $0 \leq x \leq x_0 \leq w$, para cualquier $h \geq 0$.

iii) La probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a la edad x_0, con $x_0 = x + h$,donde se cumple que: $0 \leq x \leq x_0 \leq w$, para cualquier $h \geq 0$,y muera antes de alcanzar la edad $x + h + m \leq w$, para cualquier $m \geq 0$.

Se trabajará, en primer lugar, sobre el caso i). Supóngase que se desea conocer la probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a la edad x_0, con $x_0 = x + h$, para un cierto $h \geq 0$.

Expresado en términos de probabilidad, se busca la probabilidad de que una persona llegue con vida a la edad x_0, dado que llegó con vida a la edad x . Se designara con la letra A al evento **"alcanzar la edad x"**, y con la letra B al evento **"alcanzar la edad x_0"**.

Este es un problema de probabilidad condicional, para la resolución del cual resulta útil la siguiente definición:

Definición 2.9 (Probabilidad Condicional)

" Sea **B** un evento con probabilidad positiva. Para un evento arbitrario **A** se escribirá

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

La cantidad así definida se llamara probabilidad condicional de **A** bajo la hipótesis **B** (ó dado B)".

De acuerdo con la definición anterior, el problema en discusión puede expresarse como:

$$P(B|A) = \frac{s(x_0)}{s(x)}$$

Esta probabilidad será denotada por ${}_hP_x$, y representa, en otras palabras, la probabilidad de que una persona de edad **x** llegue con vida a la edad $x_0 = x+h$.

$$ {}_{h}P_{x} = \frac{s(x_0)}{s(x)} \qquad (1) $$

Considérese ahora el caso ii) La probabilidad de que una persona de edad x muera antes de llegar a la edad x_0, con $x < x_0$, donde, $x_0 = x + h$, para cualquier $h > 0$, tal que se cumpla la condición $0 \le x \le x + h \le w$.

Es claro que si $s(x)$ representa la probabilidad de que una persona llegue con vida a la edad x, la probabilidad de que una persona muera antes de llegar a la edad x será igual a $1 - s(x)$.

Lo anterior implica que la probabilidad de que una persona de edad x muera antes de alcanzar la edad $x_0 = x + h$, denotada por ${}_{h}Q_{x}$, quedara definida de la siguiente forma:

$$ {}_{h}Q_{x} = 1 -{}_{h} P_{x} $$

$$ = 1 - \frac{s(x_0)}{s(x)} $$

$$= \frac{s(x) - s(x_0)}{s(x)} \quad (2)$$

Considérese a continuación el caso iii) La probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a la edad $x+h=x_0$, para cualquier $h \geq 0 | 0 \leq x+h \leq w$ y muera antes de alcanzar la edad $x+h+m$, para cualquier $m \leq 0 | 0 \leq m \leq w-(x+h)$, misma que será denotada por ${}_{h|m}Q_x$, quedara definida de la siguiente forma:

$${}_{h|m}Q_x = {}_{h+m}Q_x - {}_hP_x$$

$${}_{h|m}Q_x = \frac{s(x) - s(x+h+m)}{s(x)} - \frac{s(x) - s(x+h)}{s(x)}$$

$${}_{h|m}Q_x = \frac{s(x+h) - s(x+h+m)}{s(x)} \quad (3)$$

Nótese que estos resultados descritos, y otros que pueden ser calculados siguiendo el mismo razonamiento, miden la mortalidad sobre un intervalo, y están intimamente relacionados con la edad alcanzada por el sujeto al momento de la evaluación.

Encontrar la probabilidad de que un individuo muera una vez alcanzada una determinada edad, o que sobreviva hasta alcanzar una determinada edad, resulta fundamental para llevar a cabo una predicción de la mortalidad.

Ciertamente, las funciones de la familia de ${}_hQ_x$ pueden ser consideradas como índices de la mortalidad promedio efectiva sobre el intervalo $[x, x_0]$.

Sin embargo, no es suficiente contar con índices para medir la mortalidad sobre intervalos determinados, al menos desde el punto de vista de una análisis científico del comportamiento de la mortalidad. Los resultados descritos para medir las probabilidades de supervivencia o de extinción resultan indispensables para llevar a cabo cálculos relacionados con la determinación de las primas que tendría que cubrir un individuo, o grupo de individuos para adquirir un seguro de vida. Dichos cálculos resulta, como se verá mas adelante, en simplificaciones de los cálculos, ligeramente más complejos, que permiten llegar del planteamiento teórico de una función supervivencia a la medición y determinación actual de la mortalidad.

Resulta mucho más completo, desde un punto de vista analítico, el poder contar con alguna suerte de mediciones instantáneas que arrojen más información sobre una función cuya expresión matemática es desconocida, y que permitan llegar a su parametrización.

CAPITULO 3

LA FUERZA DE MORTALIDAD $\mu(x)$

3.1) DETERMINACIÓN DE $\mu(x)$

Resulta aparente que la intensidad de la mortalidad no es constante para cualquier edad. Es probable, sin embargo, que lo sea solamente para intervalos suficientemente pequeños. Pero no resulta aceptable suponer que la mortalidad pueda comportarse como una función lineal.

Considérese como ejemplo la función l_x presentada en la figura 1. Nótese que la tangente de dicha curva en cualquier punto está relacionada con la mortalidad. Entre más pronunciada sea la pendiente de la tangente, mayor será la intensidad de la mortalidad.

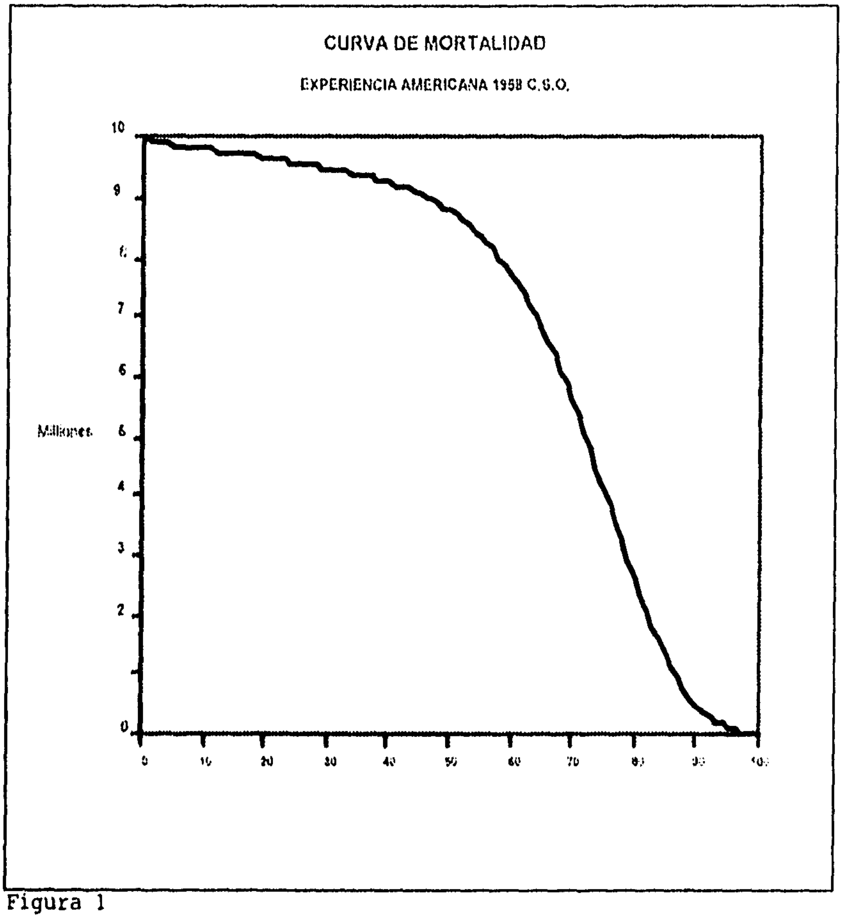


Figura 1

Curva de Mortalidad.

(Tomada de la Tabla de Mortalidad de la experiencia Norteamericana C.S.O. 1958. Apéndice 1)

De un análisis de la gráfica anterior se desprende que la intensidad de la mortalidad varía para cada edad alcanzada. La pendiente de esta curva en cualquier punto está relacionada con el número de muertes que se producirán en la vecindad de ese punto, pues cuanto más pronunciada sea la pendiente, mayor será el numero de muertes ocurridas. Resulta aparente que la obtención de una tasa instantánea de mortalidad estará relacionada con la tasa de mortalidad entre dos edades, misma que ha sido denotada por el símbolo ${}_hQ_x$.

Al momento de mencionar una tasa instantánea se sugiere de manera natural la interpretación física de la derivada, sobre la cual Spivak dice;"...se define así la velocidad (instantánea) de la partícula a como $s'(a)$." ([23])

Lo anterior permite plantear el siguiente argumento; La probabilidad de que una persona de edad x muera antes de llegar a la edad x_0, con $x \leq x_0$, donde, $x_0 = x + h$, para cualquier h contenida en los números Reales, con $h \geq 0$, ha sido definida en (2) como:

$${}_hQ_x = \frac{s(x) - s(x+h)}{s(x)} \qquad (2)$$

[23] SPIVAK, Micheal, ob. cit., p. 203.

Si se desea obtener la tasa de mortalidad promedio durante el periodo de longitud h años posterior a haber alcanzado la edad x, esto puede obtenerse multiplicando (2) por $\frac{1}{h}$, o lo que es lo mismo, dividiendo la tasa de mortalidad para el periodo entre el incremento en la edad.

$$= \frac{s(x)-s(x+h)}{h\cdot s(x)} \qquad (4)$$

En este caso, si h fuese una cantidad entera de años, la identidad (4) proporcionaria una tasa promedio anual de mortalidad entre las edades x y $x_0 = x+h$. Lo anterior es cierto para una $h \geq 0$ en los reales.

Existe una cierta similitud que entre el resultado anterior y la interpretación física que de la derivada presenta Spivak:

"La llamada velocidad instantánea es el limite

$$\lim_{h\to 0} = \frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$ [24]

[24] SPIVAK, Micheal, ob. cit., p.203.

