



01162

1  
20

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TESIS

**"SIMULACION NUMERICA DEL FLUJO EN  
CURVAS DE CAUCES NATURALES"**

PRESENTADA POR:

**MANUEL DINO ARAGON SULIK**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERIA  
( HIDRAULICA )**

DIRIGIDA POR:

**DR. JESUS GRACIA SANCHEZ**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

Ciudad Universitaria,

Mayo de 1996

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICATORIA

A mis Padres Virgilio Aragón y Luisa Sulik.

A mis hermanos Ariel, Virgilio, Elvira, Blanca y Judith.

### AGRADECIMIENTOS

Se agradece la dirección y el apoyo brindado por el Dr. Jesús Gracia Sánchez durante la realización de este trabajo.

A los profesores M. en I. Jose Antonio Maza Alvarez, M. en I. Oscar Fuentes Mariles, M. en I. Víctor Franco y Dr. Carlos Escalante Sandoval por la revisión y las aportaciones hechas a este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo otorgado a lo largo de mis estudios de posgrado.

Al Instituto de Ingeniería y en especial al M. en I. Víctor Franco por el apoyo otorgado para la realización de esta tesis.

## CONTENIDO

### RESUMEN

#### CAPÍTULO 1 .- INTRODUCCIÓN

1.1.- Importancia del problema	1
1.2.- Planteamiento del problema	3
1.3.- Utilidad del trabajo	7

#### CAPÍTULO 2.- ANTECEDENTES

2.1.- Introducción	10
2.2.- Descripción del fenómeno	12
2.3.- Clasificación de los meandros	16
2.4.- Antecedentes históricos en el estudio de las curvas naturales	17
2.5.- Análisis dinámico de las curvas naturales	21
2.5.1.- Distribución de la velocidad en la dirección principal	22
2.5.2.- Distribución de la velocidad secundaria	24
2.5.3.- Pendiente transversal del fondo	26
2.5.4.- Distribución de esfuerzos cortantes	27
2.5.5.- Distribución del transporte del material sólido	28
2.6.- Modo de perturbación en las curvas naturales	30
2.7.- Métodos para determinar la profundidad de socavación en las curvas de cauces naturales	33
2.8.- Métodos para determinar la pendiente transversal en la superficie del agua	37
2.9.- Método de Engelund	38
2.10.- Método de Zimmermann y Kennedy	42
2.11.- Método de Kikkawa, Ikeda y Kitagawa	42

#### CAPÍTULO 3.- MODELO NUMÉRICO DE ODGAARD

3.1.- Conceptos básicos	45
3.2.- Ecuación de Navier-Stokes	47
3.3.- Distribución de velocidades en la dirección principal	49
3.4.- Distribución transversal de la velocidades	50
3.5.- Pendiente transversal del fondo	54
3.6.- Distribución de los tirantes a lo largo del	

cauce	57
3.7.- Modelo numérico de la curva senoidal	68
3.8.- Determinación de la distribución de velocidades	72

#### CAPÍTULO 4.- SOLUCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO DE ODGAARD

4.1.- Solución del modelo numérico de Odgaard	74
4.2.- Descripción del programa uno del método de Odgaard	78
4.3.- Empleo del programa uno	80
4.3.1.- Nomenclatura del programa uno	83
4.4.- Descripción del programa dos, aplicando del modelo numérico de la curva senoidal	84
4.5.- Empleo del programa dos	86
4.5.1.- Nomenclatura del programa dos	86

#### CAPÍTULO 5.- APLICACIONES

5.1.- Ejemplo uno	88
5.1.1.- Determinación del tirante medio en las curvas	89
5.1.2.- Determinación de la sobreelevación en la superficie libre del agua	90
5.1.3.- Método de Engelund, primera aproximación	91
5.1.4.- Método de Kikkawa, Ikeda y Kitagawa	94
5.1.5.- Método de Odgaard	94
5.1.6.- Comparación de métodos	99
5.1.7.- Resumen de las velocidades medias principales para una vertical dada	100
5.1.8.- Distribución de velocidades en la dirección secundaria	102
5.2.- Ejemplo dos	102
5.2.1.- Método de Zimmermann y Kennedy	102
5.2.2.- Método de Engelund	103
5.2.3.- Método de Engelund, segunda aproximación	104
5.2.4.- Método de Odgaard, ajuste a una senoide	105
5.2.5.- Comparación de resultados	108
5.2.5.1.- Pendiente transversal del fondo	108
5.2.5.2.- Comparación del tirante para cada línea de corriente y sección	109
5.2.5.3.- Comparación de velocidades medias para cada línea de corriente	109
5.3.- Ejemplo tres	111

5.3.2.- Resultados y comentarios 113

CAPÍTULO 6.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1.- Análisis de términos 117

6.2.- Recomendaciones generales 122

6.3.- Conclusiones generales 123

BIBLIOGRAFÍA 128

APÉNDICE A

PROGRAMA UNO Aplicación del método de Odgaard a curvas discretizadas por tramos.

PROGRAMA DOS Aplicación del método del ajuste de la trayectoria de un cauce a una senoide.

## RESUMEN

Este trabajo trata el estudio de las curvas de cauces naturales desde el punto de vista hidráulico, con el fin de hacer simulaciones numéricas y pronosticar los valores de las variables que intervienen en el fenómeno, así como predecir el comportamiento del fondo del cauce y las zonas susceptibles de erosionarse.

Este trabajo se desarrollo específicamente para cauces con material granular.

En el capítulo primero se presenta una descripción de la importancia del estudio de las curvas naturales y su utilidad.

En el capítulo dos se describe el fenómeno desde el punto de vista hidráulico, sus antecedentes históricos, así como una presentación de las principales variables que intervienen, además se hace un breve planteamiento de la forma en que se efectúa la perturbación en las curvas y que permite elaborar simulaciones, además se presentan algunos otros métodos aplicables a curvas naturales.

En el capítulo tres se desarrolla la descripción matemática del método de Odgaard, sus simplificaciones e hipótesis, además se definen las ecuaciones que intervienen para determinar las velocidades, los tirantes y las pendientes transversales que se presentan a lo largo del cauce.

En el capítulo cuatro se presenta la solución numérica de las ecuaciones determinadas en el método de Odgaard, así como las descripción de los programas del apéndice A.

En el capítulo quinto se muestran ejemplos de aplicación y la comparación de los resultados aplicando los métodos expuestos. En particular se aplica el método de Odgaard a un problema de erosión de márgenes a un tramo del Río Colorado.

Finalmente se incluyen las conclusiones y recomendaciones, así como un análisis crítico de los métodos expuestos.

## **CAPÍTULO 1.- INTRODUCCIÓN**

### **1.1.- Importancia del problema**

Las ciudades, las zonas de cultivo, los parques industriales, etc., están en constante crecimiento, y en algunos sitios quedan expuestos a problemas de inundación por parte de las corrientes naturales, por lo tanto es necesario implantar medidas de protección para evitar incomodidades, daños materiales o en el peor de los casos exponer la vida de las personas.

Cuando se requiere efectuar la rectificación o crear estructuras de protección para las márgenes de un río es necesario desarrollar un plan integral del mismo, en general, el desarrollo armónico de un río se compone de un interés económico, político, de bienestar social y de conocimiento técnico.

El aprovechamiento de un río se analiza bajo una legislación específica, que depende del desarrollo de la zona, es decir, se consideran las necesidades de los usuarios las cuales varían en el tiempo, así, por ejemplo, para los europeos son más importantes los problemas relacionados con la navegación fluvial.

Para los efectos de rectificación en los ríos se pueden distinguir los objetivos siguientes:

a) **Navegación.** Se mejoran los cursos de agua con el fin de mantener una profundidad adecuada para permitir que el calado de los barcos transite sin problema por el cauce; indirectamente otro beneficio que se obtiene es la agilización de la actividad comercial.

b) **Control de avenidas.** Con la regulación de avenidas se logra que los efectos de las avenidas extraordinarias sean amortiguadas y disminuidas en intensidad en el tránsito del cauce, tratando de evitar daños a zonas en donde circule.

c) **Abastecimiento de aguas.** Cuando se tiene definida la configuración del cauce, es posible disponer de un mejor control para proporcionar agua a las ciudades, industrias o a la agricultura.

d) **Mejoramiento del medio ambiente.** La rectificación de los cauces puede contribuir al desarrollo urbanístico de las zonas aledañas a sus márgenes. Al proteger las zonas susceptibles de inundación, se incrementa el valor monetario de dicha zona; sin embargo, se debe cuidar este aspecto ya que una planeación deficiente disminuye el grado de seguridad a los vecinos que puede llegar a ser peligroso.

e) **Protección a las vías de comunicación.** Se mejora el trazo de las carreteras, vías de ferrocarril, y el diseño de los claros de los puentes, ya que no se tienen incertidumbres de las divagaciones que pudiera presentar el río.

f) **Disposición de residuos de ciudades e industrias.** Es común en las ciudades verter desechos al cauce, con la rectificación del río se incrementa la velocidad del flujo y con ello se mejora la calidad de vida de los vecinos al cauce, ya que se evitan posibles focos de infección.

En ocasiones los ríos sirven de límites fronterizos, y por lo cual se han elaborado convenios, con la finalidad de tener un beneficio bilateral, aunque en la práctica esto no siempre ocurre. En en caso de que se efectúen modificaciones en el cauce por parte de uno de los

involucrados, se tendrán cambios en la morfología del río con el consecuente efecto. Por lo anterior se deben tener los conocimientos técnicos para aplicar las acciones técnicas estructurales que satisfagan el correcto aprovechamiento de los ríos.

El estudio de las características morfológicas de los cauces permite planear, diseñar y construir estructuras de protección de las márgenes, así como, predecir las posibles zonas de falla de éstas, además permite elaborar un programa de mantenimiento.

Básicamente, el flujo ocurre en los cauces de trazo curvilíneo, lo cual complica su análisis, ya que se puede presentar el proceso de corrimiento de las márgenes y el desarrollo de meandros. Dentro de dicho proceso un fenómeno importante que se estudia es la erosión. Los registros obtenidos por Odgaard (1987) sugieren que la erosión de las márgenes es una fuente significativa del material del sedimento para muchas corrientes; en estudios de la cuenca del Río Sacramento, de 11.5 millones de toneladas de ingreso total de sedimento, 6.8 millones (59%) provienen de la erosión marginal a lo largo del Río Sacramento.

Es común que un tramo de un río se desplace lateralmente a una franja aledaña al cauce; sin embargo, cuando se construyen estructuras aguas arriba, se altera el régimen de la corriente por lo que se desconoce la forma en que se afecta la trayectoria de la corriente aguas abajo. Por lo anterior, es necesario evaluar la extensión en la que las curvas naturales pueden desplazarse lateralmente.

En la fase de planeación del manejo de ríos, son muy útiles las simulaciones del comportamiento de los cauces; para lograr tal objetivo, se pueden emplear modelos matemáticos.

#### 1.2.- Planteamiento del problema.

Al estudiar un río se consideran principalmente la forma de la sección, la configuración del fondo incluyendo las formas de la rugosidad del fondo (dunas, rizos, etc.), la formación de barras o barrotos, el perfil longitudinal del río, el patrón del cauce; es decir, el trazo en planta (recto, trenzado o con meandros) y las zonas de inundación.

La geometría de un cauce es el resultado de la interacción entre el gasto líquido, la cantidad y el tipo del material sólido que es transportado, de las características del fondo y del material de las márgenes.

Por lo cual, es importante mencionar que en problemas relacionados con ríos no es posible aislar y estudiar una sola variable; por ejemplo, en el estudio de las curvas naturales, la variación que sufre el tirante estará en función del radio de curvatura, la velocidad del flujo, la rugosidad, etc., por lo tanto el mecanismo del flujo en un cauce y la respuesta a los cambios de las variables es complicado.

Cuando cambia el gasto líquido que escurre por las curvas naturales, el perfil del fondo varía con respecto al tiempo y después de un lapso se tiene un nuevo estado estable. Conociendo el proceso de desarrollo del depósito y la erosión (los cuales varían en rangos amplios) y conociendo la máxima profundidad de socavación, se pueden tomar medidas para proteger la margen y otras estructuras hidráulicas vecinas al área.

La simulación es una herramienta de análisis, y puede ser tan compleja como sea necesaria, su confiabilidad debe ser tan alta como lo permitan la calidad del modelo y los datos. Un modelo debe simular correctamente el fenómeno en estudio; además, debe tener la flexibilidad de incluir modificaciones en caso de mal funcionamiento.

Existen diversos criterios para la simulación numérica de los ríos, ellos dependerán de los objetivos que se persiguen; así, por ejemplo, existen modelos para la predicción de avenidas, éstos se elaboran con el fin de estudiar la onda de propagación a través de una red de canales, además permiten desarrollar estudios de control, del gasto máximo y del tiempo de arribo a diferentes puntos de la red (hidrogramas de entrada-salida), logrando con ello determinar las zonas susceptibles a la inundación.

Para el caso de la simulación, en donde se pretende conocer las variaciones que sufre la morfología de un río en un plazo grande (un año), se utiliza el criterio del gasto formativo.

Las curvas naturales se modelan en un movimiento tridimensional en función del tiempo y para un fondo móvil, y como se indicó anteriormente, no pueden ser descritas matemáticamente en detalle. Inicialmente las curvas naturales se habían estudiado bajo criterios de la geomorfología, la cual intenta describir las características físicas de los ríos, elaborando una clasificación en función de datos geológicos, un ejemplo de estos trabajos es el de Leopold (1964).

Un río excepcionalmente es recto, porque al interponer la naturaleza un gran número de obstáculos (por ejemplo las zonas rocosas, la vegetación y las zonas fácilmente erosionables) se producen perturbaciones al cauce, por lo que cambian la dirección del flujo y se desarrolla una distribución no uniforme de velocidades, existiendo zonas de depósito conocidas como barras o barrotes.

Por lo anterior, en el análisis que se lleva a cabo al resolver el sistema de ecuaciones que gobiernan el flujo, se representan dichos obstáculos por medio de perturbaciones, que se introducen al sistema y se analiza la respuesta.

Un tema que estudia la morfología de los ríos es la formación de barras, éstas puede desarrollarse en tres zonas, en la parte interna de las curvas se denominan punto-barra, las barras alternadas ocurren en los tramos rectos o bien se forman en el centro del cauce, estos elementos rugosos incrementan la resistencia al flujo.

Existe la hipótesis que la presencia de barras alternadas produce el meandreo, y ella ha sido matemáticamente examinada con el análisis de estabilidad lineal (Callander, 1969, Englund y Skovgaard 1973, Blondeaux 1985).

Así, para estudiar la formación curvilínea de los ríos, existen dos criterios los cuales están relacionados entre sí y se denominan como:

a) Teoría de Barras, la cual examina la formación de barras alternadas y la posibilidad de formar meandros.

b) Teoría de curvas, que trata con la estabilidad de las curvas y la aplicación a la migración en meandros.

El desarrollo de las barras esta íntimamente relacionado con el estudio de las curvas naturales, y existen investigaciones que tienden a unificar su tratamiento (Blondeaux, 1985).

Para las curvas naturales existen diversos criterios de estudio, algunos con muchas simplificaciones. Estos criterios pueden ser estocásticos o determinísticos, dentro de los primeros se encuentra el propuesto por Einstein (Jansen, 1979), el cual únicamente permite determinar la pendiente transversal del fondo. Con respecto a los métodos determinísticos, los principales problemas que se presentan se clasifican en:

a) Aquellos en los cuales las márgenes son resistentes a la erosión, pero cuyo fondo sea deformable, esto puede ocurrir cuando existe un sistema de protección de las orillas. Los métodos que se presentan en este trabajo se encuentran dentro de este tipo.

b) Aquellos cauces cuyo fondo y márgenes son erosionables, y por consiguiente los ríos presentan el fenómeno de migración, es decir el desplazamiento hacia aguas abajo y la traslación hacia ambos lados.

Aunque la descripción matemática de los métodos estudiados en este trabajo esta restringida por las complejas combinaciones que existen en la naturaleza, se pueden obtener resultados prácticos.

Dentro de los factores más importantes que intervienen en la representación matemática de las curvas de cauces, está el tipo de material del fondo, de los más comunes se encuentran la arcilla, la arena, la grava y los cantos rodados. El estudio de las márgenes arcillosas tiene un tratamiento diferente en cuanto a su resistencia, corrimiento, y formas de falla, ya que intervienen fenómenos fisicoquímicos (Berezowsky et al, 1992). En este trabajo se trató exclusivamente cauces con material no cohesivo, en donde la resistencia al proceso erosivo depende de las fuerzas gravitacionales.

El tratamiento de las zonas de inundación es complicado, debido a que su rugosidad es diferente a la del cauce principal; además que existen divagaciones en la dirección

del flujo, provocando transferencia de la cantidad de movimiento con el cauce principal, por lo que aún no existen métodos satisfactorios para canales compuestos en curvas naturales (Ervin, 1994).

Existe una posición conservadora al aplicar la simulación numérica, ya que es inadecuada en algunas situaciones prácticas, como son:

a) Cuando el gasto se supone constante, esto usualmente no es común, sobre todo si los ríos son intermitentes.

b) Cuando se supone que el material del fondo es uniforme, a lo largo de un cauce pueden existir zonas más resistentes a la erosión, por ejemplo una combinación de material cohesivo-friccionante.

Por lo tanto, el dar la mayor o menor importancia a estas limitaciones, estará determinada por la experiencia de cauces similares.

### 1.3.- Utilidad del trabajo.

Se presenta una alternativa para determinar las velocidades, tirantes y pendientes transversales que pueden ocurrir en las curvas de un río. La finalidad es de definir las zonas de concentración de velocidades, catalogar las zonas críticas de máxima erosión posible para tomar las medidas preventivas de seguridad que eviten los desplazamientos laterales de los márgenes o en su caso, fallas de estas.

Para que una margen cóncava esté perfectamente protegida, se debe construir un conjunto de espigones a lo largo de la curva, la metodología usualmente empleada solo predice un tirante específico de máxima socavación, sin embargo, para conocer la profundidad de desplante en un lugar definido, es necesario conocer la posible socavación que se pueda presentar, ya que esta tendrá variaciones a lo largo de las curvas del cauce. Przedwojski (1995) detectó que la máxima profundidad de socavación ocurre aguas abajo del ápice de una curva (zona del menor radio de curvatura en los meandros), y que se produce un tirante más pequeño en los espigones situados en la entrada y salida de la curva;

variación del tirante que ocurre en los espigones localizados a lo largo de la margen cóncava, ésta es muy similar al cambio que sufre el nivel del fondo debido a la curvatura del cauce cuando no existen protecciones. El modelo numérico de Odgaard (1986) que posteriormente se presentará, permite determinar los tirantes que pueden ocurrir a lo largo del cauce, con esto se puede evitar un desperdicio de estructuras que se utilizarían en caso de desplantar a la misma profundidad todos los espigones de la margen.

Como un cauce está en un proceso continuo de cambio, es recomendable conocer las expectativas a futuro de las transformaciones, como son los movimientos laterales o corrimientos hacia aguas abajo de las corrientes.

Una aplicación importante se enfoca a la migración de los meandros; ya que es conocido que éstos se encuentran en continuo cambio, y si bien existen teorías que predicen dicho movimiento desde un punto de vista geológico, una alternativa interesante para predecir el desplazamiento de una margen es aplicar las ecuaciones de la Hidráulica y en especial las de Navier Stokes.

El conocer el proceso de corrimiento de las márgenes es fundamental para realizar estudios de ingeniería como el de mantenimiento y desarrollo de proyectos futuros de infraestructura.

El modelo de Odgaard, que se analiza en este trabajo, permite determinar las velocidades medias para las líneas de corriente cerca de las orillas, y combinándolo con modelos como el de Ikeda (1981) se pueden determinar procesos de corrimiento en las márgenes.

Ikeda (1981) supone que la razón de corrimiento de la margen ( $\mu$ ), es proporcional a la diferencia entre la velocidad media para la línea de corriente cerca de la margen ( $u_b$ ) y la velocidad media a gasto máximo ( $u$ ) siendo su ecuación:

$$\mu = e (u_b - u)$$

donde  $u$  es la razón de corrimiento (m/años) y  $e$  una constante de erosión.

Odgaard (1987) al aplicar su modelo matemático y comparar dos tramos de ríos, uno con escurrimiento natural y otro sujeto a la descarga de una presa aguas arriba, reportó que ambos tramos experimentan erosión a una razón de 2 a 4 m/año. Lo anterior permite hacer pronósticos del desplazamiento en ríos.

Otro aspecto de importancia es conocer el tirante y el ancho disponibles para la navegación, en estos casos es recomendable incrementar el tirante, para permitir el libre tránsito de los barcos.

En los ríos navegables es importante que su geometría no tenga fuertes modificaciones, ya que se trata de mantener un ancho constante a lo largo de cauce. Esto se logra con la construcción de espigones a ambos lados del cauce o muros longitudinales; sin embargo, la determinación del ancho y tirante estables se determinan con las ecuaciones para tramos rectos. En este trabajo se presentan métodos que permiten conocer para un ancho específico, la variación que experimenta el tirante a lo largo de la curva.

## **CAPÍTULO 2.- ANTECEDENTES**

### **2.1.- Introducción.**

El estudio de las curvas naturales tiene por objeto determinar para las condiciones de estabilidad, los efectos que se producen a lo largo y en las secciones transversales de los cauces, ubicar las zonas susceptibles a la erosión y el depósito; además, de predecir la distribución de velocidades y los esfuerzos cortantes en el fondo. Lo anterior es útil en problemas más complicados, como son, por ejemplo, la migración de los meandros o el diseño de estructuras para protección de las márgenes.

Los cauces pueden presentar tres patrones básicos:

- a) Tramos rectos
- b) Meandros
- c) Cauces trenzados

Los tramos rectos ocasionalmente se presentan en la naturaleza, la máxima longitud que pueden desarrollar es 10 veces el ancho del cauce, ver Leopold (1964). Maza (1989) propone que dicha longitud sea tres veces el ancho.

Los meandros son tramos de ríos que en planta tienen un trazo geométrico sinuosamente regular, consisten de una serie de curvas conectadas en sus puntos de inflexión con pequeños tramos rectos.

Los cauces trenzados se forman debido a que el material se deposita, formando varios canales que se dividen y se unen sucesivamente (Leopold, 1964).

La formación de cada patrón se relaciona con las características del sedimento disponible y la variación del gasto líquido.

Las curvas naturales pueden formarse en los tres patrones anteriores, puesto que se consideran a los tramos rectos con un radio de curvatura al infinito.

El estudio de las curvas naturales se ha enfocado desde diversos criterios; por ejemplo, se han estudiado considerando el equilibrio dinámico entre el régimen hidrológico y el medio geológico (Leopold, 1964).

Para otros investigadores (Engelund, 1974; Odgaard, 1986 etc.) son más importantes las variables hidráulicas, las cuales se cuantifican utilizando parámetros numéricos, como son: el gasto formativo o dominante, la longitud del meandro, la distribución de velocidades, etc., estas variables se resumen con los valores promedios o son sintetizadas en una relación matemática, la cual se calibra con la ayuda de modelos físicos de laboratorio y de algunos parámetros hidrológicos.

Con el empleo de los modelos físicos es posible determinar en forma objetiva las características del flujo, tienen la flexibilidad de que permiten ensayar condiciones bajo las cuales un río puede trabajar; además, se pueden diseñar las mejores opciones estructurales para la protección o la rectificación de ríos.

Para estudiar las curvas naturales, la mayoría de las teorías se han calibrado en los modelos físicos de forma circular en planta (fig. 2.1), principalmente de fondo móvil y con varios radios de curvatura (Zimmermann, 1978; Falcón, 1983).

La desventaja de los modelos físicos es que no siempre es posible cumplir con las condiciones de similitud, además de requerirse amplias instalaciones con laboratorios especializados.

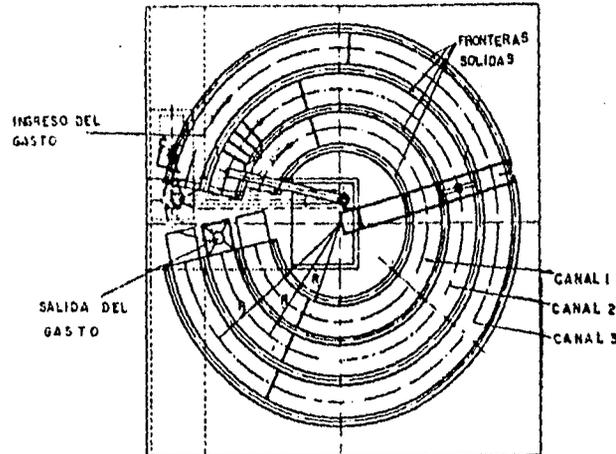


Fig. 2.1 Conjunto de canales circulares de laboratorio en planta (Zimmermann, 1978).

## 2.2.- Descripción del fenómeno.

En las curvas naturales se produce una fuerza centrífuga, ésta desarrolla un flujo secundario con una trayectoria helicoidal causando una pendiente transversal del fondo. Así, que a lo largo del cauce, las características dinámicas del flujo y la configuración topográfica del fondo continuamente varían.

Los ríos se pueden considerar compuestos de tramos rectos y curvos con diferentes radios de curvatura, a lo largo de un meandro; en los puntos de inflexión, el radio de curvatura tiende al infinito, y va disminuyendo hasta tener un radio mínimo en la zona donde se encuentra el ápice del mismo, en este lugar se presenta la mayor potencia erosiva. Las curvas naturales rectificadas, generalmente, utilizan un radio constante, en el caso de curvas compuestas, el radio debe disminuir hacia aguas abajo para evitar la convergencia del flujo (Maza, 1989).

En los tramos rectos, debido a que disminuye la velocidad principal, el material sólido se sedimenta, esto produce una pendiente longitudinal en forma escalonada (Alcerreca); sin embargo, para fines prácticos se puede considerar constante.

A lo largo de las curvas, la sección transversal es asimétrica, en los tramos rectos, el fondo tiene una pendiente transversal casi nula, ésta se va incrementando hasta obtener un valor máximo cerca del ápice de la curva. En la margen interna de la curva, el tirante es menor que el del eje central y va creciendo conforme se acerca a la parte externa de la curva (fig. 2.2).

La línea imaginaria que une los puntos de mayor tirante, a lo largo del cauce, se denomina thalweg, éste se localiza cerca de la margen cóncava.

El flujo secundario en la corriente, ocurre debido a las variaciones de presión y a la transferencia de la cantidad de movimiento en la dirección transversal en la curva, esto produce un movimiento helicoidal, el flujo secundario transporta el material del fondo del lado exterior al interior de la curva, formándose un perfil transversal inclinado, así como una distribución no uniforme del esfuerzo cortante en el fondo.

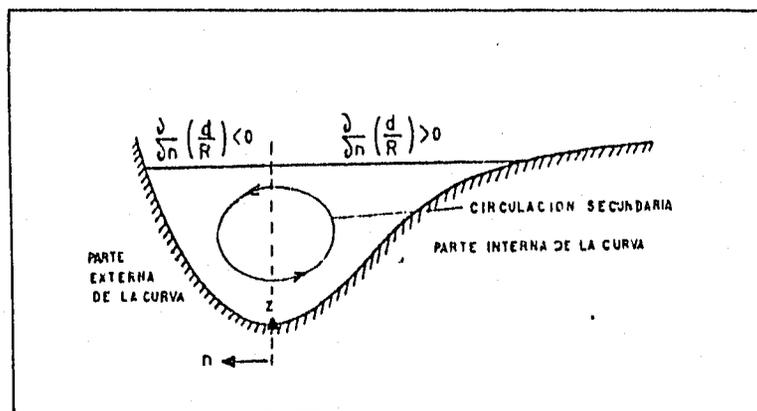


Fig. 2.2 Sección típica en una curva (Kalwijk, 1980)

Como es natural, del eje central hacia la margen cóncava, las líneas de corriente tienen una mayor convergencia, lo

que incrementa la socavación; por el contrario, en la mitad de la sección cercana a la margen convexa, existe una mayor separación de las líneas de corriente. De lo anterior se deduce que las líneas de corriente no son paralelas a las márgenes ni entre sí (fig. 2.3).

Otra característica importante que presentan las curvas naturales, es el predominio de los efectos turbulentos, pero a pesar de esta condición, se puede determinar en un punto, un valor definido de la velocidad media.

En la realidad, un río cambia constantemente, pues los gastos decrecen en determinadas épocas y posteriormente crecen por el efecto de las lluvias, aunque, la mayoría de los estudios se han desarrollado bajo las condiciones de flujo permanente y uniforme.

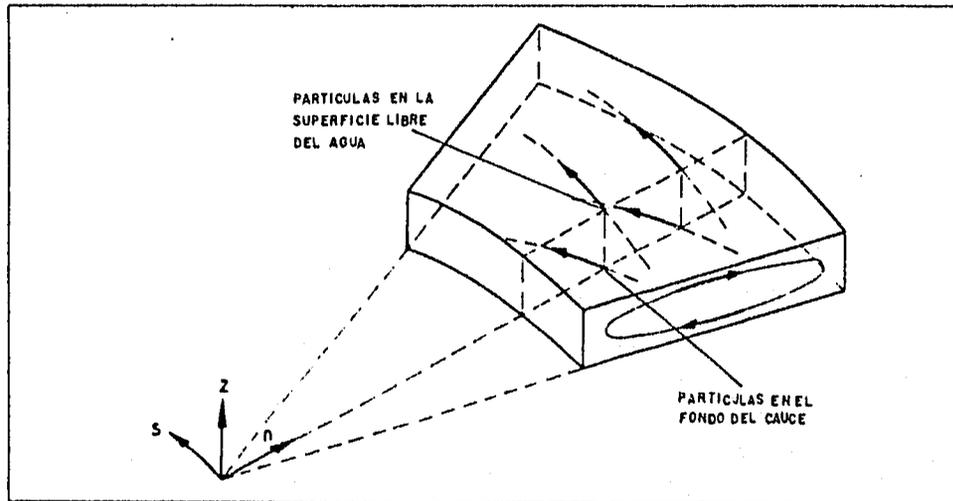


Fig. 2.3 Dirección de las trayectorias de las partículas en una curva (Jansen, 1979).

Es adecuado considerar que el flujo en las curvas del cauce se analice en estado permanente, ya que el tiempo necesario para que el flujo se adapte a un cambio, es mucho más pequeño que el tiempo necesario para que el fondo cambie. Esto permite que el estudio se realice para pequeños intervalos de tiempo, durante los cuales el fondo se supone estable, de esta forma el flujo y el transporte de sedimentos se calculan en estado permanente.

Es importante que el análisis del flujo en las curvas de los ríos, incluya la interacción de los principales factores que caracterizan al fenómeno, por ejemplo, la descripción matemática del flujo secundario y su efecto sobre el flujo principal; así también, como considerar la influencia del transporte de sedimentos.

De lo anterior, los modelos matemáticos para representar el flujo en curvas se pueden clasificar en dos grupos principales:

a) Los modelos que se basan en la integración de las características del flujo principal (velocidad, pendiente transversal del fondo, etc.) para el tirante medio del eje longitudinal del río. En estos modelos no se evalúa la acción convectiva del flujo secundario sobre el principal (Kikkawa et al, 1976; Engelund, 1974).

b) Los procedimientos que se basan en el estudio completo del flujo tridimensional, éstos representan mejor el fenómeno pues generan buenas predicciones del flujo principal y del secundario (Odgaard, 1986; Yen, 1990).

Existen diferentes criterios que permiten simplificar a los modelos numéricos, como considerar que el tirante sea pequeño en relación con el ancho, o que la pendiente del fondo sea suave, ya que por esta condición, la fricción en las márgenes será despreciable comparada con la que ocurre en el fondo.

Otro aspecto importante, es que la pendiente transversal de la superficie del agua en las curvas con un radio pequeño es considerable y debe ser valuada para el diseño de bordos, aunque en los radios de curvatura extensos, el desnivel no es considerable, lo que permite que en los modelos numéricos se suponga horizontal (Odgaard, 1986), y entonces la presión que actúa se supone que es hidrostática.

Además, para simplificar el análisis en las curvas se aplican condiciones de impermeabilidad en la frontera sólida; es decir, no se consideran las infiltraciones, además, se debe respetar el criterio que el flujo vecino a la frontera tenga velocidad nula (condición de no deslizamiento).

### 2.3.- Clasificación de los meandros.

El estudio de las curvas naturales tienen su mayor aplicación en los meandros. Básicamente existen tres tipos de meandros (Peter, 1967):

Tipo 1) Aquellos meandros en los cuales las curvas siguen la topografía de los valles.

Tipo 2) Se incluyen las curvas las cuales se forman sobre la planicie aluvial, y su pendiente no afecta la formación de tales curvas, desarrollándose libremente. La única influencia en tal desarrollo se debe a la interacción de la corriente y el material del fondo.

Tipo 3) Las curvas se forman cuando la corriente enfrenta una margen prácticamente no erosionable, llegando a formarse curvas forzadas (con  $R/B < 2$ ).

De lo anterior, el desarrollo de los radios de curvatura en los meandros está influido por las características físicas del terreno y el tipo de material en que se desenvuelven.

En los dos primeros tipos mencionados, el tirante a lo largo de la curva se incrementa gradualmente, su valor máximo se localiza cerca del ápice de la curva. En las curvas forzadas, por efecto de la aceleración centrífuga, el tirante se incrementa más rápidamente al inicio de la curva y después disminuye gradualmente.

Los meandros se consideran confinados cuando se desarrollan en un medio que los altera; por ejemplo, si el agua choca contra una margen resistente, por el contrario, los meandros libres se encuentran en materiales parcialmente sueltos y tal confinamiento no existe.

El confinamiento puede variar desde pequeñas irregularidades en las márgenes, hasta una completa distorsión en la forma de las curvas.

El grado de confinamiento se produce según las condiciones siguientes (Peter, 1967):

a) Cuando existen materiales resistentes, éstos limitan el ancho del fondo aluvial en que se desenvuelve el meandro.

b) En los valles puede existir una variedad de depósitos no consolidados, tales como materiales glaciares o de origen fluvial, dando lugar a que los tirantes de las curvas naturales sean considerablemente mayores; por lo tanto, se incrementa el desplazamiento lateral de las curvas.

c) El desarrollo de las curvas está inhibido por estructuras artificiales, las cuales se diseñan específicamente para estabilizar cursos de ríos, o por obras que indirectamente limitan tal desarrollo como carreteras y vías de ferrocarril, que en muchas ocasiones invaden las zonas de inundación.

Un fenómeno que se produce en las zonas de planicie es la migración de meandros, éstos tienden a crecer radialmente (oscilación lateral), y en ocasiones acortan tal desarrollo (abandono de meandros). En un río, al paso del tiempo se pueden encontrar huellas de curvas abandonadas, esto es consecuencia del patrón en el meandro que es irregular y su geometría cambia anualmente de acuerdo al estado de actividad del cauce. La razón de desplazamiento de las márgenes en grandes ríos es de 10-15 m/año (Jansen, 1979).

#### 2.4.- Antecedentes históricos en el estudio de las curvas naturales.

Las primeras descripciones fueron desarrolladas específicamente para meandros, y se propusieron por ingenieros británicos en la denominada "Teoría del Régimen", ésta consiste en una recopilación histórica de datos en ríos de la India (Engelund, 1972).

La "Teoría del Régimen" inicialmente relacionaba la longitud del meandro (L) y el gasto formativo (Q), por medio de la ecuación siguiente:

$$L \sim \sqrt{Q} \quad (2.1)$$

Siendo el gasto formativo aquel que origina la formación de un cauce estable, y se considera que debe permanecer

constante todo el año y transportar la misma cantidad de material sólido que el hidrograma anual.

La Tabla 2.1 presenta un resumen de las relaciones geométricas (fig.2.4) e hidráulicas de los meandros, desarrolladas por algunos investigadores dentro de la "Teoría del Régimen", donde B es el ancho del cauce, en m;  $\Omega$  es un factor que considera la zona geográfica del río, correspondiendo 0.5 para los ríos de llanura y 1.5 para los ríos de montaña,  $Q_e$  el gasto dominante o formativo, en  $m^3/s$ ;  $F_b$  el factor del fondo, y  $F_s$  el factor de margen

Tabla 2.1 Relaciones geométricas e hidráulicas de curvas en meandros.

INVESTIGADOR	RADIO (R)	LONGITUD DEL MEANDRO ( $\lambda$ )	AMPLITUD DEL MEANDRO (A)
Makkaviev	$0.004 Q_e^{1/2}/B$	—————	—————
Leopold-Wolman	$2.44 B^{1.01}$	$11 B^{1.01}$	$3.04 B^{1.1}$
Inglis	—————	$51 Q_e^{1/2}$	—————
Blench	—————	$22 (F_b/F_s)^{1/2} Q_e^{1/2}$	$L/\Omega$
Altunin	3.5 a 8 B	12 a 14 B	—————

El factor de fondo se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$F_b = F_{b0} (1 + 0.012 C)$$

siendo C la concentración del material en suspensión, en partes por millón.

Fbo se obtiene de la ecuación siguiente:

$$F_{bo} = 60.1 D_m^{1/2}$$

donde  $D_m$  es el diámetro medio de las partículas, en m.

El factor de orillas ( $F_s$ ) se obtiene con la siguiente ecuación:

$$F_s = F_{b_s}^2 / 8$$

donde  $F_{b_s}$  se obtiene en la ecuación para determinar el factor de fondo y con el diámetro del material de las orillas, cuando es arena.

Posteriormente se desarrollaron los modelos semiempíricos, uno de los primeros fue propuesto por Callander (1969), quien utilizó un modelo bidimensional, su modelo incluye la fricción interna como uno de los factores de mayor importancia. En un cauce estable, aplicó una perturbación por medio de una función senoidal. Su resultado permite calcular la longitud de onda de los meandros, aunque se ignoran los efectos de la velocidad secundaria y se utiliza un valor medio para la velocidad principal.

