9
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
CUAUTITLAN

"MATEMATICAS III, SU IMPORTANCIA DENTRO DEL PLAN DE ESTUDIOS DE LA LICENCIATURA DE INGENIERIA EN ALIMENTOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERA EN ALIMENTOS

P R E S E N T A :

YOLANDA LOPEZ GUTIERREZ

ASESOR: C.M.C. ANTONIO TREJO LUGO

CUAUTITLAN IZCALLI, EDO. DE MEX. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL AVENMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN
UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR
DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS

Departamento de Exámenes Profesionales

DR. JAIME KELLER TORRES
DIRECTOR DE LA FES-CUAUTITLAN
P R E S E N T E .

AT'N: Ing. Rafael Rodríguez Ceballos
Jefe del Departamento de Exámenes
Profesionales de la F.E.S. - C.

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS TITULADA:

Matemáticas III, su importancia dentro del
Plan de Estudios de la Licenciatura de Ingeniería
en Alimentos.

que presenta la pasante: Yolanda López Gutiérrez
con número de cuenta: 8701491-2 para obtener el TITULO de:
Ingeniera en Alimentos.

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO.

A T E N T A M E N T E .
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx., a 29 de Febrero de 1996

PRESIDENTE	Ing. Juan Contreras Espinoza	
VOCAL	Ing. José Luis Buenrostro Rodríguez	
SECRETARIO	Ing. Antonio Trejo Lugo	
PRIMER SUPLENTE	I.A. Laura M. Cortazar Figueroa	
SEGUNDO SUPLENTE	I.Q. Gilberto Amaya Ventura	

UAE/DEP/VAP/02

"Escúchame:

Tu no tienes más que una vida.
Haz de ella algo grande, algo magnífico.
Te has dejado vivir, en vez de, tú mismo,
vivir tu vida. Ya es tiempo de que la tomes
en tus manos y la modeles, como un escultor
cincela una estatua para convertir
la piedra en obra maestra."

" Tómate unos minutos para empezar a
escribir tu propia historia, no permitas
que otros escriban en esas páginas
que sólo a ti pertenecen."

A ustedes, mis padres, por todo lo que me han brindado, en especial, por su amor y comprensión.

A mis hermanos, Toño y Ana por su apoyo y por ser modelos a seguir, Marcos y Gloria por su bondad y sinceridad.

A mis sobrinos, en especial a Ceci, por su cariño e ingenuidad y por ser junto con Karlita y Vene algo hermoso en mi vida.

Al Ing. Antonio Trejo Lugo, por su comprensión y confianza, pero de manera especial, por su amistad.

Al jurado asignado para la revisión de está tesis, gracias...

A todas las personas que han formado parte de mi vida y que sin pensarlo han influido en ella.

Índice General

Índice General	I
Índice de diagramas	VI
Índice de figuras	VII
Resumen	IX
Introducción	XI
Objetivos	XIV

Capitulo 1
Marco referencial de la asignatura: Matemáticas III

1.1 Ecuaciones diferenciales	2
1.1.1. Definición	3
1.1.2. Clasificación	3
1.1.2.1. Tipo	3
1.1.2.2. Orden	4
1.1.2.3. Grado	4
1.1.2.4. Definición de ecuación diferencial lineal (ordinaria)	4
1.1.2.5. Notación	5
1.1.3. Soluciones	5
1.1.3.1. Definición	6
1.1.3.2. Origen	7
1.1.3.3. Familia de curvas	9
1.1.3.4. Tipos de soluciones	10
1.1.3.4.1. Solución trivial	10
1.1.3.4.2. Solución particular	11
1.1.3.4.3. Solución singular	11
1.1.3.4.4. Solución general	11
1.1.3.5. Condiciones iniciales y de frontera	11
1.1.3.5.1. Problema de valor inicial	11
1.1.3.5.2. Problema de valor de frontera	12
1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden	13
1.2.1. Ecuaciones de primer orden de variables separables	13
1.2.1.1. Método de solución	13
1.2.2. Ecuaciones homogéneas de primer orden	15
1.2.2.1. Función homogénea	16
1.2.2.2. Método de solución	16
1.2.3. Ecuaciones diferenciales exactas de primer orden	19
1.2.3.1. Condición de exactitud	19
1.2.3.2. Método de solución	19

1.2.3.3. Factor Integrante 22
1.2.4 Ecuaciones lineales de primer orden 25
1.2.5. Ecuación de Bernoulli 29
1.2.6. Teorema de existencia y unicidad (informativo) 32
1.2.6.1 Teorema de Picard 34

1.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior 36
1.3.1. Teoría básica de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior 36
1.3.1.1. Definición: combinación lineal 37
1.3.1.2. Definición: dependencia e independencia lineal 37
1.3.1.3. El Wronskiano 39
1.3.1.3.1. Teorema del Wronskiano 40
1.3.1.4. Operadores diferenciales 42
1.3.2. Ecuaciones lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes 43
1.3.2.1. Raíces reales distintas 44
1.3.2.2. Raíces reales repetidas 45
1.3.2.3. Raíces complejas 46
1.3.3. Ecuaciones lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes 48
1.3.3.1. Coeficientes indeterminados 48
1.3.3.1.1. Método de solución 49
1.3.3.2. Variación de parámetros 52
1.3.3.2.1. Método de solución 52
1.3.3.2.2. Generalización del método 56

1.4 Cálculo diferencial vectorial 60
1.4.1. Teoría básica de vectores 60
1.4.1.1. Definiciones 60
1.4.1.1.1. Vector 60
1.4.1.1.2. Vector de posición 60
1.4.1.1.3. Vectores unitarios 61
1.4.1.1.4. Vector tridimensional 62
1.4.1.1.4.1 Vectores unitarios tridimensionales 62
1.4.1.1.4.2. Componentes vectoriales 62
1.4.1.2. Álgebra vectorial 63
1.4.1.2.1. Producto escalar 66
1.4.1.2.1.1 Definición 67
1.4.1.2.1.2 Propiedades 67
1.4.1.2.1.3 Interpretación geométrica 68
1.4.1.2.1.4 Cálculo 68
1.4.1.2.2 El producto vectorial, ocruz 70
1.4.1.2.2.1 Interpretación geométrica 70

1.4.1.2.2.2 Propiedades 71
1.4.1.2.2.3 Cálculo 71
1.4.1.3. Productos triples 72
1.4.1.3.1 Producto triple escalar 72
1.4.1.3.2 Interpretación geométrica 73
1.4.2. Funciones vectoriales de una variable escalar 74
1.4.2.1 Funciones y campos 74
1.4.2.1.1 Función escalar 74
1.4.2.1.2 Campo escalar 75
1.4.2.1.3 Función vectorial 75
1.4.2.1.4 Campo vectorial 75
1.4.2.2 Cálculo para funciones vectoriales 76
1.4.2.2.1 Limite y continuidad 76
1.4.2.2.2 La derivada 78
1.4.2.2.3 Interpretación geométrica 78
1.4.2.3 Longitud de arco 82
1.4.3 Funciones vectoriales de más de una variable 86
1.4.3.1 Funciones de dos o más variables 86
1.4.3.2 Derivadas parciales 87
1.4.3.2.1 Derivadas parciales de funciones escalares 87
1.4.3.2.2 Interpretación geométrica 89
1.4.3.2.3 Derivadas parciales de orden superior 89
1.4.3.2.4 Derivadas parciales de una función vectorial 91

1.5 Operaciones vectoriales 93
1.5.1 Gradiente 93
1.5.2 Divergencia 93
1.5.3 Rotacional 94
1.5.4 Identidades del gradiente, divergencia y rotacional 95
1.5.4.1 Operador Laplaciano 96
1.5.5 Derivada direccional 98
1.5.5.1 Definición 98
1.5.5.2 Interpretación geométrica 99
1.5.5.3 Interpretación analítica 100
1.5.6 Regla de la cadena 101
1.5.7. Función definida implícitamente 103
1.5.7.1 Definición 103
1.5.7.2 Derivación implícita 104
1.5.7.2.1 Ecuación con dos variables 104
1.5.7.2.2 Ecuación con tres variables 105
1.5.7.2.3 Dos ecuaciones con cuatro variables 105
1.5.7.3 Teorema de la función implícita 108

1.6 Máximos y mínimos 110
1.6.1. Definición 110
1.6.2 Criterio de la segunda derivada 113

1.6.2.1 Determinante Hessiano 113
1.6.2.2 Criterio 113
1.6.3. Método de Lagrange 115
1.6.3.1 Interpretación geométrica 116
1.6.3.2 Método 117

1.7 Cálculo integral 120
1.7.1. Integral curvilínea 120
1.7.1.1 Interpretación geométrica y analítica 120
1.7.1.2 Propiedades 121
1.7.1.3 Cálculo de la integral curvilínea 122
1.7.1.4 Notación vectorial 123
1.7.1.5 Curva simple cerrada 124
1.7.1.5.1 Definición 124
1.7.1.5.2. Condición de independencia de trayectoria 125
1.7.2 Integral doble 127
1.7.2.1 Integral doble en regiones rectangulares 127
1.7.2.1.1 Definición 127
1.7.2.1.2 Propiedades 128
1.7.2.1.3 Interpretación de la integral doble como un volumen 128
1.7.2.1.4 Cálculo de la integral doble 129
1.7.2.2 Integrales doble para regiones acotadas no rectangulares 130
1.7.2.2.1 Definición 130
1.7.2.2.2 Cálculo 131
1.7.2.2.3 Interpretación de la integral doble como un área 133

Capítulo 2
Plan de estudios de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos

2.1 Estructura del plan de estudios 138
2.1.1 Perfil del egresado 138
2.1.2 Estructuración 140
2.1.2.1 Aspecto técnico 141
2.1.2.2 Aspecto social 142
2.1.2.3 Criterios de distribución de tiempos 142
2.1.3 Descripción del plan de estudios 146
2.1.3.1 Área químicobiológica 146
2.1.3.2 Área de trabajo experimental 147
2.1.3.3 Área socioeconómica 148
2.1.3.4 Área de ingeniería 149
2.1.3.5 Área Tecnológica 149

Capitulo 3
Alternativas de la asignatura Matemáticas III entorno al Plan de Estudios de la Licenciatura de Ingeniería en Alimentos

3.1 Relación horizontal y vertical de la asignatura Matemáticas III entorno al plan de estudios 151

3 2 Relación entre la asignalura Matemáticas III y las demás asignaturas del plan de estudios 151
3.2.1 Ejemplos de aplicación 153
3.2.1.1 A la Química 153
3.2.1.2 Al flujo de calor en estado estacionario 157
3.2.1.3 A problemas de crecimiento y decrecimiento 161
3.2.1.3.1 Ley de Newton para el enfriamiento 161
3.3 Alternativas de la asignatura Matematicas III en relación al plan de estudios 167

Conclusiones Generales 171

Bibliografía 173

Índice de diagramas

Diagrama 1.1 Estructura del plan de estudios: Aspecto técnico y social 141

Diagrama 1.2 Estructura del plan de estudios: Asignaturas 143

Diagrama 1.3 Plan de estudios de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos 144

Diagrama 1.4 Estructura del plan de estudios: Distribución por Áreas de vinculación con el contexto socioeconomico-nacional 147

Diagrama 1.5 Distribución del Laboratorio Único 147

Diagrama 1.6 Estructura del plan de estudios: seriación 152

Diagrama 1.7 Reestructuración del plan de estudios 168

Índice de figuras

FIGURA 1.1 FAMILIA DE CURVAS UNIPARAMETRICAS DE LA FUNCIÓN $y = Ce^{x^2}$ 9
FIGURA 1.2 FAMILIA DE CURVAS UNIPARAMETRICAS DE LA FUNCIÓN $y = Ce^{x}$ 33
FIGURA 1.3 SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA ECUACIÓN $dy/dx - xy^{1/2} = 0$ 34
FIGURA 1.4 TEOREMA DE PICARD 34
FIGURA 1.5A REPRESENTACIÓN DE UN VECTOR 60
FIGURA 1.5B VECTOR DE POSICIÓN 61
FIGURA 1.5C VECTOR EN UN PLANO TRIDIMENSIONAL 62
FIGURA 1.5D REPRESENTACIÓN DE VECTORES UNITARIOS TRIDIMENSIONALES 63
FIGURA 1.5E COMPONENTES VECTORIALES DE UN VECTOR 63
FIGURA 1.5F IGUALDAD VECTORIAL 64
FIGURA 1.5G SUMA VECTORIAL 65
FIGURA 1.5H RESTA VECTORIAL 65
FIGURA 1.5I MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR 66
FIGURA 1.5J INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO ESCALAR 68
FIGURA 1.5KA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO VECTORIAL 70
FIGURA 1.5KB INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO VECTORIAL 71
FIGURA 1.5L VOLUMEN DEL PARALELEPIPEDO = $|A \bullet (B \times C)|$ 73
FIGURA 1.6A FUNCIÓN ESCALAR 74
FIGURA 1.6B FUNCIÓN VECTORIAL 75
FIGURA 1.7 LIMITE DEL VECTOR $\lim_{t \to a} F(t) = L$ 76
FIGURA 1.8A DERIVADA DE LA FUNCIÓN $F(t)$ 78
FIGURA 1.8B INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL 79
FIGURA 1.8C INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL 79
FIGURA 1.9A ARCO FORMADO POR LA FUNCIÓN $R(t)$ EN EL INTERVALO $a \leq t \leq b$ 82
FIGURA 1.9B LONGITUD DE ARCO: PARTICIONES 83
FIGURA 1.9C LONGITUD DE ARCO: TRAZADO DE SEGMENTOS 83
FIGURA 1.9D LONGITUD DE ARCO 84
FIGURA 1.10 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES $z = f(x,y)$ 87
FIGURA 1.11A INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA PARCIAL DE LA FUNCIÓN $z = f(x,y)$ CON RESPECTO A x 90
FIGURA 1.11B INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA PARCIAL DE LA FUNCIÓN $z = f(x,y)$ CON RESPECTO A y 90
FIGURA 1.12 DIRECCIONES DEL PUNTOS (x,y) 98
FIGURA 1.13 REPRESENTACIÓN DEL VECTOR UNITARIO U CON EL PUNTO INICIAL EN $P(x,y)$ 99
FIGURA 1.14 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL 99
FIGURA 1.15 TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA 108

FIGURA 1.16 MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN $f(x,y)$ 110
FIGURA 1.17 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN $z = x^2 + y^2$ 111
FIGURA 1.18 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN $z = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$ 112
FIGURA 1.19 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 113
FIGURA 1.20 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL MÉTODO DE LAGRANGE 116
FIGURA 1.21 CURVA C DEFINIDA POR LOS PUNTOS AB 120
FIGURA 1.22 DESCOMPOSICIÓN DE LA CURVA C EN n-1 PUNTOS 120
FIGURA 1.23 INTEGRAL CURVILÍNEA 121
FIGURA 1.24 INTEGRAL CURVILÍNEA (CURVAS CONSECUTIVAS) 122
FIGURA 1.25 MALLA RECTANGULAR QUE SUBDIVIDE LA REGIÓN R EN PEQUEÑOS RECTÁNGULOS DE ÁREA $\Delta A = \Delta x \Delta y$ 128
FIGURA 1.26 APROXIMACIÓN DEL VOLUMEN DE UN SÓLIDO CON PRISMAS RECTANGULARES 129
FIGURA 1.27 FUNCIÓN $f(x,y)$, DEFINIDA EN UNA REGIÓN R ACOTADA, NO RECTANGULAR 131
FIGURA 1.28 MALLA RECTANGULAR QUE SUBDIVIDE EN CELDAS A LA REGIÓN R ACOTADA, NO RECTANGULAR 131
FIGURA 1.29 APLICACIÓN A LA QUÍMICA 153
FIGURA 1.30 FLUJO DE CALOR A TRAVÉS DE UNA PLACA DE MATERIAL SÓLIDO 157
FIGURA 1.31 FLUJO DE CALOR A TRAVÉS DE UN CILINDRO: CORTE TRANSVERSAL 157
FIGURA 1.32 FLUJO DE CALOR: FAMILIA DE CURVAS 158
FIGURA 1.33 FLUJO DE CALOR: SUPERFICIES ISOTÉRMICAS CONTIGUAS 159
FIGURA 1.34 TEMPERATURA DE LAS SOLUCIONES EN LOS TANQUES A, B Y DEL INGREDIENTES 164
FIGURA 1.35 ÍNDICE DE APROVECHAMIENTO DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS III 169

Resumen

En este trabajo se hizo el análisis de la importancia que tiene la asignatura Matemáticas III, en la formación del estudiante de la Licenciatura de Ingeniería en Alimentos que se imparte en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la Universidad Nacional Autónoma de México, se plantearon cuatro objetivos particulares, donde para el cumplimiento de los mismos, dicho trabajo fue dividido en tres capítulos.

El capítulo 1, contempla una revisión a los temas del programa de la asignatura, la cual se divide en dos temas centrales: Ecuaciones diferenciales y Cálculo vectorial.

En el capítulo 2, se analiza el papel que desempeña Matemáticas III, en la estructura del plan de estudios de dicha licenciatura.

Y finalmente, en el capítulo 3, mediante ejemplos sencillos y haciendo uso de algunos de los temas de la asignatura Matemáticas III, para la solución de los mismos, se analiza la importancia de está, frente al plan de estudios. Posteriormente, se establecen posibles alternativas para un mejor aprovechamiento de los conocimientos que engloban a dicha asignatura.

Introducción

Las Matemáticas son una disciplina fundamental en la formación del estudiante de Ingeniería, debido a que proporcionan las herramientas básicas que requiere esté, para el desempeño de sus actividades a nivel estudiantil y profesional. Naturalmente, las Matemáticas como ciencia tiene su propio lenguaje, cuya adecuada utilización esta determinada por las reglas de la lógica; todos los símbolos matemáticos (cifras para los números, letras para los números desconocidos, etcétera) ayudan al científico a abreviar su pensamiento, es por ello que dicha ciencia sirve como base del desarrollo de estudios científicos *(DERRICK, W. R.; GROSSMAN, S. L.; 3 - 8)*.

Sin embargo, sólo una parte del vocabulario de las Matemáticas ha sido utilizado por la ciencia, el resto de los conocimientos, las Matemáticas puras, permanecen en la esfera del pensamiento general humano sin aplicación alguna. Pero de manera creciente, algunas de las ramas de las Matemáticas que hasta hace poco eran consideradas sin utilidad aparente han adquirido importancia vital en diversos campos del conocimiento *(SPIEGEL, M.R.; 106 - 109)*.

A pesar de lo expuesto anteriormente, no es extraño encontrar un considerable porcentaje de estudiantes a los cuales se les dificultan y desagradan las Matemáticas. Tal pareciera incluso que existe una especie de "fobia generalizada" en las instituciones educativas donde se imparten tales asignaturas. En general, el temor o falta de interés por las Matemáticas por parte del estudiante se puede atribuir principalmente a la abstracción que implican, a la mínima aplicación que él observa en torno a su vida diaria y a la falta de conocimientos básicos; junto con ello al sistema escolar (temarios y seriación de asignaturas); y finalmente, a los profesores que, aunque tienen los conocimientos necesarios, no cuentan en ocasiones, con la capacidad para transmitir su importancia dentro del contexto o rama en que se encuentren.

El hecho es que, aún a nivel licenciatura, el estudiante no ha asimilado la importancia de las Matemáticas, por lo que trata de evitar toda relación con las asignaturas que envuelven a estás, dejando en ocasiones de cursarlas, debido a que supone que no tienen utilidad alguna, sin comprender que forman parte de un plan de estudios, el cual fue estructurado en base a la experiencia de profesionistas, investigadores y técnicos que estuvieron conscientes de las necesidades en cuanto a conocimientos se refieren para su mejor desempeño a nivel estudiantil y profesional.

Dentro del plan de estudios de la Licenciatura de Ingeniería en Alimentos que se imparte en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la Universidad Nacional Autónoma de México, se contemplan tres cursos obligatorios de Matemáticas que forman parte de las materias básicas de dicho plan.

Matemáticas I, asignatura que se imparte en el primer semestre de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos, los conocimientos adquiridos en dicho curso proporcionan al estudiante las bases teóricas y técnicas para el manejo e implementación de las Matemáticas como una herramienta durante sus estudios y desarrollo profesional.

En Matemáticas II, cursada también durante el primer semestre se tratan conceptos y métodos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable real, los cuales son una base para el curso posterior, Matemáticas III.

Y finalmente Matemáticas III, donde el estudiante aprende los fundamentos del Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de un vector y de funciones vectoriales de un vector, así como los conocimientos sobre Ecuaciones Diferenciales y su aplicación.

En base a lo anterior, es indudable la importancia con que deben contar las Matemáticas en la compresión de algunos temas tratados dentro de la licenciatura de Ingeniería de Alimentos. Lo que resulta ilógico es el hecho de que dentro del plan de estudios de dicha licenciatura no existe una continuidad en cuanto a seriación se refiere con respecto a la asignatura de Matemáticas III.

Por tanto, la importancia de este trabajo radica en que al realizar una revisión en torno al temario de programa de la asignatura Matemáticas III, se pueda hacer notar su utilidad e importancia dentro del plan de estudios de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos.

Objetivos

Objetivo General

Evaluar la importancia que tiene la asignatura Matemáticas III para la formación del estudiante de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos.

Objetivos Particulares

1. Realizar una revisión al temario del programa de la asignatura Matemáticas III.

2. Analizar el papel que desempeña la asignatura Matemáticas III, en la estructura del plan de estudios de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos.

3. Analizar la relación que existe entre la asignatura Matemáticas III y las demás asignaturas que comprenden el plan de estudios.

4. Proponer posibles alternativas de la asignatura Matemáticas III, para su mejor aprovechamiento.

Capítulo 1
Marco referencial de la asignatura: Matemáticas III

OBJETIVO DE LA ASIGNATURA (MATEMÁTICAS III)

Que el alumno aprenda los fundamentos del Cálculo diferencial e integral de funciones reales de un vector y de funciones vectoriales de un vector, así como que amplie sus conocimientos sobre Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, para ello, después de establecer formalmente los conceptos del cálculo de varias variables, se insistirá en las aplicaciones más usuales del campo *(DEPTO. DE CIENCIAS BIOLOGICAS, 59-60).*

En base al objetivo anterior, el temario del programa planteado para la asignatura fue el siguiente:

1. Cálculo diferencial vectorial.
2. Teorema del valor medio para funciones de varias variables.
3. Cálculo integral.
4. Ecuaciones diferenciales ordinarias.
5. Ecuaciones diferenciales lineales.

Se puede decir que existen dos temas principales dentro del programa, los cuales son Cálculo vectorial y Ecuaciones diferenciales; el orden en que aparecen los temas marca la pauta para que durante el curso se analice primero el tema de Cálculo Vectorial y posteriormente el de Ecuaciones Diferenciales. Para la revisión del temario de dicha asignatura en esté trabajo, el orden será invertido, es decir primero se analizará el tema de Ecuaciones diferenciales y luego el de Cálculo vectorial, esto es debido a que el estudiante de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos, previamente ha cursado la asignatura de Matemáticas II, contando así con los conocimientos básicos para una mejor comprensión del tema de Ecuaciones diferenciales y a la vez, para que esté se cuenta de la importancia de haber cursado la asignatura de Matemáticas II.

1.1. Ecuaciones diferenciales

Dentro de la asignatura de Matemáticas II, se consideró que dada la función $y=f(x)$, la derivada *

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

es también una función de x, la cual se encuentra mediante reglas apropiadas.

---

* Sea $y=f(x)$ una función cualquiera. La derivada de una función f con respecto a x, es otra función f' ("efe prima"), cuyo valor en cualquier número x está dado por:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

siempre y cuando dicho límite exista *(PURCELL E. J.; VARBERG, D., 94; ALLENDOERFER, C. B.; OAKLEY, C. O., 256).*

Ejemplo 1. Si $y = e^{x^2}$ entonces

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \text{ ** } \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} = 2xy \text{ *** } \qquad (1)$$

Uno de los problemas que se presentan dentro de la asignatura de Matemáticas III, es el que dada una ecuación tal como $dy/dx = 2xy$, se debe encontrar la función $y = f(x)$ que satisfaga la ecuación, es decir, se requiere encontrar la solución a dicha ecuación diferencial *(ZILL, D. G., 2)*.

1.1.1. Definición

Una **ecuación diferencial** es toda ecuación que involucra una o más derivadas de una función desconocida de una o más variables *(WYLIE, C.R.,1)*.

1.1.2. Clasificación

Las ecuaciones diferenciales se clasifican según su tipo, orden y grado.

1.1.2.1. Tipo. Ordinaria. Parcial

Ecuación diferencial ordinaria, se presenta cuando la función desconocida depende sólo de una variable.

Ecuación diferencial parcial, se presenta cuando la función desconocida depende de más de una variable *(SPIEGEL, M. R., 10-15)*.

Ejemplo 2. La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y \qquad (2)$$

es una ecuación diferencial ordinaria, en la cual y es la función desconocida, y depende de una sola variable x. Donde a x se le conoce como **variable independiente**, y **variable dependiente** a y, debido a que depende de x.

Ejemplo 3. La ecuación

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - 15x = 0 \qquad (3)$$

es una ecuación diferencial ordinaria, en la cual x es la función desconocida y depende de una sola variable t.

Ejemplo 4. La ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V \qquad (4)$$

** Función explícita: función en la cual la variable dependiente es expresada en términos de la variable independiente.

*** Función implícita: función en la cual se encuentran involucradas tanto a las variables dependiente como independiente para su expresión *(SPIEGEL, M. R., 6)*.

es una ecuación diferencial parcial, en la cual V es una función desconocida y depende de dos variables x e y.

1.1.2.2. Orden

El orden de una ecuación diferencial lo determina el número mayor de derivadas a calcular *(ROSS, S. L, 3)*.

Ejemplo 5. La mayor derivada a calcular que aparece en la ecuación (2), es dy/dx, es decir, la primera derivada de la función. Por lo tanto, es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Ejemplo 6. La mayor derivada a calcular que aparece en la ecuación (3), es d^2x/dt^2, es decir, la segunda derivada. Por lo tanto, es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Ejemplo 7. La mayor derivada a calcular que aparece en ecuación (4), es la segunda derivada de la función. Por lo tanto, es una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

1.1.2.3. Grado

Es el exponente de la derivada de mayor orden.

Ejemplo 8. El exponente de la derivada de mayor orden de la ecuación (2), dy/dx, es 1, es decir, es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, primer grado.

Ejemplo 9. El exponente de la derivada de mayor orden de la ecuación (3), $\left(d^2y/dx^2\right)^2$, es 2, es decir, es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, segundo grado.

Ejemplo 10. El exponente de la derivada de mayor orden de la ecuación (4), $\partial^2 V/\partial y^2$, es 1, es decir, es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, primer grado.

Adicionalmente a su orden y grado, es útil clasificar una ecuación diferencial ordinaria como una ecuación diferencial ordinaria lineal o no lineal de acuerdo al siguiente concepto:

1.1.2.4. Definición de ecuación diferencial lineal (ordinaria)

Una ecuación diferencial lineal es una ecuación que cumple con los siguientes requisitos:

- La variable dependiente y todas sus derivadas están elevadas a la potencia de uno.
- Los coeficientes y el término independiente deben ser constantes o estar en función de la variable independiente.

A partir de esta definición, se concluye que la ecuación diferencial lineal (ordinaria), puede ser escrita de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots\dots + a_1(x)\frac{d\,y}{dx} + a_0(x)y = f(x) \qquad (5)$$

Una ecuación diferencial que no puede ser escrita de la forma (5) se dice que es una **ecuación diferencial no lineal (ordinaria)** *(ZILL, D. G., 3)*.

Ejemplo 11. La ecuación (2) es un ejemplo de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, primer grado, lineal.

Ejemplo 12. La ecuación (3)

El exponente es diferente a 1

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - 15x = 0$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, segundo grado, no lineal.

Ejemplo 13. La ecuación

El coeficiente esta en función de variable dependiente.

El exponente es diferente a 1

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x-1)y = 0 \qquad (6)$$

es una ecuación diferencial ordinaria, de primer orden, segundo grado, no lineal.

1.1.2.5. Notación

Las expresiones y', y'', y''', $y^{(4)}$, ... , $y^{(n)}$ se usan frecuentemente para representar respectivamente la primera, segunda, tercera, cuarta, ..., enésima derivada de y con respecto a la variable independiente en consideración. Por lo tanto y'' representa d^2y/dx^2 si la variable independiente es x, pero representaría también d^2y/dp^2 si la variable independiente es p.

Se debe de tener en cuenta que el paréntesis se usa para representar a la enésima derivada, es decir $y^{(n)}$, distinguiendo así de la enésima potencia, y^n *(BRONSON, R., 2)*.

1.1.3 Soluciones

Tal como se mencionó, la meta es resolver ecuaciones diferenciales, es decir, encontrar su solución.

1.1.3.1 Definición

Una función f cualquiera, definida en algún intervalo I [****], es solución de una ecuación diferencial en dicho intervalo, si al sustituir dicha función en la ecuación diferencial, esta última se reduce a una identidad *(ZILL, D. G., 4)*, es decir, una solución de una ecuación diferencial es cualquier función que satisface la ecuación, esto es, la reduce a una identidad *(RAINVILLE, D. E., 15)*.

Ejemplo 14. La función definida por $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 x$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, es solución de *(AYRES, F. D., 8)*:

$$(1 - x\, ctg\, x)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (7)$$

si se considera que :

$$y = C_1\, sen\, x + C_2 x;$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \cos x + C_2; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -C_1\, sen\, x$$

y al sustituir en la (7), se obtiene:

$$(1 - x\, ctg\, x)(-C_1\, sen\, x) - x(C_1 \cos x + C_2) + (C_1\, sen\, x + C_2 x) = 0$$

$$\left[1 - x\left(\frac{\cos x}{sen\, x}\right)\right](-C_1\, sen\, x) - x(C_1 . \cos x + C_2) + (C_1\, sen\, x + C_2 x) = 0$$

$$-C_1\, sen\, x + xC_1\left(\frac{\cos x}{sen\, x}\right) sen\, x - xC_1 \cos x - xC_2 + C_1\, sen\, x + C_2 x = 0$$

$$-C_1\, sen\, x + xC_1 \cos x - xC_1 \cos x - xC_2 + C_1\, sen\, x + C_2 x = 0$$

$$0 = 0$$

por lo tanto la función $y = C_1\, sen\, x + C_2 x$ es solución de la ecuación (7).

Ejemplo 15. La función definida por $V = e^{3x}\, sen\, 2y$ es una solución de:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V \qquad (4)$$

puesto que:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3e^{3x}\, sen 2y, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 9e^{3x}\, sen 2y,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2e^{3x} \cos 2y, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -4e^{3x}\, sen 2y,$$

de modo que al sustituir se encuentra que:

[****] La naturaleza de I depende del contexto, I podría representar intervalos tales como: $a < x < b,\quad a \le x \le b,\quad 0 < x < \infty,\quad -\infty < x < \infty$, etcétera.

$$9\ell^{3x} sen\,2y + 2\left(-4\ell^{3x} sen\,2y\right) = \ell^{3x} sen\,2y$$
$$9\ell^{3x} sen\,2y - 8\ell^{3x} sen\,2y = \ell^{3x} sen\,2y$$
$$\ell^{3x} sen\,2y = \ell^{3x} sen\,2y$$

la cual es una identidad. Y por ello, $V = \ell^{3x} sen\,2y$ es una solución de la ecuación diferencial (4).

1.1.3.2 Origen

Uno de los problemas que se han mencionado anteriormente es que dada una ecuación diferencial se debe de hallar una solución a la misma; pero ahora surge un segundo problema, el cual se basa en que dada una solución, encontrar la ecuación diferencial que se satisface con la misma.

