18
2 ej

Agustín Rayo Fierro

El conocimiento matemático como conocimiento *a posteriori*

Tesis que se presenta para obtener
el grado de Licenciado en Filosofía

Facultad de Filosofía y Letras, UNAM
México, 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

a Alfredo, por el θαυμάζειν

Quiero manifestar mi agradecimiento al Instituto de Investigaciones Filosóficas y a todos los que han ayudado de una u otra manera a la realización de esta tesis, particularmente a Luis Briseño, Julieta Fierro, Raymundo Morado, Raúl Orayen, Salma Saab, Pedro Stepanenko, Raymond y Marilyn Thomas y, sobre todo, a Sergio Martínez.

Índice

Introducción.

El objeto de esta tesis es discutir el problema de si el conocimiento matemático es conocimiento *a priori*. Parece, pues, importante aclarar qué se quiere decir con *conocimiento matemático* y qué con *conocimiento a priori*. La segunda de estas tareas será abordada en el capítulo siguiente, pero a la primera nos abocaremos en seguida.

Por conocimiento matemático entiendo, simplemente, el conocimiento de proposiciones matemáticas. Llamaré proposiciones matemáticas a las proposiciones usualmente consideradas como parte de la matemática, es decir, a las de la teoría de números, las del álgebra, las de la geometría, las del análisis, las de la topología, etc. Es necesario, sin embargo, hacer una distinción.

Considérese a la teoría de grupos como ejemplo.[1] Un grupo se *define* como cualquier cosa que satisfaga ciertas condiciones, de esta manera, las propiedades de los grupos no son sino las consecuencias lógicas de las condiciones que definen lo que es un grupo: dado que lo único que suponemos sobre los grupos es que satisfacen nuestra definición, nada salvo las consecuencias lógicas de esta definición puede afirmarse acerca de un grupo. Una proposición sólo se considera como *teorema* si resulta verdadera en *cualquier* interpretación en la que las condiciones definitorias quedan satisfechas. Por otra parte, pensemos en la teoría de los números naturales. En este caso tenemos

---

[1] Estoy pensando en la teoría de grupos no como el estudio de cierto tipo de *conjuntos*, sino más bien como el estudio de una teoría *arbitraria* que satisface un conjunto dado de condiciones. Un ejemplo de esta manera de tratar el tema puede encontrarse en Mendelson (1987) p. 77.

un *modelo* (los números naturales) que determina cuándo nuestras proposiciones son verdaderas y cuándo son falsas, y consideramos que una teoría es *adecuada* para nuestro modelo si sus teoremas resulten verdaderos en él al ser interpretados de cierta manera.

He aquí la distinción. Llamo a las ramas de la matemática en las que no hay ningún modelo particular que establezca la verdad de las proposiciones matemáticas (como en el caso de la teoría de grupos) *matemática no interpretada*. De la misma manera, llamo a las ramas de la matemática para las que *sí* hay modelos particulares que establecen la verdad de las proposiciones matemáticas (como en el caso de la teoría de los números naturales) *matemática interpretada*.

Es importante hacer ver que esta distinción entre matemática interpretada y no interpretada no corresponde con distinciones entre matemática aplicada y matemática pura. Aún cuando la matemática aplicada es, en efecto, siempre interpretada, la matemática pura no siempre es no interpretada. Piénsese en el teorema de la infinidad de los números primos o en aseveraciones sobre espirales que dan una cantidad infinita de vueltas en torno a un punto pero que tienen longitudes finitas; ciertamente estos no son ejemplos de matemática aplicada, pero encuentran interpretaciones estándar en ciertos modelos, a saber, los números naturales y los puntos del plano (respectivamente).

A lo largo de esta tesis sólo consideraremos a las proposiciones de la matemática *interpretada*, o sea, discutiremos el problema de si nuestro conocimiento de la matemática *interpretada* es conocimiento *a priori*, pero no el de si la matemática *no interpretada* es conocimiento *a priori*. La razón es que hay un sentido importante en el que la matemática *no interpretada* es lógica. Establecer la verdad (o teoremicidad) de las proposiciones de la matemática no interpretada es meramente una cuestión de establecer *consecuencia lógica*. Así, quien se pregunta por la aprioricidad de nuestro conocimiento de la matemática no interpretada se está preguntando, en realidad, por la aprioricidad de nuestro conocimiento de la lógica, y eso rebasa los límites de este escrito. En lo sucesivo, pues, diremos *matemática* refiriéndonos siempre a la matemática *interpretada*.

La conclusión a la que espero llegar aquí es que el conocimiento matemático *no* es conocimiento *a priori*. Este resultado me parece relevante porque, a lo largo de la historia, el conocimiento matemático ha sido considerado, junto con nuestro conocimiento de la lógica, como el conocimiento *a priori por excelencia*. Así, de resultar válidos mis argumentos, estaría en posición no sólo de cuestionar la larga tradición filosófica del apriorismo en matemáticas sino, además, de enfrentar la idea de que exista tal cosa como el conocimiento *a priori*: si aún el conocimiento matemático, considerado tradicionalmente como ejemplo paradigmático de conocimiento *a priori*, resultara ser conocimiento *a posteriori*, tendríamos razones para pensar que *todo* nuestro conocimiento es *a posteriori*.[2]

Aprovecharemos las siguientes páginas para describir las posiciones que algunos de los miembros más importantes de la tradición filosófica han tomado con respecto a la aprioricidad del conocimiento matemático. Aclaro que mi intención no es discutir las

---

2 Incluso nuestro conocimiento de la lógica. Creo que pueden darse razones similares a las que daré aquí, considerando el caso de la matemática, para hacer ver que no podemos conocer *a priori* a las proposiciones de la lógica.

razones por las que cada filósofo adoptó su punto de vista sino, simplemente, mostrar que la tradición filosófica realmente ha estado caracterizada por una posición apriorista en matemáticas.

Es natural comenzar por Platón. Consideremos el siguiente pasaje del Teeteto:

> TEETETO: Te refieres a [...] los números en general [..], y claramente tu pregunta también abarca 'par' e 'impar' y todo ese tipo de nociones. ¿Preguntas con qué parte del cuerpo percibimos esto?
>
> SÓCRATES: Me sigues admirablemente Teeteto; esa es exactamente mi pregunta.
>
> TEETETO: En realidad, Sócrates, no podría decir salvo que creo que no hay ningún órgano especial para todas esas cosas, como hay para otras. Me resulta claro que la mente es su propio instrumento cuando contempla los términos comunes que se aplican a todo [como los números en general, 'par' e 'impar' y *todo ese tipo de nociones*].
>
> SÓCRATES: [...] Eso es lo que yo pensaba, pero quería que estuvieras de acuerdo.[3]

Hay un pasaje en el libro VI de la *República* que es también digno de ser tomado en cuenta. Sócrates comenta que "los estudiosos de la geometría, de los cálculos y de materias semejantes [...] consideran a [sus postulados] como conocidos y, tratándolos como suposiciones absolutas, se abstienen de dar mayor cuenta de ellos a otros o a ellos mismos, *tomando por sentado que resultan obvios para todos. Comienzan de éstos [postulados], y, llevando a cabo su búsqueda constantemente a partir de este punto, concluyen con aquello que estaban investigando.*"[4]

---

[3] *Teeteto* 185 c. *La traducción es mía.*
[4] *República VI*, 510 c. *El énfasis es mío. La traducción es mía.*

Es, desde luego, difícil establecer definitivamente la posición de Platón sobre algún tema a partir de unos cuantos pasajes de sus diálogos, pero creo que los fragmentos que hemos considerado aquí dejan entrever que, al menos a primera vista, Platón favorecería una posición apriorista en matemáticas.

Descartes, en cambio, es bastante claro al respecto. En las *Meditaciones* menciona que "no sería pertinente decir que, la idea de *triángulo* podría haberme llegado a través de los órganos de los sentidos por el hecho de que he visto de cuando en cuando figuras con forma triangular; pues puedo formar en mi espíritu una infinidad de otras figuras de las que no puedo tener la menor duda de que no me llegaron a través de los sentidos, y puedo demostrar sus diversas propiedades tal y como demuestro las del triángulo."[5] Para Descartes, pues, conocimiento matemático como el de la geometría no proviene de fuentes empíricas.

El caso de Leibniz es aún más radical. En una carta a Clarke escribe lo siguiente:

> El gran fundamento de las matemáticas es el *principio de la contradicción o de la identidad*, es decir, que una proposición no puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo, y, así, que A es A y no puede ser no A, y ese solo principio basta para demostrar toda la aritmética y toda la geometría, es decir, todos los principios matemáticos.[6]

Leibniz acogería una posición apriorista en matemáticas por considerar que podemos obtener todo nuestro conocimiento

---

[5] DESCARTES, R. *Méditations*. Méditation Cinquième. *La traducción es mía.*
[6] LEIBNIZ, G.W. *Segunda carta a Clarke. La traducción es mía.*

matemático a partir sólo de una 'verdad de razón' como el principio de contradicción que, a diferencia de las 'verdades de hecho', se encuentra desprovista de elementos empíricos.[7]

Hume también hace una distinción entre dos tipos distintos de conocimiento:

> Todos los objetos del conocimiento o investigación humana se dividen naturalmente en dos tipos, a saber, *relaciones entre ideas* y *cuestiones de hecho*. Del primer tipo son las ciencias de la geometría, el álgebra y la aritmética; y, dicho brevemente, cualquier afirmación que resulte intuitiva o demostrativamente cierta. *Que el cuadrado de la hipotenusa sea igual a los cuadrados de los dos lados*, es una proposición que expresa una relación entre estas figuras. *Que tres veces cinco es igual a la mitad de treinta*, expresa una relación entre estos números. Las proposiciones de este tipo pueden ser descubiertas por las meras operaciones del pensamiento, independientemente de lo que exista en cualquier parte del universo.[8]

No cabe duda, pues, de que Hume adoptaría una posición apriorista ante el conocimiento matemático. También es este el caso de Kant: "las proposiciones matemáticas, estrictamente hablando, son siempre juicios *a priori*, no empíricos; porque llevan en ellos una necesidad que no puede ser derivada de la experiencia."[9] Kant, sin embargo, agrega que "todos los juicios matemáticos, sin excepción, son sintéticos."[10]

---

7 *Cfr.* Nuevos ensayos sobre el conocimiento humano, IV, ii.
8 HUME, D. An Enquiry concerning Human Understanding IV, i. *La traducción es mía.*
9 KANT, I. Crítica de la razón pura B. 14. *La traducción es mía.*
10 *Ibid.*

Frege estaría de acuerdo con Kant en que todas las proposiciones matemáticas son *a priori*, pero no en que todas son sintéticas. Aún cuando menciona que "al llamar sintéticos *a priori* a las verdades de la geometría, [Kant] reveló su verdadera naturaleza"[11], Frege aclara que "[tiene] la esperanza de poder decir que [sus fundamentos de la aritmética] han hecho probable que las leyes de la aritmética sean juicios *analíticos* y, consecuentemente, *a priori*."[12]

Pero no fue Frege, sino los empiristas lógicos, quienes llevaron al extremo esta idea de que el conocimiento matemático es conocimiento *a priori* por el hecho de ser conocimiento analítico. A. J. Ayer, por ejemplo, menciona que "[todas] las verdades de la lógica y de la matemática son proposiciones analíticas o tautologías"[13] en su conocido artículo 'El *a priori*'.

A juzgar por los filósofos que aquí hemos mencionado podría parecer que el apriorismo en matemáticas ha sido una invariante en la tradición filosófica, pero no es así. La regla ha tenido sus excepciones. Un ejemplo notable es John Stewart Mill. Consideremos un par de pasajes de su *Sistema de lógica*:

> Nos resta investigar cuál es el fundamento de los axiomas [de la geometría] - ¿cuál es la evidencia en la que descansan? Respondo, son verdades experimentales; generalizaciones de la observación. La proposición 'dos líneas rectas no pueden encerrar un espacio [...] es una inducción de la evidencia de nuestros sentidos.[14]

---

11 FREGE, G. Fundamentos de la aritmética. § 89. *La traducción es mía.*
12 *Ibid.* § 87. *El énfasis es mío.*
13 AYER, A.J. *The a priori* en BENACERRAF *et al.* Philosophy of Mathematics (p. 319 en la segunda edición). *La traducción es mía.*
14 MILL, J. S. A System of Logic Libro II, cap. V, §4.

> La ciencia de los números no es, por tanto, ninguna excepción a la conclusión a la que habíamos llegado previamente, que los métodos de aún las ciencias deductivas son inductivos, y que sus primeros principios son generalizaciones de la experiencia.[15]

Es verdad, como señala Frege,[16] que la explicación del conocimiento matemático que nos ofrece Mill para fundamentar sus conclusiones es un poco burda, pero creo que sus resultados son correctos. Mi labor a lo largo de la tesis consistirá en mostrar que esto es así.

Para concluir con esta introducción, daré un pequeño bosquejo de lo que se hará en el resto del trabajo. El primer paso será aclarar lo que quiero decir con *conocimiento a priori*. Con este fin, discutiré la caracterización de conocimiento *a priori* que Philip Kitcher nos ofrece en *La naturaleza del conocimiento matemático* y daré razones para desacreditarla como demasiado fuerte. Terminaré por aceptar una nueva formulación de conocimiento *a priori* que esquiva los problemas de la definición kitcheriana.

Habiendo quedado claros los sentidos de *conocimiento matemático* y *conocimiento a priori*, el terreno será propicio para emprender la labor de mostrar que el conocimiento matemático no es conocimiento *a priori*. Mi estrategia será doble. Por un lado, haré ver que las posiciones aprioristas tienen problemas importantes y, por otro,

---

[15] *Ibid.* cap. VI, §2.
[16] *Cfr.* FREGE, G. *op. cit.* §7,8.

ofreceré una explicación del conocimiento matemático como conocimiento *a posteriori*.

La primera de estas tareas, la de hacer ver que las posiciones aprioristas tienen problemas importantes, recaerá sobre los capítulos 2 y 3. En el capítulo 2 daré razones para objetar a quienes, argumentando que la matemática puede reducirse a la lógica, arguyan que el conocimiento matemático es conocimiento *a priori*; y en el capítulo 3 mostraré que quienes sostienen que la matemática tiene axiomas propios, pero que estos axiomas pueden ser conocidos *a priori*, se enfrentan a problemas importantes.

La segunda tarea, la de desarrollar una explicación del conocimiento matemático como conocimiento *a posteriori*, será considerada en el capítulo 4. Ahí me basaré en el trabajo de Philip Kitcher para señalar una manera en la que la verdad de las proposiciones matemáticas puede ser entendida en términos empíricos.

Capítulo 1

En La naturaleza del conocimiento matemático *Philip Kitcher muestra que el conocimiento matemático no es conocimiento a priori valiéndose de una definición de conocimiento a priori que en ocasiones ha sido considerada como demasiado fuerte. En este capítulo veremos cuál es esa definición de Kitcher y qué razones hay para pensar que resulta demasiado fuerte. Después abriremos camino para argumentar que puede mostrarse que el conocimiento matemático no es conocimiento a priori sin echar mano de una definición tan fuerte de conocimiento a priori como la que usa Kitcher.*

A partir de Kant se ha dicho que un conocimiento es *a priori* cuando resulta independiente de la experiencia. Pero ¿qué quiere decir exactamente eso de *independiente de la experiencia*? En *La naturaleza del conocimiento matemático*[17] Philip Kitcher precisa la noción kantiana de conocimiento *a priori* como sigue:

(K1) X conoce *a priori* que *p* si y sólo si X sabe que *p* y la creencia de X de que *p* fue producida por un proceso que es una *garantía* [warrant] *a priori* para ella.

(K2) α es una garantía *a priori* para la creencia de X de que *p* si y sólo si α es un proceso tal que, dada cualquier vida *e*, suficiente para que X pueda tener la creencia de que *p*,

[17] *cfr.* KITCHER, P. The Nature of Philosophical Knowledge 1, IV.

(a) un proceso del mismo tipo que α podría generar en X la creencia de que *p*,

(b) si un proceso del mismo tipo que α produjera en X la creencia de que *p*, este proceso sería una garantía para X de que *p*, y

(c) si un proceso del mismo tipo que α produjera en X la creencia de que *p*, entonces *p*.

Dedicaremos los siguientes párrafos a elucidar esta definición. Es importante destacar, primeramente, que no son las proposiciones *a priori* las que quedan definidas, sino más bien el *conocimiento a priori*. Kitcher diría que el concepto de proposición *a priori* está *derivado* del de *conocimiento a priori*: se dice que una proposición es *a priori* cuando es posible tener conocimiento *a priori* de ella.[18]

También vale la pena señalar que para Kitcher el termino *conocimiento* debe ser entendido en el sentido tradicional, es decir, decimos que X *conoce* que *p* si y sólo si (*i*) X cree que *p* (*ii*) *p* es verdad y (*iii*) la creencia de X de que *p* ha sido producida por un proceso que sirve como *garantía* de su verdad. Podemos decir entonces que, de acuerdo con la definición de Kitcher, el conocimiento *a priori* es conocimiento en el sentido tradicional justificado con una garantía de cierto tipo: una *garantía a priori*. Veamos ahora qué es eso de una garantía *a priori*.

Hay que comenzar por entender el significado de *una vida suficiente para que X pueda tener la creencia de que p*. Con *vida* de X (hasta el tiempo *t*), Kitcher se refiere al conjunto total de experiencias que X ha tenido (hasta el tiempo *t*). Así, diremos que una vida es

[18] *cfr. ibid.* 1, III.

suficiente (o *suficientemente rica*) para que X tenga la creencia de que *p* cuando las experiencias que conforman esa vida basten para que X pueda acceder a todos los conceptos necesarios en la formación de la creencia de que *p*. ¿Qué sucedería si Kitcher considerara *cualquier* vida, suficientemente rica o no, en su definición de garantía *a priori*? Por (a), un conocimiento no puede ser *a priori* cuando existan vidas en las que ningún proceso pueda generar en X la creencia de que *p*; pero entonces creencias como 'todos los triángulos tienen tres lados' no resultarían conocimiento *a priori* porque existen vidas posibles de X tan pobres que X ni siquiera podría formar un concepto como *triángulo*, mucho menos la creencia de que todos los triángulos tienen tres lados.