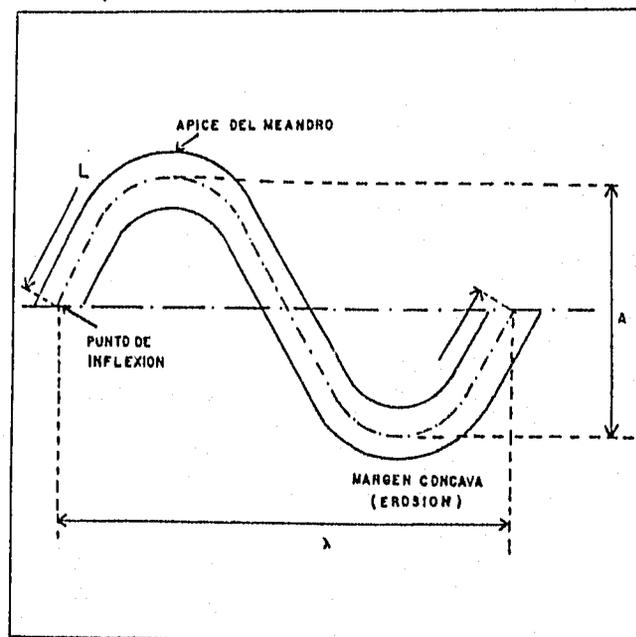


Fig. 2.4 Relaciones geométricas de un meandro

Engelund (1974) se enfoca directamente al estudio de las curvas naturales, toma en cuenta el parámetro de viscosidad turbulenta y utiliza la ley de "velocidad de deslizamiento" para determinar la componente radial de esfuerzo cortante sobre el fondo, de la cual se obtiene el arrastre sobre una partícula; además, considera una ecuación para el transporte de sedimentos e introduce una función senoidal para determinar el radio de curvatura a lo largo del meandro. Este investigador concluye que la variación de la pendiente transversal del fondo está en función del radio de curvatura y del ángulo de reposo del material.

Parker (1976) considera que la existencia del transporte de sedimentos es necesaria para que ocurra la inestabilidad del cauce, obtiene una gráfica que valora los rangos de ocurrencia de los meandros y de los cauces trenzados.

Kikkawa et al (1976) sugieren que la distribución de la velocidad en la dirección radial se puede representar como una función de corriente para un vórtice forzado en el flujo completamente desarrollado; además, detectan el fenómeno de segregación y utilizan una viscosidad turbulenta constante para valuar las velocidades.

Fredsoe (1977) separa el arrastre de fondo y el de suspensión del material sólido e introduce en su análisis la configuración del fondo para determinar la resistencia del flujo.

Kalkwijk et al (1980) introducen en su análisis un sistema coordinado curvilíneo, concluyen que la forma de la distribución principal se ve afectada por la convección del flujo secundario.

Ikeda et al (1982), su análisis está basado en las ecuaciones de Saint Venant, esto no les permite considerar al flujo secundario. Ellos proponen usar una ecuación para determinar la erosión de la margen en función del tiempo.

Falcón (1983), con la ayuda de la conservación del momento de la cantidad de movimiento obtiene relaciones de la velocidad y el esfuerzo cortante secundarios.

Odgaard (1987) propone determinar la migración de meandros con la ayuda de la ecuación de Ikeda, la cual se correlaciona con su modelo numérico.

Yen (1990) incluye la ecuación bidimensional de continuidad del sedimento, propone una ecuación que permite calcular en el tiempo, las variaciones de la pendiente transversal del fondo.

## 2.5.-Análisis dinámico de las curvas.

Las principales hipótesis que presentan la mayoría de los modelos son:

- 1.- El tirante del agua es pequeño comparado con el ancho.
- 2.- El ancho es pequeño comparado con el radio de curvatura
- 3.- El flujo es permanente y uniforme.
- 4.- El flujo está afectado principalmente por la fricción.
- 5.- La velocidad en la dirección longitudinal es predominante.
- 6.- El número de Froude es pequeño.
- 7.- Excepto en las paredes, se cumple la ecuación de continuidad (infiltración nula).

En la dirección radial de la curva, para toda la sección, la fuerza centrífuga se balancea con el gradiente de presión, sin embargo, se observa que el término de la aceleración centrífuga ( $u^2/r$ ), donde  $u$  es la velocidad en un punto y  $r$  el radio de la curva, sufrirá variaciones en la dirección ascendente, siendo nula en el fondo; mientras que, el gradiente de presiones se mantiene constante en dirección vertical, esto genera un desbalance local, es decir, la fuerza centrífuga no puede estar en equilibrio con el gradiente de presión y se produce el flujo secundario (Falcón, 1983).

El flujo secundario, en la mitad superior de la sección se transporta hacia la margen cóncava, y por los requerimientos de continuidad, en la mitad inferior de la sección, el fluido se conduce hacia la margen interna moviéndose más lentamente, este movimiento helicoidal o secundario produce una alta concentración de sedimentos en la parte interna de la curva, y por el contrario, produce erosión en la parte externa.

El proceso de socavación y depósito genera un incremento en la sinuosidad del cauce y promueve el crecimiento de la pendiente transversal del fondo.

Por lo anterior, los modelos numéricos que predicen la pendiente transversal del lecho en <sup>las</sup> curvas erosionables, se basan en el balance de fuerzas actuando sobre una partícula del fondo. El equilibrio en la pendiente transversal, se determina igualando las componentes de las fuerzas en dirección radial de los siguientes efectos:

- a) El arrastre del agua.
- b) El peso de la partícula sumergida.

Por otra parte, en las ecuaciones que gobiernan el fenómeno, cuando se analiza el orden de los términos, se desprecian los de menor orden, ya sea considerando las hipótesis iniciales o por los estudios experimentales; por ejemplo, en la parte central del cauce, las componentes de la velocidad en la dirección vertical ( $w$ ) son despreciables, ya que en esta zona la circulación no está afectada por la existencia de las paredes. De mediciones en canales de forma circular en planta, Yen (Dietrich, 1983) concluyó que la relación de las velocidades principal ( $u$ ) y transversal ( $v$ ) son del mismo orden que la relación del tirante y el radio de curvatura ( $v/u = \theta(d/r)$ ); es decir, si se compara el valor del tirante con el del radio de la curva, aquél es mucho menor, de este mismo orden son las relaciones de las velocidades.

#### **2.5.1.-Distribución de la velocidad en la dirección principal.**

En las curvas, cuando una partícula se acelera, las partículas vecinas ocupan el espacio que queda vacío, entonces se produce una convergencia local de las líneas de corriente, y como consecuencia de las velocidades. Esto genera una mayor acción erosiva en la margen y se promueve el desarrollo de los meandros. Por el contrario, al desacelerarse las partículas, chocan entre sí produciéndose un flujo divergente. De esta situación, se desarrolla una distribución irregular de las velocidades a lo largo de la sección, las velocidades se concentran en la margen externa

y cerca del fondo, y por el contrario, disminuyen en la margen interna (Aguilar, 1989).

Las velocidades en la dirección longitudinal variarán de sección en sección y en función del tiempo, aunque en los trabajos experimentales se ha llegado a determinar que en el eje central del cauce, la velocidad se mantiene prácticamente constante.

En los primeros modelos, para evaluar la distribución vertical de velocidades en la dirección principal, se utilizó la ley logarítmica de velocidades, la cual se ha encontrado que es válida aún para las fronteras muy rugosas (Engelund, 1974), esto es importante en los sitios donde el cauce presenta una mayor rugosidad (fondo con rizos). La ley logarítmica de velocidades permite desprestigiar la interacción del flujo secundario con el principal.

Posteriormente, Falcón (1983) determinó que en los ríos se ajustaba mejor la ley exponencial de velocidades, el inconveniente que presenta, es que en la frontera no se llega a cumplir tal ley, ya que como condición fundamental, las velocidades del agua y de la frontera sólida deben ser iguales, para evitar esta incongruencia, se pueden aplicar los criterios siguientes:

- 1) Considerar una capa límite que se desarrolle en el fondo. Esto es inadecuado, puesto que debido a la erosión del fondo, se desarrolla una capa límite irregular lo cual complica el análisis.

- 2) Utilizar un valor medio de la viscosidad turbulenta con el empleo de las ecuaciones de Reynolds. Esta opción es la más común en los modelos (Odgaard, 1986).

En el análisis del flujo, para una línea de corriente dada, es conveniente emplear una velocidad media ( $u$ ) correspondiente al tirante medio, con esta condición, se simplifica el análisis (Odgaard, 1986), y como la velocidad se relaciona directamente con el coeficiente de fricción, es conveniente valuar lo más acertado posible la configuración del fondo (rizos, dunas, etc.).

Como se mencionó anteriormente, en los cauces con un radio de curvatura grande, las componentes de la velocidad en las

direcciones transversal ( $v$ ) y vertical ( $w$ ) son pequeñas comparadas con las componentes de la velocidad longitudinal ( $u$ ); por lo que, en la ecuación de Reynolds, los términos no lineales ( $v \, dv/dr$ ) y ( $w \, dw/dz$ ) pueden ser despreciados (Odgaard, 1986).

#### 2.5.2.- Distribución de la velocidad secundaria.

Para las curvas con un radio entre  $2B$  y  $8B$ , la fuerza inercial del flujo secundario en dirección de la corriente es despreciable, pero en curvas con un radio menor, tal fuerza puede ser de magnitud considerable.

Aunque los términos de convección del flujo secundario son muy pequeños e inicialmente en los primeros modelos se despreciaban (Kikkawa, 1976), actúan permanentemente en el mismo sentido y sus efectos se van acumulando, por lo cual, el efecto de la convección del flujo secundario produce una deformación mayor en la distribución de la velocidad principal (fig. 2.5).

Si no se considerará la convección del flujo secundario, a lo largo de las curvas, la velocidad máxima en la dirección principal ocurriría cerca de la pared, y aguas abajo, en los tramos rectos, la distribución de la velocidad principal pronto se tornaría uniforme (Kalkwijk, 1980).

Por el efecto de convección del flujo secundario se puede obtener una explicación del porqué ocurre el cambio de posición de la velocidad máxima en una curva, además que la distribución de la velocidad no es uniforme en los tramos rectos, a una mayor distancia del punto de inflexión, es decir, donde inicia un tramo recto. Lo anterior significa que la convección del flujo secundario causa una redistribución de la energía total del flujo en la sección transversal.

Para determinar la distribución de velocidades en la dirección transversal, se ha obtenido experimentalmente una relación que equilibra la distribución de velocidades en la mitad superior y la mitad inferior de la sección del cauce (fig. 2.6).

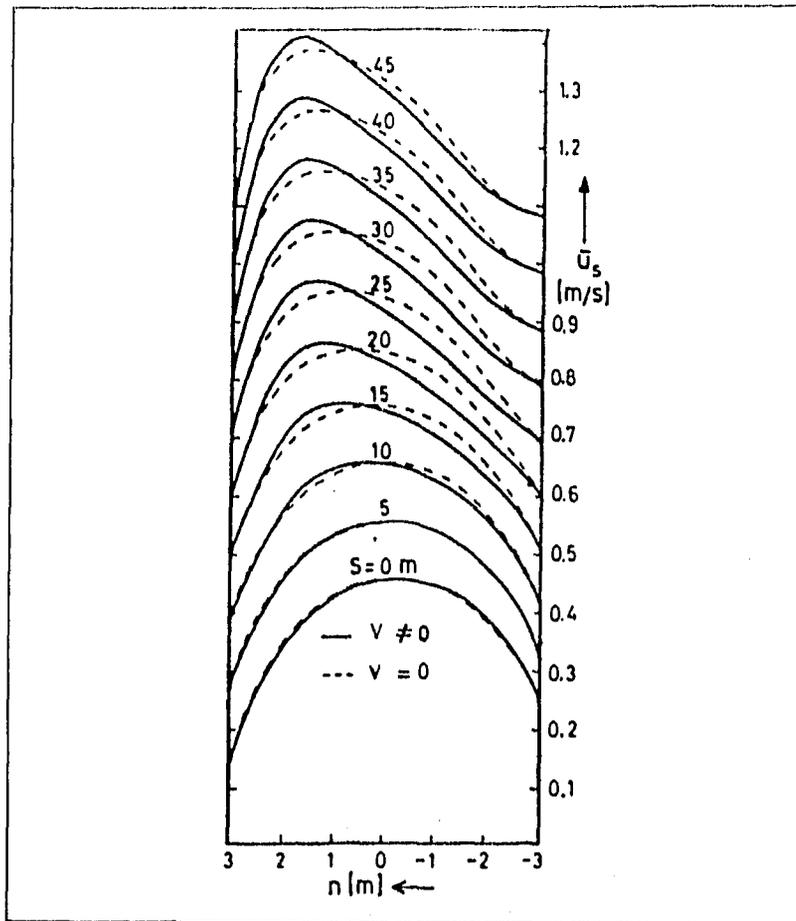


Fig. 2.5 Comparación de la distribución de velocidades principal ( $u$ ), cuando se considera el efecto del flujo secundario representado por la velocidad secundaria ( $v$ ) (Kalwijk, 1980).

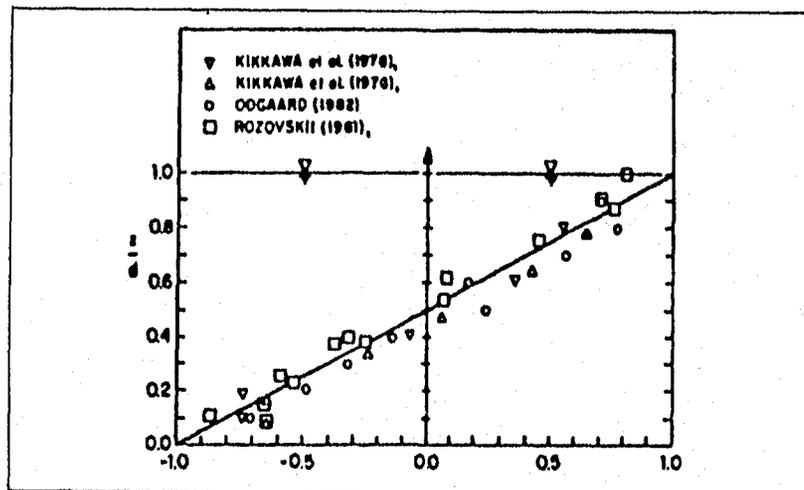


Fig. 2.6 Comportamiento de la distribución de las velocidades transversales (Odgaard, 1986).

Para calcular analíticamente la velocidad del flujo secundario ( $v$ ), se utiliza la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección transversal, ésta se emplea con la ecuación de esfuerzo cortante, la distribución de la viscosidad turbulenta (ecuación de Reynolds) y la ley exponencial de velocidades en la dirección principal (Falcón, 1983).

En las ecuaciones generales del flujo, el término de convección del flujo secundario ( $v \, du/dn$ ) es positivo en la parte interna y negativo en la parte externa de la curva, esto produce una reducción en la energía del flujo del lado interno de la curva, lo que genera la sedimentación del material sólido.

Se han hecho mediciones de la corriente secundaria y su magnitud oscila aproximadamente en el 15% de la velocidad media en la dirección principal (Kikawa, 1976), posteriormente en el capítulo VI de este trabajo se determinarán dichos porcentajes con la ayuda de algunos ejemplos.

### 2.5.3.- Pendiente transversal del fondo.

Cuando la curvatura del cauce crece progresivamente en la dirección aguas abajo, existe un aumento gradual de la fuerza centrífuga y la intensidad de la circulación transversal aumenta, esto produce que la pendiente del fondo disminuya del lado interno (en forma de playa) y crezca del lado externo de la curva.

Como la aceleración centrífuga ( $u^2/r$ ) es función de la velocidad, y ésta no se distribuye uniformemente en la dirección vertical, se ejerce un momento sobre el flujo con respecto al centroide de la sección, el cual se debe equilibrar con la componente del esfuerzo cortante en dirección radial ( $\tau_n$ ). El esfuerzo cortante se supone que está uniformemente distribuido alrededor del cauce, para lograr el equilibrio se deben incrementar las fuerzas radiales sobre la partícula del fondo, esto se consigue con un mayor aumento de la pendiente transversal del fondo.

Existen otros factores que afectan la distribución de la velocidad; por ejemplo, la rugosidad del cauce, y esto también incrementa la pendiente transversal del fondo.

De lo anterior, se pueden enunciar dos reglas generales:

- a) A mayor velocidad, mayor pendiente transversal del fondo.
- b) A menor radio, mayor pendiente transversal del fondo.

#### 2.5.4.- Distribución de los esfuerzos cortantes.

Existen dos tipos de esfuerzos en el fondo de las curvas, los esfuerzos principales que actúan en dirección de la corriente y los esfuerzos transversales actuando en la dirección secundaria.

Las condiciones de frontera que deben cumplir los esfuerzos cortantes son:

- 1) El esfuerzo cortante es nulo en la superficie del agua.
- 2) El esfuerzo cortante principal en cualquier punto del fondo, debe tener la misma dirección del vector velocidad para la dirección principal.

El esfuerzo cortante transversal o radial es pequeño al igual que las velocidades del flujo secundario. Para valuar la distribución vertical del esfuerzo cortante radial se emplea la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección radial. Esta ecuación indica que el esfuerzo cortante es igual a la suma de fuerzas causadas por el gradiente de presión radial, la aceleración centrífuga del flujo y el cambio de la cantidad de movimiento (Falcón, 1983).

Por la acción del flujo secundario, existen desviaciones de la fuerzas de arrastre en la dirección principal; además, la fuerza de gravedad produce que las partículas se desvíen un pequeño ángulo de la dirección del flujo principal (Engelund, 1974).

El ángulo de desviación ( $\delta$ ) (fig. 2.7) se determina con:

$$\tan \delta = 7 d/r \quad (2.2)$$

Entre la dirección del esfuerzo cortante y la trayectoria de la partícula existe un ángulo denominado  $\psi$ , éste se valúa en función del ángulo de reposo del material ( $\phi$ ) y de la pendiente transversal del fondo representada por el ángulo ( $\alpha$ ).

$$\tan \psi = \frac{\tan \alpha}{\tan \phi} - \tan \delta \quad (2.3)$$

La ecuación anterior es válida únicamente cuando la pendiente del fondo es pequeña comparada con el ángulo de reposo del material.

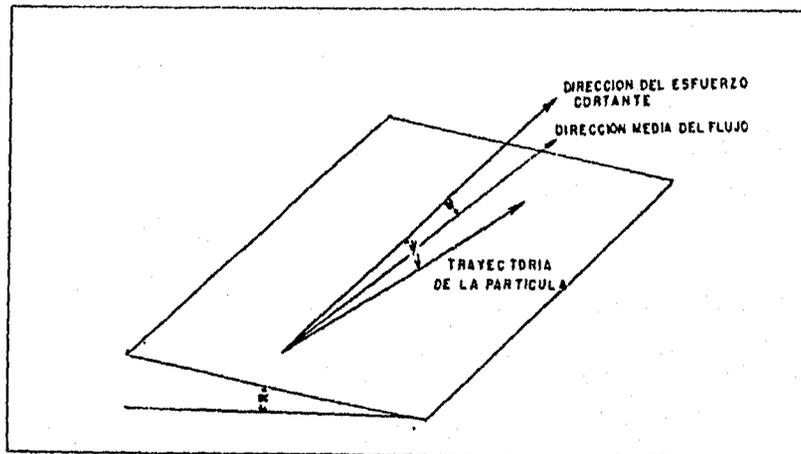


Fig. 2.7 Variación del esfuerzo cortante con respecto a la trayectoria de la partícula (Engelund, 1974).

#### 2.5.5.-Distribución del transporte del material sólido.

Uno de los problemas más importante que ocurren en las curvas naturales, es que su geometría depende de la interacción entre el flujo y el movimiento del sedimento.

Algunos investigadores han propuesto que el desarrollo de las curvas es función únicamente de las características del flujo. Sin embargo, el papel del transporte de sedimentos es importante y actúa directamente en la inestabilidad del fondo.

Las características de las curvas no solo se deben estudiar desde el punto de vista geométrico, sino también, según los efectos que tiene el transporte de sedimentos y las formas rugosas que se puedan presentar en el fondo (dunas, rizos, etc.).

Es necesario dividir el material de arrastre del fondo y el material en suspensión, ya que tienen un comportamiento dinámico diferente (Fredsoe, 1978), básicamente los modelos se centran en el primer tipo, que es el responsable de asimilar los esfuerzos cortantes, el gasto sólido transportado responde con un cierto retraso a los efectos dinámicos, puesto que antes de depositarse se encuentra saltando o es arrastrado una cierta distancia.

Debido a este retraso en la respuesta dinámica, se han elaborado estudios relacionados con la estabilidad del meandro y la migración hacia aguas abajo. Algunos investigadores, en sus modelos separan el arrastre del fondo y el de suspensión (Parker 1976). Para tomar en cuenta el material sólido, es necesario introducir una ecuación complementaria de continuidad para el sedimento, que sea capaz de estimar separadamente ambos tipos de materiales.

Como el material sólido es levantado en la parte cóncava de las curvas y se transporta hacia aguas abajo en donde se deposita en la margen convexa. Al medir la granulometría del material depositado, ésta es de un tamaño menor que aquél en donde se encontraba inicialmente. Este fenómeno se denomina "segregación".

El gasto del sedimento en la dirección longitudinal ( $q_b$ ) varía con las propiedades del sedimento. Una aproximación es suponer que el arrastre de material varíe en función de la velocidad del flujo elevada a la potencia P (Engelund, 1974).

$$q_b = \bar{q}_b (u/v)^P \quad (2.4)$$

donde  $\bar{q}_s$  es el gasto sólido en la dirección principal correspondiente a la velocidad media,  $u$  es la velocidad media en la dirección principal,  $v$  es la velocidad media en la dirección secundaria,  $P$  es un exponente que está en función de las características del sedimento y varía de 2.5 a 5.5.

Cuando se efectúa el análisis del fondo en los cauces, la ecuación de continuidad del gasto sólido está en relación directa de los esfuerzos cortantes.

## 2.6 .- Modo de perturbación en las curvas naturales.

Como la presión que se ejerce contra las orillas no es uniforme, se producen oscilaciones periódicas de una margen a la otra, esto se conoce como oscilación lateral y se genera un desbalance de fuerzas dando lugar a las sinuosidades de la corriente.

Para representar estas oscilaciones en forma analítica, se considera un cauce recto estable en el que se producen disturbios por medio de una fuerza oscilatoria periódica. Dicha fuerza tiene la forma siguiente:

$$F = F_0 \cos \omega x \quad (2.5)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la oscilación (fig. 2.8). El tipo de movimiento que representa el sistema es armónico porque en un cierto período se repite.

Para la fuerza impulsora de entrada, existirá una respuesta del sistema del mismo tipo que la entrada (fig. 2.8), donde  $p$  representa la oscilación debido a la fuerza de entrada, y  $q$  representa la trayectoria de la respuesta.

Por las características físicas del cauce existirá un estado de retraso en la respuesta, físicamente se distingue porque el material sólido sufre un retraso al depositarse, debido al cual, existe la hipótesis que los meandros se desplazan hacia las zonas más bajas (migración de

meandros), si p cruza en una distancia  $x=0$ , q lo hará en  $x=x_1$ . Se tiene que la respuesta de p esta definida por:

$$y_p = A \cos (\omega x) \quad (2.6)$$

donde A es la amplitud de la onda, la respuesta de q esta definida por:

$$y_q = A \cos (\omega (x-x_1)) \quad (2.7)$$

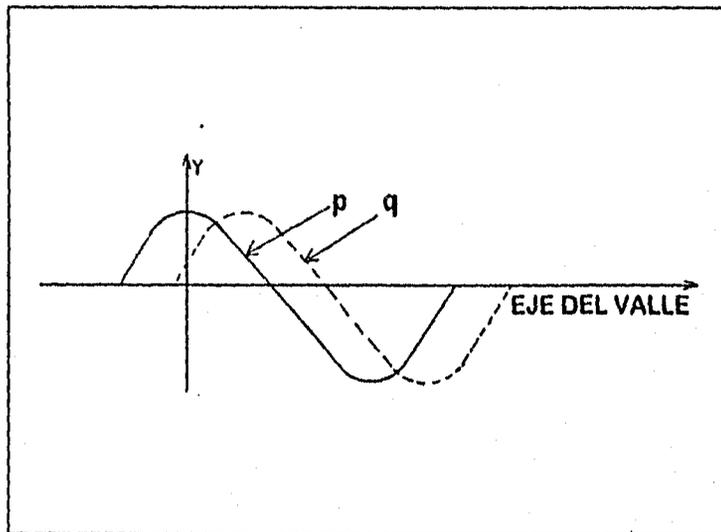


Fig. 2.8 Representación de la oscilación del cauce

Al argumento de la ecuación 2.7 se le conoce como fase y al producto  $\omega x_1$  como ángulo de fase ( $\alpha$ ). Por otra parte la misma ecuación representa la parte real en el sistema complejo de la función de Euler, se tiene entonces:

$$A \exp(i \alpha) = A (\cos (\alpha) + i \operatorname{sen} (\alpha)) \quad (2.8)$$

Fredsoe (1971) propone que en los cauces la oscilación debe ser doblemente periódica, para las direcciones longitudinal y radial, por lo cual:

$$Y = A \cos(\omega_2 x_2) \exp (i \omega_1 (x-x_1)) \quad (2.9)$$

donde el producto  $\omega_2 x_1$  es la oscilación en dirección radial, la distancia  $x_1$  se puede definir en función del producto  $Ct$ , donde  $C$  es la velocidad de migración de la perturbación del cauce y  $t$  el tiempo.

Como la frecuencia  $\omega_2$  es el número de ciclos por unidad de longitud, la longitud de la oscilación en un ciclo se determina como:

$$L = 2\pi/\omega_2 \quad (2.10)$$

Para la mitad de un ciclo completo se tiene la mitad de la longitud total de la onda, en la dirección radial  $L/2$  se define por el ancho del cauce y la oscilación es la correspondiente a los meandros (fig. 2.9).

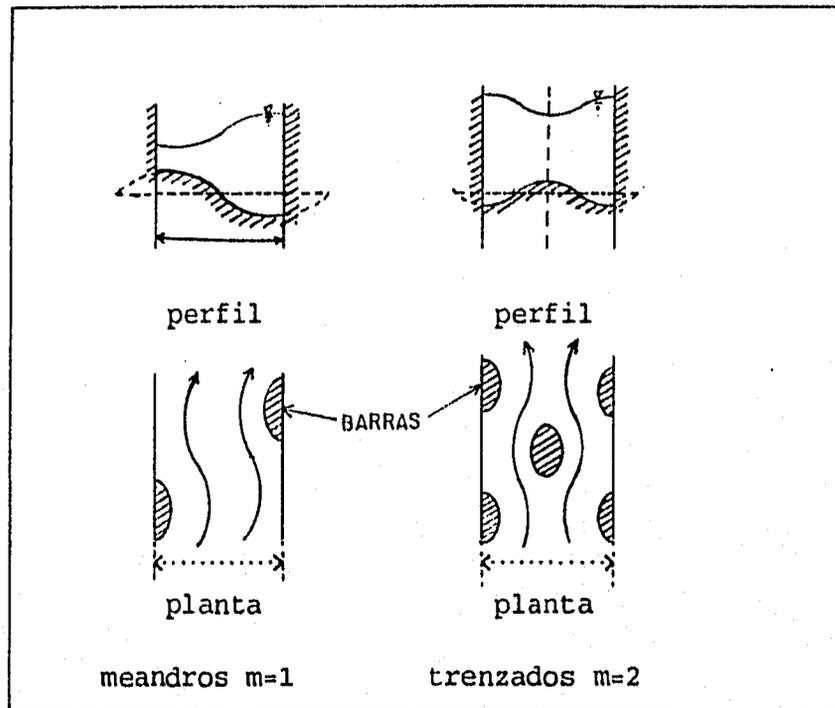


Fig. 2.9 Formas de oscilación radial (Fredsoe, 1978).

Si el número de ciclos se definen por la variable  $m$ , de la ecuación anterior para  $m$  ciclos se tiene:

$$m L = 2 B \quad (2.11)$$

y de la ecuación 2.10 se tiene:

$$B = m \pi / \omega_2 \quad (2.12)$$

Para emplear las ecuaciones anteriores, se considera un estado estable con los valores medios de las variables representativas del flujo (velocidades o gastos), dicho estado se afecta con las ecuaciones 2.9 ó 2.12 para producir perturbaciones en las direcciones longitudinal y radial del cauce.

Se tendrá entonces, que para representar el fenómeno del flujo en las curvas del cauce se emplean las siguientes ecuaciones:

- a) Las ecuaciones dinámicas de Navier Stokes.
- b) La ecuación de continuidad para las dos direcciones principal y secundaria.
- c) La ecuación de transporte de sedimentos.
- d) La ecuación que produzca inestabilidad al cauce.

## 2.7.- Métodos para determinar la profundidad de socavación en las curvas de cauces naturales.

### 2.7.1.- Método de Maza (1989).

a) Este investigador propone que el tirante medio en la parte externa de la curva ( $d_c$ ) se determine como:

$$d_c = 1.9 \left[ \frac{B}{R_c} \right]^{0.244} d_{rm} \quad (2.13)$$

Donde  $d_{rm}$  es el tirante medio aguas arriba de la curva, en m;  $B$  el ancho medio de la superficie libre, en m y  $R_c$  el radio de curvatura del eje central, en m.

Así también, se puede determinar el tirante máximo ( $d_{\max}$ ) en la curva considerando los siguientes intervalos:

si  $0 < B/R_c \leq 0.168$

$$d_{c \max} = \left[ 1.27 + 1.26 \frac{B}{R_c} \right] d_{rm} \quad (2.14)$$

si  $0.168 < B/R_c \leq 0.5$

$$d_{c \max} = \left[ 3.73 - \frac{0.38}{B/R_c} \right] d_{rm} \quad (2.15)$$

b) Cuando se conoce la sección transversal del cauce, se pueden emplear las ecuaciones presentadas más adelante, que permiten determinar en forma aproximada la sección erosionada.

El criterio se basa en el equilibrio que existe entre la velocidad media del flujo y la velocidad media máxima necesaria para que no erosione el material del fondo.

Las ecuaciones propuestas son las siguientes:

Para suelos no cohesivos

si  $0.00005 \text{ m} < D_{84} \leq 0.0028 \text{ m}$

$$ds = \left[ \frac{\alpha d_o^{5/3}}{4.7 \beta \psi D_{84}^{0.28}} \right] \frac{D_{84}^{0.03}}{0.322 + D_{84}^{0.03}} \quad (2.16)$$

si  $0.0028 \text{ m} < D_{84} \leq 0.182 \text{ m}$

$$ds = \left[ \frac{\alpha \text{ do}^{5/3}}{4.7 \beta \psi D_{84}^{0.28}} \right] \frac{D_{84}^{0.092}}{0.223 + D_{84}^{0.092}} \quad (2.17)$$

si  $0.182 \text{ m} < D_{84} \leq 1.0 \text{ m}$

$$ds = \left[ \frac{\alpha \text{ do}^{5/3}}{4.7 \beta \psi D_{84}^{0.28}} \right] \frac{D_{84}^{0.187}}{0.191 + D_{84}^{0.187}} \quad (2.18)$$

Para suelos cohesivos

$$ds = \left[ \frac{5780 \alpha \text{ do}^{5/3}}{\beta \psi \gamma_d^{1.18}} \right] \frac{\gamma_d^{0.725}}{66.28 + \gamma_d^{0.725}} \quad (2.19)$$

siendo  $\psi$  un factor que considera si el flujo lleva una cantidad apreciable de material de lavado ( $D < 0.062 \text{ mm}$ ), en caso contrario  $\psi=1$ , dicho coeficiente se determina en función de la relación siguiente:

$$\psi = 0.38 + 6.18 \times 10^{-7} \gamma_m^2 \quad (2.20)$$

donde  $\gamma_m$  es el peso específico de la mezcla agua-sedimento, en  $\text{kg/m}^3$ , considerando solamente el material de lavado.

y también:

$$\alpha = \frac{Q_d}{\mu B_e d_c^{5/3}} \quad (2.21)$$

donde

$$\beta = 0.8416 + 0.03342 \ln T \quad (2.22)$$

En la ecuación 2.16  $d_s$  es el tirante medido hasta el fondo ya socavado, en m;  $d_o$  el tirante inicial cuando se presenta el gasto de diseño para una línea de corriente específica, en m;  $D_{84}$  el diámetro correspondiente al 84 por ciento en peso menor que ese tamaño, en m;  $Q_d$  el gasto de diseño o máximo para el cual se desea calcular la erosión, en  $m^3/s$ ;  $d_m$  el tirante medio, en m;  $B_e$  el ancho efectivo de la sección, en m; si no existen obstáculos en el cauce se considera el ancho de la superficie libre;  $T$  el periodo de retorno (15 años <  $T$  < 1500 años) y  $\gamma_d$  el peso específico seco del material, en  $kg/m^3$ .

El coeficiente  $\mu$  considera las contracciones laterales del flujo, éstas se producen en las caras de los obstáculos y dicho coeficiente se determina como:

$$\mu = 1 - \frac{0.387 U}{L} \quad (2.23)$$

donde  $L$  es el claro entre dos pilas u obstáculos, en m;  $U$  es la velocidad media, en m/s, la cual se calcula con la ecuación de continuidad:

$$U = Q_d / A \quad (2.24)$$

donde  $A$  es el área de la sección, en  $m^2$ .

2.7.2.- Cálculo del tirante medio en curvas naturales con la teoría de Boussinesq (Aguilar, 1989).

Este método se basa en la similitud que existe en las pérdidas que por fricción sufren los codos de tuberías.

Boussinesq propone la siguiente ecuación para determinar el tirante medio en la curva:

$$d_c = d_{rm} ( 1 + (\alpha/\beta) (B/R_c)^{1/2} ) \quad (2.25)$$

Donde  $d_{rm}$  es el tirante medio en el tramo recto aguas arriba, en m;  $\alpha$  es un coeficiente de corrección y  $\beta$  el coeficiente de corrección de Boussinesq.

La Tabla 2.2 presenta los valores de  $\alpha/\beta$  en función de  $B/R_c$ , obtenidos experimentalmente.

Tabla 2.2 Valores comunes de  $\alpha/\beta$  (Aguilar, 1989)

$B/R_c$	$\alpha/\beta$
0.16	0.6
0.20	0.6
0.25	0.65
0.33	0.75
0.50	0.85
0.70	2.00
1.00	2.00

2.8.- Métodos para determinar la pendiente transversal en la superficie del agua.

Algunos investigadores han propuesto que la pendiente transversal de la superficie del agua en las curvas, puede ser considerable, y su valor puede ser determinado en función de la distribución de velocidades; enseguida se presentan algunos criterios.

a) Criterio de Woodward

$$\Delta z = \alpha \left[ \frac{U^2}{g R_c} \right] B \quad (2.26)$$

Donde  $\Delta z$  es la sobreelevación de la superficie del agua, en m;  $U$  la velocidad media en la sección, en m/s;  $\alpha$  el coeficiente de Coriolis (aproximadamente 1.2),  $R_c$  el radio de curvatura, en m;  $B$  el ancho de la superficie libre, en m y  $g$  la aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$ .

En el caso de suponer una distribución de velocidad parabólica, Woodward propone la ecuación siguiente:

$$\Delta z = \frac{q}{4g} \left[ \frac{U^2}{3B} - \frac{16 R_c^3}{B^3} + \left[ \frac{4 R_c^2}{B^2} - 1 \right]^2 \ln \left[ \frac{2 R_c + B}{2 R_c - B} \right] \right] \quad (2.27)$$

donde  $q$  es el gasto específico del cauce; es decir, el gasto por unidad de ancho del cauce, en  $m^3/s/m$ .

b) Criterio de Drinker (Shen, 1979), este autor propone de los resultados experimentales de Shrukry, que la distribución de velocidades se represente en función de un vórtice libre, y que la sobreelevación puede calcularse como:

$$\Delta z = \frac{U^2 B}{g R_c} \left[ \frac{1}{1 - (B/(2 R_c))^2} \right] \quad (2.28)$$

## 2.9.- Método de Engelund (1974)

### 2.9.1.- Distribución de velocidades

Su método está referido a un sistema cilíndrico, propone que la distribución de velocidades para las direcciones  $s$  y  $n$ , en flujo completamente desarrollado se determine con:

Dirección  $n$

$$v = \frac{U' d_c}{R_c} f(z/d_c) \quad (2.29)$$

Dirección  $s$

$$u = U' (R_c/R)^{0.5} \phi(z/d_c) \quad (2.30)$$

donde  $v$  y  $u$  son las velocidades en dirección  $n$  y  $s$  respectivamente, en m/s;  $U'$  es la velocidad medida en campo para cada línea de corriente, en m/s;  $R$  es el radio local de curvatura, en m;  $d_c$  es el tirante medio en la sección, en m;  $R_c$  el radio de curvatura al eje central, en m;  $f(z/d_c)$  y  $\phi(z/d_c)$  son funciones las cuales se determinan como:

$$\phi(\zeta) = \left[ 1 - 6.5 \frac{u^*}{U_m} \zeta^2 \right] \quad (2.31)$$

y la función  $f(z/d_c)$  se determina como:

$$f(\zeta) = \left[ \frac{1}{2} \zeta^2 (\alpha-1) + \frac{1}{6} \beta \zeta^4 - \frac{1}{30} \beta^2 \zeta^6 + K \right] \frac{d_c U_0}{\epsilon_0} \quad (2.32)$$

donde  $\zeta$  es la variable adimensional  $\zeta=z/d_c$ ,  $U_0$  es la velocidad medida en la superficie libre del agua,  $K$  una constante de integración la cual se determina por:

$$K = \frac{1}{6} (1 - \alpha) - \frac{1}{30} \beta + \frac{1}{210} \beta^2 \quad (2.33)$$

Siendo

$$\beta = 6.5 u^*/U \quad (2.34)$$

El coeficiente  $\alpha$  esta definido por:

$$\alpha = \frac{1 - \beta + (3/5) \beta^2 - (1/7) \beta^3}{1 - (1/3) \beta} \quad (2.35)$$

Engelund propone que la velocidad de corte se determine como:

$$u^* = (g d S_0 (R_c/R))^{1/2} \quad (2.36)$$

Además, el coeficiente de la viscosidad turbulenta ( $\epsilon_0$ ) es:

$$\epsilon_0 = \frac{0.077 u^* d_c}{(R_c/R)^{1/2}} \quad (2.37)$$

2.9.2.- Determinación del tirante para una línea de corriente y sección dada.

Engelund propone que la variación del tirante se determine como:

$$d = \frac{\alpha U^2 R_c}{g R} \quad (2.38)$$

2.9.3.- Determinación de la pendiente transversal.

En el caso de meandros, si se aplica la función senoidal se tiene:

$$\frac{d}{d_c} = \left[ 1 + \frac{n}{R_0} \cos \left[ \frac{2 \pi s}{L} \right] \right]^{7 \tan \Phi} \quad (2.39)$$

Donde  $R_0$  es el radio mínimo del meandro, en m;  $L$  la longitud del meandro, en m;  $n$  es la distancia medida transversalmente a partir del eje central, en m;  $\Phi$  el ángulo de fricción dinámica del material y  $s$  es la distancia medida longitudinalmente hasta la sección en estudio, en m.

2.9.4.- Segunda aproximación de Engelund (1974)

La velocidad media en la dirección principal, para una línea de corriente específica se calcula como:

$$u = \bar{U} (1 + u') \quad (2.40)$$

Así también, el tirante es:

$$d = d_c(1 + \eta) \quad (2.41)$$

donde  $u$  es la velocidad media para una línea de corriente, en m/s;  $\bar{U}$  la velocidad media en la sección, en m/s;  $u'$  una perturbación del sistema,  $d$  el tirante para la línea de corriente en estudio, en m;  $d_c$  el tirante medio en la sección, en m y  $\eta$  un coeficiente de perturbación.

Los coeficientes  $\eta$  y  $u'$  se determinan con las ecuaciones siguientes:

$$\eta = n \frac{7 \tan \Phi}{R_{\text{máx}}} \cos \left[ \frac{2\pi s}{L} \right] \quad (2.42)$$

$$u' = n \left[ a \sin \frac{2\pi s}{L} + b \cos \frac{2\pi s}{L} \right] \quad (2.43)$$

donde  $R_{\text{máx}}$  es el radio máximo de curvatura, en m;  $a$  y  $b$  son constantes, las cuales se definen:

$$a = \frac{\frac{f}{2d_c} \frac{7 \tan \Phi}{R} \frac{2\pi}{L} + \frac{f}{d_c} \frac{2\pi}{L R}}{\left[ \frac{f}{d_c} \right]^2 + \left[ \frac{2\pi}{L} \right]^2} \quad (2.44)$$

Y también:

$$b = \frac{\frac{7 \tan \Phi}{R} \left[ \frac{f}{d_c} \right]^2 - \frac{1}{R} \left[ \frac{2\pi}{L} \right]^2}{\left[ \frac{f}{d_c} \right]^2 + \left[ \frac{2\pi}{L} \right]^2} \quad (2.45)$$

El coeficiente  $f$  es el coeficiente de fricción de Darcy, se puede aproximar como:

$$f = 8 (u^*/U)^2 \quad (2.46)$$

### 2.10.- Método de Zimmermann y Kennedy (1978)

Estos autores proponen la siguiente ecuación para determinar la pendiente transversal:

$$St = \alpha \frac{(m+1)}{2m(m+2)} \frac{d}{R_c} F_D^2 \quad (2.47)$$

Donde  $\alpha$  considera la relación entre las áreas de la partícula y una esfera;  $F_D$  el número de Froude y  $m$  el parámetro de fricción el cual se puede determinar como:

$$m = \kappa C/g^{0.5}$$

donde  $\kappa$  es la constante de Von Karman igual a 0.4;  $C$  el coeficiente de Chezy y  $g$  la aceleración de la gravedad; en  $m/s^2$ .

### 2.11.- Método de Kikkawa, Ikeda y Kitagawa (1976).

#### 2.11.1.- Determinación de la distribución de velocidades.

Estos investigadores proponen la siguiente ecuación que determina la distribución de velocidades en la dirección radial.

$$\frac{v}{U} = f^2 \frac{d_c}{R} \frac{1}{\kappa} \left[ F_A(\epsilon) - \frac{1}{\kappa} \frac{u^*}{U} F_B(\epsilon) \right] \quad (2.48)$$

Donde  $U$  es la velocidad media en la sección transversal, en  $m/s$ ;  $d_c$  el tirante medio en la sección, en  $m$ ;  $\kappa$  la constante de Von Karman igual a 0.4;  $R$  el radio local de la curva, en  $m$ ;  $u^*$  la velocidad de corte, en  $m/s$ ;  $F_A(\epsilon)$  y  $F_B(\epsilon)$  son funciones de  $\epsilon$ , siendo  $\epsilon = 1+z/d$ , donde  $z$  es la

profundidad al punto en estudio, medida a partir de la superficie libre, en m; y d el tirante del agua, dichas funciones se determinan como:

$$F_A(\epsilon) = -15 (\epsilon^2 \ln \epsilon - 0.5 \epsilon^2 + 0.277) \quad (2.49)$$

$$F_B(\epsilon) = 7.5(\epsilon^2 \ln^2 \epsilon - \epsilon^2 \ln \epsilon + 0.5 \epsilon^2 - 0.3519) \quad (2.50)$$

el coeficiente f toma en cuenta la condición del gasto nulo en la frontera sólida, su valor se determina mediante las ecuaciones siguientes:

$$\text{sí } -0.4 \leq n/B \leq 0.4 \quad f=1 \quad (2.51)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{sí } -0.5 \leq n/B \leq -0.4 \\ \quad \quad \quad \delta \\ \quad \quad \quad 0.4 \leq n/B \leq 0.5 \end{array} \right\} f= 5(1-2n/B) \quad (2.52)$$

donde n es la distancia transversal en la sección medida a partir del eje central, en m.

#### 2.11.2.- Determinación de la pendiente transversal del fondo.

Del equilibrio de fuerzas que se ejercen en una partícula del fondo, estos autores obtienen la siguiente ecuación que determina la variación del tirante con respecto al tirante medio.

$$\frac{d}{d_c} = \exp \left[ \frac{1}{2} A \left[ \frac{R^2}{R_c^2} - 1 \right] \right] \quad (2.53)$$

Donde d es el tirante local, en m; d<sub>c</sub> el tirante medio, en m; R el radio de curvatura local, en m y R<sub>c</sub> el radio de curvatura del eje central, en m.

El coeficiente A se determina con la ecuación siguiente:

$$A = - \left[ \frac{3 \mu C_D}{4 (1 + \mu C_L / C_D)} \right]^{1/2} \frac{u^*}{\left[ ((\rho_s / \rho) - 1) D_m g \right]^{1/2}} \frac{\lambda_0 U}{\kappa U^*} F(0) \quad (2.54)$$

El coeficiente de fricción ( $\mu$ ) se ha medido experimentalmente y es igual a 0.43;  $\lambda_0$  el coeficiente de protección (0.592);  $\rho_s$  la densidad del material sólido, en  $\text{kg s}^2/\text{m}^4$ ;  $\rho$  la densidad del agua, en  $\text{kg s}^2/\text{m}^4$ ;  $D_m$  el diámetro medio de las partículas, en m;  $C_L$  el coeficiente de sustentación (0.34),  $C_D$  el coeficiente de arrastre igual a 0.4,  $F(0)$  corresponde a  $\varepsilon=0$  de las ecuaciones 2.49 y 2.50, por lo que se reduce a:

$$F(0) = 4.167 / \sqrt{C_f} - 6.6 \quad (2.55)$$

$C_f$  es un factor que considera las pérdidas por fricción y es igual a:

$$C_f = u^{*2} / u^2 = g / C^2 \quad (2.56)$$

donde C es el coeficiente de Chezy.

### CAPÍTULO 3.- Modelo numérico de Odgaard.

#### 3.1.- Conceptos básicos.

El modelo parte de las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema curvilíneo, con el eje  $s$  en dirección de la línea central de flujo, el eje  $n$  ortogonal al anterior y en sentido positivo hacia la margen cóncava y el eje  $z$  en dirección normal al fondo del cauce y positivo en sentido ascendente.

Antes de iniciar con el desarrollo del modelo se presentan los siguientes conceptos útiles en sistemas coordenados curvilíneos.

Se define un punto  $p$  referido por un vector de posición  $r$  (fig. 3.1), el cual es función de las superficies  $r=r(\phi, \psi, z)$ , dichas superficies definen las líneas coordenadas  $s, n$  y  $z$  respectivamente, si se traza un vector tangente en  $p$  a la línea  $s$  se determina un vector  $dr/d\psi$ , el vector unitario en dirección y sentido de  $dr/d\psi$  es:

$$\vec{e}_1 = \frac{dr/d\psi}{\left| dr/d\psi \right|} \quad (3.1.a)$$

Se pueden determinar análogamente para los demás ejes coordenados los vectores unitarios siguientes:

$$\vec{\varepsilon}_2 = \frac{dr/d\phi}{|dr/d\phi|} \quad \vec{\varepsilon}_3 = \frac{dr/dz}{|dr/dz|} \quad (3.1.b)$$

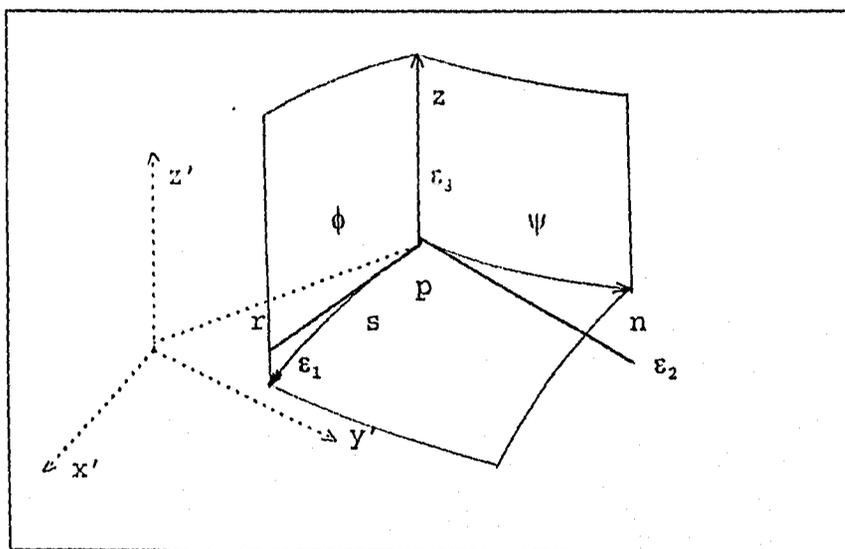


Fig. 3.1 Sistema curvilíneo ortogonal

La magnitud del vector  $dr/d\psi$  se denomina factor de escala ( $l_1$ ), se tiene entonces para los tres ejes coordenados y considerando que el eje  $z$  es lineal ( $l_3=1$ ), por lo tanto:

$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{dr/d\psi}{l_1} \quad \vec{\varepsilon}_2 = \frac{dr/d\phi}{l_2} \quad \vec{\varepsilon}_3 = dr/dz \quad (3.2)$$

Se define a la diferencial total del vector  $\vec{dr}$  como:

$$d\vec{r} = \frac{dr}{d\psi} d\psi + \frac{dr}{d\phi} d\phi + \frac{dr}{dz} dz \quad (3.3)$$

Para un arco de curvatura la diferencial de longitud (dS) se define como:

$$dS^2 = dr \cdot dr = (l_1 \varepsilon_1 d\psi + l_2 \varepsilon_2 d\phi + \varepsilon_3 dz) (l_1 \varepsilon_1 d\psi + l_2 \varepsilon_2 d\phi + \varepsilon_3 dz)$$

donde:

$$dS^2 = l_1^2 d\psi^2 + l_2^2 d\phi^2 + dz^2$$

Siendo entonces los componentes del vector dS:

$$ds = l_1 d\psi \quad dn = l_2 d\phi \quad dz = dz \quad (3.4)$$

La variación de cualquier función F (por ejemplo la velocidad), con respecto al sistema coordenado será:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{dF}{l_1 d\psi} \quad \frac{dF}{dn} = \frac{dF}{l_2 d\phi} \quad \frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dz} \quad (3.5)$$

Se define también que la curvatura es el inverso del radio de curvatura, Rouse (1959) propone que geoméricamente existe una variación en la dirección s cuando n diverge e inversamente y que los radios de curvatura se representan como:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{l_1 l_2} \frac{dl_1}{d\phi} \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{l_1 l_2} \frac{dl_2}{d\psi} \quad (3.6)$$

### 3.2.- Ecuación de Navier-Stokes.

Con lo anterior se puede representar la ecuación de Navier-Stokes en un sistema curvilíneo, partiendo de la ecuación general como:

$$\frac{dV}{dt} - V \cdot \nabla w + \frac{1}{2} \nabla(V \cdot w) = -\text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \Omega\right) + v(\text{grad}(\text{div } V) - \text{rot } w) \quad (3.7)$$

El modelo de Odgaard propone las siguientes hipótesis lo que permitirá reducir la ecuación anterior:

- 1) El flujo es permanente, se elimina el primer término de lado izquierdo.
- 2) El flujo es irrotacional, se elimina el último término del lado derecho.
- 3) El flujo es incompresible  $\text{div } V = 0$

Así, la ecuación 3.7 se desarrolla para el sistema curvilíneo (Rouse), según las siguientes direcciones  $s$  y  $n$  como:

Dirección  $s$

$$\begin{aligned} \frac{u}{l_1} \frac{du}{d\psi} + \frac{v}{l_2} \frac{dv}{d\phi} + \frac{w}{dz} \frac{dw}{dz} + \frac{uv}{l_1 l_2} \frac{dl_1}{d\phi} + \frac{uw}{l_1} \frac{dl_1}{dz} - \frac{v^2}{l_1 l_2} \frac{dl_2}{d\psi} - \frac{w^2}{l_1} \frac{dl_3}{d\psi} = \\ = \frac{1}{l_1} \frac{d}{d\psi} \left[ \frac{p}{\rho} + \Omega \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dirección  $n$

$$\begin{aligned} \frac{u}{l_1} \frac{dv}{d\psi} + \frac{v}{l_2} \frac{dv}{d\phi} + \frac{w}{dz} \frac{dv}{dz} + \frac{wv}{l_2} \frac{dl_2}{dz} + \frac{uv}{l_1 l_2} \frac{dl_2}{d\psi} - \frac{w^2}{l_2} \frac{dl_3}{d\phi} - \frac{u^2}{l_1 l_2} \frac{dl_1}{d\phi} = \\ = \frac{1}{l_1} \frac{d}{d\phi} \left[ \frac{p}{\rho} + \Omega \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Considerando las ecuaciones 3.4, 3.5 y 3.6 se tiene:

Dirección  $s$

$$\begin{aligned} \frac{u}{ds} \frac{du}{ds} + \frac{v}{dn} \frac{dv}{dn} + \frac{w}{dz} \frac{dw}{dz} + \frac{uv}{R_1} + \frac{uw}{R_1 dz} - \frac{v^2}{R_2} - \frac{w^2}{ds} \frac{dl_3}{ds} = \\ = \frac{d}{ds} \left[ \frac{p}{\rho} + \Omega \right] \end{aligned}$$

Dirección n

$$\frac{u dv}{ds} + \frac{v dv}{dn} + \frac{w dv}{dz} + \frac{wv ds dl_2}{R_2} + \frac{uv}{R_2} - \frac{w^2 dl_3}{l_2 d\phi} - \frac{u^2}{R_1} =$$

$$= \frac{d}{dn} \left[ \frac{p}{\rho} + \Omega \right]$$

El valor del radio ( $R_2$ ) en la dirección n tiende a infinito, el factor de escala  $l_3$  es igual a la unidad, entonces  $dl_3=0$  y la variación de la velocidad v con respecto a las direcciones n y z se puede eliminar, lo cual reduce las ecuaciones anteriores a:

Dirección s

$$\frac{u du}{ds} + \frac{v du}{dn} + \frac{w du}{dz} + \frac{uv}{R_1} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{p}{\rho} + \Omega \right] \quad (3.10)$$

Dirección n

$$\frac{u dv}{ds} - \frac{u^2}{R_1} = \frac{d}{dn} \left[ \frac{p}{\rho} + \Omega \right] \quad (3.11)$$

La pendiente de la superficie del agua es casi horizontal, por lo que se puede suponer que el gradiente de presión es hidrostático, por lo cual:

Dirección s

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\gamma S s)}{ds} = S g \quad (3.12)$$

Dirección n

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dn} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\gamma S r s)}{dn} = S r g \quad (3.13)$$

Donde S es la pendiente longitudinal de la superficie del agua, g la aceleración de la gravedad y Sr la pendiente transversal.

La pérdida de energía se debe principalmente a efectos de fricción y los esfuerzos que se generan corresponden solo a efectos turbulentos (se desprecian efectos viscosos), el esfuerzo cortante debido a la turbulencia (isotrópica) se representa por:

$$\tau_s = \epsilon \frac{du}{dz} \quad \tau_v = \epsilon \frac{dv}{dz} \quad (3.14)$$

Donde  $\epsilon$  es el factor de viscosidad turbulenta (eddy), no existe información referente a su valor en curvas, por lo que se aplica la ecuación correspondiente a cauces rectos:

$$\epsilon = \kappa u^* z (1 - z/d) \quad (3.15)$$

Siendo  $\kappa$  la constante de Von Karman,  $u^*$  la velocidad de corte y d el tirante del agua, sustituyendo las ecuaciones anteriores en 3.10 y 3.11 se tiene:

Dirección s

$$\frac{u}{ds} \frac{du}{ds} + \frac{v}{dn} \frac{dv}{dn} + \frac{w}{dz} \frac{dw}{dz} + \frac{uv}{R_1} = g S + \frac{d}{dz} \left[ \epsilon \frac{du}{dz} \right] \quad (3.16)$$

Dirección n

$$\frac{u}{ds} \frac{dv}{ds} - \frac{u^2}{R_1} = g S_r + \frac{d}{dz} \left[ \epsilon \frac{dv}{dz} \right] \quad (3.17)$$

### 3.3.- Distribución de velocidades en la dirección principal

Según Prandtl, la variación de la velocidad principal u evaluada en la dirección vertical se puede determinar con la siguiente ley:

$$\frac{1}{u^*} du = \frac{1}{\kappa} \frac{dz}{z}$$

De donde:

$$\frac{du}{dz} = \frac{u^*}{\kappa z}$$

La velocidad en la dirección principal  $s$  (ec. 3.16) se determina al nivel de la superficie del agua (subíndice  $s$ ). Con el valor de  $\varepsilon$  (ec. 3.15), considerando que la velocidad  $w_s$  es despreciable, de la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{u_s du_s}{ds} + \frac{v_s du_s}{dn} + \frac{u_s v_s}{r} = g S + \frac{d}{dz} \left[ \kappa u^* z (1 - z/d) (u^*/\kappa z) \right]$$

Reduciendo términos:

$$\frac{u_s du_s}{ds} + \frac{v_s du_s}{dn} + \frac{u_s v_s}{r} = g S - \frac{u^{*2}}{d} \quad (3.19)$$

Para evaluar el perfil de velocidades en la dirección principal se considera la "Ley Potencial de velocidades". Kalkwijk y De Vriend (1980) proponen la distribución de velocidades logarítmica; sin embargo, la primera se ajusta mejor a los ríos.

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{m+1}{m} \left[ \frac{z}{d} \right]^{1/m} \quad (3.20)$$

Siendo  $m$  el parámetro de fricción y es equivalente a:

$$m = \kappa \bar{u}/u^* = \kappa (8/f)^{0.5} = \kappa C/(g)^{0.5} \quad (3.21)$$

Donde  $C$  es el coeficiente de Chezy y  $f$  el factor de fricción de Darcy.

La ecuación 3.20 se evalúa en la superficie libre del agua ( $z = d$ ) como:

$$\frac{u_b}{\bar{u}} = \frac{m+1}{m}$$

O también:

$$u_b = \bar{u} (m+1)/m \quad (3.22)$$

Nótese que el valor medio de  $\bar{u}$  es para una sección en particular, pero sufrirá variaciones a lo largo del cauce. Las ecuaciones 3.21 y 3.22 se sustituyen en la ecuación 3.19, se tiene entonces:

$$\frac{\bar{u}(m+1)(m+1)}{m} \frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{v_b(m+1)}{m} \frac{d\bar{u}}{dn} + \frac{\bar{u}(m+1)}{m} \frac{v_b}{r} = g S - \frac{\kappa^2 \bar{u}^2}{m^2 d}$$

como el término:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\bar{u}^2)}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(\bar{u} \cdot \bar{u})}{ds} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\bar{u} d\bar{u}}{ds} + \frac{\bar{u} d\bar{u}}{ds} \right] = \bar{u} \frac{d\bar{u}}{ds}$$

se tiene la ecuación:

$$\frac{1}{2} \frac{(m+1)^2}{m^2} \frac{d\bar{u}^2}{ds} + \frac{\kappa^2 \bar{u}^2}{m^2 d} = g S - \frac{(m+1) v_b}{m} \left[ \frac{\bar{u}}{r} + \frac{d\bar{u}}{dn} \right] \quad (3.23)$$

A lo largo del eje del cauce se han determinado experimentalmente los valores de  $\bar{u}$  y  $d$  y son prácticamente constantes, además, si el flujo se considera uniforme  $d/ds=0$  y  $d/dn=0$ , la ecuación 3.23 se reduce a:

$$\frac{\kappa^2 \bar{u}^2}{m^2 d} = g S - \frac{u_b v_b}{r} \quad (3.24)$$

En la línea central (subíndice c), la fuerza debida a la aceleración centrífuga en la curva está equilibrada con el gradiente piezométrico, entonces:

$$\frac{\kappa^2 \bar{u}_c^2}{m^2 d_c} = g S - g S'_c \quad (3.25)$$

En la ecuación anterior las variables del lado izquierdo son independientes de su posición, por lo cual se puede igualar con la ecuación 3.23, siendo entonces:

$$\frac{1}{2} \frac{(m+1)^2 d\bar{u}^2}{m^2 ds} + \frac{\kappa^2 \bar{u}^2}{m^2 d} = g S - g S'_c \quad (3.26)$$

O también:

$$\frac{1}{2} \frac{(m+1)^2 d\bar{u}^2}{m^2 ds} + \frac{\kappa^2 \bar{u}^2}{m^2 d} = \frac{\kappa^2 \bar{u}_c^2}{m^2 d_c} \quad (3.27)$$

Dividiendo entre  $\bar{u}_c^2$  e introduciendo el parámetro adimensional de longitudes ( $d\sigma = (1/b)ds$ ) se tiene:

$$\frac{1}{2} \frac{(m+1)^2 d\bar{u}^2}{m^2 \bar{u}_c^2 d\sigma b} + \frac{\kappa^2 \bar{u}^2}{m^2 d \bar{u}_c^2} = \frac{\kappa^2}{m^2 d_c}$$

Agrupando términos:

$$\frac{d\bar{u}^2}{\bar{u}_c^2 ds} + \frac{2 b \kappa^2 d_c \bar{u}^2}{(m+1)^2 d_c d \bar{u}_c^2} = \frac{2 b \kappa^2 m^2}{(m+1)^2 d_c m^2} \quad (3.28)$$

Se define el coeficiente G como:

$$G = \frac{2 b \kappa^2}{(m+1)^2 d_c} \quad (3.29)$$

La ecuación 3.28 queda finalmente:

$$\frac{1}{d\sigma} \frac{d\bar{u}^2}{\bar{u}_c^2} + G \frac{d_c}{d} \frac{\bar{u}^2}{\bar{u}_c^2} = G \frac{r_c}{r} \frac{m^2}{m_c^2} \quad (3.30)$$

Se puede emplear un parámetro adimensional de velocidades  $\mu = (u/u_c)^2$ , además de estudios experimentales se ha demostrado que el parámetro  $m$  no varía significativamente, por lo cual se puede considerar constante ( $m=m_c$ ), entonces:

$$\frac{d\mu}{d\sigma} + G \frac{d_c}{d} \mu = G \frac{r_c}{r} \quad (3.31)$$

#### 3.4.-Distribución transversal de las velocidades.

La distribución de velocidades en la dirección  $n$  se evalúa con la ecuación 3.17, al nivel de la superficie libre del agua ( $z=d$ ), dividiendo entre  $u_b$  y considerando que la velocidad instantánea se compone de una velocidad media más un incremento de velocidad ( $v = \bar{v} + v'_s$ ) se obtiene:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} + \frac{dv'_s}{ds} - \frac{u_b}{r} = \frac{g S_r}{u_b} + \frac{1}{u_b} \frac{d}{dz} \left[ \varepsilon \frac{dv}{dz} \right]$$

siendo entonces:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} + \frac{dv'_s}{ds} - \frac{u_b}{r} = \frac{g S_r}{u_b} + \frac{1}{u_b} \left[ \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{d\bar{v}}{dz} + \varepsilon \frac{d^2\bar{v}}{dz^2} \right] \quad (3.33)$$

Se dice que el flujo en las curvas, se encuentra completamente desarrollado cuando el flujo es uniforme o cuasi-uniforme, es decir, el tiempo en que cambian las condiciones de la sección es mayor que el tiempo en que llega a normalizarse el flujo.

Kikkawa, Odgaard y Rozovskii realizaron pruebas en laboratorio para determinar las variaciones de la velocidad secundaria  $v$  en dirección  $z$ , en flujo completamente

desarrollado, los resultados se ajustaron a una recta (fig. 2.4), cuya ley esta dada por la ecuación siguiente:

$$\frac{z}{d} = 0.5 \frac{v}{v_b} + 0.5$$

donde:

$$v = 2 v'_b (z/d - 0.5) \quad (3.34)$$

Cuando el flujo es uniforme, se considera que la velocidad media en la dirección transversal del cauce es cero, ya que el flujo que viaja en la mitad superior de la sección se equilibra con el de la mitad inferior cercano al fondo. En las curvas, cuando aún no se tiene este estado de flujo, existe un transporte neto del flujo, por lo cual se modifica la ecuación 3.34 agregando una velocidad media transversal.

$$v = \bar{v} + 2v'_b (z/d - 0.5) \quad (3.35)$$

Se debe tener presente que la ecuación 3.35 no se cumple cuando  $z=0$ , ya que en este punto la velocidad del flujo y la frontera sólida deben ser iguales (condición de no deslizamiento), si se considera que la frontera sólida permanece inmóvil, la velocidad es nula.

Las variaciones del coeficiente de la viscosidad turbulenta (ec. 3.15) y la velocidad transversal en dirección  $z$  se obtienen con:

$$\varepsilon = \kappa u^* z (1 - z/d)$$

$$v = \bar{v} + 2v'_b (z/d - 0.5)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \kappa u^* (1 - 2z/d)$$

$$\frac{dv}{dz} = 2 v'_b/d$$

$$\frac{dv^2}{dz^2} = 0$$

Cuando  $z=d$ , se tiene:

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = -\kappa u^*$$

De las ecuaciones anteriores y con los valores de  $m$  y  $u_s$ , la ecuación 3.33 queda como:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} + \frac{dv'_s}{ds} = \frac{\bar{u}(m+1)}{r m} + \frac{g S_r m}{\bar{u}(m+1)} - \frac{\kappa}{u^*(m+1)} \left[ \frac{2\kappa u^* v'_s}{d} \right]$$

Reduciendo términos:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} + \frac{dv'_s}{ds} + \frac{2\kappa^2 v'_s}{(m+1)d} = \frac{(m+1)}{m} \frac{\bar{u}}{r} \left[ 1 + \frac{g r S_r m^2}{(m+1)^2 \bar{u}^2} \right] \quad (3.36)$$

Si se definen los coeficientes siguientes:

$$A = \frac{2\kappa^2}{(m+1)d} \quad (3.37)$$

.. y también:

$$F = \frac{(m+1)}{m} \frac{\bar{u}}{r} \left[ 1 + \frac{g r S_r m^2}{(m+1)^2 \bar{u}^2} \right] \quad (3.38)$$

Entonces la ecuación 3.36 se reduce a:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} + \frac{dv'_s}{ds} + A v'_s = F \quad (3.39)$$

Para el flujo completamente desarrollado en las curvas, la ecuación anterior se representa como:

$$\frac{2\kappa^2 v'_s}{(m+1) d} = \frac{(m+1) \bar{u}}{m r} \left[ 1 + \frac{g r S_r m^2}{(m+1)^2 \bar{u}^2} \right]$$

siendo

$$v'_s = \frac{(m+1)^2}{2m \kappa^2} \left[ 1 + \frac{g r S_r m^2}{(m+1)^2 \bar{u}^2} \right] \frac{d \bar{u}}{r}$$

Se define la variable N como:

$$N = \frac{(m+1)^2}{2m \kappa^2} \left[ 1 + \frac{g r S_r m^2}{\bar{u}^2 (m+1)^2} \right] \quad (3.40)$$

Finalmente el incremento de velocidad es:

$$v'_s = N d \bar{u}/r \quad (3.41)$$

En la ecuación 3.40 existe un balance entre la fuerza centrífuga y el gradiente piezométrico transversal, como:

$$g S_r = \bar{u}^2 / r$$

Lo que permite escribir a N como:

$$N = \frac{2m+1}{2 m \kappa^2} \quad (3.42)$$

### 3.5.- Pendiente transversal del fondo.

La pendiente longitudinal se considera prácticamente constante, sin embargo, la pendiente transversal sufre una variación a lo largo de la curva. Para evaluarla se considera el equilibrio de las fuerzas radiales, que son el resultado de la fuerza que genera el flujo y el peso

sumergido de una partícula descansando en el fondo (fig. 3.2).

En el fondo se presentan los máximos esfuerzos, ya que experimentalmente se ha determinado que el esfuerzo en las márgenes se reduce hasta en un 20% (material no cohesivo).

Las partículas en el fondo están en movimiento incipiente y ocurre el arrastre cuando el esfuerzo que resiste su propio peso sumergido es menor que el generado por el flujo; entonces, el balance en la dirección radial es:

$$A_p \tau_{cr,r} = W S_T \quad (3.43)$$

Donde  $A_p$  es el área máxima que la partícula proyecta o la característica;  $\tau_{cr,r}$  el componente radial del esfuerzo cortante;  $W$  el peso sumergido de la partícula dado por  $(\gamma_s - \gamma) V$ ;  $\gamma_s$  el peso específico de la partícula.

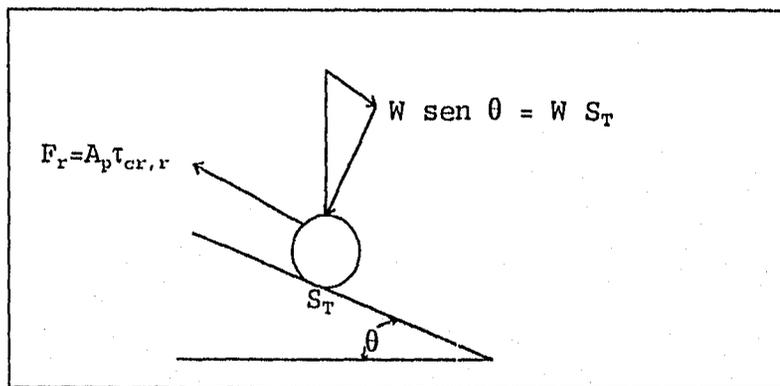


Fig. 3.2 Balance de fuerzas en la dirección radial sobre una partícula.

Rozovskii propone una ecuación que relaciona los esfuerzos radial y principal, asociados a las velocidades cerca del fondo inmóvil (subíndice b), por lo tanto:

$$\frac{\tau_{cr,r}}{\tau_{cr}} = - \frac{V'_b}{u_b} \quad (3.44)$$

La velocidad cerca del fondo es la crítica para las partículas, según Rozovskii debe ser proporcional a la velocidad de corte  $u_b = k u_{cr}^*$ , siendo  $k$  un factor de proporcionalidad. Además, la relación que existe entre el esfuerzo cortante y la velocidad de corte es  $\tau_{cr} = \rho u_{cr}^{*2}$ , por lo cual la ecuación 3.44 se puede escribir:

$$\tau_{cr, r} = - \frac{\rho u_{cr}^* v'_b}{k} \quad (3.45)$$

El parámetro de Shields se relaciona con la velocidad de corte como:

$$u_{cr}^* = \sqrt{\tau^* D g (\rho_s - \rho) / \rho} \quad (3.46)$$

Siendo  $\tau^*$  el parámetro de Shields y  $D$  el diámetro representativo del fondo.

El peso sumergido para una esfera es:

$$W = \pi D^3 g (\rho_s - \rho) / 6 \quad (3.47)$$

Existe un parámetro que relaciona el área proyectada ( $A_p$ ) de la partícula con el área de la esfera y se define como:

$$\alpha = 4 A_p / (\pi D^2) \quad (3.48)$$

Aplicando las ecuaciones 3.45, 3.46, 3.47 y 3.48 en la ecuación 3.41, se tiene que la pendiente transversal es:

$$S_T = - \frac{3 \alpha \sqrt{\tau^* D g (\rho_s - \rho) / \rho} v'_b}{2 D g (\rho_s - \rho) / \rho k}$$

Si se define el valor de  $\alpha$  como:

$$\alpha = \frac{3 \alpha \sqrt{\tau^*}}{2 \sqrt{D g (\rho_s - \rho) / \rho} k} \quad (3.49)$$

O bien:

$$\alpha = \frac{3 \alpha \sqrt{\tau^*} F_D}{2 k u_c^*}$$

Donde  $F_D$  es el número de Froude asociado al diámetro representativo de las partículas:

$$F_D = \frac{\bar{u}_c}{\sqrt{D g (\rho_s - \rho) / \rho}} \quad (3.50)$$

Entonces:

$$S_T = -\alpha v'_b \quad (3.51)$$

Como antes se indicó, la distribución transversal de velocidades en la mitad superior del tirante es igual a la mitad inferior pero en sentido contrario ( $v'_a = -v'_b$ ).

$$S_T = \alpha v'_a \quad (3.52)$$

Para el flujo completamente desarrollado en las curvas, la velocidad transversal  $v'_a$  esta dada por la ecuación 3.41, en este caso la pendiente transversal es:

$$S_{TO} = - \frac{3 \alpha \sqrt{\tau^*} N d u}{2 \sqrt{D g (\rho_s - \rho) / \rho} k r}$$

En función del número de Froude queda:

$$S_{TO} = - \frac{3 \alpha \sqrt{\tau^*} N F_D d}{2 k r} \quad (3.53)$$

Falcón y Kennedy proponen para la conservación del momento de la cantidad de movimiento la siguiente deducción, con la ecuación 3.11 se tiene:

$$\frac{u \, dv}{ds} - \frac{u^2}{r} = \frac{d}{dn} \left[ \frac{p}{\rho} + \Omega \right]$$

De resultados experimentales, Ven elimina el primer término del lado izquierdo y agrupando términos se tiene:

a) El gradiente de presión:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d p}{dn} = g \frac{dH}{dn} = g H'$$

b) El segundo término de lado derecho:

$$\frac{d\Omega}{dn} = \frac{1}{\rho} \frac{d\tau_r}{dz}$$

Sustituyendo en la ecuación 3.11

$$-\frac{u^2}{r} = g H' + \frac{1}{\rho} \frac{d\tau_r}{dz}$$

O también

$$g H' - \frac{u^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{d\tau_r}{dz}$$

De la ecuación 3.20, se sustituye el valor de la velocidad  $u$ , obteniendo:

$$g H' - \frac{(m+1)(z/d)^{1/m} \bar{u}/m^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{d\tau_r}{dz}$$

Factorizando la ecuación anterior:

$$\frac{d\tau_r}{dz} = \rho g \left[ H' - \frac{(m+1)^2 z^{2/m} \bar{u}^2}{m^2 g r d^{2/m}} \right]$$

Si se integra con los siguientes límites:

- a) cuando  $z=d$  se tiene  $\tau_r=0$ .
- b) cuando  $z=0$  entonces  $\tau_r=\tau_r$

Se obtiene:

$$\tau_r = \rho g H' z + \frac{\rho m (m+1)^2 d^{2/m} d u^2}{m^2 r d^{2/m} (m+2)}$$

Para el flujo completamente desarrollado  $H'=0$

$$\tau_r = \frac{\rho (m+1)^2 m d u^2}{m^2 r (m+2)}$$

De la ecuación 3.21

$$\bar{u}/m = u^*/\kappa$$

Sustituyendo la ecuación anterior, se tiene que el esfuerzo cortante es:

$$\tau_r = \frac{\rho (m+1)^2 m d u^{*2}}{r (m+2) \kappa^2}$$

La ecuación propuesta por Odgaard es:

$$\tau_r = \frac{\rho (m+1) m d u^{*2}}{r (m+2) \kappa^2} \quad (3.54)$$

Nótese que existe una diferencia en el exponente de  $(m+1)$  de las ecuaciones anteriores.

Para determinar el valor de  $k$  se iguala la ecuación anterior con la ecuación 3.45 obteniendo:

$$k = \kappa N \frac{m+2}{m+1} \quad (3.55)$$

Con este valor de  $k$ , el coeficiente  $C$  se puede representar como:

$$C = \frac{3\sqrt{\tau^*} \alpha F_{DC} (m+1)}{2 \kappa N (m+2) u_c} \quad (3.56)$$

Para evaluar la velocidad media transversal en el eje ( $v_c$ ) se aplica la ecuación de continuidad en un sistema curvilíneo:

$$\frac{du}{ds} + \frac{dv}{dn} = 0$$

El cambio de volumen en la parte externa de la mitad de la curva se iguala con la velocidad transversal evaluada a través de todo el tirante, se tiene:

$$\bar{v}_c d_c = - \int_0^{b/2} u d \, dn \quad (3.57)$$

Por otra parte, el valor de la velocidad en cualquier línea de corriente esta dado por su valor medio en el eje central del cauce más un incremento diferencial, para la dirección  $n$  se tiene:

$$\bar{u} = \bar{u}_c + (d\bar{u}/dn) n \quad (3.58)$$

Así también, el tirante en cualquier punto, es el valor del tirante medio más el producto de la pendiente transversal por la distancia a tal punto, con lo cual:

$$d = d_c + S_{TC} n \quad (3.59)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación 3.57 se tiene:

$$\bar{v}_c d_c = - \int_0^{b/2} \left( \bar{u}_c d_c + d_c \frac{d\bar{u}}{dn} n + \bar{u}_c S_{TC} n + S_{TC} \frac{d\bar{u}}{dn} n^2 \right) dn$$

Integrando se tiene:

$$\bar{v}_c d_c = - \left( \frac{d}{ds} \frac{1}{2} \bar{u}_c d_c b + \frac{b^2}{8} d_c \frac{d\bar{u}}{dn} + \frac{b^2}{8} \bar{u}_c S_{TC} + \frac{b^3}{24} S_{TC} \frac{d\bar{u}}{dn} \right)$$

Para el primer término del lado derecho  $\bar{u}_c$ ,  $b$  y  $d_c$  son constantes entonces  $d/ds=0$  y despreciando el último término se tiene:

$$\bar{v}_c d_c = - \left( \frac{d}{ds} \frac{b^2}{8} d_c \frac{d\bar{u}}{dn} + \frac{b^2}{8} \bar{u}_c S_{TC} \right)$$

Si se define a la variable  $U_{TC}$  como:

$$U_{TC} = d_c \frac{d}{dn} \left[ \frac{\bar{u}}{\bar{u}_c} \right] \quad (3.60)$$

Finalmente la velocidad media transversal para la línea central es:

$$\bar{v}_c = \frac{1}{8} \frac{\bar{u}_c b^2}{d_c} \frac{d}{ds} (U_{TC} + S_{TC}) \quad (3.61)$$

En flujo uniforme  $U_{TC} = 0$  y la ecuación 3.39 evaluada en la línea central (subíndice c) es:

$$\frac{dv'_{sc}}{ds} + \frac{d\bar{v}'_c}{ds} + A_c v'_{sc} = F_c$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.37, 3.51 y 3.61 se tiene:

$$\frac{d S_{TC}}{a b d \sigma} + \frac{1}{8} \frac{\bar{u}_c}{d_c} \frac{d^2 S_{TC}}{d \sigma^2} + \frac{2 \kappa^2 S_{TC}}{(m+1) d_c a} = F_c$$

O bien:

$$\frac{d^2 S_{TC}}{d \sigma^2} + \frac{8 d_c}{\bar{u}_c a b} \frac{d S_{TC}}{d \sigma} + \frac{16 \kappa^2 d_c S_{TC}}{(m+1) d_c a} = \frac{8 d_c}{\bar{u}_c} F_c \quad (3.62)$$

Agrupando los términos de la ecuación 3.62 se tiene:

a).- Para el segundo término:

$$\frac{8 d_c (2 \kappa N(m+2))}{3 b \alpha \sqrt{\tau^*} F_{DC} (m+1) d \sigma} = \frac{16 d_c \kappa N (m+2)}{3 b \alpha \sqrt{\tau^*} (m+1) F_{DC}} = a' \quad (3.63)$$

b).- Para el tercer término:

$$\frac{16 \kappa^2 (2 \kappa N(m+2)) \bar{u}_c}{\bar{u}_c (m+1) 3 \alpha \sqrt{\tau^*} F_{DC} (m+1)} = \frac{32 \kappa^3 N (m+2)}{3 \alpha \sqrt{\tau^*} (m+1)^2 F_{DC}} = b' \quad (3.64)$$

c).- Para el cuarto término:

$$\frac{8 d_c F_c}{\bar{u}_c} = \frac{16 \kappa^2 N d_c}{(m+1) r_c} = c' \quad (3.65)$$

Finalmente la ecuación que define la pendiente transversal (3.62) queda:

$$\frac{d^2 S_{TC}}{d \sigma^2} + a' \frac{d S_{TC}}{d \sigma} + b' S_{TC} = c' \quad (3.66)$$

### 3.6.- Distribución de los tirantes a lo largo del cauce.

El tirante  $d$  respecto a un punto se puede obtener geoméricamente de la figura 3.3.

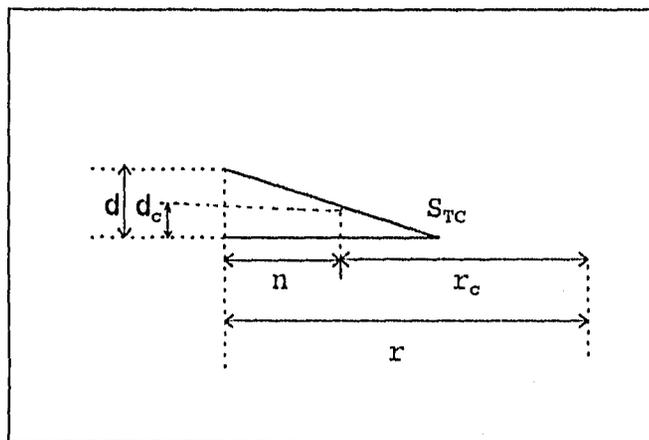


Fig. 3.3 Determinación del tirante  $d$

Para los tramos rectos:

$$d = d_c + S_{TC} n \quad (3.70)$$

Para los tramos curvos ( $n = r - r_c$ ), siendo entonces:

$$d = d_c + S_{TC} (r - r_c) \quad (3.71)$$

Dividiendo la ecuación anterior entre  $d_c$  se tiene:

$$\frac{d}{d_c} = 1 + \frac{S_{TC} r_c}{d_c} \left[ \frac{r}{r_c} - 1 \right] \quad (3.72)$$

También existe una relación proporcional entre las pendientes, la cual es:

$$\frac{d}{S_T r} = \frac{d_c}{S_{TC} r_c} \quad (3.73)$$

La variación del tirante con respecto al radio permite determinar la pendiente como:

$$S_T = dd / dr$$

Sustituyendo la ecuación 3.73 queda como:

$$\frac{dd}{dr} = \frac{S_{TC} d}{d_c} \frac{r_c}{r}$$

Integrando:

$$\int_{d_c}^d \frac{dd}{d} = \frac{S_{TC} r_c}{d_c} \int_{r_c}^r \frac{dr}{r}$$

Se tiene finalmente:

$$\frac{d}{d_c} = \left[ \frac{r}{r_c} \right]^\beta \quad (3.74)$$

siendo:

$$\beta = S_{TC} r_c / d_c \quad (3.75)$$

Como las márgenes afectan el tratamiento de las ecuaciones anteriores, se limita su aplicación para un ancho menor que el de la superficie libre del agua, este ancho efectivo se evalúa como:

$$br = B - 2 d_c \quad (3.76)$$

### 3.7.-Modelo numérico de la curva senoidal.

Cuando es posible representar la trayectoria de los meandros con una senoide, se puede simplificar el cálculo presentado en los incisos anteriores. Para ello Langbein y Leopold proponen las siguientes consideraciones.

El ángulo  $\theta$  medido a partir del eje x en cualquier punto está definido por:

$$\theta = \theta_0 \operatorname{sen} \left[ \frac{2 \pi s}{L} \right] \quad (3.80)$$

Donde L es la longitud de onda del meandro,  $\theta_0$  el ángulo entre la línea central y el eje x en el punto de inflexión del meandro.

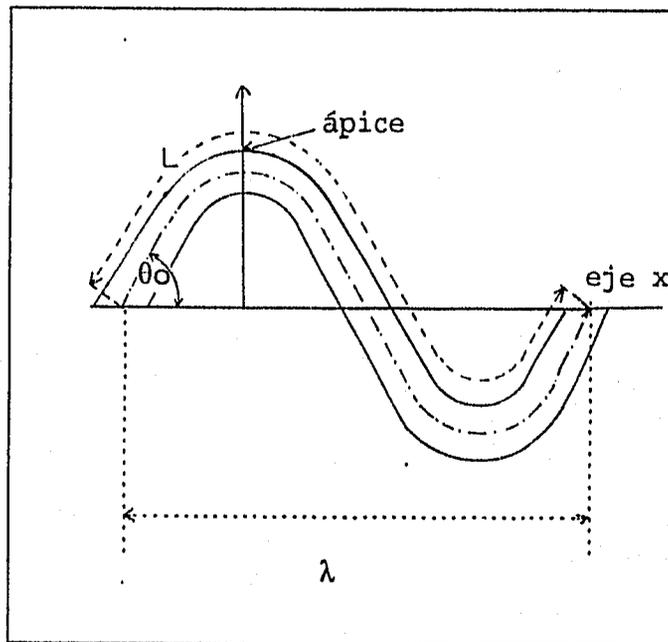


Fig. 3.4 Curva senoidal del meandro (Odgaard, 1986)

El inverso del radio de curvatura en un punto se determina con la variación del ángulo  $\theta$  con respecto a su posición y se representa con la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{r_c} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_c} \cos \left[ \frac{2\pi s}{L} \right] \quad (3.81)$$

donde  $R_c$  es el radio mínimo de la curva el cual se localiza en el ápice del meandro y  $r_c$  el radio de curvatura local.

Langbein y Leopold han mostrado que  $\theta_0$  se relaciona con la sinuosidad ( $L/\lambda$ ) como:

$$\theta_0 = 2.2 \sqrt{1 - \lambda/L} \quad (3.82)$$

El valor de la longitud del meandro medida a lo largo del valle (eje x) se puede obtener de la Tabla 2.1.

Para producir la inestabilidad del cauce, se aplica la ecuación 2.12, siendo definida la frecuencia de la curva senoidal que representa al meandro como:

$$\omega' = \frac{2\pi b}{L} = \frac{b}{R_c} \frac{1}{\theta_0} \quad (3.83)$$

En la ecuación 3.81, se introducen las condiciones iniciales que definirán el inicio de la trayectoria senoidal, siendo x la variable que representa a tales condiciones:

$$\frac{1}{r_c} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_c} \cos \left[ \frac{2\pi s}{L} + x \right] \quad (3.84)$$

Las condiciones iniciales son:

a) En el inicio ( $s=0$ ) la curvatura es  $1/r_c=0$ , entonces x se satisface para  $\pi/2$  ó  $-\pi/2$ .

b) En un punto situado a la distancia  $s=L/4$ , se tiene la curvatura mínima  $1/r_c=1/R_c$ .

De lo anterior,  $x$  solo se satisface para  $-\pi/2$ .

En la ecuación 3.84 se sustituyen el parámetro adimensional  $\sigma=s/b$  y el valor de  $x$ , se tiene:

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{R_c} \cos \left[ \frac{2 \pi \sigma b}{L} - \frac{\pi}{2} \right] \quad (3.85)$$

Factorizando:

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{R_c} \cos \left[ \frac{2 \pi b}{L} \left[ \sigma - \frac{L}{4 b} \right] \right] \quad (3.86)$$

Sustituyendo el valor de la frecuencia del meandro  $\omega'$ :

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{R_c} \cos \left[ \omega' \left[ s - \frac{L}{4 b} \right] \right] \quad (3.87)$$

La ecuación anterior permite determinar la variación de la curvatura a lo largo de la trayectoria senoidal.

En este modelo se trata de determinar la variación de la pendiente transversal cuando la trayectoria del meandro es senoidal, para lo cual, en la ecuación 3.66 se introduce una fuerza impulsora definida por la función senoidal (entrada dinámica), la respuesta del sistema también será una función senoidal.

El sistema se representa como:

$$\frac{d^2 S_{TC}}{d\sigma} + a' \frac{d S_{TC}}{d\sigma} + b' S_{TC} = c' \quad (3.66)$$

La ecuación 3.87 que representa la curvatura senoidal afectará el valor de la fuerza impulsora  $c'$  (ec. 3.65), se tiene entonces:

$$c' = \frac{16 k^2 N}{m+1} \frac{d_c}{b} \frac{b}{R_c} \cos \left[ \omega' \left[ \sigma - \frac{L}{4b} \right] \right] \quad (3.88)$$

La ecuación anterior representa una función armónica (cap.II), la solución general esta dada por:

$$S_{TC}(\sigma) = c^* \cos(\omega' \sigma' - \phi') \quad (3.89)$$

donde:

$$c^* = \frac{c'}{\sqrt{(b'^2 - \omega'^2)^2 + \omega'^2 a'^2}} \quad (3.90)$$

Con las condiciones iniciales dadas por las ecuaciones 3.87 y 3.88 se tiene:

$$S_{TC} = S_{TCM} \cos \left[ \omega' \left[ \sigma - \frac{L}{4b} \right] - \phi' \right] \quad (3.91)$$

O también:

$$S_{TC} = S_{TCM} \cos \left[ 2\pi \left[ \frac{s}{L} - \frac{s'}{L} - \frac{1}{4} \right] \right] \quad (3.92)$$

donde:

$$S_{TCM} = \frac{16 k^2 N}{(m+1) \sqrt{(b' - \omega'^2)^2 + a'^2 \omega'^2}} \frac{d_c}{b} \frac{b}{R_c} \quad (3.93)$$

Y el ángulo de fase  $\phi'$  esta definido por:

$$\phi' = \tan^{-1} \left[ \frac{\omega' a'}{b' - \omega'^2} \right] \quad (3.94)$$

En la ecuación 3.92,  $s'$  define la distancia de retraso, la cual determina el punto (medido a partir del ápice) en donde se encuentra la máxima profundidad de socavación en el cauce.

El ángulo de fase  $\phi'$  representa el retraso de la respuesta del fondo al cambio de curvatura (retraso de la salida con respecto a la entrada), su valor se relaciona con la distancia  $s'$  a partir del punto de inflexión inicial, en donde es nula la pendiente transversal ( $S_{TC}$ ), siendo dicha relación:

$$\phi' = 2 \pi s' / L \quad (3.95)$$

Para determinar la distribución del tirante se emplean las ecuaciones (3.70 y 3.71) del primer modelo numérico de este capítulo.

### 3.8.- Determinación de la distribución de velocidades.

La ecuación 3.71 se puede escribir como:

$$\frac{d_c}{d} = \left[ 1 + S_{TC} \frac{\Delta r}{d_c} \right]^{-1}$$

donde:

$$\Delta r = r - r_c$$

La ecuación anterior se sustituye en la ecuación 3.32, así como el parámetro  $s = \sigma b$ , siendo entonces:

$$\Delta \mu = G \left[ \left[ \frac{1 + \Delta r}{r_c} \right]^{-1} - \left[ 1 + \frac{S_{TC} \Delta r}{d_c} \right]^{-1} \mu \right] \Delta \sigma$$

O en función de la frecuencia ( $\omega'$ ), se tiene:

$$\Delta \mu = \frac{2\pi}{\omega'} G \left[ \left[ \frac{\Delta r}{r_c} \right]^{-1} - \left[ 1 + \frac{S_{TC} \Delta r}{d_c} \right]^{-1} \mu \right] \Delta \left[ \frac{s}{L} \right] \quad (3.96)$$

La ecuación 3.74 se puede representar como:

$$\frac{d}{d_c} = \left[ \frac{r}{r_c} \right]^\beta = \left[ \frac{r_c - r - r_c}{r_c} \right]^\beta = \left[ 1 + \frac{\Delta r}{r_c} \right]^\beta$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación 3.32, se tiene:

$$\Delta\mu = \frac{2\pi}{\omega'} \left[ G \left[ 1 + \frac{\Delta r}{r_c} \right]^{-1} - \left[ 1 + \frac{\Delta r}{r_c} \right]^{-\beta} \mu \right] \Delta \left[ \frac{s}{L} \right] \quad (3.97)$$

Las ecuaciones 3.31 y 3.73 representan la variación de la pendiente transversal en dirección de la trayectoria como:

$$\frac{d S_{TC}}{d s} = G S_{TC} \quad (3.98)$$

La ecuación 3.92 se deriva con respecto a la distancia  $s$ , siendo entonces:

$$\frac{d S_{TC}}{d s} = S_{TCM} \left[ \frac{2\pi b}{L} \right] \left[ -\text{sen} \left[ 2\pi \left[ \frac{s b}{L} - \frac{s'}{L} - \frac{1}{4} \right] \right] \right]$$

Igualando con la ecuación 3.98 se tiene:

$$G = \tan \left[ 2\pi \left[ \frac{s}{L} - \frac{s'}{L} - \frac{1}{4} \right] \right] \quad (3.99)$$

La ecuación anterior permitirá determinar la distancia de retraso ( $s'$ ).

## CAPÍTULO 4.- SOLUCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO DE ODGAARD.

### 4.1- Solución del modelo numérico de Odgaard.

Con las ecuaciones desarrolladas en el capítulo tres, el método de Odgaard permite determinar la pendiente transversal del fondo a lo largo del eje del cauce (ec. 3.66); así también, conocer las variaciones de la velocidad principal (ec. 3.31) y del tirante (ec. 3.70 y 3.71), para cada línea de corriente y en una sección específica.

#### 4.1.1.- Determinación de la pendiente transversal del fondo.

Con el método de Odgaard se puede obtener la pendiente transversal del fondo cuando el flujo está completamente desarrollado, y también la pendiente transversal que se puede presentar en una sección específica.

Odgaard obtuvo la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 S_{TC}}{d\sigma^2} + a' \frac{d S_{TC}}{d\sigma} + b' S_{TC} = c' \quad (3.66)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria es lineal, de segundo orden, no homogénea con coeficientes  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$ .

La solución numérica de la ecuación 3.66 se obtiene discretizando en tramos rectos y curvos, utilizando como condiciones de frontera para una sección, los valores precedentes de la sección de aguas arriba. Esta ecuación es análoga a la que representa un sistema oscilatorio amortiguado (mecánica), si está sobre o subamortiguado, la solución depende de las raíces de la ecuación.

El coeficiente  $a'$  representará el amortiguamiento del sistema,  $b'$  la resistencia a la oscilación y  $c'$  la fuerza impulsora. La solución general de esta ecuación es:

$$S_{TC} = S_{TCO} - (S_{TCO} - S_{TCi}) E \quad (4.1)$$

Donde  $S_{TCi}$  es el valor de la pendiente transversal al inicio del tramo y  $E$  un parámetro que depende de las características de amortiguamiento del sistema.

De las raíces características de la ec. 3.66. se pueden tener tres casos principales:

caso 1.- Sistema sobreamortiguado  $a'^2 > 4b'$

$$E = \frac{\lambda_2 + \psi}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp\{\lambda_1(\sigma - \sigma_i)\} - \frac{\lambda_1 + \psi}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp\{\lambda_2(\sigma - \sigma_i)\} \quad (4.2)$$

donde:

$$\lambda_1 = (1/2)(-a' + \sqrt{a'^2 - 4b'}) \quad (4.2.a)$$

$$\lambda_2 = (1/2)(-a' - \sqrt{a'^2 - 4b'}) \quad (4.2.b)$$

$$\psi = (dS_T/d\sigma)_i / (S_{TCO} - S_{TCi})$$

caso 2).- Sistema subamortiguado  $a'^2 < 4b'$

$$E = 1 + \left[ \frac{\psi}{\omega} - \frac{a'}{2\omega} \right]^2 \cos(\omega(\sigma - \sigma_i) - \phi) \exp\left\{-\frac{1}{2} a'(\sigma - \sigma_i)\right\} \quad (4.3)$$

siendo:

$$\omega = (1/2) (\sqrt{4b' - a'^2}) \quad (4.3.a)$$

y también:

$$\tan \phi = a' / (2 \omega) - \psi / \omega \quad (4.3.b)$$

caso 3).- Sistema amortiguado crítico  $a'^2 = 4b'$

La solución de Odgaard (1986) considera que  $\psi$  es insignificante, por lo cual se puede despreciar.

#### 4.1.2.- Determinación de la velocidad principal.

La ecuación de la velocidad (ec. 3.31), es una ecuación diferencial de primer orden, lineal y homogénea y se resuelve por medio del método de diferencias finitas o con la solución analítica.

la ecuación de la velocidad es:

$$\frac{d\mu}{d\sigma} + G \frac{d_c}{d} \mu = G \frac{r_c}{r} \quad (3.31)$$

a) Solución numérica.

Suponiendo que la velocidad tiene una variación lineal de sección a sección, la ecuación 3.31 se puede resolver por incrementos, haciendo la discretización siguiente:

$$\Delta\mu = G \left[ \frac{r_c}{r} - \frac{d_c}{d} \mu \right] \Delta\sigma \quad (4.5)$$

Donde  $\Delta\mu = \mu_i - \mu_{i-1}$ , con:

$$\mu_i = G \left[ \frac{r_c}{r} - \frac{d_c}{d} \mu \right] \Delta\sigma + \mu_{i-1} \quad (4.6)$$

Se debe tener cuidado al aplicar la ecuación 4.6, ya que el tamaño de los incrementos pueden causar inestabilidades en el cálculo.

b) Solución analítica.

En la ecuación 3.31, si se representa al coeficiente A como:

$$A = G d_c/d$$

y también el coeficiente B:

$$B = G r_c/r$$

Quedando la ecuación 3.31 de la forma:

$$\frac{d\mu}{d\sigma} + A \mu = B$$

Aplicando el factor integrante  $e^{\int A(\sigma) d\sigma}$ , se obtiene:

$$\mu e^{\int A d\sigma} = B \int e^{\int A d\sigma} d\sigma + C \quad (4.7)$$

donde la solución primitiva es:

$$\mu e^{A\sigma} = B/A (e^{A\sigma}) + C \quad (4.8)$$

Tomando las condiciones iniciales, para  $\sigma = \sigma_0$ , se tiene  $\mu = \mu_0$ , siendo la constante de integración igual a:

$$C = -B/A (e^{A\sigma_0}) + \mu_0 e^{A\sigma_0}$$

Se tiene entonces la ecuación 4.8 como:

$$\mu = B/A + \mu_0 e^{-A(\sigma_0 - \sigma)} - B/A e^{-A(\sigma_0 - \sigma)} \quad (4.9)$$

Factorizando y sustituyendo los valores de A y B en la ecuación 4.9, se tiene finalmente:

$$\mu_{i+1} = \frac{r_c d}{r d_c} \left[ \frac{r_c d}{r d_c} - \mu_i \right] e^{-G d_c (\sigma - \sigma_0) / d} \quad (4.10)$$

#### 4.2.-Descripción del programa uno: aplicación del método de Odgaard a curvas discretizadas por tramos.

El programa uno resuelve el método de Odgaard, dicho programa se elaboró en Quickbasic (apéndice A) y como se describió en el capítulo tres tiene aplicación en cualquier tramo del río respetando las restricciones.

El programa uno permite determinar las variaciones de la velocidad principal y el tirante para cada línea de corriente; así también, permite determinar las variaciones de la pendiente transversal a lo largo del cauce, además realiza las gráficas de las variaciones de la velocidad y el tirante a lo largo del cauce para cada línea de corriente.

A continuación se hace una breve descripción de los cálculos que se efectúan en las líneas del programa.

número de línea

- 60-390 Se calculan e imprimen las principales variables como son el gasto, la velocidad media, el parámetro de fricción y el parámetro de Shields.
- 410 Se lee el número de tramos (N) o curvas que tiene el tramo del río, además, se lee el número total de secciones (x).
- 470-600 Se asigna el número de la sección x que corresponde al tramo N, así se tiene que la variable nx(j,i) corresponde al tramo j y la sección i.
- 610-660 Se asignan los radios de curvatura para cada tramo. En el caso que existan tramos rectos se les asigna un valor nulo.

ESTA TAREA NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

- 670-790 Se definen las distancias (s) hasta la sección x, dichos valores están medidos a partir del inicio de cada tramo al que corresponde la sección.
- 800-860 Existe una rutina que suma las distancias acumuladas de las secciones, es decir la distancia de la sección medida a partir de la sección inicial del río (sección 1).
- 870-940 Calcula el parámetro adimensional  $\sigma$  para cada sección y el incremento  $\Delta\sigma$ .
- 950-1020 Se calcula la pendiente completamente desarrollada (ec. 3.53) para cada tramo, si el tramo es recto, la pendiente completamente desarrollada es nula.
- 1030-1200 Calcula los valores del parámetro E correspondiente al estado de amortiguamiento del sistema, aquí se aplica el método numérico de solución previamente descrito .
- 1220-1300 Se determina la pendiente transversal de la sección x (ec. 4.1).
- 1420-1490 Dependiendo del interés para conocer la velocidad y el tirante para una línea de corriente determinada, en estas líneas del programa se asigna la distancia medida a partir del eje central a la línea de corriente en estudio, observando hacia aguas abajo, les corresponde signo positivo.
- 1500-1530 Se lee el signo de cada tramo (sign(j)).
- 1590 En esta línea se abre un ciclo en el cual se realizarán los cálculos para cada línea de corriente.
- 1690-1730 Se determina el valor del radio de curvatura (Rd) para la línea de corriente k, que será la suma del radio central más o menos la distancia hasta la línea de corriente k.
- 1770 Se calcula el valor del parámetro  $\beta$  (ec. 3.75)
- 1780-1850 Se determina la relación de tirantes (d/d<sub>c</sub>) definida como ded(j,i) para cada sección x, en los tramos curvos se emplea la ecuación 3.74 y en los tramos rectos la ecuación 3.71.
- 2030 Se calcula la relación de los radios Rcc=Rc/Rd, para los tramos rectos se considera como Rcc=1
- 2060-2150 Se calcula la relación adimensional de velocidades ( $\mu$ ), definida como mu(j,i) y se imprimen los resultados.

- 2400-2900 En estas líneas existe una subrutina llamada "grafico1" que dibuja las variaciones de la velocidad adimensional ( $\mu$ ) a lo largo de la dirección longitudinal del cauce.
- 2910-2400 La subrutina "grafico2" permite dibujar las variaciones del tirante adimensional ( $d/dc$ ) a lo largo de la dirección longitudinal del cauce.

#### 4.3.- Empleo del programa uno.

Para un problema específico, es necesario hacer modificaciones al programa, por lo cual se deben contar con los datos siguientes:

- 1) El gasto formativo o dominante ( $Q$ ). Pueden existir tres criterios para determinarlo (Maza, 1989):
  - a) Aquel gasto con un periodo de retorno de 1.4 años.
  - b) Aquel que pase por la sección sin que se llegue a desbordar.
  - c) Aquel gasto correspondiente al gasto sólido promedio anual.
- 2) El diámetro medio de las partículas ( $D_{ic}$ ), éste se determina de la granulometría del cauce, cuando a lo largo del río se tienen diferentes granulometrías se puede tomar un valor promedio representativo.
- 3) La pendiente longitudinal del fondo ( $S_o$ ). Ya que la pendiente varía a lo largo del cauce, es necesario obtener una pendiente promedio. Un criterio sencillo para obtener esta pendiente es medir el desnivel que existe entre las secciones inicial y final del cauce, y dividir entre su longitud medida en planta.
- 4) El ancho en la superficie libre del agua representativo o el ancho promedio ( $B$ ).
- 5) La velocidad en cada línea de corriente, correspondiente al tirante medio, para la sección inicial del cauce. Ésta se puede obtener con la ayuda de aforos en la sección

inicial por medio de un molinete para medir velocidades, tomando las lecturas al nivel del tirante medio para cada línea de corriente.

6) El parámetro alfa ( $\alpha$ ). Este parámetro es el inverso del grado de redondez, se puede obtener un valor aproximado con la figura 4.1

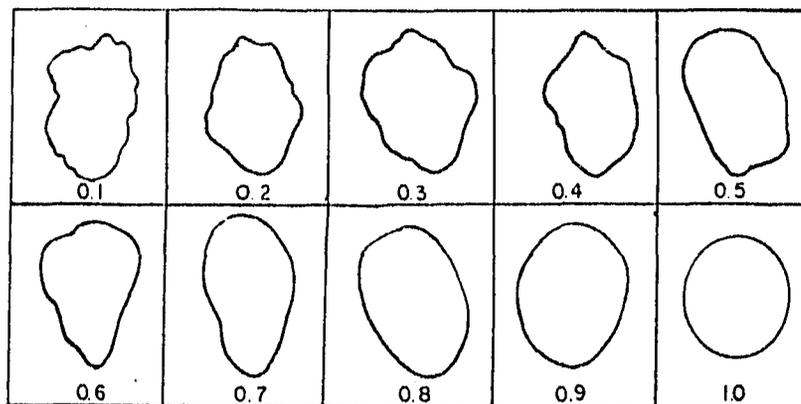


Fig. 4.1 Grado de redondez de la partícula

7) El peso específico del material sólido ( $\rho_s$ ), el cual se determina del análisis en el laboratorio de una muestra del material sólido del cauce.

8) El número de tramos ( $N$ ). El número de tramos depende de los cambios que en el radio de curvatura tenga el río.

9) El número de secciones ( $x$ ). Esto es función de las necesidades requeridas para conocer las características hidráulicas y la pendiente transversal del fondo en una zona específica. Es indispensable que se definan secciones al inicio y final de cada tramo.

10) Los radios de curvatura en cada tramo ( $R_c$ ), los cuales se determinarán considerando el trazo que presenta el cauce, cuidando que los radios se encuentre dentro de los

siguientes intervalos  $2 < B/R < 8$ , en caso de curvas compuestas, sus radios deben decrecer aguas abajo.

11) Las distancias de las secciones (s), se miden a partir del inicio del tramo al que pertenecen y en el eje central del cauce.

Además de conocer las variables anteriores, es necesario hacer las siguientes modificaciones al programa:

a) Se debe considerar el número de líneas de corriente (NNN) con su signo correspondiente, para determinar el signo se puede aplicar la siguiente regla:

Si imaginariamente un observador se ubica en el eje central en la sección mirando hacia aguas abajo, las líneas de corriente de su lado izquierdo tendrán signo positivo.

b) Se modifican los signos de los tramos (Sign), son positivos si la primer línea de corriente esta del lado de la margen cóncava, si dicha línea de corriente esta del lado convexo el tramo tendrá signo negativo, los tramos rectos tendrán el signo de la curva que les antecede (fig. 4.2).

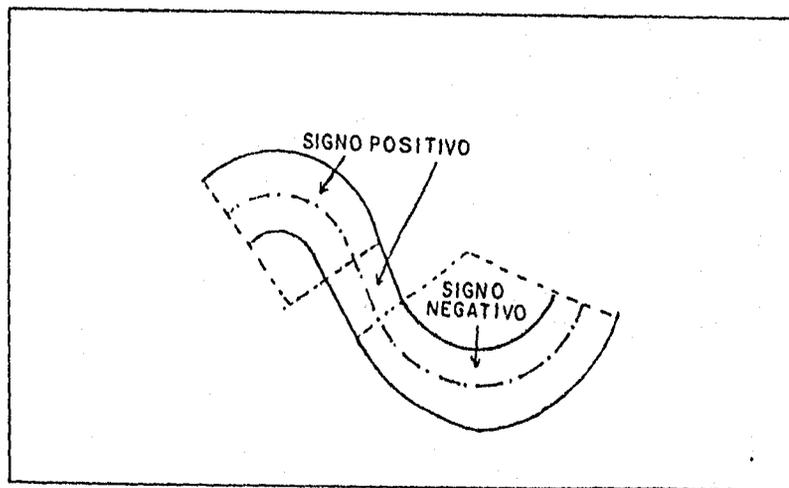


Fig. 4.2 Criterio para definir el signo a cada tramo del cauce.

#### 4.3.1.- Nomenclatura del programa uno.

alf= parámetro que relaciona las áreas partícula-esfera.

ap= parámetro (ec. 3.63).

b= ancho de la superficie libre.

bet(J,I)=parámetro (ec. 3.75).

bp= parámetro (ec. 3.64).

br= ancho efectivo (ec. 3.76).

Dic= diámetro medio de las partículas.

dc=tirante medio en el eje central.

ded(J,I)= relación  $(d/d_c)$  de la sección x para la línea de corriente en estudio.

Dsig(J,I)= diferencia entre  $\sigma_{i+1}$  y  $\sigma_i$ .

E1= parámetro (ecuaciones 4.2 ó 4.3).

Fdc=número de Froude de las partículas (ec. 3.50).

fi= fase de retraso.

Fstco= valor constante (ec. 3.53).

G= parámetro (ec. 3.29).

Gr= aceleración de la gravedad.

K1= constante de Von Karman.

l1= parámetro  $\lambda_1$  (ec. 4.2.a).

l2= parámetro  $\lambda_2$  (ec. 4.2.b).

mded(J,I)= promedio de las relaciones  $(d/d_c)_i$  y  $(d/d_c)_{i-1}$ .

mu(J,I)= relación adimensional ( $\mu$ ).

mmu(j,I)= valor inicial de  $\mu$  medido en el campo.

N= número de tramos en que se divide el cauce.

NNN= número de líneas de corriente.

ni= viscosidad cinemática del agua.

nx(I,J)= sección x que pertenece a la curva N.

ome= parámetro (ec. 4.3.a).

Q= gasto dominante o formativo.

R(c)= radio central de cada curva N.

Rcc(J)= relación de radios de la línea de corriente y la línea del eje central.

Rd(J)=radio de curvatura de la línea de corriente en estudio.

rs= densidad específica de las partículas.

ro= densidad específica del agua.

s(J,I)= distancia a la sección x, medida a partir del inicio de la curva.

ss(J,I)= distancia de la sección x, medida a partir de la sección inicial.

$\text{sig}(J, I)$  = parámetro adimensional (s/b)  
 $\text{sign}(J)$  = signo de la línea de corriente  
 $\text{Stc}$  = pendiente transversal del fondo (ec. 4.1)  
 $\text{Stci}$  = pendiente transversal al inicio del tramo (valor anterior de  $\text{Stci}$ ).  
 $\text{Stco}(J)$  = pendiente completamente desarrollada (ec. 3.53)  
 $\text{So}$  = pendiente longitudinal del fondo  
 $\text{tet}$  = parámetro de Shields  
 $\text{Uc}$  = velocidad media en el eje central  
 $x$  = número de secciones en que se dividen los tramos.

#### 4.4- Descripción del programa dos. Aplicación del modelo numérico de la curva senoidal.

Para aplicar el segundo método al tramo de un río, es necesario que éste cumpla con la condición de ajustarse en su trazo geométrico longitudinal a una función senoidal, esto se consigue al dibujar la función seno y sobreponerla en el tramo del río, haciendo pruebas con diferentes ángulos iniciales ( $\theta_0$ ).

El método del ajuste a una curva senoidal cumple con la condición que la relación de velocidades adimensional ( $\mu$ ) en la sección inicial debe ser la misma para la sección final, para satisfacer este requisito se empleó el método de bisección, el cual se describe enseguida:

- 1) El método inicia con un valor supuesto, que se define en un intervalo cuyos límites extremos son  $a_1$  y  $b_1$ , siendo el límite menor  $a_1$ . El valor inicial  $\mu_1$  será el promedio de  $a_1$  y  $b_1$ .
- 2) Se evalúa la función en estudio, la solución debe cumplir que  $\text{error} = \mu_{i+1} - \mu_i$ , siendo el error un valor de tolerancia previamente definido, si el signo del error es positivo, entonces la solución se encuentra entre  $\mu_i$  y  $b_1$ , por lo que se le asigna al nuevo límite  $a_2$  el valor de  $\mu_i$  y  $b_2 = b_1$ , si el error tiene el signo negativo, entonces  $b_2 = \mu_i$  y  $a_2 = a_1$ .

El nuevo valor de  $\mu_2$  se determinará entre el nuevo intervalo  $a_2$  y  $b_2$ .

3) Se reinicia el cálculo con el nuevo valor  $\mu_2$  determinado con el promedio del intervalo  $a_2$  y  $b_2$ , y se retorna al paso dos. La iteración continuará hasta obtener un valor del error menor o igual que la tolerancia.

A continuación se describe los cálculos de cada línea del programa dos:

número de línea

- 10-530 En estas líneas se determinan e imprimen las constantes de cálculo como son la velocidad media, el ancho efectivo, el parámetro de fricción, el número de Reynolds asociado a las partículas.
- 550 Se dimensiona el número de líneas de corriente (NN) que serán necesarias.
- 590 Se asignan los valores, medidos a partir del eje central las distancias de las líneas de corriente, hacia ambos lados del eje central.
- 620 Se define el número de segmentos en que se divide la longitud total del cauce, el número de segmentos dependerá de la importancia para conocer las características hidráulicas de un sitio en particular.
- 650 Se inicia el ciclo de cálculo de la primer línea de corriente  $K=1$  hasta la línea de corriente NN.
- 690-970 Se calculan e imprimen las distancias, el radio central, la pendiente transversal, el radio de la línea de corriente, el tirante, la relación de tirantes, la relación adimensional de la distancia ( $s/L$ ).
- 990-2130 Se calculan e imprimen las relaciones adimensionales de las velocidades y los incrementos  $\Delta\mu$ .
- 1030-2080 Se aplica el método de bisección para cumplir con la condición de que el valor inicialmente propuesto de  $\mu$  sea igual al último valor de  $\mu$ .
- 2230-3590 Se presentan subrutinas que permiten graficar los

valores de las relaciones adimensionales ( $\mu - s/L$ )  
y ( $s/L-d/d_c$ ), además de la variación de la  
velocidad a lo largo de cauce ( $v - s$ ).

#### 4.5.- Empleo del programa dos.

Para un caso en particular, es necesario efectuar algunas modificaciones al programa, las cuales se presentan enseguida:

Las variables de los incisos uno al seis se obtienen como en el programa uno.

- 1) El gasto dominante (Q)
- 2) El diámetro medio de las partículas (Dic)
- 3) El ancho de la superficie libre (B)
- 4) La pendiente longitudinal (So)
- 5) La densidad específica de las partículas (rs)
- 6) El parámetro adimensional alfa (alf)
- 7) La longitud total de la curva (L) se determina del trazo de la función senoidal (ec. 3.82).
- 8) El ángulo de inicio ( $\text{tet}0$ ) será aquel que mejor se ajuste al río en particular.
- 9) La distancia de las líneas de corriente a partir del eje central (NN).
- 10) El número de secciones requeridas (N), estará en función de las necesidades de cada caso en particular.

##### 4.5.1.-Nomenclatura del programa dos.

alf= relación de áreas partícula-esfera  
ap= parámetro (ec. 3.63)  
b= ancho de la superficie libre  
Beta= parámetro (ec. 3.76)  
br= ancho efectivo  
bp= parámetro (ec. 3.64)  
Dic= diámetro medio de las partículas  
dsel= intervalo de longitud entre secciones.  
dmu= parámetro (ec. 3.96)  
dc= tirante medio en el eje central.  
dz= tirante medio en la línea de corriente.  
Fstco= parámetro (ec. 3.53).

Fdc=número de Froude de las partículas.  
fi = ángulo de fase  
G= parámetro (ec. 3.29)  
Gr= aceleración de la gravedad  
K1= constante de Von Karman  
L= longitud total de la curva  
m= parámetro de fricción  
N= parámetro (ec. 3.42)  
ni= viscosidad cinemática del agua  
NN= número de líneas de corriente  
ome= parámetro (ec. 4.3.a)  
omep= frecuencia del meandro  
Q= gasto formativo o dominante  
Re= número de Reynolds asociado a las partículas  
Rcz= radio de cada sección  
Rdd= relación de tirantes en la línea central y la línea de corriente  
Rlz= radio hasta la línea de corriente  
ro=densidad específica del agua  
rs= densidad específica de las partículas  
So= pendiente longitudinal  
Sp= distancia de retraso  
Spp= velocidad de retraso  
Sz= distancia a partir del inicio a la sección en estudio  
Sll= relación adimensional (s/L)  
Stcz= pendiente transversal (ec 3.92)  
tet= parámetro de Shields  
tet0= ángulo de línea central y el eje x  
Ue= velocidad de corte

## CAPÍTULO 5.- APLICACIONES.

### 5.1.- Ejemplo uno.

Este ejemplo se tomó del artículo de Odgaard (1986), del estudio en el "Fall River", U.S.A., para un gasto  $Q=1.4\text{m}^3/\text{s}$ , la figura 5.1 presenta la topografía en planta del cauce, la pendiente longitudinal promedio de la superficie del agua fue de  $S_c=0.00173$ , el ancho promedio del cauce se tomó de  $B=8.51\text{m}$ , el tirante en el eje central varió de sección a sección, por lo cual se tomó un valor promedio de  $d_c=0.34\text{m}$ , el diámetro medio del material del fondo reportado fue  $D_m=0.2\text{mm}$ , el peso específico del material fue de  $2650\text{ kg/m}^3$ . El cauce se dividió en cinco tramos (fig. 5.1) los cuales se ajustaron con los siguientes radios:

tramo	radio	longitud
uno	52 m	24 m
dos	11 m	32 m
tres	recto	15 m
cuatro	11 m	23 m
cinco	recto	13 m

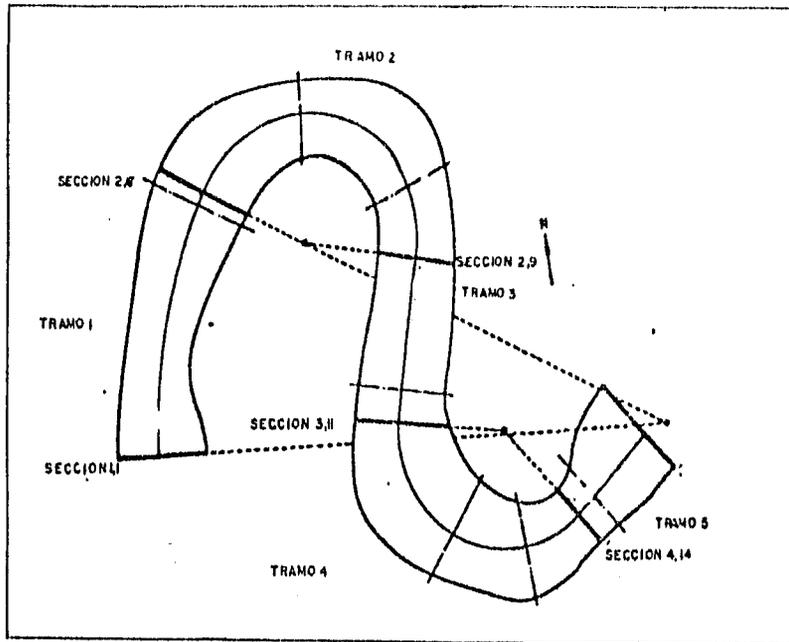


Fig. 5.1 Tramo del Río Fall, U.S.A. (Odgaard, 1986)

### 5.1.1- Determinación del tirante medio en las curvas

a) Aplicación del método de Maza (1989).

Para determinar el tirante medio en las curvas, se aplica la ecuación 2.13 propuesta por Maza, la cual es:

$$d_c = 1.9 \left[ \frac{B}{R_c} \right]^{0.244} d_{1m}$$

Sustituyendo los valores, para un radio  $R_c=52$  m, se tiene:

$$d_c = 1.9 \left[ \frac{8.5}{52} \right]^{0.244} (0.34) = 0.4152 \text{ m}$$

Para  $R_c=11$  m :

$$d_c = 1.9 \left[ \frac{8.5}{11} \right]^{0.244} (0.34) = 0.60661 \text{ m}$$

Para determinar el tirante máximo ( $d_{\max}$ ) que probablemente se presente en las curvas y considerando el intervalo de aplicación, con  $B/R_c = 8.5/52 = 0.1634$ , se tiene:

$$d_{c \max} = \left[ 1.27 + 1.26 \frac{8.5}{52} \right] (0.34) = 0.5018 \text{ m}$$

El radio  $R_c = 11 \text{ m}$  es menor que  $2B$ ; por lo cual, no se pueden aplicar las ecuaciones 2.14 y 2.15.

b) Aplicando el criterio de Boussinesq (ec. 2.25)

Calculando el tirante medio en la curva:

$$d_c = d_{xm} \left( 1 + (\alpha/\beta) (B/R_c)^{1/2} \right)$$

Para  $R_c = 52 \text{ m}$ , se tiene:

$$d_c = (0.34) \left( 1 + (0.6) (0.1634)^{1/2} \right) = 0.4224 \text{ m}$$

y para  $R_c = 11 \text{ m}$ :

$$d_c = (0.34) \left( 1 + (2) (0.7727)^{1/2} \right) = 0.937 \text{ m}$$

### 5.1.2.- Determinación de la sobreelevación en la superficie del agua.

a) Aplicando la ecuación de Woodward (2.26):

$$\Delta z = \alpha \left[ \frac{U^2}{g R_c} \right] B$$

Sustituyendo los datos del primer radio de curvatura, se llega a:

$$\Delta z = 1.2 \left[ \frac{(0.49)^2}{(9.81) (52)} \right] 8.5 = 0.0048 \text{ m}$$

Para el segundo radio de curvatura, el desnivel de la superficie del agua, será:

$$\Delta z = 1.2 \left[ \frac{(0.49)^2}{(9.81)(11)} \right] 8.5 = 0.02269 \text{ m}$$

b) Aplicando el criterio de Drinker, se tienen los resultados siguientes:

$$\Delta z = \frac{U^2 B}{g R_c} \left[ \frac{1}{1 - (B/(2 R_c))^2} \right]$$

Para un radio de curvatura de 52 m, se obtiene:

$$\Delta z = \frac{(0.49)^2 (8.5)}{(9.81)(52)} \left[ \frac{1}{1 - (8.5/(2*52))^2} \right] = 0.00402 \text{ m}$$

Con el radio de curvatura de 11 m, el desnivel aumenta a:

$$\Delta z = \frac{(0.49)^2 (8.5)}{(9.81)(11)} \left[ \frac{1}{1 - (8.5/(2*11))^2} \right] = 0.02223 \text{ m}$$

### 5.1.3.- Método de Engelund (1974), primera aproximación.

Aplicando las ecuaciones del inciso 2.9.1, para los radios de 52 m y 11 m, se evaluaron las distribuciones de la velocidad en la dirección principal y la secundaria, para las líneas de corriente a 2 y 3.91 m, en ambos lados del eje central. Los cálculos se determinaron con un programa en Quickbasic, Las Tablas 5.1 y 5.2 presentan los resultados, en las cuales se utilizó la nomenclatura siguiente:

$u^*$  = velocidad de corte (ec. 2.36)

$\epsilon_o$  = coeficiente de la viscosidad turbulenta (ec. 2.37).

$\beta$  = parámetro (ec. 2.34).

$\alpha$  = parámetro (ec. 2.35).

$k$  = constante de integración (ec. 2.33).

z= distancia medida a partir de la superficie libre.

$\phi$  = función (ec. 2.31).

f = función (ec. 2.32).

u= velocidad principal para una línea de corriente dada y una profundidad específica (ec. 2.30).

v= velocidad secundaria para una línea de corriente dada y una profundidad específica (ec. 2.29).

Tabla 5.1 Método de Engelund (primera aproximación)

Radio del eje central 52 m					
línea de corriente	u*	$\beta$	$\epsilon_0 (1 \times 10^{-4})$	$\alpha$	k (1x10 <sup>-2</sup> )
1	0.023812	0.31587	6.2340	0.82651	1.88603
2	0.023367	0.30997	6.2340	0.82908	1.86104
3	0.024283	0.32213	6.2340	0.82381	1.91208
4	0.022966	0.30465	6.2340	0.83142	1.83823
5	0.024758	0.32843	6.2340	0.82112	1.83789
línea de corriente 1 (n= 0 m)					
z (m)	$\phi$	f	u (m/s)	v (m/s)	
0	1.00000	4.01166	0.49000	0.012852	
0.05	0.99310	3.61788	0.48665	0.011591	
0.10	0.97267	2.49893	0.47661	0.008006	
0.15	0.93851	0.83950	0.45987	0.002689	
0.20	0.89070	-1.0611	0.43644	-.003399	
0.25	0.82921	-2.8023	0.40631	-.008978	
0.30	0.75407	-3.8993	0.36949	-.012492	
línea de corriente 2 (n=2 m)					
0	1.00000	3.958523	0.48084	0.012212	
0.05	0.99329	3.570558	0.477617	0.011015	
0.10	0.97318	2.467923	0.467947	0.007614	
0.15	0.93966	0.831914	0.451830	0.002566	
0.20	0.89274	-1.04357	0.429267	-0.00321	
0.25	0.83241	-2.76446	0.400277	-0.00852	
0.30	0.75867	-3.85383	0.364800	-0.01188	
línea de corriente 3 (n= -2 m)					
0	1.0000	4.067082	0.4997039	0.01355152	
0.05	0.993033	3.667187	0.4962227	0.01221907	
0.10	0.972134	2.531146	0.4857792	0.00843377	
0.15	0.937301	0.8472167	0.4683732	0.00282292	
0.20	0.888536	-1.07977	0.4440050	-0.0035977	
0.25	0.825837	-2.841802	0.4126743	-0.0094688	
0.30	0.749206	-3.946442	0.3743812	-0.0131495	

Tabla 5.2 Método de Engelund (primera aproximación)

Radio del eje central 11m					
línea	$u^*$	$\beta$	$\epsilon_0 (1 \times 10^{-4})$	$\alpha$	$k (1 \times 10^{-2})$
1	0.023812	0.31587	6.2340	0.82651	1.88603
2	0.021903	0.29056	6.2340	0.83772	1.77622
3	0.026325	0.34921	6.2340	0.81244	1.20199
4	0.019805	0.26273	6.2340	0.85058	1.16473
5	0.029660	0.39344	6.2340	0.79499	1.21789
z (m)	$\phi$	f	u (m/s)	v (m/s) $\times 10^{-2}$	
línea de corriente 1 (n=0 m)					
0	1.00000	4.01166	0.49000	6.07585	
0.05	0.99316	3.61788	0.48665	5.47594	
0.10	0.97267	2.49893	0.47661	3.784748	
0.15	0.93851	0.83950	0.45987	1.271468	
0.20	0.89070	-1.0611	0.43644	-1.607229	
0.25	0.82921	-2.8023	0.40631	-4.24422	
0.30	0.75407	-3.8993	0.36949	-5.90573	
línea de corriente 2 (n=2 m)					
0	1.00000	3.778103	0.4507345	0.012852	
0.05	0.99371	3.409684	0.4479021	0.011591	
0.10	0.97486	2.361876	0.4394051	0.008006	
0.15	0.94344	0.804842	0.4252435	0.002689	
0.20	0.89945	-0.985077	0.4054172	-.003399	
0.25	0.84290	-2.636263	0.3799263	-.008978	
0.30	0.77378	-3.69707	0.3487707	-.012492	
línea de corriente 3 (n=-2 m)					
0	1.000000	4.296497	0.5417154	7.953294	
0.05	0.9924478	3.870902	0.5376242	7.16547	
0.10	0.9697912	2.663073	0.5233509	4.929644	
0.15	0.9320303	0.8767267	0.5048952	1.622919	
0.20	0.8791649	-1.159101	0.4762572	-2.14562	
0.25	0.8111953	-3.005799	0.4394369	-5.564067	
0.30	0.7281211	-4.13722	0.394434	-7.658455	
línea de corriente 4 (n=3.91m)					
0	1.00000	3.503936	0.407562	3.67142	
0.05	0.9943181	3.164635	0.4052464	3.315901	
0.10	0.9772723	2.198709	0.3982992	2.303805	
0.15	0.9488627	0.7603056	0.3867205	7.966447	
0.20	0.9090891	-0.8996024	0.3705103	-0.9426023	
0.25	0.8579518	-2.442127	0.3496687	-2.558857	
0.30	0.7954506	-3.452941	0.3241956	-3.617987	

5.1.4.- Metodo de Kikkawa, Ikeda y Kitakawa (1976).

Este método permite determinar la velocidad secundaria (v) para cada línea de corriente y a una profundidad específica (ec. 2.48); además, permite conocer la variación del tirante a lo largo de la sección (ec. 2.53).

Los cálculos se efectuaron en lenguaje Quikbasic, la tabla 5.3 presenta los resultados obtenidos en donde se empleó la nomenclatura siguiente:

$v(j)$ = velocidad secundaria a la profundidad j medida a partir de la superficie libre del agua (ec. 2.48)

$d(i)$ = tirante para la línea de corriente i.

Tabla 5.3.a Método de Kikkawa, Ikeda y Kitagawa.

radio de curvatura 52 m					
línea de corriente	1	2	3	4	5
V(0)	0.02334	0.02247	0.022479	0.0036818	0.0042789
V(0.05)	0.02057	0.019811	0.019811	0.0032449	0.00377
V(0.10)	0.01160	0.011176	0.01176	0.0018304	0.0021273
V(0.15)	-0.004478	-0.004312	-0.00465	-0.000706	-0.000820
V(0.20)	-0.02852	-0.02746	-0.029664	-0.004498	-0.005228
V(0.25)	-0.00613	-0.059041	-0.063764	-0.009670	-0.011238
V(0.30)	-0.10357	-0.099737	-0.107716	-0.016335	-0.018948
	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)
tirantes(m)	0.34	0.55101	0.21365	0.8865	0.1397

5.1.5.- Método de Odgaard (1986).

En el capítulo cuatro se presentó una descripción del método y su nomenclatura, la Tabla 5.4 presenta los resultados del método aplicando el programa uno del apéndice A.

En el ejemplo se tomaron cinco tramos y 16 secciones, la ventaja de este método es que el cálculo lo realiza de forma continua para los cinco tramos, además que permite

conocer la posible pendiente transversal de fondo en los tramos rectos.

Tabla 5.3.b Método de Kikkawa, Ikeda y Kitagawa.

radio de curvatura 11 m					
línea de corriente	1	2	3	4	5
V(0)	0.02334	0.02247	0.022479	0.0036818	0.0042789
V(0.05)	0.02057	0.019811	0.019811	0.0032449	0.00377
V(0.10)	0.01160	0.011176	0.01176	0.0018304	0.0021273
V(0.15)	-0.004478	-0.004312	-0.00465	-0.000706	-0.000820
V(0.20)	-0.02852	-0.02746	-0.029664	-0.004498	-0.005228
V(0.25)	-0.00613	-0.059041	-0.063764	-0.009670	-0.011238
V(0.30)	-0.10357	-0.099737	-0.107716	-0.016335	-0.018948
	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)
tirantes (m)	0.34	0.55101	0.21365	0.8865	0.1397

Tabla 5.4.a Resultados del ejemplo uno aplicando el método de Odgaard

constantes de cálculo	
gasto de salida ( $m^3/s$ ) = 1.4	ancho efectivo (m) = 7.82
tirante medio (m) = 0.34	velocidad media (m/s) = 0.49
pendiente longitudinal = 0.0017	díametro medio (m) = 0.0002
parámetro de fricción = 2.6	número de Froude = 8.612
constante de Von Karman = 0.4	parámetro de Shields = 0.035
valor $a_p$ = 0.43163	valor $b_p$ = 0.88244
$\omega' = 0.91425$	fase de retraso = 0.2318115
número de tramos = 5	número de secciones = 16

Tabla 5.4.b Aplicación del método de Odgaard.

sección de la curva	radio de la curva (m)	distancia (m)	distancia acumulada (m)	sigma	Dsigma	pendiente completamente desarrollada	parámetro E	pendiente al inicio de la sección	pendiente transversal en la sección ( $\times 10^{-2}$ )
1,1	52	0	0	0	0	0.03926	0.99201	0	0.003134
1,2	52	5	5	0.6393	0.6393	0.03926	0.83320		0.654802
1,3	52	10	10	1.2787	0.6393	0.03926	0.45780		2.128690
1,4	52	15	15	1.9181	0.6393	0.03926	0.03294		3.797040
1,5	52	20	20	2.5575	0.6393	0.03926	-0.29950		5.102600
1,6	52	24	24	3.0690	0.5115	0.03926	-0.44320		5.666500
2,7	11	12	36	1.5345	1.5345	0.18561	0.28479	0.05666	14.88800
2,8	11	25	49	3.1969	1.6624	0.18561	-0.46024		24.49500
2,9	11	32	56	4.0920	0.8951	0.18561	-0.39327		23.63210
3,10	0	12	68	1.5345	1.5345	0	0.28479	0.23632	6.730243
3,11	0	15	71	1.9186	0.3836	0	0.03294		0.778544
4,12	11	12	83	1.5345	1.5345	0.18561	0.28479	0.00778	13.49680
4,13	11	20	91	2.5575	1.0230	0.18561	-0.29956		23.88880
4,14	11	23	94	2.9411	0.3836	0.18561	-0.41861		26.00512
5,15	0	5	99	0.6393	0.6393	0	0.83323	0.26005	21.66826
5,16	0	13	107	1.6624	1.0230	0	0.19864		5.165664

Tabla 5.4.c Aplicación del método de Odgaard.

línea de corriente n=0 m						línea de corriente n= 2 m				
sección de la curva	radio local de la curva (m)	beta	relación $d/d_c$	promedio $d/d_c$	relación $\mu$	radio local de la curva (m)	beta	relación $d/d_c$	promedio $d/d_c$	relación $\mu$
1,1	52	0.047	1	1	1	54	0.047	1.0018	1.0009	0.5660
1,2	52	1.001	1	1	1	54	1.001	1.0385	1.0201	0.6907
1,3	52	3.255	1	1	1	54	3.235	1.1307	1.0846	0.7913
1,4	52	5.807	1	1	1	54	5.807	1.2450	1.1878	0.8841
1,5	52	7.803	1	1	1	54	7.803	1.3424	1.2937	0.9726
1,6	52	8.666	1	1	1	54	8.666	1.3869	1.3646	1.0381
2,7	11	4.816	1	1	1	13	4.816	2.2360	1.8114	1.2270
2,8	11	7.925	1	1	1	13	7.925	3.7581	2.9970	1.5807
2,9	11	7.645	1	1	1	13	7.645	3.5867	3.6742	1.7781
3,10	0	0	1	1	1	2	0	1.3958	2.4913	1.9886
3,11	0	0	1	1	1	2	0	1.0457	1.2208	1.8631
4,12	11	4.366	1	1	1	9	4.366	0.4163	0.7310	1.1879
4,13	11	7.728	1	1	1	9	7.728	0.2120	0.3142	0.5105
4,14	11	8.413	1	1	1	9	8.413	0.1848	0.1984	0.3319
5,15	0	0	1	1	1	2	0	0.0500	0.1174	0.1271
5,16	0	0	1	1	1	2	0	0.5200	0.2850	0.2644

Tabla 5.4.d Aplicación del método de Odgaard.

línea de corriente n=-2 m						línea de corriente n= 3.91 m				
sección de la curva	radio local de la curva (m)	beta	relación d/d <sub>c</sub>	promedio d/d <sub>c</sub>	relación μ	radio local de la curva (m)	beta	relación d/d <sub>c</sub>	promedio d/d <sub>c</sub>	relación μ
1,1	50	0.04794	0.998	0.9990	1.440	55.91	0.0479	1.0034	1.0017	0.0620
1,2	50	1.00146	0.961	0.9798	1.309	55.91	1.0014	1.0753	1.0393	0.3287
1,3	50	3.25564	0.880	0.9208	1.194	55.91	3.2556	1.2662	1.1707	0.5314
1,4	50	5.80724	0.796	0.8382	1.081	55.91	5.8072	1.5235	1.3948	0.7069
1,5	50	7.80398	0.736	0.7666	0.974	55.91	7.8039	1.7608	1.6421	0.8697
1,6	50	8.66649	0.712	0.7240	0.900	55.91	8.6664	1.8744	1.8176	0.9909
2,7	9	4.81698	0.380	0.5461	0.714	14.91	4.8169	4.3275	3.1010	1.3086
2,8	9	7.92511	0.204	0.2921	0.371	14.91	7.9251	11.130	7.7325	1.8139
2,9	9	7.64570	0.216	0.2097	0.266	14.91	7.6457	10.230	10.683	2.0958
3,10	2	0	0.604	0.4098	0.392	3.91	0	1.7740	6.0020	2.6237
3,11	2	0	0.954	0.7791	0.487	3.91	0	1.0895	1.4317	2.4555
4,12	13	4.36661	2.073	1.5140	0.834	7.09	4.3661	0.1469	0.6182	1.3246
4,13	13	7.72852	3.636	2.8554	1.125	7.09	7.7285	0.0335	0.0902	0.1419
4,14	13	8.41342	4.077	3.8571	1.243	7.09	8.4134	0.0248	0.0292	0.0453
5,15	2	0	2.275	3.1760	1.451	3.91	0	0.0002	0.0125	0.5442
5,16	2	0	1.304	1.7892	1.545	3.91	0	0.4059	0.2030	2.6267

Tabla 5.4.e Aplicación del método de Odgaard.

Línea de corriente n=-3.91 m					
sección de la curva	radio local de la curva (m)	beta	relación $d/d_c$	promedio $d/d_c$	relación $\mu$
1,1	48.09	0.04794	0.9962	0.9981	1.2100
1,2	48.09	1.0014	0.9247	0.9604	1.1560
1,3	48.09	3.2556	0.7753	0.8500	1.0736
1,4	48.09	5.8072	0.6351	0.7052	0.9484
1,5	48.09	7.8039	0.5433	0.5892	0.8052
1,6	48.09	8.6664	0.5079	0.5256	0.7046
2,7	7.09	4.8169	0.1205	0.3143	0.5010
2,8	7.09	7.9251	0.0307	0.0756	0.1173
2,9	7.09	7.6457	0.0348	0.0327	0.0508
3,10	3.91	0	0.2260	0.1304	0.1303
3,11	3.91	0	0.9104	0.5682	0.2697
4,12	14.91	4.3666	3.7736	2.3420	0.7228
4,13	14.91	7.7285	10.491	7.1324	1.0779
4,14	14.91	8.4134	12.920	11.705	1.2172
5,15	3.91	0	3.4918	8.2062	1.5197
5,16	3.91	0	1.5940	2.5429	1.7287

#### 5.1.6.-Comparación de métodos

La Tabla 5.5 presenta un resumen de los métodos para determinar el tirante y la sobreelevación de la superficie libre del agua.

Se observa que la sobreelevación de la superficie libre del agua es de magnitud pequeña, lo cual se justifica en el método de Odgaard (1986). A un mayor radio de curvatura, dicha sobreelevación será menor, en los dos métodos propuestos (Drinker y Woodward) los resultados son prácticamente iguales.

Por lo que respecta a la determinación de tirantes máximos para el radio de curvatura de 52 m, los tres métodos de Maza, Kikkawa et al y Odgaard generan resultados semejantes; sin embargo, para el radio menor, con el método

de Odgaard se obtuvo un tirante que aumenta considerablemente, el cual se podría suponer que está fuera del orden de magnitud de los tirantes; sin embargo, de mediciones en el Fall River se determinaron tirantes cercanos al calculado (Odgaard, 1986), es posible que las curvas de aguas arriba producen un efecto inercial a las curvas de aguas abajo, generando un tirante mayor que aquel que ocurre si se analizan curvas aisladas.

Tabla 5.5 Comparación de métodos

Método	radio de curvatura (m)	tirante medio en la curva (m)	tirante máximo en la curva (m)	desnivel en la superficie del agua (m)
Maza	52	0.4152	0.5018	-----
Maza	11	0.6066	-----	-----
Boussinesq	52	0.4224	-----	-----
Boussinesq	11	0.9370	-----	-----
Woodward	52	-----	-----	0.0048
Woodward	11	-----	-----	0.0226
Drinker	52	-----	-----	0.0042
Drinker	11	-----	-----	0.0222
Kikkawa et al	52	0.3400	0.8865	-----
Odgaard	52	0.3400	0.6358	-----
Odgaard	11	0.3400	4.3930	-----

**5.1.7.-Resumen de las velocidades medias principales para una vertical dada.**

Los métodos que se pueden comparar son el método de Odgaard y el método de Engelund (primera aproximación).

El método de Engelund genera los valores de la velocidad principal a una profundidad determinada; por lo cual, para determinar su valor medio se emplea el criterio de Chow (Sotelo, 1993), el cual permite determinar el valor medio de la velocidad a una profundidad de  $0.6d$ , o también con el

promedio de los valores a 0.2d y 0.8 d, obteniéndose los resultados en las Tablas 5.6 y 5.7.

Tabla 5.6 Velocidades medias para cada línea de corriente con el método de Engelund para el radio R=52 m

línea de corriente	velocidad a 0.6d (m/s)	velocidad a 0.2d (m/s)	velocidad a 0.8 d (m/s)	promedio de las columnas 3 y 4	sección en que ocurre la misma velocidad en el método de Odgaard.
uno	0.436	0.486	0.387	0.436	-----
dos	0.429	0.496	0.382	0.439	entre la 2 y 3
tres	0.444	0.496	0.393	0.444	-----
cuatro	0.4227	0.469	0.377	0.423	entre la 4 y 5
cinco	0.4515	0.505	0.399	0.452	entre la 4 y 5

Tabla 5.7 Velocidades medias para cada línea de corriente con el método de Engelund para el radio R=11 m

línea de corriente	velocidad a 0.6d (m/s)	velocidad a 0.2d (m/s)	velocidad a 0.8 d (m/s)	promedio de las columnas 3 y 4	sección en que ocurre la misma velocidad en el método de Odgaard.
uno	0.436	0.486	0.387	0.436	-----
dos	0.405	0.447	0.364	0.405	entre 12 y 13
tres	0.476	0.537	0.417	0.477	entre 12 y 13
cuatro	0.3705	0.4052	0.336	0.371	entre 12 y 13
cinco	0.526	0.6047	0.4517	0.528	entre 13 y 14

Los resultados obtenidos por el método de Odgaard son mayores que los del método de Engelund. Para efectos de comparación, se presenta la sección en la que la velocidad media, obtenida del método de Engelund es igual a la del método de Odgaard, ya que en este método la velocidad media para una línea de corriente varía de sección a sección. Los resultados muestran que existe una ocurrencia de valores aproximados en la misma sección.

#### 5.1.8.- Distribución de velocidades en la dirección secundaria.

Los métodos que se pueden comparar son el método de Engelund (primera aproximación) y el método de Kikkawa et al. Para el radio de 52 m con ambos métodos se obtienen valores semejantes; sin embargo, para el radio de 11 m el método de Kikkawa produce valores que se incrementan notablemente, esto concuerda con la suposición que radios pequeños desarrollan velocidades secundarias altas.

#### 5.2.- Ejemplo dos.

Este ejemplo también se tomo del artículo de Odgaard (1986), del estudio del río "Muddy Creek", U.S.A., la figura 5.2 muestra el trazo en planta del río, el gasto empleado fue  $Q= 1.1 \text{ m}^3/\text{s}$ , el ancho promedio fue de 4.8 m, el diámetro medio del grano  $D_m= 0.7 \text{ mm}$ , la pendiente de la superficie libre del agua medida fue de  $S_o=0.0014$ , el peso específico del material del fondo fue de  $2700 \text{ kg/m}^3$ , el tirante medio medido se determinó como  $d_c=0.4\text{m}$ . De reportes de Dietrich y Smith (1983), la trayectoria del río se ajustaba a una curva seno, con un ángulo inicial de  $\theta_o=1.21$  y una longitud total de  $L= 50.4\text{m}$ .

##### 5.2.1.- Método de Zimmermann y Kennedy (1978)

Aplicando la ec. 2.47 se puede determinar la pendiente transversal del fondo a lo largo del cauce, con los datos se obtuvieron los resultados en la Tabla 5.8.

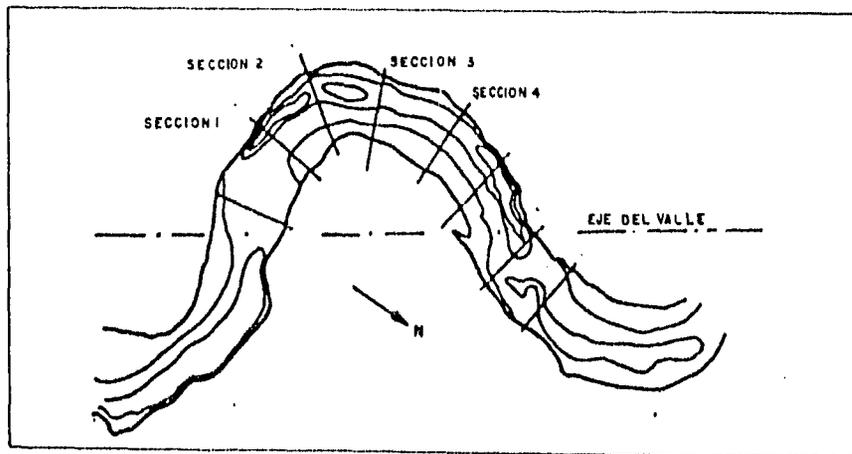


Fig. 5.2 Tramo del Río Muddy Creek (Odgaard, 1986)

Tabla 5.8 Determinación de la pendiente transversal del fondo.

distancia (m)	radio de curvatura (m)	Pendiente transversal del fondo
5.04	13.6104	0.1354
10.08	8.411	0.21912
15.12	8.411	0.21912
20.16	13.6104	0.1354
25.2	$\infty$	-----
30.24	-13.6104	-0.1354
35.28	-8.411	-0.21912
40.32	-8.411	-0.21912
45.46	-13.61	-0.1354
50.4	$\infty$	-----

#### 5.2.2.- Método de Englund (1974)

Aplicando la ecuación 2.39, se pueden determinar las variaciones del tirante a lo largo del tramo en el río, para el cálculo se tomaron secciones a cada 5.04 m, y las líneas de corriente propuestas se midieron transversalmente a 2 m en ambos lados de la línea central, los resultados

obtenidos se resumen en la Tabla 5.9, en donde la nomenclatura empleada es la siguiente:

$d(j)$ = tirante para la línea de corriente  $i$ , en la sección  $j$ .

Tabla 5.9 Método de Engelund para determinar el tirante.

tirante (m)	línea de corriente 1	línea de corriente 2	línea de corriente 3
d(1)	0.39	0.678742	0.2051669
d(2)	0.39	0.9235148	0.1301817
d(3)	0.39	0.9235148	0.1301817
d(4)	0.39	0.6787427	0.2051669
d(5)	0.39	0.3900183	0.3899817
d(6)	0.39	0.2051851	0.6786979
d(7)	0.39	0.1301866	0.9234933
d(8)	0.39	0.1301767	0.9235364
d(9)	0.39	0.205147	0.6787875
d(10)	0.39	0.3899452	0.3900548

5.2.3.- Método de Engelund (1974), segunda aproximación.

Aplicando este método se puede determinar la velocidad media (ec. 2.40), y el tirante (ec. 2.41) para una línea de corriente, se emplearon 10 secciones, y a la misma distancia, para las líneas de corriente del método anterior.

Los resultados se presentan en la Tabla 5.10, enseguida se define la nomenclatura empleada:

$d(j)$ = tirante para la línea de corriente  $i$ , en la sección  $j$ .

$u(j)$ = velocidad principal para la línea de corriente  $i$ , en la sección  $j$ .

Tabla 5.10.a Método de Engelund (segunda aproximación)  
para determinar la velocidad principal a lo  
largo del cauce.

velocidad (m/s)	línea de corriente 1	línea de corriente 2	línea de corriente 3
u(1)	0.587	0.6071566	0.5668434
u(2)	0.587	0.5946897	0.5793013
u(3)	0.587	0.5793002	0.5946999
u(4)	0.587	0.5668427	0.6071573
u(5)	0.587	0.5620847	0.6119153
u(6)	0.587	0.5668435	0.6071565
u(7)	0.587	0.5793015	0.5946985
u(8)	0.587	0.5947000	0.5793000
u(9)	0.587	0.6071574	0.5668426
u(10)	0.587	0.6119153	0.5620847

Tabla 5.10.b Método de Engelund para determinar el tirante  
(segunda aproximación).

Tirante (m)	línea de corriente 1	línea de corriente 2	línea de corriente 3
d(1)	0.39	0.5520805	0.2279195
d(2)	0.39	0.6522524	0.1277475
d(3)	0.39	0.65225242	0.1277475
d(4)	0.39	0.5520805	0.2279195
d(5)	0.39	0.3899990	0.3900010
d(6)	0.39	0.2279179	0.5520821
d(7)	0.39	0.1277469	0.6522530
d(8)	0.39	0.1277481	0.6522518
d(9)	0.39	0.2279211	0.5520788
d(10)	0.39	0.3900030	0.3899970

5.2.4.- Método de Odgaard (1986), ajuste a una senoide.

En la Tabla 5.11 se resumen los resultados obtenidos  
aplicando el programa dos del apéndice A, la descripción y

nomenclatura de este programa se presenta en el capítulo cuatro, se emplearon diez secciones a lo largo del cauce.

El cálculo se realizó para tres líneas de corriente, una en el eje central y las otras a 2 m en ambos lados, medidas a partir del eje central.

Tabla 5.11.a Método de Odgaard, aplicando el criterio de ajuste a una senoide.

Constantes de cálculo	
gasto de salida = 1.1 m <sup>3</sup> /s	ancho efectivo B= 4.02 m
tirante del flujo (m)=0.39	velocidad media (m/s)=0.589
pendiente longitudinal=0.014	diámetro medio (m)= 0.0007
parámetro de fricción= 3.2115	número de Froude= 5.438
constante de Von Karman= 0.4	U* (m/s)= 0.07318
Re*= 53.926	parámetro N= 7.22304
parámetro omega= 0.77594	parámetro G= 0.18596
fase de retraso=0.717337	parámetro ap= 1.3538
frecuencia del meandro=0.415	longitud del meandro=50.4
fip= 0.5645133	vel. de retraso spp=13.75
distancia de retraso sp=4.528	parámetro stcm= 0.203676

línea de corriente 1				
distancia (m)	radio local (m)	Stc	beta	tirante (m)
5.04	13.610	0.01298	0.4532018	0.39
10.08	8.411	0.1299	2.803463	0.39
15.120	8.411	0.1973	4.256	0.39
20.16	13.610	0.1892	6.606	0.39
25.2	13.610	0.1089	3.80277	0.39
30.24	-13.610	-0.01298	0.45324	0.39
35.28	-8.411	-0.12987	2.8034	0.39
40.32	-8.411	-0.19732	4.25601	0.39
45.36	-13.610	-0.18929	6.60630	0.39
50.4	-13.610	-0.10896	3.80276	0.39

Tabla 5.11.b Método de Odgaard, aplicando el criterio de ajuste a una senoide.

línea de corriente 1			
rel. $d/d_c$	rel. $s/L$	incremento $\Delta\mu$	rel. $\mu$
1	0.1	0	1
1	0.2	0	1
1	0.3	0	1
1	0.4	0	1
1	0.5	0	1
1	0.6	0	1
1	0.7	0	1
1	0.8	0	1
1	0.9	0	1
1	1.0	0	1

Tabla 5.11.c Método de Odgaard, aplicando el criterio de ajuste a una senoide.

línea de corriente 2					
distancia (m)	radio local (m)	tirante (m)	rel. $d/d_c$	incremento $\Delta\mu$	rel. $\mu$
5.04	15.610	0.415	1.0641	0.0913517	0.5822
10.08	10.411	0.709	1.8184	0.12308	0.6736
15.120	10.411	0.966	2.479	0.13688	0.7967
20.16	15.610	0.964	2.473	0.1391	0.9335
25.2	15.610	0.656	1.684	-0.0204605	1.0727
30.24	-11.610	0.362	0.9304	0.01164	1.0522
35.28	-6.4116	0.182	0.4671	-0.2716	1.0639
40.32	-6.4116	0.122	0.3149	-0.3387	0.7922
45.36	-11.610	0.136	0.3499	-0.03478	0.45350
50.4	-11.610	0.213	0.5464	0.1635	0.41872

Tabla 5.11.d Método de Odgaard, aplicando el criterio de ajuste a una senoide.

línea de corriente 3					
distancia (m)	radio local (m)	tirante (m)	rel. $d/d_c$	incremento $\Delta\mu$	rel. $\mu$
5.04	11.61045	0.36289	0.9305045	0.011655	1.05224
10.08	6.4117	0.187218	0.467138	-0.027166	1.06390
15.120	6.4117	0.12281	0.3149	-0.33872	0.79223
20.16	11.61045	0.13648	0.34995	-0.034789	0.45351
25.2	11.61045	0.21310	0.54641	0.16354	0.41872
30.24	-15.61032	0.415004	1.06411	0.09135	0.582267
35.28	-10.41168	0.70920	1.81848	0.12308	0.67362
40.32	-10.41172	0.96679	2.4789	0.13688	0.79670
45.36	-15.6105	0.964761	2.4737	0.13912	0.93359
50.4	-15.6105	0.656886	1.6843	-0.020459	1.07271

### 5.2.5.- Comparación de resultados

#### 5.2.5.1.- Pendiente transversal del fondo

Se pueden realizar las comparaciones del método de Zimmermann y el de Odgaard (Tabla 5.12), a lo largo del cauce algunos valores son semejantes, aunque se debe recordar que el método de Zimmermann fue determinado para el flujo a completo desarrollo y su pendiente es la tercera parte de la pendiente a completo desarrollo propuesta por Odgaard.