Para resolver dicho problema inverso, es decir, la obtención de la ecuación diferencial a partir de la solución, el procedimiento es el siguiente:

a) derivar la solución, hasta que el número de ecuaciones derivadas sea igual al número de constantes arbitrarias que se encuentran en la solución.

b) finalmente, se debe eliminar las constantes arbitrarias, empleando para ello a la solución y a las ecuaciones derivadas *(KELLS, L M., 8-10)*.

La ecuación diferencial, obtenida tendrá las siguientes características:

a) de orden igual al número de constantes arbitrarias presentes en la solución dada,

b) consistente con la solución,

c) libre de constantes arbitrarias *(RAINVILLE, D. E., 18)*.

Ejemplo 16. Obtener la ecuación diferencial cuya solución es:

$$y = C_1\ell^{-2x} + C_2\ell^{3x} \qquad (8a)$$

ya que son dos constantes arbitrarias involucradas en la ecuación (8a), esta se deriva dos veces (por lo que se presupone que la ecuación diferencial obtenida será de segundo orden) *(RAINVILLE, D. E., 19-21)*:

$$y' = -2C_1\ell^{-2x} + 3C_2\ell^{3x} \qquad (8b)$$
$$y'' = 4C_1\ell^{-2x} + 9C_2\ell^{3x} \qquad (8c)$$

la eliminación de C_1 de las ecuaciones (8b) y (8c) se obtiene al multiplicar a (8b) por 2 y sumar a (8c)

$$
\begin{aligned}
y''+2y' &= \left[4C_1\ell^{-2x}+9C_2\ell^{3x}\right]+\left[2\left(-2C_1\ell^{-2x}+3C_2\ell^{3x}\right)\right]\\
&= \left[4C_1\ell^{-2x}+9C_2\ell^{3x}\right]+\left[-4C_1\ell^{-2x}+6C_2\ell^{3x}\right]\\
&= 4C_1\ell^{-2x}+9C_2\ell^{3x}-4C_1\ell^{-2x}+6C_2\ell^{3x}\\
&= 15C_2\ell^{3x} \qquad \textbf{(8d)}
\end{aligned}
$$

la eliminación de C_1 de las ecuaciones (8a) y (8b) se obtiene al multiplicar a (8a) por 2 y sumar a (8b)

$$
\begin{aligned}
y'+2y &= \left[-2C_1\ell^{-2x}+3C_2\ell^{3x}\right]+\left[2\left(C_1\ell^{-2x}+C_2\ell^{3x}\right)\right]\\
&= \left[-2C_1\ell^{-2x}+3C_2\ell^{3x}\right]+\left[2_1\ell^{-2x}+2C_2\ell^{3x}\right]\\
&= -2C_1\ell^{-2x}+3C_2\ell^{3x}+2C_1\ell^{-2x}+2C_2\ell^{3x}\\
&= 5C_2\ell^{3x} \qquad \textbf{(8e)}
\end{aligned}
$$

la eliminación de C_2 de las ecuaciones (8d) y (8e), se obtiene al multiplicar a (8e) por -3 y sumar a (8d)

$$
\begin{aligned}
(y''+2y')+\left[-3(y'+2y)\right] &= \left[15C_2\ell^{3x}\right]+\left[-3\left(5C_2\ell^{3x}\right)\right]\\
(y''+2y')+(-3y'-6y) &= 15C_2\ell^{3x}-15C_2\ell^{3x}\\
y''+2y-3y'-6y &= 0\\
y''-y'-6y &= 0 \qquad \textbf{(8f)}
\end{aligned}
$$

en donde la ecuación (8f) es la ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución de la misma es la función (8a).

Ejemplo 17. Obtener la ecuación diferencial cuya solución es la función:

$$y = Cx^3 \qquad \textbf{(9a)}$$

se deriva una sola vez la función (9a) *(ZILL,D. G., 13)*, debido a que hay solamente una constante arbitraria involucrada (por lo que se presupone que la ecuación diferencial obtenida será de primer orden):

$$y' = 3Cx^2 \qquad \textbf{(9b)}$$

pero $C = y/x^3$, entonces al sustituir en (9b)

$$y' = 3\left(\frac{y}{x^3}\right)x^2 = 3\frac{y}{x}$$

es decir,

$$xy'-3y = 0 \qquad \textbf{(9c)}$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden, cuya solución es la función (9a).

1.1.3.3. Familia de curvas

Una función que contiene un parámetro *****, así como una o ambas coordenadas de un punto en el plano, representa una **familia de curvas uniparámetricas**, en donde a cada valor del parámetro le corresponde una curva *(RAINVILLE, D. E., 22-25)*.

Ejemplo 18. Encontrar la ecuación diferencial cuya solución es la función:

$$y = C\ell^{x^2} \qquad (10a)$$

dado que la función (10a), contiene un solo parámetro así como las variables x e y, entonces se puede considerar que dicha función representa una familia de curvas uniparamétricas (Figura 1.1) *(ZILL, D. G.,6)*.

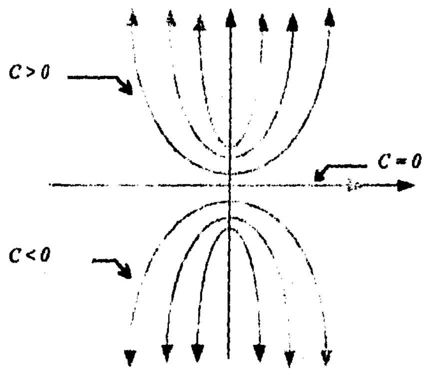


FIGURA 1.1 FAMILIA DE CURVAS UNIPARAMÉTRICAS DE LA FUNCIÓN $y = C\ell^{x^2}$.

Dado que en dicha función se encuentra involucrada solamente una constante arbitraria, entonces se obtiene la primera derivada:

$$y' = 2xC\ell^{x^2}$$

al considerar a la función (10a), se tiene que $C = y/\ell^{x^2}$, entonces al sustituir en la ecuación anterior

$$y' = 2x\left(\frac{y}{\ell^{x^2}}\right)\ell^{x^2}$$

$$y' = 2xy$$

$$y' - 2xy = 0 \qquad (10b)$$

en donde la ecuación (10b), es una ecuación diferencial de primer orden, la cual tiene como solución a la familia de curvas dada por la función (10a).

***** Variable auxiliar en una función de la cual se expresan las coordenadas de los puntos de una función.

1.1.3.4. Tipos de soluciones

Una ecuación diferencial tiene un número infinito de soluciones. Por sustitución directa en la ecuación (10b), se puede demostrar que cualquier curva o función de la familia uniparamétrica $y = C\ell^{x^2}$ (Figura 1.1), es solución de la ecuación.

Ejemplo 19. Para cualquier valor de C, la función $y = C\ell^{x^2}$, es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \qquad (10b)$$

si se tiene que $C = 5$, entonces:

$$y = 5\ell^{x^2}; \qquad \frac{dy}{dx} = 10x\ell^{x^2} \qquad (10c)$$

sustituyendo en (10b)

$$10x\ell^{x^2} - 2x(5\ell^{x^2}) = 0$$
$$0 = 0$$

si se tiene que $C = 0$, entonces:

$$y = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (10d)$$

sustituyendo en (10b)

$$0 - 2x(0) = 0$$
$$0 = 0$$

si se tiene que $C = -5$ entonces:

$$y = -5\ell^{x^2}; \qquad \frac{dy}{dx} = -10x\ell^{x^2} \qquad (10e)$$

sustituyendo en (2)

$$-10x\ell^{x^2} - 2x(-5\ell^{x^2}) = 0$$
$$0 = 0$$

de lo anterior se puede decir que tanto $y = 5\ell^{x^2}$, $y = 0$ y $y = -5\ell^{x^2}$ son soluciones de (10b). En forma general, al sustituir cualquier valor de C en la función (10a), es posible generar un número infinito de soluciones, ya que dichas soluciones forman parte de la familia de curvas uniparamétricas de la función (10a).

1.1.3.4.1. Solución trivial

Es un miembro de la familia uniparamétrica de soluciones, en la cual se considera que $C=0$, por lo tanto $y=0$, es decir a la función $y=0$, se le llama solución trivial *(ZILL,D.G.,5)*.

Ejemplo 20. La función (10d), es la solución trivial de la ecuación (10b).

1.1.3.4.2. Solución particular

Es aquella solución de la ecuación diferencial que no contiene parámetros arbitrarios. Para la obtención de dicha solución se requerirá elegir valores específicos del parámetro (o de los parámetros) en una familia de soluciones *(ZILL, D.G., 8)*.

Ejemplo 21. Dada $y = e^{x^2}$, la cual es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' - 2xy = 0$. Cuando *c=5, -5, y 0,* se obtienen $y = 5e^{x^2}$, $y = -5e^{x^2}$ y $y = 0$, las cuales son soluciones particulares, respectivamente.

1.1.3.4.3. Solución singular

Solución que no puede obtenerse al dar valores específicos a los parámetros en una familia uniparamétrica de soluciones *(ZILL, D. G., 8)*.

Ejemplo 22. La función $y = \left(x^2/4 + c\right)^2$, es una familia uniparamétrica de soluciones de

$$y' - xy^{1/2} = 0$$

donde al sustituir en la función, cuando *c = 0*:

$$y = \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = \frac{x^4}{16}$$

la cual resulta ser una solución particular. Mientras que la solución trivial $y = 0$, resulta ser una solución singular de la ecuación, ya que no puede obtenerse a partir dela familia uniparamétrica de soluciones.

1.1.3.4.4. Solución general

Se le denomina solución general de una ecuación diferencial de orden *n*, a la familia de soluciones que contiene *n* parámetros, los cuales tienen asociados valores apropiados y definidos *(KELLS, L. M., 8)*.

1.1.3.5. Condiciones iniciales y de frontera

Frecuentemente, en algunos problemas se encuentran involucradas ciertas ecuaciones diferenciales, las cuales están sujetas a condiciones dadas que la función desconocida debe satisfacer. Dichos problemas que las involucran son *(SPIEGEL, M.R., 10-12)*:

1.1.3.5.1. Problema de valor inicial

Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial, la cual esta sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones son condiciones iniciales *(SPIEGEL, M. R., 8)*.

Ejemplo 23. El problema $y''+2y'=e^x$, considerando que $y(\pi)=1$, y $y'(\pi)=2$, es un problema de valor inicial, debido a que las dos condiciones están dadas para $x=\pi$ *(BRONSON, R., 6)*.

1.1.3.5.2. Problema de valor de frontera

Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida especificada, en dos o más valores de la variable independiente *(SPIEGEL M. R., 8)*. Tales condiciones son condiciones de frontera

Ejemplo 24. El problema $y''+2y'=e^x$; cuando $y(0)=1$, y $y(1)=1$ es un problema de valor de frontera, porque las dos condiciones están dadas para diferentes valores de la variable independiente $x=0$, y $x=1$ *(BRONSON, R., 6)*.

1. 2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

La forma estándar de una ecuación diferencial de primer orden es

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \tag{1}$$

donde $F(x,y)$ puede ser expresada como un cociente de otras dos funciones $M(x,y)$ y $-N(x,y)$*. Por lo que la ecuación (1) puede ser escrita como $dy/dx = M(x,y)/-N(x,y)$ que es equivalente a la forma diferencial *(BRONSON, R., 11).*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2}$$

1.2.1 Ecuaciones de primer orden de variables separables

Dada una ecuación diferencial en la forma (2), donde $M(x,y)$ es una función que depende solamente de x y $N(x,y)$ es una función que depende solamente de y, la ecuación puede ser reducida a la siguiente forma:

$$g(x)dx + f(y)dy = 0 \tag{3}$$

entonces la ecuación se dice que es **separable**, o tiene sus variables separadas, ya que x e y se pueden separar de tal modo que x forme parte solamente del coeficiente de dx e y del dy.

1.2.1.1. Método de solución

El método de separación de variables para la solución de dichas ecuaciones depende de la posibilidad de escribir la ecuación (2) en la forma (3), donde las variables son separadas en dos términos *(RAINVILLE, D. E., 29-31; ZILL, D. G., 36-38).*

a) Si la ecuación diferencial es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{4}$$

dado que dx esta dividiendo, pasará multiplicando a $g(x)$. De esta manera se tendrán separadas las variables, tal como: $dy = g(x)dx$; cuya solución se obtiene al integrar de la siguiente forma:

$$\int dy = \int g(x)dx$$

una vez integrada la solución será:

$$y = \int g(x)dx + C \tag{5}$$

donde C es una constante arbitraria.

---

* El signo negativo se utiliza únicamente por conveniencia.

Ejemplo 1. Resolver *(ZILL, D. G., 36-38)*:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$$

al separar variables

$$dy = \left(1 + e^{2x}\right)dx$$

una vez integrada, queda como:

$$y = x + \tfrac{1}{2}e^{2x} + C$$

b) Si la ecuación diferencial es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)} \qquad (6)$$

al reordenar términos e integrar:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

la solución será:

$$\int f(y)dy + c_1 = \int g(x)dx + c_2$$

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + [c_2 - c_1]$$

dado que c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, entonces al restarse darán una nueva constante C. Por lo tanto la solución será:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + C \qquad (7)$$

Ejemplo 2. Encontrar la solución general de $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{2-y}$, y determinar la solución particular, si se tiene que $y(-3) = -4$ *(SPIEGEL, M. R., 35-37)*.

Al separar las variables de la ecuación e integrar se obtiene la solución general:

$$(x^2+1)dx + (y-2)dy = 0$$

$$\int (x^2+1)dx + \int (y-2)dy = 0$$

$$\tfrac{1}{3}x^3 + x + \tfrac{1}{2}y^2 - 2y = C$$

al sustituir en la solución general, la condición de $x = -3$, $y = -4$, para obtener la solución particular, se tiene que $C = 4$, por lo tanto:

$$\frac{x^3}{3} + x + \frac{y^2}{2} - 2y = 4$$

Ejemplo 3. **Resolver** *(SPIEGEL.M.R..39-41)*:

$$x\frac{dy}{dx}-y=2x^2y$$

Multiplicando por dx a la ecuación anterior y al agrupar términos:

$$xdy-ydx=2x^2ydx$$

$$(2x^2y+y)dx-xdy=0$$

$$y(2x^2+1)dx-xdy=0$$

al dividir por xy, la ecuación se reduce a:

$$\left(\frac{2x^2+1}{x}\right)dx-\frac{dy}{y}=0$$

al ser integrada

$$\int\left(\frac{2x^2+1}{x}\right)dx-\int\frac{dy}{y}=0$$

$$x^2+\ ln|x|-ln|y|\ =C$$

dicha solución también puede escribirse de la siguiente forma, empleando las leyes de los logaritmos:

$$x^2+ln\left|\frac{x}{y}\right|=C;\qquad ln\left|\frac{x}{y}\right|=C-x^2;$$

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\ell^{C-x^2};\qquad \left|\frac{x}{y}\right|=C\ell^{-x^2};$$

$$x=Cy\ell^{-x^2};\qquad y=Cx\ell^{x^2}$$

1.2.2. Ecuaciones homogéneas de primer orden

Una ecuación diferencial cuyas variables no es posible separar puede en ocasiones ser reducida, mediante una sustitución algebraica en otra ecuación cuyas variables sí son separables. Para que tal sustitución se pueda realizar es necesario que dicha ecuación sea homogénea.

Si una ecuación de primer orden en su forma diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, tiene la propiedad de que:

$$M(tx,ty)=t^nM(x,y)\qquad y\qquad N(tx,ty)=t^nN(x,y)$$

se dice que tiene coeficientes homogéneos, o que es una ecuación homogénea.

1.2.2.1. Función homogénea

Se dice que la función $f(x,y)$ es **homogénea de grado n** en x e y si, y sólo si, se puede expresar de la siguiente manera *(ZILL, D. G., 44-46)*:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \qquad (8)$$

Ejemplo 4. Determinar si la función es homogénea

$$f(x,y) = x - 3\sqrt{xy} + 5y$$

al evaluar

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= (tx) - 3\sqrt{(tx)(ty)} + 5(ty) \\ &= tx - 3\sqrt{t^2xy} + 5ty \\ &= t\left[x - 3\sqrt{xy} + 5y\right] \\ &= t f(x,y) \end{aligned}$$

en consideración de lo anterior, la función es homogénea de grado uno.

Ejemplo 5. Determinar si la función es homogénea

$$f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$$

al evaluar

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \sqrt{t^3x^3 + t^3y^3} \\ &= t^{3/2}\sqrt{x^3 + y^3} = t^{3/2} f(x,y) \end{aligned}$$

por lo tanto, la función es homogénea de grado $\frac{3}{2}$.

En muchos casos se puede reconocer de manera inmediata, si una función es homogénea, al examinar el grado de cada uno de los términos.

Ejemplo 6. Determinar si la función es homogénea

grado 1
grado 3 Grado 4

$$f(x,y) = 6xy^3 + x^2y^2$$

grado 2
grado 2 Grado 4

La función es homogénea de grado 4.

1.2.2.2. Método de solución

Dada la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

donde M y N tienen el mismo grado, se dice que es una ecuación diferencial homogénea, entonces se puede reducir a una ecuación de variables separables usando cualquiera de las sustituciones $y = ux$ o bien $x = vy$, en donde u y v son nuevas variables.

Si se elige $y = ux$, entonces $dy = udx + xdu$. Por lo tanto, la ecuación diferencial (2) se transforma en:

$$M(x,ux)dx + N(x,ux)[udx + xdu] = 0$$

Ahora bien, al considerar que dicha función es homogénea, entonces es posible escribir:

$$x^n M(1,u)dx + x^n N(1,u)[udx + xdu] = 0$$
$$x^n M(1,u)dx + x^n uN(1,u)dx + x^n xN(1,u)du = 0$$
$$x^n\left[M(1,u)dx + uN(1,u)dx + xN(1,u)du\right] = 0$$
$$M(1,u)dx + uN(1,u)dx + xN(1,u)du = 0$$

o bien $\left[M(1,u) + uN(1,u)\right]dx + xN(1,u)du = 0$, donde las funciones M y N ahora son dependientes de la nueva variable u. Donde al reacomodar términos:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)} = 0,$$

dicha ecuación ahora se puede resolver directamente, debido a que sus variables están separadas. La solución de la ecuación original se obtiene al sustituir $u = y/x$.

Ejemplo 7. Resolver *(ZILL, D. G., 46-48)*:

$$\left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 + xy\right)dy = 0$$

$M(x,y)$ y $N(x,y)$ son ambas funciones homogéneas de grado 2, entonces la ecuación diferencial es homogénea. Al sustituir $y = ux$ y $dy = udx$, $+ xdu$, reordenar e integrar, se obtiene:

$$\left(x^2 + u^2x^2\right)dx + \left(x^2 - ux^2\right)[udx + xdu] = 0$$
$$x^2dx + u^2x^2dx + ux^2dx - u^2x^2dx + x^3du - ux^3du = 0$$
$$x^2(1+u)dx + x^3(1-u)du = 0$$
$$\frac{1-u}{1+u}du + \frac{dx}{x} = 0$$
$$\int\left[-1 + \frac{2}{1+u}\right]du + \int\frac{dx}{x} = 0$$
$$-u + 2\ln|1+u| + \ln|x| + \ln|c| = 0$$

al sustituir $u = y/x$, y aplicando propiedades de los logaritmos, la solución puede ser escrita en la forma:

$$-\frac{y}{x} + 2\,ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + ln|x| + ln|c| = 0;$$

$$c(x+y)^2 = xe^{y/x}$$

La sustitución $x = vy$, aunque puede usarse para toda ecuación diferencial homogénea, en la práctica se utiliza cuando la función $M(x,y)$ tiene una estructura más simple que $N(x,y)$. A continuación se presenta un ejemplo en el cual se utiliza la sustitución $x = vy$.

Ejemplo 8. Resolver *(ZILL, D. G., 47-49)*:

$$2x^3y\,dx + \left(x^4 + y^4\right)dy = 0$$

$M(x,y)$ y $N(x,y)$ son ambas funciones homogéneas de grado 4, entonces la ecuación diferencial es homogénea. Puesto que la expresión asociada a dx es ligeramente más simple que la asociada a dy, se utilizará $x = vy$, por lo que la ecuación queda como:

$$2v^3y^4\left[v\,dy + y\,dv\right] + \left(v^4y^4 + y^4\right)dy = 0$$

al desarrollar y factorizar:

$$2v^4y^4dy + 2v^3y^5dv + v^4y^4dy + y^4dy = 0$$

$$3v^4y^4dy + 2v^3y^5dv + y^4dy = 0$$

$$\left[3v^4y^4 + y^4\right]dy + 2v^3y^5dv = 0$$

$$y^4\left[3v^4 + 1\right]dy + 2v^3y^5dv = 0$$

$$y^4\left\{\left[3v^4 + 1\right]dy + 2v^3y\,dv\right\} = 0$$

$$\left[3v^4 + 1\right]dy + 2v^3y\,dv = 0$$

la cual se reduce a:

$$\frac{2v^3}{3v^4 + 1}dv + \frac{dy}{y} = 0$$

una vez integrado, se obtiene:

$$\frac{1}{6}ln\left(3v^4 + 1\right) + ln|y| = ln|c_1|$$

sustituyendo v por x/y, y aplicando las propiedades de los logaritmos, la solución se reduce a:

$$3x^4y^2 + y^6 = C$$

1.2.3. Ecuaciones diferenciales exactas de primer orden

1.2.3.1. Condición de exactitud

Una ecuación diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

que tiene la propiedad de

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

se dice que es exacta *(BRONSON, R., 12).*

Ejemplo 9. Determinar si la ecuación $y^2dx + 2xydy = 0$, es exacta.

Se tiene

$$M(x,y) = y^2; \qquad N(x,y) = 2xy;$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

entonces, la ecuación es exacta *(ROSS, S. L.,28).*

Ejemplo 10. Determinar si la ecuación $ydx + 2xdy = 0$ es exacta.

Se tiene

$$M(x,y) = y; \qquad N(x,y) = 2x;$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 \neq 2 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

por lo tanto no es exacta *(ROSS, S. L.,29).*

Es necesario que la ecuación este en la forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, a fin de poder verificar la condición de exactitud, debido a que si no se encuentra en dicha forma, supóngase $M(x,y)dx = N(x,y)dy$, la verificación seria errónea.

1.2.3.2. Método de solución

El método de solución para las ecuaciones diferenciales cuando cumplen la condición de exactitud es la siguiente:

a) Verificar que la ecuación sea exacta.

b) Encontrar la $F(x,y)$, empleando

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad (9)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \qquad (10)$$

al emplear la ecuación (9) y despejar se tiene que:

$$\partial F(x,y) = M(x,y)\ \partial x$$

integrando ambos miembros con respecto a x, y manteniendo constante a y:

$$\int \partial F(x,y) = \int M(x,y)\ \partial x$$

$$F(x,y) = \int M(x,y)\ \partial x + g(y) \qquad (11)$$

donde $g(y)$ se considera como una constante.

Ahora, derivando la ecuación (11) con respecto a y:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\ \partial x + g(y)\right] \qquad (12)$$

e igualar la ecuación (12) a la ecuación (10), debido a que la $F(x,y)$, debe satisfacer a ambas ecuaciones (9) y (10), se tiene que:

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\ \partial x + g'(y)$$

despejando $g'(y)$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\ \partial x$$

al integrar con respecto a y:

$$g(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]dy$$

sustituyendo $g(y)$ en la ecuación (11), se tendrá que la solución de la ecuación (2) es:

$$F(x,y) = C$$

Ejemplo 11. Resolver la ecuación *(RAINVILLE, D. E., 45-47)*:

$$3x(xy-2)dx + (x^3+2y)dy = 0$$

Considerando que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

por lo que la ecuación es exacta.

Por lo tanto, su solución es $F(x,y) = C$, donde

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M = 3x^2y - 6x, \quad \ldots \quad (1)$$

y $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N = x^3 + 2y \quad ... \quad (II)$$

al determinar la $F(x,y)$ de la ecuación (I). Y despejar a la misma se tiene:

$$\partial F(x,y) = \left(3x^2y - 6x\right) \partial x$$

al integrar ambos miembros, con respecto a x, y manteniendo constante y; se obtiene:

$$\int \partial F(x,y) = \int \left(3x^2y - 6x\right) \partial x$$

$$F(x,y) = x^3y - 3x^2 + g(y), \quad ..... \quad (III)$$

Dado que la función $F(x,y)$ de la ecuación (III) debe también satisfacer la ecuación (II). Se deriva la ecuación (III) con respecto a y, se obtiene:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^3 + g'(y) \quad ..... \quad (IV)$$

Entonces, al igualar la ecuación (IV), con respecto a la ecuación (II). Y despejando $g'(y)$, se tiene:

$$x^3 + g'(y) = x^3 + 2y$$

$$g'(y) = 2y \quad ..... \quad (V)$$

Integrando la ecuación (V), y sustituyendo en (III), se obtiene la solución:

$$F(x,y) = x^3y - 3x^2 + y^2 = C$$

Ejemplo 12. Resolver la ecuación *(RAINVILLE, D. E., 48-50)*:

$$(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)dx - (x^2y + 2x)dy = 0$$

es decir:

$$(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)dx + (-x^2y - 2x)dy = 0$$

donde:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy - 2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

la ecuación es exacta. Por lo que la solución de la misma es $F(x,y)=C$, donde:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3, \quad ..... \quad (VI)$$

y $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -x^2y - 2x \quad ..... \quad (VII)$$

si se opta ahora por comenzar la determinación de la $F(x,y)$, a partir de la ecuación (VII). Al despejar e integrar con respecto a y, manteniendo constante a x, se obtiene:

$$F(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy + h(x). \quad \ldots\ldots \quad \text{(VIII)}$$

donde *h(x)*, es una constante arbitraria. Ahora derivando la ecuación (VIII), con respecto a *x*, igualando con respecto a la ecuación (VI), y finalmente despejando *h'(x)*, se obtiene:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -xy^2 - 2y + h'(x);$$

$$-xy^2 - 2y + h'(x) = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3;$$

$$h'(x) = 2x^3 + 3 \quad \ldots \quad \text{(IX)}$$

al integrar la ecuación (IX) y sustituyendo *h(x)* en la ecuación (VIII), se obtiene la solución:

$$F(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^4 + 3x = C$$

1.2.3.3 Factor integrante

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

que no cumple con la condición de exactitud, puede convertirse en una ecuación diferencial exacta, al ser multiplicada por una función β, llamada **factor integrante**, es decir:

$$\beta\,\partial M(x,y)dx + \beta\,\partial N(x,y)dy = 0 \qquad (13)$$

ahora es exacta, por lo que

$$\frac{\partial \beta M}{\partial y} = \frac{\partial \beta N}{\partial x}$$

al ser derivada

$$\beta\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \beta}{\partial y} = \beta\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

al agrupar términos

$$\beta\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \beta}{\partial x} - M\frac{\partial \beta}{\partial y} \qquad (14)$$

la cual se puede resolver considerando que:

a) β solo es función de *x*, por lo que la ecuación (14), se reduce a:

$$M\frac{\partial \beta}{\partial y} = 0 \qquad \text{y}$$

$$\beta\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

al separar variables

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\partial x}{N}=\frac{\partial\beta}{\beta} \tag{15}$$

y considerando que

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\partial x}{N}=f(x)dx$$

y como β, solo depende de la variable x, entonces

$$\frac{\partial\beta}{\beta}=f(x)dx$$

al integrar

$$\ln\beta=\int f(x)dx$$

despejando β,

$$\beta=e^{\int f(x)dx} \tag{16}$$

b) β sea solo función de y, por lo que la ecuación (14), queda

$$N\frac{\partial\beta}{\partial x}=0 \qquad \text{y}$$

$$\beta\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{M\,\partial\beta}{\partial y}.$$

separando variables

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\partial y}{-M}=\frac{\partial\beta}{\beta} \tag{17}$$

y al considerar que

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\partial y}{-M}=g(y)dy$$

dado que β solo depende de y:

$$\frac{\partial\beta}{\beta}=g(y)dy$$

integrando

$$\ln\beta=\int g(y)dy$$

despejando β

$$\beta=e^{\int g(y)dy} \tag{18}$$

Una vez obtenido el factor integrante se procede a multiplicar por la ecuación diferencial, la cual ahora se convertirá en exacta.

Ejemplo 13. Resolver $$x\frac{dy}{dx}+2y=3$$

al reordenar términos *(AYRES, F. D., 38-40)*:

$$x\frac{dy}{dx}=3-2y;\quad xdy=(3-2y)dx;\quad (3-2y)dx+(-x)dy=0$$

por lo que:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-2 \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

de modo que la ecuación no es exacta. Para la obtención del factor integrante correspondiente (β), se va a considerar que la función sólo depende de x. Empleando la ecuación (15), se obtiene la función $f(x)$

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}=\frac{db}{b}=f(x);\qquad \frac{(-2-(-1))}{-x}=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$$

sustituyendo $f(x)$, en la ecuación (16)

$$\beta=e^{\int 1/x\,dx}=e^{\ln x}=x.$$

Al multiplicar la ecuación original por el factor integrante es x, está queda como:

$$(3x-2xy)dx-x^2dy=0$$

donde:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-2x=\frac{\partial N}{\partial x}$$

por lo que la ecuación es ahora exacta. Dicha ecuación, resolviéndose por el método de ecuaciones exactas tiene una solución:

$$F(x,y)=x^2y-\frac{3x^2}{2}=C$$

Ejemplo 14. Resolver *(SPIEGEL, M. R., 51-53)*:

$$ydx+(3+3x-y)dy=0$$

por lo que:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1 \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x}=3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

de modo que la ecuación no es exacta.