Ahora bien, ¿por qué es importante (a)? ¿Por qué es importante que podamos encontrar procesos capaces de generar las creencias que queremos considerar como conocimiento *a priori* en *cualquier* vida suficientemente rica? Supongamos que, dada su vida actual, hay un proceso que genera en X la creencia de que *p*, pero que existen vidas (suficientemente ricas) en las que *no* es posible encontrar procesos semejantes, ¿podría realmente decirse que *p* es conocimiento *a priori* para X? Kitcher diría que no. Argumentaría que, si nuestro conocimiento realmente ha de ser independiente de la experiencia, el proceso que lo genera no puede depender de algún conjunto particular de experiencias; debe de estar disponible en *cualquier* vida suficientemente rica. Más aún, diría que, en todas las vidas suficientemente ricas, debe haber procesos *del mismo tipo* disponibles; veamos cómo es esto. Hay diferencias importantes entre, por ejemplo, adquirir la creencia de que cierto teorema es verdadero por haber oído hablar de él en una conferencia y adquirir esta misma creencia por haber seguido una demostración; así, Kitcher afirmaría que no basta con que en cada vida suficientemente rica esté disponible *algún* proceso generador de la creencia de que *p* para considerar a *p* como conocimiento *a priori*; si la creencia de que *p* realmente ha de resultar *independiente* de la experiencia, la disponibilidad del proceso que nos *garantiza* su verdad no puede depender de algún conjunto de experiencias en particular, debe de estar presente en *todas* las vidas suficientemente ricas.

Es para terminar de hacer explícita esta idea que Kitcher incluye a (b) en su definición. Si nuestro conocimiento de que *p* es realmente independiente de la experiencia, el proceso que en la vida actual nos sirve para *garantizar* nuestra creencia en *p* no sólo debe de estar *disponible* en cualquier otra vida suficientemente rica, sino que además debe de seguir *garantizando* la verdad de *p*. En caso contrario, explicaría Kitcher, el hecho de poder garantizar la verdad de *p* y, por tanto, el hecho de poder considerar a la creencia de que *p* como conocimiento, dependería de un cierto conjunto de experiencias y no podríamos decir que conocemos *a priori* que *p*.

Concentrémonos ahora en (c). Kitcher sostiene que sólo puede decirse que conocemos que *p* cuando *p* sea *verdad*; y, así, considera que si hemos de tomar a *p* como conocimiento *a priori*, no es suficiente con que en cualquier vida suficientemente rica exista un proceso que nos de *garantía* de su verdad, hace falta que *p* realmente *sea* verdad en cualquier vida suficientemente rica porque no queremos que el hecho de que *p* resulte ser *conocimiento* dependa de alguna vida particular, necesitamos que *p* sea conocimiento en *cualquier* vida suficientemente rica.

En síntesis, podemos decir que, de acuerdo con la definición kitcheriana, X conoce *a priori* que *p* si y sólo si:

(I) X conoce **que** *p* (en el sentido tradicional), es decir, (*i*) X cree que *p*, (*ii*) *p* es verdad y (*iii*) la creencia de X de que *p* ha sido producida por un proceso, α, que sirve como *garantía* de su verdad; y

(II) **X puede conocer que** ***p*** **en cualquier vida suficientemente rica**, es decir, *en cualquier vida suficientemente rica*, (*i*) X puede creer que *p*, (*ii*) *p* es verdad y (*iii*) la creencia de X de que *p* puede ser producida por un proceso del mismo tipo que α que sirve, en esa vida, como garantía de su verdad.

Hemos visto cómo es que Kitcher define *conocimiento a priori*, pero no hemos discutido si esta definición realmente captura lo que queremos decir cuando hablamos de conocimiento *a priori*. Consideremos el siguiente argumento de Albert Casullo:

> Imaginemos que Carlitos cree que *p* implica *q* con base en una prueba válida P_1. Dado que la prueba es el resultado de un proceso de reflexión, la creencia de Carlitos está justificada de manera no experimental. Pero ahora supongamos que (α) existe una pseudo-prueba, P_2, de *p* a $\neg q$; y que (β) si esta pseudo-prueba fuera conocida por Carlitos, no sería capaz de detectar en ella fallas o desacreditarla de alguna otra manera. Mientras que la pseudo-prueba nunca sea conocida por Carlitos, su creencia permanecerá justificada, a pesar del hecho de que si sí *conociera* la pseudo-prueba su justificación *dejaría* de funcionar.[19]

---

[19] *cfr.* CASULLO, A. *Revisabilaty, Reliabilism and A Priori Knowledge*, IA.

El punto de Casullo es que podríamos querer considerar como conocimiento *a priori* a creencias que carecerían de justificación bajo ciertas circunstancias. Esta es una manera de objetar a la definición kitcheriana de conocimiento *a priori*. Si suponemos que, en efecto, el conocimiento *a priori* puede perder su *garantía* en circunstancias suficientemente adversas, debemos concluir que la caracterización de Kitcher resulta inadecuada por implicar que el conocimiento *a priori* está garantizado en *cualquier* vida suficientemente rica. Kitcher diría que la creencia de Carlitos de que *p* implica *q* no es conocimiento *a priori* porque viola la condición (b) -o la (II,*iii*)- de la definición de conocimiento *a priori*: existe una vida posible en la que el proceso que generó la creencia dejaría de funcionar como *garantía* de su verdad, a saber, la vida en la que Carlitos sí es expuesto a la pseudo-prueba P_2.

David Bostock también ha criticado la caracterización kitcheriana de *a priori*.[20] Para Bostock el que un conocimiento, *p*, resulte *independiente* de la experiencia no significa que ninguna experiencia sea capaz de refutar *p*, sino más bien que ninguna experiencia *intervino* en la formación de la creencia de que *p*. Una vez más, la condición (b) de Kitcher ha quedado violada.

Queda claro, por lo menos, que Casullo y Bostock tienen razones para dudar de que sea necesaria la condición (b) de Kitcher para poder decir que X conoce *a priori* que *p* y, en este sentido, para dudar de que la definición kitcheriana de conocimiento *a priori* sea realmente adecuada. Pero creo que todavía hay razones más profundas para sospechar de esta definición. Veamos a qué me refiero.

---

20 Escuché su crítica en una conferencia impartida en el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM en 1994.

¿Puede decirse que *conocemos* una proposición matemática por el mero hecho de que exista una *prueba* de esa proposición? No. El que tengamos *conocimiento* depende de un proceso psicológico, no de la existencia de un conjunto de enunciados. Me explico. ¿Puedo decir, por ejemplo, que la prueba de Andrew Wiles me ha dado *conocimiento* de la verdad del teorema de Fermat? Desde luego que no. La prueba de Wiles sólo ha servido para producir conocimiento en él y en el puñado de matemáticos que se han tomado la molestia de estudiar sus dos centenas de páginas y han llevado a cabo un proceso psicológico capaz de generar en ellos (*i*) la creencia de que el teorema de Fermat es, en efecto, verdadero, y (*ii*) una *garantía* para considerar que el teorema de Fermat es, en efecto, verdadero. Todos los que no hemos usado el texto de Wiles para experimentar ese proceso no podemos decir que la prueba nos ha dado *conocimiento* porque lo que realmente aporta ese conocimiento es el *seguir* la prueba, no la prueba misma.

Vale la pena destacar el hecho de que, siguiendo pruebas, no podemos conocer *todas* las verdades de la matemática, mucho menos conocerlas *a priori*. Dado *cualquier* número, n, existe una cantidad infinita de teoremas de la matemática que no pueden ser probados en menos de n pasos.[21] Así, por ejemplo, hay un número infinito de teoremas que no pueden ser probadas en menos de $10^{10^{10^{10}}}$ pasos. Aún cuando el más talentoso de los matemáticos dedicara su vida entera a seguir la prueba de alguno de esos teoremas, moriría mucho antes de poder terminar. Sirva esto para dejar en claro que, a menos que tengamos en mente algún procedimiento alterno al seguimiento de pruebas para conocer verdades matemáticas como las antes descritas,

---

21 La razón es que hay un número infinito de teoremas en la matemática y sólo un número finito de pruebas con n o menos pasos.

es falso que la matemática sea a priori: muchas de sus proposiciones verdaderas no pueden ser conocidas *a priori* porque, de hecho, ni siquiera pueden ser conocidas.[22]

Pero volvamos a la definición de *a priori* de Kitcher. De acuerdo con ella, ¿conocemos *a priori* la verdad de un teorema, *t*, de la matemática si hemos seguido una prueba de *t*? Permítaseme dar un ejemplo.

Hace algunos meses, mientras estudiaba el teorema de incompletud de Gödel en un seminario de lógica matemática, llegué a la conclusión de que con el método de Gödel era posible probar, no sólo los resultados usuales de incompletud, sino, además, la inconsistencia de la matemática. Por supuesto, había un importante error en mi razonamiento, pero resultó ser tan sutil que, de hecho, construí una prueba formal justificando mi conclusión. Lo que interesa del asunto es que, aún habiendo seguido una prueba formal en la que, ciertamente, yo no podía detectar ningún error, sabía que mi conclusión era falsa. Estaba seguro de que, si fuera cierto que con el método de Gödel puede probarse un resultado tan importante como la inconsistencia de la matemática, alguno de los muchos lógicos y matemáticos que han estudiado detenidamente la prueba, tal vez el propio Gödel, lo habría descubierto mucho antes que yo.

Mi error estaba lo suficientemente oculto como para que, cuando le mostré mi 'prueba' al director del seminario, él tampoco detectara inmediatamente la fuente del problema. Pero, durante los breves momentos en los que no había podido reparar en el fallo, ¿se sentía

---

22 Nótese que aquí estoy pensando en la noción de *proposición a priori* como *derivada* de la de *conocimiento a priori*, a saber, una proposición es *a priori* cuando puede ser conocida *a priori*.

justificado en creer que la matemática es inconsistente por haber seguido mi prueba? Por supuesto que no. Él también sabía que me había equivocado en algún lugar y comenzó a buscar el problema hasta que, al poco tiempo, lo encontró.

La actitud de mi profesor se explica porque estamos conscientes del hecho de que cometemos numerosos errores cuando construimos pruebas y del hecho de que, con mucha frecuencia, dejamos pasar problemas desapercibidos en las pruebas que revisamos. Así, en palabras de Hume,

> No hay ningún algebrista o matemático tan experto en su ciencia que deposite su entera confianza en una verdad que acaba de descubrir o que la considere como más que una mera cosa probable. Cada vez que revisa sus pruebas aumenta su confianza; pero mucho más por el hecho de que sus amigos las aprueben; y lo que aumenta esta confianza hasta la máxima perfección es el asentimiento universal y el aplauso del mundo educado.[23]

Este problema se acentúa en el caso de las pruebas largas. Hay demostraciones -como la de más de doscientas páginas que redactó Wiles para probar el teorema de Fermat- que requieren de un esfuerzo de varios *meses* para poder ser revisadas. ¿No es razonable pensar que, si a veces cometemos errores siguiendo pruebas cortas, podríamos fácilmente cometer errores siguiendo pruebas largas? Kitcher lo formula así:

---

23 HUME, D. Treatise of Human Nature p. 180. (Cita tomada de KITCHER, P. *ibid.* 2,II).

> Nos sabemos falibles. Sabemos que nuestra atención puede sufrir un lapso y que en ocasiones podemos mal interpretar lo que habíamos probado previamente. Por tanto, estamos *razonablemente* preocupados, al llegar al final de una prueba larga, de que algún error se nos haya escabullido.[24]

El hecho de que no siempre nos parezca suficiente el haber seguido una prueba de *t* para sentir *garantizada* nuestra creencia en *t*, nos muestra cómo el haber seguido una prueba de *t* no necesariamente implica conocer que *t* y, por tanto, cómo no necesariamente implica *conocer a priori* que *t*. Concretamente, estamos violando la condición (*iii*) de nuestra definición de conocimiento. Podemos, pues, decir que, en general, no basta con seguir una prueba de *t* para tener *conocimiento* de *t*.

Pareciera ser, sin embargo, que en ciertos casos el seguir una prueba de *t sí* nos *garantiza* la verdad de *t*. Hay ocasiones en las que ni estamos trabajando con una prueba muy larga ni nos enfrentamos a retos de índole social -como cuando desconfié de mi 'prueba' de la inconsistencia de la matemática por considerar que, de ser válida, alguien ya habría llegado a ese resultado. ¿Serán estos casos *no problemáticos* candidatos a conocimiento *a priori* de acuerdo con la definición de Kitcher?

Tomemos una proposición *no problemática*, *p*, e imaginemos una vida en la que suceda lo siguiente: (α) hay un acuerdo generalizado en la comunidad matemática de la verdad de $\neg p$ con base en una pseudo-prueba *A*; (β) X, descubre una prueba corta de *p*, A^*, pero es incapaz de detectar errores en *A*; (γ) X muestra su prueba a matemáticos

---

[24] KITCHER, P. *ibid.* 2,II.

reconocidos y todos coinciden en que debe tener algún error sutil que llevaría mucho tiempo detectar; y (δ) X ha construido pruebas equivocadas en el pasado. Según la definición de Kitcher, ¿diríamos que X puede conocer *a priori* que *p*? Ciertamente no. Dado que existe al menos una vida posible (suficientemente rica) en la que A^* no *garantiza* la creencia de X de que *p* porque existen en ella buenas razones para pensar que A^* tiene fallos, ha quedado violada la condición (b) de la definición de Kitcher.

¿Y qué sucedería si conociéramos una proposición matemática, *p*, *sin necesidad de prueba*? ¿Podríamos considerar a *p* como conocimiento *a priori* de acuerdo con la definición de Kitcher? Supongamos que, de alguna manera, somos capaces de *ver* o *intuir* la verdad de *p*. Pareciera ser que, si nuestras intuiciones fueran lo suficientemente poderosas, nos *garantizarían* la verdad de *p*. ¿Pero lo harían en *cualquier* vida suficientemente rica? Imaginemos una vida en la que, efectivamente, es el caso que X intuye poderosamente que *p*, pero también es el caso que: (α) en el pasado X ha tenido intuiciones poderosas que después han resultado falsas; (β) existe un acuerdo generalizado en la comunidad matemática de que $\neg p$ es el caso; (γ) X ha hablado de sus intuiciones con matemáticos de gran prestigio y todos han comentado que, en el pasado, ellos también experimentaron esa intuición pero que, profundizando en el tema, han encontrado que es, en realidad, una intuición equivocada y han señalado que ahora experimentan con mucha más fuerza la intuición de que $\neg p$; y (δ) X ha estudiado cuidadosamente pruebas de $\neg p$ a partir de premisas de las que experimenta intuiciones tan poderosas como su intuición de que *p* y no ha podido encontrar ningún error. En una vida como esta, la intuición de X de que *p* no bastaría para *garantizar* la verdad de su creencia de que *p* porque hay buenas razones para pensar que X está experimentando, como lo ha hecho antes, una intuición equivocada. Queda, pues, violada la condición (b) de la definición de Kitcher y, por tanto, no puede decirse que X conozca *a priori* que *p*.

Hemos visto cómo, de acuerdo con la definición de Kitcher, no podemos conocer proposiciones matemáticas *a priori* ni siguiendo pruebas ni intuyendo su verdad porque, en ambos casos, hay vidas suficientemente ricas en las que nuestra conclusión no estaría garantizada. Pero, entonces, para un kitcheriano, no es posible tener conocimiento *a priori* de las proposiciones matemáticas.

Nos hemos topado aquí con una razón importante para sospechar que la definición de Kitcher no captura lo que queremos decir por conocimiento *a priori*. Hemos concluido que el conocimiento matemático no puede ser conocimiento *a priori* y en nuestros argumentos no nos hemos siquiera planteado la pregunta de si la experiencia juega un papel en la formación de nuestras creencias matemáticas. Aparentemente, las razones que nos han servido para rechazar candidatos a conocimiento *a priori* no son las que quisiéramos que determinaran si una creencia es *a priori* o no. Y eso no es todo. Ninguno de los argumentos que usamos para llegar a nuestras conclusiones acerca del conocimiento *a priori* en matemáticas deja de funcionar cuando lo aplicamos al caso de la lógica. Con un razonamiento análogo podría concluirse que el conocimiento de proposiciones lógicas tampoco es conocimiento *a priori*. Pero, entonces, ¿hay algo que realmente sea conocimiento *a priori*? Habiendo descartado los ejemplos paradigmáticos de conocimiento *a priori* tenemos buenas razones para pensar que no. La definición de Kitcher es tan fuerte que, sin siquiera tomar en cuenta si la experiencia juega un papal en la formación de nuestras creencias o no, parece habernos privado por completo de conocimiento *a priori*. Esto basta para hacer ver que la definición de conocimiento *a priori* de Kitcher podría resultar indeseable.

Ahora bien, creo que no se necesita una definición tan fuerte de conocimiento *a priori* como la de Kitcher para hacer ver que el conocimiento matemático no es conocimiento *a priori*. A lo largo de este trabajo, procuraré mostrar que requerimos de elementos empíricos para determinar si una proposición matemática es verdadera o no. Así, para concluir que el conocimiento matemático no es conocimiento *a priori*, me bastará con afirmar acerca del conocimiento *a priori* lo siguiente:

(A1) X conoce *a priori* que *p* si X conoce que *p* independientemente de la experiencia; y

(A2) en caso de que X requiera de elementos empíricos para poder determinar si *p* es verdad, X *no* conoce que *p* independientemente de la experiencia y, por tanto, X *no* conoce *a priori* que *p*.[25]

Claramente esta no es una caracterización *completa* de conocimiento *a priori* porque, aunque se da una condición necesaria para decir que X conoce que *p* independientemente de la experiencia, no se dan condiciones suficientes. Esta formulación tiene, sin embargo,

---

[25] Vale la pena aclarar que cuando digo que *X requiere de elementos empíricos para poder determinar si p es verdad* estoy pensando sólo en elementos empíricos que juegan un papel *esencial* en la creencia de X de que *p*. Así, por ejemplo, si los únicos elementos empíricos que X requiere para determinar si una proposición matemática es verdadera son ciertos símbolos dibujados en un pizarrón, concederé que X conoce *a priori* que *p*.

la ventaja de que, si resultan válidos mis argumentos, podré concluir que el conocimiento matemático no es conocimiento *a priori* de acuerdo con *cualquier* definición de conocimiento *a priori* compatible con (A1) y (A2). Además, esta forma de abordar el problema me permite esquivar objeciones a la definición kitcheriana de conocimiento *a priori* como las de Casullo o Bostock porque no estoy comprometido con ideas problemáticas como la premisa (b) de la definición de Kitcher.[26] Mientras las nociones de conocimiento *a priori* de Casullo y Bostock resulten compatibles con (A1) y (A2) -y creo que lo son- mis argumentos podrán ser usados para concluir que el conocimiento matemático no es conocimiento *a priori* de acuerdo con *sus* propias definiciones de conocimiento *a priori*.

Debe quedar claro que, lejos de empobrecer mis argumentos, el haber escogido una caracterización tan escueta de conocimiento *a priori* como (A1) y (A2) hará que mis conclusiones resulten mucho más ricas de lo que serían con una definición acabada. Si logro mostrar que el conocimiento matemático viola una definición pobre de conocimiento *a priori*, también habré mostrado que viola una caracterización más rica y, por tanto, más difícil de satisfacer.

Otro elemento que fortalecerá mis conclusiones es que, de ahora en adelante, supondré que todos los teoremas de la lógica pueden ser conocidos *a priori*. Hago esto porque dejará en claro que el conocimiento matemático es conocimiento *a posteriori* por méritos propios, y no por el mero hecho de estar fundada en una lógica contaminada de elementos empíricos. Además, el ver a los teoremas de la lógica como conocimiento *a priori* fortalece a las posiciones

---

26 Lo mismo sucede con mi propia crítica a la definición de Kitcher.

aprioristas en matemáticas porque implica que cualquier consecuencia lógica de una proposición matemática que conozcamos *a priori* puede también ser conocida *a priori*; y esta es una manera de hacer que mis argumentos resulten más contundentes.

Antes de seguir adelante, quisiera mencionar razones por las que creo que no es tan claro como pensaríamos a primera vista que todos los teoremas de la lógica puedan ser conocidos *a priori* y, de esta manera, manifestar el hecho de que mi suposición de que los teoremas lógicos *sí* son siempre conocimiento *a priori* no es tan estéril como pudiera parecer. Ya hemos discutido, para el caso de las matemáticas, el hecho de que ciertas circunstancias pueden hacer que una prueba de *t* no sea suficiente para aportarnos conocimiento *a priori* de *t*. Estoy pensando en las pruebas largas y los retos sociales.[27] Pero mis argumentos pueden extenderse para también abarcar a la lógica: también siguiendo pruebas largas en lógica nos quedamos *razonablemente preocupados* de que algún error se nos haya escabullido, y también en lógica dudamos de pruebas que desafían resultados universalmente aceptados por la comunidad de lógicos. De esta manera, tenemos buenas razones para pensar que muchos de los teoremas de la lógica no pueden ser realmente conocidos *a priori*. No me parece, pues, que mi suposición de que todos los teoremas de la lógica *sí* pueden ser conocidos *a priori* resulte insignificante.

Quisiera ahora introducir una convención que creo que servirá para hacer más claros mis argumentos. En la época de los griegos, la lógica no estaba lo suficientemente desarrollada como para que todos los resultados de la matemática realmente pudieran ser probados con

---

27 El lector puede verificar que estos argumentos son independientes de la definición de conocimiento *a priori* de Kitcher.

un método axiomático. Estrictamente hablando, los teoremas de geometría de Euclides, por citar un ejemplo, no pueden probarse a partir de sus postulados y definiciones, es necesario apelar continuamente al *sentido común*. Cuando Euclides prueba, digamos, que es posible construir un triángulo equilátero con cualquier base, pide al lector que construya dos círculos y que luego *considere el punto en que se cruzan*. ¿Y cómo sabemos que ese punto realmente *existe*? Al dibujar las figuras parece claro que debe existir, pero, de hecho, no hay ninguna manera de probar, con el herramental lógico de Euclides, que ese punto existe. Aún en la época de Kant prevalecía esta situación,[28] pero en nuestro siglo las cosas han cambiado. Ahora sí está suficientemente desarrollada la lógica como para que sea posible probar todos los resultados de la matemática usando un método axiomático. El caso de la teoría de números es especialmente claro; usando sólo los cinco axiomas de Peano, lógica de primer orden y un poco de teoría de conjuntos pueden probarse todos los resultados básicos de la aritmética elemental.[29]

De esta manera, hago la convención de que, en el presente escrito, la matemática será entendida como un conjunto de axiomas matemáticos y sus consecuencias lógicas.[30] Ante la preocupación de

---

28 Para una discusión detallada sobre este punto ver FRIEDMAN, M. Kant and the Exact Sciences.

29 Ver, por ejemplo, LANDAU, M. Grundlagen der Analysis.

30 El lector notará que nunca se ha hablado de que el conjunto de axiomas matemáticos deba de ser *recursivo*. Podríamos incluir a *todas* las verdades de la matemática como axiomas. Pero, dado que hemos asumido que los teoremas de la matemática pueden conocerse *a priori*, el apriorista valorará la posibilidad de escoger unas cuantas proposiciones matemáticas como axiomas y mostrar que *esas* pueden conocerse *a priori* ante la perspectiva de tenerse que aventurar a la difícil tarea de mostrar que *todas* las proposiciones matemáticas pueden conocerse *a priori*.

que ciertos razonamientos intuitivos que, de hecho, usan los matemáticos queden fuera de este análisis digo que esos razonamientos pueden formalizarse y quedar incluidos entre los axiomas.

En estos términos, sólo hay dos maneras de argumentar que el conocimiento matemático es conocimiento *a priori*: (1) **mostrando que los axiomas matemáticos pueden conocerse *a priori***; así, dado que hemos asumido que todos los teoremas de la lógica pueden conocerse *a priori*, puede decirse que la creencia en cualquier consecuencia lógica de esos axiomas es también conocimiento *a priori*. (2) **mostrando que la matemática se reduce a la lógica**, es decir, haciendo ver que no hace falta *ningún* axioma matemático para probar las verdades matemáticas; así, dado que las proposiciones matemáticas verdaderas serían teoremas de la lógica y que hemos asumido que todos los teoremas de la lógica pueden conocerse *a priori*, las proposiciones matemáticas verdaderas podrían ser conocidas *a priori*.

Esta manera de tratar el asunto nos permite delinear una estrategia para alcanzar nuestro objetivo principal, esto es, hacer ver que el conocimiento matemático *no* es conocimiento *a priori*. La estrategia es como sigue:

(A) argumentar que hay buenas razones para rechazar tanto a (1) [la posición de que tenemos maneras de conocer *a priori* a los axiomas de la matemática] como a (2) [la posición de que, no requiriendo de axiomas matemáticos, la matemática puede reducirse a la lógica].

(B) proponer una explicación alternativa a (1) y (2) que esquive sus problemas y que considere al conocimiento matemático como conocimiento *a posteriori*.

Discutiremos a la posición (1) de (A) en el capítulo 3 y a la posición (2) de (A) en el capítulo 2. (B) será trabajada en el capítulo 4.

Capítulo 2

El objeto de este capítulo es mostrar que quien, argumentando que la matemática puede reducirse a la lógica, sostiene que el conocimiento matemático es conocimiento a priori se enfrenta a problemas importantes.

Hay varias maneras distintas en las que podríamos hablar de *reducir* la matemática a la lógica[31]. Una reducción *ontológica*, por ejemplo, puede ser intentada argumentando que las entidades matemáticas son, en realidad, objetos de la teoría de conjuntos y que la teoría de conjuntos es lógica. En este capítulo, sin embargo, sólo consideraremos una reducción de la *verdad* matemática a la lógica, es decir, la aseveración de que puede establecerse la verdad de las proposiciones matemáticas utilizando solamente criterios lógicos.

Este tipo de reducción había sido importante para los empiristas lógicos como una manera de argumentar que las proposiciones matemáticas son tanto *a priori* como analíticas, pero el descubrimiento de que la lógica de segundo orden (o la teoría de conjuntos) que se requiere para desarrollar a la matemática tiene más problemas epistemológicos que algunas ramas de la matemática terminó con las motivaciones empiristas: no tenía sentido reducir la verdad aritmética a la verdad lógica (o la verdad de la teoría de conjuntos) cuando la aritmética está mucho mejor fundada que la lógica (y la teoría de conjuntos).

---

[31] Al hablar de *lógica* me refiero a la lógica de primer y segundo orden.

No obstante, creo que, aún cuando una reducción de la matemática a la lógica *sí* ha perdido su importancia en el contexto del empirismo lógico, el determinar si esta reducción es, de hecho, posible sigue siendo un asunto de interés filosófico porque la respuesta podría ayudarnos a aprender más sobre la relación entre la matemática y la lógica. Si, como trataré de concluir, resulta ser que la verdad matemática *no* puede reducirse a la lógica, quedará claro que hay algún tipo de *información* en la matemática con fuentes extra lógicas y, por tanto, que hay un sentido en el que la matemática tiene información de la que la lógica carece, y, desde luego, esto bastaría para hacer ver que no puede sostenerse que el conocimiento matemático es conocimiento *a priori* argumentando que la matemática se reduce a la lógica.

Mi estrategia consistirá en formular varias maneras no triviales de articular la idea de que la matemática puede reducirse a la lógica y mostrar que todas son inadecuadas por una u otra razón. Al final trataré de persuadir al lector de que el conjunto de estas posiciones reduccionistas es *completo* en el sentido de que no puede argumentarse que la matemática se reduce a la lógica de ninguna otra manera.

Mantener que las proposiciones matemáticas verdaderas son consecuencias lógicas de axiomas exclusivamente *lógicos* es una manera natural de argumentar que la verdad matemática puede reducirse a la lógica. Si, por ejemplo, los teoremas de la aritmética fueran realmente teoremas lógicos, la lógica ciertamente nos daría un criterio para establecer la verdad aritmética porque los enunciados aritméticos verdaderos serían verdades lógicas y los enunciados aritméticos falsos serían contradicciones lógicas. ¿Pero es realmente el caso que las negaciones de enunciados matemáticos verdaderos como '$1 \neq 4$' son contradicciones lógicas? Considérese la siguiente lista de axiomas matemáticos (donde «'» es notación para la función sucesora):

(A1) $x = y \Rightarrow (x = z \Rightarrow y = z)$
(A2) $x = y \Rightarrow x' = y'$
(A3) $0 \neq x'$,
(A4) $x' = y' \Rightarrow x = y$,
(A5) $x + 0 = x$
(A6) $x + y' = (x + y)'$
(A7) $x \cdot 0 = 0$
(A8) $x \cdot y' = (x \cdot y) + x$
(A9) Para cualquier fórmula bien formada $A(x)$,

$$A(0) \Rightarrow ((\forall x)(A(x) \Rightarrow A(x')) \Rightarrow (\forall x)A(x)).$$ [32]

En una teoría, T, cerrada bajo lógica de primer orden,[33] e incluyendo definiciones apropiadas y (A1) - (A9) pueden probarse todas las proposiciones usuales de la aritmética elemental,[34] en particular, $1 \neq 4$ (estipulemos que $1 = 0'$, $2 = 1'$, y así sucesivamente):

[1] $0 \neq (2)'$ *de* (A3).

32 El lector notará que (A9) es, en realidad, un *esquema axiomático*.
33 Cuando digo *cerrado bajo lógica de primer orden* quiero decir lógica de primer orden *sin* identidad. En particular, podría pensarse en T como incluyendo (A1)-(A9) como axiomas propios y los axiomas (A1)-(A5) (pero no los (A6) y (A7)) de Mendelson (1987) como axiomas lógicos y *Modus Ponens* y *Generalización Universal* como reglas de inferencia.
34 Para un desarrollo riguroso de esta teoría formal de números *cfr.* Mendelson (1987).

[2] $0 \neq 3$	*de* [1] *y nuestra estipulación.*
[3] $0 \neq 3 \Rightarrow 0' \neq 3'$	*de* (A4) *y una tautología.*
[4] $0' \neq 3'$	*MODUS PONENS de* [2] *y* [3].
[5] $1 \neq 4$	*de* [4] *y nuestra estipulación.*

Ahora supóngase que decidimos alterar nuestros axiomas matemáticos y ponemos lo siguiente en el lugar de (A3):

(A3*) $0 = 0'''$

En nuestra nueva teoría[35], *T**, que contiene (A3*) en vez de (A3), y cerrada bajo la lógica de primer orden, es fácil probar que $1 = 4$:

[1] $0 = 0'''$	(A3*)
[2] $0' = 0''''$	*de* [1] *y* (A2).
[3] $1 = 4$	*de* [2] *y nuestras estipulaciones.*

Quien sostenga que la matemática es reducible a la lógica porque las proposiciones matemáticas verdaderas son teoremas lógicos estaría obligado a concluir que *T** es inconsistente por el hecho de incluir a la negación de verdades matemáticas, en particular, la negación de $1 \neq 4$. ¿Pero es realmente inconsistente esta teoría?

Podría ser el caso que no pudiera probarse que *T** es consistente, pero ciertamente puede probarse que *T** es inconsistente sólo si *T* también lo es.

[35] El lector notará que cualquier teoría que contenga tanto a (A3) como a (A3*) es inconsistente porque (A3*) implica $(\exists x)(0 = x')$ y (A3) implica $(\forall x)(0 \neq x')$ (o $\neg(\exists x)(0 = x')$).

Supóngase que puede derivarse una contradicción en T^*. Una prueba, P^*, de algún enunciado de la forma $p \wedge \neg p$ debe existir, involucrando como axiomas sólo a aquellos de la lógica de primer orden y a (A1), (A2), (A3*) y (A4)-(A9). Defínase a una relación binaria, $\approx$, en T de manera que $x \approx y$ syss $(\exists z)(3z = |x - y|)$ (donde $|a|$ es el valor absoluto de a). Es fácil probar lo siguiente:

(B1) $x \approx y \Rightarrow (x \approx z \Rightarrow y \approx z)$
(B2) $x \approx y \Rightarrow x' \approx y'$
(B3*) $0 \approx x'''$,
(B4) $x' \approx y' \Rightarrow x \approx y$,
(B5) $x + 0 \approx x$
(B6) $x + y' \approx (x + y)'$
(B7) $x \cdot 0 \approx 0$
(B8) $x \cdot y' \approx (x \cdot y) + x$
(B9) Para cualquier fórmula bien formada $A(x)$,
$$A(0) \Rightarrow ((\forall x)(A(x) \Rightarrow A(x')) \Rightarrow (\forall x)A(x)).$$

Así, es posible construir una prueba, P, en T que difiera de P^* sólo en que, en vez de cada ocurrencia de '=' en P^*, habría una ocurrencia de '$\approx$' en P. P es una prueba válida porque (B1), (B2), (B3*) y (B4) - (B9) pueden ser usados donde (A1), (A2), (A3*) y (A4) - (A9) eran usados en P^*.[36]

[36] El lector notará que T^* puede ser vista como el subconjunto de T correspondiente a las congruencias modulo 3.

Así, si fuera posible derivar una contradicción en T^* también sería posible derivar una contradicción en T y, de esta manera, T^* es inconsistente sólo si nuestra T original es también inconsistente.[37]

Ahora bien, supóngase que los teoremas de T realmente son teoremas de la lógica de primer orden. Dado que T^* está cerrada bajo la lógica de primer orden, es posible probar que $1 \neq 4$ en T^*, pero ya habíamos probado que $1 = 4$ puede probarse en T^*, así que T^* es inconsistente. Pero, por nuestro resultado que T^* es inconsistente sólo si T es inconsistente, T es inconsistente y, por tanto, la lógica es inconsistente. Así, los teoremas de T sólo son teoremas de la lógica de primer orden si la lógica de primer orden es inconsistente; pero la lógica de primer orden *no* es inconsistente, así que los teoremas de T y, por tanto, las proposiciones usuales de la aritmética elemental, *no* son teoremas de la lógica de primer orden.[38]

Esto refuta a la afirmación de que, dado que las proposiciones matemáticas verdaderas son teoremas lógicos, la matemática es reducible a la lógica. Sin embargo, hay otras maneras de argumentar que la matemática es lógica. Una de las más populares es argumentando que el único propósito de la matemática es la deducción

---

37 Mi argumento es esencialmente equivalente a los usados por Beltrami y Klein para probar que las geometrías no euclidianas son tan consistentes como la euclidiana.

38 Mi prueba resultaría inválida si considerara no sólo a la lógica de primer orden sino también a la de segundo porque, si T y T^* estuvieran cerradas bajo la lógica de primer *y* segundo orden, $(\forall A)[x = y \Rightarrow (A(x,x) \Rightarrow A(x,y))$ sería un teorema T^* pero $(\forall A)[x \approx y \Rightarrow (A(x,x) \Rightarrow A(x,y))]$ no sería un teorema de T. Sin embargo, pareciera ser que la única manera en la que las proposiciones usuales de la aritmética elemental podrían ser teoremas de la lógica de *segundo* orden pero no ser teoremas de la lógica de *primer* orden es utilizando algún tipo de *definición* para los números en la lógica de segundo orden, y más tarde se mostrará que esta no es una posibilidad real cuando se considera la reducción de la matemática a la lógica.

de consecuencias lógicas a partir de conjuntos de axiomas lógicos. De esta manera, la verdad de proposiciones como $1 \neq 4$ o $2 + 3 = 5$ es *relativa* a un conjunto u otro de axiomas; no puede decirse, por ejemplo, que $2 + 3 = 5$ es *verdad*, sino sólo que $2 + 3 = 5$ es verdad *dado el conjunto de axiomas A o B*. De acuerdo con semejante posición, un enunciado matemático, M, es verdadero con relación a un conjunto, A, de axiomas si y sólo si $A \models M$ y, por tanto, la matemática es reducible a la lógica porque basta con establecer consecuencia lógica para establecer verdad matemática. Llamaré a esta posición *deductivista ingenua*.