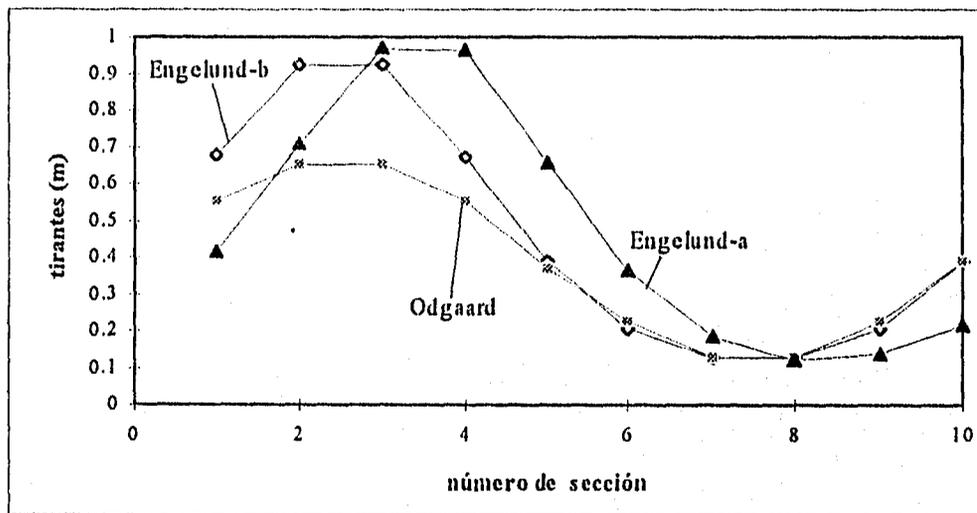
Tabla 5.12 Comparación de la pendiente transversal del fondo.

S	Rc	$S_T$ (Zimmerman) (ec. 2.47)	$S_T$ (Odgaard) (ec. 3.92)
5.04	13.6104	0.1354	0.012986
10.08	8.411	0.21912	0.1299797
15.12	8.411	0.21912	0.1973251
20.16	13.6104	0.1354	0.1892987
25.2	$\infty$	-----	-----
30.24	-13.6104	-0.1354	-0.0128774
35.28	-8.411	-0.21912	-0.1299809
40.32	-8.411	-0.21912	-0.1973255
45.46	-13.61	-0.1354	-0.1892982
50.4	$\infty$	-----	-0.1089651

5.2.5.2.- Comparación del tirante para cada línea de corriente y sección.

La comparación se puede determinar con el método de Engelund (segunda aproximación), el de Engelund (ec. 2.39) y el de Odgaard (segundo método).

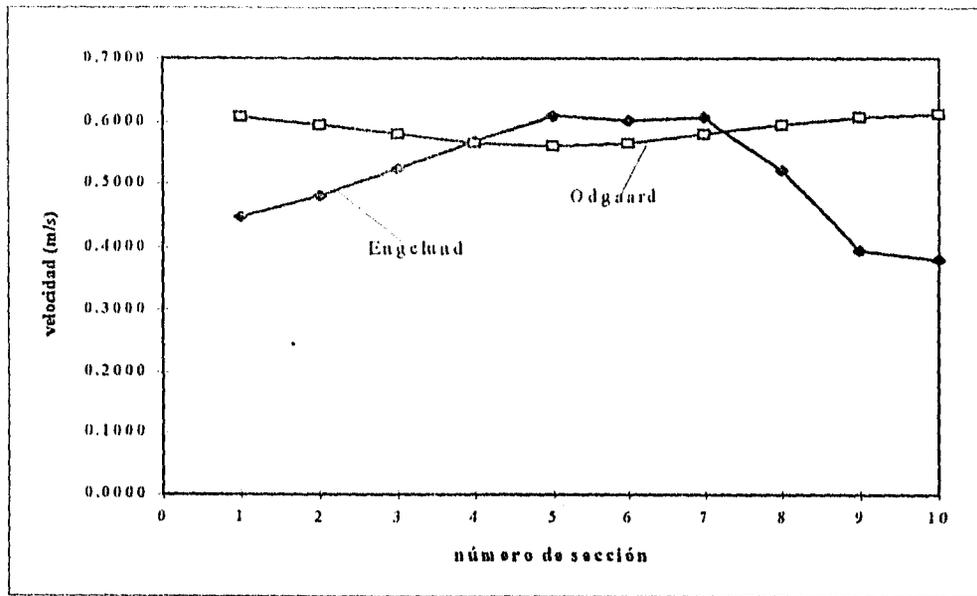
Como ejemplo comparativo se emplea para una línea de corriente, la gráfica 5.1 presenta las variaciones para la línea de corriente dos, se puede notar que esta variación entre los métodos es pequeña, por lo que los tres métodos generan resultados satisfactorios.



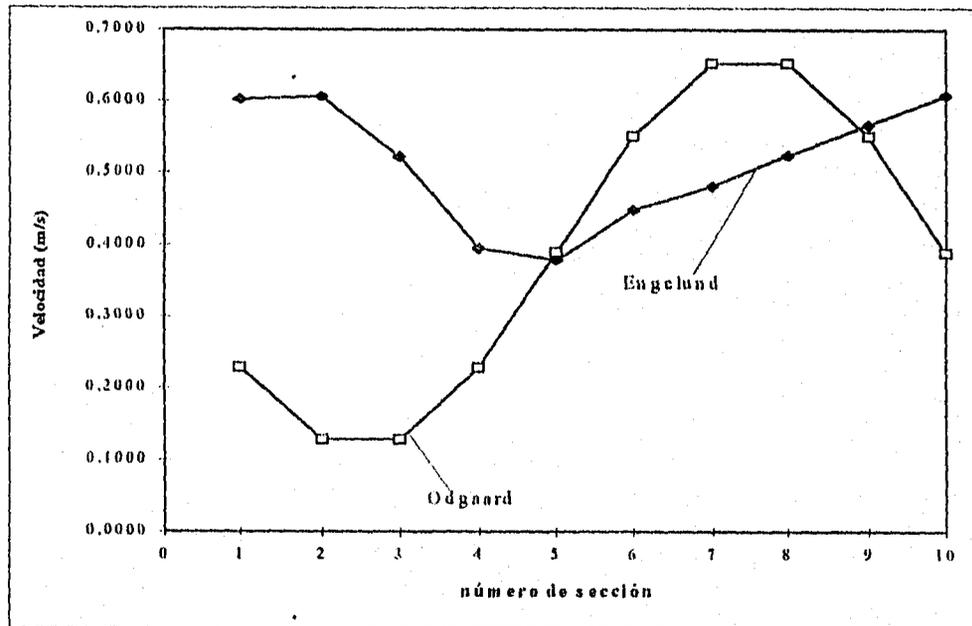
Gráfica 5.1 Comparación de tirantes para la línea de corriente n=2 m.

5.2.5.3.- Comparación de velocidades medias para cada línea de corriente.

Los métodos que se comparan son el método de Engelund y el Método de Odgaard, los datos se presentan en las gráficas 5.2 y 5.3 para las líneas de corriente medidas a 2 m hacia ambos lados a partir del centro del cauce. Los resultados muestran que sus valores varían de un 10 hasta un 60% entre sí.



Gráfica 5.2 Comparación de las velocidades medias para la línea de corriente n=2m.



Gráfica 5.3 Comparación de las velocidades medias para la línea de corriente n=3.9 m.

### 5.3.- Ejemplo tres.

El siguiente ejemplo corresponde a un problema que presenta un tramo del Río Colorado en la parte fronteriza de México con los Estados Unidos. La construcción de obras de protección por parte de los Estados Unidos, modificaron el trazo del cauce produciendo erosión en áreas de cultivo en México (fig. 5.3).

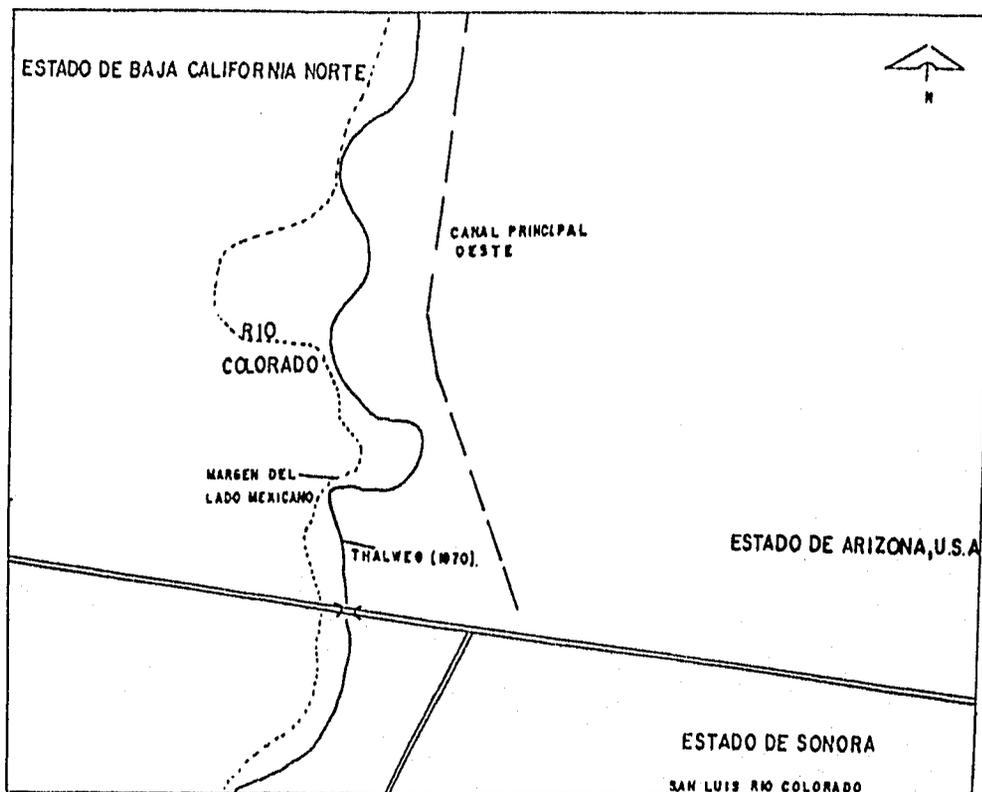
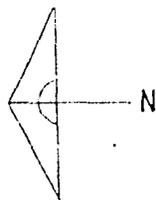


Fig. 5.3 Ubicación del tramo del Río Colorado

En este ejemplo se intentó aplicar el modelo numérico de Odgaard, para predecir con las condiciones iniciales del cauce (1970), las zonas susceptibles a erosionarse.

En el tramo del Río Colorado estudiado, se ajustó al thalweg un conjunto de tramos curvos y rectos sin considerar las condiciones límites de estabilidad, con el fin de representar las condiciones naturales del cauce (fig. 5.4).



ESTADOS UNIDOS

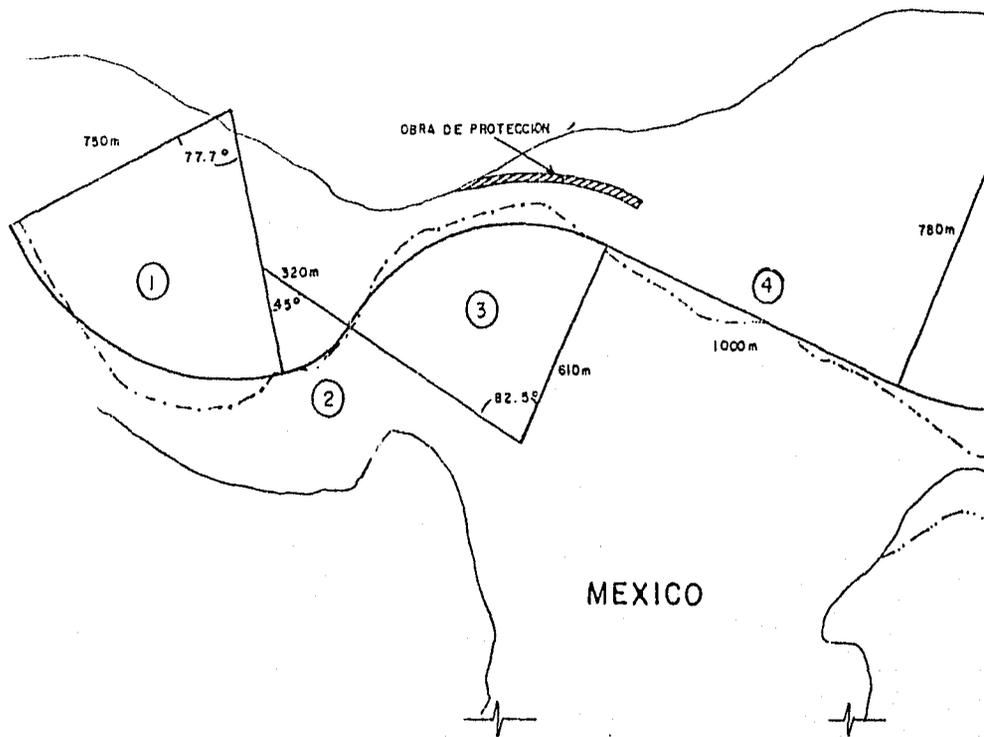
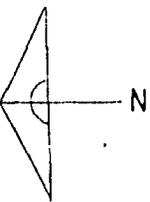


FIGURA 5.4.-TRAMO DEL RIO COLORADO

- |         |                        |         |                       |
|---------|------------------------|---------|-----------------------|
| —       | EJE DEL CAUCE AJUSTADO | - - - - | THALWEG 1970          |
| - - - - | MARGEN DEL CAUCE 1987  | —       | MARGEN DEL CAUCE 1970 |

ESCALA 1:20000



ESTADOS UNIDOS

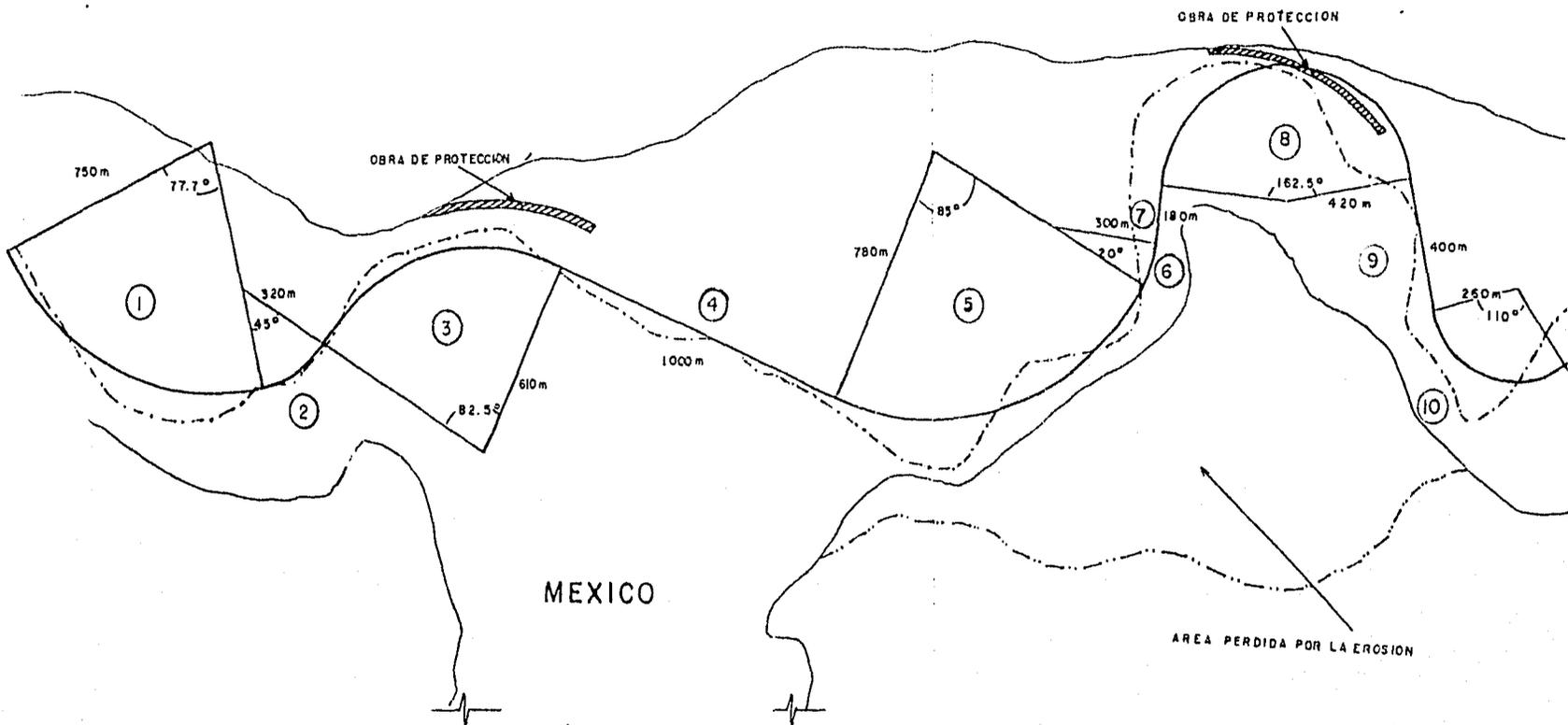
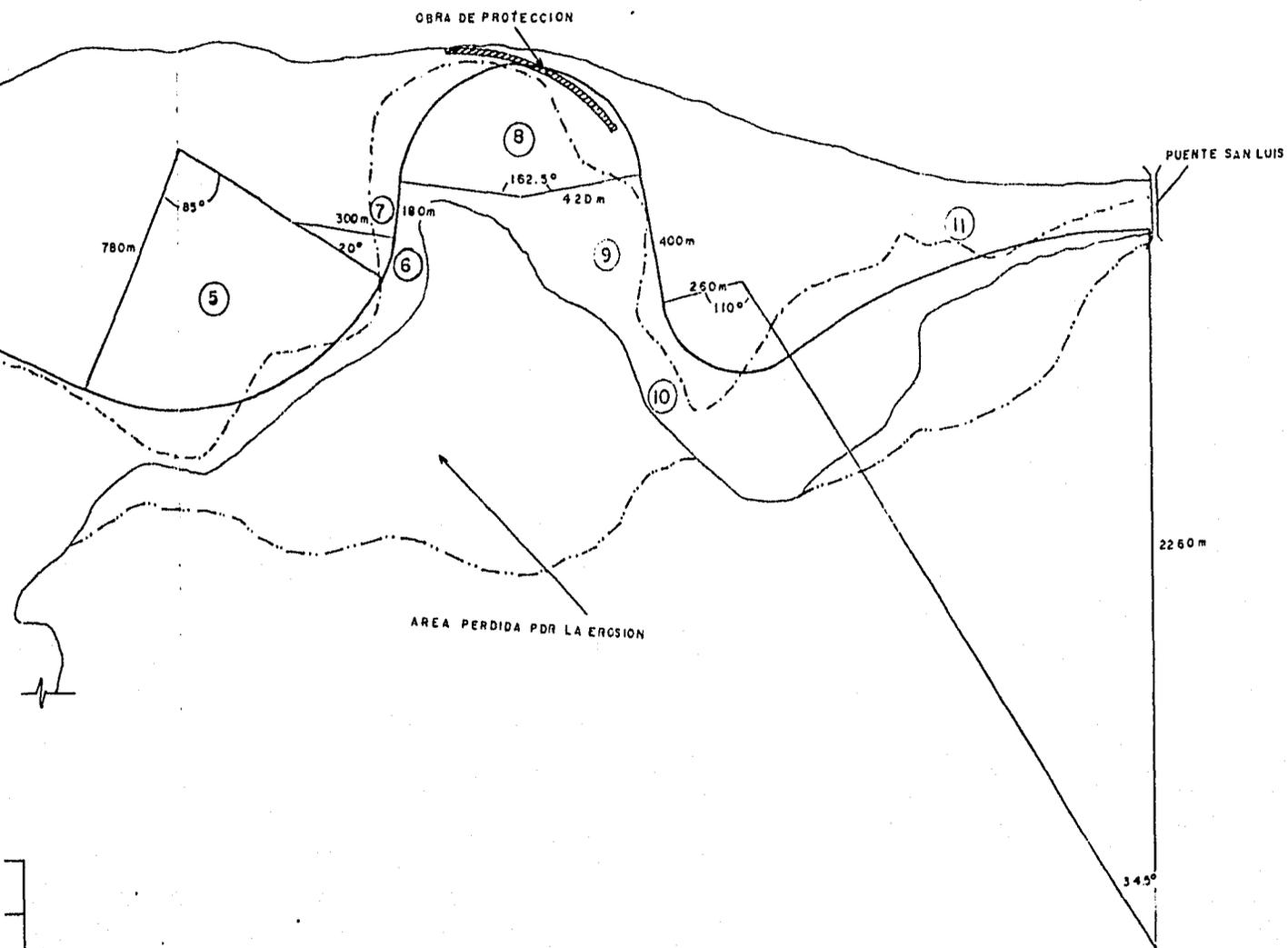


FIGURA 5.4.-TRAMO DEL RIO COLORADO

- EJE DEL CAUCE AJUSTADO
- THALWEG 1970
- ..... MARGEN DEL CAUCE 1987
- MARGEN DEL CAUCE 1970

ESCALA 1:20000

NIDOS



Los datos del cauce fueron los siguientes (Gracia, 1995):

La pendiente longitudinal del fondo fué de 0.000264. Se analizaron dos gastos el primero de 1000 m<sup>3</sup>/s correspondiente al gasto máximo registrado y el segundo de 500 m<sup>3</sup>/s correspondiente a las descargas medias máximas. El peso específico del material del cauce fué de 2650 kg/m<sup>3</sup>, se empleó un coeficiente de rugosidad de Manning de  $n = 0.027$ . Las Tablas 5.13 y 5.14 presentan un resumen de los anchos y tirantes del tramo estudiado; con estos datos se calcularon los valores promedios y se aplicó el método de Odgaard.

Tabla 5.13 Valores de tirantes y anchos para el tramo en estudio para un gasto de 1000 m<sup>3</sup>/s

Estación	Tirante (m)	Ancho del nivel del agua (m)
1	3.750	984
2	3.834	224
3	3.523	558
4	2.985	773
5	3.082	811
6	3.212	433
promedios	3.400	630

La Tabla 5.15 presenta los datos de algunas de las secciones estudiadas, así como su distancia y la pendiente transversal calculada para cada sección.

Tabla 5.14 Valores de tirantes y anchos para el tramo en estudio para un gasto de 500 m<sup>3</sup>/s

Estación	Tirante (m)	Ancho del nivel del agua (m)
1	3.000	630
2	3.113	211
3	2.730	335
4	2.375	549
5	2.482	587
6	2.592	342
promedios	2.715	442

Tabla 5.15 Datos de las secciones, distancia y pendiente transversal para la ultima sección de cada tramo.

Número de sección	Distancia (m)	Pendiente transversal
(1,1)	0	-1.197 E-05
(1,11)	1015	2.757 E-02
(2,14)	1266	2.993 E-02
(3,23)	2144	2.4511 E-02
(4,31)	3144	-8.038 E-03
(5,43)	4301	3.545 E-02
(6,45)	4406	3.577 E-02
(7,49)	4586	3.360 E-02
(8,61)	5777	3.810 E-02
(9,65)	6177	2.719 E-02
(10,70)	6676	4.082 E-02
(11,84)	8036	-2.062 E-02

### 5.3.2.- Resultados y comentarios

En la gráfica 5.4 se presentan para algunas secciones al inicio de cada tramo, la configuración de la pendiente transversal calculada comparada con la medida en el campo (1987). Como se observa, la pendiente calculada es más pronunciada, esto conduce a la conclusión que si el cauce estuviera perfectamente confinado posiblemente se representarían estas pendientes.

Las figuras 5.5 y 5.6 presentan las variaciones de la velocidad principal y del esfuerzo cortante para los gastos propuestos. Se observa que para el gasto de 1000 m<sup>3</sup>/s, la zona de mayor velocidad ocurre en el sitio donde se encuentra una de las obras de protección de los Estados Unidos.

Para el caso del gasto de 500 m<sup>3</sup>/s, una de las zonas con mayor velocidad se encontró entre los tramos 6 y 7 en la margen cóncava, ubicada frente a las zonas erosionadas del lado mexicano. Así también existen velocidades altas en la zona cercana al Puente San Luis.

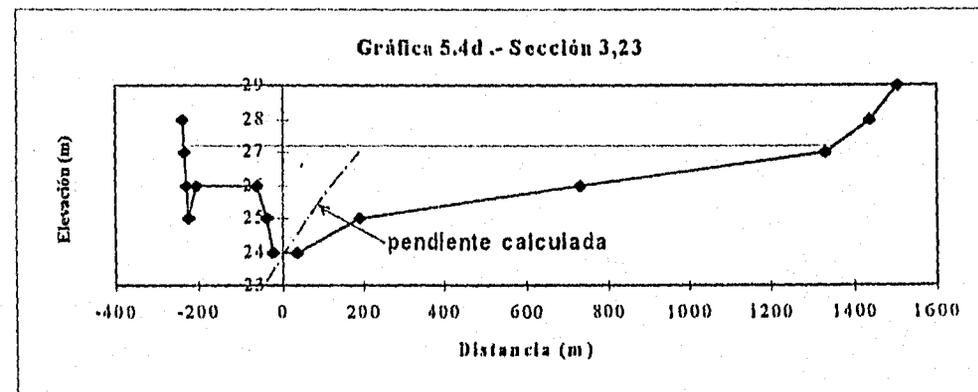
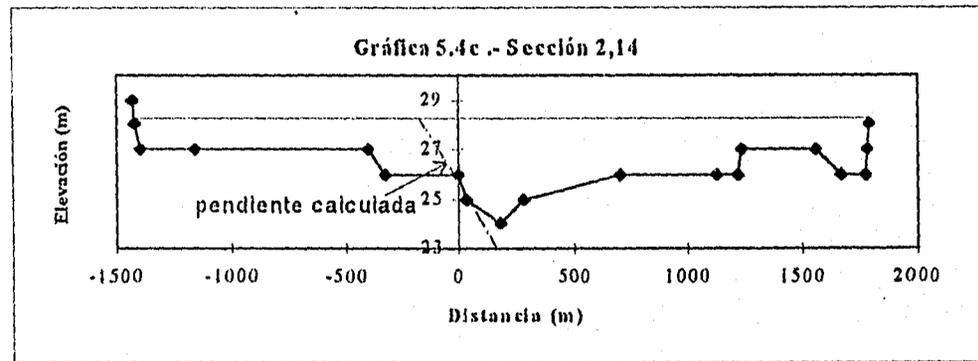
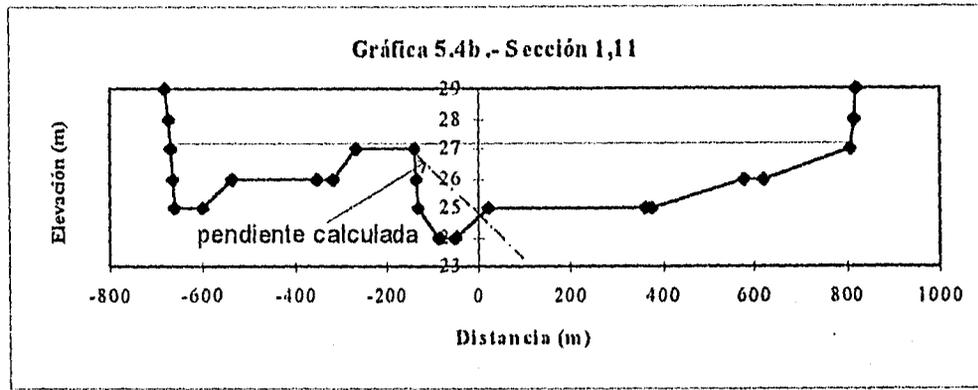
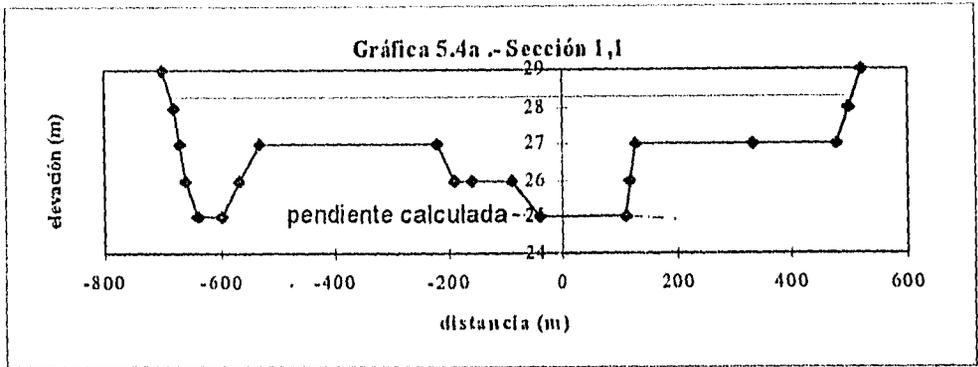
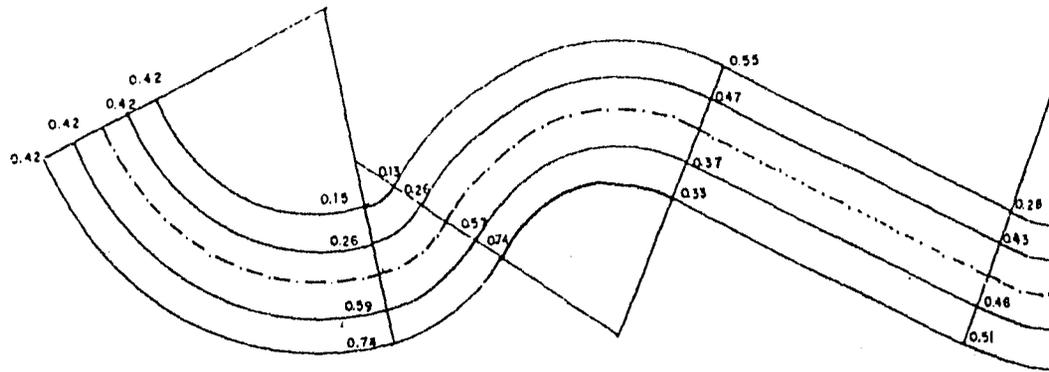
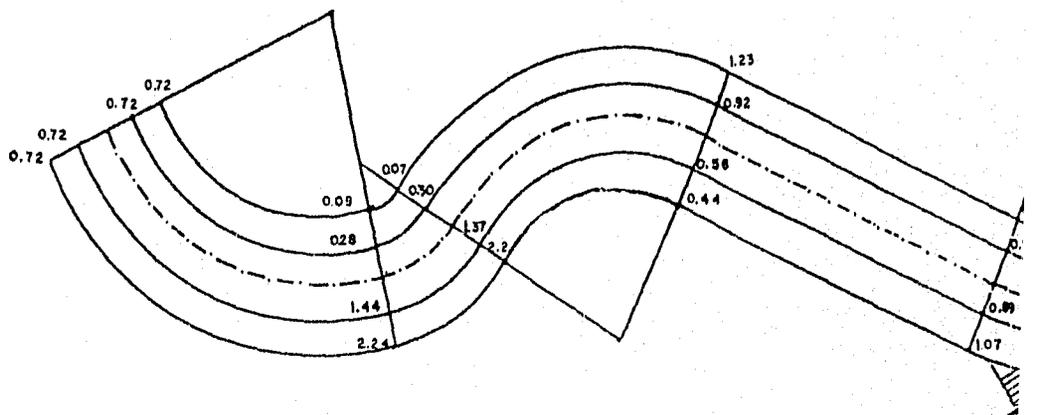


FIGURA 5.5.- VARIACION DE LA VELOCIDAD Y ESFUERZO CORTANTE

VARIACION DE LA VELOCIDAD PRINCIPAL A LO LARGO DEL CAU

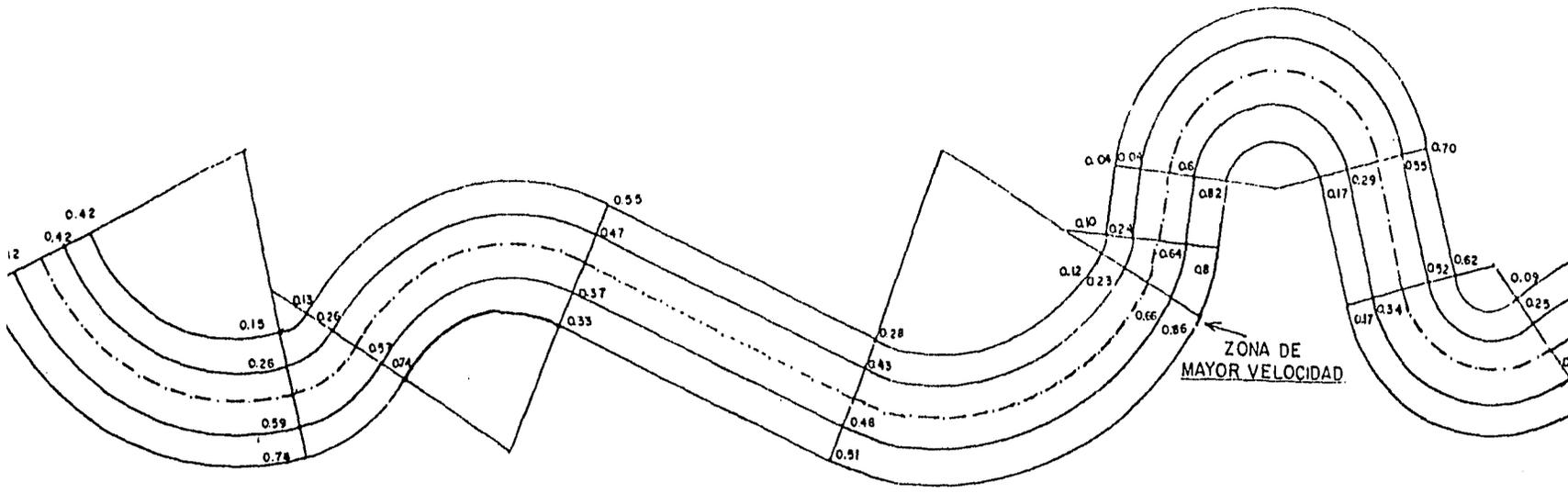


VARIACION DEL ESFUERZO CORTANTE A LO LARGO DEL CA



RA 5.5.- VARIACION DE LA VELOCIDAD Y ESFUERZO CORTANTE PRINCIPALES

VARIACION DE LA VELOCIDAD PRINCIPAL A LO LARGO DEL CAUCE



DAT
GASTO
LINEAS
DEL EJ
AMBOS L
ANCHO I
VELOCID
ESFUER

VARIACION DEL ESFUERZO CORTANTE A LO LARGO DEL CAUCE

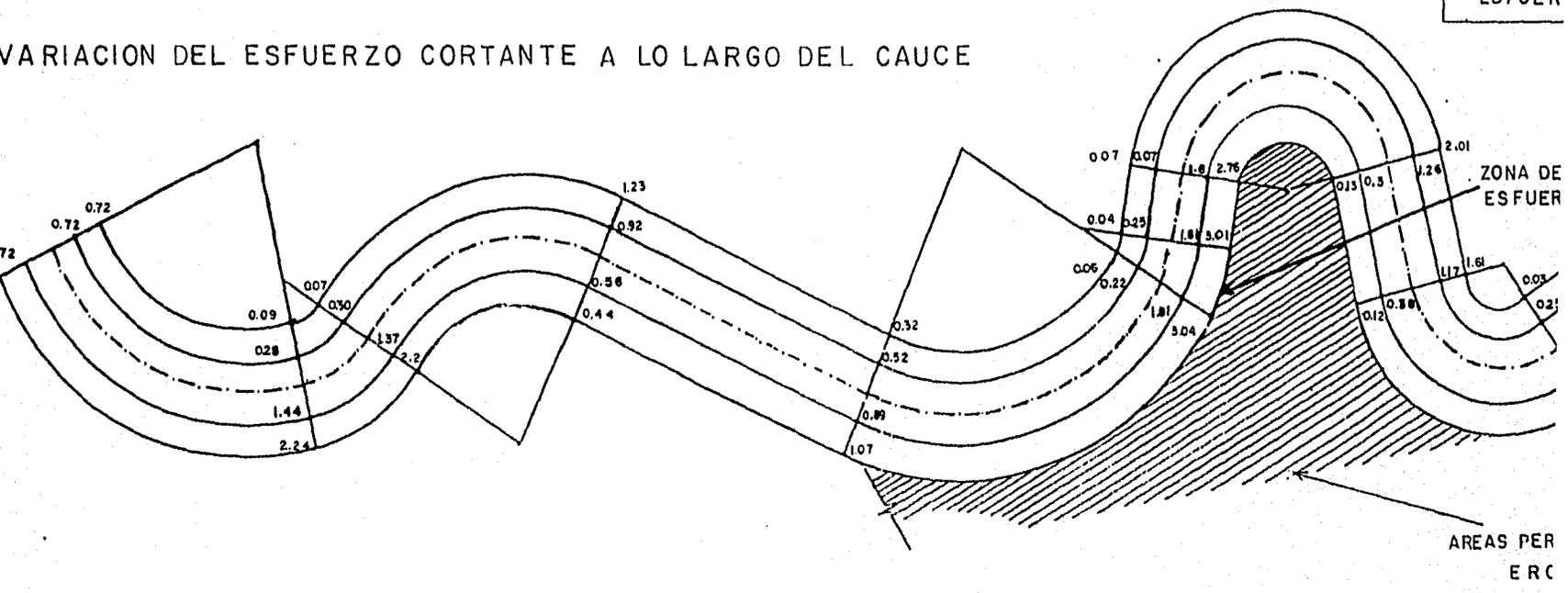
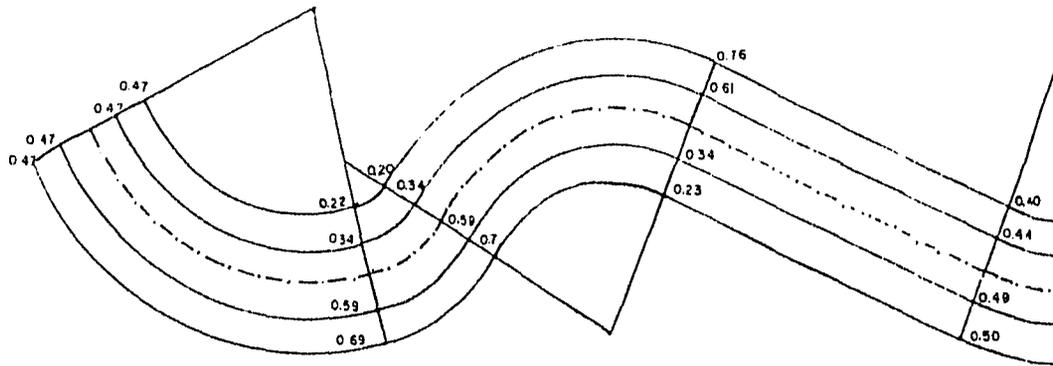




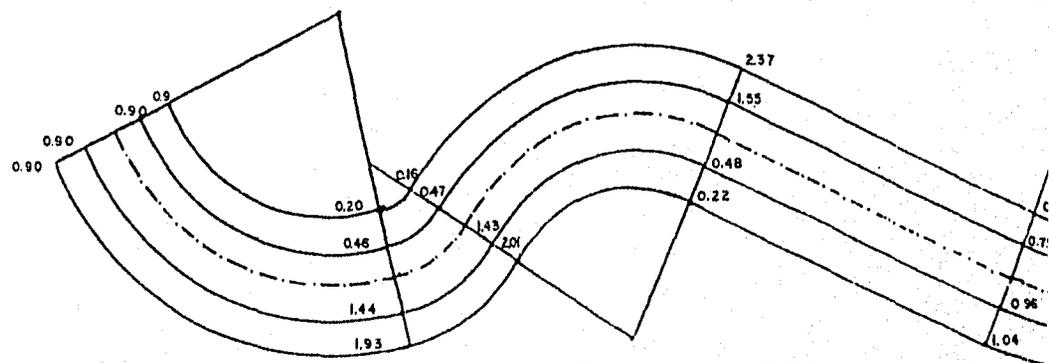


FIGURA 5.6.- VARIACION DE LA VELOCIDAD Y ESFUERZO CORTANTE

VARIACION DE LA VELOCIDAD PRINCIPAL A LO LARGO DEL

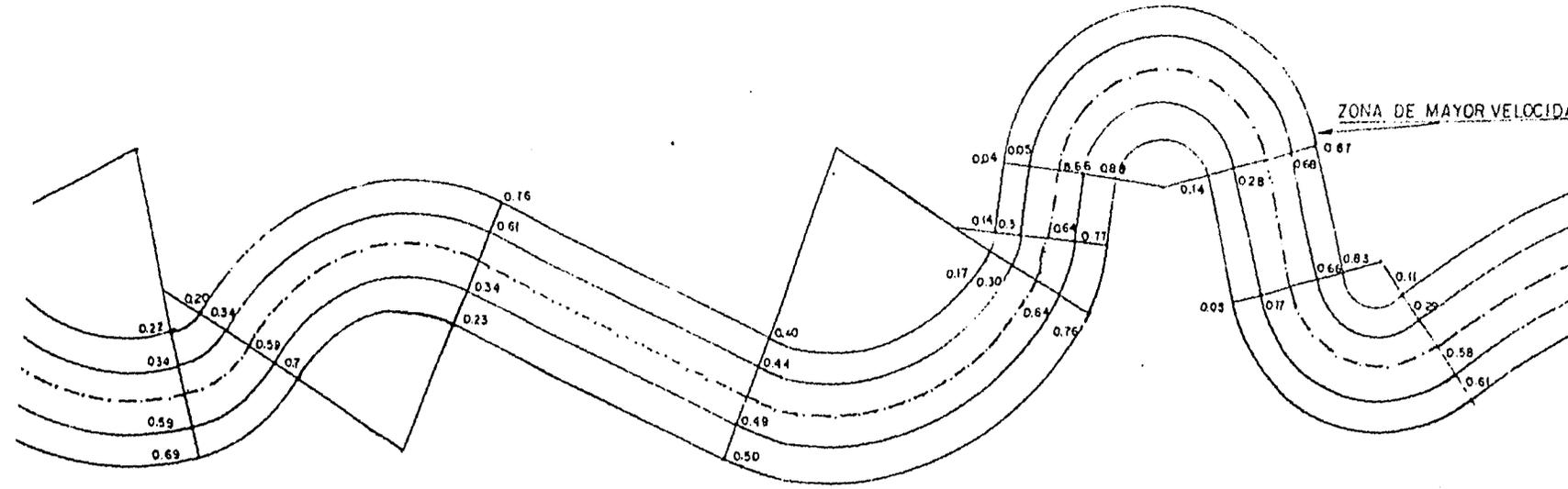


VARIACION DEL ESFUERZO CORTANTE A LO LARGO DEL



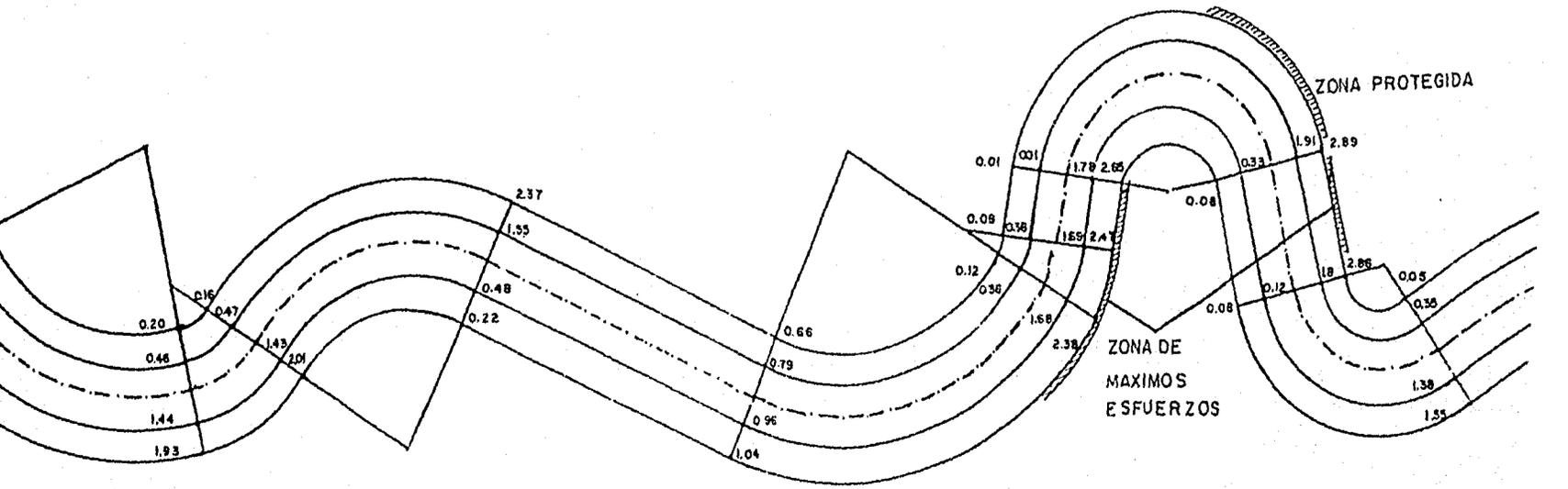
-VARIACION DE LA VELOCIDAD Y ESFUERZO CORTANTE PRINCIPALES

DE LA VELOCIDAD PRINCIPAL A LO LARGO DEL CAUCE



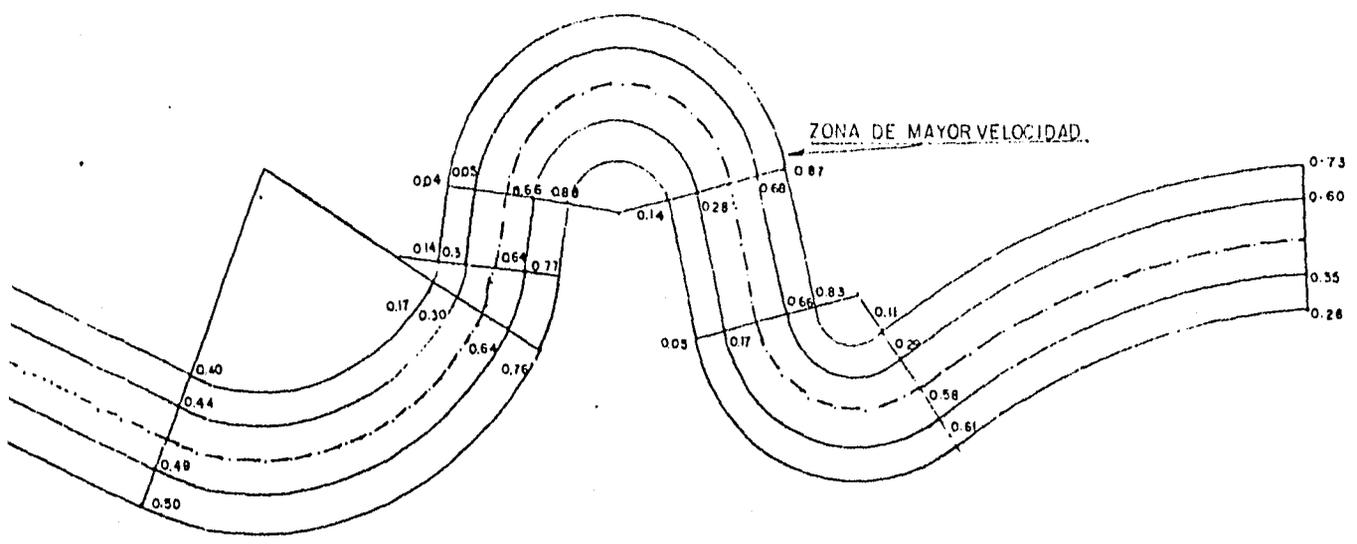
DATOS DE	
GASTO	1000 m <sup>3</sup> /s
LINEAS DE CORRI	DEL EJE CENTRA
AMBOS LADOS	ANCHO PROMEDI
VELOCIDAD EN	ESFUERZO CORT

VARIACION DEL ESFUERZO CORTANTE A LO LARGO DEL CAUCE



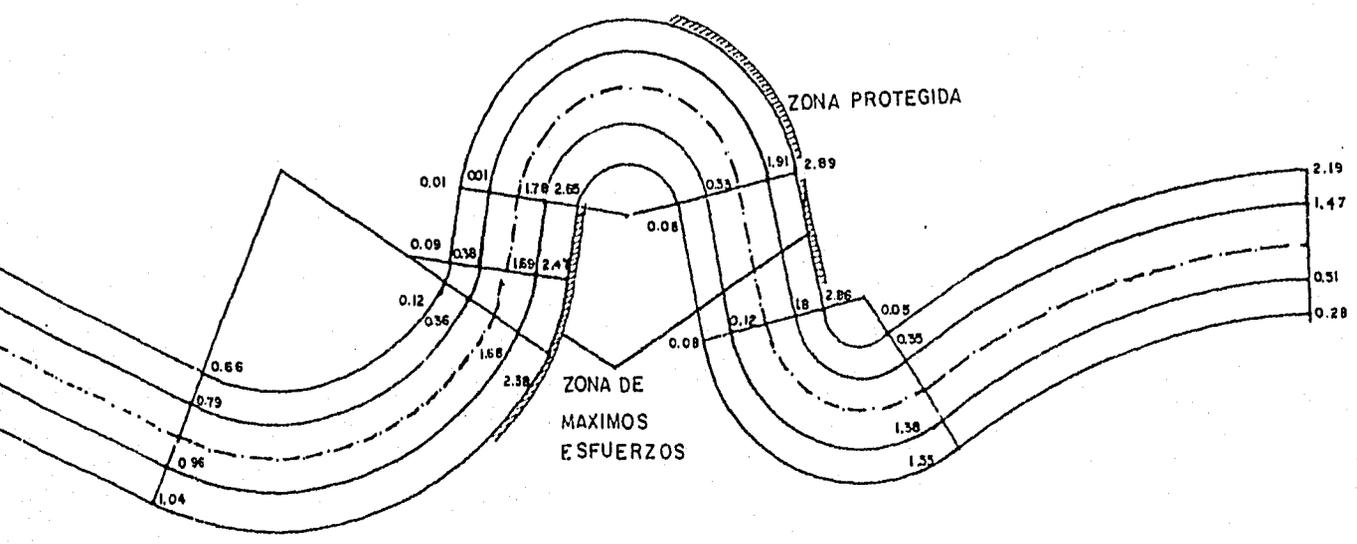
ESFUERZO CORTANTE PRINCIPALES

LO LARGO DEL CAUCE



DATOS DE CALCULO	
GASTO 1000 m <sup>3</sup> /s	
LINEAS DE CORRIENTE MEDIDAS A PARTIR DEL EJE CENTRAL A 100 Y 200m HACIA AMBOS LADOS	
ANCHO PROMEDIO 630m	
VELOCIDAD EN m/s	
ESFUERZO CORTANTE EN kg/m <sup>2</sup>	

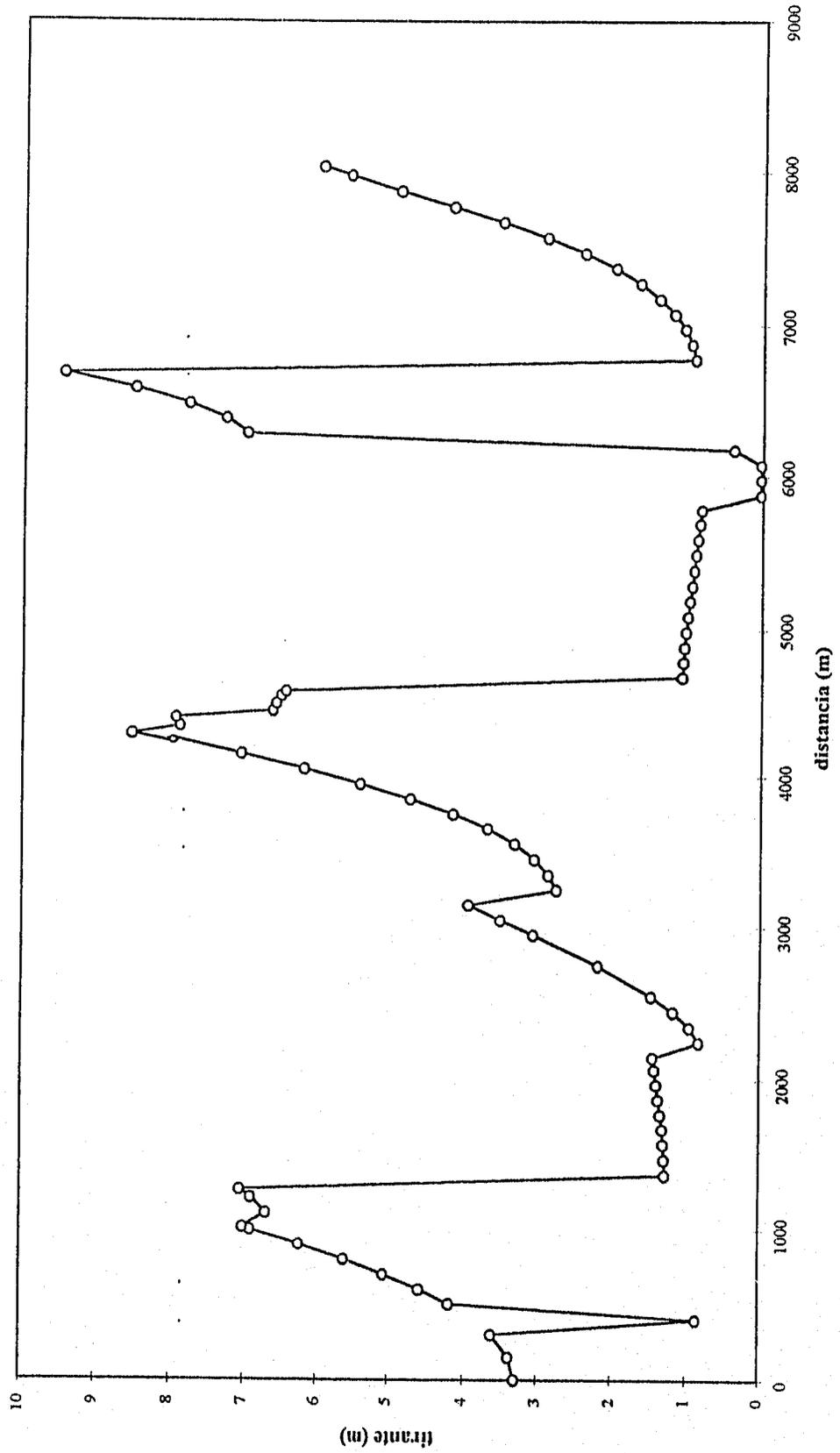
LARGO DEL CAUCE



Cuando se efectuaron los cálculos para determinar la variación del tirante a lo largo del cauce y para cada línea de corriente, se observó (gráfica 5.5) que el tirante al pasar de una sección curva hacia una recta existen discontinuidades del tirante, esto es posiblemente consecuencia de utilizar una variación lineal en la determinación de la velocidad y el tirante para los tramos rectos.

Aunque el modelo numérico no reprodujo fielmente, en términos cuantitativos las distribuciones de la velocidad, los tirantes y las pendientes del fondo para este ejemplo, la aproximaciones cualitativas del fenómeno son buenas. Por ejemplo, en la simulación del gasto de  $500 \text{ m}^3/\text{s}$  la zona con los máximos esfuerzos cortantes se encuentra vecina a la zona del lado mexicano que ha sido erosionada (fig. 5.5); así también, para el gasto de  $1000 \text{ m}^3/\text{s}$ , en la parte final del tramo 10, y entre los tramos 5, 6 y 7 en la margen mexicana ocurren esfuerzos cortantes considerables que también están vecinos a las áreas atacadas por la erosión.

Gráfica 5.5.- Variación del tirante a lo largo del cauce (n=100m )



## CAPÍTULO 6.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Debido a que en la comparación de los métodos realizada existe en algunos casos gran discrepancia de resultados, es conveniente efectuar un análisis de los términos que intervienen en las ecuaciones principales del flujo y determinar su orden de importancia, para obtener las conclusiones.

### 6.1.- Análisis de términos.

De las ecuaciones del capítulo tres, se tiene para la dirección s:

$$\frac{u_b du_b}{ds} + \frac{v_b du_b}{dn} + \frac{u_b v_b}{r} = g S - \frac{u^{*2}}{d} \quad (3.19)$$

Sustituyendo el valor de  $u_b$  (ec. 3.22), y considerando que Odgaard(1987) propone que  $v_b$  difiere aproximadamente de  $\bar{v}$  en un 8%, se pueden igualar ambas velocidades, con lo que se obtiene:

$$\frac{\bar{u}(m+1)^2}{n^2} \frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{(m+1)\bar{v}}{m} \frac{d\bar{u}}{dn} + \frac{\bar{u}\bar{v}(m+1)}{m r} = g S - \frac{\kappa^2 \bar{u}^2}{m d} \quad (6.1)$$

La ecuación anterior se puede adimensionalizar multiplicándola por la aceleración de la gravedad, y despejando S se tiene:

$$S = \frac{\kappa^2 \bar{u}^2}{m g d} + \frac{\bar{u}(m+1)^2 d\bar{u}}{g m^2 ds} + \frac{\bar{u} \bar{v}(m+1)}{m r g} + \frac{(m+1)\bar{v} d\bar{u}}{g m dn} \quad (6.2)$$

Se sabe que la relación del esfuerzo cortante principal y la velocidad media es:

$$\frac{\bar{u}}{(\tau_o/\rho)^{1/2}} = \frac{m}{\kappa} \quad (6.3)$$

Sustituyendo la relación anterior en la ecuación 6.2 se llega a:

$$S = \frac{\tau_o}{\rho g d} + \frac{\bar{u}(m+1)^2 d\bar{u}}{g m^2 ds} + \frac{\bar{u} \bar{v}(m+1)}{m r g} + \frac{(m+1)\bar{v} d\bar{u}}{g m dn} \quad (6.4)$$

Para simplificar la notación, se define a cada término con un valor de S correspondiente a:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \quad (6.5)$$

Donde cada término representa:

S= término que define la pendiente hidráulica en la dirección principal.

S<sub>1</sub>= término referido al esfuerzo cortante principal.

S<sub>2</sub>= término que representa el cambio de la cantidad de movimiento en la dirección principal.

S<sub>3</sub>= término que considera la aceleración debido a la curvatura.

S<sub>4</sub>= término que define el cambio de la cantidad de movimiento en la dirección secundaria.

Análogamente se efectúa el análisis en la dirección n (ec. 3.17).

$$\frac{u}{ds} \frac{dv}{ds} - \frac{u^2}{r} = g S_r - \frac{\kappa^2 v^2}{m d} \quad (6.6)$$

Despejando  $S_r$ , y sustituyendo los valores del esfuerzo cortante transversal ( $\tau_n$ ) y de la velocidad media ( $\bar{v}$ ), se obtiene:

$$S_r = \frac{\tau_n}{\rho g d} - \frac{\bar{u}^2 (m+1)^2}{m^2 g r} - \frac{\bar{u}(m+1)}{g m} \frac{d\bar{v}}{ds} \quad (6.7)$$

Simplificando la notación, se puede escribir:

$$S_r = S_{r1} + S_{r2} + S_{r3} \quad (6.8)$$

siendo:

$S_r$  = pendiente hidráulica en la dirección transversal  
 $S_{r1}$  = término referido al esfuerzo cortante secundario  
 $S_{r2}$  = término que considera la aceleración centrífuga  
 $S_{r3}$  = término que define el cambio de la cantidad de movimiento.

Las ecuaciones 6.5 y 6.8 se aplican al ejemplo uno del capítulo quinto, considerando lo siguiente:

a) La velocidad media secundaria ( $\bar{v}$ ) para una línea de corriente, se obtiene de la ecuación 3.41.

b) El esfuerzo cortante transversal se obtiene aplicando la ecuación propuesta por Zimmermann (1978), la cual se ajusta mejor a los resultados experimentales (Odgaard, 1987):

$$\tau_n = \frac{\rho}{3} \frac{(m+1)}{m(m+3)} \frac{d \bar{u}^2}{r} \quad (6.9)$$

c) Para obtener las variables en el espacio, se aplica el método de Odgaard discretizando las derivadas. Los resultados obtenidos se resumen en las gráficas 6.1 a la 6.5, de las cuales se puede deducir lo siguiente:

a) Al efectuar las comparaciones de los esfuerzos principal y secundario (gráfica 6.1), se observa que para las diferentes líneas de corriente el esfuerzo cortante secundario varía en un amplio rango con respecto al esfuerzo principal, la tabla 6.1 presenta un resumen de dichos valores.

Tabla 6.1 Esfuerzo cortante secundario en porcentaje del esfuerzo cortante principal.

línea de corriente (n)	valor máximo (%)	valor mínimo (%)	valor promedio (%)
2 m	2	34	9
- 2 m	1.3	3.9	2.5
3.91 m	3	41	20
- 3.91 m	0.2	2	1.5

De la tabla 6.1, se observa que el esfuerzo cortante secundario ( $\tau_n$ ) se incrementa para las líneas de corriente a 2 y 3.91 m del lado de la margen cóncava, lo cual concuerda con el fenómeno.

b) En el radio de 52 m, la velocidad media secundaria varió entre valores de 4 al 6% de la velocidad media principal, para el radio de 11 m, se incrementó notablemente (gráfica 6.2) llegando en algunas secciones a superar a la velocidad media principal.

c) Al efectuar las comparaciones de los términos S ( $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$ ), para la línea de corriente medida a 2 m a partir del eje central, hacia la margen cóncava, se observa (gráfica 6.3) que el término  $S_1$  es de mayor magnitud que los otros términos, la tabla 6.2 presenta una comparación en porcentaje de los términos  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  con respecto a  $S_1$ .

Según Odgaard (1987), supone que los términos  $S_3$  y  $S_4$  generalmente varían en un orden aproximado a los obtenidos en la tabla 6.2, es decir, de 1.5 a 5 % de  $S_1$ . Para el caso de la línea de corriente medida a + 3.91 m, los valores de

dichos términos aumentaron notablemente, esto se observa más claramente para el radio de 11 m (gráfica 6.4), esto conduce a la conclusión que no se puede generalizar el orden de magnitud de dichos términos, ya que los cuales variarán según las características del cauce, siendo mayor en las curvas con radios pequeños.

Tabla 6.2 Valores promedios de los términos  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  en porcentaje del término  $S_1$ , para el radio de 52 m.

término	línea de corriente
	+2 m (%)
$S_2$	40
$S_3$	1.3
$S_4$	1.4

d) Para los tramos curvos del cauce, si se suavizaran las curvas de las variaciones que sufre cada término  $S$ , se puede observar que dichos términos presentan un comportamiento oscilatorio, esto es más notorio para la curva de  $S_2$ .

e) El análisis de los términos  $S_r$  ( $S_{r1}$ ,  $S_{r2}$  y  $S_{r3}$ ), se efectuó únicamente en los dos primeros tramos curvos, ya que el método de Odgaard no permite determinar la velocidad secundaria al inicio de los tramos rectos seguido por curvas. Se observa (gráfica 6.5) que la variación de  $S_{r1}$  presenta un comportamiento estable casi constante para el radio de 52 m y tiende a aumentar notablemente en el tramo curvo en donde el radio es más pequeño.

De los métodos propuestos se puede resumir lo siguiente:

a) El método de Englund (1974) se analizó en un sistema coordenado cilíndrico, partiendo de las siguientes ecuaciones:

dirección  $\theta$

$$-\frac{V_0^2}{r} = -\frac{d}{dr}(gh) + \varepsilon \frac{d^2 V_r}{dz^2}$$

y en la dirección r

$$g S + \epsilon \frac{d^2 V_0}{dz^2} = 0$$

Efectuando la comparación de los términos, se observa que Engelund desprecia  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_{r2}$  y  $S_{r3}$ .

b) El método de Kalkwijk et al, en la dirección principal mantiene los mismos términos; sin embargo, en la dirección secundaria considera la simplificación siguiente:

$$-\frac{u^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dn} = \frac{d}{dz} \left[ \frac{dv}{\epsilon dz} \right]$$

Es decir desprecia el término  $S_{r3}$ .

c) El método de Ikeda et al (1981), enfocado más al desplazamiento de márgenes, en la dirección principal hace la simplificación siguiente:

$$\frac{u du}{ds} = -g \frac{dH}{ds} - \text{términos de fricción}$$

Es decir que elimina los términos  $S_3$  y  $S_4$ .

De lo anterior se puede concluir que aunque una variable puede ser de magnitud pequeña, se debe tener conocimiento en que forma puede influir sobre otras variables antes de considerar su eliminación.

## 6.2.-Recomendaciones generales.

a) Los valores de la aceleración centrífuga ( $S_3$ ) y la transferencia de la cantidad de movimiento ( $S_4$ ) son considerables en las curvas con radios pequeños, y como algunos métodos desprecian tales términos, no es recomendable su aplicación en curvas con radios menores de  $2B$ .

b) Debido a los efectos inerciales del flujo existe una velocidad secundaria al inicio de un tramo recto que precede a uno curvo. Aún no se ha podido determinar teóricamente una ecuación que permita determinar dicha velocidad, además existen pocos reportes de su valor medido en laboratorio. Una opción aproximada sería prolongar la curva siguiendo su tendencia del término  $S_3$  hacia los tramos rectos y con ello, predecir el valor de la velocidad secundaria.

c) Ningun método expuesto debe ser aplicado a cauces que transporten considerable material sólido. Puesto que en el planteamiento de las ecuaciones que gobiernan el flujo, no se hace intervenir la ecuación de continuidad para el gasto sólido, la cual posiblemente afecte la formación de la pendiente transversal del fondo.

d) En el análisis de los esfuerzos cortantes para el desplazamiento de las márgenes, es necesario considerar que su tratamiento es diferente al que ocurre en la falla de las márgenes, ya que en ésta intervienen otros factores.

e) En el método de Odgaard se simplifica el cálculo al considerar una sección aproximadamente rectangular. Una opción sería obtener las secciones a lo largo del cauce y por medio de la correlación de elevaciones-área de la sección, determinar una ecuación general del tipo exponencial; posteriormente para cada elevación medida en el eje central, calcular el área y la velocidad en la sección y aplicar el método de Odgaard.

f) En algunas situaciones las obras artificiales modifican el comportamiento del cauce, tal es el caso de las obras de almacenamiento. La afectación del régimen del gasto modificará la morfología del río aguas abajo, siendo entonces recomendable hacer empleo de mediciones de campo y el empleo de los modelos físicos junto con los métodos teóricos para proyectar las obras de protección.

### 6.3.- Conclusiones generales.

Con los resultados obtenidos en el inciso 6.1 se comprueba que el orden de magnitud del esfuerzo cortante secundario

es pequeño, presentándose en los radios menores, valores máximos hasta en un 40% del esfuerzo cortante principal.

Falcón (1983) en su análisis para determinar el esfuerzo cortante secundario eliminó el término  $S_{r3}$ , lo cual se justifica porque se comprobó que dicho término es despreciable.

La variación de la velocidad media secundaria está afectada por el radio de curvatura, como se demostró en el radio de 11 m en donde se llegaron a presentar velocidades superiores a la velocidad media principal; además, para curvas con un radio mayor de 2B se cumplen los rangos medidos en laboratorio presentados por Kikkawa (1976), quien propone varían hasta en un 15 % de la velocidad media principal.

Aunque el análisis de Engelund no considera el efecto de la aceleración centrífuga, los tirantes obtenidos por su método dan buenos resultados. Del ejemplo dos (cap. 5) al comparar los métodos de Odgaard y Engelund, los tirantes difieren del 15 al 30% entre ambos métodos, dicho porcentaje se mantiene constante a lo largo del cauce.

Con el método de Odgaard se determinó el sitio en que inicia el flujo a desarrollo completo, con la ubicación en que ocurre la pendiente transversal del fondo completamente desarrollada. Se observó que las curvas con un radio pequeño necesitan una mayor distancia para alcanzar ese estado de flujo.

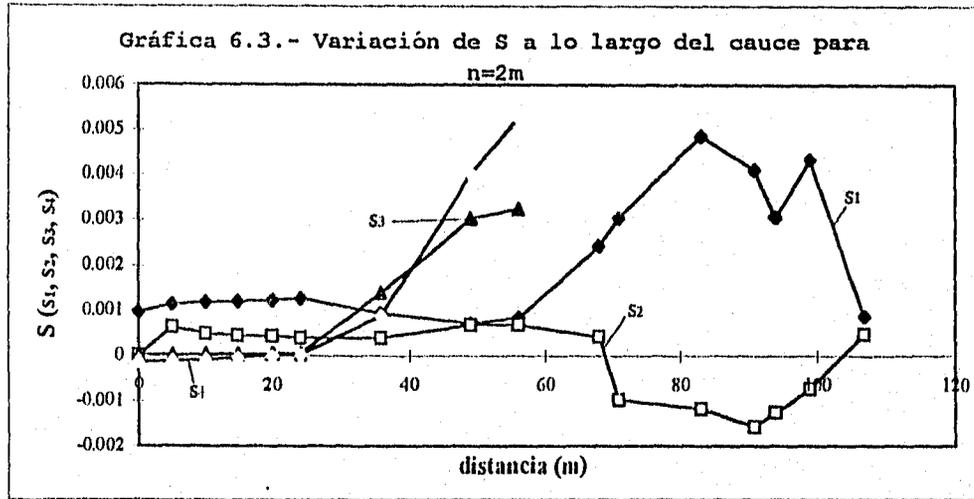
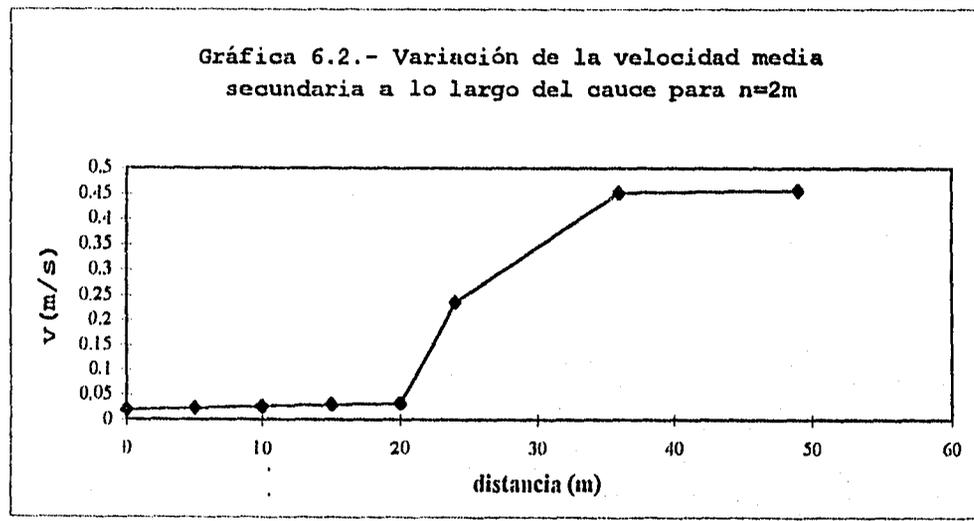
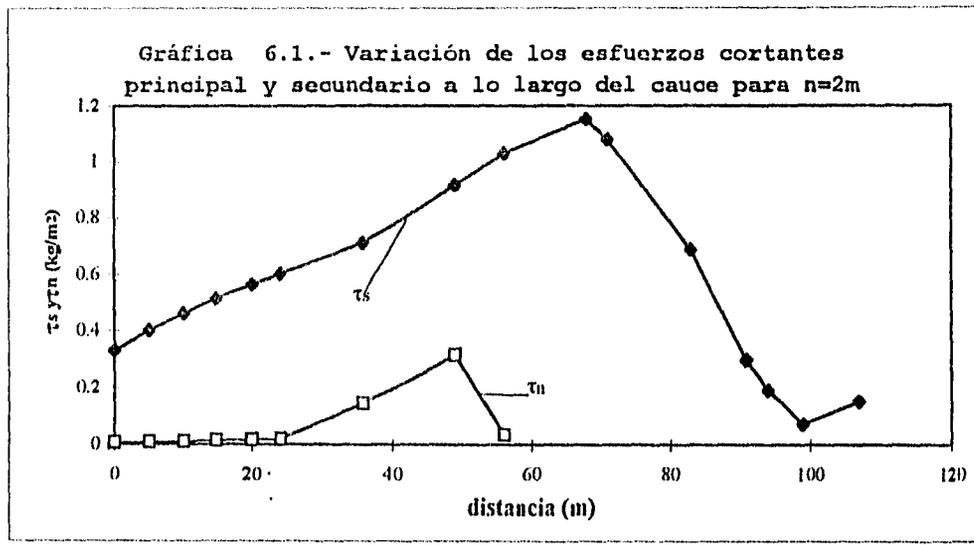
La ventaja del método de Odgaard es que permite determinar a lo largo de una curva la variación del tirante, lo cual no es posible en otros métodos. Un punto importante que se detectó en los resultados del método de Odgaard, es que los tirantes calculados sufren fuertes variaciones al pasar de un tramo recto al curvo, posiblemente sea consecuencia de haber supuesto que la velocidad y el tirante tienen una variación lineal en la dirección transversal.

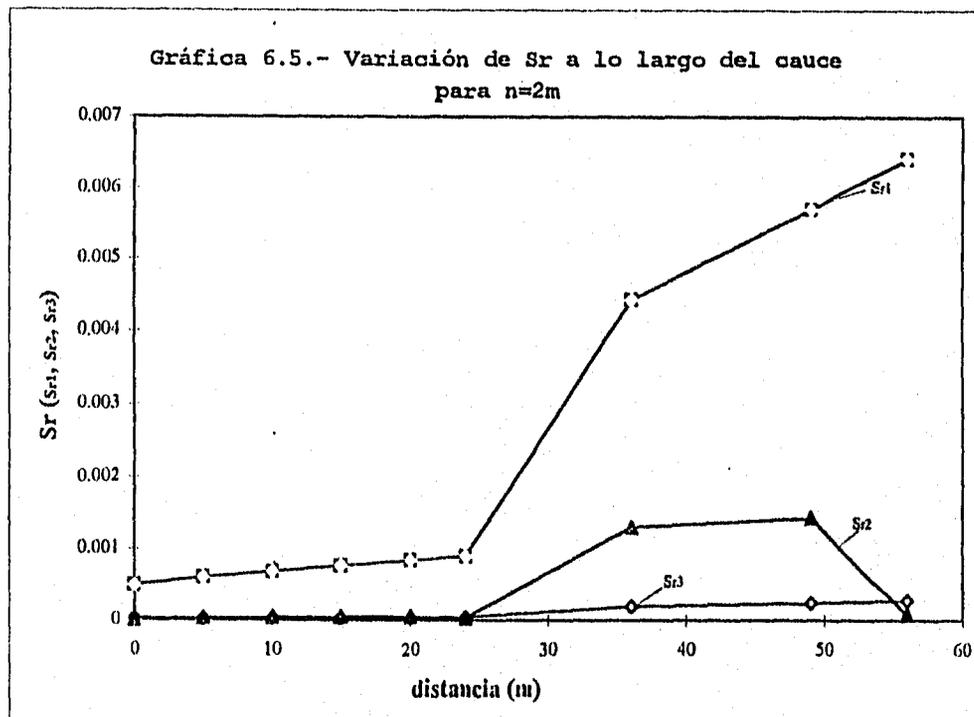
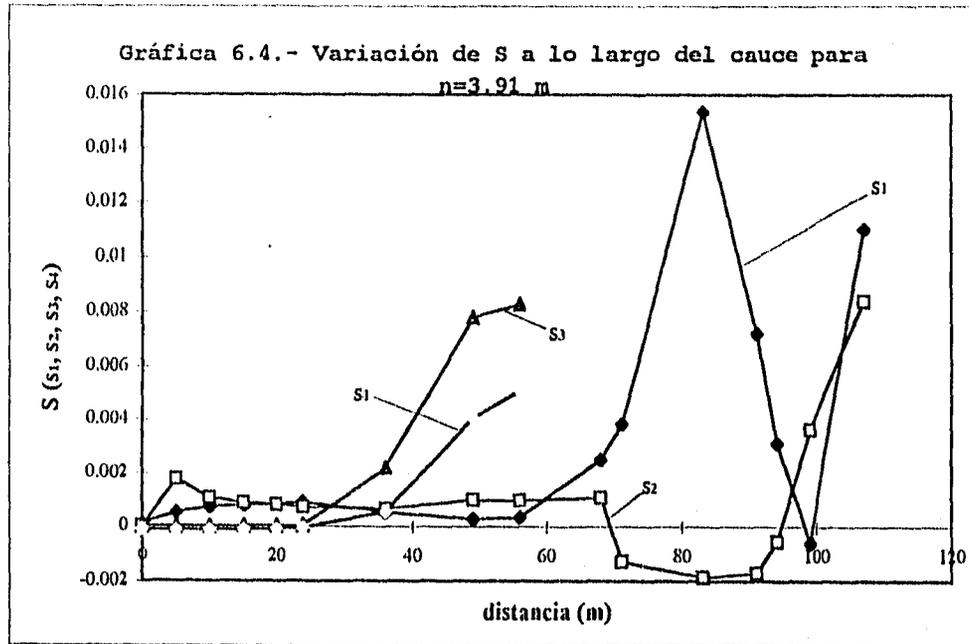
En algunas zonas del cauce del ejemplo uno (cap. 5), el método de Odgaard generó tirantes excesivos, se debe recordar que el valor máximo de un tirante estará en función de la estabilidad de la margen (profundidad de

socavación), por lo cual los tirantes calculados podrían dar un indicio de falla en los taludes del cauce.

De las principales ventajas que presenta el método de Odgaard es que permite reducir el tiempo de modelado, requiere de una calibración mínima, representa el fenómeno de respuesta de la pendiente transversal del fondo, la velocidad y el tirante a los cambios de curvatura, ésta ventaja permite predecir la migración en los meandros; además, el método se adapta a cualquier tamaño de río, siempre y cuando se respeten las limitaciones de aplicación.

Cuando se efectúa el estudio de los cauces, es recomendable contar con los recursos teóricos, como son métodos antes expuestos; además, de ser posible se debe efectuar la comparación con otros cauces en condiciones similares, para que en los proyectos se tome la decisión lo más acertada posible.





## BIBLIOGRAFÍA

- 1.- Aguilar, J. (1989), "Hidráulica Fluvial", Instituto Politécnico Nacional, México.
- 2.- Callander, R. A. (1969), "Instability and river channels", Journal Fluid Mech., vol. 133, 1-16.
- 3.- Crickmay, C. H. (1974), "The work of the river", Macmillan Press Ltd, London.
- 4.- Dietrich, W. E. and Smith, J. D. (1983), "Influence of the point bar on flow trough curved channels", Water Resource Research, vol 19, no. 5, 1173-1192.
- 5.- Engelund, F. and Skovgaard, O. (1973), "On the origin of meandering and braiding in alluvial streams", Journal Fluid Mech., vol. 133, 289-302.
- 6.- Engelund, F. (1974), "Flow and bed topography in channel bends", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 100, no. HY11, 1631-1648.
- 7.- Ervine, D. and Shellin, J. (1974), "Large flow structures in meandering compound channels", 2nd International Conference on River Flood Hydraulics.
- 8.- Falcón, A. and Kennedy, J. (1983), "Flow in alluvial-river curves", Journal Fluid Mech., vol. 133, 1-16.
- 9.- Fredsoe, J. (1978), "Meandering and braiding of rivers", Journal Fluid Mech., vol. 84, part 4, 609-624.
- 10.- Gracia, J. (1995), "Estudio experimental de las tendencias de corrimiento y posibilidades de protección en el tramo internacional del Río Colorado", Instituto de Ingeniería, UNAM. México.
- 11.- Gregory, K. J. (1977), "River Channel Changes", John Wiley and Sons., New York.

- 12.- Ikeda, S. and Nishimura, T.(1985), "Flow and bed profile in meandering sand-silt rivers", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 112, no. 7, 562-579.
- 13.- Jansen, P., Bendegom, L., Van den Berg, J., de Vries, M. and Zanenm, A. (1979), "Principles of River Engineering. The non-tidal alluvial river", Pitman Publishing Ltd, London.
- 14.- Kalkwijk, J. P.and De Vriend, H.J.(1980), "Computation of the flow in shallow river bends", Journal of Hydraulics Research, vol. 18, No.4, 327-342.
- 15.- Kikkawa, H., Ikeda, S. and Kitagawa, A. (1976), "Flow and bed topography in curved open channels", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 102, no. HY9, 1327-1342.
- 16.- Kreyszig, E. (1990), "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, vol I", Ed. Limusa, México.
- 17.- Leopold, B. and Wolmann (1964), "Fluvial processes in geomorphology", W. H. Freeman and Co., San Francisco and London.
- 18.- Maza, J. A. (1977), "Scour in river-beds", Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D.F.
- 19.- Maza, J. A. y Gracia J. (1988), " Morfología de ríos", Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- 20.- Maza, J. A. y García M. (1990), "Estabilidad y rectificación de ríos", Manual de Hidráulica Fluvial, cap. XIV, CNA, México.
- 21.- Maza, J. A. y García M. (1990), "Erosión en ríos y obras de protección", Manual de Ingeniería de ríos, cap. XIII, CNA, México.
- 22.- Odgaard, J. (1981), "Transverse bed slope in alluvial channel bends", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 107, no. HY12, 1677-1694.
- 23.-Odgaard, J. (1986), "Meander flow model I: development", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 112, no. 12, december, 1117-1135.

- 24.- Odgaard, J. (1986), "Meander flow model II: applications", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 112, no. 12, december, 1137-115131.
- 25.- Odgaard, J. (1987), "Streambank erosion along two rivers in Iowa", Water Resources Research, vol 23, no. 7, 1225-1236.
- 26.- Odgaard, J. and Bergs, M. (1988), "Flow processes in a curved alluvial channel", Water Resources Research, vol 24, no. 1, 45-56.
- 27.- Parker, G. (1976), "On the cause and characteristic scales of meandering and braiding in rivers", Journal Fluid Mech., vol. 76, part 3, 457-480.
- 28.- Peter C. and Isaac. G. (1967), "River Managment", Procceding of a Symposium organized by the Department of Civil Engineering, Maclauren and Son Ltd., London.
- 29.- Przedewosky, B. (1995), "Bed topography and local scour in rivers with bank protected by groynes", Journal of Hydraulic Research, vol. 33, No.2, 257-273.
- 30.- Rouse, H. (1959), "Advanced Mechanics of Fluids", John Wiley and Sons Inc, New York.
- 31.- Shimizu, Y., Yamaguchi, H. and Itakura, T. (1990), "Three dimensional computation of flow and bed deformation", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 116, no. 9, 1090-1108.
- 32.- Sotelo, G. (1993), "Apuntes de Hidráulica II", Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- 33.- Symons, Li and Associates (1982), "Engineering analysis of fluvial systems", Forth Collins Colorado, USA.
- 34.- Yen, Ch. (1990), "Bend evolution in channels bends", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 116, no. 4, 544-562.
- 35.- Zimmermann, C. and Kennedy, J.F. (1978), "Transverse bed slope en curved alluvial streams", Journal Hydraulics Engineering, ASCE, vol. 104, 33-48.

**APENDICE A**

**PROGRAMA 1** Aplicación del método de Odgaard a curvas discretizadas por tramos.

```

10 DECLARE SUB grafico2 (ded!(), ss!(), n!, x!, k!)
20 DECLARE SUB grafico1 (mu!(), ss!(), n!, x!, k!)
30 CLS
40 CLEAR
50 'Metodo de Odgaard para determinar la pendiente
   'transversal del fondo y velocidades en curvas naturales.
60 READ Q, Dic, b, dc, So, Gr, rs, ro
70 DATA 1.4, 0.0002, 8.5, 0.34, 0.00173, 9.81, 2650, 1000
80 READ ki, ni, alf
90 DATA 0.4, 0.95E-06, 1.27
100 'determinacion de constantes
110 uc = Q / (b * dc)
120 br = b - 2 * dc
130 Fdc = uc / ((rs - ro) / ro * Gr * Dic) ^ .5
140 Ue = (Gr * So * dc) ^ .5
150 m = ki * uc / Ue
160 Re = Ue * Dic / ni
170 n = (2 * m + 1) / (2 * ki ^ 2 * m)
180 te = .097 / Re + .077 * EXP(-(19.58 / Re) ^ .3191)
190 G = 2 * ki ^ 2 * br / ((m + 1) ^ 2 * dc)
200 Fstco = (te) ^ .5 * Fdc * (m + 1) / (2 * ki * (m + 2))
205 Fstco = 3 * alf * Fstco
210 ap = 16 * ki * n * (m + 2) * dc
220 ap = ap / (3 * alf * (te) ^ .5 * (m + 1) * Fdc * br)
230 bp = 1 / (3 * alf * (te) ^ .5 * (m + 1) ^ 2 * Fdc)
235 bp = 32 * ki ^ 3 * n * (m + 2) * bp
240 ome = (bp - (ap / 2) ^ 2) ^ .5
250 fi = ATN(ap / (2 * ome))
260 PRINT "Gasto de salida Q(M3/s)="; Q
270 PRINT "ancho efectivo (m)="; br
280 PRINT "profundidad de flujo (m)="; dc
290 PRINT "velocidad a profundidad media (m/s)="; uc
300 PRINT "pendiente longitudinal="; So
310 PRINT "diametro medio de grano (m)="; Dic
320 PRINT "parametro de friccion="; m
330 PRINT "numero de Froude de las particulas="; Fdc
340 PRINT "constante de Von Karman="; ki
350 PRINT "parametro de Shields="; te
360 PRINT "valor ap="; ap
370 PRINT "valor bp="; bp
380 PRINT "omega'="; ome
390 PRINT "fase de retraso ="; fi
400 ' numero de curvas
410 READ n, x
420 DATA 5,16
430 PRINT "numero de tramos="; n
440 PRINT "numero de secciones="; x
445 STOP
450 DIM nx(n, x), Rc(n), s(n, x), sig(n, x), E1(n, x), dsig(n, x)
460 DIM Stco(n), STc(n, x), stci(n + 1), ss(n + 1, x), su(n + 1)
470 'secciones que pertenecen a la curva
480 FOR j = 1 TO n
490 FOR i = 1 TO x
500 READ nx(j, i)
510 IF nx(j, i) = 0 THEN 530
520 PRINT "seccion de la curva (; j; ")="; nx(j, i)

```

```

530 NEXT i
540 NEXT j
550 DATA 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
560 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7, 8, 9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
570 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 10, 11, 0, 0, 0, 0, 0
580 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 12, 13, 14, 0, 0
590 DATA 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 15, 16
600 STOP
610 'radios de la curva ( tramos rectos r=0)
620 FOR j = 1 TO n
630 READ Rc(j)
640 PRINT "radio de la curva("; j; ")="; Rc(j)
650 NEXT j
660 DATA 52,11,0,11,0
665 'distancia de cada tramo para la curva
670 sh = 0
680 FOR j = 1 TO n
690 sh = sh + su(j - 1)
700 FOR i = 1 TO x
710 IF nx(j, i) = 0 THEN 760
720 READ s(j, i)
730 PRINT "distancia s("; j; ", "; i; ")="; s(j, i)
740 ss(j, i) = s(j, i) + sh
750 su(j) = s(j, i)
760 NEXT i
770 NEXT j
780 STOP
790 DATA 0,5,10,15,20, 24, 12, 25, 32, 12, 15, 12, 20, 23, 5, 13
800 FOR j = 1 TO n
810 FOR i = 1 TO x
820 IF nx(j, i) = 0 THEN 840
830 PRINT "dist. al punto inicial("; i; ")="; ss(j, i)
840 NEXT i
850 NEXT j
860 STOP
870 FOR j = 1 TO n
880 FOR i = 1 TO x
890 IF nx(j, i) = 0 THEN 920
900 sig(j, i) = s(j, i) / br
905 dsig(j, i) = sig(j, i) - sig(j, i - 1)
910 PRINT "sigma("; j; ", "; i; ")="; sig(j, i),
915 PRINT "Dsigma("; j; ", "; i; ")="; dsig(j, i)
920 NEXT i
930 NEXT j
940 STOP
950 FOR j = 1 TO n
960 IF Rc(j) = 0 THEN 990
970 Stco(j) = Fstco * (dc / Rc(j))
980 GOTO 1000
990 Stco(j) = 0
1000 PRINT "pend. comp. desarrollada Stco("; j; ") = "; Stco(j)
1010 NEXT j
1020 STOP
1030 FOR j = 1 TO n
1040 FOR i = 1 TO x
1050 IF nx(j, i) = 0 THEN 1180
1060 IF ap2 < 4 * bp THEN 1130
1070 l1 = (-ap + (ap2 - 4 * bp).5) / 2
1080 l2 = (-ap - (ap2 - 4 * bp).5) / 2
1090 E1(j, i) = (l2) * EXP(l1 * sig(j, i)) / (l2 - l1)

```

```

1100 E1(j, i) = E1(j, i) - (l1) * EXP(l2 * sig(j, i)) / (l2 - l1)
1120 GOTO 1180
1130 'sistema sub-amortiguado
1140 E1(j, i) = (1 + (psi / ome - ap / 2 * ome) ^ 2) ^ .5
1150 E1(j, i) = E1(j, i) * COS(ome * sig(j, i) - fi)
1160 E1(j, i) = E1(j, i) * EXP(-ap * sig(j, i) / 2)
1170 PRINT "parametro E("; j; ", "; i; ")="; E1(j, i)
1180 NEXT i
1190 NEXT j
1200 STOP
1210 'pendiente transversal del fondo
1220 FOR j = 1 TO n
1230 FOR i = 1 TO x
1240 IF nx(j, i) = 0 THEN 1280
1250 STc(j, i) = Stco(j) - (Stco(j) - stci(j)) * E1(j, i)
1260 PRINT "pend trans.("; j; ", "; i; ")="; STc(j, i)
1270 stci(j + 1) = STc(j, i)
1280 NEXT i
1290 NEXT j
1300 STOP
1320 FOR j = 1 TO n
1330 PRINT "pend. trans. inicio del tramo Stci("; j; ")="; stci(j)
1340 NEXT j
1350 STOP
1360 'determinacion de la velocidad y tirantes para cada
1370 ' linea de corriente
1380 NNN = 5
1390 DIM Rd(n), bet(n, x), ded(n + 1, x), mmu(NNN), Rcc(n)
1400 DIM mded(n, x), mu(n + 1, x), NN(NNN), vvv(n + 1, x)
1410 DIM dmu(n + 1, x + 1), sign(n), muo(n + 1, x + 1)
1420 FOR i = 1 TO NNN
1430 READ NN(i)
1440 NEXT i
1450 DATA 0, 2, -2, 3.91, -3.91
1460 FOR j = 1 TO NNN
1470 PRINT " linea de corriente a partir del eje "; NN(j)
1480 NEXT j
1490 STOP
1500 FOR j = 1 TO n
1510 READ sign(j)
1520 NEXT j
1530 DATA 1, 1, 1, -1, -1
1540 'velocidades medidas iniciales
1550 FOR j = 1 TO NNN
1560 READ mmu(j)
1570 NEXT j
1580 DATA 1.0, .566, 1.44, 0.062, 1.21
1590 FOR k = 1 TO NNN
1650 CLS
1660 '*****
1670 PRINT "linea de corriente "; k
1690 FOR j = 1 TO n
1700 Rd(j) = ABS(Rc(j) * sign(j) + NN(k))
1710 PRINT "radio Rd("; j; ")="; Rd(j)
1720 NEXT j
1730 STOP
1740 FOR j = 1 TO n
1750 FOR i = 1 TO x
1755 ded(j, 0) = 1
1760 IF nx(j, i) = 0 THEN 1820

```

```

1770 bet(j, i) = STc(j, i) * (Rc(j)) / dc
1780 IF Rc(j) = 0 THEN 1810
1790 ded(j, i) = (Rd(j) / Rc(j)) ^ bet(j, i)
1800 GOTO 1820
1810 ded(j, i) = 1 + STc(j, i) * sign(j) * NN(k) / dc
1820 ded(j + 1, i) = ded(j, i)
1830 mded(j, i) = (ded(j, i - 1) + ded(j, i)) / 2
1840 NEXT i
1850 NEXT j
1860 FOR j = 1 TO n
1870 FOR i = 1 TO x
1880 IF nx(j, i) = 0 THEN 1910
1890 PRINT "beta("; j; ", "; i; ")="; bet(j, i),
1900 PRINT "d/dc("; j; ", "; i; ")="; ded(j, i)
1910 NEXT i
1920 NEXT j
1930 STOP
1940 FOR j = 1 TO n
1950 FOR i = 1 TO x
1960 IF nx(j, i) = 0 THEN 1980
1970 PRINT "promedio d/dc ("; j; ", "; i; ")="; mded(j, i)
1980 NEXT i
1990 NEXT j
2000 STOP
2010 FOR j = 1 TO n
2020 IF Rc(j) = 0 THEN 2050
2030 Rcc(j) = Rc(j) / Rd(j)
2040 GOTO 2060
2050 Rcc(j) = 1
2060 FOR i = 1 TO x
2080 IF nx(j, i) = 0 THEN 2140
2090 muo(j, i) = mded(j, i) * Rcc(j)
2100 mu(j, i) = EXP(-G / mded(j, i) * dsig(j, i))
2105 mu(j, i) = (muo(j, i) - mu(j, i - 1)) * mu(j, i)
2120 mu(j, i) = muo(j, i) - mu(j, i)
2130 mu(j + 1, i) = mu(j, i)
2135 mu(1, 1) = mmu(k)
2140 NEXT i
2150 NEXT j
2300 FOR j = 1 TO n
2310 FOR i = 1 TO x
2320 IF nx(j, i) = 0 THEN 2340
2330 PRINT "rel. de velocidades("; j; ", "; i; ")="; mu(j, i)
2340 NEXT i
2350 NEXT j
2360 STOP
2370 CALL grafico1(mu(), ss(), n, x, k)
2905 CALL grafico2(ded(), ss(), n, x, k)
3410 STOP
3420 NEXT k

2400 SUB grafico1 (mu(), ss(), n, x, k)
2410 CLS
2420 SCREEN 12
2430 LINE (80, 380)-(600, 380)
2440 LINE (80, 120)-(80, 380)
2450 LINE (600, 380)-(600, 120)
2460 LINE (80, 120)-(600, 120)
2470 'ajuste de la escala en la pantalla

```

```

2480 FOR j = 1 TO n
2490 FOR i = 1 TO x
2500 IF mu(j, i) > ymax THEN ymax = mu(j, i)
2510 IF ss(j, i) > xmax THEN xmax = ss(j, i)
2520 NEXT i
2530 NEXT j
2540 escv = 240 / ymax
2550 esch = 500 / xmax
2560 'escala de ejes
2570 FOR i = 1 TO x
2580 xd = esch * i * xmax / x
2590 yd = escv * i * ymax / x
2600 LINE (80, 380 - yd)-(84, 380 - yd)
2610 LINE (80 + xd, 380)-(80 + xd, 376)
2620 LINE (596, 380 - yd)-(600, 380 - yd)
2630 LINE (80 + xd, 120)-(80 + xd, 124)
2640 NEXT i
2650 'localizacion de puntos
2660 FOR j = 1 TO n
2670 FOR i = 1 TO x
2680 IF ss(j, i) = 0 THEN 2750
2690 xi = esch * ss(j, i)
2700 yi = escv * mu(j, i)
2710 PSET (81 + xi, 380 - yi)
2720 PSET (79 + xi, 380 - yi)
2730 PSET (80 + xi, 381 - yi)
2740 PSET (80 + xi, 379 - yi)
2750 NEXT i
2760 NEXT j
2770 divv = ymax / x
2780 divh = xmax / x
2790 'encabezados del grafico
2800 LOCATE 1, 8: PRINT "datos para la linea de corriente="; k
2810 LOCATE 28, 15: PRINT "R. de velocidad-distancia"
2820 LOCATE 26, 15: PRINT "distancia aguas abajo (m) s"
2830 LOCATE 15, 2: PRINT "veloci-"
2840 LOCATE 16, 2: PRINT "dad mu"
2850 LOCATE 2, 8: PRINT "valor divisiones verticales es="; divv
2860 LOCATE 3, 8: PRINT "valor divisiones horizontales es="; divh
2870 LOCATE 5, 20: PRINT "valor maximo eje y="; ymax; "unidades"
2880 LOCATE 6, 20: PRINT "valor maximo eje x="; xmax; "m"
2890 STOP
2900 END SUB

2910 SUB grafico2 (ded(), ss(), n, x, k)
2920 CLS
2930 SCREEN 12
2940 LINE (80, 380)-(600, 380)
2950 LINE (80, 120)-(80, 380)
2960 LINE (600, 380)-(600, 120)
2970 LINE (80, 120)-(600, 120)
2980 'ajuste de escala
2990 FOR j = 1 TO n
3000 FOR i = 1 TO x
3010 IF ded(j, i) > ymax THEN ymax = ded(j, i)
3020 IF ss(j, i) > xmax THEN xmax = ss(j, i)
3030 NEXT i
3040 NEXT j
3050 escv = 240 / ymax
3060 esch = 500 / xmax

```

```

3070 'escala de ejes
3080 FOR i = 1 TO x
3090 xd = esch * i * xmax / x
3100 yd = escv * i * ymax / x
3110 LINE (80, 380 - yd)-(84, 380 - yd)
3120 LINE (80 + xd, 380)-(80 + xd, 376)
3130 LINE (596, 380 - yd)-(600, 380 - yd)
3140 LINE (80 + xd, 120)-(80 + xd, 124)
3150 NEXT i
3160 'localizacion de puntos
3170 FOR j = 1 TO n
3180 FOR i = 1 TO x
3190 IF ss(j, i) = 0 THEN 3260
3200 xi = esch * ss(j, i)
3210 yi = escv * ded(j, i)
3220 PSET (81 + xi, 380 - yi)
3230 PSET (79 + xi, 380 - yi)
3240 PSET (80 + xi, 381 - yi)
3250 PSET (80 + xi, 379 - yi)
3260 NEXT i
3270 NEXT j
3280 divv = ymax / x
3290 divh = xmax / x
3300 'encabezados del graficos
3310 LOCATE 1, 8: PRINT "datos para la linea de corriente="; k
3320 LOCATE 28, 15: PRINT "R de tirante-distancia"
3330 LOCATE 26, 15: PRINT "distancia aguas abajo (m) s"
3340 LOCATE 15, 2: PRINT "tirante"
3350 LOCATE 16, 2: PRINT " d/dc"
3360 LOCATE 2, 8: PRINT "valor divisiones verticales="; divv
3370 LOCATE 3, 8: PRINT "valor divisiones horizontales="; divh
3380 LOCATE 5, 20: PRINT "valor maximo eje y="; ymax; "unidades"
3390 LOCATE 6, 20: PRINT "valor maximo eje x="; xmax; "unidades"
3400 END SUB

```

PROGRAMA 2 · Aplicación del método del ajuste de la  
trayectoria de un cauce a una senoide.

```

DECLARE SUB grafico2 (Rdd!(), S11!(), N!, K!)
DECLARE SUB grafico3 (dz!(), Sz!(), N!, K!)
DECLARE SUB grafico (miu!(), Sz!(), N!, K!)
CLS
CLEAR
SCREEN 12
10 PRINT "Determinacion de la pendiente transversal del"
15 PRINT "fondo y velocidades en curvas de meandros"
20 READ Q, Dic, b, dc, So, Gr, rs, ro, k1, ni
30 DATA 1.1, 0.0007, 4.8, 0.39, 0.0014, 9.81, 2700, 1000, 0.4, 0.95E-06
40 READ alf, L, Rc, tet0
50 DATA 1.27, 50.4, 8, 1.21
60 ' determinacion de constantes
70 uc = Q / (b * dc)
80 br = b - 2 * dc
90 Fdc = uc / ((rs - ro) / ro * Gr * Dic) ^ .5
100 Ue = (Gr * So * dc) ^ .5
110 m = k1 * uc / Ue
120 Re = Ue * Dic / ni
130 N = (2 * m + 1) / (2 * k1 ^ 2 * m)
140 tet = .097 / Re + .077 * EXP(-(19.58 / Re) ^ .3191)
150 G = 2 * k1 ^ 2 * br / ((m + 1) ^ 2 * dc)
160 Fstco = (tet) ^ .5 * Fdc * (m + 1) / (2 * k1 * (m + 2))
165 Fstco = 3 * alf * Fstco
170 ap = 16 * k1 * N * (m + 2) * dc
180 ap = ap / (3 * alf * (tet) ^ .5 * (m + 1) * Fdc * br)
190 bp = 32 * k1 ^ 3 * N * (m + 2)
200 bp = bp / (3 * alf * (tet) ^ .5 * (m + 1) ^ 2 * Fdc)
210 ome = (bp - (ap / 2) ^ 2) ^ .5
220 fi = ATN(ap / (2 * ome))
230 omep = br / Rc / tet0
240 fip = ATN(omep * ap / (bp - omep ^ 2))
250 Sp = fip * L / 2 / 3.1416
260 Spp = (ATN(-G / omep) / 2 / 3.1416 + .25) * L + Sp
270 mient = Spp / L
280 Stcm = ((bp - omep ^ 2) ^ 2 + ap ^ 2 * omep ^ 2)
285 Stcm = 1 / (Stcm * m + 1) ^ .5
290 Stcm = Stcm * 16 * k1 ^ 2 * N * dc / Rc
295 PRINT "constantes de calculo"
300 PRINT "Gasto de salida (M3/s)="; Q
310 PRINT "ancho efectivo (m)="; br
320 PRINT "profundidad de flujo (m)="; dc
330 PRINT "velocidad a profundidad media (m/s)="; uc
340 PRINT "pendiente longitudinal="; So
350 PRINT "diametro medio de grano (m)="; Dic
360 PRINT "parametro de friccion="; m
370 PRINT "numero de Froude de las particulas="; Fdc
380 PRINT "constante de Von Karman="; k1
390 PRINT "velocidad de corte (m/s)="; Ue
400 PRINT "numero de Reynolds al cortante="; Re
410 PRINT "parametro N="; N
420 PRINT "parametro G="; G
430 PRINT "parametro ap="; ap
440 PRINT "parametro bp="; bp
450 PRINT "parametro omega="; ome
460 PRINT "fase de retraso="; fi
470 PRINT "longitud del meandro="; L
480 PRINT "frecuencia del meandro="; omep
490 PRINT "fip="; fip
500 PRINT "distancia de retraso sp="; Sp

```

```

510 PRINT "velocidad de retraso spp="; Spp
520 PRINT "parametro stcm="; Stcm
530 STOP
'*****
540 ' determinacion de la pendiente transversal
550 DIM NN(5)
560 FOR I = 1 TO 3
570 READ NN(I)
580 NEXT I
590 DATA 0,2, -2
600 NN(4) = br / 2
610 NN(5) = -br / 2
620 N = 10
630 DIM Sz(N), Rcz(N), Stcz(N), Beta(N), Rlz(N), Sll(N)
640 DIM dz(N), Rdd(N), mu(N + 1), DMU(N + 1)
650 FOR K = 1 TO 5
660 FOR I = 1 TO N
670 Sz(I) = I / N * L
680 Sll(I) = Sz(I) / L
690 Rcz(I) = 1 / (COS(2 * 3.1416 * (Sz(I) / L - .25)) / Rc)
700 Rcz(N / 2) = Rcz(N / 2 - 1)
710 Rcz(N) = Rcz(N - 1)
720 Stcz(I) = Stcm * COS(2 * 3.1416 * (Sz(I) / L - Sp / L - .25))
730 Beta(I) = Stcz(I) * Rcz(I) / dc
740 Rlz(I) = Rcz(I) + NN(K)
750 dz(I) = dc * (Rlz(I) / Rcz(I)) ^ Beta(I)
760 Rdd(I) = dz(I) / dc
770 NEXT I
780 CLS
785 PRINT " datos para la linea de corriente "; K
790 FOR I = 1 TO N
800 PRINT "distancia("; I; ") (m)="; Sz(I),
810 PRINT "radio central("; I; ") (m)="; Rcz(I)
820 NEXT I
830 STOP
840 FOR I = 1 TO N
850 PRINT "pend. trans. Stc("; I; ")="; Stcz(I),
860 PRINT "beta("; I; ")="; Beta(I)
870 NEXT I
880 STOP
890 FOR I = 1 TO N
900 PRINT "Radio linea de corr.("; I; ") (m)="; Rlz(I),
910 PRINT "tirante("; I; ") (m)="; dz(I)
920 NEXT I
930 STOP
940 FOR I = 1 TO N
950 PRINT "rel. prof.d/dc("; I; ")="; Rdd(I),
960 PRINT "rel. s/L("; I; ")="; Sll(I)
970 NEXT I
980 STOP
990 'determinacion de las velocidades
1000 dr = NN(K)
1010 dsel = 1 / N
1020 dm = 2 * 3.1416 * G * dsel / omep
1030 xx = 2; yy = 0
1040 mu(1) = (xx + yy) / 2
1050 FOR I = 1 TO N
1060 Rcz(N / 2) = 1E+38
1070 Rcz(N) = 1E+38
1080 DMU(I) = -mu(I) * (1 + dr / Rcz(I)) ^ -Beta(I)

```

```

1085 DMU(I) = DMU(I) + 1 / (1 + dr / Rcz(I))
1090 DMU(I) = DMU(I) * dm
2000 mu(I + 1) = mu(I) + DMU(I)
2010 NEXT I
2020 resid = mu(N + 1) - mu(1)
2030 IF ABS(resid) < .0001 THEN 2090
2040 IF resid > 0 THEN 2070
2050 xx = mu(1)
2060 GOTO 1040
2070 yy = mu(1)
2080 GOTO 1040
2090 FOR I = 1 TO N + 1
2100 LPRINT "incremento Dmu ("; I; ")="; DMU(I),
2110 LPRINT "rel. v/Vmed("; I; ")="; mu(I)
2120 NEXT I
2130 STOP
2140 ' graficos
2150 CALL grafico(mu(), S11(), N, K)
2160 STOP
2170 CALL grafico2(Rdd(), S11(), N, K)
2180 STOP
2190 CALL grafico3(dz(), Sz(), N, K)
2200 STOP
2210 NEXT K
2220 END

```

```

2230 SUB grafico (mu(), S11(), N, K)
2240 CLS
2250 ' grafico adimensional distancia-velocidad
2260 SCREEN 12
2270 LINE (80, 380)-(600, 380)
2280 LINE (80, 120)-(80, 380)
2290 LINE (600, 380)-(600, 120)
2300 LINE (80, 120)-(600, 120)
2310 ' ajuste de escalas a la pantalla
2320 FOR I = 1 TO N
2330 IF mu(I) > ymax THEN ymax = mu(I)
2340 IF S11(I) > xmax THEN xmax = S11(I)
2350 NEXT I
2360 escv = 240 / ymax
2370 esch = 500 / xmax
2380 'ajuste de escala de ejes
2390 FOR I = 1 TO N
2400 xd = esch * I * xmax / N
2410 yd = escv * I * ymax / N
2420 LINE (80, 380 - yd)-(84, 380 - yd)
2430 LINE (80 + xd, 380)-(80 + xd, 376)
2440 LINE (596, 380 - yd)-(600, 380 - yd)
2450 LINE (80 + xd, 120)-(80 + xd, 124)
2460 NEXT I
2470 ' localizacion de puntos
2480 FOR I = 1 TO N
2490 xi = esch * S11(I)
2500 yi = escv * mu(I)
2510 PSET (81 + xi, 380 - yi)
2520 PSET (79 + xi, 380 - yi)
2530 PSET (80 + xi, 381 - yi)
2540 PSET (80 + xi, 379 - yi)
2550 NEXT I

```

```

2560 divv = ymax / N
2570 divh = xmax / N
2580 'titulo del grafico y encabezados
2590 LOCATE 1, 8: PRINT "Datos para la linea de corriente="; K
2600 LOCATE 28, 15: PRINT "R. de velocidad-distancia"
2610 LOCATE 26, 15: PRINT "distancia aguas abajo s/L"
2620 LOCATE 15, 2: PRINT "veloci-"
2630 LOCATE 16, 2: PRINT "dad mu"
2640 LOCATE 2, 8: PRINT "valor divisiones verticales="; divv
2650 LOCATE 3, 8: PRINT "valor divisiones horizontales="; divh
2660 LOCATE 5, 20: PRINT "valor maximo eje y="; ymax
2670 LOCATE 6, 20: PRINT "valor maximo eje x="; xmax
2680 END SUB

```

```

SUB grafico2 (Rdd(), Sll(), N, K)
2700 ' grafico adimensional relacion s/L - d/dc
2710 CLS
2720 SCREEN 12
2730 LINE (80, 380)-(600, 380)
2740 LINE (80, 120)-(80, 380)
2750 LINE (600, 380)-(600, 120)
2760 LINE (80, 120)-(600, 120)
2770 ' ajuste de escala
2780 FOR I = 1 TO N
2790 IF Rdd(I) > ymax THEN ymax = Rdd(I)
2800 IF Sll(I) > xmax THEN xmax = Sll(I)
2810 NEXT I
2820 escv = 240 / ymax
2830 esch = 500 / xmax
2840 ' escala de ejes
2850 FOR I = 1 TO N
2860 xd = esch * I * xmax / N
2870 yd = escv * I * ymax / N
2880 LINE (80, 380 - yd)-(84, 380 - yd)
2890 LINE (80 + xd, 380)-(80 + xd, 376)
2900 LINE (596, 380 - yd)-(600, 380 - yd)
2910 LINE (80 + xd, 120)-(80 + xd, 124)
2920 NEXT I
2930 'localizacion de puntos
2940 FOR I = 1 TO N
2950 xi = esch * Sll(I)
2960 yi = escv * Rdd(I)
2970 PSET (81 + xi, 380 - yi)
2980 PSET (79 + xi, 380 - yi)
2990 PSET (80 + xi, 381 - yi)
3000 PSET (80 + xi, 379 - yi)
3010 NEXT I
3020 divv = ymax / N
3030 divh = xmax / N
3040 'titulo de graficos
3050 LOCATE 1, 8: PRINT "datos para la linea de corriente="; K
3060 LOCATE 27, 15: PRINT "r. distancia s/L - profundidad d/dc"
3070 LOCATE 26, 15: PRINT "distancia aguas abajo s/L"
3080 LOCATE 15, 2: PRINT "profun-"
3090 LOCATE 16, 2: PRINT "didad d/dc"
3100 LOCATE 2, 8: PRINT "valor divisiones verticales="; divv
3110 LOCATE 3, 8: PRINT "valor divisiones horizontales="; divh
3120 LOCATE 5, 20: PRINT "valor maximo eje y="; ymax
3130 LOCATE 6, 20: PRINT "valor maximo eje x="; xmax
3140 END SUB

```

```

3150 SUB grafico3 (dz(), Sz(), N, K)
3160 CLS
3170 SCREEN 12
3180 LINE (80, 380)-(600, 380)
3190 LINE (80, 120)-(80, 380)
3200 LINE (600, 380)-(600, 120)
3210 LINE (80, 120)-(600, 120)
3220 ' ajuste de escala
3230 FOR I = 1 TO N
3240 IF dz(I) > ymax THEN ymax = dz(I)
3250 IF Sz(I) > xmax THEN xmax = Sz(I)
3260 NEXT I
3270 escv = 240 / ymax
3280 esch = 500 / xmax
3290 'escala de ejes
3300 FOR I = 1 TO N
3310 xd = esch * I * xmax / N
3320 yd = escv * I * ymax / N
3330 LINE (80, 380 - yd)-(84, 380 - yd)
3340 LINE (80 + xd, 380)-(80 + xd, 376)
3350 LINE (596, 380 - yd)-(600, 380 - yd)
3360 LINE (80 + xd, 120)-(80 + xd, 124)
3370 NEXT I
3380 'localizacion de puntos
3390 FOR I = 1 TO N
3400 xi = esch * Sz(I)
3410 yi = escv * dz(I)
3420 PSET (81 + xi, 380 - yi)
3430 PSET (79 + xi, 380 - yi)
3440 PSET (80 + xi, 381 - yi)
3450 PSET (80 + xi, 379 - yi)
3460 NEXT I
3470 divv = ymax / N
3480 divh = xmax / N
3490 'titulo de graficos
3500 LOCATE 1, 8: PRINT "datos para la linea de corriente="; K
3510 LOCATE 28, 15: PRINT "relaci3n profundidad- distancia s"
3520 LOCATE 26, 15: PRINT "distancia aguas abajo s"
3530 LOCATE 15, 2: PRINT "profun-"
3540 LOCATE 16, 2: PRINT "didad d"
3550 LOCATE 2, 8: PRINT "valor divisiones verticales="; divv
3560 LOCATE 3, 8: PRINT "valor divisiones horizontales="; divh
3570 LOCATE 5, 20: PRINT "valor maximo eje y="; ymax; "m"
3580 LOCATE 6, 20: PRINT "valor maximo eje x="; xmax; "m"
3590 END SUB

```