Para la obtención del factor integrante correspondiente (β). Se considera que la función sólo depende de y. Empleando la ecuación (17), se obtiene la función $g(y)$:

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{-M}=\frac{\partial\beta}{\beta}=g(y)dy; \qquad \frac{(1-3)}{-y}=\frac{-2}{-y}=\frac{2}{y}$$

sustituyendo dicha función en la ecuación (18)

$$\beta=e^{\int\frac{2}{y}dy}=e^{2\ln y}=e^{\ln y^2}=y^2$$

Multiplicando la ecuación original por el factor integrante obtenido, se tiene que

$$y^3dx+(3y^2+3xy^2-y^3)dy=0.$$

Donde:
$$\frac{\partial M}{\partial y}=3y^2=\frac{\partial N}{\partial x}$$

por lo anterior se tiene que la ecuación es exacta. Ahora dicha ecuación se puede resolver por el método de ecuaciones exactas, teniendo como solución:

$$F(x,y)=xy^3+y^3-\frac{y^4}{4}=C$$

1.2.4 Ecuaciones lineales de primer orden

Dada ecuación lineal de orden n:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+.......+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$$

Si se recuerda, **linealidad** significa que todos los coeficientes son solamente funciones de la variable independiente x, y que la variable dependiente y, y todas sus derivadas están elevadas a la primera potencia. Ahora bien, cuando $n = 1$, se obtiene la ecuación lineal de primer orden:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x) \qquad (19)$$

Al dividir cada miembro de la ecuación entre $a_1(x)$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{a_0(x)}{a_1(x)}y=\frac{f(x)}{a_1(x)}$$

Al considerar que un cociente de dos funciones genera una nueva función, se tiene que la ecuación se puede expresar como:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=R(x) \qquad (20)$$

la cual se considera como la forma estándar para la ecuación lineal de primer orden, que al reorganizarse algebraicamente queda:

$$dy+[P(x)y-R(x)]dx=0$$

Al reordenar términos y verificar la condición de exactitud a la ecuación anterior:

$$[P(x)y-R(x)]dx+dy=0 \qquad (21)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=P(x) \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

En base a la desigualdad anterior, se puede decir que dicha ecuación no es exacta, a menos que $P(x) = 0$, en tal caso, la ecuación (20), pasaría a convertirse en una ecuación simple de variables separadas. Sin embargo la ecuación (21), posee un factor de integración que depende solamente de x, y que se puede hallar fácilmente. Por lo que se procederá a determinarlo:

La ecuación (21), se multiplica por $\beta(x)$, y se obtiene

$$[\beta(x)P(x)y-\beta(x)R(x)]dx+\beta(x)dy=0 \qquad (22)$$

Por definición, como ya se mencionó anteriormente, $\beta(x)$ es un factor integrante de la ecuación (22) si y sólo si la ecuación es exacta; es decir, si y sólo si:

$$\frac{\partial[\beta(x)P(x)y-\beta(x)R(x)]}{\partial y}=\frac{\partial\beta(x)}{\partial x}$$

por lo que esta condición se reduce a:

$$\beta(x)P(x)=\frac{d[\beta(x)]}{dx} \qquad (23)$$

En la ecuación (23), $P(x)$ es una función conocida, pero $\beta(x)$ es una función desconocida de x, la cual se trata de determinar. Por lo que dicha ecuación se puede escribir como:

$$\beta P(x)=\frac{d\beta}{dx}$$

en donde la variable dependiente es β y la variable independiente es x, donde $P(x)$ es una función conocida. Esta ecuación diferencial es separable,

$$\frac{d\beta}{\beta} = P(x)dx$$

al integrar se tiene que

$$ln\,\beta = \int P(x)dx$$

o bien,

$$\beta = \ell^{\int P(x)dx} \qquad (24)$$

Por lo tanto, la ecuación (20), posee un factor de integración de la forma (24). Al multiplicar (20) por (24), se tiene:

$$\ell^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + \ell^{\int p(x)dx}P(x)y = \ell^{\int p(x)dx}R(x)$$

lo cual es equivalente a:

$$\frac{d}{dx}\left(y\ell^{\int p(x)dx}\right) = R(x)\ell^{\int p(x)dx} \qquad (25)$$

Al utilizar la regla del cálculo para la diferenciación de un producto, se reduce a:

$$\frac{d}{dx}\left(y\ell^{\int p(x)dx}\right) = y\frac{d}{dx}\ell^{\int p(x)dx} + \ell^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx}$$

$$= y\left(\ell^{\int p(x)dx}P(x)\right) + \ell^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx}$$

$$= \ell^{\int p(x)dx}P(x)y + \ell^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx}$$

De la ecuación (25), se obtiene por integración la solución

$$y\,\ell^{\int p(x)dx} = \int R(x)\,\ell^{\int p(x)dx}dx + C$$

y finalmente despejando y

$$y = \ell^{-\int p(x)dx}\left[\int R(x)\,\ell^{\int p(x)dx}dx + C\right] \qquad (26)$$

A la ecuación anterior, se le denomina **solución general de una ecuación diferencial de primer orden** *(ROSS, S. L., 47-49; ZILL, D. G., 58-61).*

Ejemplo 15. Resolver *(SPIEGEL, M. R., 53-55):*

$$\frac{dy}{dx}+5y=50$$

Dado que la ecuación se encuentra en la forma estándar de una ecuación lineal de primer orden, y con base en la ecuación (20), $P=5$ y $R=50$
Aplicando la ecuación llamada solución general (26):

$$y=\ell^{-\int p(x)dx}\left[\int R(x)\ell^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

y sustituyendo:

$$y=\ell^{-\int 5dx}\left[\int 50\ell^{\int 5dx}dx+C\right]$$

$$y=\ell^{-5x}\left[50\int \ell^{5x}dx+C\right]$$

$$y=\ell^{-5x}\left[50(\frac{1}{5}\ell^{5x})+C\right]$$

$$y=\ell^{-5x}\left(10\ell^{5x}+C\right)$$

$$y=10+C\ell^{-5x}$$

Ejemplo 16. Resolver *(SPIEGEL, M. R., 55)*

$$x\frac{dy}{dx}+2y=3$$

Multiplicando todo por $1/x$ para obtener la forma estándar de la ecuación lineal de primer orden, se obtiene

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{3}{x}$$

Aplicando la ecuación, llamada solución general (26)

$$y=\ell^{-\int p(x)dx}\left[\int R(x)\ell^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

y sustituyendo:

$$y = \ell^{-\int \frac{2}{x} dx}\left[\int \frac{3}{x} \ell^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C\right]$$

$$y = \ell^{-2\ln x}\left[3\int \ell^{2\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)dx + C\right]$$

$$y = \ell^{\ln x^{-2}}\left[3\int \ell^{\ln x^2}\left(\frac{1}{x}\right)dx + C\right]$$

$$y = x^{-2}\left[3\int x^2\left(\frac{1}{x}\right)dx + C\right]$$

$$y = x^{-2}\left[3\int x dx + C\right]$$

$$y = x^{-2}\left[3\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C\right]$$

$$y = \frac{3}{2} + Cx^{-2}$$

1.2.5. Ecuación de Bernoulli

A una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = R(x)y^n \qquad (27)$$

en donde n es un número real cualquiera, se le denomina **ecuación de Bernoulli** [*] *(ZILL, D.G., 66)*. Si $n = 0$ o $n = 1$ en (27), las variables son separables, es por ello que esté método de solución considera que $n \neq 0$ y $n \neq 1$. Al reordenar términos en la ecuación (27), esta puede ser expresada en la forma:

$$dy + P(x)ydx = R(x)y^n dx$$

al dividir entre y^n

$$y^{-n}dy + P(x)y^{1-n}dx = R(x)dx \qquad (28)$$

dado que la diferencial de y^{1-n} es $(1-n)y^{-n}dy$, de tal manera que la ecuación (28) puede simplificarse haciendo:

$$y^{1-n} = z$$

por lo cual:

$$(1-n)y^{-n}dy = dz$$

De modo que la ecuación (28) se reduce a:

$$\frac{dz}{(1-n)} + P(x)zdx = R(x)dx$$

[*] En honor al matemático suizo Jacob Bernoulli (1674-1705).

al multiplicar por (1 - n)

$$dz+(1-n)P(x)zdx=(1-n)R(x)dx$$

al reordenar:

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)R(x) \qquad (29)$$

la cual es una ecuación lineal en su forma diferencial (20) *(RAINVILLE D. E., 80).*

Ejemplo 17. Resolver la ecuación*(RAINVILLE D. E., 80):*

$$y(6y^2-x-1)dx+2xdy=0$$

al reagrupar los términos en base a las potencias de y, se tiene que:

$$2xdy-(x+1)ydx+6y^3dx=0$$

es decir,

$$2xdy-(x+1)ydx=-6y^3dx \qquad (\mathrm{I})$$

en donde la ecuación (I) es una ecuación de Bernoulli, ya que involucra términos que contienen, respectivamente a dy, y y y^n (en donde $n = 3$). Por lo tanto al dividir cada uno de los términos de la ecuación (I) entre y^3, se obtiene:

$$2xy^{-3}dy-(x+1)y^{-2}dx=-6dx \qquad (\mathrm{II})$$

esta ecuación es lineal en y^{-2}, así que:

$$z=y^{-2}$$
$$dz=-2y^{-3} \qquad (\mathrm{III})$$

de modo que al sustituir (III) en (II):

$$2x\left(\frac{dz}{-2}\right)-(x+1)zdx=-6dx$$
$$-xdz-(x+1)zdx=-6dx$$

al dividir entre *(-x):*

$$dz+(x+1)x^{-1}zdx=6x^{-1}dx$$
$$dz+(1+x^{-1})zdx=6x^{-1}dx \qquad (\mathrm{IV})$$

la cual es una ecuación lineal en su forma diferencial (20), por lo que al aplicar la ecuación de la solución general (26) se tiene que:

$$z=\ell^{-\int(1+x^{-1})dx}\left[\int 6x^{-1}\ell^{\int(1+x^{-1})dx}dx+C\right]$$

$$z=\ell^{[-x-\ln x]}\left[6\int x^{-1}\ell^{x+\ln x}dx+C\right]$$

$$z = \frac{1}{x\ell^{x}}\left[6\int x^{-1}\ell^{x}x\,dx + C\right]$$
$$z = \frac{1}{x\ell^{x}}\left[6\int \ell^{x}dx + C\right]$$
$$z = \frac{1}{x\ell^{x}}\left[6\ell^{x} + C\right]$$
$$x\ell^{x}z = 6\ell^{x} + C$$

dado que $z = y^{-2}$, al sustituir y reordenar la solución de dicha ecuación, se reduce a:

$$xy^{-2}\ell^{x} = 6\ell^{x} + C$$
$$xy^{-2} = 6 + C\ell^{-x}$$
$$x = \left[\frac{6 + C\ell^{-x}}{y^{-2}}\right]$$
$$x = \left(6 + C\ell^{-x}\right)y^{2}$$
$$y^{2} = \frac{x}{\left(6 + C\ell^{-x}\right)}$$
$$y = \sqrt{\frac{x}{\left(6 + C\ell^{-x}\right)}}$$

Ejemplo 18. Resolver $\frac{dy}{dx} + xy = xy^{2}$, es decir *(BRONSON, R., 37)*:

$$dy + xydx = xy^{2}dx \qquad (\text{I})$$

en donde la ecuación (I) es una ecuación de Bernoulli, ya que involucra términos que contienen, respectivamente a dy, y y y^{n} (en donde $n = 2$). Por lo tanto al dividir cada uno de los términos de la ecuación (I) entre y^{2}, se obtiene:

$$y^{-2}dy + xy^{-1}dx = xdx \qquad (\text{II})$$

dado que la ecuación (II) es lineal en y^{-1}, así que:

$$z = y^{-1}$$
$$dz = -y^{-2} \qquad (\text{III})$$

de modo que al sustituir (III) en (II):

$$-dz + xzdx = xdx$$

al dividir entre *(-1)*:

$$dz + (-x)zdx = -xdx \qquad (\text{IV})$$

la cual es una ecuación lineal en su forma diferencial (20), por lo que al aplicar la ecuación de la solución general (26) se tiene que:

$$z = \ell^{\int -x dx}\left[\int (-x)\ell^{\int -x dx} dx + C\right]$$

$$z = \ell^{\frac{1}{2}x^2}\left[\int -x\ell^{-\frac{1}{2}x^2} dx + C\right]$$

$$z = \ell^{\frac{1}{2}x^2}\left[\ell^{-\frac{1}{2}x^2} + C\right]$$

$$z = 1 + C\ell^{\frac{1}{2}x^2}$$

dado que $z = y^{-1}$,

$$y = \frac{1}{1 + C\ell^{\frac{1}{2}x^2}}$$

en donde la ecuación anterior es la solución de (I).

1.2.6. Teorema de existencia y unicidad (informativo)

A menudo interesa resolver una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1)$$

sujeta a la condición adicional $y(x_o) = y_o$, donde x_o es un número en un intervalo I y y_o es un número real arbitrario. Al problema

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad \text{donde} \quad y(x_0) = y_0 \qquad (30)$$

se le llama problema de valor inicial. Y a la condición adicional, se le conoce como condición inicial *(ZILL, D. G., 32).*

> *Ejemplo 19.* **La función $y = C\ell^x$, es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' = y$ en el intervalo $-\infty < x < \infty$. Si se tiene como condición inicial $y(0) = 3$, entonces al sustituir $x = 0$, y $y = 3$ en la función, queda como $3 = C\ell^0 = C$. Por lo consiguiente, como se muestra en la FIGURA 1.2, $y = 3\ell^x$, es una solución particular de la ecuación diferencial**
>
> $$y' = y$$
> $$y(0) = 3$$
>
> **Si la condición inicial fuera $y(1) = 3$, se habría obtenido $C = 3\ell^{-1}$, por lo tanto $y = 3\ell^{x-1}$. La gráfica asociada a esta función también se indica en la FIGURA 1.2.**

Al considerar un problema de valor inicial (30), surgen dos preguntas fundamentalmente tales como: si la solución en efecto existe y si dicha solución es única *(EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E., 20).*

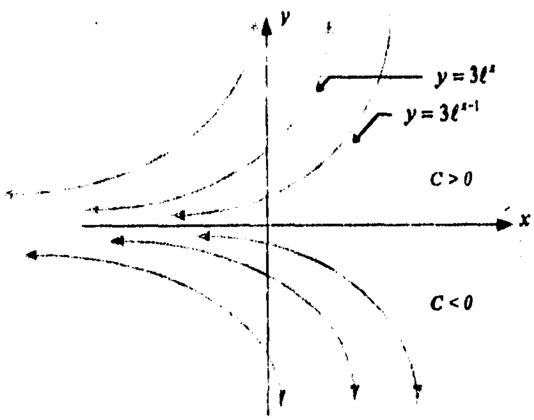


FIGURA 1.2 FAMILIA DE CURVAS DE LA FUNCIÓN $y = C\ell^x$

Con respecto a la segunda cuestión el siguiente ejemplo muestra que puede existir más de una solución, si no se imponen más condiciones a la función *f(x,y)*.

> ***Ejemplo 20.*** **La FIGURA 1.3, muestra que el problema de valor inicial, el cual se encuentra asociado a la ecuación diferencial:**
>
> $$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0 \quad \textbf{donde} \quad y(0) = 0$$
>
> **tiene al menos dos soluciones en el intervalo** $-\infty < x < \infty$**. Las funciones**
>
> $$y = 0 \quad \textbf{y} \quad y = \frac{x^4}{16}$$
>
> **satisfacen a la ecuación diferencial y cumplen con la condición inicial de** *y(0)=0* ***(ZILL, D. G., 33).***

Las cuestiones relativas a existencia y unicidad afectan al estudio de fenómenos físicos cuyo comportamiento esta basado en un modelo matemático propuesto, el cual involucra a ecuaciones diferenciales con ciertas condiciones iniciales. Debido a que en ocasiones sus soluciones no son únicas; esto hace surgir de inmediato la pregunta de si el modelo matemático representa adecuadamente al fenómeno físico ***(EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E., 20).*** **Es por ello que a menudo se desea saber antes de atacar un problema de valor inicial si es que existe una solución, y cuando existe, saber si es la única solución del problema. El siguiente teorema, debido a Picard *, da condiciones suficientes para la existencia de una solución única de (30).**

---

* **Charles Emile Picard (1856-1941), matemático francés que realizo aportaciones notables en los campos de las ecuaciones diferenciales y de la variable compleja.**

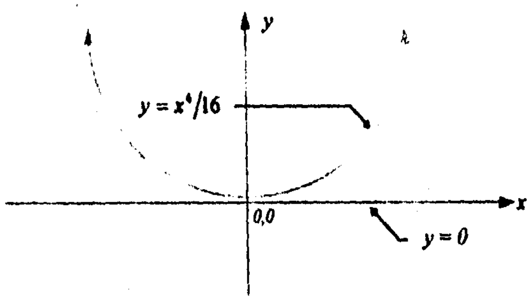


FIGURA 1.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES ASOCIADAS A LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $dy/dx - xy^{1/2} = 0$

1.2.6.1. Teorema de Picard

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por los intervalos $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior (FIGURA 1.4). Si $f(x,y)$ y $\partial f / \partial y$ son continuas en R, entonces existe un intervalo I con centro en x_0 y una única función $y(x)$ definida en I que satisface el problema de valor inicial *(ZILL, D. G.,33)*.

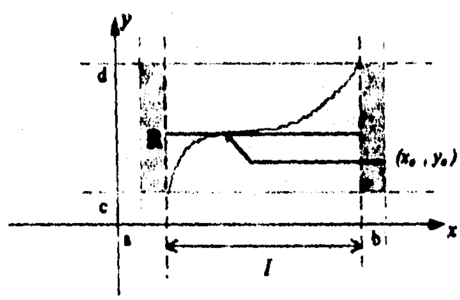


FIGURA 1.4 TEOREMA DE PICARD

El anterior teorema se puede resumir en otras palabras como:

Dada una ecuación diferencial de primer orden, si satisface las siguientes condiciones:

1. $F(x,y)$ es real, finita, simple valorada y continua en todos los puntos de una región R del plano xy (que puede contener todos los puntos).

2. $\partial F(x,y)/\partial y$ es real, finita, simple valorada y continua en R.

Entonces existe una y solo una función f en R. que cumple dicha condición inicial *(SPIEGEL. M. R.,24).*

Ejemplo 21. En el ejemplo anterior, se observó que la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0 \quad \text{donde} \quad y(0) = 0$$

tiene al menos dos soluciones cuyas gráficas pasan por (0,0).
Expresando la ecuación en la forma $dy/dx = xy^{1/2}$ se puede escribir

$$f(x,y) = xy^{1/2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

se hace notar que ambas funciones son continuas en el semiplano superior definido por $y > 0$. Considerando el teorema de Picard, se concluye que para cualquier punto (x_o, y_o), $y_o > 0$, por ejemplo (0,1), existe un intervalo en torno a x_o en el cual la ecuación diferencial dada tiene una solución única.

Ejemplo 22. El teorema de existencia y unicidad garantiza que existe un intervalo en torno a $x = 0$ en el cual $y = 3e^x$ es la única solución del problema de valor inicial del *ejemplo 19:*

$$y' = y$$
$$y(0) = 3$$

Esto se deduce de que $f(x,y) = y$ y $\partial f/\partial y = 1$ son continuas en todo el plano xy. Además se puede demostrar que este intervalo es $-\infty < x < \infty$.

1.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior

1.3.1 Teoría básica de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Una ecuación diferencial lineal de orden n tiene la forma siguiente:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=F(x) \quad (1)$$

donde $a_0(x)$, $a_1(x)$, ... , $a_n(x)$, y $F(x)$ dependen sólo de x y no de y.

Si $n=2$, entonces (1) se convierte en:

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=F(x) \quad (2)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Si todos los coeficientes $a_0(x)$, $a_1(x)$, ... , $a_n(x)$, en (1) son constantes, esto es, no dependen de x, la ecuación es llamada **ecuación diferencial con coeficientes constantes**. Sin embargo, si no todos los coeficientes son constantes, es decir, que existen algunos coeficientes que dependen de x, la ecuación es llamada **ecuación diferencial lineal con coeficientes variables**.

Ejemplo 1. Las ecuaciones *(ROSS, S. L., 102)*:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=4\,sen\,3x$$

$$3y'''+2y''-4y'+8y=3e^{-x}+5x^2$$

son ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de segundo y tercer orden respectivamente.

Ejemplo 2. Las ecuaciones *(SPIEGEL, M. R., 167)*:

$$xy''-2y'+x^2y=0$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}+xy=0$$

son ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables de segundo y cuarto orden respectivamente.

Al segundo miembro $F(x)$ se le denomina **término independiente**. Si $F(x)$ es idénticamente cero, la ecuación (1), se reduce a:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0 \quad (3)$$

la cual es llamada **ecuación diferencial lineal homogénea de orden n.**

La ecuación (2), para cuando $n=2$, esta se reduce a la correspondiente ecuación lineal homogénea de segundo orden *(ROSS, S. L., 102)*.

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0 \qquad (4)$$

Ejemplo 3. Las ecuaciones dadas, dentro del *ejemplo 1*, son ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, no homogéneas de segundo y tercer orden respectivamente; debido a que en ambos casos el término independiente es $F(x)\neq 0$.

Ejemplo 4. Las ecuaciones dadas, dentro del *ejemplo 2*, son ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, homogéneas de segundo y cuarto orden respectivamente; debido a que el término $F(x)=0$.

1.3.1.1 Definición: combinación lineal

Dado que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son n funciones, las cuales son n soluciones de la ecuación (3), y que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son n constantes, entonces la expresión

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n$$

es también una solución de la ecuación (3), a la cual se le llama **combinación lineal** de $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Ejemplo 5. Considerando que $sen\, x$ y $cos\, x$ son soluciones de:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

en base al concepto de combinación lineal, $C_1 sen\, x + C_2 cos\, x$, es también una solución para cualquiera constantes c_1 y c_2. Por ejemplo, la combinación lineal

$$5\, sen\, x + 6\, cos\, x$$

es solución *(ROSS, S. L., 106)*.

Ejemplo 6. Dado que e^x, e^{-x} y e^{2x} son soluciones de

$$\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+2y=0,$$

en base al concepto de la combinación lineal $c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}$, es también una solución para cualquiera constantes c_1, c_2, y c_3. Por ejemplo, la combinación lineal

$$2e^x-3e^{-x}+\tfrac{2}{3}e^{2x}$$

es solución *(DERRICK, W. R.; GROSSMAN, S. I., 116)*.

1.3.1.2 Definición: dependencia e independencia lineal

Las n funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ se dice que son **linealmente dependientes** en el intervalo $a\le x\le b$, si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, en donde no todas tengan que ser cero

$$c_1\neq c_2\neq\cdots\neq c_n=0$$

para que se cumpla:

$$c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_n f_n(x)=0$$

en el intervalo $a \le x \le b$.

En particular, dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, son linealmente dependientes, si existen constantes c_1 y c_2, al menos una diferente de cero, para que

$$c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)=0$$

en el intervalo $a \le x \le b$

Ejemplo 7. Las funciones x y $2x$ son linealmente dependientes en el intervalo $0 \le x \le 1$. Esto sucede porque existen conatantes c_1 y c_2, no ambas cero, tales que

$$c_1 x + c_2(2x)=0$$

para toda x, del intervalo $0 \le x \le 1$. *(ROSS, S. L. 106.108).*
Por ejemplo, $c_1 = 2$, $c_2 = -1$.

Ejemplo 8. Las funciones $sen\, x$, $3\, sen\, x$ y $-sen\, x$ son linealmente dependientes en el intervalo $-1 \le x \le 2$. Esto sucede porque existen constantes c_1, c_2, y c_3, *no todas cero*, tales que

$$c_1\, sen\, x + c_2(3 sen\, x) + c_3(-sen\, x)=0$$

para toda x, del intervalo $-1 \le x \le 2$. Por ejemplo $c_1=1$ $c_2=1$, $c_3=4$.

De la misma manera, se dice que un conjunto de n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ es linealmente independientes, en el intervalo $a \le x \le b$, si para que se cumpla la relación

$$c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_n f_n(x)=0$$

para toda x, dentro del intervalo $a \le x \le b$, implique que:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

En otras palabras, la única combinación lineal de $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ que es idénticamente cero en el intervalo $a \le x \le b$ es la combinación trivial

$$(0)f_1+(0)f_2+\ldots+(0)f_n$$

En particular, dos funciones f_1 y f_2, son linealmente independientes en el intervalo $a \le x \le b$ si la relación:

$$c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)=0$$

para toda x, en el intervalo $a \le x \le b$, implica que $c_1 = c_2 = 0$.

Ejemplo 9. Las funciones x y x^2 son linealmente independientes en el intervalo $a \le x \le b$, puesto que $c_1 x + c_2 x^2 = 0$, implica que ambas $c_1=0$ y $c_2=0$, para que se cumpla *(ROSS, S. L., 106-108).*

1.3.1.3 El Wronskiano

Si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de *n-ésimo* orden

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0 \qquad (3)$$

en $a \le x \le b$, entonces el conjunto $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ se llama conjunto fundamental de soluciones de (3) y la función f, queda definida por:

$$f(x)=c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\cdots+c_n f_n(x), \qquad a \le x \le b,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias, a la cual se le llama solución general de (3), en $a \le x \le b$.

Por tanto, si se pueden hallar n soluciones linealmente independientes de (3), podemos de inmediato escribir la solución general de (3) como una combinación lineal general de estas n soluciones.

Para el caso de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$a_0(x)\frac{d^2 y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0 \qquad (4)$$

el conjunto fundamental de solución, consta de dos soluciones linealmente independientes, es decir, si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ forman un conjunto fundamental de la ecuación (4), en el intervalo $a \le x \le b$, entonces la solución general queda definida por:

$$y=c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)$$

donde c_1 y c_2, son constantes arbitrarias.

Ejemplo 10. Dado que $sen\, x$ y $cos\, x$ son soluciones de:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}+y=0$$

para toda x, debido a que dichas dos soluciones son linealmente independientes *(DERRICK, W. R.; GROSSMAN, S. Y., 118)*. En consecuencia, constituyen un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial dada, y su solución general se puede expresar como la combinación lineal

$$c_1\, sen\, x + c_2 \cos x,$$

donde c_1 y c_2, son constantes arbitrarias, es decir:

$$y = c_1\, sen x + c_2 \cos x,$$

Ejemplo 11. Las soluciones ℓ^{x}, ℓ^{-x} y ℓ^{2x} de:

$$\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+2y=0$$

las cuales son linealmente independientes para toda x. Por consiguiente, ℓ^{x}, ℓ^{-x} y ℓ^{2x} constituyen un conjunto fundamental de la ecuación diferencial dada, y su solución general se puede expresar como la combinación lineal

$$c_1\ell^{x}+c_2\ell^{-x}+c_3\ell^{2x},$$

donde c_1, c_2, y c_3, son constantes arbitrarias. *(ROSS, S. L., 108)*, es decir:

$$y=c_1\ell^{x}+c_2\ell^{-x}+c_3\ell^{2x}$$

Un criterio sencillo para determinar si n soluciones de (3), son o no **linealmente independientes, es mediante el Teorema del Wronskiano:**

1.3.1.3.1 Teorema del Wronskiano

Sean n funciones reales $f_1, f_2, \ldots, f_n$, cada una de las cuales tiene *(n-1)énesima derivada* en un intervalo real $a \le x \le b$. El determinante

$$W(f_1,f_2,\ldots,f_n)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

en el que las primas indican derivadas, se llama Wronskiano de estas n funciones. Se observa que $W(f_1 f_2 \ldots f_n)$, es en sí mismo una función real definida en $a \le x \le b$. Su valor en x está representado por $W(f_1 f_2 \ldots f_n)(x)$ o bien, por $W[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$.

Las n soluciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de la ecuación lineal homogénea de *n-ésimo orden* (3), son linealmente independientes en $a \le x \le b$ si y sólo si el Wronskiano de $f_1 f_2 \ldots f_n$ es diferente de cero para alguna x del intervalo $a \le x \le b$.

De esta manera, al encontrarse las n soluciones de (3), se puede aplicar el teorema del Wronskiano para determinar si son o no linealmente independientes. Si son linealmente independientes, entonces se puede formar la solución general como una combinación lineal de estas n soluciones linealmente independientes.

En el caso de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0 \qquad (4)$$

el Wronskiano de dos funciones f_1 y f_2 es el determinante de segundo orden

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = (f_1 \cdot f_2') - (f_1' \cdot f_2)$$

Con base en el Teorema del Wronskiano, dos soluciones f_1 y f_2 de (4) son linealmente independientes en $a \le x \le b$, si y sólo si su Wronskiano es diferente de cero para alguna x de $a \le x \le b$. Por lo tanto, si $W[f_1(x), f_2(x)] \neq 0$ en $a \le x \le b$, las soluciones f_1 y f_2 de (4) se pueden escribir como una combinación lineal

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x),$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 12. Mediante el teorema del Wronskiano, demostrar que las funciones $sen\, x$ y $cos\, x$ son linealmente independiente y posibles soluciones de la ecuación siguiente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

se encuentra que:

$$W(sen\, x, cos\, x) = \begin{vmatrix} sen\, x & cos\, x \\ cos\, x & -sen\, x \end{vmatrix} = \left[(-sen^2 x) - cos^2\right] = -1 \neq 0$$

para todo real x. En consecuencia, puesto que $W(sen\, x, cos\, x) \neq 0$ para todo real x, se concluye que $sen\, x$ y $cos\, x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación dada en todo intervalo real.

Ejemplo 13. Las soluciones ℓ^x, ℓ^{-x} y ℓ^{2x} de

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

son linealmente independientes en todo intervalo real, porque

$$\begin{aligned} W(\ell^x, \ell^{-x} \text{ y } \ell^{2x}) = \begin{vmatrix} \ell^x & \ell^{-x} & \ell^{2x} \\ \ell^x & -\ell^{-x} & 2\ell^{2x} \\ \ell^x & \ell^{-x} & 4\ell^{2x} \end{vmatrix} &= \ell^x\left[(-\ell^{-x} \cdot 4\ell^{2x}) - (\ell^{-x} \cdot 2\ell^{2x})\right] \\ &- \left\{\ell^{-x}\left[(\ell^x \cdot 4\ell^{2x}) - (\ell^x \cdot 2\ell^{2x})\right]\right\} \\ &+ \left\{\ell^{2x}\left[(\ell^x \cdot \ell^{-x}) - (\ell^x \cdot -\ell^{-x})\right]\right\} \\ &= \ell^x(-4\ell^x - 2\ell^x) - \left[\ell^{-x}(4\ell^{3x} - 2\ell^{3x})\right] + \left[\ell^{2x}(1+1)\right] \\ &= -6\ell^{2x} - 2\ell^{2x} + 2\ell^{2x} = -6\ell^{2x} \neq 0 \end{aligned}$$

para toda real x *(ROSS, S. L-, 109-112).*

1.3.1.4 Operadores diferenciales

La simbología de D, D^2, D^3, ..., se utiliza para representar las operaciones, que se deben realizar, es decir, lo anterior simboliza la primera, segunda, tercera, ..., derivada de aquello que le sigue. Así Dy es lo mismo que dy/dx, D^2 es lo mismo que d^2y/dx^2, ... etcétera. Los símbolos D, D^2, D^3, ... se llaman **operadores** debido a que ellos, definen una operación a ser desarrollada. En forma similar xD^2 es un operador, el cual denota la operación de realizar la segunda derivada y luego multiplicarla por x.

Al introducir dicha simbologia en la ecuación (1)

$$a_o(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=F(x) \qquad (1)$$

se tiene

$$a_o D^n y+a_1 D^{n-1}y+a_2 D^{n-2}y+...+a_{n-1}Dy+a_n y=F(x) \qquad (5a)$$

agrupando términos

$$\left(a_o D^n+a_1 D^{n-1}+a_2 D^{n-2}+...+a_{n-1}D+a_n\right)y=F(x) \qquad (5b)$$

en la cual se entiende que cada término en los paréntesis está operando sobre y y los resultados se suman. Si se escribe por brevedad,

$$\phi(D)=a_o D^n+a_1 D^{n-1}+a_2 D^{n-2}+...+a_{n-1}D+a_n \qquad (5c)$$

en donde $\phi(D)$, simboliza un polinomio de derivadas; la ecuación (5b) puede escribirse convenientemente como

$$\phi(D)y=F(x) \qquad (5d)$$

de la misma manera introduciendo dicha simbologia en la ecuación (3), esta se reduce

$$\phi(D)y=0 \qquad (5e)$$

Ejemplo 14. La ecuación diferencial $\phi(D)y=F(x)$ donde $F(x)=x^2+e^x$ y $\phi(D)=D^3+5D^2+6D-8$ realmente es una manera abreviada de escribir

$$\frac{d^3y}{dx^3}+5\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}-8y=x^2+e^x$$

Ejemplo 15. La ecuación diferencial $\phi(D)y=F(x)$, donde $F(x)=4\ sen\ 2x$ y $\phi(D)=xD^2-2D+3x^2$ es una manera abreviada de escribir:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+3x^2y=4\,\text{sen}\,2x$$

Al considerar lo que representan los símbolos, deberá ser claro que

$$D^n(u+v)=D^n u+D^n v, \qquad D^n(au)=aD^n u \qquad (5f)$$

donde u y v son funciones diferenciables, a es cualquier constante, y n es cualquier entero positivo. Cualquier operador tal como D^n que tiene las propiedades mostradas en (5f) se llama un **operador lineal**. Es fácil mostrar que $\phi(D)$ dado por (5c) es un operador lineal, esto es *(SPIEGEL, M. R.. 168-170)*,

$$\phi(D)(u+v)=\phi(D)u+\phi(D)v, \qquad \phi(D)(au)=a\phi(D) \qquad (5g)$$

1.3.2 Ecuaciones lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de orden superior con coeficientes constantes:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0 \qquad (3)$$

la cual también se puede representar en la forma:

$$\phi(D)y=0 \qquad (5e)$$

La solución general de esta ecuación se puede hallar de la siguiente manera:

Para determinarla, se requiere una función f, la cual tenga la propiedad de que ésta y sus subsecuentes derivadas se multiplican cada una por ciertas constantes, las a_i (constantes), y los productos resultantes, $a_n f^{(n-i)}$, al sumarse después, el resultado será igual a cero. Para ello se requiere una función tal que sus derivadas sean múltiplos constantes de sí misma.

$$\frac{d^k}{dx^k}[f(x)]=cf(x)$$

Considerando a la función exponencial f tal que $f(x)=\ell^{mx}$, donde m es una constante se tiene

$$\frac{d^k}{dx^k}(\ell^{mx})=m^k\ell^{mx}$$

Al suponer que $y=\ell^{mx}$ como una solución para cierta m, entonces tenemos:

$$\frac{dy}{dx}=m\ell^{mx},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=m^2\ell^{mx},$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^n y}{dx^n}=m^n\ell^{mx}.$$

Al sustituir en (3), se obtiene

$$a_0 m^n \ell^{mx} + a_1 m^{n-1} \ell^{mx} + \cdots + a_{n-1} m \ell^{mx} + a_n \ell^{mx} = 0$$

o bien.

$$\ell^{mx}\left(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n\right) = 0$$

Puesto que $\ell^{mx} \neq 0$, **se obtiene la ecuación polinomial en la incógnita** m:

$$f(m) = a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0 \qquad (6)$$

la ecuación (6) es llamada **ecuación auxiliar**. Si $y = \ell^{mx}$ es una solución de la ecuación (3) entonces la constante m debe satisfacer (6). En consecuencia, para resolver (3), se escribe la ecuación auxiliar (6) y se resuelve para m. la cual esta igualada a cero, la solución se logra encontrando, las raíces de *f(m)*, las cuales dan lugar a tres casos, raíces reales y diferentes, reales y repetidas, o bien, complejas *(ROSS, S. L., 124-126)*.

1.3.2.1 Raíces reales distintas

Si la solución de (3), tiene en su ecuación auxiliar (6), las n raíces reales diferentes $m_1, m_2, \ldots, m_n$, entonces la solución general

$$y = c_1 \ell^{m_1 x} + c_2 \ell^{m_2 x} + \ldots + c_n \ell^{m_n x} \qquad (7)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$, son constantes arbitrarias.

Ejemplo 16. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

La ecuación auxiliar es $m^2 - 3m + 2 = 0$

Por lo tanto,

$$(m-1)(m-2) = 0 \qquad m_1 = 1, \quad m_2 = 2$$

Las raíces son reales y diferentes. En consecuencia, ℓ^x y ℓ^{2x}, son soluciones, y la solución general se puede escribir en la forma

$$y = c_1 \ell^x + c_2 \ell^{2x}$$

Se puede comprobar que ℓ^x y ℓ^{2x} son en realidad independientes. Debido a que su Wronskiano es

$$W(\ell^x, \ell^{2x}) = \begin{vmatrix} \ell^x & \ell^{2x} \\ \ell^x & 2\ell^{2x} \end{vmatrix} = \ell^{3x} \neq 0$$

se tiene que son linealmente independientes *(ROSS, S. L., 126)*

Ejemplo 17. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 4\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

La ecuación auxiliar es $m^3 - 4m^2 + m + 6 = 0$
Por división sintética se obtiene que $m = -1$, por lo tanto,

$$(m+1)(m^2 - 5m + 6) = 0$$

o bien,

$$(m+1)(m-2)(m-3) = 0$$

En consecuencia, las raíces son números reales y diferentes:

$$m = -1, \quad m = 2, \quad m = 3$$

y la solución general se puede escribir en la forma *(RAINVILLE, D. E., 134)*:

$$y = c_1\ell^{-x} + c_2\ell^{2x} + c_3\ell^{3x}$$

1.3.2.2 Raíces reales repetidas

Cuando la ecuación auxiliar (6) tiene la raíz real m y se repite k veces, entonces la parte de la solución general de la ecuación (3), correspondiente a esta raíz repetida k, es:

$$\left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_kx^{k-1}\right)\ell^{mx} \qquad \text{(8a)}$$

y si, además, las raíces restantes de la ecuación auxiliar (6), son números reales diferentes $m_{k+1}, \ldots, m_n$, entonces la solución general de la ecuación (3) es:

$$y = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_kx^{k-1}\right)\ell^{mx} + c_{k+1}\ell^{m_{k+1}x} + \ldots + c_n\ell^{m_nx} \qquad \text{(8b)}$$

Si, sin embargo, cualesquiera de las raíces restantes se repiten también, entonces, las partes de la solución general de la ecuación (3) correspondientes a cada una de estas otras raíces repetidas son expresiones semejantes a la correspondientes a m, como en (8a).

Ejemplo 18.. **Determine la solución general de**

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 18y = 0$$

La ecuación auxiliar $m^3 - 4m^2 - 3m + 18 = 0$

tiene las raíces, 3, 3, -2. **La solución general es** *(ROSS, S.L., 129-130)*:

$$y = c_1\ell^{3x} + c_2x\ell^{3x} + c_3\ell^{-2x}$$

o bien,

$$y = (c_1 + c_2x)\ell^{3x} + c_3\ell^{-2x}$$

Ejemplo 19. **Determine la solución general de**

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 8y = 0$$

La ecuación auxiliar es $m^4 - 5m^3 + 6m^2 + 4m - 8 = 0$

con raíces 2, 2, 2, -1. La parte de la solución correspondiente a las tres raíces repetidas 2, es:

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\ell^{2x}$$

y la correspondiente a la raíz -1, es simplemente

$$y = c_4\ell^{-x}$$

Por lo tanto, la solución general *(FINNEY, R. L.,1059)* es la suma de las dos anteriores

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\ell^{2x} + c_4\ell^{-x}$$

1.3.2.3 Raíces complejas

Si al resolver la ecuación auxiliar (6), aparecen raíces complejas conjugadas (a + bi) y (a - bi), ninguna de ellas repetida, entonces la parte correspondiente de la solución general de (3) se puede escribir como *(FINNELY, R. L.,1041-1043)*:

$$y = t_1\ell^{(a+b_i)x} + t_2\ell^{(a-b_i)x} \tag{9a}$$

donde t_1 y t_2 son constantes arbitrarias. Aplicando leyes de los exponentes, se tiene

$$y = t_1\ell^{ax}\ell^{b_ix} + t_2\ell^{ax}\ell^{-b_ix} \tag{9b}$$

al factorizar

$$y = \ell^{ax}\left(t_1\ell^{b_ix} + t_2\ell^{-b_ix}\right) \tag{9c}$$

Aplicando la fórmula de *Euler*,

$$\begin{aligned} \ell^{b_ix} &= \cos bx + i\,\mathrm{sen}\,bx \\ \ell^{-b_ix} &= \cos bx - i\,\mathrm{sen}\,bx \end{aligned} \tag{9d}$$

por lo tanto, sustituyendo (9d) en (9c)

$$y = \ell^{ax}\left[t_1(\cos bx + i\,\mathrm{sen}\,bx) + t_2(\cos bx - i\,\mathrm{sen}\,bx)\right]$$

al factorizar la ecuación anterior

$$y = \ell^{ax}\left[(t_1 + t_2)\cos bx + i(t_1 - t_2)\,\mathrm{sen}\,bx\right] \tag{9e}$$

considerando que

$$\begin{aligned} C_1 &= c_1 + c_2 \\ C_2 &= i(c_1 - c_2) \end{aligned}$$

sustituyendo dicha consideración en la ecuación (9e), finalmente la solución general de (3) se escribe como

$$y = \ell^{ax}(C_1 \cos bx + C_2\, sen\, bx) \qquad \textbf{(9f)}$$

Si (a + bi) y (a - bi) son raíces que se repiten k veces en la ecuación auxiliar (6), entonces la parte correspondiente de la solución general de (3) se puede escribir como:

$$y = \ell^{ax}\left[\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_k x^{k-1}\right)\cos bx + \left(c_{k+1} + c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \ldots + c_{2k}x^{k-1}\right) sen\, bx\right]$$

(9g)

Ejemplo 20. Determinar la solución general de *(FINNEY, R. L., 1041-1043):*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

La ecuación auxiliar es $m^2 + 1 = 0$

tiene las raíces $m = \pm i$. Estas son los números complejos imaginarios puros $a \pm bi$, donde $a = 0$, $b = 1$. Por lo tanto, la solución general es

$$y = \ell^{0x}(c_1 \cos 1 \cdot x + c_2\, sen\, 1 \cdot x),$$

que simplemente es

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 21. Determine la solución general de

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0$$

La ecuación auxiliar es $m^2 - 6m + 25 = 0$. Al resolverla, se encuentra

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

En este caso, las raíces son los números complejos conjugados $a \pm bi$, donde a=3, b=4. La solución *(BOYCE, E. W.; DiPRIMA, R. C.,138-139)* se puede escribir como

$$y = \ell^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2\, sen\, 4x).$$

Ejemplo 22. Determinar la solución general de

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 14\frac{d^2y}{dx^2} - 20\frac{dy}{dx} + 25y = 0$$

La ecuación auxiliar es $m^4 - 4m^3 - 14m^2 - 20m + 25 = 0$

Las raíces son: $1 + 2i$, $1 - 2i$, $1 + 2i$, $1 - 2i$.

En vista de que cada par de raíces complejas conjugadas se repite, la solución general se puede escribir en la forma *(RAINVILLE, D. E., 143)*,

$$y = e^x\left[(C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\operatorname{sen} 2x\right]$$

o bien,

$$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 x e^x \cos 2x + C_3 e^x \operatorname{sen} 2x + C_4 x e^x \operatorname{sen} 2x$$

Ejemplo 23. Resolver la ecuación diferencial

$$(D + 8D + 16)y = 0$$

La ecuación auxiliar es $m^4 + 8m^3 + 16 = 0$, la cual puede escribirse como $(m^2 + 4)^2 = 0$, así, las raíces son $m = \pm 2i;\ \pm 2i$. Las raíces $m_1 = 2i$; y $m_2 = -2i$ se repiten, e interpretando a $2i$ como $0 + 2i$ y dado que $e^{0x} = 1$, la solución de la ecuación diferencial es *(ROSS, S. L., 132)*:

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\operatorname{sen} 2x$$

1.3.3 Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden superior con coeficientes constantes

Dada una ecuación diferencial no homogénea de orden n:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x) \qquad (1)$$

donde los coeficientes $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, son constantes y el término independiente F es función variable de x.

La solución general de (1) se puede expresar como:

$$y_T = y_C + y_P$$

donde:

y_C es la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea correspondiente [es decir, la ecuación (1), pero asumiendo $F(x)=0$];

y_P es la solución particular, es decir, cualquier solución de (1), que no contenga constantes arbitrarias, sino coeficientes específicos.

Dado que en la sección (1.3.2), se analizó los métodos para encontrar la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea (y_C), ahora en esta sección se van a analizar los métodos para determinar la solución particular (y_P), dichos métodos son:

- Método de coeficientes indeterminados
- Método de variación de parámetros

1.3.3.1 Coeficientes Indeterminados

El método de coeficientes indeterminados, exige para su aplicación que la función $F(x)$, tenga alguna de las formas siguientes:

- Un polinomio en x
- Una constante
- Una expresión de la forma $sen\ bx$, $cos\ bx$, donde b es una constante
- Una función exponencial e^{mx}
- Alguna combinación lineal de lo anterior xe^{mx}, x^3e^{mx}, $e^{mx}sen\ bx$, $e^{mx}cos\ bx$

Sin embargo, si el termino independiente $F(x)$ no tiene alguna de las anteriores formas no se puede utilizar el método anterior para la resolución de la ecuación diferencial en cuestión.

1.3.3.1.1. Método de solución

El método consiste en:

a) Dada la ecuación diferencial no homogénea

$$\phi(D)y = F(x) \tag{5d}$$

resolver la ecuación homogénea correspondiente $\phi(D)y = 0$; para la obtención de y_C;

b) Buscar una ecuación diferencial que anule al termino $F(x)$, dicha ecuación es llamada Aniquilador *[P(D)]*

c) Posteriormente, multiplicar la ecuación original (5d), por el aniquilador *P(D)*, quedando:

$$P(D)\phi(D)y = P(D)F(x);$$

$$P(D)\phi(D)y = 0 \tag{10}$$

d) Resolver la ecuación homogénea resultante (10), de la cual se obtiene y_T;

e) La solución particular y_P se obtiene a partir de:

$$y_T = y_C + y_P$$

de donde:

$$y_P = y_T - y_C$$

f) La solución particular y_P se sustituye en la ecuación original (5d) y se obtiene el valor de las constantes;

g) Finalmente dichas constantes se sustituyen en la ecuación y_T.

Ejemplo 24. Resolver $(D^2 - D - 2)y = 3e^{2x} + 5$

a) La ecuación homogénea correspondiente es:

$$(D^2 - D - 2)y = 0$$

si la ecuación auxiliar es $m^2 - m - 2 = 0$, se tiene que las raíces son $m_1 = -1$, $m_2 = 2$; por lo que

$$y_C = C_1\ell^{-x} + C_2\ell^{2x}$$

b) Dado que $F(x) = 3\ell^{2x} + 5$, es decir, $F(x) = C_1\ell^{2x} + C_2$, por lo tanto $m_1 = 2$, $m_2 = 0$; $m\ (m - 2) = 0$; en simbología de operadores, el aniquilador queda como:

$$P\,(D) = (\,D^2 - 2D\,)$$

c) al multiplicar por la ecuación original

$$(D^2 - 2D)(D^2 - D - 2)y = (D^2 - 2D)(3\ell^{2x} + 5);$$
$$(D^2 - 2D)(D^2 - D - 2)y = 0;$$
$$D^4y - D^3y - 2D^2y - 2D^3y + 2D^2y - 4Dy = 0;$$
$$(D^4 - 3D^3 - 4D)y = 0$$

d) Dado $(D^2 - 2D)(D^2 - D - 2)y = 0$; es decir, $(D^4 - 3D^3 - 4D)y = 0$, donde la ecuación auxiliar es $m^4 - 3m^3 + 4m = 0$, que tiene como raíces $m_1 = -1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2$, $m_4 = 0$ entonces,

$$y_T = C_1\ell^{-x} + C_2\ell^{2x} + C_3x\ell^{2x} + C_4$$

e) Dado que $y_P = y_T - y_C$, sustituyendo

$$y_P = C_1\ell^{-x} + C_2\ell^{2x} + C_3x\ell^{2x} + C_4 - \left[C_1\ell^{-x} + C_2\ell^{2x}\right]$$
$$y_P = C_3x\ell^{2x} + C_4$$

f) Al sustituir y_P en la ecuación original

$$(D^2 - D - 2)y_P = 3\ell^{2x} + 5$$

para ello se requiere,

$$y_P = C_3x\ell^{2x} + C_4$$
$$D(y_P) = C_3x(2\ell^{2x}) + C_3\ell^{2x}$$
$$= 2C_3x\ell^{2x} + C_3\ell^{2x}$$
$$D^2(y_P) = 4C_3x\ell^{2x} + 2C_3\ell^{2x} + 2C_3\ell^{2x}$$
$$= 4C_3x\ell^{2x} + 4C_3\ell^{2x}$$

al hacerlo, se obtiene:

$$4C_3x\ell^{2x}+4C_3\ell^{2x}-\left[2C_3x\ell^{2x}+C_3\ell^{2x}\right]-2\left[C_3x\ell^{2x}+C_4\right]=3\ell^{2x}+5$$
$$4C_3x\ell^{2x}+4C_3\ell^{2x}-2C_3x\ell^{2x}-C_3\ell^{2x}-2C_3x\ell^{2x}-2C_4=3\ell^{2x}+5$$
$$3C_3\ell^{2x}-2C_4=3\ell^{2x}+5$$
$$3C_3\ell^{2x}=3\ell^{2x}\qquad -2C_4=5$$
$$C_3=\frac{3\ell^{2x}}{3\ell^{2x}}=1\qquad C_4=-\frac{5}{2}$$

g) al sustituir *(ZILL, D. G., 154)* $C_3=1$, $C_4=-\frac{5}{2}$, en y_T

$$y_T=C_1\ell^{-x}+C_2\ell^{2x}+x\ell^{2x}-\frac{5}{2}$$

Ejemplo 25. Resolver $\quad (D^2+D)y=sen\,x$

a) La ecuación homogénea correspondiente es: $(D^2+D)y=0$, al resolver, la ecuación auxiliar $m^2+m=0$, se tiene que las raíces son $m_1=0$, $m_2=-1$, por lo que $y_C=C_1+C_2\ell^{-x}$

b) Dado que $F(x)=sen\,x$, es decir, $F(x)=C_1\,sen\,x+C_2\cos x$, por lo tanto $(m^2+1)=0$; en simbología de operadores, el aniquilador queda como:

$$P(D)=(D^2+1)$$

c) al multiplicar por la ecuación original

$$(D^2+1)(D^2+D)y=(D^2+1)sen\,x;$$
$$(D^2+1)(D^2+D)y=0;$$
$$(D^4+D^3+D^2+D)y=0$$

d) Dado que $(D^2+1)(D^2+D)y=0$, es decir, $(D^4+D^3+D^2+D)y=0$, donde la ecuación auxiliar es $m^4+m^3+m^2+m=0$; cuyas raíces son: $m_1=0$, $m_2=-1$, $m_3=-i$, $m_4=+i$, entonces,

$$y_T=C_1+C_2\ell^{-x}+C_3\,sen\,x+C_4\cos x$$

e) Dado que $y_p=y_T-y_C$; sustituyendo

$$y_p=C_1+C_2\ell^{-x}+C_3\,sen\,x+C_4\cos x-\left[C_1+C_2\ell^{-x}\right]$$
$$y_p=C_3\,sen\,x+C_4\cos x$$

f) Al sustituir y_p en la ecuación original

$$(D^2+D)y_p=sen\,x$$

para ello se requiere,

$$y_P = C_3\, sen\, x + C_4 \cos x$$
$$D(y_P) = C_3 \cos x - C_4\, sen\, x$$
$$D^2(y_P) = -C_3\, sen\, x - C_4 \cos x$$

al hacerlo, se obtiene:

$$-C_3\, sen\, x - C_4 \cos x + \left[C_3 \cos x - C_4\, sen\, x\right] = sen\, x$$
$$-C_3\, sen\, x - C_4 \cos x + C_3 \cos x - C_4\, sen\, x = sen\, x$$
$$sen\, x(-C_3 - C_4) + \cos x(C_3 - C_4) = sen\, x$$
$$sen\, x(-C_3 - C_4) = sen\, x$$
$$-C_3 - C_4 = \frac{sen\, x}{sen\, x} = 1; \quad -C_3 = 1 + C_4; \quad C_3 = -1 - C_4$$
$$C_3 - C_4 = 0; \quad C_3 = C_4 \quad \text{sustituyendo}$$
$$C_3 = -1 - C_3; \qquad 2C_3 = -1$$
$$C_3 = -\tfrac{1}{2} \text{ por lo que } C_4 = -\tfrac{1}{2}$$

g) sustituyendo *(DERRICK, W.R.; GROSSMAN, S. Y., 95-98)* $C_3 = -\frac{1}{2}$, $C_4 = -\frac{1}{2}$, en y_T

$$y_T = C_1 + C_2 e^{-x} - \tfrac{1}{2} sen\, x - \tfrac{1}{2} \cos x$$

1.3.3.2 Variación de parámetros

Método que consiste en cambiar las constantes de la solución complementaria u homogénea (y_C), por funciones *(ZILL, D. G., 155-157)*; por ejemplo:

Sea la ecuación lineal no homogénea de segundo orden:

$$\left(a_0 D^2 + a_1 D + a_2\right) y = f(x) \qquad (11a)$$
$$a_0 D^2 y + a_1 D\, y + a_2 y = f(x) \qquad (11b)$$

1.3.3.2.1 Método de solución

a) Mediante manipulación algebraica la derivada de mayor orden, deberá tener como coeficiente a la unidad:

$$D^2 y + \frac{a_1}{a_0} D\, y + \frac{a_2}{a_0} y = \frac{f(x)}{a_0} \qquad (12a)$$
$$D^2 y + P\, D\, y + Q\, y = R(x) \qquad (12b)$$

b) Resolver la ecuación homogénea correspondiente a (12b), donde y_1 y y_2 son posibles soluciones de ella,

$$y_C = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (13a)$$

c) La solución particular (y_p), se obtiene cambiando las constantes C_1 y C_2 por las funciones u_1 y u_2 respectivamente.

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \qquad \text{(13b)}$$

d) Dado que la solución particular (y_p) debe satisfacer a la ecuación (12b), se tiene que:

$$y_p' = u_1 y_1' + u_1' y_1 + u_2 y_2' + u_2' y_2$$

pero por condición del método se tiene que

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \qquad \text{(14a)}$$

entonces $\qquad y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$

determinando la segunda derivada de y_p'

$$y_p'' = u_1 y_1'' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + u_2' y_2'$$

al sustituir en la ecuación (12b)

$$\left[u_1 y_1'' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + u_2' y_2'\right] + P\left(u_1 y_1' + u_2 y_2'\right) + Q\left(u_1 y_1 + u_2 y_2\right) = R(x)$$

al agrupar términos

$$\cancel{u_1}\overbrace{\left[y_1'' + Py_1' + Qy_1\right]}^{0} + \cancel{u_2}\overbrace{\left[y_2'' + Py_2' + Qy_2\right]}^{0} + u_1' y_1' + u_2' y_2' + = R(x)$$

se reduce a $\qquad u_1' y_1' + u_2' y_2' = R(x) \qquad$ (14b)

las ecuaciones (14a) y (14b), constituyen un sistema lineal de ecuaciones; por ello, se utilizan para determinar las derivadas de u_1' y u_2'. Por la regla de Cramer, la solución de

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \qquad \text{(14a)}$$
$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = R(x) \qquad \text{(14b)}$$

se puede expresar por medio de determinantes:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 R(x)}{W}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 R(x)}{W}$$

e) Por último se integran los resultados anteriores y se sustituyen en y_p y y_T.

Ejemplo 26. Resolver $\quad (D^2-3D-4)y = x\ell^x$

b) La ecuación homogénea correspondiente es $(D^2-3D-4)y=0$, su ecuación auxiliar es $m^2 - 3m - 4 = 0$, de donde sus raíces son $m_1 = 4$, $m_2 = -1$, por lo que

$$y_C = C_1\ell^{4x} + C_2\ell^{-x}$$

c) Dado que la solución particular (y_p) se obtiene sustituyendo las constantes C_1 y C_2 por funciones u_1 y u_2, nos queda

$$y_p = u_1\ell^{4x} + u_2\ell^{-x}$$

d) Sustituyendo en (14a) y (14b), se tiene que

$$u_1'\ell^{4x} + u_2'\ell^{-x} = 0 \qquad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$
$$4u_1'\ell^{4x} - u_2'\ell^{-x} = x\ell^{-x} \qquad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

obteniendo u_1' y u_2', se tiene que

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ell^{-x} \\ x\ell^x & -\ell^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ell^{4x} & \ell^{-x} \\ 4\ell^{4x} & -\ell^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{x\ell^x \bullet \ell^{-x}}{-\ell^{3x} - 4\ell^{3x}} = \frac{x}{-5\ell^{3x}} = -\tfrac{1}{5}x\ell^{-3x}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \ell^{4x} & 0 \\ 4\ell^{4x} & x\ell^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ell^{4x} & \ell^{-x} \\ 4\ell^{4x} & -\ell^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{\ell^{4x} \bullet x\ell^x}{-\ell^{3x} - 4\ell^{3x}} = \frac{x\ell^{5x}}{-5\ell^{3x}} = -\tfrac{1}{5}x\ell^{2x}$$

e) Integrando para obtener u_1 y u_2,

$$u_1 = -\tfrac{1}{5}\int x\ell^{-3x}dx = \tfrac{1}{45}\ell^{-3x}(-3x-1)+C$$
$$u_2 = -\tfrac{1}{5}\int x\ell^{2x}dx = -\tfrac{1}{20}\ell^{2x}(2x-1)+C$$

sustituyendo

$$y_p = \tfrac{1}{45}\ell^x(-3x-1) - \tfrac{1}{20}\ell^x(2x-1)$$
$$y_p = -\frac{x\ell^x}{15} - \frac{\ell^x}{45} - \frac{x\ell^x}{10} + \frac{\ell^x}{20} = -\frac{1}{6}x\ell^x + \frac{1}{36}\ell^x$$

al sustituir u_1 y u_2 no es necesario introducir las constantes de integración, puesto que dichos constantes se encuentran implícitas en las constantes. Por lo tanto *(DERRICK, W.R., GROSSMAN, S. I., 100)*:

$$y_T = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{6} x e^{x} + \frac{1}{36} e^{x}$$

Ejemplo 27. Resolver $\qquad (D^2+1)y = \csc x \cot x$

b) La ecuación homogénea correspondiente es $(D^2+1)y = 0$, su ecuación auxiliar es $m^2 + 1 = 0$, de donde sus raíces son $m_1 = i$, $m_2 = -i$, por lo que:

$$y_C = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

c) Dado que la solución particular (y_p) se obtiene sustituyendo las constantes C_1 y C_2 por funciones u_1 y u_2, nos queda

$$y_p = u_1 \cos x + u_2 \operatorname{sen} x$$

d) Sustituyendo en (14a) y (14b), se tiene que

$$u_1' \cos x + u_2' \operatorname{sen} x = 0 \qquad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$
$$-u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = \csc x \cot x \qquad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

obteniendo u_1' y u_2', se tiene que:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \csc x \cot x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\operatorname{sen} x(\csc x \cot x)}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cot x}{1} = -\cot x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \csc x \cot x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\cos x(\csc x \cot x)}{1} = \frac{\cot^2 x}{1} = \cot^2 x$$

e) integrando para obtener u_1 y u_2,

$$u_1 = -\int \cot x \, dx = -\ln(\operatorname{sen} x) + C$$
$$u_2 = \int \cot^2 x \, dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C$$

sustituyendo

$$y_P = \{-ln(sen\,x)(cos\,x)\} + \{(-cot\,x - x)\,sen\,x\};$$
$$y_P = -cos\,x\,ln(sen\,x) - sen\,x\,cot\,x - x\,sen\,x;$$
$$y_P = -cos\,x\,ln(sen\,x) - cos\,x - x\,sen\,x$$

por lo tanto

$$y_T = C_1\,cos\,x + C_2\,sen\,x - cos\,x\,ln(sen\,x) - cos\,x - x\,sen\,x;$$
$$y_T = cos\,x(C_1 - 1) + C_2\,sen\,x - cos\,x\,ln(sen\,x) - x\,sen\,x$$

1.3.3.2.2 Generalización del método

Una ecuación diferencial de orden *n* tendrá como solución particular

$$y_P = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 + \ldots + u_ny_n$$

en donde las funciones u_1, u_2, ..., u_n se obtienen al integrar la solución del siguiente sistema:

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3 + \ldots + u_n'y_n = 0$$
$$u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_3'y_3' + \ldots + u_n'y_n' = 0$$
$$u_1'y_1'' + u_2'y_2'' + u_3'y_3'' + \ldots + u_n'y_n'' = 0$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + u_3'y_3^{(n-1)} + \ldots + u_n'y_n^{(n-1)} = R(x)$$

***Ejemplo 28.* Resolver** $\quad y''' + y' = \tan x$

b) La ecuación homogénea correspondiente es

$$y''' + y' = 0$$

cuya ecuación auxiliar es $m^3 + m = 0$; $m(m^2 + 1) = 0$, que tiene como raíces a $m_1 = 0$, $m_2 = i$, $m_3 = -i$, por lo que la solución complementaria es:

$$y_C = C_1 + C_2\cos x + C_3\,\mathrm{sen}\,x$$

c) Dado que la solución particular (y_P) se obtiene sustituyendo las constantes C_1, C_2 y C_3 por funciones u_1, u_2 y u_3

$$y_P = u_1 + u_2\cos x + u_3\,\mathrm{sen}\,x$$

cuyo sistema de ecuaciones por resolver es:

$$u_1' + u_2'\cos x + u_3'\,\mathrm{sen}\,x = 0$$
$$0 - u_2'\,\mathrm{sen}\,x + u_3'\cos x = 0$$
$$0 - u_2'\cos x - u_3'\,\mathrm{sen}\,x = \tan x$$

obteniendo u_1', u_2' y u_3', se tiene que:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ \tan x & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}} = \frac{\tan x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \frac{\tan x}{1} = \tan x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \operatorname{sen} x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \tan x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}} = \frac{-\operatorname{sen} x}{1} = -\operatorname{sen} x$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & -\cos x & \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}} = \frac{-\operatorname{sen} x \tan x}{1} = -\operatorname{sen} x \tan x$$

e) integrando para obtener u_1, u_2 y u_3

$$u_1 = \int \tan x\, dx = \ln(\sec x) + C$$

$$u_2 = -\int \operatorname{sen} x\, dx = \cos x + C$$

$$u_3 = -\int \operatorname{sen} x \tan x\, dx = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx = \left[-\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx\right]$$

$$= -\int \sec x dx + \int \cos x dx = -\ln(\sec x + \tan x) + \operatorname{sen} x + C$$

sustituyendo

$$y_p = -\ln\cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen} x \ln(\sec x + \tan x) + \operatorname{sen}^2 x$$

$$y_p = -\ln\cos x - \operatorname{sen} x \ln(\sec x + \tan x) + 1$$

Por lo tanto

$$y_T = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x - \ln\cos x - \operatorname{sen} x \ln(\sec x + \tan x) + 1$$

$$y_T = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x - \ln\cos x - \operatorname{sen} x \ln(\sec x + \tan x)$$

Ejemplo 29. **Resolver** $y''' - y' = x$

b) La ecuación homogénea correspondiente en simbología de operadores es:

$$\left(D^3 - D\right)y = 0$$

cuya ecuación auxiliar es $m^3 - m = 0;\ m\,(m^2 - 1) = 0,$ **que tiene como raíces a** $m_1 = 0,\ m_2 = -1,\ m_3 = 1,$ **por lo que la solución complementaria es:**

$$y_C = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x}$$

c) Dado que la solución particular (y_p) **se obtiene sustituyendo las constantes** C_1, C_2 **y** C_3 **por funciones** u_1, u_2 **y** u_3

$$y_P = u_1 + u_2 e^{-x} + u_3 e^{x}$$

cuyo sistema de ecuaciones por resolver es

$$\begin{aligned} u_1' + u_2' e^{-x} + u_3' e^{x} &= 0 \\ 0 - u_2' e^{-x} + u_3' e^{x} &= 0 \\ 0 + u_2' e^{-x} + u_3' e^{x} &= x \end{aligned}$$

obteniendo u_1', u_2' **y** u_3'**, se tiene que**

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} & e^{x} \\ 0 & -e^{-x} & e^{x} \\ x & e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-x} & e^{x} \\ 0 & -e^{-x} & e^{x} \\ 0 & e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}} = \frac{x\left\{e^{-x}e^{x} + e^{-x}e^{x}\right\}}{1\left\{-e^{-x}e^{x} - e^{-x}e^{x}\right\}} = \frac{2x}{-2} = -x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{x} \\ 0 & 0 & e^{x} \\ 0 & x & e^{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-x} & e^{x} \\ 0 & -e^{-x} & e^{x} \\ 0 & e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}} = \frac{1\left\{-xe^{x}\right\}}{-2} = \tfrac{1}{2}xe^{x};$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^{-x} & 0 \\ 0 & -e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-x} & e^{x} \\ 0 & -e^{-x} & e^{x} \\ 0 & e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}} = \frac{-xe^{-x}}{-2} = \tfrac{1}{2}xe^{-x}$$

e) integrando para obtener u_1, u_2 y u_3

$$u_1 = -\int x\,dx = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\int x\ell^{x}dx = \frac{1}{2}\ell^{x}(x-1) + C$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\int x\ell^{-x}dx = \frac{1}{2}\ell^{-x}(-x-1) + C$$

sustituyendo

$$y_P = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(-x-1)$$

$$y_P = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$y_P = -\frac{1}{2}x^2 - 1$$

Por lo tanto *(ZILL, D.G., 161-163)*:

$$y_T = C_1 + C_2\ell^{-x} + C_3\ell^{x} - \frac{1}{2}x^2 - 1$$

$$y_T = C_1 + C_2\ell^{-x} + C_3\ell^{x} - \frac{1}{2}x^2$$

1.4 Cálculo diferencial vectorial

1.4.1 Teoría básica de vectores

Una magnitud*(TERRAZAS, V. G., 1-3)* es toda aquella que puede medirse; existen dos tipos de éstas:

Magnitud escalar. Es aquella que solo tienen magnitud, pero no dirección; se describe en forma matemática mediante un número real referido a una escala de medición, su variación con respecto al tiempo o al espacio es descrita mediante una función cuyos valores son números reales, ejemplo, la **longitud**, la **masa**, el **volumen**, la **temperatura**, el **tiempo**, etcétera *(BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C.,[1] 779-781)*.

Magnitud vectorial o simplemente vector*. Es aquel que requiere de una magnitud y dirección para su especificación completa, ejemplo, la **velocidad**, la **fuerza**, la **aceleración**, el **desplazamiento**, **cantidad de movimiento**, el **campo eléctrico**, el **campo magnético**, etcétera *(TERRAZAS, G., 1-3)*.

1.4.1.1 Definiciones

1.4.1.1.1 Vector

Se le denomina así al segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$, desde un punto P llamado **origen** hasta un punto Q llamado **terminal**. Se denota con letras negritas o letras con una flecha encima *(MURRAY, R., SPIEGEL. P. D.,[1] 135)*.

Así que $\overrightarrow{PQ}$ se denota por $\mathbf{A}$ o $\overrightarrow{A}$ (FIGURA 1.5A).

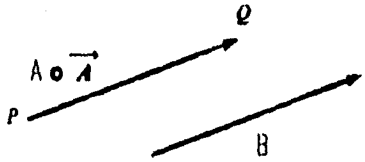


FIGURA 1.5A REPRESENTACIÓN DE UN VECTOR

1.4.1.1.2 Vector de posición

Al colocar el vector $\mathbf{A}$, dentro de un sistema de coordenadas rectangulares (FIGURA 1.5B), de modo que su punto inicial quede en el origen O, y el punto terminal de $\mathbf{A}$ coincida con el punto R en el plano xy cuyas coordenadas son (A_1, A_2). Dicho vector $\mathbf{A}$ sirve para identificar al punto R, y se dice que $\mathbf{A}$ es el **vector de posición de** R. Recíprocamente, el punto R o sus coordenadas (A_1, A_2) se puede emplear para identificar al vector que va del origen O al punto R. Así que,

* Los vectores fueron desarrollados por Josiah Willard Gibbs y Oliver Heaviside alrededor de 1880, trabajando en forma independiente en la teoría de la electricidad y el magnetismo *(BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C.,[1] 779)*.

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2) \qquad (1)$$

sirve para representar al vector que va del origen 0 al punto R. A los números A_1 y A_2 de la expresión (1) se les conoce como **la componente escalar** x y **la componente escalar** y, respectivamente del vector $\mathbf{A}$ *(BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C.,*[1] *780)*.

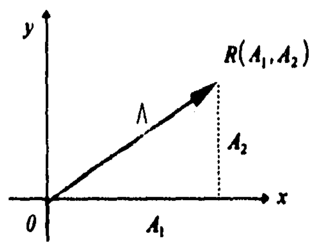


FIGURA 1.5B VECTOR DE POSICIÓN

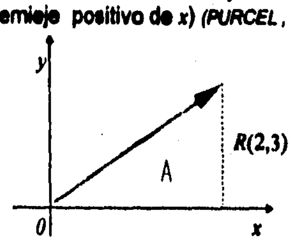
La magnitud del vector $\mathbf{A}$ es la longitud de la flecha e indica el número de unidades modulares que tiene el vector, es decir, la distancia del origen al punto cuyas coordenadas son (A_1, A_2); ésta se representa mediante $|A| = A$, y por consiguiente:

$$|A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad (2)$$

La dirección del vector $\mathbf{A}$ es la dirección de la flecha con respecto a un sistema de referencia, es decir, es la dirección de la recta que contiene al mismo, a dicha resta se le llama **línea de acción** *(MURRAY, R., SPIEGEL, P. D.,*[2] *134-138)*.

Ejemplo 1. Determinar la longitud y la dirección del vector $\mathbf{A}$ que va desde el origen hasta el punto R *(2,3)*.

Al utilizar la ecuación (2) se tiene que $|A| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13} \approx 3.60$, es decir, la longitud del vector es de 3.60 unidades y tiene una dirección $30°$ al noreste (o sea a $30°$ del semieje positivo de x) *(PURCEL, E. J., VARBERG, D., 564)*.



1.4.1.1.3 Vector unitario

Es el vector que tiene como magnitud a la unidad. Para la obtención de un vector unitario $\mathbf{a}$ que tenga la misma dirección que el vector $\mathbf{A}$, cuya magnitud es $A > 0$, se procede a dividir A entre su propia longitud, A / A, antonces $\mathrm{A} = A\mathrm{a}$. Los vectores unitarios se denotan por letras minúsculas *(MURRAY, R., SPIEGEL, P. D.,[1] 135).*

1.4.1.1.4 . Vector tridimensional

El vector A en un sistema de coordenadas tridimensionales se puede representar como una flecha en el espacio xyz (FIGURA 1.5C). Al colocar el punto inicial de A en el origen del sistema y hacer coincidir el punto terminal del vector con el punto P, cuyas coordenadas son A_1, A_2, A_3, se dice que A, es el vector de posición de P, es decir, las coordenadas de dicho punto, A_1, A_2, A_3, son las componentes escalares de A y se escribe *(BOYCE, W. E., DiPRIMA, R. C.,[1] 790-792)*:

$$\mathrm{A}=(A_1, A_2, A_3). \qquad \textbf{(1a)}$$

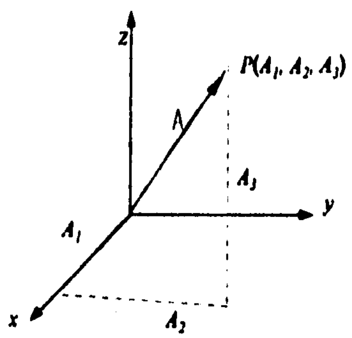


FIGURA 1.5C VECTOR EN UN PLANO TRIDIMENSIONAL

La magnitud de A se calcula

$$|A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \qquad \textbf{(2a)}$$

1.4.1.1.4.1 Vectores unitarios tridimensionales

Los vectores unitarios i, j y k son vectores unitarios que tienen la dirección de los ejes x, y y z de un sistema de coordenadas tridimensional respectivamente (FIGURA 1.5D) *(MURRAY, R.; SPIEGEL P. D.,[2] 135)*. Sus componentes son:

$$\mathrm{i}=(1,0,0) \quad \mathrm{j}=(0,1,0) \quad \mathrm{k}=(0,0,1) \qquad \textbf{(3)}$$

1.4.1.1.4.2. Componentes vectoriales

Todo vector $\mathrm{A}(A_1, A_2, A_3)$, en tres dimensiones se puede representar en términos de i, j y k (FIGURA 1.5E). Dado que A_1, A_2, y A_3 son las componentes escalares de A.

$$\begin{aligned} \Lambda &= (A_1, A_2, A_3) = (A_1,0,0)+(0, A_2,0)+(0,0, A_3) \\ &= A_1(1,0,0)+ A_2(0,1,0)+ A_3(0,0,1) \\ &= A_1\mathrm{i}+ A_2\mathrm{j} + A_3\mathrm{k} \end{aligned} \tag{4}$$

Los vectores $A_1\mathrm{i}$, $A_2\mathrm{j}$, $A_3\mathrm{k}$ se llaman **componentes vectoriales** de Λ en las direcciones x, y y z, respectivamente, para diferenciarlos de las componentes escalares A_1, A_2, A_3, las cuales son arreglos ordenados de números reales *(BOYCE,W.E.;DIPRIMA,R.C.,[1] 791-793)*.

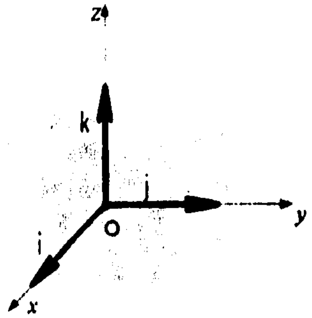


FIGURA 1.5D REPRESENTACIÓN DE VECTORES UNITARIOS TRIDIMENSIONALES

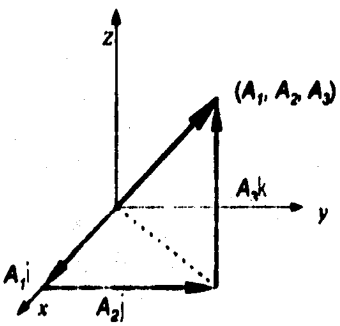


FIGURA 1.5E COMPONENTES VECTORIALES DE UN VECTOR

1.4.1.2 Álgebra vectorial

Las operaciones de adición, sustracción y producto ordinarias se pueden generalizar al álgebra vectorial mediante definiciones adecuadas. Las siguientes definiciones son fundamentales *(BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C.,[1] 781-788; MURRAY, R., SPIEGEL, P.D.,[7] 135-138; PURCELL, E. J., VARBERG, D., 564-565)*:

1. **Igualdad**. Dos vectores $A = (A_1, A_2)$ y $B = (B_1, B_2)$ son **iguales** si y sólo si tienen la misma magnitud y dirección. Así, que $A = B$ si y solo si cada componente de A es igual a la componente correspondiente de B (FIGURA 1.5A).

$A = B$ quiere decir que $A_1 = B_1$ y $A_2 = B_2$

2. El vector que tiene dirección opuesta a la del vector A, pero de igual magnitud que A, se denota por - A (FIGURA 1.5F).

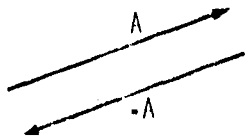


FIGURA 1.5F IGUALDAD VECTORIAL

3. El vector cero, que se representa como 0, es el vector cuya longitud es igual a cero. Dado que tanto su punto inicial como su punto terminal están en el origen del sistema de coordenadas, entonces

$$0 = (0,0) \qquad (5)$$

Así, el vector 0 es el vector cuyas componentes son cero. La dirección del vector cero esta indeterminada.

4. **La suma o resultante** de los vectores A y B es un vector C, obtenido al hacer coincidir el punto inicial de B con el punto terminal de A, donde C es el vector que se traza desde el punto inicial de A hasta el punto terminal de B. Analíticamente se expresa $C = A + B$; éste método, **llamado del triángulo**, se ilustra en la sección izquierda de la FIGURA 1.5G.

Un método alternativo para encontrar al vector C consiste en hacer coincidir el punto inicial de A con el de B, entonces, C es el vector que coincide con la diagonal del paralelogramo que tiene como lados A y B; **éste método, llamado del paralelogramo**, se ilustra en la sección derecha de la FIGURA 1.5G.

La magnitud del vector C, es la magnitud del segmento que la representa, su dirección será la de la recta que la contiene.

Analíticamente para llevar a cabo la suma de dos o mas vectores se suman sus respectivas componentes escalares:

$$C = A + B = (A_1 + B_1, A_2 + B_2) \qquad (6)$$

La suma vectorial cumple con las siguientes propiedades:

$A + B = B + A$	Ley conmutativa	(6a)
$A + (B + C) = (A + B) + C$	Ley asociativa	(6b)

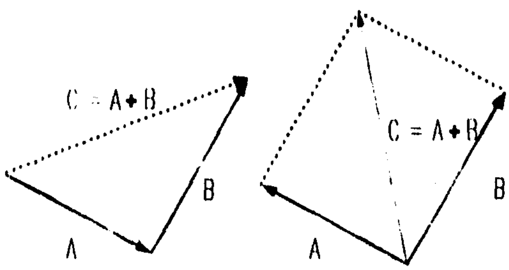


FIGURA 1.5G SUMA VECTORIAL

5. **La resta o diferencia** de los vectores $A = (A_1, A_2)$ y $B = (B_1, B_2)$ se define como $C = A - B$, el cual al sumarse a B da como resultado el vector A (FIGURA 1.5H). Así, $A - B$ es el vector C, que se obtiene al trazar una línea desde el punto terminal de B hasta el punto terminal de A, donde A y B coinciden en su punto inicial. Para determinar las componentes de $C = (C_1, C_2)$, en términos de A y B, se parte de que $C = A - B$, entonces, al escribir lo anterior en términos de componentes:

$$C_1 = A_1 - B_1 \quad y \quad C_2 = A_2 - B_2$$

entonces

$$C = A - B = (A_1 - B_1, A_2 - B_2) \qquad (7)$$

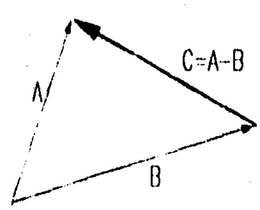


FIGURA 1.5H RESTA VECTORIAL

6. **Multiplicación** o producto de un **vector por un escalar**. Sea A un vector dado distinto de cero y m un escalar. Si $m > 0$, entonces mA o Am es el vector cuya dirección es la misma que la de A y cuya longitud es m veces la longitud de A. Si $m < 0$, entonces la dirección de mA es la opuesta a la de A y la longitud de mA es $|m|$ veces la longitud de A (FIGURA 1.5I). Si $m = 0$, o si $A = 0$, entonces $mA = 0$, es el vector cero. La multiplicación de un vector por un escalar se representa por:

$$mA = m(A_1, A_2) = (mA_1, mA_2) \qquad (8)$$

la cual tiene las siguientes propiedades:

Si A y B son **vectores**, y m y n **escalares**, entonces

$m(nA) = (mn)A = n(mA)$	Ley asociativa	(8a)
$(m+n)A = mA + nA$	Ley distributiva	(8b)
$m(A+B) = mA + mB$	Ley distributiva	(8c)

Éstas operaciones algebraicas descritas se pueden generalizar a vectores en tres dimensiones.

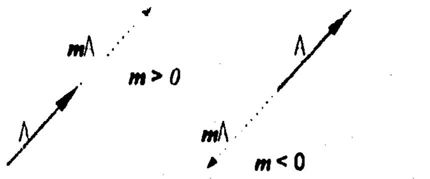


FIGURA 1.5I MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Además del producto de un escalar y un vector en el álgebra vectorial hay dos tipos de productos entre vectores. El primero es el producto escalar, punto o interior, que se indica poniendo un punto entre los dos vectores implicados.

1.4.1.2.1. Producto escalar

En mecánica, el trabajo realizado por una fuerza constante F cuando su punto de aplicación experimenta un desplazamiento $\overrightarrow{PQ}$, se define como (FIGURA 1.5JA):

$$\text{Trabajo}=\left(|F|\cos\theta\right)\left|\overrightarrow{PQ}\right| = |F|\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cos\theta \qquad (9)$$

En matemáticas, la cantidad

$$|F|\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cos\theta$$

es el producto escalar de F y $\overrightarrow{PQ}$.

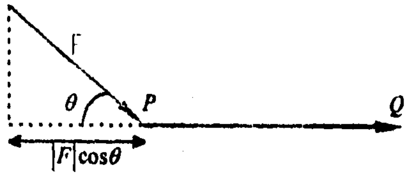


FIGURA 1.5JA TRABAJO REALIZADO POR F DURANTE UN DESPLAZAMIENTO $\overrightarrow{PQ}$ ES

$$|F|\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cos\theta$$

1.4.1.2.1.1 Definición

El producto escalar A•B ("A punto B") de dos vectores A y B es el número:

$$A \bullet B = |A||B|\cos\theta = AB\cos\theta \qquad (10)$$

donde θ mide el menor ángulo determinado A y B cuando coinciden sus puntos iniciales(FIGURA 1.5JB).

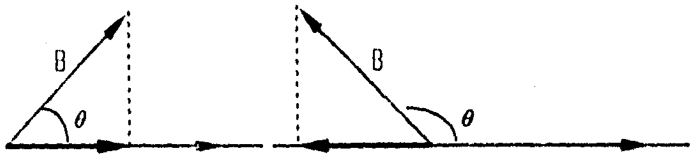


FIGURA 1.5J PROYECCIONES DE VECTORES DE B SOBRE A.

Es decir, el producto escalar de A y B es la longitud de A por la longitud de B por el coseno del ángulo entre ellas. El producto escalar es un escalar; en donde si el producto escalar es negativo, entonces el $\cos\theta$ es negativo y el ángulo entre A y B es mayor de 90°.

1.4.1.2.1.2 Propiedades

Si A, B y C **son vectores**, y m **es escalar**, entonces *(MURRAY, R., SPIEGEL, P. D.,* [1] *136-138; PURCELL, E. J., VARBERG, D., 571)*:

$A\bullet B = B\bullet A$	Ley conmutativa	(11a)
$A\bullet (B + C) = A\bullet B + A\bullet C$	Ley distributiva	(11b)
$m(A\bullet B) = (mA)\bullet B = A\bullet(mB) = (A\bullet B)m$	Ley asociativa	(11c)
$0\bullet A = 0$		(11d)

Si $A\bullet B = 0$, entonces al menos uno de los vectores (A,B) es cero o bien A y B son perpendiculares.

El ángulo que forma un vector A consigo mismo es $\theta = 0$, y $\cos\theta = 1$.

Por tanto,

$$A\bullet A = |A||A|(1) = |A|^2, \quad \text{o bien} \quad |A| = \sqrt{A\bullet A} \qquad (11e)$$

Dado que i, j y k son vectores unitarios,

$$i\bullet i = j\bullet j = k\bullet k = 1 \qquad i\bullet j = j\bullet k = k\bullet y = 0 \qquad (11f)$$

La primera expresión confirma que i, j y k tienen longitud unitaria, mientras en la segunda expresa el hecho de que i, j y k son perpendiculares entre sí.

1.4.1.2.1.3 Interpretación geométrica

El vector que se obtiene al proyectar B sobre la recta que contiene a A se llama proyección vectorial de B sobre A, la cual se denota como $proy_A B$, es decir, $|B|\cos\theta$ es la proyección del vector B en dirección A. De igual manera $|A|\cos\theta$ es la proyección del vector A en dirección B, por lo que se concluye que el producto escalar de dos vectores es igual a la longitud de uno de ellos multiplicada por la proyección del otro sobre él (FIGURA 1.5JC).

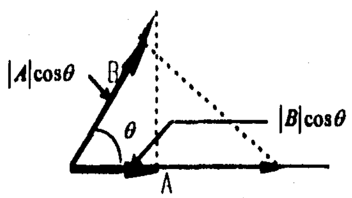


FIGURA 1.5JC INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO ESCALAR

1.4.1.2.1.4 Cálculo

Para calcular A•B en función de los componentes de A y B, dado que A=(A_1, A_2) y B=(B_1, B_2). Al aplicar la distributividad de la multiplicación escalar sobre la adición, para desarrollar y simplificar, se obtiene:

$$A \bullet B = A_1B_1 + A_2B_2. \qquad (12)$$

Así, para hallar el producto escalar de dos vectores dados, se multiplican las componentes correspondientes y se suman los resultados *(BOYCE,W.E.,DIPRIMA,R.C.,[1] 788-791)*.

Ejemplo 2. Encontrar b tal que U = (8,6) y F = (3,b) son perpendiculares*.

Dado que: U • F= $(8)(3)+(6)(b)=24+6b=0$
En consecuencia, $b = -4$ *(PURCELL, E. J., VARBERG., 571)*.

Ejemplo 3. Encuentre el ángulo entre los vectores U = (8,6) y F = (5,12).

Al utilizar la ecuación (10),

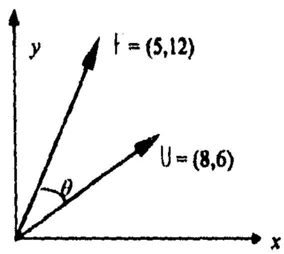
$$A \bullet B = |A||B|\cos\theta$$

y despejar θ, se tiene que:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{(8)(5)+(6)(12)}{(10)(13)} = \cos^{-1}(0.862) \approx 0.532 \ \ (\text{o} \ \ 30.5°)$$

---

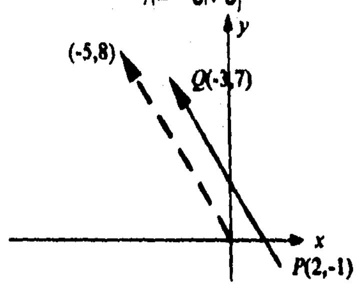
* Criterio de perpendicular. Dos vectores A y B son perpendiculares (ortogonales) si y sólo si su producto escalar A• B es 0 *(PURCEL, E. J., VARBERG, D.,571)*



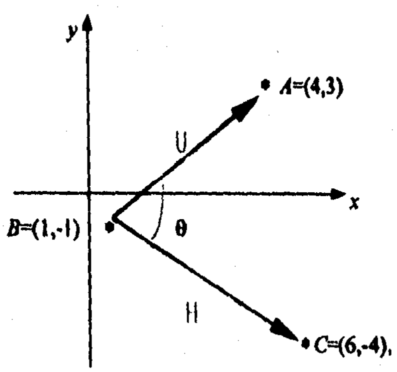
Ejemplo 4. Si A es la flecha que va del punto $P(2,-1)$ a $Q(-3,7)$, escribir al vector A en términos de componentes vectoriales ($A_1\mathrm{i}+A_2\mathrm{j}$):

Al trasladar primero la flecha de modo que parta del origen (ver figura), esto se puede realizar restando a las componentes del punto terminal las del punto inicial. Entonces, el vector algebraico es $\left[-3-2,7-(-1)\right]=(-5,8)$. Por lo tanto

$$\mathrm{A}=-5\mathrm{i}+8\mathrm{j}$$



Ejemplo 5. Encontrar la medida del ángulo ABC, el cual esta formado por los puntos $A=(4,3)$, $B=(1,-1)$ y $C=(6,-4)$, como se muestra en la figura siguiente:



$$\text{Si} \quad U = \overrightarrow{BA} = (4-1)i+(3+1)j = 3i+4j = (3,4)$$

$$H = \overrightarrow{BC} = (6-1)i+(-4+1)j = 5i-3j = (5,-3)$$

$$|U| = \sqrt{(3)^2+(4)^2} = 5$$

$$|H| = \sqrt{(5)^2+(-3)^2} = \sqrt{34}$$

$$U \bullet H = (3)(5)+(4)(-3) = 3$$

al utilizar la ecuación (11) y despejar θ, se tiene:

$$\theta = cos^{-1}\frac{3}{(5)(\sqrt{34})} = cos^{-1}(0.1049) \approx 84.094$$

El tercer tipo de producto es el producto vectorial, o cruz, que se indica por una cruz entre los dos vectores

1.4.1.2.2 Producto vectorial , o cruz

1.4.1.2.2.1 Interpretación geométrica

Si A y B son dos vectores distintos de cero, entonces por definición A×B es un vector V cuya magnitud es el producto de la longitud de los vectores A, B y el seno del ángulo que forman,

$$|A \times B| = |A||B| sen\,\theta \qquad (13)$$

y cuya dirección es perpendicular al plano determinado por A y B, siendo el sentido tal que un tornillo derecho que gire de A hacia B describa el menor de los ángulos entre estos vectores (FIGURA 1.5KA).

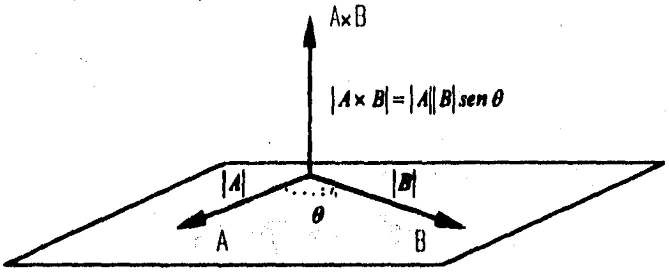


FIGURA 1.5KB INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO VECTORIAL

Como $|B| sen\,\theta$ es la proyección de B en la dirección de A, o sea la altura del paralelogramo determinado por A y B cuando se trazan desde el mismo punto, se dice que la magnitud $|A \times B|$, es decir $|A|(|B| sen\,\theta)$ es igual al área de este paralelogramo.

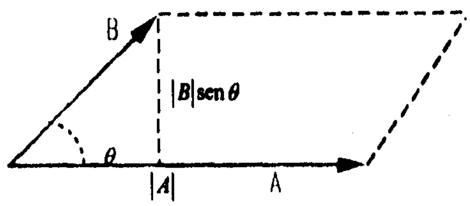


FIGURA 1.5KB INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO VECTORIAL

1.4.1.2.2.2 Propiedades

Si A, B y C **son vectores** y m **es escalar,** entonces *(MURRAY, R., SPIEGEL, P. D.,* [1] *136-138; PURCELL, E. J., VARBERG, D., 571):*

$A\times B = -B\times A$	(El producto vectorial no es conmutativo)	(14a)
$A\times(B+C)=A\times B+A\times C$	**Ley distributiva**	(14b)
$m(A\times B)=(mA)\times B= A\times(mB)=(A\times B)m$		(14c)
$A\times B=0$ **entonces uno de los vectores** A, B **es cero, o bien** A y B **son paralelos**		
$i\times i=j\times j=k\times k=0 \quad i\times j=k \;\; j\times k=i \;\; k\times i=j$		(14d)

1.4.1.2.2.3 Cálculo

Para calcular $A\times B$ **en función de las componentes de** A y B. **Dado que** (*BOYCE, E. W., DIPRIMA, R. C.,* [1] *802-805*):

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k \qquad B = B_1 i + B_2 j + B_3 k,$$

mediante la distributividad de la multiplicación vectorial sobre la adición, se obtiene:

$$A\times B=(A_2B_3 - A_3B_2)i + (A_3B_1 - A_1B_3)j + (A_1B_2 - A_2B_1)k \qquad (15a)$$

que no es más que la forma desarrollada del determinante, donde los coeficientes i, j **y** k **de la ecuación (15) se pueden escribir como un determinante de orden dos, y entonces:**

$$A\times B = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} k$$

$$= \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} k \qquad (15b)$$

El determinante anterior tiene la misma forma que el desarrollo de un determinante de orden tres, por ello se puede escribir $A\times B$ **como:**

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{16}$$

Ejemplo 6. Si A= i+2j−2k y B=2i−j+3k, determinar A× B:

Al sustituir en la expresión (16), se tiene que *(BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C.,[11] 804)*:

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4i - 7j - 5k$$

Ejemplo 7. Si A=3i−2j+k y B= 4i+2j−3k, determinar A× B:

Sustituyendo en (16), se obtiene *(PURCEL, E. J., VARBERG, D., 604)*:

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4i + 13j + 14k$$

1.4.1.3 Productos triples

Por medio de productos escalares y vectoriales entre tres vectores A, B y C, se pueden formar productos de la forma A• (B× C), A× (B× C) y (A• B)C *(MURRAY,R.;SPIEGEL,P.D,[** 17)*:

Si $A(A_1, A_2, A_3)$, $B(B_1, B_2, B_3)$ y $C(C_1, C_2, C_3)$ son vectores arbitrarios, entonces:

1.4.1.3.1 Producto triple escalar

El cual se denota como A•(B× C), es decir, el producto escalar de los vectores A y (B× C), en donde el resultado es un escalar. De acuerdo con la ecuación (15b), se tiene que:

$$A\bullet(B\times C)= A_1\begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} - A_2\begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix} + A_3\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \tag{17a}$$

y por consiguiente se puede escribir:

$$A\bullet(B\times C)=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}. \qquad (17b)$$

La ecuación (17a) es el desarrollo del determinante (17b) en cofactores de los elementos del primer renglón *(BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C.,[1] 809-811)*.

1.4.1.3.2 Interpretación geométrica

Dado un paralelepípedo definido por los vectores A, B y C (FIGURA 1.5L), donde la base del mismo es el paralelogramo definido por B y C con una área de $|B\times C|$. El vector $B\times C$ es perpendicular a B y a C, y la altura del paralelepípedo es $|A|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre A y $B\times C$. Entonces el valor absoluto del producto escalar de A y $B\times C$ esta dado por:

$$\begin{aligned}|A\bullet(B\times C)| &= |B\times C||A|\cos\theta\\ &=(\text{área de la base})\times(\text{altura})\\ &=\text{volumen del paralelepípedo}\end{aligned}$$

Si $|A\bullet(B\times C)|=0$, entonces el volumen del paralelepípedo es cero, lo que significa que los vectores A, B y C son coplanares.

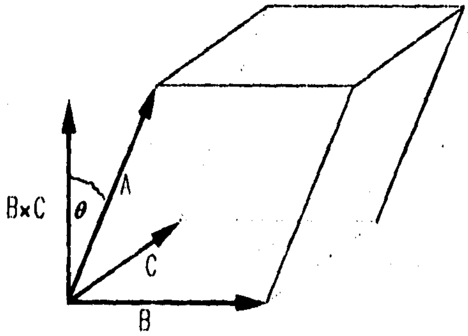


FIGURA 1.5L VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO $|A\bullet(B\times C)|$

Ejemplo 8. Determinar si los cuatro puntos $P(-1,1,0)$, $Q(2,0,3)$, $R(1,1,-1)$ y $S(1,-,-3)$ son coplanares y calcular el volumen del paralelepípedo cuyos lados son PQ, PR y PS *(BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C.,[1] 810-812)*.

Al definir los vectores

$$\overrightarrow{PQ}=3i-j+3k$$
$$\overrightarrow{PR}=2i-k$$
$$\overrightarrow{PS}=2i-2j-3k$$

Dado que dichos vectores son los lados del paralelepípedo entonces se procede a calcular el volumen del mismo, mediante el triple producto escalar:

$$\overrightarrow{PQ}\bullet\left(\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right)=\begin{vmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & -2 & -3\end{vmatrix}=-22$$

Como $\overrightarrow{PQ}\bullet\left(\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right)\neq 0$, los puntos no son coplanares y el volumen del mismo es igual a 22.

Una segunda manera de multiplicar tres vectores produce la expresión $A\times(B\times C)$, que siempre es un vector, y se llama **triple producto vectorial** de A, B y C.

Existen otras combinaciones en las cuales se verifican las propiedades siguientes *(MURRAY, R., SPIEGEL, M. R.,[2] 17)*:

$(A\bullet B)C\neq A(B\bullet C)$
$A\bullet(B\times C)=B\bullet(C\times A)=C\bullet(A\times B)=$ volumen del paralelepípedo con aristas A, B y C
$A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$
$A\times(B\times C)=(A\bullet C)B-(A\bullet B)C$
$(A\times B)\times C=(A\bullet C)B-(B\bullet C)A$

1.4.2 Funciones vectoriales de una variable escalar

1.4.2.1 Funciones y campos

1.4.2.1.1 Función escalar

Función en la que el dominio y rango son conjuntos de números reales (FIGURA 1.6A) *(LEITHOLD, L., 756)*.

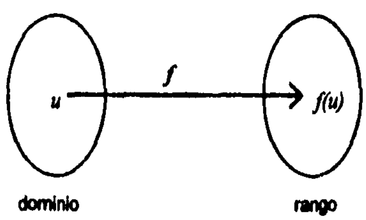


FIGURA 1.6A FUNCIÓN ESCALAR

Es decir, si a cada valor de un escalar u (variable independiente), se le asocia un único escalar $f(u)$ (variable dependiente), se dice que $f(u)$ es una **función escalar** de u. Al generalizar dicho concepto; si a cada punto (x,y,z), le corresponde un escalar $f(x,y,z)$, entonces este último es una función de (x,y,z) *(MURRAY, R., SPIEGEL, M. R.,[2] 138)*.

1.4.2.1.2 Campo escalar

Una función $f(x,y,z)$ define un **campo escalar**, debido a que asocia un escalar a cada punto de una región R en el espacio *(MURRAY, R., SPIEGEL, M. R.,[1] 3)*.

Ejemplo 9. La temperatura de cualquier objeto (o espacio físico delimitado) se define como un **campo escalar**, al fijar ejes coordenados de referencia con respecto al objeto, es decir, a cada punto éste le corresponde un numero que es la temperatura de ese punto en un instante.

Ejemplo 10. La función $f(x,y,z)=x^3y-z^2$, define un **campo escalar**.

1.4.2.1.3 Función vectorial

El dominio de la función es un conjunto de números reales y el rango es un conjunto de vectores (FIGURA 1.6B), es decir, si a cada valor de un escalar u (variable independiente) se le asocia un vector F (variable dependiente), se dice que F es una función de u denotado por $\mathrm{F}(u)$ *(LEITHOLD, L., 756)*.

En un plano tridimensional se puede escribir como:

$$\mathrm{F}(u)=f_1(u)\mathrm{i}+f_2(u)\mathrm{j}+f_3(u)\mathrm{k} \qquad (18)$$

donde $f_1(u), f_2(u), f_3(u)$ son funciones escalares de variable u y se llaman **componentes** de $\mathrm{F}(u)$.

Al generalizar, si a cada punto (x,y,z) le corresponde un vector F, el cual es una función de (x,y,z), se puede expresar como *(MURRAY, R., SPIEGEL, M. R.,[2] 138)*:

$$\mathrm{F}(x,y,z)=f_1(x,y,z)\mathrm{i}+f_2(x,y,z)\mathrm{j}+f_3(x,y,z)\mathrm{k} \qquad (18a)$$

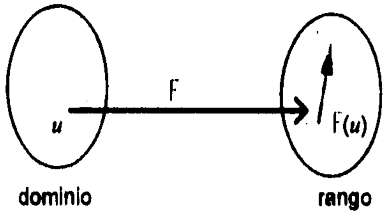


FIGURA 1.6B FUNCIÓN VECTORIAL

1.4.2.1.4 Campo vectorial

Una función $\mathrm{F}(x,y,z)$ define un **campo vectorial** debido a que asocia un vector a cada punto de una región R del espacio *(MURRAY, R., SPIEGEL, M. R.,[1] 3)*.

Ejemplo 11. Las velocidades en cada punto (x,y,z) en el interior de un fluido en movimiento, en un cierto instante, definen un campo vectorial.

Ejemplo 12. $V(x,y,z)= xy\mathrm{i}-2yz\mathrm{j}+xz\mathrm{k}$, define un campo vectorial.

1.4.2.2 Cálculo para funciones vectoriales

Una **función vectorial** F **de una sola variable escalar** t, **asigna a cada** valor de t en algún intervalo un único vector $\mathrm{F}(t)$, ejemplo, una función vectorial definida por:

$$\mathrm{F}(t)=[f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$$
$$= f_1(t)\,\mathrm{i} + f_2(t)\,\mathrm{j} + f_3(t)\,\mathrm{k} \qquad \text{(18b)}$$

donde $f_1(t), f_2(t)$, y $f_3(t)$ son funciones escalares de t *(HSU, H. P., MEHRA, R., 41)*.

1.4.2.2.1 Límite y continuidad

En forma intuitiva, $$\lim_{t\to a} \mathrm{F}(t) = \mathrm{L} \qquad \text{(19a)}$$

significa que el vector $\mathrm{F}(t)$ cuanto $t \to a$ es el vector L, es decir, $\mathrm{F}(t)$ se mueve hacia la "posición" ocupada por L cuando $t \to a$(FIGURA 1.7). En el límite, la longitud y dirección de F deben coincidir con la longitud y dirección de L.

Al suponen que L y $\mathrm{F}(t)$ **están situadas de manera** que coinciden **sus puntos iniciales**; cuando $\mathrm{F}(t)$ tiende **a** L, el vector diferencia $\mathrm{F}(t) - \mathrm{L}$ **debe decrecer hasta cero**, lo cual equivale a decir que su longitud $|F(t)-L|$ **se** hace cero cuando $t \to a$. Esta longitud es una función **de valores reales de una sola** variable t *(PURCELL, E. J., VARBERG, D., 575)*.

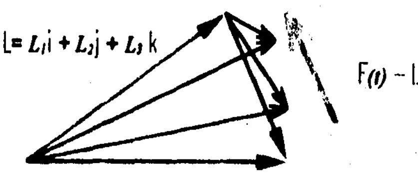


FIGURA 1.7 LIMITE DEL VECTOR $\lim_{t\to a} \mathrm{F}(t) = \mathrm{L}$

En base a lo anterior se dice que:

Sea $\mathrm{F}(t)= f_1(t)\,\mathrm{i} + f_2(t)\,\mathrm{j} + f_3(t)\,\mathrm{k}$ **una función vectorial de** t. **El** límite de $\mathrm{F}(t)$ cuando t tiende al número a **es el** vector L si, y sólo si, el límite $|F(t)-L|$ de cuando t tiende **a** a es cero. Es decir,

$$\lim_{t\to a} \mathrm{F}(t) = \mathrm{L} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to a}|F(t)-L| = 0 \qquad \text{(19b)}$$

Si $\mathrm{F}(t)$ tiende a L como límite, ello significa que las componentes de F tienen como límite a **las** componentes correspondientes de L. Al expresar a $\mathrm{F}(t)$ y a L como:

$$\mathrm{F}(t) = f_1(t)\mathrm{i} + f_2(t)\mathrm{j} + f_3(t)\mathrm{k} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{L} = L_1\mathrm{i} + L_2\mathrm{j} + L_3\mathrm{k},$$

se tiene que:

$$\lim_{t\to a} \mathrm{F}(t) = \mathrm{L} \iff \lim_{t\to a} f_1(t) = L_1, \quad \lim_{t\to a} f_2(t) = L_2, \quad \text{y} \quad \lim_{t\to a} f_3(t) = L_3. \qquad (20)$$

Dicha equivalencia significa que se puede calcular los límites de funciones con valores vectoriales componente a componente *(FINNEY, R. L., THOMAS, G. B., 783)*.

Ejemplo 13. Hallar el $\lim_{t\to 0} \mathrm{F}(t)$, si la función es la siguiente:

$$\mathrm{F}(t) = e^t\mathrm{i} + \frac{sen\,t}{t}\mathrm{j} + \frac{t^2+6}{3+ln(1+t)}\mathrm{k}$$

Los límites de las componentes de $\mathrm{F}(t)$, cuando $t \to 0$:

$$\lim_{t\to 0} e^t = 1, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{sen\,t}{t} = 1, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{t^2+6}{3+ln(1+t)} = 2.$$

Por lo tanto *(MC QUISTAN, R. B., 61)*:

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{F}(t) = \mathrm{i} + \mathrm{j} + 2\mathrm{k}$$

Ejemplo 14. Hallar el $\lim_{t\to 0} \mathrm{F}(t)$, si la función es la siguiente:

$$\mathrm{F}(t) = \frac{t}{e^t}\mathrm{i} + \left[-3e^{-2t}\right]\mathrm{j} + \frac{t^2+t-6}{t-2}\mathrm{k}$$

Los límites de las componentes de $\mathrm{F}(t)$, cuando $t \to 0$ son:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t} = 0, \qquad \lim_{t\to 0}\left[-3e^{-2t}\right] = -3, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{t^2+t-6}{t-2} = 3.$$

Por lo tanto *(PURCELL, E. J., VARBERG, D., 580)*:

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{F}(t) = -3\mathrm{j} + 3\mathrm{k}$$

La continuidad de una función vectorial se define como:

Una función vectorial $\mathrm{F}(t)$ es continua en a, si F está definida en a; si existe el $\lim_{t\to a} \mathrm{F}(t)$ y

$$\lim_{t\to a} \mathrm{F}(t) = \mathrm{F}(a) \qquad (21a)$$

Ello significa que el vector L de la ecuación (19a) debe ser el mismo que $\mathrm{F}(a)$. Así, la ecuación (21a) es equivalente a los límites de las tres ecuaciones escalares, de modo que $\mathrm{F}(t)$ es continua en a si, y sólo si, cada componente de F es continua en a *(BOYCE, E. W., DiPRIMA, R. C.,[1] 828-829; FINNEY, R. L., THOMAS, G. B., 781-783)*.

$$\lim_{t\to a} f_1(t) = f_1(a), \qquad \lim_{t\to a} f_2(t) = f_2(a), \qquad \lim_{t\to a} f_3(t) = f_3(a). \qquad (21b)$$

Ejemplo 15. La función

$$\mathrm{F}(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{i}+(sen\,t)\ \mathrm{j}+ln\left(1+t^2\right)\mathrm{k}$$

es continua para todo valor de $t>0$, ya que cada componente es continua para $t>0$. Sin embargo, F es discontinua para $t\leq 0$, ya que, $1/\sqrt{t}$ la primera componente de F, no esta definida para $t\leq 0$ *(FINNEY, R. L., THOMAS, G. B.,784)*.

1.4.2.2.2. La derivada

Sea $\mathrm{F}(t)$ una función vectorial de la variable escalar t:

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\mathrm{F}=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} \qquad (22)$$

donde $\Delta\mathrm{F}$ es un vector y Δt es un escalar, de modo que el cociente $\Delta\mathrm{F}/\Delta t$ es un vector (FIGURA 1.8A). Al considerar el límite del incremento de t (Δt), cuando tiende a cero ($\Delta t\to 0$), para obtener la derivada esta se representa mediante $\mathrm{F}'(t)$, o $d\mathrm{F}/dt$. Así,

$$\mathrm{F}'(t)=\frac{d}{dt}\mathrm{F}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} \qquad (23)$$

si existe el límite *(MURRAY, R., SPIEGEL, M. R.,[1] 35)*.

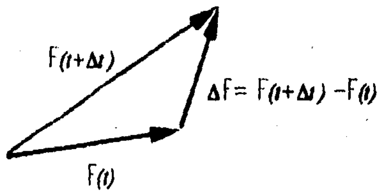


FIGURA 1.8A DERIVADA DE LA FUNCIÓN $\mathrm{F}(t)$

1.4.2.2.3 Interpretación geométrica de la derivada

Si $\mathrm{F}(t)$ y $\mathrm{F}(t+\Delta t)$ son los vectores de posición de los puntos P y Q respectivamente (FIGURA 1.8B) en la curva definida mediante la función vectorial F entonces el vector $\mathrm{F}(t+\Delta t)-\mathrm{F}(t)$, o sea $\overrightarrow{PQ}$ es el vector secante entre los puntos P y Q de la curva.

El vector que aparece en el cociente de las diferencias en la ecuación (23) es proporcional a $\overrightarrow{PQ}$, de hecho esta dado por $\overrightarrow{PQ}/\Delta t$. Si existe el límite en la misma, esto es, si $\overrightarrow{PQ}/\Delta t$ tiene un límite cuando $\Delta t\to 0$, y si el límite no es cero, entonces este vector límite $\mathrm{F}'(t)$ es tangente a la curva $\mathrm{F}(t)$ en el punto P y apunta en dirección positiva con respecto a t (FIGURA 1.8C).

La recta tangente a la curva $F(t)$ en el punto P que corresponde a $t=a$ es la recta que pasa por P y que es paralela al vector $F'(a)$.

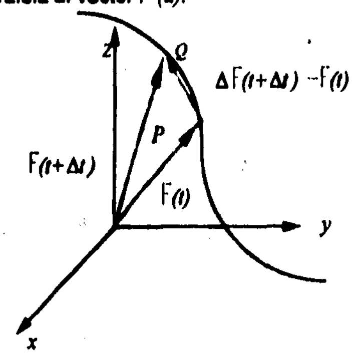


FIGURA 1.8B INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Alternativamente, si se considera a $F(t)$ como la ecuación que describe a la posición de una partícula en movimiento en el tiempo t, entonces $F'(t)$ es la razón de cambio de la posición de la partícula con respecto al tiempo. En otras palabras, $F'(t)$ es la velocidad de la partícula, y es tangente a la trayectoria en que se mueve la partícula *(BOYCE, E. W., DiPRIMA, R. C.[1] 829-830).*

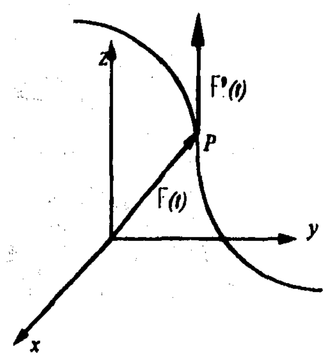


FIGURA 1.8C INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

De igual manera, se establece que la función $F(t)$ es derivable respecto a t si, y sólo si, lo es en cada una de sus componentes:

Dada una función vectorial *(FINNEY, R. L., THOMAS, G. B., 782-784).*:

$$F(t)=f_1(t)\mathrm{i}+f_2(t)\mathrm{j}+f_3(t)\mathrm{k} \qquad (18a)$$

la derivada de dicha función se puede expresar en términos de componentes:

$$F'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1(t+\Delta t)-f_1(t)}{\Delta t}\mathrm{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_2(t+\Delta t)-f_2(t)}{\Delta t}\mathrm{j}$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_3(t+\Delta t)-f_3(t)}{\Delta t}\mathrm{k}$$

$$= f_1'(a)\,\mathrm{i} + f_2'(a)\,\mathrm{j} + f_3'(a)\,\mathrm{k} \qquad \textbf{(24)}$$

De esta manera, $F'(t)$ es el vector cuyas componentes son las derivadas de las componentes correspondiente de $F(t)$.

Ejemplo 16. **La derivada de** ***(FINNEY, R. L., THOMAS, G. B.,784)***

$$A(t) = (sen^2\, t)\,\mathrm{i} + (ln\, t)\,\mathrm{j} + [tan^{-1}(3t)]\,\mathrm{k}$$

es $$A'(t) = [2\,sen\, t\, cos\, t]\,\mathrm{i} + \frac{1}{t}\,\mathrm{j} + \frac{3}{1+9t^2}\,\mathrm{k}$$

Ejemplo 17. **La derivada de:**

$$A(t) = ang\,tan\sqrt{x+2}\,\mathrm{i} + \frac{1}{e^{3x}}\,\mathrm{j} + \sqrt{\frac{x}{x-2}}\,\mathrm{k}$$

es $$A'(t) = \frac{1}{(2x+6)\sqrt{x+2}}\,\mathrm{i} - 3e^{-3x}\,\mathrm{j} - \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-2)^{3/2}}\,\mathrm{k}$$

Las reglas para la derivación de funciones vectoriales son similares a las correspondientes para funciones escalares con una excepción. Para diferenciar el producto vectorial de funciones vectoriales, debe conservarse el orden de los factores, debido a que el producto vectorial no es una operación conmutativa.

Si $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son funciones vectoriales de una variable escalar t, $f(t)$ es una función escalar y c es un escalar, entonces ***(HSU, H. P., MEHRA, R., 44; PURCELL, E. J., VARBERG, D., 576)*:**

$$\frac{d}{dt}[\,A(t) + B(t)\,] = A'(t) + B'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\,c\,A(t)\,] = c\,A'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\,f(t)\,A(t)\,] = f(t)\,A'(t) + f'(t)\,A(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\,A(t) \bullet B(t)\,] = A(t) \bullet B'(t) + A'(t) \bullet B(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\,A(t) \times B(t)\,] = A(t) \times B'(t) + A'(t) \times B(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\,A(t) \bullet B(t) \times C(t)\,] = A'(t) \bullet B(t) \times C(t) + A(t) \bullet B'(t) \times C(t) + A(t) \bullet B(t) \times C'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\{\, A(t) \times [\, B(t) \times C(t)\,]\} = A'(t) \times [\, B(t) \times C(t)\,] + A(t) \times [\, B'(t) \times C(t)\,]$$
$$- A(t) \times [\, B(t) \times C'(t)\,]$$

Ejemplo 18. Si $A(t) = (2+t)\,\mathrm{i} - t^2\,\mathrm{j} + sen\frac{\pi t}{2}\,\mathrm{k}$

y $B(t) = \frac{t}{2}\,\mathrm{i} + cos\frac{\pi t}{2}\,\mathrm{j} - 2t\,\mathrm{k}$

determinar $\frac{d}{dt}[\, A(t) \bullet B(t)\,]$ **y evaluar dicha expresión cuando** $t=1$.

Dado que ***(BOYCE, E. W., DiPRIMA, R. C., 832-833):***

$$A'(t) = \mathrm{i} - 2t\,\mathrm{j} + \frac{\pi}{2}cos\frac{\pi t}{2}\,\mathrm{k} \qquad B'(t) = \frac{1}{2}\mathrm{i} - \frac{\pi}{2}sen\frac{\pi t}{2}\,\mathrm{j} - 2\,\mathrm{k}$$

entonces,

$$\frac{d}{dt}[\, A(t) \bullet B(t)\,] = A(t) \bullet B'(t) + A'(t) \bullet B(t)$$

se obtiene:

$$\frac{d}{dt}[\, A(t) \bullet B(t)\,] = \left[\frac{2+t}{2} - \frac{\pi}{2}t^2 sen\frac{\pi t}{2} - 2sen\frac{\pi t}{2}\right]$$
$$+ \left[\frac{t}{2} - 2t\,cos\frac{\pi t}{2} - 2t\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi t}{2}\right]$$
$$= 1 + t - sen\frac{\pi t}{2}\left(\frac{\pi}{2}t^2 + 2\right) - 2t\,cos\frac{\pi t}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Cuando $t=1$, **se tiene que:**

$$\frac{d}{dt}[\, A(t) \bullet B(t)\,]\Big|_{t=1} = 1 + 1 - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 19. Si $f(t) = t^3$ y $A(t) = t^2\,\mathrm{i} + e^{-t}\,\mathrm{j}$ **determinar** $\frac{d}{dt}[\, f(t)\,A(t)\,]$:

Dado que ***(PURCELL, E. J., VARBERG, D., 577):***

$$f'(t) = 3t^2 \qquad A'(t) = 2t\,\mathrm{i} - e^{-t}\,\mathrm{j}$$

entonces,

$$\frac{d}{dt}[\, f(t)\,A(t)\,] = f(t)\,A'(t) + f'(t)\,A(t)$$

se obtiene:

$$\frac{d}{dt}[\, f(t)\,A(t)\,] = t^3(2t\,\mathrm{i} - e^{-t}\,\mathrm{j}) + 3t^2(t^2\,\mathrm{i} + e^{-t}\,\mathrm{j})$$
$$= 5t^4\,\mathrm{i} + (3t^2 - t^3)e^{-t}\,\mathrm{j}$$

1.4.2.3 Longitud de arco

Sea una función vectorial *(BOYCE, E. W., DIPRIMA, R. C., 824,835-837):*

$$\mathrm{R}=\mathrm{R}(t)=r_1(t)+r_2(t)+r_3(t) \qquad (18b)$$

en la cual t esta en el intervalo $a \le t \le b$, entonces, para cada valor de t en el intervalo, la ecuación (18b) determina un vector R que se considera como el vector de posición de un punto P. El conjunto de puntos obtenidos de esta manera forman un arco o curva (FIGURA 1.9A).

Si t representa el tiempo, entonces la curva es la trayectoria seguida por la partícula que se mueve conforme a la ecuación (18b), en donde la flecha de la FIGURA 1.9A indica la dirección del movimiento. Los puntos R=R(a) y R=R(b) se llaman punto inicial y punto final respectivamente. Al dar una partición del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos, de modo que,

$$a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=b$$

la norma de partición es la longitud del intervalo más grande. Para un punto t_i arbitrario de partición, al evaluar en R(t_i), se determina el punto P_i correspondiente en la curva (FIGURA 1.9B).

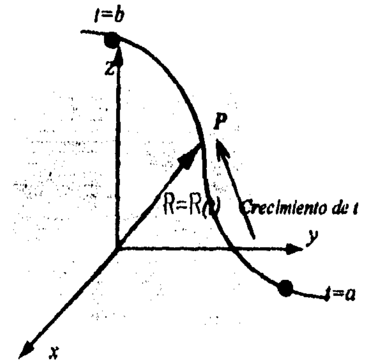


FIGURA 1.9A ARCO FORMADO POR LA FUNCIÓN R(t) EN EL INTERVALO $a \le t \le b$

Posterior a ello, al trazar segmentos de recta de P_0 a P_1, de P_1 a P_2, y así sucesivamente.(FIGURA 1.9C). **Y sumar las longitudes de todos esos segmentos de recta, se obtiene la longitud de una poligonal de aproximación a la curva dada.**

La longitud del segmento de recta que une a P_{i-1} con P_i es(FIGURA 1.9D):

$$\left|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\right|=\left|R(t_i)-R(t_{i-1})\right| \qquad (25a)$$

Por lo tanto, la longitud de la poligonal de aproximación es:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| R(t_i) - R(t_{i-1}) \right| \qquad \textbf{(25b)}$$

Si la suma de la ecuación (25b) tiende a un limite, cuando la norma de partición tiende a cero, entonces este valor se define como la **longitud de la curva**:

$$l(a,b) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left| R(t_i) - R(t_{i-1}) \right| \qquad \textbf{(25c)}$$

La expresión del lado derecho de la ecuación (25c) se convierte entonces en una integral. Al multiplicar y dividir el iésimo termino de la suma por $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} > 0$,

$$l(a,b) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{R(t_i) - R(t_{i-1})}{\Delta t} \right| \Delta t \qquad \textbf{(25d)}$$

Dado $R'(t)$ que es continua, entonces existe el limite de (25d) y la **longitud del arco** esta dada por la integral:

$$l(a,b) = \int_a^b \left| R'(t) \right| dt \qquad \textbf{(25e)}$$

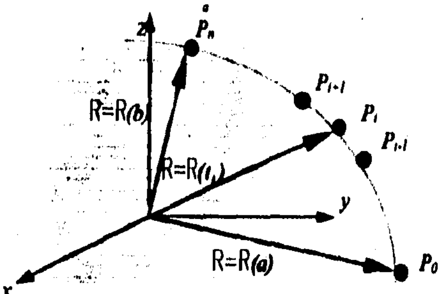


FIGURA 1.9B LONGITUD DE ARCO: PARTICIONES

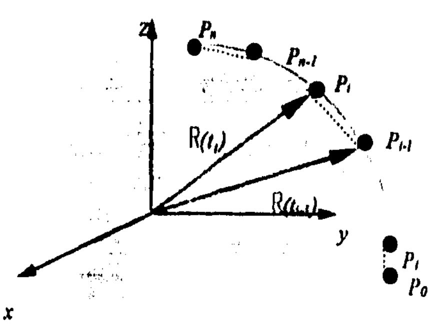


FIGURA 1.9C LONGITUD DE ARCO: TRAZADO DE SEGMENTOS

Si $\quad \mathrm{R}'(t) = R_1(t)\mathrm{i} + R_2(t)\mathrm{j} + R_3(t)\mathrm{k}$

entonces, la ecuación (25e), se puede escribir como:

$$l(a,b) = \int_a^b \left[\left[R_1'(t)\right]^2 + \left[R_2'(t)\right]^2 + \left[R_3'(t)\right]^2\right]^{1/2} dt \qquad (25f)$$

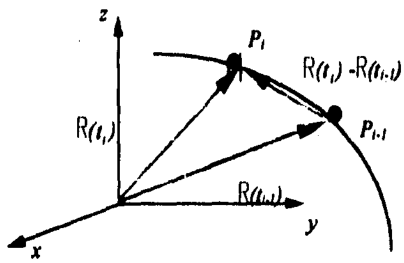


FIGURA 1.9D LONGITUD DE ARCO

Ejemplo 20. Hacer un dibujo de la gráfica del arco *(BOYCE, E.W., DIPRIMA, R.C., 824-825)*:

$$\mathrm{R}(t) = -\frac{t}{2}\mathrm{i} + 2\cos\frac{\pi t}{2}\mathrm{j} + 2t\mathrm{k} \qquad -1 \le t \le 1$$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son

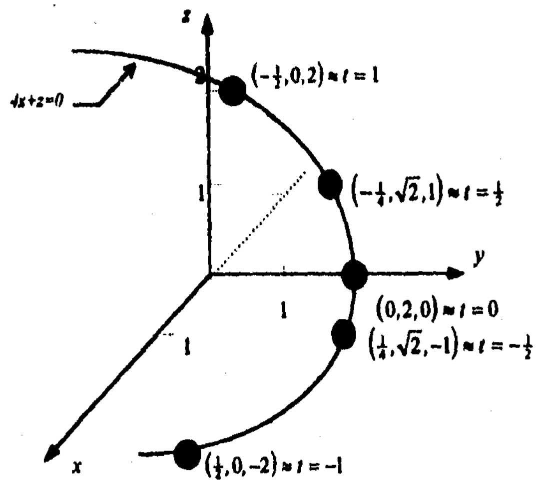
$$x = -\frac{t}{2}, \qquad y = 2\cos\frac{\pi t}{2}, \qquad z = 2t.$$

De acuerdo con la primera y tercera ecuación, $4x + z = 0$ para toda t; así, el arco queda en el plano $4x + z = 0$. En la tabla siguiente se registran las coordenadas de los puntos que corresponden a diversos valores de t.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
R	$\left(\frac{1}{2},0,-2\right)$	$\left(\frac{1}{4},\sqrt{2},-1\right)$	$(0,2,0)$	$\left(-\frac{1}{4},\sqrt{2},1\right)$	$\left(-\frac{1}{2},0,2\right)$

En base a dicha tabla se puede observar que t varía desde -1 hasta 1, la componente x de R disminuye, y aumenta la componente z; la componente y aumenta para $-1 \le t \le 0$, y disminuye para $0 \le t \le 1$.

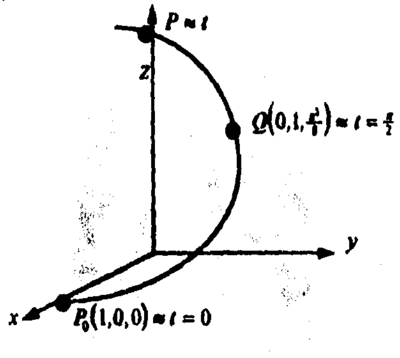
Además, las componentes x y z son funciones impares de t, mientras que la componente y es una función par. Al emplear esta información, se puede trazar la gráfica que se muestra en la siguiente figura:



Ejemplo 21. **Se tiene la curva representada por**

$$R(t) = \cos t\,\mathrm{i} + \operatorname{sen} t\,\mathrm{j} + \frac{1}{2}t^2\mathrm{k}$$

Determinar la longitud del arco que une a $P_0(1,0,0)$ que corresponde a $t=0$, con el punto $Q(0,1,\pi^2/8)$ que corresponde a $t=\pi/2$ (Ver figura). Además, determinar la longitud del arco desde P_0 hasta el punto P que corresponde a un valor arbitrario de t.



Al derivar la ecuación, se obtiene:

$$R'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathrm{i} + \cos t\,\mathrm{j} + t\,\mathrm{k}$$

así, $\quad |R'(t)| = \left[(-sen\,t)^2 + (cos\,t)^2 + t^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+t^2}$

Entonces. de acuerdo con la ecuación (25e), la longitud del arco de P_0 a Q es:

$$l\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

La sustitución $t = tan\,\theta$ transforma esa integral en:

$$l\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\arctan \pi/2} sec^3\,\theta\, d\theta$$

Al evaluar, el resultado es:

$$\begin{aligned} l\left(0,\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta\tan\theta|\right]_0^{\arctan \pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left|\sqrt{1+t^2}+t\right|\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} + \ln\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}+\frac{\pi}{2}\right)\right] \cong 2.79 \end{aligned}$$

Representando la longitud de arco de P_0 a P mediante $s(t)$ para destacar que depende del valor de t, entonces al emplear nuevamente la ecuación (25e), se tiene que:

$$\begin{aligned} s(t) = l(0,t) &= \int_0^t |R'(\tau)|\, d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{1+\tau^2}\, d\tau. \end{aligned}$$

cambiando la variable de integración a τ para evitar confusiones con la variable independiente t en el límite superior de integración. Evaluando dicha ecuación, el resultado es:

$$s(t) = \tfrac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + ln\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)\right]$$

1.4.3 Funciones vectoriales de más de una variable

1.4.3.1 Funciones de dos o más variables

Función real de dos variables reales. Función f que asigna a cada par ordenado (x,y) de algún conjunto D del plano, un número real único $f(x,y)$.

Ejemplo 22. Dadas las funciones

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 \qquad \text{y} \qquad g(x,y) = 2x\sqrt{y}$$

entonces:

$$f(-1,4)=(-1)^2+3(4)^2=49 \quad \text{y} \quad g(-1,4)=2(-1)\sqrt{4}=-4$$

Si $z=f(x,y)$, se dice que x y y son **las variables independientes** y z es la **variable dependiente**, lo anterior se puede extender a funciones con tres variables (o aún n variables reales) *(LEITHOLD, L., 549).*

La **gráfica** de una función de dos variables $z=f(x,y)$, por lo general es una superficie (FIGURA 1.10) en donde a cada par ordenado (x,y) del dominio le corresponde un solo valor de z *(PURCELL, E. J., VARBERG, D., 634).*

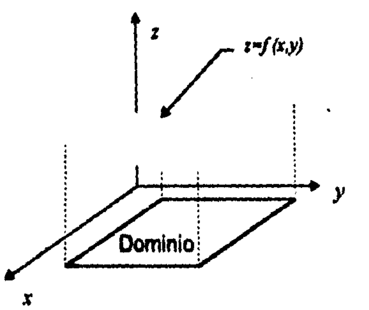


FIGURA 1.10 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES $z=f(x,y)$

1.4.3.2 Derivadas parciales

1.4.3.2.1 Derivadas parciales de funciones escalares

Sea f una función escalar de dos variables x y y, si y se mantiene constante, es decir, $y=y_o$, entonces $f(x, y_o)$ se convierte en una función de una sola variable. La derivada para $x=x_o$ se llama derivada parcial de f con respecto a x en (x_o, y_o) y se denota como $f_x(x_o, y_o)$. Por lo tanto,

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \qquad (26)$$

si el límite existe. En forma similar, la derivada parcial de f con respecto a y en (x_o, y_o) se designa como $f_y(x_o, y_o)$ y esta dada por la expresión *(PURCELL, E. J., VARBERG, D.,640)*:

$$f_{yx}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \qquad (27)$$

Ejemplo 23. Encontrar $f_x(1,2)$ y $f_y(1,2)$ si $f(x,y)=x^2y+3y^3$

Para encontrar $f_x(x,y)$ se considera a y como constante y se deriva con respecto a x, para obtener

$$f_x(x,y)=2xy+0$$

entonces. $f_x(1,2) = 2(1)(2) = 4$

Análogamente. $f_y(x,y) = x^2 + 9y^2$

y así $f_y(1,2) = (1)^2 + 9(2)^2 = 37$

Si $z=(x,y)$ al utilizar las siguientes alternativas de notación, se tiene:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$f_x(x_0,y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad f_y(x_0,y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Ejemplo 24. Si $z = x^2\, sen(xy^2)$, encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$

entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= x^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[sen(xy^2)\right] + sen(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\\ &= x^2 cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + 2x\, sen(xy^2)\\ &= x^2y^2 cos(xy^2) + 2x\, sen(xy^2)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y\, cos(xy^2)$$

Si f es función de más de dos variables, se amplía el concepto de derivada parcial de manera natural. Por ejemplo, si se supone que f es una función de tres variables *(BOYCE, E. W., DIPRIMA, R. C.,892).*

$$w=(x,y,z) \qquad (28)$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}, \qquad (26a)$$

siempre que exista el límite, es el valor de la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0,y_0,z_0). Esta cantidad es la razón de cambio de f con respecto a x en este punto. Análogamente, las derivadas parciales de f con respecto a y y a z en el punto (x_0,y_0,z_0) están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y, z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta y}, \qquad (27a)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}, \qquad (29)$$

siempre y cuando existan los límites. En los tres casos sólo se permite que varíe una variable independiente, mientras que las otras dos se mantienen constantes. La definición de derivadas parciales para funciones de más de tres variables es análoga.

Ejemplo 25. Si $f(x,y,z)=(x^2-2y)(3x+z^2)$, determinar las derivadas parciales de f con respecto a x, y, y z, respectivamente *(BOYCE, E. W., DiPRIMA, R. C.,892-894)*.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)&=(x^2-2y)\frac{\partial}{\partial x}\left[3x+z^2\right]+(3x+z^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2-2y)\\&=(x^2-2y)(3)+(3x+z^2)(2x)\\&=3x^2-6y+6x^2+2xz^2\\&=9x^2-6y+2xz^2\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)&=(x^2-2y)\frac{\partial}{\partial y}\left[3x+z^2\right]+(3x+z^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^2-2y)\\&=(x^2-2y)(0)+(3x+z^2)(-2)=-6x-2z^2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)&=(x^2-2y)\frac{\partial}{\partial z}\left[3x+z^2\right]+(3x+z^2)\frac{\partial}{\partial z}(x^2-2y)\\&=(x^2-2y)(2z)+(3x+z^2)(0)=2x^2z-4yz.\end{aligned}$$

Los conceptos de límite y continuidad de funciones de una variable se pueden generalizar a las funciones de dos o mas variables.

1.4.3.2.2 Interpretación geométrica

Dada una superficie cuya ecuación es $z=f(x,y)$. El plano $y=y_0$ intercepta esta superficie en la curva plana QPR (FIGURA 1.11A) y el valor de $f_x(x_0,y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a esta curva en $P\left[x_0,y_0,f(x_0,y_0)\right]$.

De la misma manera, el plano $x=x_0$ corta la superficie en la curva plana LPM (FIGURA 1.11B), y $f_y(x_0,y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a esta curva en P *(PURCELL, E.J., VARBERG, D.,641)*.

1.4.3.2.3 Derivadas parciales de orden superior

Una derivada parcial de una función en x y y es, en general, otra función con las mismas dos variables, a la cual se puede calcular su derivada parcial, ya sea con respecto a x o a y, con lo que resultan cuatro **segundas derivadas parciales** de f *(Mc QUISTAN, R. B., 96-98)*:

$$f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\qquad\qquad f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy}=(f_x)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \qquad f_{yx}=(f_y)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

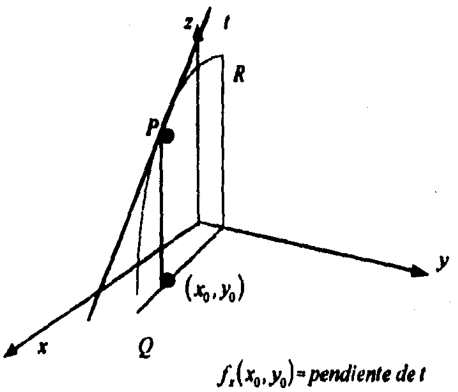


FIGURA 1.11A INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA PARCIAL DE LA FUNCIÓN *z=f(x,y)* CON RESPECTO A *x*.

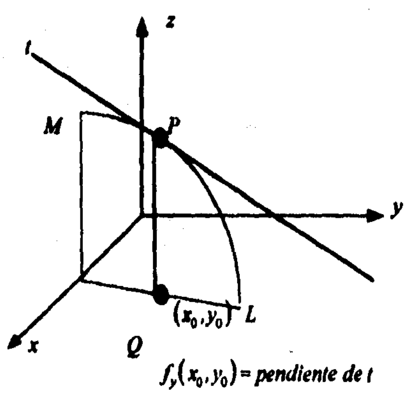


FIGURA 1.11B INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA PARCIAL DE LA FUNCIÓN *z=f(x,y)* CON RESPECTO A *y*.

Ejemplo 26. **Encontrar las cuatro segundas derivadas parciales de *(HSU, H.P., MEHERA, R., 98)*:**

$$f(x,y)=xe^y-sen(x/y)+x^3y^2$$

entonces:

$$f_x(x,y) = \ell^y - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 3x^2y^2$$

$$f_y(x,y) = x\ell^y + \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3y$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{y^2}sen\left(\frac{x}{y}\right) + 6xy^2$$

$$f_{yy}(x,y) = x\ell^y + \frac{x^2}{y^4}sen\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2x}{y^3}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3$$

$$f_{xy}(x,y) = \ell^y - \frac{x}{y^3}sen\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

$$f_{yx}(x,y) = \ell^y - \frac{x}{y^3}sen\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

Las derivadas parciales de órdenes tercero y superior se definen en forma análoga. Así, si f es una función de dos variables x y y, la tercera derivada de f que se obtiene mediante la derivación parcial de f, primero con respecto a x y después dos veces con respecto a y, se indica mediante:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x} = f_{xyy}$$

1.4.3.2.4. Derivadas parciales de una función vectorial

Sea A **una función vectorial de dos o más variables escalares, por ejemplo de x, y, z, esto es,** A= **$A(x, y, z)$. La derivada parcial de** A **respecto de x es, por definición,**

$$\frac{\partial}{\partial x}A = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x+\Delta x,y,z)-A(x,y,z)}{\Delta x} \qquad \textbf{(30)}$$

si existe este límite. Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}A = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{A(x,y+\Delta y,z)-A(x,y,z)}{\Delta y} \qquad \textbf{(31)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}A = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{A(x,y,z+\Delta z)-A(x,y,z)}{\Delta z} \qquad \textbf{(32)}$$

son las derivadas parciales de A respecto de y y de z, respectivamente, siempre que los límites existan *(MURRAY, R., SPIEGEL, M. R.,[1] 36-38).*

De igual manera dicha función vectorial expresada en componentes vectoriales:

$$A \quad A(x,y,z) = f_1(x,y,z)\mathrm{i} + f_2(x,y,z)\mathrm{j} + f_3(x,y,z)\mathrm{k}$$

Al aplicar la definición de derivada parcial , se encuentra que:

$$\frac{\partial}{\partial x}A=\frac{\partial f_1}{\partial x}i+\frac{\partial f_2}{\partial x}j+\frac{\partial f_3}{\partial x}k$$
$$\frac{\partial}{\partial y}A=\frac{\partial f_1}{\partial y}i+\frac{\partial f_2}{\partial y}j+\frac{\partial f_3}{\partial y}k$$
$$\frac{\partial}{\partial z}A=\frac{\partial f_1}{\partial z}i+\frac{\partial f_2}{\partial z}j+\frac{\partial f_3}{\partial z}k$$

Ejemplo 27. Derivar parcialmente con respecto a x, y, y z, la siguiente función vectorial:

$$A(x,y,z)=\frac{x+y}{z}i+xyz\,j+\ell^{x-y+z}k$$

Al aplicar la definición de derivada parcial, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x}A=\frac{1}{z}i+yz\,j+\ell^{x-y+z}k$$
$$\frac{\partial}{\partial y}A=\frac{1}{z}i+xz\,j-\ell^{x-y+z}k$$
$$\frac{\partial}{\partial z}A=\frac{-x-y}{z^2}i+xy\,j+\ell^{x-y+z}k$$

Las derivadas de orden superior se definen de la misma forma que en el caso de funciones escalares:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}A=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}A\right),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}A=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}A\right),\qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}A=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}A\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}A=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}A\right),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}A=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}A\right),\qquad \frac{\partial^3}{\partial x\partial z^2}A=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}A\right)$$

Las reglas de la derivación parcial de vectores son análogas a las del cálculo diferencial ordinario para las funciones ascalares. Por lo tanto, si A y B son funciones de x,y z, se tiene *(BELAUNZARAN, G. E., FRONTANA, D. B., ET. ALL., 96)*:

$$\frac{\partial}{\partial x}(A\bullet B)=A\bullet\frac{\partial}{\partial x}B+\frac{\partial}{\partial x}A\bullet B$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(A\times B)=A\times\frac{\partial}{\partial x}B+\frac{\partial}{\partial x}A\times B$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(A\bullet B)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(A\bullet B)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[A\bullet\frac{\partial}{\partial x}B+\frac{\partial}{\partial x}A\bullet B\right]$$
$$=A\bullet\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}B+\frac{\partial}{\partial y}A\bullet\frac{\partial}{\partial x}B+\frac{\partial}{\partial x}A\bullet\frac{\partial}{\partial y}B+\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}A\bullet B$$

1.5. Operaciones vectoriales

1.5.1 Gradiente

Si $f(x,y,z)$ es una función definida y derivable parcialmente en cada uno de los puntos (x,y,z) de una cierta región del espacio (donde f define un campo escalar derivable), entonces el **gradiente** de $f(x,y,z)$ es un campo vectorial, el cual se denota por ∇f o grad f, y se define como *(MURRAY, R., SPIEGEL, M. R.*,[2] *136)*:

$$\text{grad } f(x,y,z) = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}\right) f(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{k} \qquad (1)$$

donde el símbolo ∇ (delta invertida, se lee como "nabla"), es un operador diferencial vectorial y se define por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k} = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k} \qquad (2)$$

dicho operador vectorial goza de propiedades análogas a las de los vectores ordinarios *(MURRAY, R., SPIEGEL, M. R.*,[1] *87)*.

Ejemplo 1. Dada la función $f(x,y,z) = ln\sqrt{\frac{x+yz}{z+1}}$, obtener el gradiente:

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x} ln\sqrt{\frac{x+yz}{z+1}}\,\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y} ln\sqrt{\frac{x+yz}{z+1}}\,\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z} ln\sqrt{\frac{x+yz}{z+1}}\,\mathrm{k}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+yz}\right)\mathrm{i} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{x+yz}\right)\mathrm{j} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x+yz} - \frac{1}{z+1}\right)\mathrm{k}$$

Ejemplo 2. Dada la función $f(x,y,z) = \frac{tan\,xy}{cos\,xz}$, obtener el gradiente:

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{tan\,xy}{cos\,xz}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{tan\,xy}{cos\,xz}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{tan\,xy}{cos\,xz}\mathrm{k}$$

$$= \frac{y\,cos\,xz\,sec^2 xy + z\,tan\,xy\,sen\,xz}{cos^2 xz}\mathrm{i} + \frac{x\,sec^2 xy}{cos\,xz}\mathrm{j} + \frac{x\,tan\,xy + sen\,xz}{cos^2 xz}\mathrm{k}$$

1.5.2 Divergencia

Sea $\mathrm{V}(x,y,z) = V_1\mathrm{i} + V_2\mathrm{j} + V_3\mathrm{k}$ una función vectorial, donde V_1, V_2 y V_3 son funciones continuamente derivables con respecto a las coordenadas x, y y z; y V es un campo vectorial derivable, entonces la **divergencia** de V, representada por $\nabla \bullet \mathrm{V}$ o div V, se define como:

$$\text{div } V = \nabla \bullet V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}\right) \bullet (V_1\mathrm{i} + V_2\mathrm{j} + V_3\mathrm{k})$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \qquad (3)$$

La div V es un campo escalar *(BOURNE, D. E., MORREY, C. B., 107-109; PURCELL, E. J., VARBERG, D., 733).*

Ejemplo 3. **Obtener la divergencia de:**

$$V = \frac{\sqrt{ang\tan yz}}{\ln\left(\frac{y^2 - z^2}{\cos yz}\right)}\mathrm{i} + \frac{ang\,sen\,xz}{\cos\left(\frac{\ln(3x + z^2)}{\sqrt{(x+z)(1+z)}}\right)}\mathrm{j} + xyz\,\mathrm{k}$$

entonces:

$$\nabla \bullet V = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{ang\tan yz}}{\ln\left(\frac{y^2 - z^2}{\cos yz}\right)}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{ang\,sen\,xz}{\cos\left(\frac{\ln(3z + z^2)}{\sqrt{(x+z)(1+z)}}\right)}\right] + \frac{\partial}{\partial z}xy = xy$$

Ejemplo 4. **Obtener la divergencia de:**

$$V = \frac{x^2}{y+x}\mathrm{i} + \sqrt{\frac{1+y}{z+y}}\mathrm{j} + e^{\frac{x+z}{z}}\mathrm{k}$$

entonces

$$\nabla \bullet V = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{y+x} + \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{1+y}{z+y}} + \frac{\partial}{\partial z}e^{\frac{x+z}{z}}$$

$$= \frac{2xy + x^2}{(y+x)^2} + \frac{z-1}{2\sqrt{1+y}(z+y)^{3/2}} - \frac{x}{z^2}e^{\frac{x+z}{z}}$$

1.5.3 Rotacional

Dada una función vectorial $V(x,y,z)$. **El rotacional de** V, **representado por** $\nabla \times V$ **o rot** V, **se define** como:

$$\nabla \times V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}\right) \times (V_1\mathrm{i} + V_2\mathrm{j} + V_3\mathrm{k})$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} \mathrm{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix} \mathrm{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix} \mathrm{k}$$

$$= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\mathrm{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\mathrm{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\mathrm{k} \qquad (4)$$

El rot V, es un campo vectorial *(PURCEL, E. J., VARBERG, D. 733)*.

***Ejemplo 5*. Obtener el rotacional de:**

$$\mathrm{V} = \frac{x}{y}\mathrm{i} + \frac{yz}{x}\mathrm{j} + \frac{x-y}{z}\mathrm{k}$$

entonces:

$$\nabla \times \mathrm{V} = \left[\frac{z(-1)}{z^2} - \frac{x(y)}{x^2}\right]\mathrm{i} - \left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{j} + \left(-\frac{yz}{x^2} + \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{k}$$

$$= \left(-\frac{1}{z} - \frac{y}{x}\right)\mathrm{i} - \frac{1}{z}\,\mathrm{j} + \left(-\frac{yz}{x^2} + \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{k}$$

***Ejemplo 6*. Obtener el rotacional de:**

$$\mathrm{V} = \sqrt{\frac{xy}{z}}\,\mathrm{i} + \cos\frac{x+z}{y}\,\mathrm{j} + e^{z/y}\mathrm{k}$$

entonces:

$$\nabla \times \mathrm{V} = \left[-\frac{z}{y^2}e^{z/y} + \frac{1}{y}\operatorname{sen}\frac{x+z}{y}\right]\mathrm{i} - \left[0 - \frac{\left(-\frac{xy}{z^2}\right)}{2\sqrt{\frac{xy}{z}}}\right]\mathrm{j} + \left[-\frac{1}{y}\operatorname{sen}\frac{x+z}{y} - \left(\frac{\frac{x}{z}}{2\sqrt{\frac{xy}{z}}}\right)\right]\mathrm{k}$$

$$= \left[-\frac{z}{y^2}e^{z/y} + \frac{1}{y}\operatorname{sen}\frac{x+z}{y}\right]\mathrm{i} - \frac{\sqrt{xy}}{2z^{3/2}}\,\mathrm{j} + \left[-\frac{1}{y}\operatorname{sen}\frac{x+z}{y} - \frac{x}{2\sqrt{xyz}}\right]\mathrm{k}$$

1.5.4 Identidades del gradiente, divergencia y rotacional

Si A y B son funciones vectoriales derivables; f y g funciones escalares derivables en todos los puntos (x,y,z) de una región del espacio, entonces *(BOURNE, D, E.; KENDALL, P.C., 117-118; MURRAY, R., SPIEGEL, M. R.,[9] 14)*:

$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$, o bien, grad $(f+g)$ = grad f + grad g

$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$, o bien, grad (fg) = $f$grad g + g grad f

$\nabla \bullet (\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \nabla \bullet \mathrm{A} + \nabla \bullet \mathrm{B}$, o bien, div (A+B) = div A + div B

$\nabla \times (\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \nabla \times \mathrm{A} + \nabla \times \mathrm{B}$, o bien, rot (A+B) = rot A + rot B

$$\nabla \bullet (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \bullet \mathbf{A} + f(\nabla \bullet \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \bullet (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \bullet \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \bullet \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \bullet \nabla)\mathbf{B} \quad \mathbf{A}(\nabla \bullet \mathbf{B})$$

$$\nabla (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \bullet \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \bullet \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

Si f y $\mathbf{A}$ tienen segundas derivadas parciales continuas:

$\nabla \times (\nabla f) = 0$	El rotacional del gradiente de f es cero.
$\nabla (\nabla \bullet f)$	El gradiente de la divergencia de f es un campo vectorial.
$\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$	La divergencia del rotacional de $\mathbf{A}$ es cero.
$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$	El rotacional del rotacional de $\mathbf{A}$, es un campo vectorial.

1.5.4.1. Operador Laplaciano

Formalmente, es el "cuadrado" del operador "nabla", dicha relación se entiende al observar que,

$$\nabla \bullet \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (5)$$

por lo tanto, al emplear la notación $\nabla \bullet \nabla = \nabla^2$.

El operador laplaciano puede actuar sobre un campo escalar f o sobre un campo vectorial $\mathbf{F}$.

$$\nabla^2 f = \nabla \bullet (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (6)$$

es el Laplaciano de f (divergencia del gradiente f), el cual es un campo escalar *(BOURNE, D. F., KENDALL P. C., 113-117).*

Ejemplo 7. Dada la función escalar, $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$,

obtener el Laplaciano.

Al sustituir dicha función escalar, en la ecuación (6), se tiene que:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right]\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right]\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right\}$$

$$= 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}+3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}$$
$$-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}+3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}$$
$$-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$

$$= \frac{3x^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}}+\frac{3y^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}}+\frac{3z^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}}$$

$$= \frac{3x^2-x^2-y^2-z^2+3y^2-x^2-y^2-z^2+3z^2-x^2-y^2-z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}}=0$$

***Ejemplo 8.* Obtener el Laplaciano de la siguiente función escalar:**

$$f=\sqrt{9-x^2-y^2}$$

al sustituir dicha función en la ecuación (6) , se tiene que:

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sqrt{9-x^2-y^2}\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\sqrt{9-x^2-y^2}\right]+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\sqrt{9-x^2-y^2}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{9-x^2-y^2}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{9-x^2-y^2}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\sqrt{9-x^2-y^2}\right]\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2-y^2}}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2-y^2}}\right\}$$

$$= \frac{\left[-\left(\sqrt{9-x^2-y^2}\right)-x\left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right)\right]}{\left(9-x^2-y^2\right)}+\frac{\left[-\left(\sqrt{9-x^2-y^2}\right)-y\left(\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right)\right]}{\left(9-x^2-y^2\right)}$$

$$= \frac{\left[\frac{-(9-x^2-y^2)-x^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right]}{(9-x^2-y^2)} + \frac{\left[\frac{-(9-x^2-y^2)-y^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right]}{(9-x^2-y^2)}$$

$$= \frac{\left[\frac{-9+y^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right]}{(9-x^2-y^2)} + \frac{\left[\frac{-9+x^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\right]}{(9-x^2-y^2)}$$

$$= \frac{-9+y^2}{(9-x^2-y^2)^{3/2}} + \frac{-9+x^2}{(9-x^2-y^2)^{3/2}} = \frac{-18+x^2+y^2}{(9-x^2-y^2)^{3/2}}$$

1.5.5 Derivada direccional

Para una función *f(x,y)*, las derivadas parciales $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ dan la razón de cambio de f en las direcciones x y y, respectivamente. Sin embargo, en un punto *(x,y)* hay muchas otras direcciones (FIGURA 1.12), la razón de cambio de f en una dirección arbitraria se conoce como derivada direccional de f en esa dirección *(BOYCE, E. W., DIPRIMA, R. C.,912-913).*

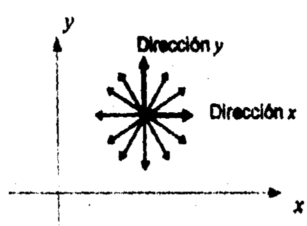


FIGURA 1.12 DIRECCIONES DEL PUNTO *(x,y)*

1.5.5.1 Definición

Sea *f(x,y)*, una función continuamente diferenciable. Al calcular la velocidad de cambio de la función cuando el punto *P(x,y)* se mueve de x_0, y_0 en cierta dirección, esta puede ser descrita por un vector unitario (FIGURA 1.13):

$$\mathrm{u} = \cos\theta\,\mathrm{i} + sen\theta\,\mathrm{j} \qquad (7)$$

Si u es el vector unitario, entonces la **derivada direccional** de *f(x,y)* en la dirección de u, denotada por $D_{\mathrm{u}}f$, está dada por *(BERS, L., KARAL, F., 543)*:

$$D_{\mathrm{u}} f(x,y) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta\cos\theta, y+\Delta\, sen\,\theta) - f(x,y)}{\Delta} \qquad (8)$$

si el límite existe.

La derivada direccional, es la razón de cambio de los valores de la función *f(x,y)* con respecto a la distancia en el plano *xy*, medida en la dirección del vector unitario u.

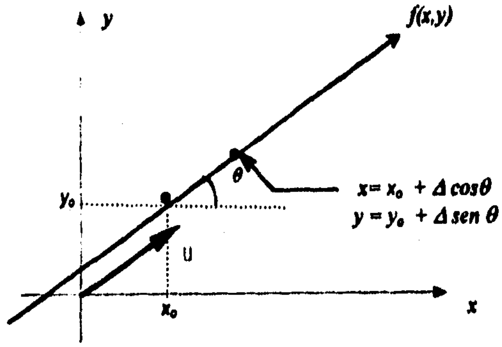


FIGURA 1.13 REPRESENTACIÓN DEL VECTOR u, CON PUNTO INICIAL EN $P(x,y)$.

1.5.5.2 Interpretación geométrica

La ecuación de la superficie S (FIGURA 1.14) es $z=f(x,y)$. $P_0(x_0,y_0,z_0)$ es un punto en la superficie y los puntos $R(x_0,y_0,0)$ y $Q(x_0+\Delta\cos\theta, y_0+\Delta sen\,\theta, 0)$ están en el plano xy.

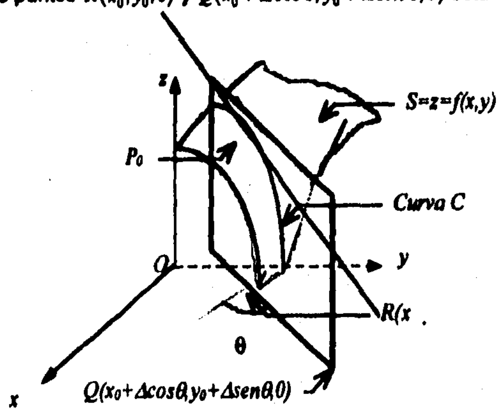


FIGURA 1.14 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

El plano que pasa por R y Q, paralelo al eje z, forma un ángulo θ con la dirección positiva del eje x, este plano intercepta la superficie S en la curva C. La derivada direccional $D_u f$, evaluada en P_o, es la pendiente de la recta tangente a la curva C en P_o en el plano de R, Q y P_o.

Si u=i, entonces $\cos\theta = 1$ y $sen\,\theta = 0$, al sustituir en la ecuación (8), se obtiene:

$$D_i f(x,y) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta,y)-f(x,y)}{\Delta} \qquad \text{(8a)}$$

que es la derivada parcial de f con respecto a x.

Si $u = j$, entonces $\cos\theta = 0$ y $sen\theta = 1$, de la misma manera, se tiene que:

$$D_j f(x,y) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x,y+\Delta)-f(x,y)}{\Delta} \qquad (8b)$$

que es la derivada parcial de f con respecto a y.

Por lo tanto, $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$, son casos particulares de la derivada direccional en las direcciones de los vectores unitarios i y j, respectivamente *(LEITHOLD, L., 926-927)*.

1.5.5.3 Interpretación analítica

Si $f(x,y)$ es una función diferenciable de x y y, y $u = \cos\theta\, i + sen\theta\, j$, entonces:

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y) sen\,\theta. \qquad (9)$$

La derivada direccional se puede escribir como el producto escalar de dos vectores. Ya que:

$$f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y) sen\,\theta = (\cos\theta\, i + sen\,\theta\, j)\bullet[f_x(x,y)i + f_y(x,y)j] \qquad (10)$$

entonces, al igualar la ecuación (9) y (10),

$$D_u f(x,y) = (\cos i + sen\,\theta\, j)\bullet[f_x(x,y)i + f_y(x,y)j] \qquad (11)$$

dado que el grad $\nabla f(x,y)$ es:

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j$$

entonces la ecuación (11), se puede escribir como:

$$D_u f(x,y) = u \bullet \nabla f(x,y) \qquad (12)$$

Por lo tanto, cualquier derivada direccional de una función se puede obtener mediante el producto punto del gradiente de la función y el vector unitario en la dirección deseada *(BOURNE, D. E., KENDALL, D. C., 101-104)*.

Ejemplo 9. Encontrar la derivada direccional de las siguientes funciones en el punto P_0 y en la dirección del vector A correspondiente *(PURCELL, E. J., VARBERG, D., 656)*:

a) Si $f(x,y) = x^2 + y^2$, $P_0(1,0)$ en la dirección del vector $A = i - j$.
El vector unitario u en la dirección de A es:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

El gradiente de $f(x,y)$ es:

$$\nabla f(x,y) = 2xi + 2yj$$

al evaluar en el punto $P_0(1,0)$ se tiene que $\nabla f(x,y)=2\mathrm{i}$. Por lo tanto, al sustituir en la ecuación (12):

$$D_{\mathrm{u}} f(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j}\right)\bullet(2\mathrm{i})=\frac{2}{\sqrt{2}}=2$$

b) Si $f(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $P_0(3,4,12)$ en la dirección del vector $\mathrm{A}=3\mathrm{i}+6\mathrm{j}-2\mathrm{k}$.

El vector unitario u en la dirección de A es:

$$\mathrm{u}=\frac{3}{7}\mathrm{i}+\frac{6}{7}\mathrm{j}-\frac{2}{7}\mathrm{k}$$

El gradiente de $f(x,y,z)$ es:

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\left[\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{i}+\frac{\left[\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{j}+\frac{\left[\dfrac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{k}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{i}+\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{j}+\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{k}$$

al evaluar en el punto $P_0(3,4,12)$ se tiene que:

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{3}{169}\mathrm{i}+\frac{4}{169}\mathrm{j}+\frac{12}{169}\mathrm{k}$$

Por lo tanto, al sustituir en la ecuación (12):

$$D_{\mathrm{u}} f(x,y,z)=\left(\frac{3}{7}\mathrm{i}+\frac{6}{7}\mathrm{j}-\frac{2}{7}\mathrm{k}\right)\bullet\left(\frac{3}{169}\mathrm{i}+\frac{4}{169}\mathrm{j}+\frac{12}{169}\mathrm{k}\right)$$

$$=\frac{9}{1183}+\frac{24}{1183}-\frac{24}{1183}$$

$$=\frac{9}{1183}$$

Si α es el ángulo entre los dos vectores u y $\nabla f(x,y,z)$, entonces:

$$\mathrm{u}\bullet\nabla f=|a||\nabla f|\cos\alpha \qquad (13)$$

de la ecuación (12 y (13), se concluye que:

$$D_{\mathrm{u}} f(x,y,z)=|a||\nabla f|\cos\alpha \qquad (14)$$

de la ecuación (14), se dice que $D_{\mathrm{u}} f$, será un máximo cuando el $\cos\alpha=1$, o cuando u este en la dirección de ∇f; y en este caso $D_{\mathrm{u}} f=|\nabla f|$. Por lo tanto, el gradiente de una función está en la dirección en la cual la función tiene su máxima razón de cambio.

1.5.6 Regla de la cadena

Sea una función compuesta de una variable, $f(x(t))$, donde tanto f como x son funciones diferenciales, entonces:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{15a}$$

Al generalizar, para funciones de varias variables; $z=f(x,y)$, donde $x=x(t)$ y $y=y(t)$ son funciones diferenciables en t. Entonces, $z=f(x(t),y(t))$ en diferenciable en t y

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{15b}$$

Ejemplo 10. Sea $z=x^3y$, donde $x=2t$ y $y=t^2$. Encontrar dz/dt:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\&=(3x^2y)(2)+(x^3)(2t)\\&=6(2t)^2(t^2)+2(2t)^3(t)\\&=40t^4\end{aligned}$$

Al suponer en seguida, que $x=x(s,t)$ y $y=y(s,t)$ son funciones que tienen primeras derivadas parciales en (s,t) y sea $z=f(x,y)$ diferenciable en $x(s,t)$ y $y(s,t)$. Entonces $z=f(x(s,t),y(s,t))$, tiene primera derivada parcial, dada por:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds}; \tag{15c}$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{15d}$$

Si s se conserva fijo, entonces $x(s,t)$ y $y(s,t)$ se convierten en funciones de t únicamente (*PURCELL, E. J., VARBERG, D., 659- 662*).

Ejemplo 11. Si $z=3x^2-y^2$, donde $x=2s+7t$ y $y=5st$, encontrar $\partial z/\partial t$.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\&=(6x)(7)+(-2y)(5s)\\&=42(2s+7t)-10st(5s)\\&=84s+294t-50s^2t\end{aligned}$$

Ejemplo 12. Si $w=x^2+y^2+z^2+xy$, donde $x=st$, $y=s-t$ y $z=s+2t$.
Encontrar $\partial w/\partial t$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\\&=(2x+y)(s)+(2y+x)(-1)+(2z)(2)\\&=(2st+s-t)(s)+(2s-2t+st)(-1)+(2s+4t)2\\&=2s^2t+s^2-2st+2s+10t\end{aligned}$$

Si $\mathbf{F}(t)=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}$ es una función diferenciable de t, $t=g(s)$ es una función diferenciable de s, entonces la compuesta $\mathbf{F}(g(s))$ es una función diferenciable de s y

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds}=\frac{d\mathbf{F}}{dt}\frac{dt}{ds} \tag{16}$$

La regla de la cadena dada para funciones vectoriales por (16) es una consecuencia inmediata de la regla de la cadena para funciones escalares, aplicada a las componentes f_1, f_2 y f_3. De acuerdo con esta regla, f_1, f_2 y f_3 son funciones diferenciables de s, y *(FINNEY, R. L., THOMAS, G. B., 784-785)*

$$\frac{df_1}{ds}=\frac{df_1}{dt}\frac{dt}{ds},\quad \frac{df_2}{ds}=\frac{df_2}{dt}\frac{dt}{ds},\quad \frac{df_3}{ds}=\frac{df_3}{dt}\frac{dt}{ds}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbf{F}&=\left(\frac{df_1}{ds}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{df_2}{ds}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{df_3}{ds}\right)\mathbf{k}\\&=\left(\frac{df_1}{dt}\frac{dt}{ds}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{df_2}{dt}\frac{dt}{ds}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{df_3}{dt}\frac{dt}{ds}\right)\mathbf{k}\\&=\left(\frac{df_1}{dt}\mathbf{i}+\frac{df_2}{dt}\mathbf{j}+\frac{df_3}{dt}\mathbf{k}\right)\frac{dt}{ds}\\&=\left(\frac{d}{dt}\mathbf{F}\right)\frac{dt}{ds}.\end{aligned}$$

Ejemplo 13. Expresar $d\mathbf{F}/ds$ en términos de s, si $\mathbf{F}(t)=\mathbf{i}+sen(t+1)\mathbf{j}+e^{t+1}\mathbf{k}$ y $t=g(s)=s^2-1$.

Por regla de la cadena, se tiene que:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{F}=\frac{d}{dt}\mathbf{F}\frac{dt}{ds}=\left(cos(t+1)\mathbf{j}+e^{t+1}\mathbf{k}\right)(2s)=2s\,cos(s^2)+2se^{s^2}\mathbf{k}$$

Esto se pudo obtener, al sustituir $t=g(s)=s^2-1$ en la fórmula para $\mathbf{F}(t)$ y diferenciado después con respecto a s:

$$\mathbf{F}(g(s))=\mathbf{i}+sen(s^2)\mathbf{j}+e^{s^2}\mathbf{k},$$

$$\frac{dt}{ds}\mathbf{F}(g(s))=2s\,cos(s^2)\mathbf{j}+2se^{s^2}\mathbf{k}$$

1.5.7 Función definida implícitamente

1.5.7.1 Definición

Si y es una función de x definida por la ecuación

$$y=3x^2+5x+1 \tag{17}$$

entonces y esta definida **explícitamente** en términos de x y se puede escribir como:

$$y = f(x) \quad \textbf{donde} \quad f(x) = 3x^2 + 5x + 1$$

Sin embargo, no todas las funciones están definidas explícitamente. Por ejemplo,

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2, \tag{18}$$

la cual no esta definida explícitamente para y como una función de x. Sin embargo, pueden existir una o más funciones f tales que si $y=f(x)$, la ecuación (18) se satisface, esto es, tal que la ecuación:

$$x^6 - 2x = 3[f(x)]^6 + [f(x)]^5 - [f(x)]^2$$

es cierta para todos los valores de x en el dominio de f. En este caso se puede establecer que y está definida implícitamente como una función de x, o que la función f esta definida implícitamente por la ecuación dada *(LEITHOLD, L., 172)*.

1.5.7.2 Derivación implícita

Método, que se utiliza para determinar la derivada de una función sin que dicha función este en forma explícita.

1.5.7.2.1 Ecuación con dos variables

Si f es una función derivable, tal que $y=f(x)$, entonces x y y satisfacen a la ecuación de la forma:

$$F(x,y)=0 \tag{19}$$

la cual es una función definida implícitamente, donde:

$$F(x,y) = x^6 - 2x - 3y^6 - y^5 + y^2 = 0.$$

Al derivar la función con respecto a x, utilizando la regla de la cadena, se obtiene:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{20}$$

al despejar dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{[\partial F/\partial x][\partial x/\partial x]}{\partial F/\partial y}$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \tag{21}$$

debido a que $dx/dx = 1$.

Ejemplo 14. Encontrar dy/dx si $F(x,y) = x^3 + x^2y - 10y^4$.

Al utilizar la ecuación (21)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 40y^3}$$

1.5.7.2.2. Ecuación con tres variables

Sea la ecuación $F(x,y,z)=0$, donde z es una función definida implícitamente por x y y, es decir, $F[x,y,f(x,y)]=0$, la derivada parcial de la ecuación con respecto a x, al mantener constante a y, utilizando la regla de la cadena es:

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad (22)$$

Al despejar a $\partial z/\partial x$, si $dx/dx=1$ y $\partial y/\partial x=0$, se obtiene:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\partial F\ \partial x}{\partial F\ \partial z} \qquad (23a)$$

mediante un cálculo semejante, al conservar constante a x, y derivar con respecto a y *(PURCELL, E. J., VARBERG, D., 662-664)*:

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{\partial F\ \partial y}{\partial F\ \partial z} \qquad (23b)$$

Ejemplo 15. Si $F(x,y,z)=x^3 e^{y+z}-y\,sen(x-z)=0$ define a z implícitamente como función de x y y, encontrar $\partial z/\partial x$.

Al utilizar la ecuación (23b):

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\partial F\ \partial x}{\partial F\ \partial z}=-\frac{3x^2 e^{y+z}-y\cos(x-z)}{x^3 e^{y+z}+y\cos(x-z)}$$

1.5.7.2.3. Dos ecuaciones con cuatro variables

Dadas las ecuaciones $F(x,y,u,v)=0$ y $G(x,y,u,v)=0$, las cuales definen a u y v como funciones diferenciables de x y y, es decir, $u=f(x,y)$ y $v=f(x,y)$. Por lo que se tiene:

$$F[x,y,f(x,y),g(x,y)]=0 \text{ y } G[x,y,f(x,y),g(x,y)]=0. \qquad (24)$$

Al derivar parcialmente a ambas funciones con respecto a x, manteniendo constante a y, y empleando la regla de la cadena, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F[x,y,f(x,y),g(x,y)]}{\partial x}&=\frac{\partial F(x,y,u,v)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y,u,v)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\\&\quad\frac{\partial F(x,y,u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y,u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\&=0\end{aligned} \qquad (25a)$$

$$\frac{\partial G[x,y,f(x,y),g(x,y)]}{\partial x}=\frac{\partial G(x,y,u,v)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial G(x,y,u,v)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial G(x,y,u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G(x,y,u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{(25b)}$$
$$=0$$

en donde se sobreentiende que $u=f(x,y)$ y $v=f(x,y)$. Y que, $\partial x/\partial x=1$ y $\partial y/\partial x=0$. Las ecuaciones (25a) y (25b) proporcionan dos ecuaciones algebraicas lineales no homogéneas para $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x$, que son:

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}$$
$$\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial G}{\partial x} \qquad \text{(25c)}$$

Siempre que $\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\neq 0$, se puede despejar a $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}} \qquad \text{(26)}$$

Para evaluar a $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x$ en el punto *(x,y)*, se debe:

⇒ determinar los valores correspondientes de u y v, mediante la solución del sistema de ecuaciones simultáneas $F(x,y,u,v)=0$ y $G(x,y,u,v)=0$;

⇒ determinar las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial v},\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial u}$, y $\frac{\partial G}{\partial v}$, y evaluar a estas en los puntos (x,y,u,v); y

⇒ a continuación evaluar $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x$ empleando las ecuaciones (26).

Se procede de igual forma para deducir las ecuaciones de $\partial u/\partial y$ y $\partial v/\partial y$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}} \qquad \text{(27)}$$

Ejemplo 16. Se definen las variables u y v como funciones diferenciables de x y y mediante las ecuaciones

$$F(x,y,u,v)=x^3+y-u^2+2v=0,$$
$$G(x,y,u,v)=xy+2x-y+3uv+10=0.$$

Comprobar que $x=1,\ y=-1,\ u=-2,\ v=2$ es una solución de estas ecuaciones y calcular $\partial u/\partial y$ y $\partial v/\partial y$ en $x=1,\ y=-1$.

Primero, se comprueba por sustitución directa que $(1,-1,-2,2)$ es una solución de dicho sistema de ecuaciones

$$F(1,-1,-2,2)=1-1-4+4=0,$$
$$G(1,-1,-2,2)=-1+2+1-12+10=0.$$

A continuación, se deriva cada una de las ecuaciones con respecto a y, manteniendo constante a x y considerando que u y v son funciones de x y y. El resultado es

$$1-2u\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$
$$x-1+3v\frac{\partial u}{\partial y}+3u\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Por tanto,

$$-2u\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial v}{\partial y}=-1,$$
$$3v\frac{\partial u}{\partial y}+3u\frac{\partial v}{\partial y}=1-x.$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3u+2(1-x)}{6u^2+6v}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2u(1-x)-3v}{6u^2+6v},$$

de modo que, al emplear el hecho que $u=-2$, y $v=2$ cuando $x=1$, y $y=-1$, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,-1)=\frac{-6+0}{24+12}=-\frac{1}{6}$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial y}(1,-1)=\frac{0-6}{24+12}=-\frac{1}{6}.$$

Las ideas que se han desarrollado en estos casos se pueden extender con facilidad para el caso de m ecuaciones n variables (donde $m<n$) que definen a m variables como funciones diferenciables de las n-m variables restantes.

Para calcular la derivada o las derivadas parciales de una función o de funciones en forma implícita, se debe de considerar lo siguiente:

1. Dadas las m ecuaciones con n variables ($m<n$), decidir qué variables serán independientes y cuáles dependientes. El número de variables dependientes es igual al número (m) de ecuaciones.

2. Suponer que las ecuaciones definen a las m variables dependientes como funciones de las n-m variables independientes para determinar el dominio de las variables independientes.
3. Derivar cada una de las ecuaciones con respecto a una de las variables independientes, manteniendo fijas las demás variables independientes.
4. Las ecuaciones resultantes *siempre son lineales* en las derivadas parciales de las variables dependientes con respecto a la variable independiente seleccionada y, por tanto, se pueden despejar con facilidad. Los resultados tienen sentido siempre que los denominadores no sean cero *(BOYCE, E. W., DIPRIMA, R. C.,*[1] *955-958).*

1.5.7.3 Teorema de la función implícita

Teorema que asegura que una ecuación $f(x,y)$ define a y como una función derivable de x.

Dada la ecuación $g(x,y)=0$ y un punto (x_0,y_0), supóngase que:

$$g(x,y),\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

son continuas en la vecindad del punto (x_0,y_0), tal que $g(x_0,y_0)=0$, y que

$$\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0.$$

Entonces existe una función $y=f(x)$ en algún intervalo abierto que contiene a x_0 tal que $f(x_0)=y_0$ y $g[x,f(x)]=0$; la función f es derivable y

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}}.$$

Hay que considerar que dicho teorema dice que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a x_0; pero no dice el tamaño del intervalo (FIGURA 1.15). Por ello se puede concluir que el teorema sólo da un resultado "local" *(BERS, L., KARAL, F., 169).*

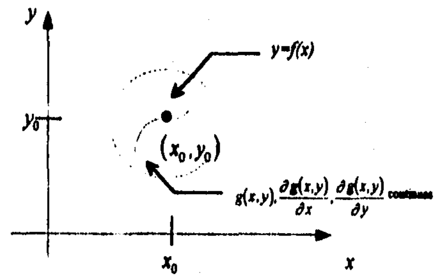


FIGURA 1.15 TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo 17. Sea la función

$$g(x,y)=x^2+y^2+1=0 \qquad \text{(I)}$$

Es claro que $g(x,y)$, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ son continuas dondequiera, y que $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=2y$ sólo es cero en la recta $y=0$. Sin embargo, no existe ninguna función derivable $y=f(x)$ que satisfaga la ecuación (I), ya que no hay ningún punto (x_0,y_0) en el plano tal que $x_0^2+y_0^2+1=0$.

Si se considera que: $$g(x,y)=x^2+y^2=0 \qquad \text{(II)}$$

El único punto que satisface esta ecuación es el (0,0). Sin embargo, no existe ninguna función derivable $y=f(x)$ que satisfaga la ecuación (II) y la condición $f(0)=0$.

Nótese que mientras:

$$g(x,y),\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

son continuas dondequiera, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=2y$, y por tanto es cero en (0,0).

Por último, al considerar la ecuación:

$$g(x,y)=x^2+y^2-1=0. \qquad \text{(III)}$$

El punto (0,1) satisface la ecuación (III). De nuevo, $g(x,y)$, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ son continuas dondequiera, y ahora $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1)=2$, de manera que existe una función derivable $y=f(x)$ que satisface a $f(0)=1$ y a la ecuación (III) en algún intervalo que contiene a 0. Esta función es $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$, para $-1<x<1$. Análogamente, la solución de la ecuación (III) que pasa por (0,-1) es $y=-\sqrt{1-x^2}$, para $-1<x<1$. Sin embargo, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=2y$ es cero en la recta $y=0$, no se debe esperar que allí se tenga una función derivable que satisfaga la ecuación (24) y la condición de que $f(1)=0$. En realidad, no hay tal función.

El teorema de la función implícita se generaliza directamente al caso de n variables y m ecuaciones, donde $m<n$.

1.6 Máximos y mínimos

1.6.1 Definiciones

Sean $P(x,y)$ y $P_0(x_0,y_0)$ un punto variable y un punto fijo, respectivamente, que pertenecen al dominio S de la función $f(x,y)$.

El punto $P_0(x_0,y_0)$ es un punto máximo relativo o local de la función $f(x,y)$, si existe un entorno E del punto $P_0(x_0,y_0)$, subconjunto del dominio S de la función $f(x,y)$, tal que para todo punto $P(x,y)$ que pertenece al entorno se cumple que la función evaluada en $P(x,y)$ es menor que la función evaluada en $P_0(x_0,y_0)$, es decir,

$$f(P) \leq f(P_0) \qquad \text{entonces es un máximo.}$$

Si el entorno en el cual se cumple lo anterior se extiende a todo el dominio S de la función entonces se dice que en el punto $P_0(x_0,y_0)$ existe un máximo absoluto o global (FIGURA 1.16).

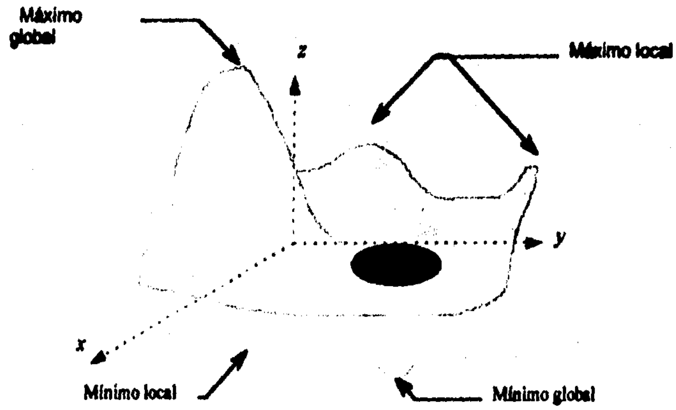


FIGURA 1.16 MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN $f(x,y)$

Un punto $P_0(x_0,y_0)$ es un **punto mínimo relativo o local** de una función $f(x,y)$, si existe un entorno E del punto $P_0(x_0,y_0)$, subconjunto del dominio de la función f, tal que para todo punto de ese entorno se cumple que la función evaluada en $P(x,y)$ es mayor que la evaluada en $P_0(x_0,y_0)$, es decir,

$$f(P) \geq f(P_0) \qquad \text{entonces es un mínimo}$$

Si el entorno en el cual se cumple lo anterior, se extiende a todo el dominio S de la función entonces se dice que en el punto $P_0(x_0,y_0)$ existe un **mínimo absoluto o global.**

Un punto $P_0(x_0,y_0)$ es un punto extremo relativo de la función $f(x,y)$, si es un máximo relativo o mínimo relativo. De la misma manera el concepto se extiende un punto extremo absoluto, cuando se trata de un máximo absoluto o mínimo absoluto *(BELAUNZARAN, G. E., FRONTANA, D. B., GÓMEZ, S. R., 187-192).*

La existencia tanto de un punto máximo (global) como de un punto mínimo (global) en S, se basa en la consideración de que la función $f(x,y)$ es continua en un intervalo cerrado y acotado *(PURCELL, E. J., VARBERG, D., 670).*

El punto $P_0(x_0,y_0)$ es un punto crítico estacionario, si es un punto extremo en el interior de S, donde $f(x,y)$ es diferenciable, y $\nabla f(P_0)=0$. En dicho punto, el plano tangente es horizontal; lo anterior es valido tanto si los puntos extremos son globales como locales *(BOYCE, E. W., DiPRIMA, R. C.,[1] 732).*

Ejemplo 1. Determinar los puntos críticos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$

Como f es diferenciable para toda x y y, sólo se necesita determinar los puntos en los cuales $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son iguales a cero. Si tiene que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2y,$$

y por tanto al hacer que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$, y que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$, se encuentra con que el único punto crítico es (0,0). Como $f(0,0)=0$ y $f(x,y)>0$ para $(x,y)\neq(0,0)$, entonces se puede decir que f tiene un mínimo relativo en (0,0) (FIGURA 1.17).

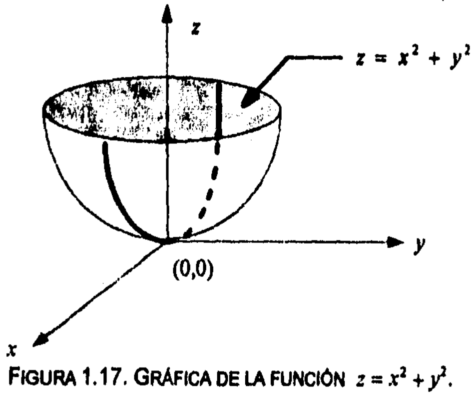


FIGURA 1.17. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $z=x^2+y^2$.

Ejemplo 2. Dada $f(x,y)=6x-4y-x^2-2y^2$,

determinar si f tiene extremos relativos.

Como f es diferenciable para toda x y y, sólo se necesita determinar los puntos en los cuales $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son iguales a cero. Si tiene que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=6-2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-4-4y$$

y por al hacer que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$, y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$, se tiene que $x=3$ y $y=-1$. La gráfica (FIGURA 1.18) de la ecuación

$$z=6x-4y-x^2-2y^2$$

es un paraboide que tiene un eje vertical, con vértice en (3,-1,11) y que se abre hacia abajo. Por lo que se puede concluir que $f(x,y)<f(3,-1)$ para toda $(x,y)\neq(3,-1)$; por tanto, es un máximo absoluto de la función.

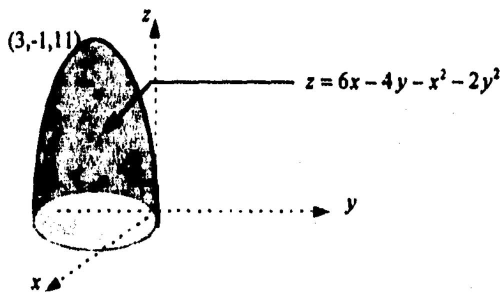


FIGURA 1.18 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $z=6x-4y-x^2-2y^2$.

Ejemplo 3. Encuentre los valores máximos o mínimos locales de:

$$f(x,y)=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},$$

Como f es diferenciable para toda x y y, sólo se necesita determinar los puntos en los cuales $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son iguales a cero.

Por lo que se tiene:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-\frac{2x}{a^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$$

al igualar a cero, se tiene que $x=0$ y $y=0$. Es decir, el punto (0,0) que no da máximo ni mínimo (FIGURA 1.19), se llama punto silla. La función dada no tiene extremos locales.

Dicho ejemplo ilustra la dificultad de que $\nabla f(x_0,y_0)=0$ no garantiza que exista un extremo local en $P_0(x_0,y_0)$. Por lo que existe un criterio para decidir lo que sucede en un punto crítico estacionario.

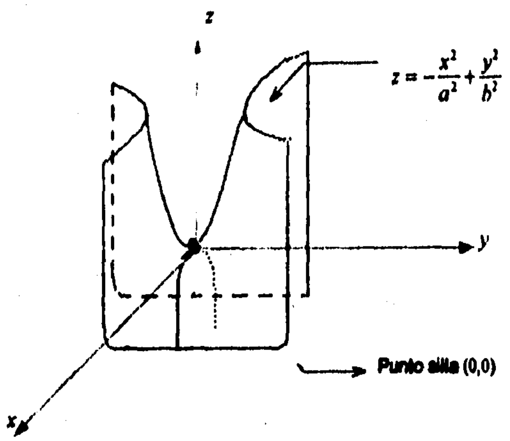


FIGURA 1.19 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $f(x,y)=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

1.6.2. Criterio de la segunda derivada

1.6.2.1 Determinante Hessiano

Sea una función $f(x,y)$, con segundas derivadas parciales continuas en una vecindad a $P_0(x_0,y_0)$, donde:

$$\Delta_H=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}$$

es decir,

$$\Delta_H=\left\{\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right]-\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2\right]\right\}\Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

a dicho determinante se le denomina " Hessiano", el cual involucra a todas las segunda derivadas de la función $f(x,y)$ *(FINNEY, R. L., THOMAS, G. B., 796).*

1.6.2.2. Criterio

Es el criterio básico para determinar los valores extremos relativos (máximos y mínimos), relacionados con funciones de dos o más variables.

Sea una función $f(x,y)$ con segundas derivadas parciales continuas en una vecindad $P_0(x_0,y_0)$ y que $\nabla f(x_0,y_0)=0$. Y además:

$$\Delta_H=\left\{\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right]-\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2\right]\right\}\Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

entonces:

$P_0(x_0,y_0)$ es un punto máximo relativo si $\Delta_H>0$ y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{(x_0,y_0)}<0 \qquad \left(\text{o}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_{(x_0,y_0)}<0\right)$$

$P_0(x_0,y_0)$ es un punto mínimo relativo si $\Delta_H>0$ y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{(x_0,y_0)}>0 \qquad \left(\text{o}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_{(x_0,y_0)}>0\right)$$

$P_0(x_0,y_0)$ no es ni máximo, ni mínimo relativo, si $\Delta_H<0$. Si $\Delta_H<0$, el punto $P_0(x_0,y_0)$, es un punto silla.

$\Delta_H=0$, no hay conclusión *(BOYCE, E. W., DIPRIMA, R. C.,[1] 938-940)*.

Ejemplo 4. Dada la función

$$f(x,y)=y^2-x^2$$

encontrar los valores extremos, si los hay.

Los puntos críticos son las soluciones del $\nabla f(x_0,y_0)=0$. Por lo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2x;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

al resolver el sistema anterior:

$$-2x=0 \quad y \quad 2y=0$$

se tiene que $x=0$ y $y=0$ por lo que $P(0,0)$. Al aplicar el criterio de la segunda derivada (Hessiano):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0;$$

$$\Delta_H=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4<0\ \therefore\ \text{existe un punto silla en } P(0,\ 0).$$

Ejemplo 5. Dada la función

$$f(x,y)=4x^3+y^3-12x-3y,$$

determinar todos los puntos críticos y clasificar como punto silla, máximos o mínimos relativos.

Los puntos críticos son las soluciones del $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Por lo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 12 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3$$

al resolver el sistema anterior:

$$\begin{array}{ll} 12x^2 - 12 = 0 & 3y^2 - 3 = 0 \\ 12x^2 = 12 & 3y^2 = 3 \\ x^2 = 1 & y^2 = 1 \\ x = \sqrt{1} & y = \sqrt{1} \\ x = \pm 1 & y = \pm 1 \end{array}$$

se tiene que $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$, por lo que $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (-1,1)$, $P_3 = (1,-1)$, $P_4 = (-1,-1)$.

Al aplicar el criterio de la segunda derivada (Hessiano):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

al evaluar en el punto $P_1 = (1,1)$,

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 144 > 0, \text{ donde } \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 24 > 0 \quad \therefore \text{ es un mínimo}$$

al evaluar en el punto $P_2 = (-1,1)$,

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} -24 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -144 < 0, \quad \therefore \text{ es un punto silla}$$

al evaluar en el punto $P_3 = (1,-1)$,

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -144 < 0, \quad \therefore \text{ es un punto silla}$$

al evaluar en el punto $P_4 = (-1,-1)$,

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} -24 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 144 > 0, \text{ donde } \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -24 < 0 \quad \therefore \text{ es un máximo}$$

1.6.3 Método de Lagrange

El encontrar los puntos máximos o mínimos de una función de varias variables, sin condiciones adicionales, es un **problema de máximos y mínimos libres**. Cuando se impone una condición adicional, el problema de hallar los máximos y mínimos de tal función se convierte en un **problema de los máximos y mínimos vinculados o**

restringidos, a la condición que se le agrega se llama **condición auxiliar o restricción**.

El método de multiplicadores de Lagrange, transforma un problema de máximos y mínimos vinculados en otro de problema de máximos y mínimos libres *(PROTTER, M. H., MORREY, C. B., 677)*.

1.6.3.1 Interpretación geométrica

Se desea maximizar o minimizar $f(x,y)$ sujeta a la restricción $\phi(x,y)=0$. La FIGURA 1.20 sugiere la interpretación geométrica del problema.

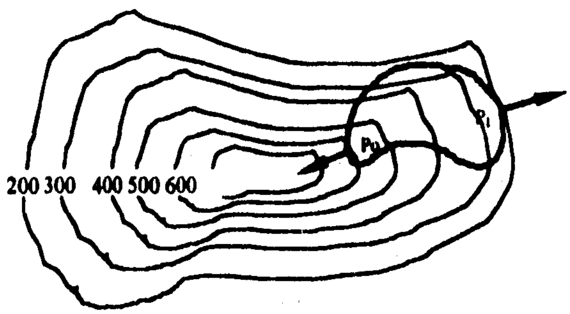


FIGURA 1.20 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL MÉTODO DE LAGRANGE

Las curvas de nivel f son las curvas $f(x,y)=k$ en la que k es constante. Se muestran como curvas en la FIGURA 1.20 para k =*200, 300, ..., 700*. La gráfica de la restricción $\phi(x,y)=0$ es también una curva; se presenta en negro en dicha figura.

Para maximizar f sujeta a la restricción $\phi(x,y)=0$ se debe encontrar la curva de nivel con la máxima k posible que intercepte a la curva de restricción. Por geometría, es evidente en la FIGURA 1.20 que dicha curva de nivel es tangente a la curva de restricción en el punto $P_0(x_0,y_0)$ y, por lo tanto, que el valor máximo de f sujeto a la restricción $\phi(x,y)=0$ es $f(x_0,y_0)$. El otro punto de tangencia $P_1(x_1,y_1)$ da el valor mínimo $f(x_1,y_1)$ de f sujeto a la restricción $\phi(x,y)=0$.

El método de Lagrange proporciona un recurso algebraico para encontrar los puntos P_0 y P_1. Dado que en dicho punto la curva de nivel y la restricción son tangentes (o sea que tienen una recta tangente común), las dos rectas tienen una perpendicular común. Pero en cualquier punto de una curva nivel, el vector gradiente ∇f es perpendicular a la curva de nivel y en forma similar ∇g es perpendicular a la curva de restricción. Por tanto, ∇f y ∇g son paralelas en P_0, así como en P_1; es decir:

$$\nabla f(P_0)=\lambda_0\,\nabla\phi(P_0) \text{ y } \nabla f(P_1)=\lambda_1\,\nabla\phi(P_1)$$

para algunos números no nulos λ_0 y λ_1 *(PURCEL, E. J., VARBERG, D., 676-678).*

Dicho argumento funciona bien para el problema de maximizar o minimizar $f(x,y,z)$, sujeta a la restricción $\phi(x,y,z)=0$, simplemente se considera superficies de nivel en lugar de curvas de nivel. En efecto el resultado es válido para cualquier número de variables.

1.6.3.2. Método

Para maximizar o minimizar una función

$$f(x,y,z) \tag{1}$$

sujeta a la condición auxiliar o restricción

$$\phi(x,y,z)=0 \tag{2}$$

se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\nabla f(P)=\lambda\nabla\phi(P) \ \text{ y } \ \phi(P)=0 \tag{3}$$

para P y λ. Cada uno de dichos puntos P es un punto crítico del problema de extremo restringido y el λ correspondiente se llama **multiplicador de Lagrange** *(PROTTER, M. H., MORREY, C. B., 677-679)*

Ejemplo 6. Hallar el mínimo de la función

$$f(x,y)=x^2+2y^2+2xy+2x+3y,$$

con la condición de que x y y satisfagan la ecuación:

$$x^2-y=1.$$

Los gradientes que corresponden son:

$$\nabla f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{i}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{j}\ .(2x+2y+2)\mathrm{i}+(4y+2x+3)\mathrm{j}$$

$$\nabla\phi(x,y)=\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\mathrm{i}+\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\mathrm{j}\ .2x\mathrm{i}+(-1)\mathrm{j}$$

Por lo que las ecuaciones de Lagrange, en base a (3), son:

$$\begin{aligned}2x+2y+2&=\lambda(2x),\\4y+2x+3&=\lambda(-1)\\x^2-y&=1\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}2x+2y+2&=2x\lambda,\\4y+2x+3&=-\lambda\\x^2-y&=1\end{aligned}$$

que se puede resolver simultáneamente, si se despeja de la tercera ecuación a y, se tiene que $y = x^2 - 1$, y se sustituye en las dos primeras ecuaciones, se tiene que :

$$2x + 2(x^2 - 1) + 2 = \lambda 2x$$
$$4(x^2 - 1) + 2x + 3 = -\lambda$$

es decir,

$$x + x^2 - \lambda x = 0,$$
$$4x^2 + 2x - 1 + \lambda = 0$$

al resolver, se encuentra que:

$$x = 0, \quad y = -1, \quad \lambda = 1,$$

o

$$x = -\tfrac{3}{4}, \quad y = -\tfrac{7}{16}, \quad \lambda = \tfrac{1}{4}.$$

Al evaluar estos puntos en f, se encuentra que se presenta un valor menor cuando $x = -3/4$, $y = -7/16$. De consideraciones geométricas, resulta que f tiene un mínimo en este valor.

Ejemplo 7. Hallar el mínimo de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

sujeta a las condiciones

$$\phi_1 = x + 2y + 3z = 6$$
$$\phi_2 = x + 3y + 9z = 9$$

Los gradientes que corresponden son:

$$\nabla f(x,y,z) = 2x\mathrm{i} + 2y\mathrm{j} + 2z\mathrm{k}$$
$$\nabla \phi_1(x,y,z) = \mathrm{i} + 2\mathrm{j} + 3\mathrm{k}$$
$$\nabla \phi_2(x,y,z) = \mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 9\mathrm{k}$$

Por lo que las ecuaciones de Lagrange, en base a (3) son:

$$2x = \lambda_1 + \lambda_2,$$
$$2y = 2\lambda_1 + 3\lambda_2,$$
$$2z = 3\lambda_1 + 9\lambda_2,$$
$$x + 2y + 3z = 6,$$
$$x + 3y + 9z = 9.$$

Al despejar x, y, y z de las tres primeras ecuaciones, se obtiene:

$$x = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} \quad y = \frac{(2\lambda_1 + 3\lambda_2)}{2} \quad z = \frac{(3\lambda_1 + 9\lambda_2)}{2}$$

al sustituir en las dos ultimas ecuaciones a x, y, y z:

$$\left(\frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{2}\right)+2\left(\frac{(2\lambda_1+3\lambda_2)}{2}\right)+3\left(\frac{(3\lambda_1-9\lambda_2)}{2}\right)-6=0.$$

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{2}+3\left(\frac{(2\lambda_1+3\lambda_2)}{2}\right)+9\left(\frac{(3\lambda_1+9\lambda_2)}{2}\right)-9=0$$

se tiene que:

$$\lambda_1=4.06 \text{ y } \lambda_2=-1.32$$

y por lo tanto

$$x=1.37,\ y=2.08 \text{ y } z=0.14$$

Al evaluar este punto en f, se encuentra que se tiene un mínimo en este valor.

1.7 Calculo integral

1.7.1 Integral curvilínea

1.7.1.1 Interpretación geométrica y analítica

Sea C una curva en el plano xy que une los puntos $A(a_1,b_1)$ y $B(a_2,b_2)$ (FIGURA 1.21).

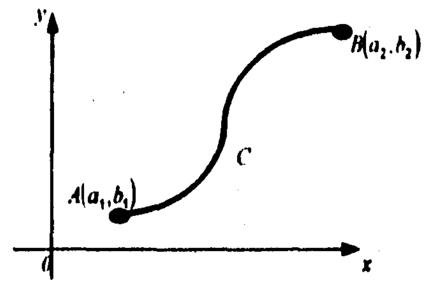


FIGURA 1.21 CURVA C DEFINIDA POR LOS PUNTOS A B

Y $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones continuas definidas en la región que contiene a la curva C en su interior.

Al subdividir a C, en n partes, eligiendo (n-1) puntos entre A y B, en donde dichos puntos pueden ser designados como $P_1,P_2,\ldots,P_{n-2},P_{n-1}$ y $A=P_0, B=P_n$, con sus respectivas coordenadas, ejemplo, el punto P_i pueden ser representadas por (x_i,y_i), $i=0,1,2,3,\ldots,n$ (FIGURA 1.22).

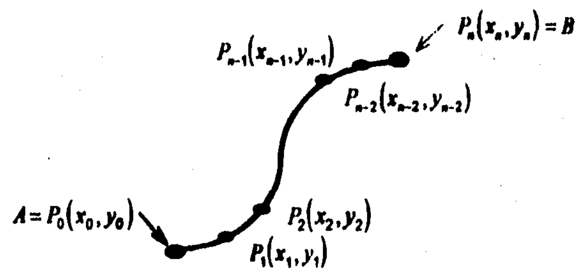


FIGURA 1.22 SUBDIVISIