UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN

MECANICA LAGRANGEANA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A :

BENITO ARREDONDO MARTINEZ

ASESOR: ING. JOSE LUIS BUENROSTRO RODRIGUEZ

CUAUTITLAN IZCALLI, EDO. DE MEXICO 1996

UNIVERSIDAD NACIONAL AVENMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN
UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR
DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES

U. N. A. M.
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS

DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES

DR. JAIME KELLER TORRES
DIRECTOR DE LA FES-CUAUTITLAN
P R E S E N T E .

AT'N: Ing. Rafael Rodríguez Ceballos
Jefe del Departamento de Exámenes
Profesionales de la F.E.S. - C.

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS TITULADA:

"Mecánica Lagrangeana"

que presenta EL pasante: Benito Arredondo Martínez
con número de cuenta: 8329776-8 para obtener el TITULO de:
Ingeniero Mecánico Electricista .

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO.

A T E N T A M E N T E .
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx., a 25 de Marzo de 1996

PRESIDENTE	Ing. Francisco Rojas Espinosa	Fco. Javier Rojas E.
VOCAL	Ing. J. Juan Contreras Espinosa	
SECRETARIO	Ing. José Luis Buenrostro Rodríguez	
PRIMER SUPLENTE	Ing. Antonio Trejo Lugo	
SEGUNDO SUPLENTE	Ing. Jesús García Lira	

UAE/DEP/VAP/02

DEDICATORIAS:

Agradezco la guía y acertados comentarios del **Ing. José Luis Buenrostro Rodríguez** quien fungió como **Director de Tesis.**

A la **Universidad Nacional Autónoma de México**
Bastión donde la Patria engendra sus mejores hijos.

A la **Facultad de Ing. Mecánica Eléctrica** Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán
Cuya enseñanza fue legarnos la búsqueda del beneficio social

A todos mis **Maestros**
Por su empeño, dedicación, aliento y conocimientos; con gratitud y respeto.

Mis Padres
Sra. Rosa Martínez de Arredondo
Sr. Benito Arredondo Mejía
Agradeciendo su cariño, cuidados, guía y sacrificios con el fin de alcanzar esta meta tan crucial en nuestras vidas.

Mis Padrinos
Sr. Rosendo Torres Mejía
Sra. Rosa María Puga de Torres
Agradeciendo su apoyo guía y comprensión a lo largo de mi vida.

A mis Tíos
Sra. Nony Mercado
Sra Sara Torres Mejía
Especialmente al Sr. José Martínez Castañeda Gracia a sus consejos, apoyo y esperanzas que fueron esenciales para el logro de esta meta.

A mis Hermanos
Lic. Ivonne Arredondo Martínez
Sr.. José Antonio Arredondo Martínez
Por su apoyo cariño y consejo, exhortandolos a seguir este camino.

A mis Primos
Jorge, Miguel Rosendo, Norma , Juan Antonio, Elpidio, Edgar, Elfego, Vladimir.
Que al igual que hermanos me brindaron su cariño y apoyo

A mi Sobrina consentida
Galia
Por su ternura e inocencia

A mis Amigos
Carmelita, Jorge's y Gerardo (los Bolaños)
Diana, Verónica, Edmundo, Carlos, Alonso, Efrén, Fam. Rustrian Flores, Fam. Celis Salcedo. Fam. Flores Cisneros, Fam. Flores Hernández, Isidro, Reynol y Erbey.
AMCIR
Mónica, Lupita, Jorge y Ramón (Comadres)
Maru, Roció y Jesús (Marucas)
Gabriel Hugo, Leonardo, Carlos, Paco (Gabos)
Angela, Claudia's Viki y Emilia (Claudia's)
Mario's, Jesús Armando, Enrique y Eugenio (Benos)

Por su apoyo sin olvidar todos los grandes momentos que compartimos.

INDICE

INTRODUCCIÓN

La mecánica Newtoniana es la utilizada comúnmente en la solución de problemas dinámicos; Y por lógica la que se enseña desde la educación media hasta la superior.
Más aún, se creía que la explicación de los fenómenos naturales venia a significar la explicación en términos de la mecánica Newtoniana, se supuso que el comportamiento físico de la electricidad, la luz y la materia quedarían incluidos eventualmente dentro de este esquema, con suficiente diligencia y objetividad; Se esperaba que cuestiones de la filosofía y problemas de la sociedad humana siguieran métodos paralelos de investigación y análisis.
No obstante en la ciencia se desarrolló paralelamente y extremadamente rápido el Cálculo Diferencial e Integral y la solución de ecuaciones diferenciales, lo que trajo una extensa explotación de la Mecánica Newtoniana.

En el primer capitulo trato de mostrar parte de este movimiento, en forma condensada, éste es como la historia de las ideas, tanto en la ciencia como en cualquier otro campo, no es simplemente la historia de las ideas ó un recuento de los hombres más importantes. El trabajo de cada Genio es hecho posible, estabilizando y relacionando con toda la estructura de la ciencia solamente a través de los trabajos de Hombres menos conocidos. La ciencia no puede ser hecha por gigantes únicamente, como Lord Rutherford ha dicho "No está en la naturaleza de las cosas que cualquier Hombre haga un descubrimiento grande y repentino; La ciencia va paso a paso y cada Hombre depende del trabajo de sus predecesores... los científicos no dependen de las ideas de un sólo Hombre sino de la sabiduría combinada de miles de Hombres".
Por tanto, propiamente debemos buscar en la contribución de cada hombre la herencia del pasado, la influencia de sus contemporáneos y el significado para sus sucesores.

En el segundo capitulo vemos de manera general algunos conceptos de la Dinámica, visualizando los axiomas de Newton y sus demostraciones deductivas sobre los teoremas que señalan que la historia de la Dinámica no puede estar desligada de la historia de las matemáticas, este método de las "Fluxiones" fue inventado específicamente por Newton para ayudarle a resolver el enigma del movimiento de la luna y determinar que una esfera homogénea que atrae un cuerpo se comporta como si toda su materia estuviera concentrada en su centro. Por esto la Dinámica es una ciencia deductiva, como tal, su estructura matemática formal puede construirse sobre otros axiomas fundamentales distintos de los utilizados por Newton; Está última aseveración es el contenido del tercer capitulo. Podemos hacer uso de la propia teoría de Newton de que "la luna gravita hacia la tierra y por la fuerza de gravedad es sacada continuamente de un movimiento rectilíneo y mantenida en su órbita". Este fue el cálculo que Newton, con datos contemporáneos, encontró que "contestaba muy aproximadamente", probablemente dentro de un reducido porcentaje, la suposición de una trayectoria estrictamente circular y valores algo inexactos para el radio y la gravedad hacia claro desde el principio que no podía haberse esperado una concordancia perfecta.

Sin embargo ha sido una fuente de mucha especulación el porque Newton no comunicó a nadie este notable resultado cuando lo concibió por primera vez, sino hasta veinte años después aproximadamente.

Aparte de su reserva y su temor a disputas con Hombres envidiosos, parece que no pudo, en ese entonces explicar claramente una hipótesis implícita en el argumento, a saber, que la fuerza gravitacional de la tierra actúa como si se originara en el mismo centro de la esfera y que consecuentemente debe hacerse la medición de distancia no a la superficie de la esfera, sino a su centro.

Como los antiguos estimaban a la ciencia de la Mecánica como de máxima importancia en la investigación de las cosas naturales, y los modernos, rechazando formas sustanciales y cualidades ocultas, han tratado de sujetar los fenómenos de la naturaleza a las leyes de las matemáticas, de aquí se desprende un método más exacto utilizando conceptos de Cálculo Diferencial y Físicos que dan paso a la Mecánica Lagrangeana ó Analítica muy utilizada actualmente en la robótica.

Capítulo I

Breve Historia de la Mecánica

La Mecánica es una rama de la Física encargada de estudiar las acciones de las fuerzas, de la cual resultaban las leyes del movimiento y del equilibrio; Esta ciencia presenta raíces antiquísimas y ha evolucionado al través de los siglos con aportaciones tan revolucionarias que la humanidad se ha demorado varios años en comprender dichas teorías.

En la Mecánica se observan varias divisiones, generadas por necesidades de explicar ciertos fenómenos por ejemplo: La Mecánica Newtoniana ó Clásica estudia cuerpos macroscopicos, no así el movimiento de los átomos. De aquí nace la Mecánica Cuántica que en uno de sus apartados considera que la luz viaja a través de ondas, la teoría no explica ciertos fenómenos de refracción de la luz, por lo que se crea la Mecánica Ondulatoria estableciendo que la luz viaja mediante corpúsculos, asociando un movimiento ondulatorio a un movimiento de partículas, de esta manera son explicados los fenómenos no considerados en la Mecánica Cuántica.
Del mismo modo la Mecánica Racional esta basada en resultados teóricos, tomando leyes probadas, de aquí nace la Cinemática, la Estática y la Dinámica. En cambio la Mecánica Relativista considera los efectos de las velocidades del orden de la luz (considerando que es la mayor velocidad del universo) en cuerpos, analizando cambios en su masa, tiempo, etc.
La Mecánica Celeste estudia los movimientos de los astros y demás cuerpos celestes.
La Mecánica ha evolucionado junto con la matemática gracias a cientos de personas a través de la historia; Haré mención de aquellos cuyas aportaciones son relevantes, sin olvidar que detrás de ellos se encuentran otros genios menos reconocidos.

El interés del hombre por explicar los fenómenos naturales empieza formalmente con Arquímedes de Siracusa (212 - 287 a.C.) con la aportación de la idea del centro de gravedad de un cuerpo, su contribución a la teoría de la palanca, el concepto de la fuerza de empuje actuante en un cuerpo al flotar en un líquido. Fue el inventor el polipasto, el tornillo y el plan inclinsdo, estudió los fenómenos de reflexión y refracción de la luz; En el campo de la matemática, fue el inventor del Cálculo Integral, perfeccionó el método de numeración Griego y calculó el valor de π.

Buridan (1300 - 1366) Desarrolló la teoría de los Ímpetus aplicándola a la caída de los cuerpos y al movimiento de los astros.

Alberto de Saxe (1316 - 1390) Introdujo la noción del centro de gravedad a partir de la idea de Arquímedes. Considera el Ímpetus como una "Gravitas accidentalis" para distinguirlo de la "Gravitas naturalis".

Leonardo de Vinci (1453 - 1519) En el campo de la Mecánica relacionó los momentos estáticos con el equilibrio de los cuerpos. Albergó la idea de la teoría del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, que después ayudaría a Galileo.

Stevinus (1548 - 1620) Planteó el principio del plano inclinado, inventado por Arquímedes utilizando el método del paralelogramo.

Galileo Galilei (1564 - 1642) Enunció y verificó experimentalmente las leyes cinemáticas de las caídas de los cuerpos y del movimiento uniformemente acelerado, observó que las fuerzas producen aceleraciones. Descubrió la ley de la inercia que después retomaría Newton, el paralelogramo de movimientos (composición vectorial) obtuvo la trayectoria de un proyectil; plasmándolos en su obra "Dialogues Concerning to new Sciences". Construyó el primer telescopio, realizando con este, interesantes descubrimientos astronómicos.

Kepler (1571 - 1642) En su obra "Astronomia Nova" citó tres leyes empíricas del movimiento planetario, en "Harmonice Mudi" concibió la gravedad como la análoga de la atracción magnética.

Descartes (1596 - 1650) Propuso la "Cantidad de Movimiento" que en realidad fueron ideas vagas de movimiento lineal. Estableció la fuerza viva conocida hoy en día como "Energía Cinética", mencionó que todo espacio estaba lleno de un fluido sutil e invisible de corpúsculos materiales contiguos, supuso que el movimiento de los Astros era similar al de un fluido en un Vórtice, todo lo anterior relacionado en su obra "Principia Philosophiae".

Pascal (1623 - 1662) Aplicó el principio de "Velocidades Virtuales" a la Estática de los fluidos, estableció las leyes de la presión de los líquidos, demostró que la presión atmosférica varia con la altura; en su obra "Rècif de la Srande Experience de L'equilibre des Liquores".

Huyghens Christian (1629 - 1695) Inventó el reloj de péndulo y mediante mediciones pendulares determinó la aceleración de la gravedad. Estableció la conexión entre trabajo y energía Cinética, creó las ideas entre Aceleración Centrípeta y Fuerza Centrífuga, dedujo la fórmula

$$A = V^2 / r$$

para el movimiento circular uniforme. Su obra "Horologium Oscillatorium"

Newton Isaac (1642 - 1695) Su obra que creó una revolución en aquella época "Principia Mathematica" comienza con definiciones de masa, fuerza, inercia, fuerza centripeta; Posteriormente sigue una sección sobre espacio absoluto, relativo, tiempo y movimiento. Después encontramos las tres leyes del movimiento junto con los principios de descomposición de Vectores (fuerza y velocidad).
Para Isaac Newton hay cuatro regles que reflejan la uniformidad en toda la naturaleza. La primera se conoce como el principio de "Parsimonia", la segunda y tercera "Principios de Unidad", la cuarta es una creencia sin la cual no podría utilizarse la lógica.

1) En la Naturaleza todo es simple "La Naturaleza no hace nada en vano y mientras más vano sea menos servirá".

2) El análisis de un problema en el que se observen efectos semejantes debe de aplicársele la misma causa sin importar el lugar (si es que este no afecta el fenómeno estudiado).

3) Las propiedades comunes a todos los cuerpos deben aplicárseles a todos ellos en general. En la tierra, en la luna, sobre una roca, etc.

4) Las porciones en la tierra van a considerarse ciertas ó aproximadas hasta que los fenómenos demuestren excepciones ó correcciones.

Esto es parte de lo editado en sus principios además de la Ley de la Gravitación Universal.[1]

Bernoulli Jacobo (1654 - 1705) Dedujo el centro de oscilación a partir del principio de la palanca (estudiado por Arquímedes) resolvió problemas de inflexión en vigas y columnas editando sus resultados en "Acta Eruditorium"

Bernoulli Juan (1667 - 1748) Contribuyó al principio de conservación de la energía, generalizó el principio de Velocidades Virtuales, sus Obras: "Acta Eruditorium" y Opera Ommnia.

Maupertius (1698 - 1759) Descubrió para un sistema, llegue al equilibrio se necesita un máximo ó un mínimo. Enunció el principio de "Mínima Acción" (Acción = masa X velocidad X recorrido) esto es una combinación vaga de trabajo Virtual y fuerza viva (Energía Cinética). Sus obras: "Memoires de L'Academie de Paris", "Memoires de L'Academie de Berlín.

Bernoulli Daniel (1700 - 1782) Aplicó el principio de fuerza viva al movimiento de fluidos, ideo un método para determinar la salida de un líquido por un orificio, descubrió la ley de conservación de las áreas, que es una generalización de la primera y segunda ley de Kepler del movimiento de los Astros, enunció una teoría rudimentaria sobre la presión de un gas. Su obra: "Hidrodynamica, sine de Viribus et Motibus Fluidorum Commentar".

Euler Leonard (1707 - 1783) Introdujo los "Triángulos" que llevan su nombre, en la Dinámica de Cuerpo Rígido, se cree que fue el primero en escribir explícitamente la segunda ley de Newton

$$F_{neta} = m\,(\delta x^{2} / \delta t^{2})$$

Ideó el "Momento de Inercia". Realizó varias aportaciones que editó en artículos de las academias de Berlín y San Petersburgo, contribuyó al cálculo de las variaciones en su obra "Mechanica Motus".

Clairau T. (1713 - 1765) Aplicó la teoría del Potencial al equilibrio de los líquidos, con este punto de vista discutió la forma de la tierra en su obra "Theorie de la Figure de la Terre".

---

[1] Principio de Newton "Evaluación de los conceptos de la Física"

D'Alembert (1717 - 1783) Con su principio establecido en "Traité de Dynamique", el cual menciona que un sistema de sólidos de masa constante, donde no hay rozamientos entre ellos ni con cuerpos exteriores, el trabajo Virtual de las fuerzas aplicadas y de las fuerzas de inercia será nulo. Dedujo que dos cantidades variables que permanecen constantemente iguales tienen el mismo límite. Hoy en día su principio es punto de partida para determinar las ecuaciones del movimiento.

Lagrange Joseph Louis (1736 - 1813) Introdujo funciones de las coordenadas y de las velocidades relacionadas con la ley de la conservación, energía Cinética y Potencial. Realizó trabajos sobre cálculo de las variaciones, y la teoría de las funciones analíticas, ideó un método de interpolación que lleva su nombre, referenciándolo en "Theorie des Functions" y en "Traite de la Resolution des e'quations Numeriques de Tous Degres". Estableció una racionalización de la Estática y la Dinámica tendiente a reducir la Ciencia a una operación formal, su aproximación fue analítica y se oponía a la aproximación geométrica de Newton, obtuvo las "Ecuaciones Lagrangeanas" del movimiento equivalentes a las de Newton, es considerado el fundador de la Mecánica analítica gracias a su publicación " Mecanique Analytique"

Laplace (1749 - 1827) Probó la estabilidad del sistema solar aplicando los conceptos de Newton al movimiento de los planetas y satélites. Condensandolo en su obra Mécanique Celeste.

Gauss (1777 - 1855) Revolucionó el método del Cálculo de Órbitas, contribuyó al principio de Estática de los Líquidos, su obra; Neues Princip del Mechanik.

Poisson (1781 - 1840) Estudió la dinámica de los cuerpos elásticos, creó el método de Variación de parámetros para la resolución de problemas de Dinámica.

Coriolis (1792 - 1843) En su obra Traite de Mecanique, llamó trabajo al producto de la fuerza por la distancia, dio a la fuerza viva la siguiente notación:

$\frac{1}{2}mv^2$ Energía Cinética

Dio su nombre a la Pseudo fuerza ($2m\ (\bar{w} \times \bar{v})$) por un movimiento de un marco de referencia que gira.

Jacobi (1804 - 1851) En su obra Vorlesunngen über Dynamik, Demostró que para la teoría de mínima acción se tiene un valor estacionario y no un máximo ó un mínimo necesariamente. Introdujo la función de sustitución contribuyendo a la solución de la Ecuación diferencial "Hamilton - Jacobi", de gran importancia en la Mecánica Cuántica.

Hamilton William Rowan (1805 - 1865) Investigó la óptica geométrica, sus principales aportaciones son sobre la luz corpuscular y la ondulatoria. estudiando las Ecuaciones de Lagrange, conceptualizó las "Funciones Fuerza" siendo estas la Energía Cinética con signo negativo, creó una integral equivalente al principio D'Alembert

$$\partial \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\,\partial t = 0$$

que se aplica a una trayectoria Dinámica, que difiere de las trayectorias en el espacio cartesiano. Esto último se conoce como el principio de Hamilton, sus ecuaciones son útiles en Dinámica Analítica y Mecánica Cuántica, su obra; Lectures on Quarternions.

Mach (1838 - 1916) De su obra Die Mechanik in ihrer Entwickelung se observa el análisis de los conceptos de masa y fuerza, critica y resumen de la Dinámica tal como se conoce en ala actualidad.

Hertz (1857 - 1894) En Principien der Mechanik criticó los fundamentos filosóficos de la Dinámica Newtoniana, formuló un sistema "sin fuerza" en que sólo se aceptan tiempo, masa y espacio, combinando la Ley de Inercia y el Principio de Mínima Restricción.

Poincaré (1854 - 1912) Contribuyó al estudio de la estabilidad de los fluidos que giran, y la estabilidad de los movimientos periódicos, creó parte de la Teoría de los Invariantes Integrales y de las Ecuaciones Diferenciales aplicadas a la Mecánica Celeste. Su obra; Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste.

Einstein Albert (1878 - 1955) Su interpretación cuántica en el efecto fotoeléctrico de la radiación y la materia no admiten que cambien energía discontinuamente, atribuyendo naturaleza corpuscular a la misma radiación.
El tiempo y el espacio no significan nada más de lo que un observador puede medir ó percibir. Cada observador transporta su propio espacio y tiempo; Mediante las Ecuaciones de la Transformación se pueden transportar las observaciones de un sistema a otro. La velocidad de la luz es la velocidad límite que puede alcanzar un móvil en nuestro Universo. La masa varía con la velocidad, siendo mínima al alcanzar la velocidad de la luz, la energía aparece dotada de inercia.
La desviación de los rayos luminosos por el campo gravitatorio del sol y el avance del Perihelio de Mercurio fueron las pruebas experimentales de su teoría. Su Obra; Die Groundlange der Allgemeinen Relavitäts Theorie.

Hawking Stephen (1942 -) En su Obra A Brief History of Time, propuso una intrépida teoría del origen del Universo (La gran explosión) en la cual la gravedad tiene significativa relevancia, sin embargo algunas de sus hipótesis requieren de 26 dimensiones para explicar ciertos fenómenos.

La Mecánica es parte de la historia de la humanidad en su inquietud por comprender los fenómenos que le rodean, gracias a ello; Hombres como los mencionados en esta breve introducción cambiaron la perspectiva de nuestro concepto del Universo y los fenómenos que lo rigen.

Capitulo II

Conceptos Básicos de la Mecánica

CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

La cinemática es la parte de la dinámica que estudia el movimiento de los cuerpos, sin tener como referencia a las fuerzas que lo generan, también es conocida como la geometría del movimiento. Esta presenta para su estudio varias divisiones las cuales analizaremos de una manera básica.

Movimiento Rectilineo

Es el que realiza una partícula que tiene un desplazamiento Δs en un tiempo Δt sin cambiar su dirección en dicho intervalo; su velocidad promedio es dada por $V_{ar} = \Delta s / \Delta t$, cuando tiende a cero su velocidad instantánea es $V = \partial s / \partial t = S'$, el signo de la velocidad depende del signo del desplazamiento.

La Aceleración de la partícula es dada de manera similar $A_{av} = \Delta V / \Delta S$ mientras que la aceleración instantánea esta dad por $A = \partial v / \partial t = V'$ ó $A = \partial'' s / \partial'' t = S''$ el signo de la aceleración esta dado por la velocidad si se incrementa (+) ó decrece (-).

En base en lo anterior podemos describir la aceleración en función del tiempo $A = f(t)$

$$f(t) = \partial v / \partial t \qquad \int_{V_o}^{V} \partial V = \int_{0}^{t} f(t)\, \partial t \quad \text{ó} \quad V = V_o + \int_{0}^{t} f(t)\, \partial t \quad \text{obteniendo la velocidad}$$

$$\int_{S_o}^{S} \partial s = \int_{0}^{t} V \partial t \quad \text{ó} \quad S = S_o + \int_{0}^{t} V\, \partial t \quad \therefore\ S = S_o + V_o t + 1/2\, (A t^2)$$

La aceleraciones función de la velocidad $A = f(V)$

$$f(V) = \partial v / \partial t \quad \therefore\ t = \int_{0}^{t} \partial t = \int_{V_o}^{V} \partial v / f(V)$$

Alternativamente la función $A = f(V)$ es dada por $V \partial v = f(V)\, \partial s$

$$\int_{V_o}^{V} V \partial v / f(V) = \int_{S_o}^{S} \partial s \quad \text{ó} \quad S = S_o + \int_{V_o}^{V} V\, \partial v / f(V)$$

La aceleración en función del desplazamiento $A = f(S)$

$$\int_{V_o}^{V} V\, \partial v = \int_{S_o}^{S} f(S)\, \partial s \quad \text{ó} \quad V^2 = V_o^2 + 2 \int_{S_o}^{S} f(S)\, \partial s \quad \therefore\ V^2 = V_o^2 + 2A\, (S - S_o)$$

Movimiento Plano Curvilíneo

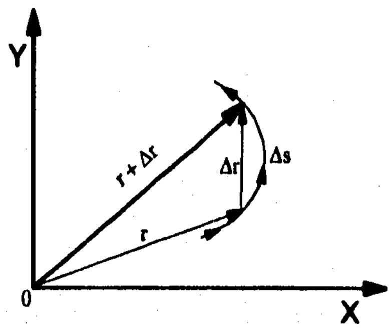


Figura 1

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva en le tiempo "t"; La partícula se encuentra en la posición "A" la cual esta localizada en el vector de posición "r" , este ultimo es medido desde el origen, si conocemos el valor de r y t. La partícula esta completamente localizada.
En el tiempo "$t + \Delta t$" la partícula se encuentra en A', especificada por el vector "$r + \Delta r$".

El desplazamiento de la partícula durante el tiempo Δt esta dado por el vector Δr que es independiente a la elección del origen, la distancia que recorrió la partícula en su movimiento a lo largo de A-A' en trayectoria circular es Δs. Esta es la distancia entre el vector de desplazamiento Δr y la distancia escalar Δs.
La velocidad promedio de la partícula es $V_{av} = \Delta r / \Delta t$; Mientras que la rapidez promedio es $\Delta s / \Delta t$.

La velocidad instantánea esta dada por $V = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta r / \Delta t$ resultando $V = \partial r / \partial t = r'$.

En el caso de la rapidez donde solo tomamos una magnitud escalar $V = |V| = \partial s / \partial t = s'$, la aceleración promedio es dad por $A_{av} = \Delta V / \Delta t$. Mientras que la aceleración instantánea de la partícula es dada por $A = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta V / \Delta t \therefore A = \partial v / \partial t = \dot{V}'$.

La aceleración "A" incluye el cambio de magnitud de "V" y el cambio de dirección "V", en apariencia en el movimiento curvilíneo se debe de considerar la aceleración tangencial y normal. Para esta efecto hay varias formas de especificarlas, ya sea por coordenadas rectangulares, polares, normal - tangencial y otras para movimiento curvilíneo en el espacio como son las cilíndricas y las esféricas.

CINÉTICA DE LA PARTÍCULA

De acuerdo con la segunda Ley de Newton, cuando la partícula esta sometida a fuerzas des balanceadas estas la aceleraran, la Cinética es el estudio de las relaciones entre fuerzas des balanceadas y los cambios de movimiento que estas producen, se tienen tres formas generales para la solución de problemas cinéticos:

a) Aplicación directa de la segunda ley de Newton
b) El uso de los principios de trabajo y energía
c) Resolución por métodos de momento e impulso

a) Fuerza masa aceleración (aplicación de la segunda Ley de Newton)

La segunda Ley de Newton se define para un sistema de fuerzas des balanceadas que actúan sobre una partícula de masa "m" como la relación que estas producen sobre dicha partícula, en este punto queda asentado que tendremos una fuerza resultante de las fuerzas ejercidas sobre la partícula, por lo tanto, la dirección del movimiento esta dado porla dirección de la fuerza resultante, así el cambio de velocidad creado por esta resulta en una aceleración constante "A" y una fuerza "F" observamos que para una masa ligera ó pequeña necesitamos una fuerza pequeña logrando así una aceleración "A" contrariamente para una masa mas grande se requiere una fuerza mas grande, lo que nos conlleva a la relación $F = mA$ siendo esta la forma tradicional como se conoce la segunda Ley de Newton.
Si se considera el caso de la gravedad podemos sustituir la aceleración "A" por la aceleración del campo gravitatorio "g"; Sustituyendo en la ecuación tenemos que $F = mg$, debido a esta acción del campo la fuerza entonces se considera como el peso "P" de la partícula, por lo que la segunda Ley de Newton se re escribe como $P = mg$.

El valor intermacionalmente aceptado de "g" a una latitud de 45° a la altura del mar es de 9.80665 mts / segundos cuadrados (32.174 pies / segundos cuadrados) a menos que se requiera gran precisión el valor aceptado es de 9.81 mts / segundos cuadrados (32.2 pies / segundos cuadrados.

Ecuación del Movimiento

La ecuación del movimiento da el valor instantáneo correspondiente a los valores instantáneos de fuerzas actuantes; $\Sigma F = mA$.
Tenemos dos tipos de problemas donde se aplica la ecuación, en le primer caso la aceleración es por lo general especificada ó puede ser obtenida directamente por las condiciones cinemáticas conocidas, en el segundo caso una ó mas de las fuerzas son especificadas y el movimiento resultante determinado, si las fuerzas son constantes la aceleración es constante; en cambio si estas son función del tiempo; posición velocidad ó aceleración entonces estas se tornan una ecuación diferencial la cual se debe de integrar para obtener la velocidad o el desplazamiento.

En vista de lo anterior se observa que el movimiento se torna libre o forzado, el primero se da cuando la partícula no esta sujeta a ningún cambio y solo sigue la trayectoria determinada por el movimiento inicial; El segundo tipo de movimiento es sometido parcial o totalmente a cambios de trayectoria.
Por lo anterior se tienen tres tipos o grados de libertad, por ejemplo si la partícula se mueve libre en el espacio se dice que tiene tres grados de libertad (el centro de masa de una aeronave en vuelo libre), cuando es restringida por una superficie y se mueve a través de ella entonces tiene dos grados de libertad (como un disco de Hockey deslizándose sobre el hielo), por ultimo la partícula es forzada a moverse a lo largo de una trayectoria lineal, en este caso solo tiene un grado de libertad (un anillo a lo largo de un barra).

Diagrama de Cuerpo Libre
En la aplicación de cualquier ecuación del movimiento de masa - fuerza - aceleración, es absolutamente necesario aplicar las fuerzas que actùan sobre la partícula correctamente, solo las fuerzas que en sus magnitudes son despreciables en comparación que las fuerzas que actúan sobre la partícula como son la fuerza de atracción entre dos partículas. El vector ΣF es la suma escalar de todas las fuerzas que actúan en la misma en una dirección particular.
Por medio del diagrama de cuerpo libre se representan todas las fuerzas conocidas y desconocidas actuantes sobre la partícula en cuestión. Después de este paso podrán ser escritas apropiadamente la ó las ecuaciones de movimiento, dicho diagrama sirve lo mismo para sistemas estáticos que dinámicos con el propósito de simplificar la solución.
En sistemas estáticos la solución de la sumatoria de las fuerzas ó resultante es igual a cero, mientras que en los sistemas dinámicos dicha resultante es igual al producto de la masa por la aceleración.

Movimiento Rectilíneo
Las ecuaciones para un movimiento rectilíneo en base a $\Sigma F = mA$ son:

$$\Sigma F_x = mA_x$$
$$\Sigma F_y = mA_y$$
$$\Sigma F_z = mA_z$$

Donde la aceleración y las fuerzas resultantes dan:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$|\Sigma F| = \sqrt{(\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2 + \Sigma F_z^2)}$$

La dirección de las fuerzas y las componentes de todas estas son descritas en el diagrama de cuerpo libre, se debe considerar que el signo positivo algebraico debe de coincidir con la dirección positiva elegida de la sumatoria de fuerzas y con la dirección correspondiente a la aceleración.

Movimiento Curvilíneo
El movimiento curvilíneo tiene las siguientes ecuaciones en dos dimensiones.

Coordenadas Rectangulares:

$\Sigma F_x = mA_x$
$\Sigma F_y = mA_y$

Donde:

$A_x = x''$ Y $A_y = y''$

Coordenadas Normal - Tangencial

$\Sigma F_n = mA_n$
$\Sigma F_t = mA_t$

Donde:

$A_n = V'^2 / \rho = \rho \theta'^2$ Y $A_t = V' \Rightarrow V = \rho \theta'$

$\theta' = \partial\theta$

Coordenadas Polares

$\Sigma F_r = mA_r$
$\Sigma F_\theta = mA_\theta$

Donde:

$A_r = r'' - r\theta'^2$ Y $A_\theta = r\theta'' + 2r'\theta'$

$\theta' = \partial\theta$

b) Trabajo y Energía

Usando este procedimiento para la solución de problemas Cinéticos, la integración de fuerzas con respecto al desplazamiento de la partícula y la integración de fuerzas con respecto al tiempo son aplicados, incorporando los resultados de estas ecuaciones directamente a las del movimiento; Por esta razón es innecesario resolverlas directamente para la aceleración.

I) Trabajo

El trabajo realizado por una fuerza "F" durante un desplazamiento "∂s" del punto de aplicación "0" es :

$$\partial u = F\partial s$$

La magnitud de este vector es ∂s = F ∂s (cos α), donde α es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento. Debe notarse que $F_t = F \cos\alpha$ es la dirección del desplazamiento producido por la fuerza, dado lo anterior
$F_n = F \operatorname{sen}\alpha$ es la fuerza normal que no es trabajo.

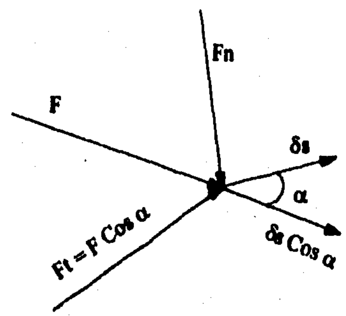


Figura 2

Las unidades de trabajo en el sistems de medición internacional son (Newtones) (Metro) = Joules, y en el sistema Ingles (Libras) (Pie).
Durante un movimiento finito "S" del punto de aplicación de la fuerza, el Trabajo se define como:

$$U = \int F\,\partial s = \int (F_x \partial x + F_y \partial y + F_z \partial z) \Rightarrow U = \int F_t \partial s$$

Esta integral representa el área bajo la curva de "F_t" contra "S"
Un ejemplo común de trabajo es realizado por la fuerza variable de un resorte de compresión ó extensión de constante "k" con masa despreciable, si F = kx entonces del trabajo "U" reflizado por el resorte en su compresión de x_1 a x_2 ó en su extensión de x_1 a x_2 es:

$$U = \int F\,\partial x = \int_{x_1}^{x_2} kx\,\partial x = 1/2\,[k\,(x_2^2 - x_1^2)]$$

La expresión F = kx es una relación estática solo cuando los elementos del resorte no tienen aceleración.
Consideremos ahora una particula de masa "m" moviéndose a lo largo de una trayectoria curva debido a la acción de una fuerza "F"; La localización de la masa "m" es determinada por el vector de posición r, este cambio transcurre durante un tiempo ∂t, entonces el trabajo es:

$$\partial U = F\,\partial r$$

Sustituyendo la segunda Ley de Newton:

$$U = \int F\,\partial r = \int mA\,\partial r$$

Donde $A\,\partial r = A_t$ que es la componente tangencial de la aceleración. En términos de la velocidad esto es
$A_t \partial s = V\,\partial v$ por lo tanto el trabajo es:

$$U = \int F\,\partial r = \int mV\,\partial v = 1/2\,[\,m\,(v_2^2 - v_1^2)]$$

II) Energía Cinética

La energía cinética de la partícula es definida como:

$$T = 1/2(m V^2)$$

El trabajo total de la partícula es dado desde el reposo, hasta que esta alcanza la velocidad V, la energía cinética es una cantidad escalar; Sus unidades en el sistema internacional de medidas son:
Newtones - Metro = Joules y en el sistema Ingles Libras - Pie. La energía cinética es siempre positiva respecto a la dirección de la velocidad; Por lo tanto el trabajo es:

$$\Delta T = [1/2(mV^2)]_2 - [1/2(mV^2)]_1 \quad \Rightarrow U = \Delta T$$

Esta es la ecuación Trabajo - Energía para la partícula.
De todas las fuerzas actuantes sobre la partícula durante un intervalo, corresponden a la energía cinética de aquella, dicho cambio puede ser positivo, negativo ó cero.

III) Potencia

La capacidad de una máquina es medida por un tiempo en el cual esta puede hacer Trabajo ó Energía liberada. La Potencia "P" desarrollada por un fuerza "F" la cual produce un trabajo "U"

$$P = \partial U / \partial t = F (\partial r / \partial t)$$

Donde $\partial r / \partial t$ es la velocidad "V" por lo que tenemos:

$$P = F V$$

La potencia es una magnitud escalar; En el sistema Internacional de medición sus unidades son
(Newton metro) / Segundo = Joules / segundo = Wattes, en el sistema Ingles sus unidades son Horse Power (HP).

1 Watt = 1 J / Seg
1 HP = 550 lb - pie / seg = 33000 lb - pie / min
1 HP = 746 Wattes

IV) Eficiencia

La Relación de una máquina entre la energía realizada y la energía que se da a esta maquina para que la realice, es llamada eficiencia mecánica ρ_m; La eficiencia siempre es menor a la unidad (1); Visto de otra forma la máquina tiene perdidas de energía no pudiendo crearla solo transformándola.

$$\rho_m = P_{salida} / P_{entrada}$$

Según sea el caso se tiene eficiencia eléctrica ρ_{e}, eficiencia térmica ρ_{te}, son involucradas en tal instancia la eficiencia ρ_{tot} podría ser:

$$\rho = \rho_{m} \rho_{e} \rho_{te}$$

V) Energía Potencial

1) <u>Energía potencial gravitacional</u>.- La energía de la partícula es definida como el trabajo mgh realizado contra el campo gravitacional elevando la partícula una distancia "h" desde algún punto de referencia arbitrario donde EP_g es tomada como cero.

$$EP = mgh$$

Si la partícula viaja de una altura h_1 a otra h_2 el cambio de energía potencia es:

$$\Delta EP_g = (h_2 - h_1)$$

Si la partícula cambia de altura de un modo tal que el campo gravitacional varíe, entonces la fuerza de gravedad

$$F_g / r^2 = mg\, R^2 / r^2$$

La posición de la partícula de r a r` y el cambio de $EP'_g - EP_g$ en la energía potencial se tiene:

$$\int_r^{r'} mgR^2 (\partial r / r^2) = mgR^2 [(1/r) - (1/r')) = EP'_g - EP_g$$

Se acostumbre tomar EP_g y $r' = \infty$ entonces:

$$EP_g = (-mgR^2) / r$$

El llenado de r_1 a r_2 el correspondiente cambio de energía cinética es:

$$\Delta EP_g = mg\, R^2 \, [(1/r_1) - (1/r_2)]$$

$R = 6'178.5$ Km

$m_o = 5.977 \times 10^{27}$ gramos

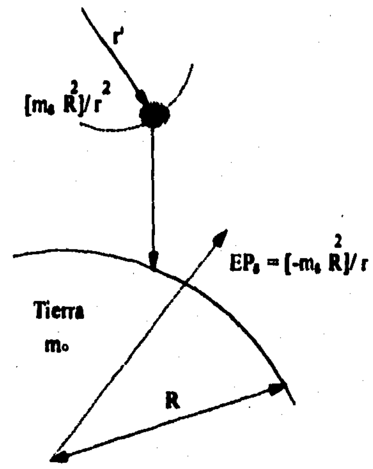


Figura 3

2) **Energía Potencial Elástica**.- Esta se da por la deformación de un cuerpo elástico, para un resorte elástico con constante k en una dimensión $F = kx$ el trabajo durante un intervalo de compresión es:

$$\int F\partial x = \int_{x_1}^{x_2} kx\,\partial x = [(1/2)\,k\,x_2^2 - (1/2)\,k\,x_1^2$$

El trabajo hecho por un resorte al deformarse una distancia "x" con respecto a su longitud sin deformarse y al regresar a este estado recobrando su energía, esta es conocida la energía potencial del resorte.

$$EP_e = (1/2)\,k\,x^2$$

Un cambio de energía del resorte es:

$$\Delta EP_e = (1/2)\,k\,(x_2^2 - x_1^2)$$

3) **Ecuación de trabajo y Energía**.- Si U es el trabajo de todas las fuerzas externas separando las fuerzas gravitacionales y las fuerzas elásticas podemos escribir:

$$U + (-\Delta V_g) + (-\Delta V_e) = \Delta T \quad ó \quad U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = \Delta E$$

Donde $\Delta E = T + EP_g + EP_e$ es la energía total de la partícula, para problemas donde solo hay fuerzas gravitacionales y no se forza trabajo el termino U se torna cero, por lo tanto:

$$\Delta E = 0 \ \text{ó} \ E = \text{constante}$$

No hay transferencia de energía en tanto que $T + EP_g + EP_m$ no sufren cambios.
4) **Fuerzas debidas al campo magnético**.- El trabajo realizado es $\partial U = F\,\partial r$ y el trabajo total a lo largo de la curva 1 a 2 es:

$$U = \int_{EP_{m2}}^{EP_{m1}} -\partial EP_m = -(EP_{m1} - EP_{m2})$$

Sin embargo $F\,\partial r$ es una diferencial exacta [1]

$$U = \int_{EP_{m2}}^{EP_{m1}} -\partial EP_m = -(EP_{m1} - EP_{m2})$$

Esta ultima ecuación depende solo de los puntos finales entonces es independiente a la trayectoria; El signo (-) antes de ∂EP_m es arbitrario pero es escogido de acuerdo a la designación acostumbrada del signo de energía potencial, en el cambio de energía del campo gravitatorio si en EP_m hay un cambio diferencial entonces:

$$\partial EP_m = \frac{\partial EP_m}{\partial x}\partial x + \frac{\partial EP_m}{\partial y}\partial y + \frac{\partial EP_m}{\partial z}\partial z$$

$$F_x = -\frac{\partial EP_m}{\partial x}$$

$$F_x = -\frac{\partial EP_m}{\partial y}$$

$$F_x = -\frac{\partial EP_m}{\partial z}$$

La fuerza puede escribirse como un vector:

$$F = \nabla EP_m$$

Donde el simbolo ∇ es le operador "del" el cual es:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

La cantidad EP_m es conocida como la función potencia y la expresión $\nabla\ EP_m$ es conocida como el gradiente de función potencial.

---

[1] Diferencial exacta para las coordenadas x - y - z

$$\partial\phi = P\,\partial x + Q\,\partial y + R\,\partial z$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

c) Impulso y Momento

Concentraremos nuestra atención en la integración de la ecuación del movimiento con respecto al tiempo, encontraremos estas ecuaciones con gran facilidad en la solución de problemas donde las fuerzas aplicadas actúan en intervalos de tiempo específicos.

I) **Impulso lineal y momento lineal**.- Considérese una partícula de masa "m" localizada por el vector de posición "r" medido del origen, la velocidad de la partícula es V = r y es tangente a la trayectoria, la resultante ΣF de todas las fuerzas en "m" con dirección de su aceleración V', la ecuación básica del movimiento es:

$$\Sigma F = mV' = \frac{\partial (mV)}{\partial t} \text{ ó } \Sigma F = G'$$

Donde el producto de la masa por la velocidad es definido como el momento lineal G = mV de la partícula.
La resultante de todas las fuerzas actuantes en una partícula es igual al cambio del momento lineal con respecto al tiempo.
En el sistema internacional de medidas sus unidades son Newtones - segundo, en el sistema Ingles Lb - segundo, los tres componentes del momento lineal son:

$$\Sigma F_x = G_x' \quad \Sigma F_y = G_y' \quad \Sigma F_z = G_z'$$

Estas ecuaciones se aplican independientemente una de otra; Integrando la ecuación $\Sigma F = G'$ y multiplicando por ∂t, tenemos:

$$\int_{t1}^{t2} \Sigma F \, \partial t = G_2 - G_1$$

Este momento lineal es en un tiempo, por ejemplo en el tiempo t_2, $G_2 = mv_2$ el producto de la fuerza y el tiempo es definido como el impulso lineal de la fuerza. El impulso lineal total en m es igual al correspondiente cambio de momento lineal en m.

$$\int_{t1}^{t2} \Sigma F_x \, \partial t = (mV_x)_2 - (mV_x)_1$$

$$\int_{t1}^{t2} \Sigma F_y \, \partial t = (mV_y)_2 - (mV_y)_1$$

$$\int_{t1}^{t2} \Sigma F_z \, \partial t = (mV_z)_2 - (mV_z)_1$$

Estas tres ecuaciones escalares de impulso - momento son totalmente independientes.
Algunas ocasiones la fuerza que actúa sobre la partícula varia con respecto al tiempo, en este caso una solución puede darse mediante, medidas experimentales acompañadas de integraciones numéricas y gráficas.

$\int_{t1}^{t2} F\partial t$ se toma como el área bajo la curva.

2) Impulso angular y momento angular.- El momento lineal del vector "mV" tomado del origen es conocido como el momento angular "H_o". El momento angular es entonces perpendicular al plano delineado por "r" y "V", en efecto "H_o" queda claramente definido por el producto cruz de "r X mV", los componentes escalares se obtienen así mediante:

$$H_o = r \times mV = i\, m(V_z Y - V_y Z) + j\, m(V_x Z - V_z X) + k\, m(V_y X - V_x Y)$$

ó

$$H_o = m \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & Y & Z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} H_x = m(V_z Y - V_y Z) \\ H_y = m(V_x Z - V_z X) \\ H_z = m(V_y X - V_x Y) \end{array}$$

El momento angular tiene las siguientes unidades en el Sistema Internacional Newton Metro Segundo, y en el sistema Ingles Pies Libras Segundo.
Si representamos la resultante de todas las fuerzas actuantes sobre la Partícula "p" el momento "M_o" tomado del origen resultaría el producto cruz:

$$\Sigma M_o = r \times \Sigma F = r \times m\dot{V}$$

Ahora usando la regla del producto cruz tenemos en diferenciación:

$$\dot{H}_o = \dot{r} \times mV + r \times m\dot{V} = V \times mV + r \times m\dot{V}$$

El termino "V X mV es cero indicando que los vectores son paralelos sustituyendo en la expresión "ΣM_o" tenemos:

$$\Sigma M_o = \dot{H}_o$$

Esta última ecuación indica el momento localizado a partir del origen de todas las fuerzas actuantes en "m" igual al tiempo del cambio del momento angular de "m" con respecto al origen es una ecuación vectorial con componentes escalares.

$$\Sigma M_{ox} = \dot{H}_{ox} \qquad \Sigma M_{oy} = \dot{H}_{oy} \qquad \Sigma M_{oz} = \dot{H}_{oz}$$

Dándonos la relación instantánea entre el momento y el tiempo de cambio del momento angular; Para obtener el momento "ΣM_o" en el momento angular de la particula en un periodo finito de tiempo; Integrando la ecuación y multiplicando por "∂t $\Sigma M_o \Rightarrow \partial t = \partial H_o$" obtenemos:

$$\int_{t1}^{t2} \Sigma M_o \, \partial t = H_{o2} - H_{o1}$$

Donde "$H_{o2} = r_2 \times mV_2$ y $H_{o1} = r_1 \times mV_1$"

El producto del momento y el tiempo es definido como el impulso angular, por lo que la ecuación es el impulso angular total en "m" con respecto al origen siendo igual al correspondiente cambio en el momento angular de "m" con respecto al origen. Sus unidades son en el Sistema Internacional Newtones - Metro - Segundo ó Kg. - Metro - Segundo cuadrado mientras que en el sistema ingles son Libras - Pie - segundo.
El momento angular es un vector que cambia la dirección tanto como de magnitud esto ocurre durante el intervalo de la integración. Por ejemplo en la componente "x" obtendríamos:

$$\int_{t1}^{t2} \sum M_{ox}\, \partial t = (H_{ox})_2 - (H_{ox})_2 - (H_{ox})_1 = m\,[\,(V_z y - V_y z)_2 - (V_z y - V_y z)_1\,]$$

Que son similares para (y , z)
Es decir para una partícula de masa "m" moviéndose a través de la curva en el plano x - y (como lo muestra la figura) en el momento angular con respecto a "0" en los puntos 1 y 2 tienen magnitudes

$H_{o1} = |r_1 \ X\, mV_1|$ y $H_{o2} = |r_2 \ X\, mV_2|$ además $H_{o1} = mV_1 d_1$ y $H_{o2} = mV_2 d_2$

La forma escalar aplicada a la ecuación para el movimiento entre los puntos 1 y 2 durante el intervalo "t_1" hacia "t_2" se torna:

$$\int_{t1}^{t2} \sum M_o\, \partial t = H_{o2} - H_{o1} \text{ ó } \int_{t1}^{t2} \sum F_r \operatorname{sen}\theta\, \partial t = mV_2 d_2 - mV_1 d_1$$

Esta ilustración ayuda a comprender la relación entre la forma escalar y vectorial del impulso - momento angulares:

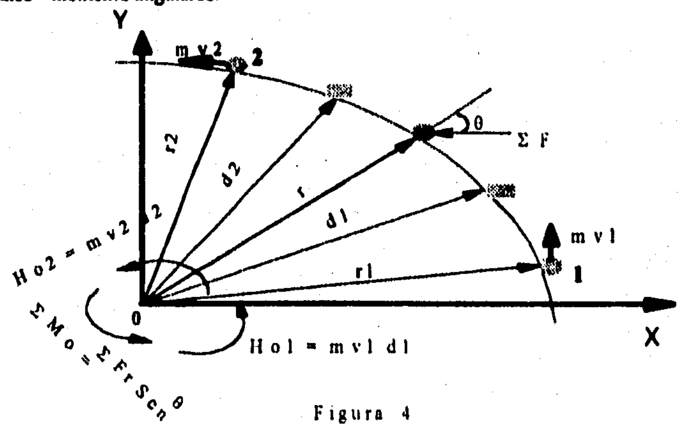


Figura 4

El efecto del medio donde se mueve la partícula en muchas ocasiones es despreciado, el efecto de la resistencia del aire en la balística militar por ejemplo donde hay una fuerza retardada que actúa sobre la partícula. En general las fuerzas reales retardadas lo son en aproximación y cuando la velocidad no es muy grande (se usa a menudo un factor f_r, α, etcétera, entonces en la ecuación del movimiento se puede integrar directamente) con este tipo de aproximación podemos escribir:

$$F = mg - mkv^n \frac{V}{v}$$

Donde "k" es una constante positiva que especifica el retardo de la fuerza y "V / v" es el vector unitario en dirección de "v". Experimentalmente esto tiene relativamente poco objeto cuando la partícula viaja en el aire
"n ≈ 1 para velocidades menores de 2400 cm. /seg (≈80 pies / seg) para velocidades mayores que esta pero menores que la velocidad del sonido (≈33000 cm. / seg ó 1100 pies / seg) la fuerza retardada es aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad (el movimiento de la partícula en un medio en el cual hay una fuerza resistiva proporcional a la velocidad o al cuadrado de la misma [lineal ó combinación de ambas] fue examinado por Newton en sus Principia 1687), La fuerza retardada varia aproximadamente lineal a la velocidad. Se tienen muchos ejemplo de movimiento de la partícula sujetos a fuerzas variantes como los que se muestran a continuación:

Movimiento horizontal de una partícula en un medio resistivo:

Se considera que la fuerza retardada es proporcional a la velocidad, tal situación se podría aplicar por ejemplo a una partícula deslizándose sujeta a fricción, tenemos:

$$mA = m\frac{dv}{dt} = -kmv$$

Donde "kmv" es la magnitud de la fuerza retardada (k = cte) entonces integrando

$\int \frac{dv}{v} = -k\int dt$ y evaluando las constantes se tiene: $v = v_0 - kx$

Se concluye que la velocidad decrece con el desplazamiento.

Movimiento vertical de una partícula en un medio resistivo

Las consideraciones son las mismas que para el caso anterior salvo que la partícula es proyectada hacia abajo con una velocidad inicial "v_0", con una altura "h" y con la constante gravitacional tenemos:

$$F = m\frac{dv}{dt} = -mg - kmv$$

Donde "- kmv" representa la fuerza de subida tomado desde "z " y "v = z" es positiva subiendo, bajando "v < 0" tanto como "-kmv > 0" Integrando tenemos para "$v(t = 0) \equiv v_0$"

$$v = \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{g}{k} + \frac{k v_0 + g}{k} e^{-kt}$$

para " $z(t = 0) \equiv h$" tenemos:

$$z = h - (g t / k) + ([k v_0 + g] / k^2)(1 - e^{-kt})$$

Cuando " v = - g / k" es debido a que la velocidad inicial excede a la velocidad final en magnitud, entonces la partícula inmediatamente empieza a caer y "v" aprovecha la velocidad final de dirección opuesta.

Capitulo III

Mecánica Lagrangeana

Energía de un Sistema

La *Energía Cinética* de un Sistema es la magnitud escalar "T", igual a la suma aritmética de las energías cinéticas de todos los puntos del sistema:

$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Esta es una Magnitud Escalar, por esto no depende de las direcciones del movimiento de las partes del sistema y no caracteriza las variaciones en estas direcciones.
Las fuerzas internas actúan en diferentes partes del sistema en direcciones opuestas, es evidente que si el sistema se compone de unos cuantos cuerpos, la energía cinética total del sistema es igual a la suma de las energías cinéticas de cada uno de estos cuerpos:

$$T = \sum T_u$$

A continuación se establecerán las ***energías potenciales*** para casos específicos de diferentes movimientos:

Movimiento de Traslación: En este caso todos los puntos se desplazan a la velocidad del centro de masas en un mismo cuerpo, para todo punto $V_k = V_c$ y de la fórmula 1 Obtenemos:

$$T_{tr} = \sum \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{1}{2}(\sum m_k) V_c^2 \quad \text{ó} \quad T_{tr} = \frac{1}{2} M V_c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$

Donde $(\sum m_k) = M$ y V_c es la Velocidad del centro de masas.
El valor de la energía no depende de la dirección del movimiento.

Movimiento de Rotación: Si un cuerpo gira alrededor de un eje, la velocidad de un punto cualquiera de este cuerpo es $V_k = w\, h_k$ donde h_k es la distancia entre el punto y el eje de rotación, w es la velocidad angular del cuerpo, sustituyendo este valor en la fórmula (1) y factorizando tenemos:

$$T_{rot} = \sum \frac{m_k w^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2}(\sum m_k) w^2 h^2 = \frac{1}{2}(\sum m_k h_k^2) w^2$$

La magnitud de este paréntesis expresa el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje (z por ejemplo), encontrando en definitiva:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} J_z w^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

Donde J_z es el momento de Inercia

El Valor "T" no depende del sentido de Rotación.
Movimiento Plano Paralelo: En este movimiento las velocidades de todos los puntos del cuerpo en cada instante están distribuidas de tal modo que parece que el cuerpo gira alrededor de un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el centro instantáneo de velocidades "P" (ver fig. 1), por lo tanto en base a la fórmula (3):

$$T_{plano} = \frac{1}{2} J_p w^2 \quad ....3'$$

Donde Jp de la fórmula anterior es un cantidad variable, debido a que la posición del centro "P" durante el movimiento del cuerpo, Cambia constantemente.
Introduciendo el momento de inercia constante Jc respecto del eje que pasa por el centro de masas "C" del cuerpo, con ayuda del teorema de Huygens

$J_p = J_c + M d^2$ Donde $d = PC$; Sustituyendo en la ecuación (3 ') tenemos:

$$T_{plano} = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_c w^2 \quad ....4$$

"Vc" es la velocidad del centro de masas " $w d = w PC = V_c$ "

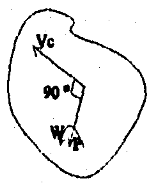


Figura 1

Por consiguiente, durante un movimiento Plano Paralelo la energía cinética de un cuerpo es igual a la suma de la energía del movimiento de Traslación con la velocidad del centro de masas y la de la energía cinética del movimiento de rotación alrededor del centro de masas.

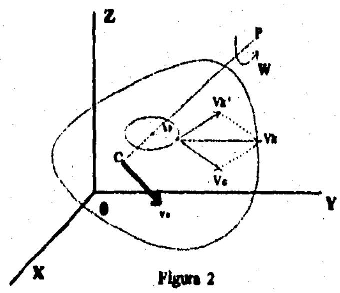


Figura 2

Caso General del Movimiento: Si se tomase como polo el centro de masas del cuerpo (fig. 2) el movimiento del cuerpo en el caso general, se compondrá de un movimiento de traslación con la velocidad del polo "Vc" y de una de rotación alrededor del eje instantáneo "CP" que pasa por este polo, entonces la velocidad "Vk" de todo punto del cuerpo será igual a la suma geométrica de la velocidad del polo "Vc"y de la velocidad "Vk" que en el punto adquiere durante su rotación con el cuerpo alrededor del eje "CP".

$$V_k = V_c + V_k'$$

En este caso el modulo de "Vk = w hk" donde hk es la distancia entre el punto y el eje "CP", "w" es la velocidad angular absoluta de rotación del cuerpo alrededor de este eje de donde:

$$V_k^2 = (V_c + V_k')^2 = V_c^2 + V_k'^2 + 2\, V_c\, V_k'$$

Poniendo este valor en la fórmula (1) y teniendo en cuenta que Vk' = w hk se tiene:

$$T = \frac{1}{2}(\sum m_k)\, V_c^2 + \frac{1}{2}(\sum m_k\, h_k^2)\, w^2 + V_c \sum m_k\, V_k'$$

De la última fórmula los factores se resolvieron de los paréntesis, de dicha igualdad, el primer paréntesis expresa la masa "m" del cuerpo y el segundo es el momento de inercia del cuerpo "J_{cp}" respecto al eje instantáneo "CP".
Es la magnitud "∑mk Vk' = 0" representsnte de la cantidad de movimiento adquirido por el cuerpo durante su rotación alrededor del eje "CP" que pasa por el centro de masas de dicho cuerpo. Por conclusión obtenemos:

$$T = \frac{1}{2} m\, V_c^2 + \frac{1}{2} J_{cp}\, w^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 5$$

La energía cinética de un cuerpo en el caso general del movimiento (particularmente el movimiento Plano Paralelo) es igual a la suma de la energía cinética del movimiento de traslación con la velocidad del centro de masas y de la energía cinética del movimiento de rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masas.
Cabe mencionar que la deducción de estas formas para obtener la energía cinética se debe tomar como polo el centro de masas, de lo contrario si se elige otro punto cualquiera "Q" y el eje "QQ' "no pasa por el centro de masas entonces para este eje "∑mk V ' = 0" no obteniendo una fórmula como la enumerada como (5).

Teorema de la Variación de la Energía Cinética de un Sistema

Si se examina un punto cualquier del sistema de masa "m_k" con una velocidad "V_k", considerando "∂A_k^e" y "∂A_k^i" para este punto se tiene:

$$\partial\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \partial A_k^e + \partial A_k^i$$

Los términos de la derecha de la igualdad son los trabajo elementales de las fuerzas externas e internas respectivamente. Componiendo tales ecuaciones para cada uno de los puntos del sistema y sumándolos miembro a miembro tenemos:

$$\partial\left(\sum \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum \partial A_k^e + \sum \partial A_k^i$$

ó

$$\partial T = \sum \partial A_k^e + \sum \partial A_k^i \text{ ....}6$$

La igualdad anterior expresa el teorema de la variación de la energía cinética del sistema en forma diferencial.
Integrando los límites correspondientes al desplazamiento del sistema se obtiene la fórmula (7) donde la energía cinética es igual a "T_o", hasta " T_1"desde una posición inicial.

$$T_1 - T_o = \sum \partial A_k^e + \sum \partial A_k^i \text{ ....}7$$

Esta ecuación expresa el teorema de variación de la energía cinética en forma final; La variación de la energía cinética de un sistema durante su desplazamiento es igual a la suma de todos los trabajos de todas las fuerzas externas e internas aplicadas al sistema es este desplazamiento.
A diferencia de los teoremas anteriores las fuerzas internas no se excluyen en las ecuaciones (6) y (7).Si:
"F_{12}^i" y "F_{21}^i"
son las fuerzas de acción mutua entre los puntos "B_1" y "B_2" del sistema de la figura 3

$$F_{12}^i + F_{21}^i = 0$$

Pero al mismo tiempo, "B_1" puede desplazarse en dirección de "B_2", y el punto "B_2", hacia el "B_1".
En este caso, el trabajo de cada fuerza será positivo y la suma de los trabajos no será nula. (como efecto del retroceso) las fuerzas internas, como fuerzas de presión que actúan sobre un proyectil y sobre las piezas en retroceso efectúan un trabajo positivo. La suma de dichos trabajos que no es nula es ciertamente la varia la energía cinética del sistema desde la magnitud "$T_o = 0$" en el momento inicial del disparo, hasta la magnitud
$T_1 = T_{pro} + T_{re}$ al final del mismo.

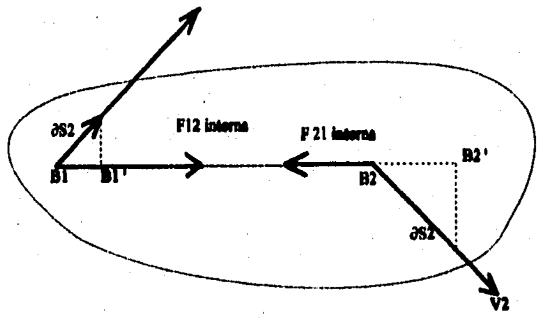


Figura 3

Sistema Invariable

Llamamos sistema invariable a un sistema en el cual las distancias entre los puntos de aplicación de las fuerzas internas no varían durante el movimiento del sistema. Un cuerpo rigido ó un hilo inextencible son un sistema de este tipo.
Supongamos que dos sistemas de este tipo "B_1" y "B_2" de un sistema invariable (Fig. 3) que actúan uno sobre el otro con las fuerzas

$\overset{i}{F}_{12}$ y $\overset{i}{F}_{21}$ i = Interno ....a

tienen en un momento dado las velocidades "V_1" y "V_2". Entonces durante el intervalo "∂t" estos puntos efectúan los desplazamientos elementales $\partial S_1 = V_1 \partial t$ dirigidos a lo largo de los vectores "V_1" y "V_2". Pero como el segmento "B_1B_2" es invariable, las proyecciones de los vectores "V_1" y "V_2" de los desplazamientos "∂S_1" y "∂S_2" sobre la dirección de dicho segmento serán iguales entre si o sea "B_1B_2" = "B_1B_2 ' " entonces los trabajos elementales de las fuerzas referidas (a) serán iguales en modulo pero de signos contrarios, siendo su suma nula.
Este resultado es valido para todas las fuerzas internas durante cualquier desplazamiento del sistema.
Concluyéndose que para cualquier sistema invariable la suma de los trabajos de todas las fuerzas internas es igual a cero y las ecuaciones (6) y (7) tendrán la forma:

$\partial T = \sum \partial A_k^e$ ó $T_1 - T_0 = \sum \partial A_k^e$ 8

Sistema con Ligaduras Ideales

Este sistema tiene ligaduras independientes del tiempo, dividiendo todas las fuerzas internas y externas aplicadas en los puntos de forma activa y reacciones de las ligaduras, en este caso la ecuación (6) puede ser:

$$\partial T = \sum \partial A_k^{a} + \sum \partial A_k^{r}$$

donde "∂A_k^{a}" es el trabajo elemental de las fuerzas activas externas e internas aplicadas al k-ésimo punto del sistema y el segundo sumando es el trabajo elemental de las reacciones de las ligaduras exteriores e interiores impuestas al mismo punto.

La variación del sistema en lo referente a la energía cinética el sistema depende del trabajo de las fuerzas activas y de las reacciones de las ligaduras. Se puede introducir no obstante el concepto de sistema mecánicos"ideales" donde la existencia de ligaduras no depende en la variación de la energía cinética del sistema durante su movimiento.
Para dichas ligaduras debe de cumplirse la condición:

$$\sum \partial A_k^{r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 9$$

Si las ligaduras que no varían con el tiempo de los trabajos de todas las reacciones, durante un desplazamiento elemental del sistema, es igual a cero, tales ligaduras se llaman ideales.
Para sistemas mecánicos, que se han impuesto ligaduras ideales, tenemos:

$$\partial T = \sum \partial A_k^{a} \quad ó \quad T_1 - T_0 = \sum \partial A_k^{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 10$$

La variación de la energía cinética de ligaduras ideales invariables en el tiempo, durante cualquier desplazamiento, es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas activas externas e internas aplicadas al sistema, en dicho desplazamiento.
El interés práctico del teorema de la variación de la energía cinética consiste en que teniendo ligaduras ideales independientes del tiempo, permite excluir de las ecuaciones de movimiento todas las ligaduras conocidas de antemano.

Resolución de Problemas
En el caso de un sistema variable, el teorema da una solución al problema solamente cuando las fuerzas internas son conocidas de antemano. Si por el contrario, dichas fuerzas son desconocidas es imposible obtener la solución con ayuda del teorema de la energía.
La ecuación (7) permite resolver los problemas en los cuales entre las magnitudes dadas e incógnitas están:

1) Las fuerzas efectivas
2) El desplazamiento del sistema
3) Las velocidades del cuerpos [lineales ó angulares] en el inicio y final del desplazamiento, en este caso las fuerzas efectivas deben ser constantes ó dependientes solamente de los desplazamientos.

Cabe mencionar que "todo cuerpo ligado puede considerarse como libre si suprimimos las ligaduras y sustituimos sus acciones por las reacciones de estas ligaduras" [1]
Por ejemplo una barra "AB" de peso "P" [Fig. a] que tiene por ligaduras el plano "OE", el apoyo "D" y la cuerda "KO" puede considerarse como un cuerpo libre [fig. b] que se encuentra en equilibrio bajo la acción de la fuerza conocida "P" y las reacciones de las ligaduras "Na", Nd", "G"

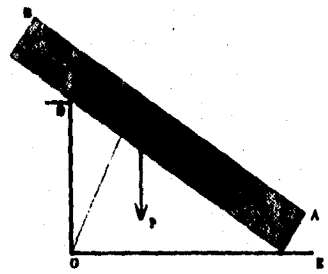


Figura a

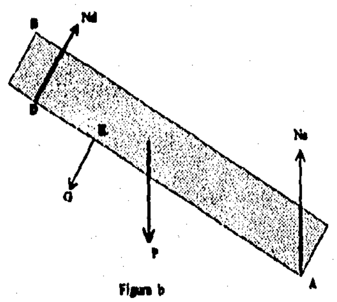


Figura b

"Si las ligaduras que no varían con el tiempo la suma de los trabajos de todas las reacciones, durante un desplazamiento elemental del sistema, es igual a cero, tales ligaduras se consideran ideales. En las ligaduras la fricción se considera despreciable".[1]

[1]Curso breve de Mecánica Teorica. Starg traducido por F. Petrov editorial MIR Moscú 1976

Los conceptos anteriormente estudiados son base para comprender la teoría de *Lagrange* en donde la energía cinética, la potencial y otros conceptos son primordiales, pero hay que aclarar que se debe de poner principal atención en los siguientes temas "generalizados y virtuales"

Principio de D'Alembert

Supongamos que hay un sistema compuesto de "n" puntos materiales, elijamos un punto cualquiera del sistema de masa "mk", bajo la acción de las fuerzas externas e internas

"F_k^e" y "F_k^i" ....b

Aplicadas al punto (entre las cuales ya se consideran las fuerzas activas y las reacciones de las ligaduras) éste recibe cierta aceleración "wk" respecto del sistema de referencia inmóvil, teniendo la magnitud:

$F_k^{in} = - m_k w_k$..............................11

Esta tiene dimensiones de fuerza, la magnitud vectorial cuyo modulo es igual al producto de la masa del punto por su aceleración se llama fuerza de inercia del punto.
Resulta que el movimiento del punto posee la siguiente propiedad general;
Si en cada momento de tiempo a las fuerzas (b) que actúan efectivamente sobre el punto, se les añade la fuerza de inercia (Fk de inercia) el sistema obtenido esta equilibrado, es decir:

$F_k^e + F_k^i + F_k^{in} = 0$ ... .12

Expresando el principio de D'Alembert para un punto material, se ve que es equivalente a la segunda ley de Newton, para el punto que se estudia resulta:

$m_k w_k = F_k^e + F_k^i$

Repitiendo los razonamientos realizados anteriormente se definirá el principio de D'Alembert para un sistema:
"Si en todo momento de tiempo a cada punto del sistema, además de las fuerzas externas e internas que actúan efectivamente sobre este, se le aplican las fuerzas de inercia de D'Alembert correspondientes, el sistema de fuerzas obtenido se encontrará en equilibrio y se podrán *aplicar todas las ecuaciones de la estática*".
Este principio se expresa matemáticamente por medio de un sistema de "n" ecuaciones vectoriales del tipo de la fórmula (12) que son equivalentes a las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema del principio de D'Alembert se pueden obtener todos los teoremas generales de la dinámica con ayuda de ecuaciones de movimiento.

La aplicación directa de este principio a los problemas de dinámica, sus ecuaciones de movimiento adquieren la forma de ecuaciones de equilibrio, esto facilita la resolución de problemas y simplifica los cálculos correspondientes.
Al utilizar dicho principio es necesario tener en cuenta que como la ley fundamental de la

dinámica, se refiere al movimiento respecto de un sistema de referencia inmóvil.
Las fuerzas de inercia mencionadas por D'Alembert no actúan sobre los puntos en movimiento, de lo contrario según la ecuación (12) estos puntos se encontrarán en reposo ó se moverán sin aceleración alguna y, en este caso, de acuerdo con la igualdad (11) no habría fuerzas de inercia.
La introducción de las fuerzas de inercia es un procedimiento que permite componer las ecuaciones de la dinámica con ayuda de los métodos más sencillos de la estática.
La adición de las fuerzas de inercia a las fuerzas de acción mutua del punto en movimiento con otros cuerpos permite conservar para las ecuaciones de movimiento con respecto al marco de referencia no inercial la misma expresión que para el inercial. Estas fuerzas se llaman inercia de traslación y de Coriolis.

Se sabe de la estática que la suma geométrica de fuerzas que se encuentran en equilibrio y la suma de sus momentos es igual a cero, esto es valido para las fuerzas actuantes no sólo en un cuerpo sólido sino también en un sistema variable cualquiera. Según el principio de D'Alembert tenemos:

$$\sum(F_k^{e} + F_k^{i} + F_k^{in}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad 13'$$

$$\sum[m_o(F_k^{e}) + m_o(F_k^{i}) + m_o(F_k^{in})] = 0 \quad \ldots\ldots \quad 13$$

Introduciendo la notación

$$R^{in} = \sum F_k^{in}, \quad M_o^{in} = \sum m_o(F_k^{in}) \quad \ldots\ldots \quad 14$$

Las magnitudes "R_o^{in}" y "M_o^{in}" son respectivamente el vector principal y de las fuerzas de inercia y el momento principal respecto del centro del sistema, tomando en cuenta que la suma geométrica de las fuerzas internas y la de los momentos son iguales a cero de la igualdad (13):

$$\sum F_k^{e} + R^{in} = 0, \quad \sum m_o(F_k^{e}) + M_o^{in} = 0 \quad \ldots\ldots \quad 15$$

Estas ecuaciones no contienen a las fuerzas internas, las expresiones (15) son equivalentes a las ecuaciones que expresan los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento principal de la cantidad de movimiento del sistema.
Para las proyecciones sobre los ejes coordenados las ecuaciones (15) son análogas a las correspondientes de estática.
La utilización de estas ecuaciones se requiere conocer la expresión del vector principal y del momento de las fuerzas de inercia.

Vector Principal y Momento Principal de Inercia

De las igualdades (14) se puede reemplazar el sistema de fuerzas por una sola fuerza igual a "R^{in}", aplicada al centro " 0", y por un par de momento igual a "Mo Inercial".
El vector principal del sistema de fuerzas no depende de la elección de reducción del sistema siendo este:

$$R^{in} = -\sum m_k w_k = -M w_c \quad \ldots\ldots \quad 16$$

El vector principal de las fuerzas de inercia de un cuerpo que efectúa un movimiento cualquiera es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración de su centro de masa y esta dirigido en el opuesto a dicha aceleración. Si se descompone la aceleración en sus componentes tangencial y normal el vector mencionado será entonces:

$$R_t^{in} = -M w_{(t)}, \quad R_n^{in} = -M w_{(n)} \quad \text{.........................} 16'$$

El momento principal para algunos casos particulares es para:

Movimiento de Traslación

En este caso, el cuerpo no efectúa rotación alrededor de un centro de masas "C". Se concluye que

$\sum m_c(F_k^e) = 0$ y la igualdad (15) da:

$$M_c^{in} = 0$$

Por lo tanto durante un movimiento de Traslación las fuerzas de inercia de un cuerpo sólido se reducen a un resultante igual a "R inercial" que pasa por el centro de masas del cuerpo.

Movimiento Plano Paralelo

Suponiendo que el cuerpo tiene Plano de simetría y se desplaza paralelamente a este. En virtud de la simetría, el vector principal y el par resultante de las fuerzas de inercia, así como el centro de masas "C" del cuerpo se encuentran en el plano de simetría. Eligiendo el centro de reducción en el punto "C" tenemos de la igualdad (15):

$M_c^{in} = -\sum m_c(F_k^e)$, por otro lado $\sum m_c(F_k^e) = J_c E$, concluyéndose que:

$$M_c^{in} = -J_c E \quad \text{...} 17$$

En este movimiento, el sistema de fuerzas de inercia se reduce a una fuerza resultante igual a R^{in} (ecuación 16), siendo aplicada al centro de masa "C" del cuerpo (fig. 4) y a un par que se encuentra en el plano de simetría, cuyo momento esta definido por la fórmula (17), el signo negativo muestra que el momento expresado en dicha fórmula esta dirigido en sentido opuesto a la aceleración angular de dicho cuerpo.

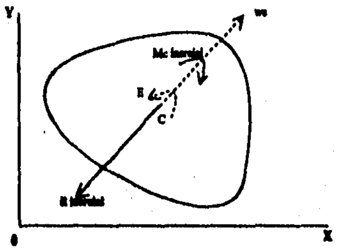


Figura 4

Rotación Alrededor de un Eje que pasa por el Centro de Masas de Cuerpo

Supongamos nuevamente que el cuerpo tiene un eje de rotación "C z" y un plano de simetría perpendicular al eje, este último pasa por el centro de masas del cuerpo.

Siendo este un caso particular del anterior sólo que "$w_c = 0$" y por consiguiente "$R^{in} = 0$"

En el caso que se examina el sistema de las fuerzas de inercia se reduce a un par que se encuentra en el plano de simetría del cuerpo de momento:

$$M^{in}_z = J_z E \quad \ldots\ldots 17'$$

Durante la resolución de problemas con ayuda de las fórmulas (16) y (17), se calculan los módulos de las magnitudes correspondientes y sus direcciones se indican en la figura 4.
Para la resolución de problemas el principio de D'Alembert da un procedimiento único para componer las ecuaciones de un sistema no libre (con este fin el principio de D'Alembert sirve eficazmente combinándolo con el principio de desplazamientos virtuales), en este caso todas las fuerzas interiores desconocidas de antemano se excluyen del análisis.
Si se necesita conocer las reacciones de las ligaduras interiores, se debe descomponer el sistema en partes, respecto de las cuales las fuerzas incógnitas serán externas.
Este principio puede servir para componer las ecuaciones diferenciales del movimiento y, determinar las aceleraciones de los cuerpos en movimiento.

Principio de los Desplazamientos Virtuales y Ecuación General de la Dinámica

Desplazamientos virtuales del sistema, Número de grados de Libertad

En esta sección se considerará un nuevo concepto de la mecánica, el Principio de los desplazamientos Virtuales; El cual establece en términos generales las condiciones de equilibrio de cualquier sistema mecánico.
El efecto de acción de las ligaduras no se calcula por medio de la introducción de las reacciones desconocidas de antemano, sino considerando los desplazamientos que pueden ser comunicados a los puntos del sistema, si este se saca de la posición ocupada. En la mecánica tales desplazamientos se llaman virtuales.

Los desplazamientos virtuales de los puntos de un sistema deben satisfacer dos condiciones:
a) Estos deben ser infinitamente pequeños, porque si los desplazamientos son finitos, el sistema pasará a otra posición, en la cual las condiciones de equilibrio pueden ser diferentes;

b) Estos deben ser tales que se conserven todas las ligaduras impuestas al sistema, porque de lo contrario modificaremos al sistema mecánico que se examina (es decir el sistema resultaría de otro tipo).

De esta forma se llama *Desplazamiento Virtual* de un sistema a cualquier conjunto de desplazamientos infinitamente pequeños de los puntos del sistema que son compatibles, en el momento dado, con todas las ligaduras impuestas a este sistema. Dicho desplazamiento virtual de un punto cualquiera del sistema será representado por un valor elemental "∂s" dirigido en el sentido del desplazamiento.

Para los puntos y cuerpos de un sistema puede existir una infinidad de desplazamientos virtuales diferentes (los desplazamientos "∂s" y " $-\partial s$" no se consideran diferentes) sin embargo para cada sistema el tipo de ligaduras impuestas a este determina un número definido de los desplazamientos virtuales independientes y cualquier otro desplazamiento virtual podrá obtenerse como la suma geométrica de ellos.
Por ejemplo una bola puesta en cualquier plano en una infinidad de direcciones. Pero cualquier desplazamiento virtual de bola "∂s" puede ser obtenido como la suma de dos desplazamientos "$\partial s1$" y "$\partial s2$" a lo largo del eje, mutuamente perpendicular que se encuentra en ese plano.

El número de desplazamientos virtuales independientes entre si para un sistema se llama el *Número de Grados de Libertad* de ese sistema.
La bola antes mencionada como ejemplo, situada sobre un plano, si la consideramos como un punto material, tiene dos grados de libertad. El mecanismo de biela - manivela tiene un grado de libertad, un punto material libre tiene <u>seis grados de libertad</u>, (tres de traslación a lo largo de los ejes coordenados y tres de desplazamientos rotativos alrededor de los ejes).

Principio de los Desplazamientos Virtuales
Introduciendo el concepto de trabajo virtual, como el trabajo elemental que puede realizar una fuerza aplicada a un punto material durante un desplazamiento virtual de dicho punto.
Definiremos al trabajo virtual de la fuerza activa de la siguiente manera:

"F^a" por el símbolo "$\partial' A^a$" (recordando la definición de trabajo "$\partial' A^a$" $= F^a\ \partial s \cos\alpha$ es el ángulo de la fuerza y el desplazamiento). ∂' = derivada parcial de la función

Y el trabajo virtual de la reacción de la ligadura "N" por el símbolo "$\partial' A^r$". Las ligaduras impuestas a un sistema son ideales si la suma de los trabajos elementales de las reacciones de estas ligaduras durante cualquier desplazamiento virtual del sistema es igual a cero.

$\sum \partial' A^r_k = 0$ **18**

Considerando un sistema de puntos materiales que esta en equilibrio bajo la acción de todas las fuerzas aplicadas y de las ligaduras del sistema son ideales.
Eligiendo un punto arbitrario "B_k" del sistema y designando a la resultante de todas las fuerzas activas aplicadas a dicho punto (tanto internas como externas) por "N_k"; Como el punto "B_k" al igual que todo el sistema esta en equilibrio.

"$F^a_k + N_k = 0$", para cualquier desplazamiento virtual del punto "B_k", los trabajos virtuales
"$\partial' A^a_k$" y "$\partial' A^a_k$", F^a_k
y "N_k" aplicadas a este tendrán módulos iguales y signos contrarios, y su suma es igual a cero.
$\partial' A^a_k + \partial' A^r_k = 0$

De las misma manera para todos los puntos del sistema, sumando igualdades miembro a miembro:
$\sum \partial' A^a_k + \sum \partial' A^r_k = 0$ ....**18'**.

Considerando las ligaduras impuestas al sistema como ideales, la segunda suma según la condición (18') será igual a cero, por lo tanto:
$\sum \partial' A^a_k = 0$ **19**

ó por definición:
$\sum (F^a_k \sum \partial' s_k \cos\alpha) = 0$ ....**19'**

De esta manera queda demostrado que un sistema mecánico con ligaduras ideales está en equilibrio, las fuerzas que actúan sobre éste satisfacen la condición (19), deduciendo el principio de los desplazamientos virtuales[2], se definirá para un sistema mecánico con ligaduras ideales este en equilibrio es necesario y suficiente que la suma de los trabajos elementales realizados por las fuerzas activas que actúan sobre dicho sistema sea igual a cero para cualquier desplazamiento virtual del sistema, expresado matemáticamente por la ecuación (19) que se conoce como la fórmula de los trabajos virtuales, expresándola en forma analítica:

$$\sum\left(\overset{a}{F}_{kx}\,\partial' X_k + \overset{a}{F}_{ky}\,\partial' Y_k + \overset{a}{F}_{kz}\,\partial' Z_k\right) = 0 \quad \text{......................} 20$$

De la ecuación anterior $\partial' X_k$, $\partial' Y_k$, $\partial' Z_k$ son las proyecciones del desplazamiento virtual "$\partial' S_k$" del punto "B_k" sobre los ejes coordenados.
Dichas proyecciones son iguales a los incrementos elementales de las coordenadas de este punto durante sus desplazamientos y se calculan como las diferenciales de las coordenadas.
La condición de equilibrio para cualquier sistema mecánico, en los métodos de la estática geométrica exige un análisis de equilibrio de cada uno de los cuerpos del sistema por separado. En este caso, al aplicar este principio hay que considerar solamente las fuerzas activas permitiendo excluir del análisis preliminar todas las reacciones desconocidas de las ligaduras, cuando estas son ideales.

Solución de Problemas
Si el sistema tiene varios grados de libertad, es necesario escribir por separado las ecuaciones (19) ó (20) para cada uno de los desplazamientos independientes del sistema; Entonces, se obtendrán tantas ecuaciones como condiciones de equilibrio según los grados de libertad tenga el sistema.

Para la resolución de problemas mediante el método gráfico es necesario:
1) Representar todas las fuerzas activas que actúan sobre el sistema;
2) Comunicar al sistema un desplazamiento virtual r indicar en el dibujo los vectores "$\partial' s$" de los desplazamientos elementales de los puntos de aplicación de las fuerzas ó ángulos "$\partial\phi k$" de los giros elementales de los cuerpos sobre los cuales actúan las fuerzas (si el sistema posee varios grados de libertad es necesario comunicarle uno de los desplazamientos independientes);
3) Calcular los trabajos elementales de todas las fuerzas activas para el desplazamiento dado mediante las fórmulas:

$$\partial' \overset{a}{A}_k = \partial' \overset{a}{F}_{kt}\,\partial' S_k \quad \text{ó} \quad \partial' \overset{a}{A}_k = m_o(\overset{a}{F}_k)\,\partial\phi_k \quad \text{.......................} 21$$

y escribir la condición (19);
4) Definir la relación entre los valores de "$\partial\phi_k$" y "$\partial' S_k$" que intervienen en la relación (19), expresando todos estos valores por medio de una sola magnitud, esto siempre es posible porque se ha comunicado al sistema un desplazamiento virtual *independiente*.

---

[2] El mismo principio, fue expresado en una forma parecida a la moderna, pero sin demostraciones por I. Bernoulli, este principio fue formulado y demostrado por primera vez por Lagrange, la generalización del principio para el caso de ligaduras unilaterales (son las que pueden ser abandonadas por el cuerpo) fue explicado por M. V. Ostrogradsky en sus trabajos de 1838 - 1842.

Después de sustituir en la fórmula (19) todos los valores de "$\partial\phi_k$" y "∂S_k", por una sola magnitud donde se encuentra la ecuación de la cual se encontrará la magnitud ó relación buscada del problema.
Para un sistema con varios grados de libertad, El calculo citado se repetirá por separado para cada desplazamiento independiente.

Las relaciones entre las magnitudes "$\partial\phi_k$" y "∂S_k" pueden determinarse:
a) Por medio de razonamientos puramente geométricos.
b) Mediante el método cinemático determinando la relación entre las velocidades lineales "V_k" ó angulares "w_k" respectivas, que tendrían los puntos ó cuerpos del sistema, si este se desplazará, teniendo en cuenta "$\partial s_k = V_k \partial t$" y "$\partial\phi_k = w_k \partial t$".
A través del método analítico del calculo, las condiciones de equilibrio se componen de la forma (20). En este caso se eligen los coordenados relacionados con el cuerpo, este permanece inmóvil durante los desplazamientos del sistema. Posteriormente se calculan las proyecciones del sistema de todas las fuerzas activas sobre los ejes elegidos y las coordenadas "x_k", "y_k", "z_k", de los puntos de aplicación de las fuerzas, expresando todas las coordenadas por medio de un parámetro cualquiera (un ángulo por ejemplo) luego las magnitudes "∂x_k", "∂y_k", "∂z_k" se encuentran diferenciando las coordenadas "x_k", "y_k", "z_k", respecto de este parámetro [por ejemplo si $x_k = f(\alpha)$; $\partial x_k = f'(\alpha)\,\partial\alpha$ etc.].
Si no se pudiese expresar todas las coordenadas "x_k", "y_k", "z_k", mediante un sólo parámetro, entonces será necesario introducir varios parámetros y después la relación entre ellos.

Ecuación General de la Dinámica

Examinando un sistema de puntos materiales, al cual se han impuesto ligaduras ideales. Si a todos los puntos del sistema se les añaden las fuerzas de inercia correspondientes:

$$F_k^{in} = -m_k w_k$$

Además de las fuerzas activas "F_k^a" y las reacciones de las ligaduras "N_k" que actúan sobre estos, de acuerdo con el principio de D'Alembert, el sistema de fuerzas obtenido estará en equilibrio.
Aplicando el principio de desplazamientos virtuales:

$$\sum \partial A_k^a + \sum \partial A_k^{in} + \sum \partial A_k^r = 0$$

La última suma, recordando la condición (18) es igual a cero:

$$\sum \partial A_k^a + \sum \partial A_k^{in} = 0 \qquad \textbf{22}$$

La igualdad anterior es conocida como la *"Ecuación General de la Dinámica"* deduciéndose de esta el principio ***D'Alembert - Lagrange*** " Durante el movimiento de un sistema con ligaduras ideales, para cada instante la suma de los trabajos elementales de todas las fuerzas activas aplicadas al sistema y de todas las fuerzas de inercia, en cualquier desplazamiento virtual es igual a cero".
En forma analítica la ecuación (22) se expresa como:

$$\sum[(F^{a}_{kx}+F^{in}_{kx})\partial x_k + (F^{a}_{ky}+F^{in}_{ky})\partial y_k + (F^{a}_{kz}+F^{in}_{kz})\partial z_k] = 0 \quad \ldots\ldots 23$$

Las ecuaciones (22) y (23) permiten componer la ecuación diferencial del movimiento de cualquiera sistema mecánico.
Si el sistema es, un conjunto de varios cuerpos sólidos, para componer las ecuaciones es necesario agregar a las fuerzas activas que actúan sobre cada cuerpo una fuerza igual al vector principal de las fuerzas de inercia , aplicada a un centro cualquiera, y un par de momento igual al momento principal de las fuerzas de inercia respecto de centro para luego usar el principio de los desplazamientos virtuales.

Condiciones de Equilibrio y Ecuaciones del Movimiento del Sistema en Coordenadas Generalizadas

Coordenadas Generalizadas y Velocidades Generalizadas

El número de coordenadas (parámetros) que determinan la posición de un sistema, depende del número de puntos (ó de cuerpos) que entran en el sistema y del número y del carácter de las ligaduras impuestas. En lo sucesivo consideraremos solamente los sistemas con ligaduras geométricas, o sea, con ligaduras que imponen restricciones a las posiciones de los puntos del sistema en el espacio, no así a sus velocidades.

las ligaduras geométricas tienen la peculiaridad de que cada una de ellas disminuye en una unidad en el número de desplazamientos virtuales independientes del sistema, y el número de las coordenadas independientes entre si que determinan la posición del sistema. "El número de coordenadas independientes que determinan la posición de un sistema con ligaduras geométricas es igual al número de grados de libertad de este sistema".
Los parámetros de cualquier dimensionalidad independientes entre sí cuyo número es igual al número de grados del sistema que determinan simplemente la posición de este sistema, llamándose coordenadas generalizadas del sistema. Se designará a las **coordenadas generalizadas con la letra "q".**
Ya que un punto libre posee tres grados de libertad, un sistema compuesto de "n" puntos materiales, cuyas coordenadas en virtud de las ligaduras geométricas impuestas al sistema deben satisfacer las "k" ecuaciones que expresan estas ligaduras, teniendo "$s = 3(n - k)$" grados de libertad y su posición estará determinada por "s" coordenadas generalizadas.

$$q_1, q_2, \ldots q_s \quad \ldots\ldots 24$$

Por el contrario, si se sabe que la posición de un sistema dado esta determinada simplemente por "s" parámetros cualesquiera independientes entre sí, este sistema posee "s" grados de libertad.
Como las coordenadas generalizadas son independientes entre sí (cada una de estas puede ser modificada sin alterar a las demás), los incrementos elementales de estas coordenadas son:

$\partial q_1, \partial q_2, \ldots\ldots \partial q_s$ **25**

Serán independientes entre sí. Cada una de las magnitudes (25) determina el desplazamiento virtual correspondiente, independiente de otros desplazamientos del sistema. Del mismo que al pasar de un sistema de coordenadas a otro, las coordenadas cartesianas (X_k, Y_k, Z_k) de un punto cualquiera del sistema mecánico en estudio, puede ser expresada en función de las coordenadas generalizadas por las dependencias del tipo:

$X_k = X_k\,[q_1, q_2, \ldots q_s]$

Por consiguiente para el radio vector "rk"de dicho punto, que esta determinado por sus proyecciones, es decir por las coordenadas ($r_k = X_k i + Y_k j + Z_k k$) teniendo:

$r_k = r_k\ \{q_1, q_2, \ldots q_s\}$ **26**

Para reducir la notación se considerarán ligaduras invariables en el tiempo (de lo contrario "rk" dependería del argumento "t").

Durante el movimiento del sistema sus coordenadas generalizadas varían incesablemente con el transcurso del tiempo y la ley de este movimiento esta determinada por las ecuaciones:

$q_1 = f_1(t),\ q_2 = f_2(t), \ldots\ldots\ldots q_s = f_s(t)$ **27**

Las ecuaciones (27) son las ecuaciones cinemáticas del movimiento del sistema en las coordenadas generalizadas.
Las derivadas de las coordenadas generalizadas respecto al tiempo se llaman velocidades generalizadas del sistema, se designará a las **velocidades generalizadas** (q'_s) del sistema, se designará a las velocidades generalizadas por los símbolos:

$q'_1, q'_2, \ldots q'_s$ Donde $q'_1 = \dfrac{\partial q_1}{\partial t}$

La dimensión de la velocidad generalizada depende de la dimensión de la coordenada generalizada correspondiente.
Si "q" es una magnitud lineal, " q' " es la velocidad lineal; Si "q" es un ángulo, " q' " es la velocidad angular; Si "q" es un área, " q' " es la velocidad sectorial, etc. como se ve el concepto de velocidad generalizada abarca todos los conceptos de las velocidades que se estudian en la cinemática.

Fuerzas Generalizadas

Examinando un sistema mecánico de "n" puntos materiales, sobre los cuales actúan las fuerzas F_1, $F_2, \ldots F_n$. Suponiendo que el sistema tiene "s" grados de libertad y su posición es determinada por las coordenadas generalizadas (24). Comuniquemos al sistema un desplazamiento virtual, del cual la coordenada "q_1" recibe un incremento "∂q_1", mientras que las demás coordenadas permanecen invariables. Entonces, cada radio vector "rk" de los puntos del sistema obtendrá el incremento elemental $(\partial q_1)_1$[3]. Ya que de acuerdo con la igualdad (26) y en el desplazamiento considerado varia solamente la coordenada "q1" (las demás conservan sus valores constantes), $(\partial r_k)_1$ se calcula como una diferencial parcial y por consiguiente:

$$(\partial r_k)_1 = \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \cdot \partial q_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 28$$

Calculemos ahora la suma de los trabajos elementales de todas las fuerzas en el desplazamiento considerado; Esta suma se designa por "∂A_1" utilizando la fórmula (28) obtendremos:

$$\partial A_1 = Q_1\, \partial q_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 29$$

Donde:

$$Q_1 = \sum F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 30$$

Por analogía con la igualdad $\partial A = F_\tau\, \partial s$ que determina el trabajo elemental de la fuerza "F", la magnitud "Q_1" se llama fuerza generalizada correspondiente a la coordenada "q_1".
Comunicando al sistema otro desplazamiento virtual independiente, durante el cual varia solamente la coordenada "q_2":

$$\partial A_2 = Q_2\, \partial q_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 31$$

Donde:

$$Q_2 = \sum F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 32$$

La magnitud "Q_2" es la fuerza generalizada correspondiente a la coordenada "q_2". etc.

Es evidente que si se comunica al sistema un desplazamiento virtual, durante el cual varian a la vez todas sus coordenadas generalizadas, la suma de los trabajos elementales de las fuerzas aplicadas al sistema en este desplazamiento esta determinado por la igualdad:

$$\sum A_k = Q_1\, q_1 + Q_2\, q_2 + \ldots\ldots + Q_s\, q_s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 33$$

La fórmula anterior da la expresión de trabajo elemental total de todas las fuerzas aplicadas al sistema en las coordenadas generalizadas.
De esta igualdad se ve que las fuerzas generalizadas son magnitudes iguales a los coeficientes de los incrementos de las coordenadas generalizadas en la expresión del trabajo de las fuerzas que

[3] El símbolo $(\partial q_1)_1$ significa que se toma el incremento elemental que el radio - vector "rk" cuando se modifica solamente la coordenada "q1" en una magnitud ∂q_1

actúan sobre el sistema. Si todas las ligaduras impuestas al sistema son ideales, durante los desplazamientos virtuales, el trabajo solamente es realizado solamente por las fuerzas activas y las magnitudes $Q_1, Q_2, \ldots Q_s$, son las fuerzas activas generalizadas del sistema.

La dimensionalidad de una fuerza aplicada depende de la dimensionalidad de la coordenada generalizada correspondiente. Ya que el producto $[(Q)(\partial q)]$ y por consiguiente "Qq" tienen la dimensión de trabajo entonces:

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]} \qquad \text{.......... 34}$$

La dimensionalidad de una fuerza generalizada es igual a la dimensionalidad del trabajo dividida por la dimensionalidad de la coordenada generalizada correspondiente. De aquí se ve que si "q" es una magnitud lineal "Q" tiene dimensión de una fuerza ordinaria (kgf, en el sistema mkqs); si "q" es un ángulo (una magnitud adimensional), "Q" se medirá en kgfm, es decir tendrá la dimensión de momento; "q" es un volumen (por ejemplo la posición del pistón en un cilindro puede determinarse por el volumen del espacio detrás del pistón) "Q" se medirá en kmf / m cuadrados, es decir tiene la dimensión de presión, como se ve por analogía con la velocidad generalizada el concepto de fuerza generalizada abarca todas las magnitudes antes estudiadas como medida de la acción mecánica mutua de cuerpos materiales (fuerza, momento, presión).

Calculo de las Fuerzas Generalizadas

Se efectúa con fómulas del tipo (29), (31) reduciéndose al calculo del trabajo virtual elemental.

1) Se determina el número de grados de libertad del sistema.

2) Se eligen las coordenadas generalizadas y se traza en el dibujo todas las fuerzas de rozamientos (si estas realizan trabajo).

3) Para determinar "Q_1" es necesario comunicar al sistema un desplazamiento virtual, durante el cual varia solamente la coordenada "q_1".

4) Calcular para este desplazamiento la suma de los trabajos elementales de todas las fuerzas activas valiéndose de las fórmulas (21) y expresar la ecuación obtenida en la forma (29) entonces el coeficiente $\partial q1$ nos da la incógnita "Q_1".

Se calculan análogamente $(Q_2, Q_3, \ldots Q_s)$.

Caso de Fuerzas Potenciales

Si todas las fuerzas que actúan sobre un sistema son potenciales, entonces, para el sistema, existe una función de fuerza "U" dependiente de las coordenadas (X_k, Y_k, Z_k) de los puntos del sistema, tal que la suma de los trabajos elementales de las fuerzas efectivas es igual a la diferencia total de esta función, es decir "$\sum \partial A_k = \partial U$" pero al pasar a las coordenadas generalizadas $(q_1, q_2, \ldots q_s)$, por consiguiente calculando "∂U" como la diferencial total de la función "$U(q_1, q_2, \ldots q_s)$" hallaremos que:

$$\sum \partial A_k = \partial U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\partial q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\partial q_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_s}\partial q_s$$

Comparando esta expresión con la ecuación (33) se concluye que para este caso:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1},\ Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2},\ Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 35$$

ó como la energía potencial ($\prod = -U$) se tiene:

$$Q_1 = \frac{-\partial \prod}{\partial q_1},\ Q_2 = \frac{-\partial \prod}{\partial q_2},\ \ldots\ldots,\ Q_s = \frac{-\partial \prod}{\partial q_s} \ldots\ldots\ldots 36$$

Por lo tanto "Si todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son potenciales, entonces las fuerzas generalizadas son iguales a las derivadas parciales de la función fuerza (ó las derivadas parciales de la energía potenciales tomadas con el signo negativo) respecto de las coordenadas generalizadas correspondientes.

Condiciones de Equilibrio de un sistema en las Coordenadas Generalizadas

Recordando la condición de equilibrio de los desplazamientos virtuales, que es suficiente en un sistema mecánico, la suma de los trabajos elementales de todas las fuerzas activas (y las de rozamiento si estas realizan trabajo) durante todo desplazamiento virtual del sistema sea igual a cero, $\sum \partial A_k = 0$ en las coordenadas generalizadas esta condición de acuerdo con la ecuación (33) resulta:

$$Q_1\,\partial q_1 + Q_2\,\partial q_2 + \ldots\ldots + Q_s\,\partial q_s = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 37$$

"Para el equilibrio de un sistema mecánico es necesario y suficiente que todas las fuerzas generalizadas que corresponden a las coordenadas elegidas para el sistema sea igual a cero", el número de condiciones de equilibrio es igual al número de las coordenadas generalizadas, es decir, al número de grados de libertad del sistema..

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ \ldots,\ Q_s = 0$$

Caso de Fuerzas Potenciales

Teniendo en cuenta las igualdades (35) y (36) considerando las condiciones de equilibrio (37) resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0,\ \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 38$$

ó

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0,\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots 38'$$

De aquí se deduce que durante el equilibrio, la diferencial de las funciones "U" ó "∏" es igual a cero, es decir:

$$\partial U(\partial q_1, \partial q_2, \partial q_s) = 0 \text{ ó } \partial \Pi(\partial q_1, \partial q_2, \partial q_s) = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots 39$$

Un sistema se encuentra en equilibrio, sometido a la acción de fuerzas potenciales en las posiciones para las cuales la función de fuerza ó la energía potencial tiene un valor máximo ó mínimo.

Ecuaciones de Lagrange

Para poder encontrar las ecuaciones de Lagrange, se necesita encontrar las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico con ligaduras ideales geométricas en las coordenadas generalizadas, dirigiendo la ecuación general de la dinámica tendremos:

$$\sum \partial A_k = Q_1 \partial q_1 + Q_2 \partial q_2 + \ldots + Q_s \partial q_s \ \ldots\ldots\ldots\ldots 40$$

En este análisis para generalizar no consideraremos que todas las ligaduras del sistema son ideales, por eso en la primera suma pueden entrar tanto los trabajos de las fuerzas activas, como los de las fuerzas de rozamiento por ejemplo.
Suponiendo que el sistema tiene "s" grados de libertad, y su posición esta determinada por las coordenadas generalizadas (24), entonces según la igualdad (23):

$$\sum \partial A_k + \sum \partial A_k^{in} = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots 41$$

Es evidente que se puede transformar el trabajo elemental de las fuerzas de inercia "F_k^{in}" respecto de las coordenadas generalizadas obteniendo:

$$\sum \partial A_k^{in} = Q_1^{in} \partial q_1 + Q_2^{in} \partial q_2 + \ldots + Q_s^{in} \partial q_s \ \ldots\ldots\ldots\ldots 41'$$

Donde $(Q_1^{in}, Q_2^{in}, \ldots Q_s^{in})$ son las fuerzas de inercia generalizadas que según las ecuaciones (30) y (32) serán igual a:

$$Q_1^{in} = \sum F_k^{in} \frac{\partial r_k}{\partial q_1} ;\ Q_2^{in} = \sum F_k^{in} \frac{\partial r_k}{\partial q_1} ; \ldots\ldots\ldots\ldots 42$$

$$(Q_1 + Q_1^{in})\partial q_1 + (Q_2 + Q_2^{in})\partial q_2 + \ldots\ldots + (Q_s + Q_s^{in})\partial q_s = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots 42$$

Como todas las $(\partial q_1, \partial q_2, \ldots \partial q_s)$ son independientes entre sí, la igualdad obtenida es valida solamente cuando uno de los coeficientes de $(\partial q_1, \partial q_2, \ldots \partial q_s)$ es igual a cero. Por lo tanto se tiene:

$$Q_1 + Q_1^{in} = 0 ;\ Q_2 + Q_2^{in} = 0 ;\ \ldots\ldots Q_s + Q_s^{in} = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots 43$$

Las ecuaciones obtenidas pueden ser aplicadas directamente para la resolución de problemas de

Dinámica, sin embargo en el proceso de comparación se simplificará considerablemente, sí todas las fuerzas de inercia generalizadas que entran en las ecuaciones, se expresan en función de la energía cinética del sistema.
Transformemos primeramente la magnitud "Q1 inercial". Ya que la fuerza de cualquier punto del sistema

$$F_k^{in} = - m_k w_k = - m_k \frac{\partial V_k}{\partial t}$$

Entonces, la primera de las fórmulas (42) resulta:

$$- Q_1^{in} = \sum m_k \frac{\partial V_k}{\partial t} . \frac{\partial' r_k}{\partial' q_1} \qquad \text{.......... 44}$$

Para expresar "Q_1^{in}" es función de la energía cinética del sistema, hace falta transformar el miembro derecho de la ecuación (44) de tal manera que esta contenga las velocidades "V_k" de los puntos del sistema con este fin notemos ante todo que:

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} \frac{\partial' r_k}{\partial' q_1} = \frac{\partial}{\partial t} [V_k \frac{\partial' r_k}{\partial' q_1}] - V_k \frac{\partial}{\partial t} [\frac{\partial' r_k}{\partial' q_1}] \qquad \text{.......... 45}$$

Luego hace considerar:

$$\frac{\partial' r_k}{\partial t} = r'_k = V_k \text{ y } \frac{\partial' q_1}{\partial t} = q'_1$$

Donde V_k es la velocidad del punto del sistema que se determina por el radio vector rk1 y q'_1 es la velocidad generalizada que corresponde a la coordenada q_1, para las derivadas rk que entran en la ecuación (45) será valido lo siguiente:

1) Las operaciones de diferensiación total respecto de "t" y de diferensiación parcial respecto de "q_1" son conmutativas, esto nos resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\frac{\partial' r_k}{\partial' q_1}] = \frac{\partial}{\partial' q_1} [\frac{\partial' r_k}{\partial t}] = \frac{\partial V_k}{\partial q_1} \qquad \text{.......... 46}$$

2) La derivada parcial de rk respecto de q_1 es el límite de la relación entre el incremento parcial (Δr_k) y el incremento (Δq_1), de acuerdo con la regla de L'Hospital [4] se tiene que:

$$\frac{\partial r_k}{\partial q_k} = \frac{\partial r'_k}{\partial q'_k} = \frac{\partial V_k}{\partial q'_k} \qquad \text{.......... 47}$$

---

[4] En efecto designando al incremento parcial r_k por el símbolo (Δr_k) y teniendo en cuenta que la derivada de la diferencia es igual a la diferencia de las derivadas se tiene:

$$\frac{\partial r_k}{\partial q_1} = \lim \frac{\Delta r_k}{\Delta q_1} = \lim \frac{[\partial(\Delta r_k) / \partial t]}{[\partial(\Delta q_1) / \partial t]} = \lim \frac{\Delta [(\partial r_k) / \partial t]}{\Delta [(\partial q_1) / \partial t]} = \lim \frac{\Delta r'_k}{\Delta q'_1} = \frac{\partial' r_k}{\partial' q_1}$$

Empleando las igualdades (46) y (47) expresamos la ecuación (45) en la forma:

$$\frac{\partial V_k}{\partial t}\frac{\partial r_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial t}\left(V_k \frac{\partial V_k}{\partial q'_i}\right) - V_k \frac{\partial V_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial V_k^2}{\partial q'_i}\right] - \left[\frac{1}{2}\frac{\partial V_k^2}{\partial q_i}\right]$$

En este caso si se tiene en cuenta que la masa de una magnitud constante y que la suma de sus derivadas es igual a la derivada de la suma, la expresión (44) será:

$$-Q_i^{in} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial q'_i}\left(\frac{\sum m_k v_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\sum m_k v_k^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

Donde $T = \frac{\sum m_k v_k^2}{2}$ Es la energía cinética del sistema

Las igualdades (43) darán finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \quad \text{.............................} 48$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \quad \text{.............................} 48$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad \text{.............................} 48$$

Las ecuaciones (48) son precisamente las ecuaciones diferenciales del movimiento en las coordenadas generalizadas ó *las Ecuaciones de* Lagrange. El número de estas ecuaciones es igual al número de grados de libertad del sistema.

Las ecuaciones de Lagrange dan un método único y bastante simple para resolver problemas de Dinámica. La ventaja de estas ecuaciones es que no dependen ni del número de cuerpos (ó puntos) del sistema en consideración, ni del movimiento de estos cuerpos. El número de ecuaciones se determina solamente por el número de grados de libertad del sistema. Además en el caso de ligaduras ideales, en los miembros derechos de las ecuaciones (48) entran las fuerzas activas generalizadas y, por consiguiente, estas ecuaciones permiten excluir de antemano en el análisis todas las reacciones desconocidas.

El problema fundamental en la dinámica de las coordenadas generalizadas, consiste en encontrar la ley del movimiento de un sistema de la forma (27) conociendo las fuerzas generalizadas (Q_1, Q_2,....,Q_s) y las coordenadas iniciales, es decir, en determinar las coordenadas generalizadas del sistema (q_1, q_2,....,q_s) en función del tiempo. Ya que la energía cinética "T" depende de las velocidades generalizadas "q'_i" entonces, al diferenciar los primeros miembros de las ecuaciones (48) respecto de "t" aparecerán en los miembros izquierdos de estas ecuaciones las segundas derivadas de las coordenadas buscadas respecto de tiempo q''_i por consiguiente, las ecuaciones de Lagrange son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo grado respecto a las coordenadas generalizadas (q_1, q_2,....,q_s).

Caso de Fuerzas Potenciales

Si todas las fuerzas obtenidas que actúan sobre el sistema son potenciales, entonces utilizando las fórmulas (36), se puede expresar la primera de las ecuaciones (48) como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0$$

ó

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial [T-\Pi]}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial [T-\Pi]}{\partial q_1} = 0$$

La última igualdad es valida porque la energía potencial "Π" depende solamente de las coordenadas ($q_1, q_2, \ldots, q_s$) no dependiendo de las velocidades generalizadas, por lo cual ($[\partial \Pi / \partial q'_1] = 0$).

De manera análoga se transforman las demás ecuaciones (48), introduzcamos la función

$$L = T - \Pi \qquad \text{.........49}$$

La función "L" de las coordenadas generalizadas y de las velocidades generalizadas, igual a la diferencia entre las energías cinética y potencial del sistema se llama *Función de Lagrange* ó potencial cinético. Entonces para el caso de fuerzas potenciales, las ecuaciones de Lagrange se expresan:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \qquad \text{.........50}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \qquad \text{.........50}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \qquad \text{.........50}$$

Del resultado obtenido se deduce que el estado de un sistema mecánico sobre el cual actúan fuerzas potenciales, se determina definiendo solamente la función de Lagrange, conociendo esta función se pueden componer las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema.

Después de la generalización correspondiente de estos conceptos, las funciones análogas a la función de Lagrange describen el estado de otros sistemas físicos, (una sustancia fluida, un campo gravitatorio, ó electromagnético). Por eso las ecuaciones (50) desempeñan un importante papel en una serie de ramas de la física.

Solución de Problemas

Las ecuaciones de Lagrange pueden utilizarse para el estudio del movimiento de cualquier sistema mecánico con ligaduras geométricas, independientemente del número de cuerpos que componen el sistema, del movimiento de estos y del tipo de movimiento (absoluto ó relativo que se examina).

Para componer las ecuaciones de Lagrange hace falta:

1) Determinar el número de grados de libertad del sistema y elegir las coordenadas generalizadas.

2) Representar el sistema en una posición arbitraria e indicar en la figura todas las fuerzas efectivas que actúan sobre este (para un sistema con ligaduras solamente las fuerzas activas).

3) Calcular las fuerzas generalizadas " Q_i " mediante el método explicado, en este caso para evitar errores en los signos, cada desplazamiento virtual que se comunica al sistema debe estar dirigido de tal manera que el incremento de la coordenada correspondiente sea positivo.

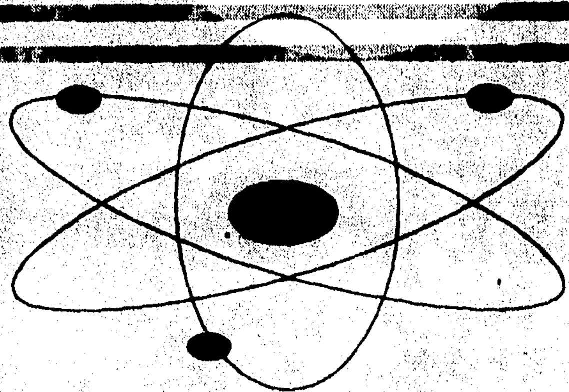
4) Calcular la energía cinética "T" del sistema en su movimiento absoluto y expresar esta energía en función de las coordenadas generalizadas " q_i " y de las velocidades generalizadas " q'_i "

5) Calcular las derivadas parciales correspondientes de "T" respecto de " q_i " y " q'_i " considerando todas las magnitudes calculadas en las ecuaciones (48).
Si se conocen las fuerzas efectivas y las condiciones iniciales, integrando las ecuaciones obtenidas se puede hallar la ley del movimiento del sistema en la forma (27). Si se conoce la ley del movimiento, las ecuaciones compuestas permites determinar las fuerzas efectivas.

Cuando todas las fuerzas aplicadas al sistema son potenciales se pueden formar las ecuaciones de Lagrange en la forma (50); En este caso, en vez de calcular las fuerzas generalizadas es necesario determinar la energla potencial del sistema expresándola respecto de las coordenadas generalizadas y luego, después de calcular la energía cinética, componer la función de Lagrange (49).

Mecánica Lagrangeana

Conclusiones



CONCLUSIONES

Con las medidas de precisión que se realizan actualmente de objetos microscópicos, hay cierta limitación en la exactitud de los resultados.

Por ejemplo, concebimos la medida de la posición de un electrón por la disipación de fotones de luz provenientes del electrón. La característica de la onda del fotón antecede la medida exacta, y la posición del electrón será determinada solo con alguna variación Δx que es relativa por muchas medidas se induce un cambio en el estado del electrón. Desde la disipación del fotón que dará un momento al electrón. Este momento será incierto, teniendo una variación Δp. El producto $\Delta x\ \Delta p$ es la medida de precisión con la cual podremos determinar simultáneamente la posición y el momento del electrón $\Delta x \to 0$, $\Delta p \to 0$ implica una medida con inimaginable precisión, esto fue mostrado por Heisenberg en 1927, este producto debe de ser siempre un valor muy grande para uno y mínimo para el otro (este resultado es aplicable a la medida de energía en un tiempo particular, en tal caso el producto $\Delta E\ \Delta t$ las cuales tienen las mismas dimensiones que $[\Delta x\ \Delta p]$ si $\Delta x \to 0$ entonces tenemos que $\Delta p \to \infty$ de modo que el principio de incertidumbre de Heisenberg sea satisfecho, el valor mínimo de Δx y Δp es del orden de 10 elevado a la - 27 erg. - segundos, esto es extremadamente pequeño comparado con los estándares macroscópicos en la escala de los objetos de laboratorio, no es prácticamente difícil efectuar las mediciones de posición y momento. Entonces las Leyes de Newton pueden ser aplicadas, sin embargo la mecánica Newtoniana no puede ser aplicada en los sistemas microscópicos, un nuevo método con fenómenos microscópicos fue desarrollado, empezando en 1926, el trabajo de Schrödinger, Heisenberg, Born Dirac, entre otros es una nueva disciplina, entonces la mecánica Newtoniana es perfectamente adecuada a la descripción en gran escala de los fenómenos, pero de nueva mecánica (mecánica Cuántica) es necesario para el análisis del proceso un dominio atómico. El tamaño del sistema es incrementado, la mecánica Cuántica se torna limitante de la Mecánica Newtoniana.

En adición a las limitaciones fundamentales de la mecánica Newtoniana aplicadas a los objetos microscópicos, hay otra dificultad inherente al proyecto de Newton referente al tiempo en el punto de vista de Newton, el tiempo es un concepto absoluto.

En orden podría ser siempre que el tiempo decida la secuencia de los eventos, para esto es necesario que dos observadores del evento tengan conversación instantánea, o tener dos relojes exactamente sincronizados.

Pero el tiempo transcurrido del tránsito de la señal en una dirección a otra o sea de un observador a otro. En la actualidad es posible medir la velocidad de la señal, sin embargo siempre se obtiene un promedio de velocidad de propagación en direcciones opuestas, la medición de la velocidad en una sola dirección es necesario asumir la introducción de algunos nuevos conceptos los cuales no pueden ser verificados experimentalmente.

La máxima velocidad con la cual cualquier señal puede ser propagada es para la de la luz en un espacio libre

$c = 3 \times 10^{10}$ cm. / seg. las dificultades de establecer una escala de tiempo entre puntos separados nos hace reflexionar que el tiempo, después de todo no es un concepto absoluto, el espacio y el tiempo están íntimamente involucrados. La solución del dilema fue encontrada en 1904 - 1905 por Lorentz, Poincaré y Einstein, este último los conjunto en la teoría de la relatividad.

La mecánica Newtoniana esta entonces sujeta a limitaciones fundamentales cuando pequeñas distancias ó grandes velocidades son involucradas, siendo también una limitación practica.
Cuando un gran número de cuerpos son involucrados en un sistema no podemos encontrar un solución general para el movimiento de un sistema de más de dos cuerpos inter actuantes como el relativamente simple caso de la interacción gravitacional.
El movimiento de más sistemas complejos (por ejemplo el sistema compuesto por todos los objetos mayores del sistema solar) puede ser calculado pero el proceso rápidamente se torna complejo en cualquier sistema grande.
El calculo de movimiento de moléculas por decir en un centímetro cubico de gas que tiene 10 a la 19° potencia de moléculas, el método exitoso del calculo es el "promedio" de propiedades de tales sistemas, siendo desarrollado en el siglo diecinueve por Boltzmann, Maxwelli, Gibbs, Liouville, entre otros.
Estos procedimientos permiten que los sistemas dinámicos puedan ser calculados por la teoría de la probabilidad y se involucra la mecánica estadística.

Dados los avances actuales en la ciencia se debe dar otra perspectiva de solución a problemas Dinámicos microscópicos y a movimientos con velocidades extremadamente altas, se hizo necesario modificar en parte los axiomas básicos establecidos por Newton.

Las conclusiones deducidas por Newton, y publicadas en sus "Principia" , tal vez constituyen la hazaña intelectual más grande que hasta ahora haya sido realizada por un sólo Hombre, en menos de dos años, Newton trabajó matemáticamente sobre la espina dorsal de las ideas básicas de la Dinámica tal como hoy la conocemos, una faceta interesante de su trabajo es que todas las demostraciones se expresan en lenguaje geométrico. Veinte años antes (1666), Newton había inventado sus "Fluxiones" (conocidas ahora como cálculo), mediante las cuales resolvió indudablemente sus problemas de Dinámica pero a causa de que en el medio científico de su tiempo nadie estaba suficientemente familiarizado con el cálculo para leer sus escritos, Newton decidió traducir todas sus demostraciones al lenguaje de la geometría.

Entonces esta forma de resolver los problemas de Dinámica es acorde con los avances científicos además de facilitar la solución es mucho más exacta.

Referencias Bibliográficas

Mecánica Vectorial para Ingenieros
Harry R. Nara
Editorial Limusa
6a edición
1979

Evolución de los Conceptos de la Física
Arnold B. Arons
Editorial Trillas
1er edición en español
1970

Elementos de la Mecánica del Medio Continuo
Enzo Levi
Editorial Limusa
4a edición
1980

Engineering Mechanics Volume II
J. L. Meriam
Editorial John Wiley and Sons
1978

Classical Dynamics of Particles and Systems
Jerry B. Marion
Editorial Academic Press
1970

Mécanica general
I. Rubio
Editorial Labor S.A.
Barcelona Madrid
1950

Curso Breve de Mecánica teórica
S. Targ
Editorial MIR - Moscú
1976

Dynamics in Engineering
J. C. Malt Baek
Editorial Ellis Horwood limited
1988

Analytical Mechanics
Rierhart and Winston
Editorial Holt
1962

Applied Robotic Analysis
Robert E. Parkin
Prentice Hall New Jersey
1991

Robotic Engineering and Integrated Approach
Thomas A. Chmiclewski, Michel Negin
Prentice Hall New Jersey
1990

Mecánica Clásica a Nivel Intermedio
Joseph Norwood Jr.
Prentice Hall New Jersey
1989

Principia
Sir Isaac Newton
University of California Press
1962

Robotica, Control, Detección, Visión e Inteligencia
K. S. Fu, R. C. Gonzalez, C. S. G. Lee
Mc Graw Hill
1988