De donde se afirma que la tasa instantánea de mortalidad será el valor límite de la mortalidad media, es decir:

$$\lim_{h\to 0}\frac{{}_hQ_x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(x)-s(x+h)}{s(x)\cdot h} \qquad (5)$$

Reacomodando los términos del dividendo, el resultado anterior puede ser igualmente expresado como:

$$=-\frac{1}{s(x)}\lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h}$$

$$=-\frac{1}{s(x)}\cdot\frac{d}{dx}s(x) \qquad (6)$$

$$=-\frac{d}{dx}\ln s(x) \qquad (7)$$

Este límite es conocido como Fuerza de Mortalidad, y se denota como $\mu(x)$. Hooker y Longley-Cook definen la Fuerza de Mortalidad de la siguiente forma:

Definición 3.1

"La razón que tiene la tasa de decremento de $s(x)$ a cualquier edad x con el valor de $s(x)$ se denomina fuerza de mortalidad a la edad x, se denota con el símbolo $\mu(x)$ y se define como:" ([25]).

$$\mu(x) = -\frac{d}{dx}\ln s(x)$$

Es importante hacer notar, por una parte, que $\mu(x)$ es una función continua de la variable x, mientras que por otro lado, los valores de $\mu(x)$ no están confinados al intervalo $[0,1]$, de la forma en que se restringen las funciones de probabilidad y como se ha restringido la función supervivencia, sino que dependiendo de su expresión numérica, puede asumir cualquier valor positivo.

[25] HOOKER, P.F. & LONGLEY-COOK, L.H., *"Life and other contigencies."*, Cambridge University, Inglaterra, pp. 10.

3.2) APLICACIONES DE $\mu(x)$

La función $\mu(x)$ reviste una importancia fundamental en el estudio de las contingencias de mortalidad y supervivencia. Recuérdese que el valor de $\mu(x)$ es una medida de la mortalidad instantánea, lo que indica que existirá una relación matemática entre $\mu(x)$ y la probabilidad de morir en un instante determinado, independientemente de la edad alcanzada.

A todo lo largo de este proceso surge el carácter funcional de $\mu(x)$, ya que se trata de una función de la variable real x, y de la variable aleatoria $s(x)$. Sin embargo, para apreciar más su riqueza matemática es conveniente contar con una expresión del carácter probabilistico de $\mu(x)$.

El primer razonamiento que se sugiere es el de expresar la fuerza de mortalidad como una función que depende de x, $s(x)$, $s'(x)$.

En efecto, la definición de $\mu(x)$ sugiere la existencia de una ecuación diferencial, de acuerdo a la siguiente definición:

"Se llama ecuación diferencial a una ecuación que liga la variable independiente x, la función incógnita $y=y(x)$ y sus derivadas $y',y'',\ldots,y^n$, es decir, una ecuación de la forma

$$f(x,y,y',y'',\ldots,y^n)=0\text{"} \qquad (^{26})$$

Este enfoque permite llegar a ciertos resultados para el cálculo de las probabilidades asociadas con la tasa instantánea de mortalidad.

En primer lugar, tómese la siguiente caracterización de $\mu(x)$:

$$\mu(x)=-\frac{1}{s(x)}\cdot\frac{d}{dx}s(x)$$

Haciendo la sustitución $y=s(x)$, la expresión puede reescribirse de la siguiente forma, para expresarla en términos familiares a las ecuaciones diferenciales:

$$-\frac{1}{y}\cdot y'=\mu(x)$$

[26] KISIELOV, A., KRASNOV, M. & MAKARENKO, G., "*Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.*", De. Quinto Sol, México, 1991, pp. 9.

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Para resolverla se usará el siguiente método:

La ecuación anterior puede expresarse de la forma, donde $g(x) = \mu(x)$ y $h(y) = -\frac{1}{y}$:

$$h(y) \cdot \frac{d}{dx} y = g(x) .$$

a continuación se multiplican ambos lados de la ecuación por dx para obtener

$$h(y)dy = g(x)dx$$

Luego se integran ambos lados de la ecuación, de la siguiente forma:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

con lo cual se obtiene la siguiente solución general:

$$H(y) = G(x) + C .$$

En la expresión anterior, las funciones $H(y)$ y $G(x)$ son las primitivas respectivas, mientras que C es la constante de integración.

Siguiendo este método, al integrar entre los límites $[0,x]$ se obtiene una integral definida, donde para efectos de notación la fuerza de mortalidad será denotada como función de la variable (y); a saber, $\mu(y)$:

$$-\int_0^x \frac{1}{y} dy = \int_0^x \mu(y) dy$$

$$-\ln(y)]_0^x = -\ln\frac{s(x)}{s(0)} = \int_0^x \mu(y) dy$$

multiplicando por -1 y despejando $s(x)$ se obtiene:

$$s(x) = s(0) \cdot e^{-\int_0^x \mu(y) dy} \qquad (8)$$

y dado que se sabe que $s(0) = 1$, se tiene:

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu(y)dy} \qquad (9)$$

Si bien se han planteado expresiones matemáticas tanto para la función supervivencia como para la función fuerza de mortalidad, es necesario reconocer que se trata de expresiones analíticas referentes a la "forma" teórica de estas funciones, pero aún no se cuenta con las expresiones parametrizadas y articuladas para producir valores numéricos.

Eventualmente, sin embargo, la matemática teórica da paso a las aplicaciones prácticas, aquellas que permiten obtener resultados numéricos.

3.2.1) OTRAS APLICACIONES IMPORTANTES

A partir del resultado (9) es posible expresar la probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a la edad $x + h$, ${}_hP_x$, de la siguiente forma:

$$ {}_{h}P_{x} = \frac{s(x+h)}{s(x)} $$

$$ {}_{h}P_{x} = \frac{e^{-\int_{0}^{x+h}\mu(y)dy}}{e^{-\int_{0}^{x}\mu(y)dy}} $$

$$ {}_{h}P_{x} = e^{-\int_{x}^{x+h}\mu(y)dy} \qquad (10) $$

Si en la expresión de esta integral definida se analiza el intervalo de integración se descubre que los valores de $\mu(y)$ que interesan son aquellos que se encuentran en el intervalo cerrado $x \leq y \leq x+h$.

Es posible hacer un cambio de variables, de la siguiente forma, $y = x + t$, con $0 \leq t \leq h$. Con esto se obtiene:

$$ {}_{h}P_{x} = e^{-\int_{0}^{h}\mu(x+t)dt} \qquad (11) $$

Análogamente, es posible expresar el siguiente resultado:

$$ {}_hQ_x = 1 - e^{-\int_0^h \mu(x+t)dt} \qquad (12) $$

Dado que $\mu(x)$ es la tasa de mortalidad instantánea a la edad x, es posible encontrar una expresión matemática para encontrar el número esperado de muertes que ocurrirán a la edad x. Dada una tasa de mortalidad instantánea a la edad x, ya definida y denotada por $\mu(x)$, el número de muertes que se sucederán a la edad x será igual a:

$$ \mu(x)\cdot l_x = \mu(x)\cdot s(x)\cdot k \qquad (13) $$

Se definirá el porcentaje de muertes que ocurrirán a la edad x sobre una población de tamaño inicial k, de la siguiente forma:

$$ \mu(x)\cdot s(x) \qquad (14) $$

Considérese ahora cualquier intervalo de edad entre las edades x y $x+h$. Si se divide este intervalo en n

subintervalos de longitudes $\Delta_{t_1}, \Delta_{t_2}, \ldots, \Delta_{t_n}$, eligiéndose un punto en cada intervalo $x+t_1, x+t_2, \ldots x+t_n$. Se obtiene la expresión:

$$\mu(x+t_j)\cdot s(x+t_j)\cdot \Delta t_j \qquad (15)$$

que será aproximadamente igual al porcentaje de muertes que ocurrirán en el j-esimo intervalo de edad, aproximación más cercana conforme la longitud del intervalo Δ_{t_j} decrece. Entonces el porcentaje total de muertes entre las edades x y $x+h$ es aproximadamente igual a la suma de todos los productos de la forma (15) para $j=1,2,\ldots,n$; y el porcentaje total de muertes será igual al valor limite de esta suma, es decir,

$$\lim_{\Delta_t \to 0} \sum \mu(x+t_j)\cdot s(x+t_j)\cdot \Delta_{t_j}$$

$$= \int_0^h \mu(x+t)\cdot s(x+t)dt \qquad (16)$$

Recordando que el resultado de una integral definida en $[a,b]$ representa el área bajo la curva $y=f(x)$ entre las ordenadas $x=a$ y $x=b$, se aprecia que la integral (16) es el área bajo la curva $y=\mu(x)\cdot s(x)$ entre las ordenadas x y $x+h$.

Dado que el área bajo esta curva es numéricamente igual al porcentaje de muertes que ocurrirán entre las edades x y $x+h$, la curva cuya ecuación es $y=\mu(x)\cdot s(x)$ será llamada Curva de Muertes.

Una consecuencia de la definición de la Curva de muertes es la siguiente:

$$\mu(x)\cdot s(x)=-\frac{s'(x)}{s(x)}\cdot s(x)=-s'(x) \qquad (17)$$

Es decir, la curva de muertes es la gráfica de la función de densidad de probabilidad, $-s'(x)$, de la variable aleatoria $s(x)$.

En efecto, si se integra $-s'(x)$ entre los valores $[0,w]$, como ya se demostró, el valor de la integral definida será 1, lo que significa que entre las edades 0 y w morirán el 100% de los individuos que se encontraban con vida en el instante 0, (k), mientras que al integrar $-s'(x)$ entre cualquier intervalo de edades, el resultado obtenido representará el porcentaje del total de la población cuyo fallecimiento se produce entre las dos edades que marcan los extremos del intervalo.

CAPITULO 4

LEYES DE MORTALIDAD (Expresión de la función $s(x)$)

Durante mucho tiempo, actuarios y matemáticos se han visto intrigados por el problema de construir una función analitica que reproduzca con precisión a la curva de mortalidad.

En este caso se trata de una curva decreciente que presenta al menos dos puntos de inflexión, lo cual hace que sea muy dificil representarla mediante una función sencilla.

Se ha dado por hecho la existencia de la función $s(x)$, y varias son las personas que han hecho intentos por representarlas por medio de funciones matemáticas al menos manejables. aunque solamente se mencionan los intentos más relevantes, que son precisamente los que han permitido representar al comportamiento de la mortalidad en términos de funciones matemáticas.

El enfoque se centra principalmente en las leyes de Makeham y de Gompertz, dada su importancia actual, si bien se presenta la ley de De Moivre con carácter ilustrativo.

4.1) LEY DE MOIVRE

La primera y más sencilla de las propuestas fue la de Abraham De Moivre en 1724. De Moivre sugirió que la función $s(x)$ podria ser representada por una linea recta.

El propio De Moivre reconoció en su momento que se trataba de una aproximación muy grosera. Sin embargo, cumplía con el objetivo práctico de simplificar el cálculo de los valores de las anualidades contingentes, lo que en esos tiempos presentaba una tarea por demás ardua.

De Moivre recomendaba que estos supuestos se utilizaran solamente dentro de un rango de edades comprendido entre los 12 y los 86 años. La fórmula de De Moivre puede ser expresada de la siguiente forma:

$$l(x) = k \cdot (w - x) \qquad (18)$$

En la siguiente ilustración (2) se ha generado un recta de Moivre, tomando como Radix 10,000,000 y una w de 100. A manera de comparación, se ha incluido igualmente la gráfica de la curva generada por la tabla de mortalidad de la experiencia

Norteamericana 1958 CSO (1958 Commissioners Standard Ordinary Mortality Table) para hombres.

Esta comparación muestra el porqué resulta insatisfactorio tratar de ajustar los patrones de mortalidad mediante una sola línea recta.

En este la elaboración de este trabajo no se ha considerado la metodología empleada para la obtención de la tabla de mortalidad C.S.O. 1958. Es importante mencionar que esta ha sido una de las tablas más importantes que se han elaborado.

Su impacto en el campo de los Seguros en México se infiere del hecho de que la misma estuvo en vigor entre 1960 y 1990. No es sino hasta 1990 que se adopta el uso generalizado de la tabla de mortalidad de la experiencia mexicana 1962-1967, misma que fue remplazada en entre 1993 y 1994 por la tabla de mortalidad e la experiencia mexicana 1982-1989. Dado que su vigencia fue de aproximadamente 20 años, una parte muy considerable de la cartera de Seguros de vida de las compañías de Seguros se encuentra aún tarificada en términos de la C.S.O. 1958.

La C.S.O. de 1958 fue elaborada en su momento siguiendo el modelo teórico de la ley de Makeham.

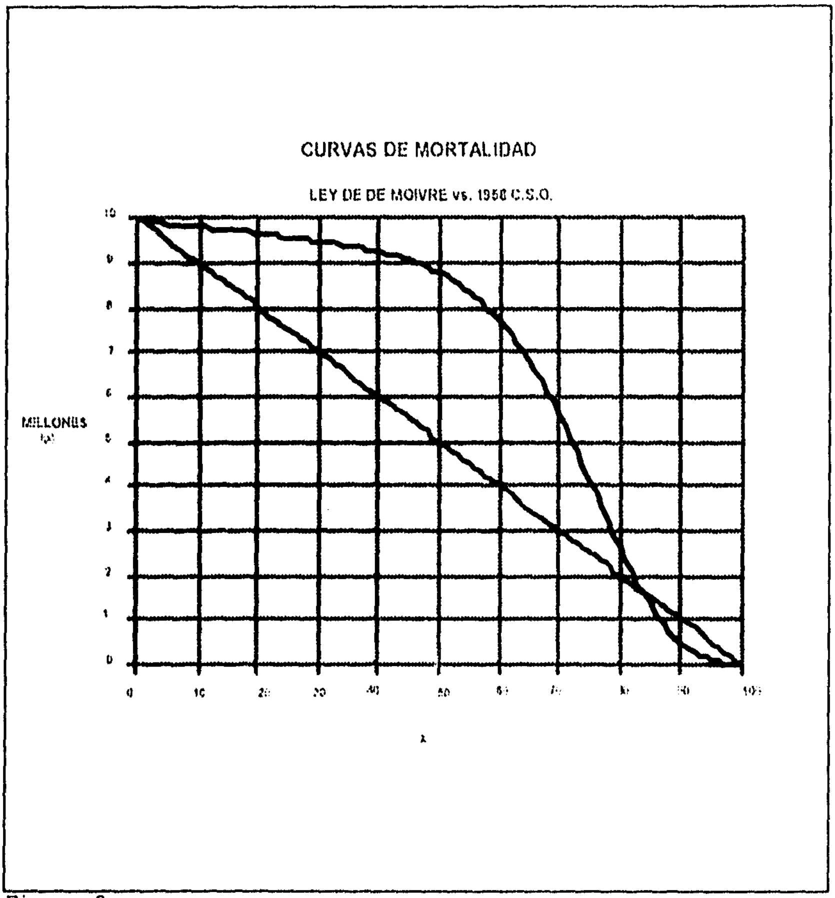


Figura 2
Comparación entre la Mortalidad obtenida usando la Ley de Moivre con Radix 10,000,000 y la Mortalidad observada por la Tabla de Mortalidad de la experiencia Norteamericana C.S.O. 1958. Apéndice 1).

Un examen visual de la curva de mortalidad generada por la Tabla de Mortalidad de la experiencia Norteamericana C.S.O. 1958 nos muestra que el patrón seguido por la mortalidad es representado de forma gráfica por una curva descendente que presenta al menos dos puntos de inflexión claramente distinguibles, el primero entre los 50 y los 60 años de edad, y el segundo en la vecindad de los 90 años de edad.

Son también apreciables tres momentos. En el primero, entre el nacimiento y los 45 años de edad, aproximadamente, presenta una ligera pendiente negativa, mientras que se observa que, al llegar a los 45 años de edad, han perecido aproximadamente un 10% de los individuos censados con vida al nacer.

A partir de los 45 años de edad, y hasta los 85 años de edad, aproximadamente, se observa que la pendiente negativa se acentúa marcadamente, y que al final de este periodo apenas sobrevive un 15%, aproximadamente, de la población inicialmente censada.

Es de esperarse que dicho 15% restante ha de fallecer entre los 85 y los 100 años de edad, como lo manifiesta la mortalidad observada por la Tabla de Mortalidad 1958 C.S.O.

Puede concluirse que un comportamiento como el descrito dificilmente puede ser representado por una única línea recta.

4.2) LEY DE GOMPERTZ

En 1825, el científico Británico Benjamin Gompertz examinó el efecto de suponer que "La resistencia de una persona a la muerte decrece conforme su edad aumenta, de tal forma que al final de intervalos iguales, infinitamente pequeños, de tiempo ha perdido porciones iguales, infinitamente pequeñas de la capacidad remanente para oponerse a la destrucción que tenía al inicio de dichos intervalos". ([27])

Entendiendo que $\mu(x)$ es una medida de la susceptibilidad del hombre a la muerte, Gompertz usó su recíproco $\frac{1}{\mu(x)}$ como una medida de la resistencia del hombre a la muerte. Este supuesto puede ser expresado de la siguiente forma:

[27] GOMPERTZ, Benjammin, "*On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality and on a new mode of Determining the value of Life contigencies.*", En "Philosophical Transactions of the Royal Society of London", vol 115, London, England, 1825, pp. 513-585.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu(x)}\right) = -h \cdot \frac{1}{\mu(x)} \Rightarrow \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu(x)}\right)}{\frac{1}{\mu(x)}} = -h$$

donde h es una constante de proporcionalidad. Integrando ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$\int \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu(x)}\right)}{\frac{1}{\mu(x)}} \cdot dx = -h\int x dx = \ln\frac{1}{\mu(x)} = -h \cdot x + k$$

igualando arbitrariamente la constante de integración $k = -\ln B$:

$$\ln\frac{1}{\mu(x)} = -h \cdot x - \ln B$$

eliminando logaritmos:

$$\mu(x) = e^{h \cdot x} \cdot B$$

y haciendo $c = e^{h}$ se obtiene

$$\mu(x) = B \cdot c^x \qquad (19)$$

Matemáticamente, esta afirmación equivale al supuesto de que la fuerza de mortalidad se incrementa en progresión exponencial con respecto a la edad x.

Para encontrar la expresión matemática de $s(x)$, se procederá a evaluar, de la siguiente forma:

$$\int_0^x \mu(y)dy = \int_0^x B \cdot c^y dy$$

$$= \left[_0^x \frac{B \cdot c^y}{\ln c}\right.$$

$$= \frac{B \cdot c^x}{\ln c} - \frac{B}{\ln c}$$

Haciendo

$$-\ln g = -\frac{B}{\ln c}$$

se obtiene:

$$\int_0^x \mu(y)dy = -(c^x - 1)\cdot \ln g$$

$$= -\ln(g^{c^x-1})$$

Recordando el resultado (9) se obtiene:

$$s(x) = e^{\ln g^{c^x-1}}$$

que equivale a

$$s(x) = g^{c^x-1} \qquad (20)$$

Esta expresión matemática necesita que se asignen valores a los parámetros, para que de esta forma pueda producir los valores numéricos que se buscan.

4.2.1) DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS

La determinación de los parámetros representa el verdadero problema a resolver. Habiendose determinado que la solución existe, queda agregar que no es única. En la fórmula de Gompertz es necesario determinar el valor de dos parámetros, a saber, B y c.

Para encontrar valores numéricos se ha pretendido ajustar la función a los valores contenidos en la CSO 1958. En esta tabla se encuentra que aproximadamente a la edad 72 años han fallecido aproximadamente la mitad de las personas vivas al inicio, i.e. $s(72) = 0.5025855$. Con este dato, pueden buscarse valores para los parámetros B y c que satisfagan la ecuación:

$$s(72) = g^{c^{72}-1} = 0.5025855$$

Resulta inconveniente el hecho de que existen numerosas de combinaciones de valores de B y c que podrían satisfacer la ecuación en el punto $x = 72$, y un número infinito de combinaciones que podrían ajustar a cualquier otro valor de $s(x)$.

Con la asistencia de una computadora se fueron realizando múltiples tanteos hasta determinar los valores de los parámetros, con una precisión de $\pm 10^{-11}$.

Los valores asignados a los parámetros mediante son:

$$B = 10^{-4}$$

$$c = 1.0932761471203$$

En la siguiente ilustración se presenta la Curva de Mortalidad correspondiente a $s(x)$ determinada mediante el procedimiento descrito.

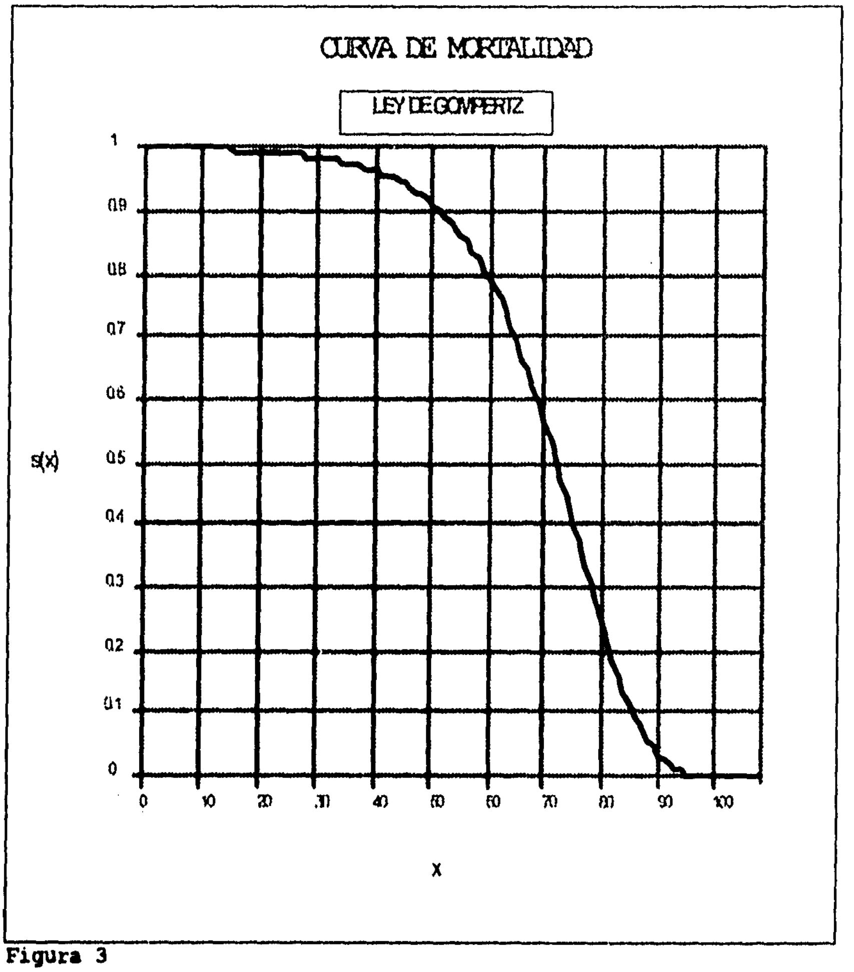


Figura 3
Gráfica de la curva de mortalidad de acuerdo con la ley de Gompertz. (Apéndice 1)

Para determinar la precisión con la que este modelo ajusta a los datos de la 1958 CSO, la siguiente gráfica muestra las diferencias observadas.

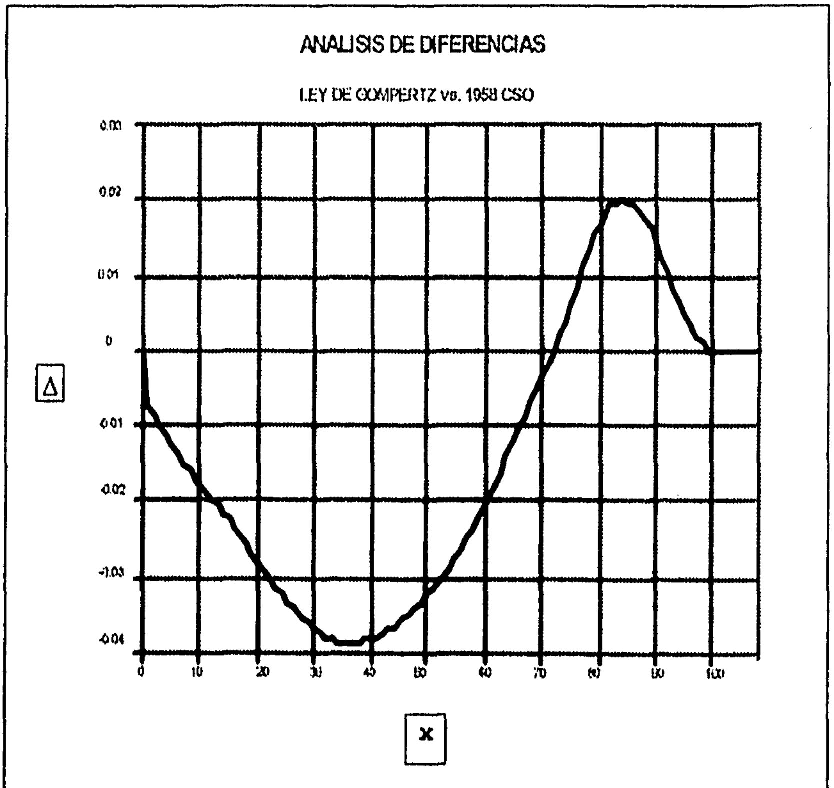


Figura 4
Diferencias entre la Mortalidad observada en Tabla de Mortalidad de la experiencia Norteamericana C.S.O. 1958. menos la esperada conforme al modelo de Gompertz.(Apéndice 1)

Los valores obtenidos fueron resultado de diversos experimentos, habiéndose elegido aquellos con los cuales se obtuvo una mayor aproximación a los datos observados, usando como referencia los rangos de variación. El apéndice 1 muestra la tabla de mortalidad obtenida, mientras que el apéndice 2 muestra el procedimiento seguido.

4.3) LEY DE MAKEHAM

En 1860, William Matthew Makeham, otro actuario Británico, presenta una importante modificación ([26]) a la propuesta de Gompertz.

Makeham propone que la fuerza de mortalidad $\mu(x)$, consiste no solamente de una parte que se incrementa en progresión geométrica, sino que además contiene una parte que permanece constante durante toda la vida del individuo.

Al presentar su fórmula, Gompertz habia declarado:

---

26 MAKEHAM, William .M., *"On the Law of Mortality and the construction of Annuity Tables".*, en "Journal Of the Institute of Actuaries", vol. 8, London, England, 1860, pp.301-310

"Es posible que la muerte sea consecuencia de dos causas generalmente coexistentes; la primera, la suerte, sin ninguna predisposición a la muerte o al deterioro; la segunda, un deterioro, o una creciente incapacidad para hacer frente a la destrucción." ([29])

Sin embargo, al presentar su ley de mortalidad únicamente tomó en cuenta la segunda de las causas. Fue Makeham quien finalmente reunió esas dos causas. El efecto de la primera de las causas, la suerte, se añadiría como una constante a la definición de fuerza de mortalidad de Gompertz.

En términos matemáticos:

$$\mu(x) = A + B \cdot c^x$$

donde **A**, **B**, y **c** son constantes. Esta modificación de la ley de Gompertz recibió el nombre de Ley de Makeham, y representa una de las aportaciones más importantes, junto con la del propio Gompertz, a la medición de la mortalidad y la ciencia actuarial en general.

[29] JORDAN C.W. ob. cit. p. 22

Para determinar la expresión matemática para $s(x)$ es necesario evaluar, de la siguiente forma:

$$\int_0^x \mu(y)dy = \int_0^x (A + B \cdot c^y)dy$$

$$= \left[_0^x (A \cdot y) + \frac{B \cdot c^y}{\ln c}\right.$$

$$= A \cdot x + \frac{B \cdot c^x}{\ln c} - \frac{B}{\ln c}$$

Igualando arbitrariamente $\ln(s) = -A$ y $\ln(g) = -\frac{B}{\ln c}$

se obtiene

$$\int_0^x \mu(y)dy = -x \cdot \ln s - (c^x - 1) \cdot \ln g$$

$$= -\ln s^x - \ln g^{c^x - 1}$$

Recordando el resultado (9).

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu(y)dy} \qquad (9)$$

se obtiene

$$s(x) = s(0) \cdot e^{\ln s + \ln g^{c^x - 1}}$$

Y recordando que $s(0) = 1$, y eliminando logaritmos, se tiene que la expresión anterior es equivalente a:

$$s(x) = s^x \cdot g^{c^x - 1}$$

4.3.1) DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS

La determinación del valor numérico de los parámetros en la primera Ley de Makeham presenta mayores dificultades que en el caso de la Ley de Gompertz, ya que son tres los valores que se han de determinar.

En un primer experimento, se recurrió a imitar el procedimiento descrito para la Ley de Gompertz. Tomando el valor de que muestra la Tabla de Mortalidad 1958 CSO para la edad de 72 años; i.e. $s(72) = 0.5025855$ y con la asistencia de una computadora se determinó el valor numérico de los parámetros, a saber:

$$A = .003$$

$$B = 10^{-4.8153012325 63}$$

$$c = 1.12$$

Los datos obtenidos se presentan, en forma de gráfica en la ilustración (7). La tabla de mortalidad generada por esta función se presenta, para fines ilustrativos, en el apéndice 2.

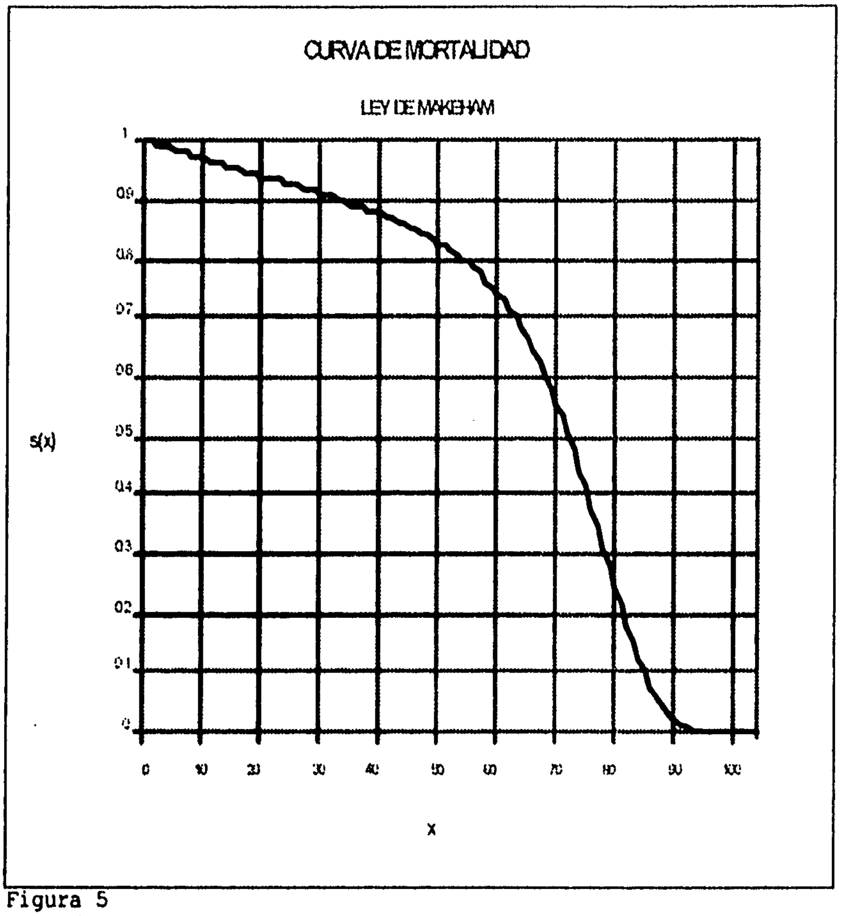


Figura 5
La gráfica muestra la curva de mortalidad generada mediante la **Ley de Makeham** en la primera observación. (Apéndice 1)

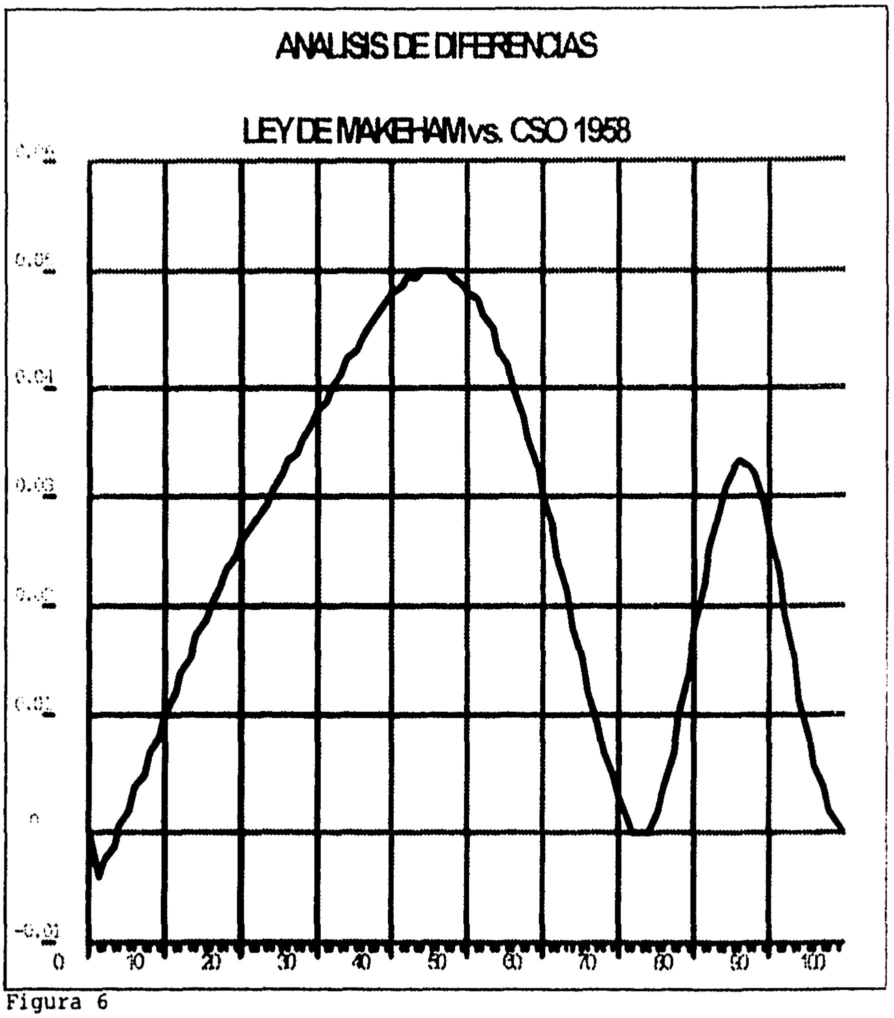


Figura 6
La gráfica muestra las diferencias entre la Tabla de Mortalidad de la experiencia Norteamericana C.S.O. 1958. menos la mortalidad esperada de acuerdo con el primer modelo de la Ley de Makeham. (Apéndice 1)

La gráfica (6) muestra las diferencias observadas con respecto a la 1958 C.S.O.

Puede apreciarse que las diferencias observadas fluctúan dentro del intervalo comprendido por [-0.001,0.05].

La magnitud de la fluctuación entre mortalidad observada y la mortalidad esperada llevó a la realización de un nuevo experimento. Habiéndose observado que la fluctuación más pronunciada se presentó entre los valores de 40 y 50 años de edad, se decidió buscar el valor numérico de los parámetros a partir del valor de la función supervivencia para la edad de 50 años, que según la 1958 CSO corresponde a s(50) = 0.8762306.

Siguiendo el mismo procedimiento que en los casos anteriores se determinó que el valor de los parámetros debía ser el siguiente:

$$A = .0009$$

$$B = 10^{-4.02889523533}$$

$$c = 1.0925$$

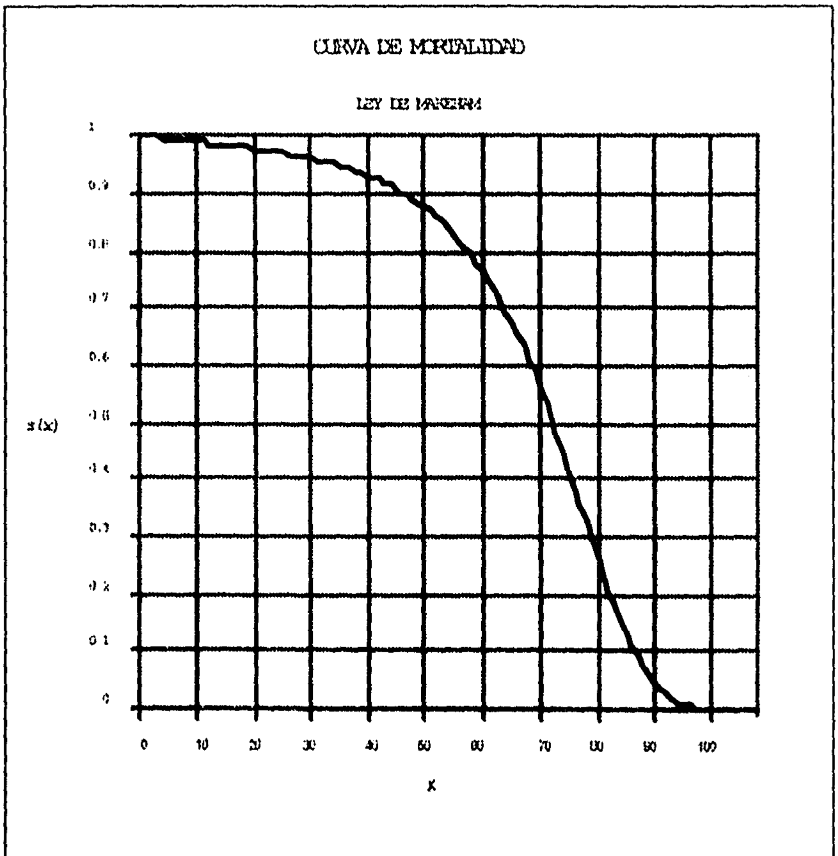


Figura 7
La gráfica muestra la curva de mortalidad generada mediante la Ley de Makeham en la segunda observación. (Apéndice 1)

La curva de mortalidad obtenida por este método se presenta en la siguiente ilustración. Los procedimientos se han incluido en el apéndice 2, y la tabla de mortalidad generada por este modelo se incluye en el apéndice 1.

Al analizar las diferencias entre la mortalidad observada por la 1958 CSO y la mortalidad esperada de acuerdo con esta nueva parametrización de la Ley de Makeham salta inmediatamente a la vista que el rango de las fluctuaciones se reduce dramáticamente hasta quedar dentro del intervalo comprendido por [- 0.012, .004].

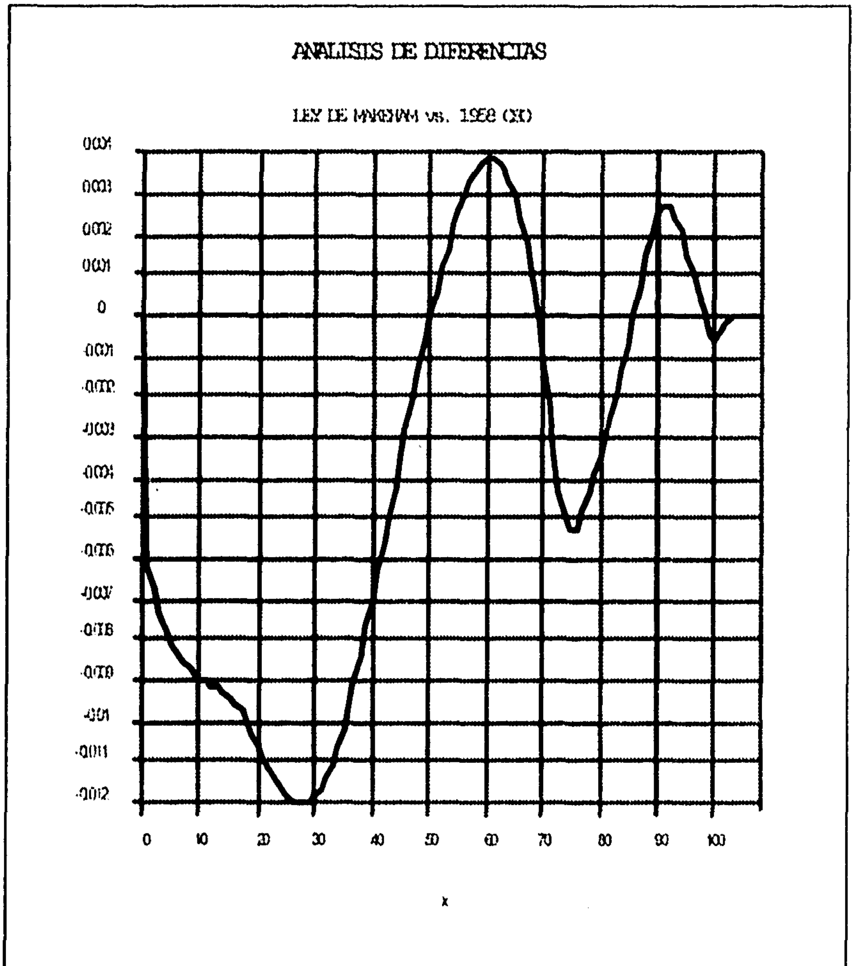


Figura 8
La gráfica muestra las diferencias entre la Tabla de Mortalidad **de la experiencia** Norteamericana C.S.O. 1958.menos la mortalidad **esperada** de acuerdo con el segundo modelo de la Ley de Makeham. **(Apéndice 1)**

Estas diferencias resultan extremadamente interesantes, pues las fluctuaciones se han reducido al rango de ± 1.2%, lo cual representa una importante ventaja con relación a los otros modelos que han sido desarrollados.

4.4) ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Los datos obtenidos en las secciones 4.2) y 4.3) del capítulo anterior representan una aproximación cercana a la mortalidad observada en la Tabla de Mortalidad 1958 CSO, obteniendo una precisión en el ajuste de los datos de hasta ± 1% en el caso de la segunda prueba con la Ley de Makeham.

Encontrar una expresión de la mortalidad esperada que se aproxime aún más a la mortalidad observada representa una enorme ventaja de índole práctico para llevar a cabo el cálculo de las probabilidades de supervivencia de un individuo, mismas que son útiles para determinar el monto de las primas y las anualidades contingentes.

Para llevar a cabo estos cálculos han de considerarse los resultados obtenidos con la Ley de Gompertz y con los dos experimentos realizados sobre la Ley de Makeham.

Al estudiar las diferencias que cada una de estas tres funciones presenta con relación a la mortalidad observada por la Tabla de Mortalidad, y que es presentada en la ilustración (11), surgen algunas consideraciones.

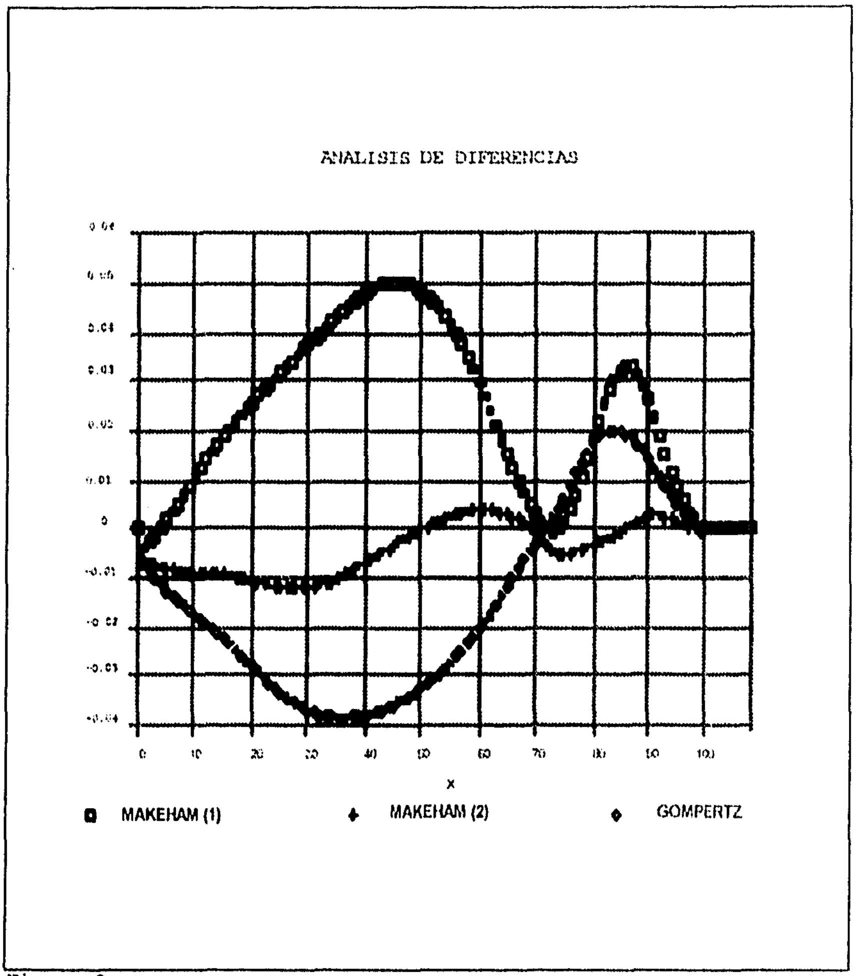


Figura 9
La gráfica muestra las diferencias entre la mortalidad observada Tomada de la Tabla de Mortalidad de la experiencia Norteamericana C.S.O. 1958.y la mortalidad esperada conforme a la Ley de Gompertz y los dos experimentos con la Ley de Makeham. (Apéndice 1)

En primer lugar, el segundo experimento con la Ley de Makeham, descrito en la sección 4.3.1) proporciona, en comparación con los otros dos, un ajuste más bondadoso con respecto a la mortalidad observada por la Tabla de Mortalidad 1958 CSO. Como se puede apreciar en la ilustración (10), las diferencias fluctúan dentro del rango [-0.012,0.004], lo que representa un rango de diferencias entre -1.2% y 0.4%.

Es notorio que el intervalo en el que esta función se ajusta mejor a los datos observados es aquel comprendido entre las edades [50,w), como se puede apreciar en la ilustración 12, que presenta un detalle parcial, dentro de dicho intervalo, del análisis de diferencias entre la Tabla de Mortalidad 1958 CSO y el segundo experimento con la Ley de Makeham.

Esto contrasta significativamente con los resultados obtenidos con la Ley de Gompertz y el primer experimento con la Ley de Makeham. En ambos casos, las diferencias sobrepasan ampliamente las obtenidas mediante el segundo experimento con la Ley de Makeham.

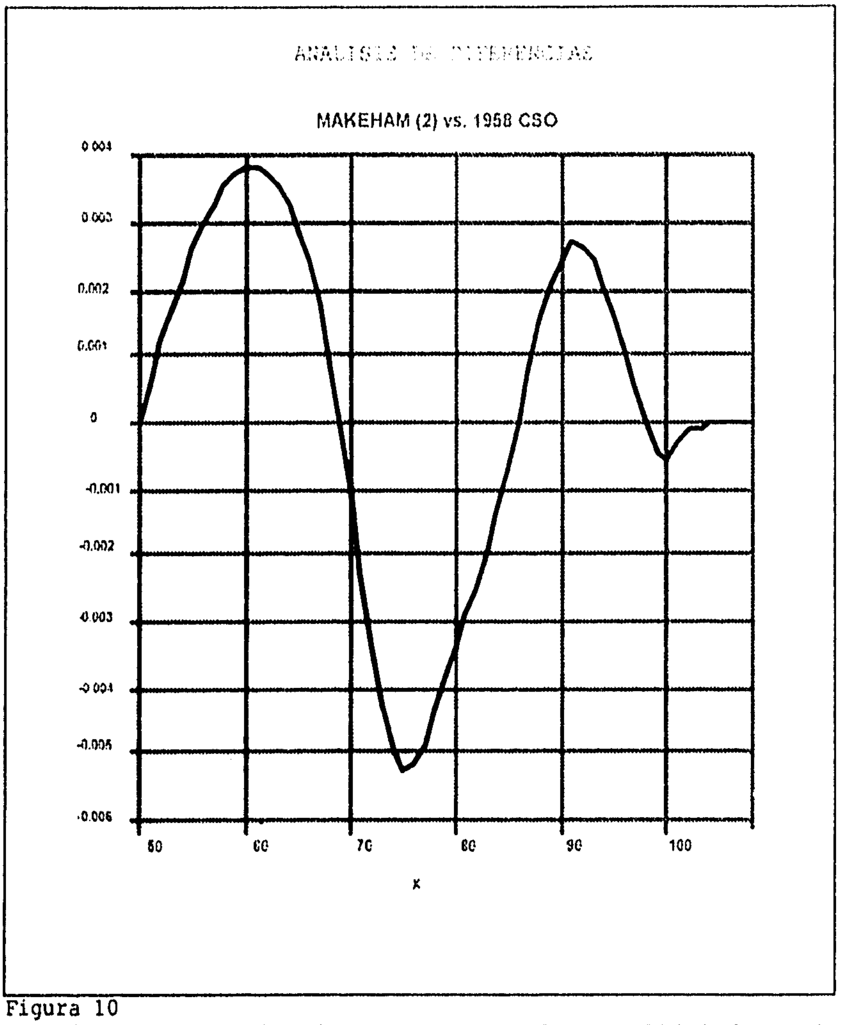


Figura 10
La gráfica presenta las diferencias entre la Mortalidad observada Tomada de la Tabla de Mortalidad de la experiencia Norteamericana C.S.O. 1958. menos Mortalidad esperada calculada mediante el segundo experimento con la Ley de Makeham, en el intervalo [50,w].

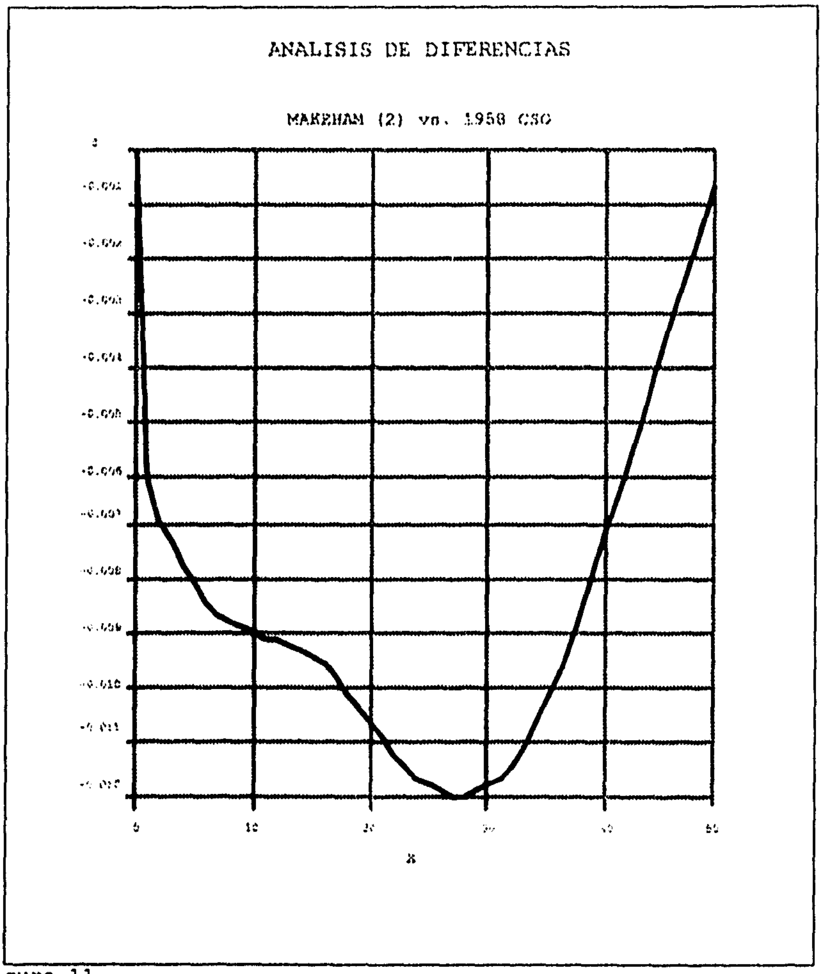


Figura 11
La gráfica presenta las diferencias entre la Mortalidad observada Tomada de la Tabla de Mortalidad de la experiencia Norteamericana C.S.O. 1958. menos Mortalidad esperada calculada mediante el segundo experimento con la Ley de Makeham, en el intervalo [0,50).

En contraste, en el intervalo [0,50) las diferencias resultan, como lo indica la ilustración (13), más pronunciadas. En la vecindad de x = 26, la diferencia alcanza el 1.12%.

Tomando en cuenta las diferencias encontradas entre la Tabla de Mortalidad de la Experiencia Norteamericana C.S.O. 1958, y los tres experimentos que se llevaron a cabo, puede apreciarse que estas son, en realidad, mínimas, por lo que puede considerarse que el método empleado cumple su objetivo de proporcionar una aproximación de la mortalidad esperada a la mortalidad observada.

CONCLUSIONES

Se ha podido comprobar, en primer lugar, que las caracteristicas matemáticas de la función supervivencia la constituyen en un modelo matemático eficiente para la medición y predicción de la mortalidad humana, siendo un ejemplo claro del trabajo del Actuario en la construcción de modelos matemáticos para el desarollo de sistemas de Seguros.

Se comprueba, igualmente, que los cálculos matemáticos que permiten pasar del planteamiento de la función supervivencia a la existencia de la función fuerza de mortalidad y el planteamiento de funciones con parámetros numéricos se apega en todo momento a conceptos particulares de la matemática pura, ratificando a la Actuaria como una rama de las Matemáticas Aplicadas.

Tanto la función de supervivencia como la fuerza de mortalidad cumplen en el objetivo de ser representaciones matemáticas de la realidad del entorno, en este caso reproduciendo el comportamiento que sigue la extinción gradual de una población humana sujeta a causas naturales.

En cuanto a la construcción de los modelos numéricos para la obtención de la función supervivencia, las tres versiones del método empleado arrojan diferencias mínimas en comparación con el modelo a partir del cual fueron generadas, que fue la tabla de mortalidad C.S.O. 1958 de la Experiencia Norteamericana. Esta tabla no es sino un ejemplo de un modelo diseñado para ajustar datos censales. El procedimiento empleado para ajustar estos datos mediante una función supervivencia demuestra, por su aparente simplicidad, que para la obtención de parámetros numéricos no existe un método único, sino que efectivamente existe la posibilidad de investigar cualquier método que permita obtener parámetros numéricos para ajustar los datos observados, minimizando las variaciones.

Tomando la tabla de mortalidad C.S.O. 1958 de la Experiencia Norteamericana como los datos observados, las anteriores consideraciones permiten apreciar que el modelo matemático construido se ajusta con suficiente precisión al modelo observado, independientemente del método empleado para su elaboración.

En consecuencia, el empleo de la matemática pura, en el caso concreto el cálculo diferencial e integral, la probabilidad y las ecuaciones diferenciales, han permitido el desarrollo de la ciencia actuarial en el campo de la medición de la mortalidad, mismo que es la base de todas las matemáticas involucradas en el seguro de vida.

APÉNDICE 1

TABLAS DE MORTALIDAD COMPARADAS

	1958 c.s.o.		Primer experimento con Ley de Makeham	Segundo experimento con Ley de Makeham	Ley de Gompertz
EDAD	l(x)	s(x)	s(x)	s(x)	s(x)
0	10,000,000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	9,929,200	0.9929200	0.9969883	0.9990027	0.9998954
2	9,911,725	0.9911725	0.9939838	0.9979973	0.9997811
3	9,896,659	0.9896659	0.9909862	0.9969831	0.9996561
4	9,882,210	0.9882210	0.9879952	0.9959592	0.9995195
5	9,868,375	0.9868375	0.9850106	0.9949245	0.9993701
6	9,855,063	0.9855063	0.9820319	0.9938782	0.9992069
7	9,842,241	0.9842241	0.9790589	0.9928189	0.9990284
8	9,829,840	0.9829840	0.9760912	0.9917456	0.9988334
9	9,817,749	0.9817749	0.9731283	0.9906567	0.9986202
10	9,805,870	0.9805870	0.9701697	0.9895509	0.9983871
11	9,794,005	0.9794005	0.9672149	0.9884264	0.9981324
12	9,781,958	0.9781958	0.9642632	0.9872816	0.9978540
13	9,769,633	0.9769633	0.9613141	0.9861145	0.9975498
14	9,756,737	0.9756737	0.9583667	0.9849230	0.9972172
15	9,743,175	0.9743175	0.9554203	0.9837049	0.9968538
16	9,728,950	0.9728950	0.9524738	0.9824576	0.9964566
17	9,713,967	0.9713967	0.9495264	0.9811784	0.9960225
18	9,698,230	0.9698230	0.9465768	0.9798643	0.9955482
19	9,681,840	0.9681840	0.9436237	0.9785121	0.9950299
20	9,664,994	0.9664994	0.9406658	0.9771184	0.9944635
21	9,647,694	0.9647694	0.9377015	0.9756792	0.9938447
22	9,630,039	0.9630039	0.9347290	0.9741904	0.9931686
23	9,612,127	0.9612127	0.9317463	0.9726475	0.9924300
24	9,593,960	0.9593960	0.9287514	0.9710455	0.9916231
25	9,575,636	0.9575636	0.9257416	0.9693790	0.9907417
26	9,557,155	0.9557155	0.9227144	0.9676422	0.9897789
27	9,538,423	0.9538423	0.9196666	0.9658287	0.9887275
28	9,519,442	0.9519442	0.9165951	0.9639315	0.9875792
29	9,500,118	0.9500118	0.9134959	0.9619432	0.9863254
30	9,480,358	0.9480358	0.9103649	0.9598556	0.9849564
31	9,460,165	0.9460165	0.9071974	0.9576598	0.9834619
32	9,439,447	0.9439447	0.9039883	0.9553461	0.9818306
33	9,418,208	0.9418208	0.9007319	0.9529042	0.9800503
34	9,396,358	0.9396358	0.8974215	0.9503226	0.9781075
35	9,373,807	0.9373807	0.8940502	0.9475891	0.9759880

	1958 c.s.o.		Primer experimento con Ley de Makeham	Segundo experimento con Ley de Makeham	Ley de Gompertz
EDAD	l(x)	s(x)	s(x)	s(x)	s(x)
36	9,350,279	0.9350279	0.8906099	0.9446903	0.9736760
37	9,325,594	0.9325594	0.8870918	0.9416120	0.9711546
38	9,299,482	0.9299482	0.8834860	0.9383385	0.9684056
39	9,271,491	0.9271491	0.8797816	0.9348530	0.9654090
40	9,241,359	0.9241359	0.8759664	0.9311374	0.9621435
41	9,208,737	0.9208737	0.8720268	0.9271722	0.9585860
42	9,173,375	0.9173375	0.8679480	0.9229363	0.9547118
43	9,135,122	0.9135122	0.8637132	0.9184072	0.9504941
44	9,093,740	0.9093740	0.8593040	0.9135606	0.9459043
45	9,048,999	0.9048999	0.8547001	0.9083705	0.9409118
46	9,000,587	0.9000587	0.8498789	0.9028092	0.9354837
47	8,948,114	0.8948114	0.8448156	0.8968471	0.9295851
48	8,891,204	0.8891204	0.8394826	0.8904526	0.9231789
49	8,829,410	0.8829410	0.8338497	0.8835922	0.9162257
50	8,762,306	0.8762306	0.8278837	0.8762306	0.9086838
51	8,689,404	0.8689404	0.8215482	0.8683304	0.9005094
52	8,610,244	0.8610244	0.8148032	0.8598525	0.8916567
53	8,524,486	0.8524486	0.8076053	0.8507557	0.8820777
54	8,431,654	0.8431654	0.7999070	0.8409974	0.8717230
55	8,331,317	0.8331317	0.7916568	0.8305336	0.8605415
56	8,223,010	0.8223010	0.7827995	0.8193188	0.8484811
57	8,106,161	0.8106161	0.7732751	0.8073069	0.8354891
58	7,980,191	0.7980191	0.7630200	0.7944512	0.8215127
59	7,844,528	0.7844528	0.7519663	0.7807052	0.8065001
60	7,698,698	0.7698698	0.7400425	0.7660232	0.7904009
61	7,542,106	0.7542106	0.7271740	0.7503610	0.7731675
62	7,374,370	0.7374370	0.7132834	0.7336769	0.7547563
63	7,195,099	0.7195099	0.6982921	0.7159329	0.7351291
64	7,003,925	0.7003925	0.6821210	0.6970957	0.7142547
65	6,800,531	0.6800531	0.6646929	0.6771385	0.6921108
66	6,584,614	0.6584614	0.6459340	0.6560424	0.6686863
67	6,355,865	0.6355865	0.6257771	0.6337982	0.6439830
68	6,114,088	0.6114088	0.6041646	0.6104084	0.6180186
69	5,859,253	0.5859253	0.5810527	0.5858893	0.5908286
70	5,592,012	0.5592012	0.5564156	0.5602732	0.5624694
71	5,313,586	0.5313586	0.5302510	0.5336105	0.5330202
72	5,025,855	0.5025855	0.5025855	0.5059718	0.5025855
73	4,731,089	0.4731089	0.4734806	0.4774499	0.4712969
74	4,431,800	0.4431800	0.4430388	0.4481615	0.4393143
75	4,129,906	0.4129906	0.4114096	0.4182485	0.4068266
76	3,826,895	0.3826895	0.3787943	0.3878782	0.3740513
77	3,523,881	0.3523881	0.3454492	0.3572433	0.3412325
78	3,221,884	0.3221884	0.3116872	0.3265606	0.3086382
79	2,922,055	0.2922055	0.2778756	0.2960685	0.2765554

	1958 c.s.o.		Primer experimento con Ley de Makeham	Segundo experimento con Ley de Makeham	Ley de Gompertz
EDAD	l(x)	s(x)	s(x)	s(x)	s(x)
80	2,626,372	0.2626372	0.2444296	0.2660228	0.2452834
81	2,337,524	0.2337524	0.2118020	0.2366917	0.2151262
82	2,058,541	0.2058541	0.1804661	0.2083484	0.1863821
83	1,792,639	0.1792639	0.1508946	0.1812632	0.1593327
84	1,542,781	0.1542781	0.1235325	0.1556936	0.1342312
85	1,311,348	0.1311348	0.0987685	0.1318741	0.1112904
86	1,100,037	0.1100037	0.0769045	0.1100054	0.0906712
87	909,929	0.0909929	0.0581302	0.0902445	0.0724738
88	741,474	0.0741474	0.0425033	0.0726958	0.0567306
89	594,477	0.0594477	0.0299421	0.0574047	0.0434043
90	468,174	0.0468174	0.0202321	0.0443542	0.0323893
91	361,365	0.0361365	0.0130475	0.0334654	0.0235187
92	272,552	0.0272552	0.0079856	0.0246024	0.0165752
93	200,072	0.0200072	0.0046095	0.0175807	0.0113066
94	142,191	0.0142191	0.0024919	0.0121796	0.0074423
95	97,125	0.0097125	0.0012517	0.0081568	0.0047113
96	63,037	0.0063037	0.0005791	0.0052642	0.0028580
97	37,787	0.0037787	0.0002443	0.0032628	0.0016547
98	19,331	0.0019331	0.0000930	0.0019350	0.0009104
99	6,415	0.0006415	0.0000315	0.0010935	0.0004738
100	0	0.0000000	0.0000094	0.0005862	0.0002320
101	0	0.0000000	0.0000024	0.0002967	0.0001063
102	0	0.0000000	0.0000005	0.0001410	0.0000453
103	0	0.0000000	0.0000001	0.0000625	0.0000178
104	0	0.0000000	0.0000000	0.0000257	0.0000064
105	0	0.0000000	0.0000000	0.0000098	0.0000021
106	0	0.0000000	0.0000000	0.0000034	0.0000006
107	0	0.0000000	0.0000000	0.0000011	0.0000002
108	0	0.0000000	0.0000000	0.0000003	0.0000000

APÉNDICE 2

LAS SIGUIENTES PAGINAS SON HOJAS DE EDICION DEL PROGRAMA EDITOR DE ECUACIONES MATHCAD, EMPLEADO PARA LOS CALCULOS. EL SIMBOLO ":=" DENOTA LOS VALORES PROPORCIONADOS AL SISTEMA, MIENTRAS QUE EL SIMBOLO "=" DENOTA LOS VALORES CALCULADOS POR EL SISTEMA.

DETERMINACION DE PARAMETROS PARA EL EXPERIMENTO CON LA LEY DE GOMPERTZ

Parámetros obtenidos mediante tanteo para ajustar la fórmula obtenida para la ley de Gompertz al valor de s(72)=0.5025855 de la tabla de mortalidad 1958 C.S.O.

$x := 0 \,..100$ $\qquad b := 10^{-4}$ $\qquad c := 1.0932761471203$

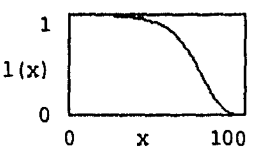
$$g := e^{-\left[\frac{b}{\ln(c)}\right]}$$

$$l(x) := g^{c^{x}-1}$$ FUNCION S(X) (página 93)

$l(0) = 1$
$l(61) = 0.773167470463$
$l(72) = 0.5025855$ Valor de referenica
$l(80) = 0.245283432236$
$l(100) = 0.000231975229$
$l(110) = 0.000000001358$

$g = 0.99887928608$

Gráfica de s(x) con los valores calculados por la computadora.



DETERMINACION DE PARAMETROS PARA EL PRIMER EXPERIMENTO CON LA LEY DE MAKEHAM.

Parámetros obtenidos mediante tanteo para ajustar la fórmula obtenida para la ley de Makeham al valor de s(72)=0.5025855 de la tabla de mortalidad 1958 C.S.O.

$x := 0 \,..100$ $\qquad a := .003$

$c := 1.12$ $\qquad b := 10^{-4.815301232563}$

$s := e^{-(a)}$

$g := e^{-\left[\frac{b}{\ln(c)}\right]}$ $\qquad$ FUNCION S(X) (página 101)

$l(x) := s^{x} \cdot g^{c^{x}-1}$

$l(0) = 1$
$l(61) = 0.727173987469$
$l(72) = 0.5025855$ $\qquad$ valor de referencia
$l(80) = 0.244429611575$
$l(100) = 0.000009388511$

$s = 0.997004495503$

$g = 0.999865001296$

$l(10) = 0.970169669306$
$l(20) = 0.940665837072$
$l(30) = 0.910364858991$
$l(40) = 0.87596635123$
$l(50) = 0.827883738334$
$l(60) = 0.740042549432$
$l(70) = 0.55641561073$
$l(80) = 0.244429611575$
$l(90) = 0.020232069366$
$l(100) = 0.000009388511$

DETERMINACION DE PARAMETROS PARA EL SEGUNDO EXPERIMENTO CON LA LEY DE MAKEHAM

Parámetros obtenidos mediante tanteo para ajustar la fórmula obtenida para la ley de Makeham al valor de s(50)=0.8762306 de la tabla de mortalidad 1958 C.S.O.

$x := 0 \,..100$ $\quad a := .0009$ $\quad b := 10^{-4.02889523533}$

$c := 1.0925$

$s := e^{-(a)}$

$g := e^{-\left[\frac{b}{\ln(c)}\right]}$

FUNCION S(X) (página 101)

$l(x) := s^{x} \cdot g^{c^{x}-1}$

$l(50) = 0.8762306$
$l(72) = 0.50597176819$
$l(80) = 0.266022837996$

$l(100) = 0.000586191476$
$l(0) = 1$

$s = 0.999100404879$

$g = 0.998942973822$

$l(10) = 0.989550851659$
$l(20) = 0.97711839654$
$l(30) = 0.959855615284$
$l(40) = 0.9311373952$
$l(50) = 0.8762306$
$l(60) = 0.76602318658$
$l(70) = 0.560273246501$
$l(80) = 0.266022837996$
$l(90) = 0.044354151291$
$l(100) = 0.000586191476$

$l(110) = 1.669140342906 \cdot 10^{-8}$

APÉNDICE 3

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes (discretas o continuas), cada una con media μ y varianza σ^2 finitas.

Entonces, si $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ y sea ε cualquier número positivo, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Dado que $\frac{S_n}{n}$ es la media aritmética de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, este teorema establece que la probabilidad de que $\frac{S_n}{n}$ difiera de su valor esperado en mas de ε tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

El teorema anterior puede igualmente ser interpretado de la siguiente forma:

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS PARA PRUEBAS DE BERNOULLI:

Sea X la variable aleatoria que proporciona el número de éxitos en n pruebas de *Bernoulli*, de tal forma que $\frac{X}{n}$ es la proporción de éxitos. Entonces, si p es la probabilidad de éxito en una sola prueba y ε es cualquier número positivo,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

En otras palabras, a la larga se hace extremadamente factible que la proporción de éxitos $\frac{X}{n}$ sea tan próxima como se desee a la probabilidad de éxito en una sola prueba, p.

Los dos teoremas anteriores permiten la siguiente interpretación:

Sea X_i la variable aleatoria que proporciona el número de personas que llegan con vida a la edad i tomadas de una población de tamaño n, de tal forma que $\frac{X_i}{n}$ es la proporción de personas que llegan con vida a la edad i

Entonces, si p_i es la probabilidad de morir al alcanzar dicha edad y ε es cualquier número positivo,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0 .$$

en otras palabras: a la larga se hace extremadamente factible que la proporción de personas que llegan con vida a cierta edad i, $\frac{X_i}{n}$, sea tan próxima como se desee a la probabilidad de que una sola persona llegue con vida a cierta edad p_i.

Lo que resulta más interesante en este caso es que inicialmente se ignora cual es la posibilidad de que una persona llegue con vida a la edad i, pero por el enunciado que se hizo de la Ley de los Grandes Números para pruebas de *Bernoulli*, resulta factible suponer que se escoge n lo suficientemente grande, entonces podemos aceptar que, con un cierto margen de error ε, que la probabilidad, p_i, de que una persona llegue con vida a la edad i está dada por $\frac{X_i}{n}$, la proporción de personas que llegan con vida a la edad i en una población de tamaño n.

OBRAS CONSULTADAS

ELLIOT, Curtis M. & VAUGHAN, Emmett J.
"Fundamentals of Risk and Insurance"
Ed. John Wiley & Sons, INC.
New York, 1972.

FELLER, William.
"Introducción a la teoría de las Probabilidades y sus aplicaciones.", Vol 1,
Editorial Limusa.
México D.F., 1983.

FISHER, H.F. & YOUNG, J.
"Actuarial Practice of Life Insurance."
Cambridge University Press.
Cambridge, England, 1965

GOMPERTZ, Benjamin.
"On the Nature of the Function Expresive of the Law of Human Mortality and On a New Mode of Determining the value of Life Contingencies".
En *Phylosophical Transactions of the Royal Society of London.*
Vol. 115,
London, England, 1825.

HAYCOCKS, H.W. & PERKS, W.
"Mortality and other Investigations"
Cambridge University Press.
Cambridge, England, 1955

HICKMAN, James C.
"Updating Life Contigencies".Lecture Notes prepared for the American Mathematical Society Short Course "Actuarial Mathematics".
En *Actuarial Mathematics Vol. 35 (1986) "proceedings of symposia in applied mathematics"*
American Mathematical Society.
Providence, Rhode Island, 1986.

HOOKER, P.F. & LONGLEY-COOK, L.H.
"Life and other contigencies." VOL. 1 y 2.
Cambridge University Press.
Cambridge. England, 1953-1957.

JORDAN Chester Wallace.
"Life Contingencies"
THE SOCIETY OF ACTUARIES.
Chicago, Illinois, 1967.

KISIELOV, A; KRASNOV, M & MAKARENKO, G.
"Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias."
Ed. Quinto Sol.
México D.F., 1991.

LARSON, Robert E. y GAUMNITZ, Erwin A.
"Life insurance Mathematics"
Ed. John Wiley & Sons, INC.
New York, London, 1966

MAGEE, John H.
"Seguros Generales" Tomo I.
Ed. UTEHA
Mexico D.F., 1967.

MAKEHAM, W.M.
"On the Law of Mortality and the construction of Annuity Tables".
En "*Journal Of the Institute of Actuaries*", vol. 8.
London, England,. 1860

MAKEHAM, W.M.
"On the Further Development of Gompertz's Law"
En "*Journal of the Institute of Actuaries.*" Vol. 28.
London, England, 1888

MARIN, J. Y EYME, A.
"Tratado de Operaciones Comerciales y Financieras"
Libreria del asilo "Patricio Sanz".
Mexico D.F., 1915.

MINZONI Consorti, Antonio.
"CRONICA DE DOSCIENTOS AÑOS DEL SEGURO EN MEXICO.
Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.
México D.F., 1991.

SMITH F.C.
"The force of Mortality function".
En "*The American Mathematical Monthly*", Vol. 55
Washington, D.C., 1948

SPIVAK, Michael
"CALCULUS" Cálculo Infinitesimal.
Ed. Reverté 2a. Edición.
México D.F., 1993.

SWOKOWSKI, Earl W.
"Cálculo con Geometria Analitica"
Ed Ibero America. 2A. Edición.
México D.F. 1988.