El deductivismo ingenuo puede formularse de muchas maneras. Partidarios de esta posición pueden decir que los enunciados matemáticos verdaderos son ***teoremas lógicos*** argumentando que las proposiciones de la matemática son, en realidad, un condicional con axiomas matemáticos a su izquierda y una proposición matemática ordinaria a su derecha. Por tanto, la cuestión de la verdad en matemáticas pasa de $A \models M$ a $\models (A \Rightarrow M)$[39] y sólo las tautologías pueden ser consideradas como verdades matemáticas. El problema de establecer la verdad de las proposiciones matemáticas se reduce a un asunto de teoremicidad lógica. Afirmo que partidarios de esta posición son deductivistas ingenuos porque, en la práctica, no hay ninguna diferencia importante entre decir que M es verdadera con relación al conjunto axiomático A y decir que A implica lógicamente a M.

Atacaré al deductivismo ingenuo por dos frentes distintos. El primero es argumentando que el deductivismo ingenuo no describe a la

---

39 Filósofos como Hilary Putnam en *Mathematics without Foundations* han propuesto una formulación equivalente, definiendo la verdad matemática de M relativa a A como $\models \Box(A \supset M)$.

matemática como *ha sido* históricamente y la segunda es argumentando que no describe a la matemática como ***quisiéramos*** que fuera. Para abordar el primer punto consideraré un ejemplo histórico del desarrollo del análisis matemático.

Las sumas infinitas no siempre se comportan de la misma manera que las sumas finitas. En las sumas ***finitas***, por ejemplo, los términos pueden ser asociados de cualquier manera, por ejemplo, 5 + 4 + 3 = (5 + 4) + 3 = 5 + (4 + 3); pero esto no siempre es el caso para las sumas *infinitas*. Considérese la serie 1 - 1 + 1 - 1 + ... Si uno asocia de diferentes maneras, uno puede llegar a resultados distintos:

(E1) $(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+\ldots = 0,$

(E2) $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1+0+0+\ldots = 1.$

Pero estas dificultades no detuvieron a los matemáticos del siglo XVIII en su trabajo con sumas infinitas. Consideremos el caso de Leonhard Euler y su intento por resolver la siguiente suma:[40]

(E3) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$

Euler procedió de la siguiente manera. Sabiendo que

(E4) $sin(x) = 1-\frac{x}{3!}+\frac{x}{5!}-\frac{x}{7!}+\ldots,$

40 El ejemplo está tomado del capítulo II de ***Mathematics and Plausible Reasoning*** de Polya.

concluyó que las raíces de la suma del lado derecho eran 0, π, -π, 2π, -2 π, etc. porque es cuando x toma esos valores que $sin(x) = 0$. Así, cuando $x \neq 0$, las raíces de

$$\text{(E5) } 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$$

son π, -π, 2π, -2π, y así sucesivamente. Ahora bien, se sabía que, para sumas *finitas* de la forma

$$\text{(E6) } b_0-b_1x^2+b_2x^4-\ldots+(-1)^n b_n x^{2n},$$

con raíces $\beta_1,-\beta_1,\beta_2,-\beta_2,\ldots,\beta_n,-\beta_n$, se cumple que

$$\text{(E7)} b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\ldots+\frac{1}{\beta_n^2}\right),$$

pero nada podía decirse acerca de las sumas infinitas. No obstante, Euler aplicó a (E5) el método para las sumas *finitas* y obtuvo

$$\text{(E8) } \frac{1}{3!}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\ldots$$

o, equivalentemente,

$$\text{(E9) } \frac{\pi}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$$

que, de hecho, es la respuesta correcta al problema original. Pero, ¿cómo podría un deductivista ingenuo dar cuenta de esto? Debe concluir, dado que Euler no obtuvo su resultado buscando las consecuencias lógicos de un conjunto dado de axiomas, que no se trata de una verdad matemática. Obviamente, Euler tenía una idea muy distinta de verdad en mente cuando propuso su solución para el problema. Concluyo que el deductivismo ingenuo no describe a las matemáticas como han sido históricamente porque presupone una noción de verdad incompatible con la de los matemáticos reales. Presentaré ahora mi segunda línea de ataque contra el deductivismo ingenuo argumentando que no describe a la matemática como quisiéramos que fuera.

Los axiomas matemáticos pueden ser estipulados pero deben de *no* ser arbitrarios. Lo que hace a la matemática interesante es que los matemáticos escogen sus axiomas para realmente ***describir*** aquello con lo que están trabajando porque quieren que sus concusiones realmente digan algo acerca de él: los axiomas matemáticos deben de darnos información acerca de el modelo particular que los matemáticos estén considerando. Supongamos que estamos preguntándonos si realmente hay una infinidad de números primos en el modelo de los números naturales. No nos quedaríamos conformes con la matemática si nos hablara de lo que sucedería *si* cierto conjunto de axiomas fuera el caso; esperamos que la matemática nos diga si es o no *verdad* que hay un número infinito de primos en el modelo de los números naturales y, para que la matemática pueda respondernos eso, un conjunto particular de axiomas tiene que haber sido elegido. No tiene caso saber que una proposición matemática, *P*, es verdadera *con relación* a un conjunto axiomático, *A*, cuando no sabemos si *A* es verdad en el modelo que determina el valor de verdad de *P*. El deductivismo ingenuo no explica a la matemática como quisiéramos que fuera porque no esperamos solamente contenido *tautológico* de las proposiciones matemáticas;

queremos que la matemática nos de información real acerca de aquello con lo que estamos trabajando.

Mi conclusión es que el deductivismo ingenuo no explica cómo la verdad matemática podría ser reducida a la lógica porque la lógica sola no nos provee de criterios para seleccionar un conjunto de axiomas que realmente describa el modelo con el que estamos trabajando y, por tanto, la lógica sola no nos aporta criterios para establecer la verdad o falsedad de las proposiciones matemáticas.

Si tan sólo supiéramos que cierto conjunto de axiomas matemáticos es *el correcto* pareciera que nuestros problemas habrían terminado. Pero, ¿no son, por ejemplo, los llamados axiomas de Peano *los correctos*? Después de un momento de reflexión parecen estar tan cerca de lo que queremos decir cuando hablamos de los números naturales que no podrían estar equivocados:

(P1) 0 es un número natural.

(P2) Si x es un número natural, hay otro número natural denotado por x' (y llamado el *sucesor* de x).

(P3) $0 \neq x'$ para cualquier número natural x.

(P4) Si $x' = y'$, entonces $x = y$.

(P5) Si Q es una propiedad que pueden tener o no tener los números naturales, y si (I) 0 tiene la propiedad Q y (II) siempre que un número natural x tenga la propiedad Q, x' tiene la propiedad Q, entonces todos los números naturales tienen la propiedad Q.[41]

---

[41] Esta es la formulación de los axiomas de Peano que presenta Eliott Mendelson en (Mendelson 1987).

Los primeros cuatro axiomas de Peano parecen absolutamente obvios y el último es un poco más difícil pero bien puede ser aceptado como positivamente verdadero. Estos axiomas realmente parecen capturar nuestra *noción* de números naturales, y creo que Götlob Frege trató de probar esto rigurosamente en sus *Fundamentos de la aritmética*.

Comienza por ofrecer una definición rigurosa de *número*. No la discutiremos aquí en detalle pero es importante notar que para Frege *tener un número dado* es una propiedad de conceptos; se dice que dos conceptos tienen el mismo número si y sólo si hay una correspondencia *uno a uno* entre los objetos que caen bajo cada concepto. Esto le permite probar propiedades importantes de la igualdad entre extensiones de conceptos, por ejemplo, que si los conceptos *F* y *G* tienen el mismo número (o los conceptos *F* y *G* son ***iguales***), si *H* es ***igual*** que *F*, *H* es también ***igual*** que *G*.

A continuación define ***tener el número cero***: '***0 es el número que pertenece al concepto "no idéntico consigo mismo"***'[42] y determina la relación que dos números, ***m*** y ***n***, deben guardar para que ***n*** sea el sucesor de *m*: '***existe un concepto*** F ***y un objeto, x, que cae bajo él tal que el número que pertenece al concepto*** F ***es n y el número que pertenece al concepto "que cae bajo*** F ***pero no es idéntico a x" es m***'[43]. Frege está entonces en posición de probar un par de teoremas de existencia: que 1 es el número que pertenece al concepto '***idéntico con 0***'[44] y, en general, que el sucesor de un número ***n*** es el número que corresponde al concepto '***miembro de la serie de números naturales***

---

42 FREGE, G. *Los fundamentos de la aritmética* § 74. *Traducción libre.*
43 *ibid.* § 76.
44 *ibid.* § 77.

que termina en n'[45] (aunque Frege sí da una definición rigurosa de *serie de números naturales que termina en n*, aquí basta con decir que se refiere, intuitivamente, a los números naturales iguales o menores que *n*).

Es una genialidad. Frege consigue formular el significado de los números naturales con un rigor absoluto. Pero ¿es realmente posible derivar (P1) - (P5) de su propuesta? La respuesta definitivamente es *sí* para el caso de (P1) y (P2) que se siguen directamente de las definiciones y los teoremas existenciales de Frege. Además, aunque Frege no prueba realmente (P3) y (P4) en los *fundamentos*, las pruebas correspondientes pueden construirse fácilmente. Sin embargo, no creo que resulte legítimo concluir (P5), aún cuando restrinjamos nuestra atención a conceptos con extensiones finitas. Pero no nos preocupemos por eso. Simplemente asumiré que (P5) también puede concluirse a partir de las definiciones fregeanas de números naturales.

Estando así las cosas, podría decirse que la matemática (o cuando menos la aritmética) se reduce a la lógica porque sus axiomas están implícitos en la definición misma de números naturales y reglas de inferencia apropiadas. Dado que ***sabemos*** que los axiomas de Peano son verdaderos, sabremos que cualquier proposición matemática, *M*, es verdadera cuando $P \models M$ sea el caso (donde *P* es la conjunción de los axiomas de Peano). De esta manera, hemos superado los problemas del deductivismo ingenuo al seleccionar a un cierto conjunto de axiomas como *el correcto* y, simultáneamente, podemos decir que la matemática se reduce a la lógica porque sólo hemos usado lógica y nuestra definición de números naturales para llevar a cabo nuestra

---

45 *ibid.* § 79.

selección. Llamaremos a quienes sostengan semejante posición *deductivistas fregeanos*.

Argumentaré que la aceptación del deductivismo fregeano no justifica una reducción de la matemática a la lógica porque, aún cuando la lógica bastara para derivar un sistema axiomático como el de Peano de nuestra definición de los números naturales, la lógica no bastaría para determinar si nuestra definición de los números naturales es realmente adecuada. Un ejemplo aclarará la cuestión.

Pensemos en lo que sucedería si un matemático descubriera una contradicción en el sistema generado con los axiomas de Peano. ¿Se suicidarían docenas de matemáticos alrededor del mundo al conocer la contradicción, concluyendo que su trabajo carece de sentido dado que ahora *cualquier* proposición matemática deberá de ser considerada como verdadera? ¿Quebrarían los bancos si sus clientes les ofrecieran pruebas matemáticas de que se les debe cualquier cantidad de dinero que ellos escojan? ¿Comenzaría a creer la gente que tiene, al mismo tiempo, dos pares de zapatos, un trillón de pares de zapatos y ninguno? ¡Por supuesto que no! Nada cambiaría en lo absoluto, salvo quizá el trabajo de un puñado de matemáticos que tratarían de sustituir a los axiomas de Peano por algo que no genere contradicciones. Pero ¿cómo podríamos sustituir algo por los axiomas de Peano si están implícitos en nuestra definición de los números naturales?

No sólo podríamos modificar a los axiomas de Peano si se descubriera que engendran contradicciones, en este caso los axiomas *deben* de ser cambiados. Si construimos una definición para los números naturales que implica un conjunto inconsistente de premisas matemáticas, esto no quiere decir que *cualquier* enunciado matemático sea verdadero, quiere decir que no construimos correctamente nuestra definición. Dado que ciertamente no estamos dispuestos a creer, por ejemplo, que poseemos diferentes cantidades de zapatos al mismo tiempo, una definición que capture nuestras creencias matemáticas no debe implicar contradicciones. Aún cuando aceptemos una posición deductivista fregeana, la verdad de las proposiciones matemáticas no sólo depende de su derivabilidad a partir de un cierto conjunto de axiomas, también depende de la *definición* de los números naturales que nos permite considerar a esos axiomas como verdaderos, y la selección de esta definición no sólo depende de criterios lógicos. Debe de ser escogida para que las proposiciones matemáticas resulten verdaderas sólo cuando tienen que ser verdaderas, pero eso es algo que debemos de decidir nosotros mismos. Consideremos otro ejemplo.

Si queremos saber qué hora será seis horas después de las nueve, no queremos que la matemática nos diga 'las quince'. Queremos contar 10, 11, 12, 1, 2, 3, en vez de 10, 11, 12, 13, 14, 15 como haríamos normalmente. Nuestra 'aritmética del reloj' debe de estar definida de tal modo que 1, y no 13, siga después de 12. Ahora bien, supóngase que concluimos equivocadamente que, dado que esta aritmética funciona bien para calcular la hora, captura lo que son los números naturales y, por tanto, debe de servirnos como su nueva definición. Concluimos que, aún cuando (P1), (P2), (P4) y (P5) son aceptables, (P3) [$0 \neq x'$ para cualquier número natural x] es falso y, en cambio,

(P3*) $0 = 12$

es verdadero.[46] ¿Puede la lógica ayudarnos a determinar si esta nueva definición de los números naturales es realmente la correcta? Desafortunadamente no. La lógica sólo puede ser utilizada para derivar nuevos axiomas a partir de nuestra definición y para encontrar sus consecuencias lógicas, pero somos nosotros quienes debemos de decidir si la definición efectivamente cumple con su cometido determinando si sus consecuencias ($9 + 6 = 3$, por ejemplo) son realmente verdaderas, determinando si realmente describen lo que queremos que describan.

De esta manera, concluyo que la aceptación del deductivismo fregeano no nos justifica en decir que la matemática pueda ser reducida a la lógica porque, aún de acuerdo con esta posición, la lógica sola no basta para determinar qué proposiciones matemáticas son verdaderas y cuáles no.

En este punto, el lector podría estar listo para aceptar una propuesta más radical. En su artículo *Matemáticas y el mundo*, D. A. T. Gasking argumenta que las proposiciones matemáticas pueden ser consideradas como verdaderas *pase lo que pase*, siempre que estemos dispuestos a llevar a cabo cambios adecuados en nuestros métodos de contar, medir y, eventualmente, en nuestra física. Daré un par de ejemplos de lo que tengo en mente.

Supóngase que nuestra aritmética fuera tal que

(G) $6 \times 4 = 12$.

---

[46] El lector notará que, utilizando un método análogo al que usamos antes, es posible probar que nuestro nuevo sistema es inconsistente sólo si los axiomas de Peano también lo son.

Si quisiéramos tapizar un piso de un cuarto que mide 6 metros de largo y 4 de ancho, tendríamos que concluir que, dado que 6 × 4 = 12, 12 mosaicos de un metro cuadrado cada uno son necesarios para realizar el trabajo. Trivialmente, hay maneras en las que podríamos utilizar (G) y tapizar el piso correctamente. Por ejemplo, podríamos usar un método diferente para contar. Si ponemos dos mosaicos en nuestro camión y decimos 'uno', luego otros dos y decimos 'dos', y así sucesivamente hasta que lleguemos a 'doce', terminaríamos con la cantidad correcta de mosaicos para cubrir el piso. Pero Gasking también sostiene una tesis mucho más interesante, a saber, que podemos usar una *aritmética rara* para tapizar nuestro piso correctamente aún cuando contemos (y midamos) *del modo usual*. Afirma que, para no tener que desechar proposiciones matemáticas como (G), podríamos alterar *-y de hecho alteraríamos-* nuestra física: constructores que utilizaran a la *aritmética rara* concluirían, después de intentar tapizar sin éxito cuartos de 6 × 4 con 12 mosaicos de un metro cuadrado cada uno, no que su aritmética está equivocada, sino que los mosaicos se encogen cuando entran en cuartos (o algo por el estilo).

¿Podría una posición como la de Gasking ofrecer nuevas esperanzas para una reducción de la matemática a la lógica? Si las proposiciones matemáticas realmente pueden ser consideradas como verdaderas *pase lo que pase* realizando cambios apropiados en nuestra física, pareciera ser que la verdad matemática *sí* podría ser establecida por la lógica sola después de todo. Una vez que hemos escogido a un conjunto particular de axiomas matemáticos, sabemos que todas sus consecuencias lógicas son verdaderas porque sabemos que realizaremos los cambios necesarios en nuestra físicas para *hacer* que resulten verdaderas. Además, la elección particular de los axiomas no es importante porque, con cambios suficientemente radicales en el resto de nuestras creencias, podemos *hacer* que resulten correctos.[47] Así, una proposición matemática M será considerada como verdadera si $A \models M$ para un conjunto arbitrario de axiomas A. La lógica sola es ahora suficiente para determinar qué proposiciones matemáticas son verdaderas y cuáles no porque las proposiciones de un cierto conjunto de axiomas y sus consecuencias lógicas han sido *estipuladas* como verdaderas. Llamaré a los partidarios de esta posición *deductivistas radicales*.

Argumentaré en contra del deductivismo radical que, aún cuando, de hecho, sea el caso que podemos considerar a las proposiciones matemáticas como verdaderas *pase lo que pase*, no siempre es *razonable* hacerlo. Esto me permitirá concluir que la lógica por sí sola no puede dar cuenta de la verdad matemática.[48]

Supóngase que aceptamos los axiomas de Peano. Un deductivista radical diría que una proposición matemática es verdadera si es consecuencia lógica de estos axiomas. ¿Qué sucedería si, como antes habíamos discutido, resultaran ser inconsistentes? Cualquier proposición matemática tendría que ser verdadera para el deductivista radical, ¡seguramente tendríamos que cambiar bastante nuestra física para poder acomodar eso! De hecho, cambiar nuestra física probablemente no sería suficiente, introducir $2 + 2 = 4$ *y* $2 + 2 \neq 4$ en

---

[47] De hecho, cualquier teoría podría ser reducida a la lógica si sus axiomas y las consecuencias lógicas de estos axiomas se consideran como verdaderos *pase lo que pase*.

[48] Es importante notar que este no es un argumento en contra de Gasking porque él no sostiene que la matemática pueda reducirse a la lógica, sino simplemente que la matemática puede ser considerada como verdadera *pase lo que pase* y este es un punto que no discuto. Para ver argumentos en contra de Gasking *cfr.* (Castañeda 1959).

nuestro cuerpo de creencias no es tarea fácil. ¿Realmente haríamos semejante cosa?

Podría resultar *posible* considerar a un sistema matemático verdadero *pase lo que pase*, pero en un caso de inconsistencia no creo que sería razonable hacerlo. No sólo porque definitivamente es más fácil y mucho más intelectualmente satisfactorio cambiar nuestro conjunto axiomas que comenzar a manipular nuestro sistema de creencias para acomodar a proposiciones contradictorias, sino además porque destruiríamos el sentido mismo de la matemática al considerar a cualquier proposición del lenguaje como verdadera. El *significado* que la atribuimos a la matemática se perdería.

Considérese otro ejemplo. Imaginemos que aceptamos los axiomas de Peano y que, aún cuando, de hecho, resultan ser consistentes, nos enfrentamos a la siguiente situación. Los matemáticos descubren un predicado, llamémoslo P, tal que puede probarse que $(\exists x)\neg P(x)$ pero, al mismo tiempo, han encontrado una prueba del hecho de que es posible probar, para cada número n, que $P(n)$. En otras palabras, sabemos que hay un número que tiene la propiedad $\neg P$ pero, también, que puede ser sabido, para cada número, que tiene la propiedad P. Ahora bien, solamente de esto no puede derivarse ninguna contradicción porque, para que eso sucediera, tendría que ser posible utilizar (P5) para probar que $(\forall x)P(x)$, pero podría ser el caso que, mientras que $P(n)$ puede ser probado para cada número n, no exista ninguna prueba general para $P(x) \supset P(x')$.[49]

---

[49] Considérese, por ejemplo, el caso en el que, para cada n, la prueba más corta para $P(n)$ tenga al menos n pasos y no pueda ser acortada con la inclusión de alguna $P(m)$ ($m<n$) como premisa. Ninguna prueba general de $P(x) \supset P(x')$ puede existir porque requeriría de una infinidad de pasos.

nuestro cuerpo de creencias no es tarea fácil. ¿Realmente haríamos semejante cosa?

Podría resultar *posible* considerar a un sistema matemático verdadero *pase lo que pase*, pero en un caso de inconsistencia no creo que sería razonable hacerlo. No sólo porque definitivamente es más fácil y mucho más intelectualmente satisfactorio cambiar nuestro conjunto axiomas que comenzar a manipular nuestro sistema de creencias para acomodar a proposiciones contradictorias, sino además porque destruiríamos el sentido mismo de la matemática al considerar a cualquier proposición del lenguaje como verdadera. El *significado* que la atribuimos a la matemática se perdería.

Considérese otro ejemplo. Imaginemos que aceptamos los axiomas de Peano y que, aún cuando, de hecho, resultan ser consistentes, nos enfrentamos a la siguiente situación. Los matemáticos descubren un predicado, llamémoslo P, tal que puede probarse que $(\exists x)\neg P(x)$ pero, al mismo tiempo, han encontrado una prueba del hecho de que es posible probar, para cada número n, que $P(n)$. En otras palabras, sabemos que hay un número que tiene la propiedad $\neg P$ pero, también, que puede ser sabido, para cada número, que tiene la propiedad P. Ahora bien, solamente de esto no puede derivarse ninguna contradicción porque, para que eso sucediera, tendría que ser posible utilizar (P5) para probar que $(\forall x)P(x)$, pero podría ser el caso que, mientras que $P(n)$ puede ser probado para cada número n, no exista ninguna prueba general para $P(x) \supset P(x')$.[49]

[49] Considérese, por ejemplo, el caso en el que, para cada n, la prueba más corta para $P(n)$ tenga al menos n pasos y no pueda ser acortada con la inclusión de alguna $P(m)$ $(m<n)$ como premisa. Ninguna prueba general de $P(x) \supset P(x')$ puede existir porque requeriría de una infinidad de pasos.

Seguramente no haría falta llevar a cabo grandes cambios en nuestra física para poder considerar como verdaderos a nuestros nuevos resultados matemáticos, pero probablemente producirían una sensación de incomodidad profunda en muchos de nosotros. Tendríamos la impresión de que hay algo en nuestro conjunto de axiomas que está muy mal y debe de ser modificado. Además, cambiar nuestro sistema de axiomas sería *lo correcto* porque un sistema en el que sabemos que hay un número que tiene cierta propiedad pero también que puede probarse para cada número que él no tiene semejante propiedad no captura nuestra idea intuitiva de lo que son las matemáticas, y el hecho de que hayamos *estipulado* que ese sistema es el correcto no parece ayudar en nada.

Un último ejemplo podría ser necesario. Considérese la 'aritmética del reloj' que caracterizamos antes e imaginemos no sólo que es consistente sino, además, que no tiene el horrible problema que acabamos de discutir. ¿Haría una buena aritmética? Una de nuestras dificultadas sería el enfrentarnos a expresiones desagradables como $15 = 3$, pero un deductivista radical nos haría ver que podríamos simplemente remplazar nuestras creencias actuales acerca de la identidad con algo como «'$x = y$' significa que 12 divide a $(x - y)$», o peor aún, que, de ahora en adelante, las diferencias entre múltiplos de 12 han de ser considerados como una de esas pequeñas curiosidades de nuestro universo. Ciertamente *podríamos* hacer eso, pero, ¿por qué lo haríamos? ¿Por qué sacrificaríamos nuestra habilidad de notar la diferencia entre un tren que llega a tiempo y uno que llega doce horas tarde sólo para defender un conjunto de axiomas? La pobreza epistemológica a la que nos llevaría la aceptación de la 'aritmética del reloj' impide que el esto resulte razonable.

Espero que mis ejemplos hayan dejado en claro que no es razonable estipular un conjunto *cualquiera* de axiomas y considerar a esos axiomas como verdaderos *pase lo que pase*. La verdad matemática rebasa por mucho a la explicación del deductivista radical porque debemos de aplicar consideraciones extra lógicas en nuestra estipulación si realmente queremos que funcione. Es en este sentido que, aún para el deductivista radical, la matemática no puede reducirse a la lógica.

Para poder concluir que la matemática no es lógica porque la lógica no puede proveernos de un criterio para determinar qué proposiciones son verdaderas y cuáles no, debo de mostrar que las cuatro propuestas reduccionistas que hemos discutido son las *únicas* maneras en las que la verdad matemática podría reducirse a la lógica. El siguiente argumento está dedicado a cumplir con ese propósito.

Si la verdad matemática ha de ser reducida a la lógica, o bien la matemática no requiere de axiomas propios y, por tanto, las proposiciones matemáticas verdaderas pueden ser derivadas a partir de axiomas meramente lógicos, o bien la matemática *sí* requiere de axiomas propios y la verdad de las proposiciones matemáticas debe de establecerse de alguna otra manera. Pero nuestro primer argumento probó que la matemática no puede dejar de tener axiomas propios. Ahora bien, podemos o bien evitar la responsabilidad de seleccionar un conjunto particular de axiomas propios y, por tanto, adoptar una versión del deductivismo ingenuo, o bien aceptar esta responsabilidad. Pero, dado que hemos concluido que el deductivismo ingenuo no explica cómo es que la verdad matemática podría ser reducida a la lógica, debemos de aceptar la responsabilidad de seleccionar un conjunto particular de axiomas propios. En este punto, podemos o bien estar dispuestos a cambiar nuestro cuerpo de creencias *pase lo que pase* para considerar como verdaderas a las proposiciones matemáticas, o no. Si lo hacemos, estamos adoptando una posición deductivista radical y hemos visto que el deductivismo radical no explica cómo la verdad matemática podría ser reducida a la lógica, así que debemos de *no* estar dispuestos a cambiar nuestro cuerpo de creencias para considerar como verdaderas a las proposiciones matemáticas *pase lo que pase*. Pero en este caso debemos de encontrar una manera de justificar nuestra selección particular de axiomas propios con pura lógica. Parece que la única manera en que esto podría hacerse es derivando lógicamente a nuestros axiomas propios a partir de conceptos matemáticos; en el caso de la aritmética, por ejemplo, de nuestro concepto de los números naturales. Pero si hacemos esto adoptamos una posición deductivista fregeana y hemos mostrado cómo el deductivismo fregeano no explica cómo la verdad matemática podría ser reducida a la lógica.

Creo que es ahora razonable concluir que la lógica no puede proveernos de un criterio para establecer la verdad matemática y, por tanto, que la matemática no puede reducirse a la lógica.

Capítulo 3

En el capítulo 1 hemos visto cómo una manera de defender la tesis de que el conocimiento matemático es conocimiento a priori consiste en argumentar que podemos conocer a priori la verdad de los axiomas de la matemática. El objeto de este capítulo es mostrar que esa posición tiene problemas importantes.

¿Cómo podríamos conocer *a priori* la verdad de los axiomas de la matemática? Es claro, primeramente, que no pueden usarse *pruebas* para este fin. Dado que en el capítulo anterior quedó rechazada la posibilidad de probar proposiciones matemáticas usando sólo axiomas *lógicos*, debemos decir que la verdad de la conclusión de una prueba en matemáticas está garantizada sólo cuando conocemos la verdad de los axiomas matemáticos, y, por tanto, que resulta circular el uso de pruebas para concluir la verdad los axiomas: sería presuponer lo que tratamos de demostrar.[50] Es necesario, pues, utilizar algún procedimiento *alterno* a las pruebas para conocer la verdad de nuestros axiomas.

¿Podríamos utilizar métodos *empíricos*? Tampoco. Siendo que queremos conocer los axiomas matemáticos *a priori*, el uso de cualquier procedimiento empírico queda excluido. La condición (A2) de nuestra definición (parcial) de conocimiento *a priori* establece que si X requiere de elementos empíricos para conocer la verdad de *p*, X no

---

[50] Es fútil argumentar en este punto que la verdad de algunos de los axiomas podría ser probada utilizando otros y que la verdad de éstos podría probarse utilizando aquellos. En este caso quedaría probada una equivalencia lógica entre dos conjuntos de axiomas, pero no su verdad.

puede conocer *a priori* que *p*. Un proceso que nos dé conocimiento *a priori* de los axiomas matemáticos no puede, pues, ni ser una *prueba* ni depender de elementos empíricos. ¿Qué entonces? Escuchemos a Gödel en sus momentos más filosóficos:

> Pero, a pesar de su lejanía de la experiencia sensorial, sí tenemos algo así como una *percepción* de los objetos de la teoría de conjuntos, como puede verse por el hecho de que los axiomas se nos *imponen* como ciertos. No veo ninguna razón por la que debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, o sea, la *intuición matemática*, que en la percepción sensorial que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que percepciones sensoriales futuras estarán de acuerdo con ellas y, además, a creer que una pregunta no decidible ahora tiene *significado* y puede ser decidida en el futuro.[51]

Lo que Gödel tiene en mente es algo que, quizá, todos hemos percibido alguna vez en la vida: la sensación de poder *ver* o *intuir* la verdad de ciertas proposiciones matemáticas. Ahora bien, la pregunta de en qué consiste exactamente este *ver* o *intuir* no es fácil de resolver. Diremos aquí, simplemente, que *por definición* una intuición matemática es cualquier proceso no empírico distinto del de seguir pruebas que nos lleve a pensar que una proposición matemática es verdadera. Así, por ejemplo, si nos parece *evidente* que $2 + 2 = 4$, o nos parece *intuitivamente claro* que es posible escoger un elemento concreto en cualquier conjunto no vacío,[52] o nos resulta *obvio* que hay

---

51 GÖDEL, K. 'What is Cantors Continuum Problem?' en BENACERRAF, P *et al.* Philosophy of Mathematics, p. 271 (cita tomada de KITCHER, P. The Nature of Philosophical Knowledge), *las cursivas son mías.*

52 Dicho de manera precisa, dado cualquier conjunto x hay una función f tal que, para cualquier subconjunto no vacío y de x, $f(y) = y'$ ($y' \in y$).

más números enteros que números naturales, diremos que experimentamos *intuiciones matemáticas*.

Llamaremos *intuicionista* a cualquier posición filosófica que considere al conocimiento matemático como conocimiento *a priori* argumentando que experimentamos *intuiciones matemáticas* que nos garantizan *a priori* la verdad de nuestros axiomas matemáticos. El resto de este capítulo estará dedicado a mostrar que las posiciones *intuicionistas* tienen problemas importantes.

Soy de la opinión de que es Kant quien ha elaborado el mejor planteamiento intuicionista del que disponemos. En este sentido, creo que resultarán más claros mis argumentos si primero los centro en Kant y después los generalizo a otras versiones intuicionistas.

En la *Crítica de la razón pura*, Kant es categórico: "*Todos los juicios matemáticos sin excepción son sintéticos*"[53], y no sólo eso, "las proposiciones matemáticas [...] son siempre juicios *a priori*, no empíricos; porque llevan en ellos una necesidad que no puede ser derivada de la experiencia."[54] En los siguientes párrafos discutiremos la justificación que nos ofrece Kant para esta tesis de que puede existir conocimiento que nos aporte información *sintética* y que, sin embargo, tenga carácter *a priori*:

> el conocimiento matemático es el conocimiento adquirido por la construcción de conceptos. Construir un concepto significa exhibir *a priori* la intuición que corresponde al concepto. Para la construcción de un concepto necesitamos, entonces, una intuición no empírica.[55]

---

[53] KANT, I. Crítica de la razón pura B 14.
[54] *ibid.*
[55] KANT, I. *op. cit.* A 713, B 741.

Es decir, generamos el conocimiento matemático a partir de intuiciones que nos aportan información *sintética* y que, sin embargo, *no tienen origen empírico*; es así que resulta posible la existencia de conocimiento *sintético* fundado en una base independiente de la experiencia, o sea, en una base *a priori*. El caso particular de la geometría ilustra la cuestión:

> La geometría es una ciencia que determina sintéticamente, y, sin embargo, *a priori*, las propiedades del espacio. ¿Qué, entonces, debe de ser nuestra representación del espacio para que resulte posible tal conocimiento de él? Debe de ser, en su origen, una intuición, porque de un mero concepto ninguna proposición puede obtenerse que vaya más allá del concepto -como sucede en la geometría. Además, esta intuición debe de ser *a priori*, esto es, debe de encontrarse en nosotros antes que cualquier percepción de un objeto, y debe por tanto ser una intuición pura, no empírica.[56]

Para Kant "la única intuición que nos es dada *a priori* es aquella de la mera forma de las apariencias, el espacio y el tiempo."[57] De esta manera, el conocimiento matemático, como conocimiento sintético *a priori*, debe de estar basado en nuestras intuiciones puras del espacio y el tiempo: "tiempo y espacio son las intuiciones que establece la matemática pura como base de todos los conocimientos y juicios [...] La geometría toma como base a la intuición pura del espacio. La

[56] *ibid.* B 40-41.
[57] *ibid.* A720 B 748.

aritmética misma hace efectivo su concepto de número por la adición sucesiva de la unidad en el tiempo"[58].

Ahora bien, Kant nunca aclara *exactamente* la manera en la que podemos usar *construcciones* para llegar a verdades matemáticas a partir de nuestras intuiciones puras del espacio y el tiempo. En *La tradición semántica de Kant a Carnap*, Alberto Coffa plantea la cuestión diciendo que, en Kant, "los conceptos matemáticos están vinculados a la intuición por la famosa *construcción* del concepto. [Pero] la verdad es que ni Kant ni sus seguidores tenían una idea muy definida de qué era esa 'construcción'."[59] En el mejor de los casos, Kant pone ejemplos como los que se presentan a continuación.

> El método verdadero, como encontró [el primer hombre que demostró las propiedades del triángulo isósceles], no consistió inspeccionar la figura o su concepto, y de aquí leer sus propiedades; sino en sacar lo que estaba necesariamente implícito en los conceptos que él mismo había formado *a priori*, y había puesto en la figura en la construcción con la que se la presentaba.[60]

> Permítase ahora que el geómetra considere estas preguntas [dado el concepto de *triángulo*, averiguar qué relación guarda la suma de sus ángulos con un ángulo recto]. Comienza en seguida construyendo un triángulo. Dado que sabe que la suma de dos ángulos rectos es exactamente igual a la suma de todos los triángulos adyacentes que pueden construirse de un mismo punto en una línea recta, prolonga un lado de su triángulo y obtiene dos ángulos adyacentes. Después divide el ángulo

58 KANT, I. Prolegómenos § 10.
59 COFFA, J. A. La tradición semántica de Kant a Carnap p. 44. *Traducción libre. El énfasis es mío.*
60 KANT, I. *loc. cit.* B *xii*.

> externo dibujando una línea paralela al lado opuesto del triángulo y observa que obtuvo un ángulo adyacente externo que es igual a uno interno -y así sucesivamente. De esta manera, a través de una cadena de inferencias guiadas por la intuición, arriba a una solución cabalmente evidente y completamente universal para el problema.[61]

No es claro en los ejemplos cómo es que debemos utilizar nuestra intuición pura del espacio para *sacar lo que está necesariamente implícito* en nuestros conceptos. Kant lega a la posteridad el problema de explicar cómo intuiciones como las de *espacio* y *tiempo* -que, como hemos visto, son las únicas que pueden intervenir en la construcción del conocimiento matemático- aportan información concreta sobre un problema de la matemática. Cuando en la *Crítica de la razón pura* se habla de que "la matemática [...] puede tener axiomas, porque mediante la construcción de conceptos en la intuición del objeto puede combinar los predicados del objeto inmediatamente y *a priori* como, por ejemplo, en la proposición de que tres puntos [siempre] se encuentran en un plano"[62], no es límpido cómo podemos extraer de nuestra intuición del espacio la idea concreta de que cualesquiera tres puntos están en un plano.

Podemos decir, en todo caso, que, para Kant, la matemática está fundamentada en una serie de *elementos intuitivos* que nos dan información sintética acerca del mundo y que -por el hecho de provenir de nuestras intuiciones puras del espacio y el tiempo- poseemos con carácter *a priori*.

Pero, ¿bastan estas consideraciones para decir que la posición kantiana es intuicionista? Micheal Friedman respondería que no, en

---

61 *Ibid.* A716, B 744.
62 *ibid.* A 732, B 760.

Kant y las ciencias exactas menciona que "estamos obligados a concluir que el papel principal de la intuición pura [de Kant] es garantizar [underwrite] los procedimientos matemáticos utilizados en *pruebas* matemáticas"[63] y no garantizar la verdad de *axiomas* matemáticos. Así, por ejemplo, Friedman diría que:

> Proposiciones aritméticas como 7 + 5 = 12 son sintéticas, no porque queden establecidas a partir de axiomas sintéticos mediante deducciones analíticas, sino porque quedan establecidos por la adición sucesiva unidad a unidad. Este procedimiento es sintético, de acuerdo con Kant, porque es necesariamente temporal [...][64]

Friedman fundamenta estas afirmaciones en la idea de que la lógica no estaba lo suficientemente desarrollada en la época de Kant como para que los teoremas de la matemática pudieran, estrictamente, derivarse de los axiomas matemáticos con meras herramientas lógicas. Así, las *intuiciones puras* de Kant funcionarían llenando los huecos que dejaba la lógica y, de esta manera, permitiendo que los teoremas realmente pudieran ser derivados. En otras palabras, para Friedman, "la posición de [Kant] debe de ser que aún la conjunción de '*x* es un triángulo' y [los axiomas de la geometría euclidiana] no implica 'los ángulos de *x* suman 180°' mediante la aplicación de la pura lógica"[65] y, en este sentido, Kant apelaría a las intuiciones puras del espacio y el tiempo para realmente poder concluir que los ángulos de un triángulo suman 180° a partir de los axiomas de Euclides.

---

63 FRIEDMAN, M Kant and the Exact Sciences p. 92. *Las cursivas son mías.*
64 *ibid.* p. 84.
65 *Ibid.* p. 58.

Estoy de acuerdo con Friedman en que, efectivamente, la lógica no estaba suficientemente desarrollada en la época de Kant como para que los teoremas de la matemática pudieran derivarse a partir de los axiomas matemáticos sin apelar a nuestras intuiciones, pero creo que es equivocado pensar que la *única* función de las *intuiciones puras* de Kant es llenar esa carencia. Consideremos el siguiente fragmento de la *Crítica*:

> Los axiomas matemáticos (por ejemplo, que sólo puede haber una línea recta entre dos puntos) son instancias de conocimiento universal *a priori* [...] Pero no puedo por eso decir que aprendo esa propiedad de las líneas rectas en general a partir de principios; *la aprendo sólo en la intuición pura.*[66]

La cita es clara. Kant mantiene que los axiomas matemáticos provienen de nuestras intuiciones puras.[67] Encuentro, pues, legítimo decir que para Kant el conocimiento matemático es conocimiento *a priori* gracias a que ciertas *intuiciones matemáticas* -las intuiciones puras del espacio y el tiempo- nos permiten conocer *a priori* la verdad de los axiomas matemáticos y, por tanto, que la posición kantiana *sí* es una posición *intuicionista.*

Ahora bien, hemos supuesto aquí que todos los teoremas de la lógica pueden ser conocidos *a priori*,[68] y esto le facilita su labor a los

---

66 KANT, I. *op. cit.* A 300, B 356,7. *Las cursivas son mías.*

67 El caso de la aritmética es menos claro que el de la geometría porque Kant sostiene explícitamente que en la aritmética no hay axiomas. De cualquier manera, creo que hay buenas razones para pensar que Kant sí ve a la aritmética como fundada en ciertas *intuiciones matemáticas* porque en (A 164, B 204) afirma que en la aritmética "no hay axiomas en el sentido estricto de la palabra, *pero hay una serie de proposiciones que son sintéticas y de las que inmediatamente tenemos certeza.*" (*Las cursivas son mías*).

68 *cfr. supra* capítulo 2.

kantianos. Si es cierto que las *intuiciones puras del espacio y el tiempo* nos permiten conocer *a priori* la verdad de los axiomas matemáticos, la conclusión de que es posible conocer *a priori* todos los teoremas de la matemática está justificada por nuestra suposición.

Planteada una posición intuicionista como la de Kant, el terreno es propicio para presentar argumentos en contra del intuicionismo. Llevaremos a cabo esta labor en dos niveles distintos: (*i*) mostrando problemas *particulares* del intuicionismo kantiano que no pueden ser generalizadas a otras versiones intuicionistas y (*ii*) señalando problemas *generales* que podrían afectar a cualquier versión intuicionista.

Comenzaremos discutiendo un problema *particular* de la teoría de Kant que Philip Kitcher señala en su artículo *Kant y los fundamentos de la matemática*. Centremos nuestra atención por un momento en las *construcciones* kantianas:

> Para la construcción de un concepto necesitamos, pues, una intuición *no empírica*. Esta última debe de, como intuición, ser un objeto *único*, y aún así, como la construcción de un concepto (una representación universal), debe de expresar validez universal en su representación para todas las intuiciones posibles que caen bajo el mismo concepto. Por tanto, construyo un triángulo representando el objeto que corresponde a este concepto o bien en la sola imaginación mediante la intuición pura o bien en papel mediante la intuición empírica -en ambos casos completamente *a priori*, sin haber tomado el patrón de experiencia alguna. La figura particular que dibujamos es empírica y, sin embargo, nos sirve para expresar el concepto sin mermar su universalidad. *Porque en esta intuición empírica consideramos sólo el acto por el que construimos el concepto y abstraemos las muchas determinaciones (por ejemplo, la magnitud de los lados*

y de los ángulos) que resultan bastante indiferentes en tanto que no alteran el concepto 'triángulo'.[69]

Tomemos uno de los ejemplos de Kitcher. Digamos que queremos determinar si la suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo es siempre mayor que el tercero. Siguiendo el método de Kant, dibujamos, en la mente o en papel, un triángulo cualquiera. Ahora bien, esta figura concreta que hemos trazado tiene propiedades comunes a todos los triángulos, pero, además, propiedades accidentales: lados de cierta longitud, ángulos de cierto tamaño, etc. Debemos, pues, considerar sólo las propiedades no accidentales y 'abstraer las muchas determinaciones que resultan bastante indiferentes' si es que queremos llegar a conclusiones 'universalmente válidas'. En palabras de Kitcher,

> Supongamos que hemos construido un triángulo escaleno. De mi figura puedo generalizar que todos los triángulos tienen la propiedad de que la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercero; pero no debo de inferir que todos los triángulos son escalenos.[70]

¿Y cómo sabemos qué propiedades son accidentales y cuáles no? Si es que nuestras construcciones han de resultar válidas, requerimos, previamente, de un *criterio* que nos permita distinguir entre propiedades universalizables y propiedades accidentales del triángulo

---

69 KANT, *op. cit.* A713,4 B741,2. *Las cursivas del último enunciado son mías.*
70 KITCHER, P. *Kant and the Foundations of Mathematics* p. 42.

particular que hemos construido. ¡Pero ese criterio es precisamente lo que la construcción tenía que habernos proporcionado![71]

Nos encontramos ante un círculo: de acuerdo con Kant, debemos elaborar una *construcción* para determinar qué propiedades son comunes a todos los triángulos y cuáles no, pero resulta que para poder llevar a cabo esa construcción requerimos, previamente, de un criterio que sirva para determinar qué propiedades son comunes a todos los triángulos y cuáles no. Pero entonces la construcción no nos ha servido de nada porque presupone un criterio que es precisamente lo que queríamos obtener. No nos hemos movido del punto de partida.[72]

Es entonces claro que las *construcciones* de Kant no son realmente una manera de determinar si las proposiciones matemáticas

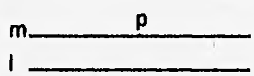
---

71 Podría decirse aquí, a manera de objeción, que las propiedades que se deducen lógicamente de los *conceptos* de las figuras que construimos siempre son universalizables y, por tanto, que sí tenemos un criterio para distinguir entre las propiedades universalizables y las propiedades accidentales de nuestras figuras. La objeción falla porque, aún cuando es cierto que las propiedades que se deducen lógicamente de los conceptos de las figuras que construimos son siempre universalizables, hay propiedades que no se deducen lógicamente de nuestros conceptos y que, sin embargo, Kant sí consideraría como universalizables. La propiedad de los triángulos de que la suma de las longitudes de dos de sus lados es siempre mayor que la longitud del tercero es un ejemplo; como el propio Kant aceptaría, el mero *concepto* de triángulo no nos basta para establecer esta propiedad y, sin embargo, debemos de considerarla como *universalizable*. Así, nuestras construcciones requieren de un criterio que nos permita distinguir entre propiedades universalizables (pero no lógicamente deducibles de nuestros conceptos) y propiedades meramente accidentales; y esto es precisamente lo que nuestras construcciones tenían que habernos proporcionado.

72 Kitcher menciona un segundo círculo en el mismo artículo que no discuto aquí porque resulta menos claro que el primero. El argumento consiste en decir que la única manera que tenemos para saber que las *limitaciones* que enfrentamos en nuestra construcción (como el no poder observar detalles muy pequeños) obedecen a nuestras propias carencias y no a cuestiones de principio es suponiendo lo que queremos demostrar porque, según Kitcher, una construcción que muestre que no hay limitaciones *de principio* en nuestras construcciones tiene que suponer que no hay limitaciones *de principio* en nuestras construcciones.

resultan verdaderas o no. Debemos concluir que un intuicionismo basado en la teoría de Kant fracasaría por no tener criterios para determinar la verdad de los axiomas matemáticos, mucho menos para establecer esa verdad *a priori*. Esto nos conduce a problemas *generales* las posiciones intuicionistas. Pareciera que quien sostiene que la matemática es *a priori* argumentando que, gracias a nuestras *intuiciones matemáticas*, podemos conocer *a priori* la verdad de los axiomas está comprometido, cuando menos, a proveernos de un *criterio* para determinar cuándo nuestras intuiciones matemáticas son correctas y cuándo no. Veremos a qué me refiero. Las siguientes páginas estarán dedicadas al análisis de ciertos ejemplos de la matemática en los que nuestras intuiciones matemáticas[73] nos han conducido por caminos equivocados. En primer lugar, discutiremos el surgimiento de las geometrías no euclidianas.

El último axioma de la geometría de Euclides nos deja con la sensación de que tal vez podría haber sido probado a partir de los otros cuatro; comparado con proposiciones como '*existe un círculo con cualquier centro y cualquier radio*', parece demasiado complejo para ser primitivo. En una formulación contemporánea, puede describirse como diciendo lo siguiente:



73 Es importante señalar aquí que, de aquí en adelante, dejaré de hablar específicamente de las *intuiciones kantianas* para referirme al sentido más amplio de *intuición* que había quedado estipulado en nuestra definición de *intuición matemática*.

Dada una línea l *y un punto* p *que no está sobre* l, *existe una y sólo una línea* m *tal que pasa por* p *y no se encuentra con* l, *aún cuando se extiendan arbitrariamente las líneas en cualquier dirección.*

Uno de los intentos más interesantes por probar que este postulado puede demostrarse a partir de los otros cuatro axiomas de Euclides es el del matemático italiano Gerolamo Sacchieri. Su procedimiento consistió en negar el último axioma para tratar de llegar a una contradicción. Sacchieri obtuvo cosas que 'repugnan a la razón', como triángulos cuya suma de ángulos internos no es igual a 180°, pero *no* pudo llegar a una contradicción. Lo que sucedió, en cambio, es que generó una geometría *alterna* a la de Euclides: una geometría tan consistente como la de Euclides (puede demostrarse que las geometrías no euclidianas son consistentes si y sólo si la geometría de Euclides es consistente)[74], pero con teoremas radicalmente distintos, como uno que afirma que la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre *diferente* de 180°.

En realidad, hay dos tipos distintos de geometrías no euclidianas porque hay dos maneras distintas de negar el último axioma de Euclides. La primera consiste en negar que existe *una y sólo una* línea paralela a *l* que pasa por *p* afirmando que existen *varias*, y esto da origen a la geometría de Bolyai-Lobachevsky en la que la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre *menor* que 180°; otra posibilidad consiste en negar que existe *una y sólo una* línea afirmando que no existe ninguna, y esto da origen a la geometría de Riemann en

---

[74] *cfr.* GILLIES, D. Philosophy of Science in the Twentieth Century *parte II.*

la que la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre *mayor* que 180°.

En un principio, se consideraba que las geometrías de Riemann y de Bolyai-Lobachevsky eran simples curiosidades de la matemática y que la *verdadera* geometría, la geometría que daba cuenta del mundo, era la geometría de Euclides porque la única versión del último postulado que obedece a nuestras ***intuiciones matemáticas*** es la que nos presentó Euclides, y no sus negaciones. Años después, sin embargo, las cosas cambiaron. Según Donald Gillies en ***La filosofía de la ciencia en el siglo veinte*** sucedió lo siguiente:

> En 1915 Einstein introdujo su teoría general de la relatividad, en la que se asume que la geometría del espacio físico es la de Riemann y no la de Euclides. La nueva teoría explicaba el movimiento del perihelio de Mercurio, que resultaba ser una anomalía para la física de Newton. Cuatro años después, la nueva teoría recibió una nueva confirmación del experimento del eclipse en el que las predicciones de la relatividad general mostraron ser mucho más precisas que las de la teoría newtoniana. Así, a partir de los 1920, la relatividad general fue aceptada como más precisa que la teoría newtoniana, mostrando que *la verdadera geometría del espacio físico es la no euclidiana en vez de la euclidiana.*[75]

No es sólo que nuevas geometrías, distintas de lo que nos parece intuitivamente correcto, puedan existir con la misma consistencia que la geometría de Euclides, es que la física nos muestra que ***la geometría de Euclides no describe al mundo*** porque, en realidad, el universo es un espacio riemanniano.

---

[75] *ibid.* p. 85.

El ejemplo de las geometrías no euclidianas hace ver que nuestras intuiciones matemáticas no tienen *necesariamente* que ser correctas porque existen explicaciones contrarias que, sin embargo, resultan ser igualmente consistentes; pero, además, podemos concluir que, a la luz de la física contemporánea, es *racional* aceptar que el mundo *no* corresponde con nuestras intuiciones matemáticas, sino que, de hecho, suceden cosas 'repugnantes' como que la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre mayor que 180°.

Consideraremos ahora algunos de los problemas a los que se enfrentan nuestras intuiciones matemáticas en la teoría de conjuntos. Encabezando la lista, desde luego, tenemos a la paradoja de Russell.

Pocas cosas parecieran estar tan de acuerdo con nuestras intuiciones matemáticas como que, dada una propiedad, podemos definir un conjunto. Si, por ejemplo, pensamos en la propiedad de ser un satélite natural de la tierra, podemos construir al conjunto que tiene a la luna como su único elemento. De hecho, tan de acuerdo con nuestras intuiciones matemáticas parece este principio, llamémoslo I, que matemáticos como Frege consideraron que en él podía fundamentarse a la matemática entera.

Pero pensemos en la siguiente propiedad, *R*, 'ser un conjunto que no es elemento de sí mismo'. Mientras que, por ejemplo, un conjunto como E = {todos los elefantes} cumple con la propiedad *R* porque 'E' no es un elefante, conjuntos como A = {9,🕮,A} no cumplen con la propiedad *R* por estar entre sus propios elementos.

Ahora bien, si somos fieles a nuestra intuición matemática I, debemos conceder que existe un conjunto, R, tal que contiene exactamente aquellas cosas que cumplen con la propiedad *R*. Pero tiene que suceder una de dos cosas, o bien R es un elemento de sí mismo, o no lo es. Si R es un elemento de sí mismo, cumple con la propiedad *R* (porque en R están exactamente aquellas cosas que cumplen con *R*), pero entonces R no es un elemento de sí mismo y hemos llegado a una contradicción. A la inversa, supongamos que R *no* es un elemento de sí mismo, en ese caso R no cumple con la propiedad *R* y, por tanto, R sí es elemento de sí mismo. ¡Otra contradicción!

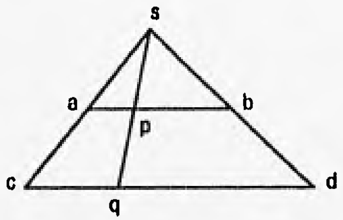
Estamos obligados a concluir que nuestra intuición matemática, I, de que podemos usar cualquier propiedad para generar un conjunto nos lleva a contradicciones y, por tanto, que I resulta completamente inaceptable.

Una nueva familia de problemas a los que nuestras intuiciones nos conducen surge con el estudio de los infinitos. Pareciera estar de acuerdo con nuestras intuiciones matemáticas, por ejemplo, que hay *más* números racionales (aquellos de la forma *a/b* donde *a* y *b* son enteros) que números naturales, porque sabemos que los números racionales contienen a todos los naturales y, además, a una infinidad de nuevos elementos. Pero esa intuición matemática es falsa. Puede demostrarse[76] que por cada elemento del conjunto de los números racionales existe exactamente un elemento en el conjunto de los números naturales, es decir, puede establecerse una correspondencia *uno a uno* entre ambos conjuntos.

Un resultado que repugna en la misma medida a nuestras intuiciones matemáticas es el de que dos segmentos de recta de diferente longitud tienen precisamente la misma cantidad de puntos. En este caso nos detendremos en la demostración por su simplicidad.

---

[76] Tanto éste como todos los siguientes ejemplos que se mencionan en mi texto sobre infinitos pueden encontrarse rigurosamente expuestos y demostrados en el libro Set Theory and Logic de Abraham Fraenkel.



Considérense dos segmentos de recta de diferente longitud *ab* y *cd*. Trácense los segmentos de recta *ca* y *db* y prolóngense hasta que se crucen en el punto *s*. Ahora bien, cada recta que parta de *s*, por construcción, se cruzará con ambos o con ninguno de los segmentos *ab* y *cd*, pero, entonces, hay exactamente un punto en el segmento *ab* por cada punto en el segmento *cd*: tómese cualquier punto *q* en *cd* y trácese la recta *qs*, dado que *qs* se intersecta con *ab* en un lugar distinto para cada q, existe un punto *p* en *ab* que *corresponde* a *q*; análogamente, tómese cualquier punto *p* en *ab* y trácese la recta *ps*, dado que *ps* se intersecta con *cd* en un lugar distinto para cada *p*, *existe* un punto *q* en *cd* que *corresponde* a *p*.

Pueden encontrarse resultados en este sentido que resultan todavía más repugnantes a nuestras intuiciones matemáticas, por ejemplo, el de que un segmento de recta, por más pequeño que sea, contiene precisamente la *misma* cantidad de puntos que una *superficie* de cualquier tamaño.

Tal vez estos ejemplos nos inviten a pensar en que puede establecerse una correspondencia *uno a uno* entre *cualesquiera* dos conjuntos infinitos, pero no es así. Cantor probó con un ingenioso argumento que el infinito de los números reales es *más grande* que el infinito de los números naturales, en el sentido de que no puede construirse ninguna correspondencia que asigne un número natural distinto a cada número real. Y no sólo eso, Cantor demostró que, dado cualquier conjunto infinito, existe otro con *más* elementos; concretamente, probó que el conjunto potencia de un conjunto cualquiera, A, tiene más elementos que A en el sentido de que no puede construirse ninguna correspondencia que asigne un elemento distinto de A a cada elemento de su conjunto potencia.

Hemos visto cómo las intuiciones matemáticas, lejos de proveer el *fundamento* para nuestros resultados en la matemática de los infinitos, tienen un efecto *desorientador*, apuntando, incluso, hacia conclusiones falsas en ciertas ocasiones.

Ante la evidencia aportada por estos ejemplos, es claro que cualquier posición intuicionista está obligada a proveernos de criterios precisos para determinar cuáles de nuestras intuiciones matemáticas han de ser consideradas como correctas y cuáles no. De no hacerlo, los intuicionistas estarían injustificados en afirmar que la verdad de los axiomas matemáticos queda *garantizada* gracias a nuestras intuiciones matemáticas porque habría razones para pensar que pueden traicionarnos, como en el caso de los muchos ejemplos que ya hemos considerado. No podríamos decir que *conocemos* la verdad de los axiomas matemáticos, mucho menos que conocemos esta verdad *a priori*.

Hasta ahora, mis argumentos no bastan para decir que las posiciones intuicionistas tengan que ser rechazadas *por principio*, pero sí para cambiar de bando la necesidad de dar argumentos. La teoría de Kant, como hemos viso, es incapaz de proporcionarnos los criterios que requerimos para distinguir entre intuiciones matemáticas correctas e incorrectas y no conozco ninguna posición intuicionista diferente de la de Kant que pueda hacerlo. Podemos, pues, concluir que no es razonable aceptar al intuicionismo para argumentar que el conocimiento matemático es conocimiento *a priori* mientras las posiciones intuicionistas no puedan proveernos de criterios suficientes para discriminar adecuadamente entre nuestras intuiciones matemáticas.

Ahora bien, creo que cualquier posición intuicionista que intente proveernos de estos criterios se enfrenta a problemas de fondo. ¿Qué podrían ser estos criterios que permiten al intuicionista distinguir entre intuiciones matemáticas correctas e incorrectas? Ciertamente, los criterios no pueden ser de índole *empírica* porque entonces los intuicionistas no podrían decir que las intuiciones matemáticas nos permiten conocer proposiciones matemáticas *a priori*, y tampoco pueden ser criterios meramente *lógicos* porque, como vimos en el capítulo anterior, la lógica no puede proveernos de criterios suficientes para establecer la verdad matemática. Pareciera que, para el intuicionista, sólo nuevas intuiciones matemáticas pueden decirnos si una intuición matemática es correcta o no. Hemos definido *intuición matemática* como cualquier proceso no empírico distinto del de seguir pruebas que nos lleve a pensar que una proposición matemática es verdadera; así, la aplicación de un *criterio* no empírico y distinto del de seguir pruebas que nos sirva para distinguir entre intuiciones matemáticas correctas e incorrectas, es decir, para determinar que las proposiciones matemáticas correspondientes a nuestras intuiciones matemáticas correctas son realmente verdaderas, no puede sino ser una intuición matemática; pero entonces no nos hemos movido del punto de partida. Mostramos que el uso de intuiciones matemáticas para argumentar que el conocimiento matemático es conocimiento *a priori* está condicionado a la existencia de un criterio para distinguir nuestras intuiciones matemáticas correctas de las incorrectas, pero si la aplicación de este criterio es, a su vez, una intuición matemática, estamos suponiendo lo que queríamos demostrar. Si la aplicación del criterio para determinar qué intuiciones matemáticas pueden ser usadas y cuáles no es también una intuición matemática, debemos aplicar nuestro criterio para estar justificados en aplicar nuestro criterio, y claramente esto es movernos en círculos.

Mi conclusión es que hay buenas razones para rechazar una posición intuicionista y, así, que hay buenas razones para dudar de que tengamos alguna manera de conocer *a priori* la verdad de los axiomas de la matemática.

Capítulo 4

El objeto de este capítulo consiste en sugerir una manera en la que puede entenderse al conocimiento matemático como conocimiento a posteriori.

En el capítulo 2 hemos visto cómo la matemática debe de tener *axiomas propios* porque la lógica no puede proveernos de criterios para establecer la verdad de las proposiciones matemáticas, y en el capítulo 3 concluimos que hay buenas razones para pensar que la verdad de estos axiomas propios no puede ser conocida *a priori*. Pero, entonces, ¿cómo podría ser conocimiento *a priori* el conocimiento matemático?

Desafortunadamente, la labor de mostrar que el conocimiento matemático *no* es conocimiento *a priori* no culmina con hacer ver que las posiciones aprioristas tienen problemas, es necesario encontrar una manera de explicar cómo el conocimiento matemático podría ser conocimiento *a posteriori*, y este no es asunto trivial. Verdades matemáticas como $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ parecen estar tan alejadas de la experiencia y proposiciones como "2 + 2 = 4" son tan evidentes que no es fácil ver cómo el conocimiento matemático podría *no* ser *a priori*.

Las siguientes páginas estarán dedicadas a explicar cómo es posible entender la *verdad* de los teoremas de la matemática en términos empíricos. Mi estrategia consistirá en exhibir maneras en las que podría haberse originado empíricamente el conocimiento aritmético y geométrico para sugerir un sentido en el que puede hablarse de que el conocimiento matemático está fundamentado en elementos empíricos.[77] Enfatizaré la pertinencia de mi exposición señalando analogías entre mis explicaciones del origen del conocimiento aritmético y geométrico y ciertos ejemplos de la física clásica.

Centrémonos primero en el caso del conocimiento aritmético. Imaginémonos jugando con un grupo de objetos cualesquiera, separándolos y agrupándolos. Podemos distinguir las siguientes actividades: *operación separativa*, la actividad de separar algunos objetos del resto; *operación unitaria*, la aplicación de una operación separativa en la que se separa a un sólo objeto; *operación sucesora*, decimos que una operación separativa *o*' es la *operación sucesora* de otra, *o*, cuando *o*' consiste en separar todos los objetos que habíamos separado con la operación *o* junto con un objeto adicional; y *operación aditiva*, la actividad de juntar los objetos de dos operaciones separativas sin objetos en común. Podemos además considerar la actividad de *hacer corresponder* dos operaciones separativas que consiste en llevar a cabo una correspondencia entre los objetos de una y otra operación.

Considerando a estas actividades como primitivas, es posible desarrollar una *ciencia empírica de separar y juntar objetos* y, generalizando nuestras observaciones de casos particulares, llegar a las siguientes conclusiones (donde Ux significa que x es una operación unitaria; Sxy significa que x es una operación sucesora de y; Axyz significa que x es la operación aditiva que junta los objetos que separaron las operaciones separativas sin objetos en común x y y; Cxy significa que podemos *hacer corresponder* a las operaciones

77 Mi planteamiento está basado casi enteramente en el que nos ofrece Philip Kithcer en La naturaleza del conocimiento matemático cap. 6, especialmente secciones II y III.

separativas x y y; y el dominio son las operaciones separativas y aditivas):

(1) $(x)\, Cxx$

(puede *hacerse corresponder* cualquier operación separativa o aditiva consigo misma);

(2) $(x)(y)\, (Cxy \rightarrow Cyx)$

(es igual *hacer corresponder* a x con y, que *hacer corresponder* a y con x);

(3) $(x)(y)(z)\, (Cxy \rightarrow (Cyz \rightarrow Cxz))$

(si x puede *hacerse corresponder* con y, es igual *hacer corresponder* a x con algo que a y con algo);

(4) $(x)(y)\, ((Ux \wedge Cxy) \rightarrow Uy)$

(cualquier operación separativa o aditiva que pueda *hacerse corresponder* con una operación unitaria es una operación unitaria);

(5) $(x)(y)\, ((Ux \wedge Uy) \rightarrow Cxy)$

(todas las operaciones unitarias pueden *hacerse corresponder* entre sí);

(6) $(x)(y)(z)(w)\, ((Sxy \wedge Szw \wedge Cyw) \rightarrow Cxz)$

(pueden *hacerse corresponder* las operaciones sucesoras de operaciones que pueden *hacerse corresponder*);

(7) $(x)(y)(z)(w)\, ((Sxy \wedge Szw \wedge Cxz) \rightarrow Cyw)$

(pueden *hacerse corresponder* operaciones que tengan operaciones sucesoras que pueden *hacerse corresponder*);

(8) $(x)(y)\, \neg(Ux \wedge Sxy)$

(las operaciones unitarias no son operaciones sucesoras);

(9) $(x)(y)(z)(w)\, ((Axyz \wedge Uz \wedge Swy) \rightarrow Cxw)$

(la operación aditiva de una operación, *o*, y una operación unitaria puede *hacerse corresponder* con la operación sucesora de *o*);

(10) $(x)(y)(z)(u)(v)(w)\ ((Axyz \wedge Szu \wedge Svw \wedge Awyu) \rightarrow Cxv)$

(la operación aditiva de una operación sucesora y alguna otra operación, *o*, puede *hacerse corresponder* con la operación sucesora de la operación aditiva de una operación de la que la operación sucesora sea sucesora y *o*);

(11) $((x)(Ux \rightarrow \Phi x) \wedge (x)(y)((\Phi y \wedge Sxy) \rightarrow \Phi x) \rightarrow (x)\Phi x$ *para todas las fórmulas abiertas* Φx *del lenguaje*

(si las operaciones unitarias tienen una propiedad tal que si una operación la tiene su operación sucesora también, todas las operaciones separativas o aditivas la tienen);

(12) $(x)(y)(z)\ ((Sxy \wedge Cxz) \rightarrow (\exists w)(Cyw \wedge Szw))$

(si una operación, *o*, puede *hacerse corresponder* con la operación sucesora de alguna operación, *o*', es posible llevar a cabo una operación que puede *hacerse corresponder* con *o*' tal que su operación sucesora es *o*).

Ninguno de estos resultados es problemático en nuestra *ciencia empírica de separar y juntar objetos* porque todos pueden confirmarse ampliamente con experimentos sencillos y nunca surgen contraejemplos. Hay, sin embargo, una serie de proposiciones que, aún pudiendo resultar experimentalmente falsas, quisiéramos considerar como verdaderas. Fijaremos las ideas para aclarar el asunto. Consideremos el siguiente enunciado:

(13) $(x)(\exists y)\, Syx$

(podemos llevar a cabo una operación sucesora para cualquier operación separativa o aditiva).

Si realizamos nuestros experimentos con, digamos, 160 objetos, (13) se torna falsa cuando tratamos de encontrar alguna operación sucesora para una operación en la que separemos a 160 objetos porque requeriríamos más objetos de los que, de hecho, tenemos. Así, dado que estamos obligados a experimentar con cantidades finitas de objetos, siempre llegará un momento en el que (13) fracase. Pero, ¿no es por razones meramente *accidentales* que encontramos contraejemplos para (13)? Parece claro que si pudiéramos disponer de todos los objetos que hicieran falta (y si tuviéramos suficiente tiempo y energía para llevar a cabo operaciones separativas de *cualquier* tamaño), (13) resultaría verdadera porque los contraejemplos sólo surgen cuando no tenemos suficientes objetos para trabajar o cuando las operaciones requerirían de más tiempo o energía de lo que estamos en posición de utilizar. No es que encontremos algún momento particular en el que deje de ser posible realizar operaciones sucesoras, es sólo que nuestras limitaciones accidentales no nos permiten continuar indefinidamente.

Una manera de solucionar este problema es generando una *ciencia empírica idealizada de separar y juntar objetos* en la que se ignoren las limitaciones *accidentales* de nuestras circunstancias particulares. Podemos pensar, por ejemplo, en un sujeto *ideal* que sea capaz de realizar operaciones separativas y aditivas de cualquier magnitud y que disponga de todos los objetos necesarios para realizar estas operaciones. Así, reflexionando sobre las actividades del sujeto *ideal* podemos justificar (13) notando que, al prescindir de limitaciones accidentales, nuestro sujeto podría llevar a cabo operaciones sucesoras para *cualquier* operación separativa. Un razonamiento similar serviría en nuestra ciencia empírica *idealizada* para justificar

(14) $(\exists x)\, Ux$
(podemos llevar a cabo operaciones unitarias);
(15) $(x)(y)(\exists z)\, Azxy$
(podemos llevar a cabo operaciones aditivas a partir de *cualesquiera* dos operaciones separativas o aditivas).

Dado que nuestro sujeto ideal siempre dispone de objetos suficientes para realizar sus operaciones separativas, sabemos que siempre podrá llevar a cabo operaciones unitarias. Además, dado que no hay límite en el *tamaño* de las operaciones que es capaz de realizar, puede llevar a cabo operaciones aditivas a partir de *cualesquiera* dos operaciones separativas o aditivas.

Ahora bien, utilizando las proposiciones (1)-(15) es posible demostrar todos los teoremas de la aritmética elemental. Así, puede decirse que nuestra *ciencia empírica idealizada de separar y juntar objetos* es la aritmética y, de esta manera, que hemos encontrado un fundamento empírico para el conocimiento aritmético, a saber, la *ciencia empírica (no idealizada) de separar y juntar objetos*. Pudiera parecer, sin embargo, que la idealización de la que nos hemos valido para demostrar las proposiciones (13)-(15) resulta inaceptable en una práctica científica. Un ejemplo de la física clásica servirá para hacer ver que no es así.

Imaginémonos que, desconociendo la física de Newton, tratamos de describir la manera en que los cuerpos se deslizan sobre superficies planas. Consideremos, por ejemplo, un cubo con masa determinada. ¿Qué sucederá si lo hacemos deslizar por una superficie plana? Depende, desde luego, de la velocidad inicial del deslizamiento. Dejémosla fija. ¿Qué distancia recorrerá nuestro cubo antes de detenerse? Si comenzamos a realizar experimentos veremos que la distancia depende de la fricción que se desarrolle entre el cubo y la superficie.[78] Si logramos que la fricción disminuya (cambiando la composición del cubo o de la superficie, o lubricándolos) el cubo recorrerá mayores distancias dada la misma velocidad inicial. Bauticemos al conjunto de resultados sobre el deslizamiento de nuestro cubo *ciencia empírica del deslizamiento de cubos*.

Ahora bien, no podemos hacer que la fricción entre el cubo y la superficie disminuya indefinidamente para nuestros experimentos porque, de hecho, carecemos de los materiales necesarios. Cada vez que realicemos experimentos habrá un límite en la distancia que nuestro cubo podrá recorrer. Esto significa que en nuestra *ciencia empírica del deslizamiento de cubos* es experimentalmente falso que

[78] Desde luego, para que mi ejemplo tenga sentido, es necesario *no* definir a la *fricción* entre un cubo (con masa determinada) y una superficie plana en función de la distancia que alcanza el cubo cuando se le desliza por la superficie. Podríamos, por ejemplo, definirla como el trabajo necesario para que el cubo alcance una velocidad dada sobre la superficie a partir de un estado de reposo. Ciertamente, a la luz de la segunda ley de Newton estas dos caracterizaciones son equivalentes, pero, por el momento, estamos desconociendo dicha ley.

(16) *un cubo (de masa determinada) puede hacerse deslizar por una superficie plana distancias tan grandes como se quiera (dada una velocidad inicial fija)*,

porque, de hecho, no podemos lograr que el cubo se deslice más allá de cierta distancia. Pero, ¿no diríamos que las razones por las que (16) resulta falso son meramente *accidentales*? No parece haber una distancia particular que sea *imposible* que nuestro cubo rebase en su deslizamiento. Aparentemente, podríamos lograr que nuestro cubo rebasara *cualquier* distancia si consiguiéramos hacer que disminuyera suficientemente la fricción entre el cubo y la superficie.

Una manera de solucionar este problema es generando una *ciencia empírica idealizada del deslizamiento de cubos* en la que se ignoren las limitaciones accidentales de nuestras circunstancias particulares. Podríamos pensar, por ejemplo, en un sujeto *ideal* trabajando con materiales *ideales* que sea capaz de disminuir la fricción entre dos objetos tanto como se quiera. Así, podemos justificar (16) notando que, en nuestra *ciencia empírica del deslizamiento de cubos*, la distancia recorrida por nuestro cubo aumenta siempre que la fricción entre el cubo y la superficie disminuye. De esta manera, dado que el sujeto ideal puede hacer que la fricción disminuya tanto como sea necesario, puede lograr que el cubo rebase cualquier distancia en su deslizamiento. En nuestra idealización, (16) resulta verdadero.

Hay un punto que no debe dejarse de lado. Esta *ciencia idealizada del deslizamiento de cubos* puede realmente ser considerada como un ejemplo de la física clásica porque es sólo mediante el descubrimiento de resultados parciales como (16) que la ciencia ha podido recoger frutos tan importantes como la segunda ley de Newton. Para poder concluir que

(17) $F = ma$
(la fuerza es igual a la masa por la aceleración)

es necesario conceder (16) porque está implícito en (17) cuando m ha quedado fija, en F son relevantes sólo las fuerzas de fricción y estas fuerzas se hacen tender a cero.[79]

Espero que esta comparación entre un ejemplo de la física clásica y mi explicación del origen conocimiento aritmético sirva para hacer ver que *idealizaciones* como la que hemos usado al hablar del origen de la aritmética son prácticas aceptables en las ciencias naturales. Detengámonos ahora el caso de la geometría euclidiano.

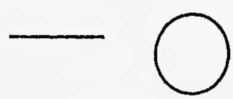
Pensemos en la siguiente situación. Inspirados por el tipo de figuras que dibujamos en pizarrones y hojas de papel, nos formamos conceptos como *punto*, *línea recta*, *círculo*, *triángulo*, *ángulo*, *ángulo recto*, *línea paralela a* y *línea perpendicular a*; y, utilizando estos conceptos y una cierta concepción del *espacio* en el que los objetos correspondientes a los conceptos podrían encontrarse, establecemos una serie de postulados como "*puede construirse un círculo con cualquier centro y cualquier radio*" o "*dada una línea recta, l, y un punto, p, fuera de l, existe exactamente una línea, l', tal que pasa por p y es paralela a l*". Además, a partir de estos postulados, probamos

---

[79] Podría aquí objetarse que, en realidad, la segunda ley de Newton *define fuerza* en función de *masa* y *aceleración*, con lo cual, (16) no es verdadero por una *idealización* sino más bien por *definición*. Mi respuesta es que el hecho de que la segunda ley de Newton defina *fuerza* como la define y no de alguna otra manera depende de resultados como (16).

nuevas proposiciones sobre nuestros conceptos y el espacio en el que se encuentran sus objetos, por ejemplo, "*la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos*".

Así, hemos definido una *estructura.* Tomamos un conjunto conceptos, una cierta concepción de *espacio*, y dejamos establecidas algunas de las propiedades de los objetos de esos conceptos en ese espacio (llamémoslo espacio *euclidiano*). Pero, desde luego, no hemos dicho nada acerca de objetos reales, sólo que *si* nuestro espacio es euclidiano y *si* ciertos objetos corresponden con alguno de nuestros conceptos, tendrán ciertas propiedades. Estrictamente hablando, entonces, nuestra estructura *nunca* se aplica a la realidad, en primer lugar, porque nuestro espacio *no* es euclidiano y, en segundo, porque no hay tal cosa en el mundo como *puntos, líneas rectas* o *círculos*. Cuando dibujamos figuras como



nos encontramos ante objetos que corresponden *aproximadamente* a nuestros conceptos de *punto, línea recta* y *círculo*, pero el primer trazo no es un punto porque tiene área, el segundo no es una línea recta porque, además de tener área, sufre de pequeñas irregularidades y el tercero no es un círculo porque no todas sus partes se encuentran a la misma distancia del centro. Así, cuando construimos cosas como

no debe sorprendernos que sea sólo *aproximadamente* verdadero que la suma de sus ángulos sea igual a 180° porque la figura sólo se parece *aproximadamente* a un triángulo y nuestro espacio sólo se parece *aproximadamente* al euclidiano. Pareciera ser, sin embargo, que si pudiéramos trazar nuestras figuras con instrumentos indefinidamente precisos y si pudiéramos trabajar en espacios tan parecidos al euclidiano como quisiéramos, lograríamos que la geometría euclidiana describiera a las propiedades de nuestras figuras con *cualquier* grado de precisión. En este sentido, puede decirse que la geometría euclidiana es una *ciencia idealizada de las figuras*. En tanto que nuestra teoría ignora ciertos elementos de los trazos *reales* que dibujamos en pizarrones y hojas de papel, se aplica a ellos sólo *aproximadamente*, pero en circunstancias *ideales* en las que trabajáramos con instrumentos ilimitadamente precisos y en espacios absolutamente euclidianos se aplicaría a ellos con toda precisión.

Consideraremos ahora en un nuevo ejemplo de la física para subrayar el paralelismo que existe entre el tipo de *idealización* que utilizamos en nuestra explicación del origen del conocimiento geométrico y las idealizaciones que, de hecho, son usadas en las ciencias naturales.

Inspirados por experimentos efectuados con gases reales, los físicos han llegado a la siguiente ecuación (donde P es la presión, V el volumen, T la temperatura, N el número de moles y k es una constante):

(18) $PV = TkN$,

pero, hablando con precisión, (18) es experimentalmente *falso*, porque no describe *exactamente* el comportamiento de los gases reales. De hecho, (18) describe el comportamiento que tendría un gas *ideal* con moléculas de tamaño despreciable y sin fuerzas intermoleculares. De esta manera, si aceptamos (18), estamos comprometidos con una *ciencia idealizada de los gases*. En tanto que nuestra teoría ignora ciertos elementos de los gases reales, se aplica a ellos sólo aproximadamente, pero en circunstancias *ideales* en las que trabajáramos con gases compuestos de moléculas con tamaño despreciable y carentes de fuerzas intermoleculares, se aplicaría a ellos con toda precisión.

Queda, pues, claro que idealizaciones como la que usamos en nuestra explicación del origen del conocimiento geométrico encuentran aceptación en las ciencias naturales.

El terreno es ahora propicio para responder a una pregunta de importancia central. De acuerdo con nuestras explicaciones del conocimiento aritmético y geométrico, ¿debemos de considerar que nuestro conocimiento de estas ramas de la matemática es *empírico*, a pesar de depender de una *idealización*? Mi respuesta es que sí. Comencemos por discutir los ejemplos de idealización que tomamos de la física. ¿Diríamos que nuestra *ciencia idealizada del deslizamiento de cubos* deja de ser conocimiento empírico por el hecho de *idealizar* nuestros resultados experimentales? Ciertamente no. Si nuestros experimentos revelaran que hay una distancia máxima que los cubos pueden alcanzar en su deslizamiento sobre superficies planas, sin importar qué tanto disminuya la fricción entre el cubo y la superficie, no hubiera sido razonable concluir (16). Sólo está justificada la idealización que nos permitió llegar a (16) por el hecho de que nuestras observaciones empíricas resultaron ser de cierta manera y no de otra; en este sentido, no podemos decir que nuestro conocimiento de (16) sea conocimiento *independiente* de consideraciones empíricas. ¿Diríamos que nuestro conocimiento de la teoría de los gases ideales deja de ser conocimiento empírico por el hecho de *ignorar* ciertos elementos de los gases reales? Tampoco. Hablamos de gases ideales que se adecúan *perfectamente* a un principio como (18), que sólo describe *aproximadamente* el comportamiento de los gases reales, porque consideramos que los gases reales se comportarían igual que los ideales si ciertas circunstancias, como el tamaño de las moléculas y las fuerzas intermoleculares, pudieran ser ignoradas; así, la manera en que definimos *gas ideal* está condicionada por el comportamiento que de hecho presentan los gases reales. Nuestra *idealización* no es independiente de consideraciones empíricas.

¿Y qué sucede en el caso de nuestro conocimiento aritmético y geométrico? La idealización de la que nos valimos en nuestra explicación del origen del conocimiento aritmético no es arbitraria, está condicionada por nuestras observaciones empíricas. Sólo llevando a cabo nuestras propias operaciones separativas y aditivas podemos imaginar las operaciones que realizaría un *sujeto ideal* porque queremos que este sujeto llegue a *los mismos* resultados que obtendríamos nosotros de no estar sujetos a limitaciones accidentales. Así, dado que requerimos de elementos empíricos (nuestra *ciencia empírica de separar y juntar objetos*) para justificar nuestro conocimiento aritmético (nuestra *ciencia idealizada de separar y juntar objetos*), ha quedado violada la condición (A2) de conocimiento *a priori* que habíamos expuesto en el capítulo 2 y, por tanto, debemos concluir que, de acuerdo con nuestra explicación del origen del conocimiento aritmético, el conocimiento aritmético *no* es conocimiento *a priori*. El caso de nuestro conocimiento geométrico es análogo. En la geometría euclidiana hablamos de propiedades ideales, que sólo se *aproximan* a las propiedades de las figuras reales en el espacio real, porque consideramos que las figuras reales tendrían esas mismas propiedades si ciertas circunstancias, como la imprecisión de nuestros trazos y el hecho de que nuestro espacio no es euclidiano, pudieran ser ignoradas. Así, la manera en que definimos la *estructura* de la geometría euclidiana está determinada por las propiedades que de hecho tienen las figuras reales que dibujamos en pizarrones y hojas de papel y, por tanto, se viola la condición (A2) de conocimiento *a priori*. De acuerdo, pues, con nuestra explicación del origen del conocimiento geométrico, el conocimiento geométrico *no* es conocimiento *a priori*.

Hay un punto que es fundamental aclarar. Con mis explicaciones del origen del conocimiento aritmético y geométrico no pretendo decir que nuestro conocimiento matemático provenga *directamente* de consideraciones empíricas. Argumentar, por ejemplo, que cada uno de nosotros ha justificado su conocimiento de la aritmética sólo gracias al hecho de haber realizado una serie de experimentos separando y juntando objetos sería tan ridículo como decir que los estudiantes de física aprenden que los gases tienen un comportamiento similar a "$PV = TkN$" sólo después de haber realizado numerosos experimentos con diferentes gases. En ambos casos, el conocimiento nos viene de otros miembros de nuestra comunidad, como los maestros, y, a lo sumo, realizamos unos cuantos experimentos sencillos para confirmarlo. Mis explicaciones no son sobre la manera en que cada uno de nosotros ha obtenido su conocimiento matemático sino sobre el modo en que nuestro conocimiento matemático pudo haberse gestado originalmente. Me parece razonable suponer que nuestros antepasados obtuvieron su conocimiento aritmético y geométrico de maneras similares a las que han sido sugeridas aquí y que, a lo largo de muchas generaciones, ese conocimiento ha sido solidificado y sistematizado hasta alcanzar su estado actual; y, así como la física que se enseña en las universidades de hoy día no pierde su carácter empírico por el hecho de ser aprendida en aulas y libros de texto, nuestro conocimiento matemático no gana aprioricidad por el hecho de ver tan lejanos sus orígenes empíricos.

Ciertamente, mis explicaciones del conocimiento aritmético y geométrico son insuficientes para dar cuenta de *todo* el conocimiento matemático, pero creo que sugieren una manera en que la verdad de otras ramas de la matemática podría ser explicada en términos empíricos.[80] Mi objetivo en este capítulo ha sido mostrar que tiene sentido hablar del conocimiento matemático como conocimiento *a posteriori*, y creo que eso se ha logrado.

Digo en conclusión que tenemos buenas razones para pensar que el conocimiento matemático *no* es conocimiento *a priori* porque, como hemos visto, las posiciones aprioristas tienen problemas importantes y, en cambio, hemos encontrado una manera de entender al conocimiento matemático como conocimiento *a posteriori*.

---

80 Philip Kithcer da un paso importante en esta dirección ofreciendo una explicación empírica de la verdad de ciertas proposiciones de la teoría de conjuntos. *cfr.* KITCHER, P. The Nature of Mathematical Knowledge cap. 6., sección IV.

Bibliografía

AUERBACH, D. 'How to say Things with Formalisms' en DETLEFSEN,M. Proof, Logic and Formalization.

AYER 'The a priori' en BENACERRAF *et al.* Philosophy of Mathematics.

BENACERRAF 'What Numbers could not be' *The Philosophical Review* vol. 74 (47-73).

BERKELEY, G. *The Analyst* en BERKELEY, G. De Motu and The Analyst.

BOSTOCK, D. 'Logic and Empiricism' *Mind vol.* 99 (571-582).

BROWER 'Conciousness, Philosophy and Mathematics' en BENACERRAF *et al.* Philosophy of Mathematics.

BROWER 'Intuitionism and Formalism' en BENACERRAF *et al.* Philosophy of Mathematics.

BURGESS, J. 'Proofs about Proofs' en DETLEFSEN Proof, Logic and Formalization.

CASULLO, A. 'Revisability, Reliabilism and a priori Knowledge' *Philosophy and Phenomenological Research* vol. 49 núm. 2.

CASTAÑEDA 'Arithmetic and Reality' en BENACERRAF *et al.* Philosophy of Mathematics.

COFFA, J.A. The Semantic Tradition.

CURRY, H. Outlines of a Formalist Philosophy.

DE GANDI, F. 'Le style mathématique des *Principia* de Newton'.

DESCARTES, R. Discours de la Méthode suivi des Méditations.

DETLEFSEN, M. 'On interpreting Gödel's Second Theorem' *Journal of Philosophical Logic* vol. 8 (1979).

DUMMETT, M Frege *Philosophy of Mathematics*

DUMMETT, M. 'The Philosophical Significance of Gödel's Theorem' en DUMMETT, M. Truth and other Enigmas.

FREGE, G. The Foundations of Arithmetic.

FRIEDMAN, M. Kant and the Exact Sciences.

GASKING 'Mathematics and the World' en BENACERRAF *et al.* Philosophy of Mathematics.

GRATTAN-GUINNESS, I. 'Berkeley's Criticism of the Calculus as a Study in the Theory of Limits' *Janus* vol. 56 (1969).

GRIFFIN, N 'Non-Euclidean Geometry...' *Studies in the History and the Philosophy of Science* vol. 22 núm. 4.

GUICCIARDINI, N. The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800.

HAND, M. 'Kitchers Circumlocutionary Solution' en *Canadian Journal of Philosophy* vol. 21 núm. 1.

HELMAN, G. 'Proofs and Epistemic Structure' en DETLEFSEN Proof, Logic and Formalization.

HEMPEL 'On the Nature of Mathematical Truth' en BENACERRAF *et al.* Philosophy of Mathematics.

HILBERT, D. 'Foundations of Logic and Arithmetic' en VAN HEIJENOORT From Frege to Gödel.

HILBERT, D. 'The Foundations of Mathematics' en VAN HEIJENOORT From Frege to Gödel.

HILBERT, D. 'On the Infinite' en VAN HEIJENOORT From Frege to Gödel.

HUME, D. An Enquiry concerning Human Understanding.

IGNJATOVIC, A. 'Hilbert's Program and the ω-rule' *Journal of Symbolic Logic* vol. 59 núm. 1.

ISAACSON, D. 'Some considerations on Arithmetical Truths and the ω-rule' en DETLEFSEN, M. Proof, Logic and Formalization.

KANT, I. Critique of Pure Reason.

KANT, I. Polegomena to any Future Metaphysics.

KESSLER 'Mathematics and Modality' *Noûs* núm. 12 (421-441).

KLINE Mathematics and the Loss of Certanty.

KLINE Mathematics and the Search for Truth.

KITCHER, P. 'Apriority and Necesity' *Australian Journal of Philosophy* vol. 58 núm. 2.

KITHCER, P. 'Bolzano's Ideal of Algebraic Analysis' *Studies in the Philosophy and History of Science* (1975) (229-269).

KITHCER, P. 'Freges Epistemology' *The Philosophical Review* vol. 88 núm. 2.

KITCHER, P. 'Hilbert's Epistemology' *Philosophy of Science* vol. 43 núm. 1.

KITCHER, P. 'Kant and the Foundations of Mathematics' *Pilosophical Review* vol. 84 núm. 1.

KITCHER, P. 'Mathematical Rigor: Who needs it?' *Noûs* vol. 15 (469-493).

KITCHER, P. The Nature of Mathematical Knowledge.

KITCHER, P. 'The Naturalists Return' *The Philosophical Review* vol. 101 núm. 1.

KITCHER, P. 'The Plight of the Platonist' *Noûs* vol. 12 (421-444).

LANDAU The Foundations of Analysis.

LEIBNIZ, G. W. New Essays on Human Understanding.

MENDELSON, E. Introduction to Mathematical Logic (1987), tercera edición.

MILL, J. S. A System of Logic.

NEPOMUCENO, A. 'Nociones logicistas en filosofla de la matemática' en *Crltica* vol. 25 núm. 75.

NORTON-SMITH, T 'An Arithmetic of Action Kinds' *Phil. Studies* vol. 63 núm. 2.

PALMQUIST, S. 'A priori Knowledge in Perspective' *Review of Methaphysics* vol. 41 (3-22).

PARSONS 'Infinity and Kant on Experience' *The Philosophical Review* vol. 73 (1964).

PARSONS 'Kant's Philosophy of Arithmetic' en PARSONS Mathematics in Philosophy.

PLATO Collected Dialogues.

POINCARE, H. Science et Méthode.

POINCARE, H. 'On the Nature of Mathematical Reasoning' en BENACERRAF *et al.* Philosophy of Mathematics.

POLLARD, S. 'Mathematical Naturalism' en *Southern Journal of Philosophy* vol. 27 (427-441).

POLYA Mathematics and Plausible Reasoning.

PUTNAM, H. 'The Thesis that Mathematics is Logic' en PUTNAM, H. Mathematics, Mind and Method.

PUTNAM, H. 'Mathematics without Foundations' en PUTNAM, H. Mathematics, Mind and Method.

PUTNAM, H. 'What is Mathematical Truth' en PUTNAM, H. Mathematics, Mind and Method.

QUINE, W.V.O. Philosophy of Logic.

QUINE, W.V.O. *Two Dogmas of Empiricism* en From a Logical Point of View.

QUINE, V. W. 'Truth by Convention' en LEE Philosophical Essays for Whitehead.

RESNIK, M Frege's Philosophy of Mathematics.
RICKEY, F. 'Isaac Newton: Hombre, mito y matemáticas' *Matesis* vol. 6 núm. 2.
RISJORD *Studies in the History and the Philosophy of Science* vol. 21 (123-143).
ROBINET, A. Correspondance Leibniz-Clarke.
RUSSELL, B. 'Introduction to Mathematical Philosophy' en BENACERRAF *et al.* Philosophy of Mathematics.
RUSSELL, B. The Principles of Mathematics.
STEINER, M. Mathematical Knowledge.
STRAWSON The Bounds of Sense.
TIESZEN, R. 'What is a Proof' en DETLEFSEN, M. Proof, Logic and Formalization.
WEYL, H. Philosophy of Mathematics and Natural Science.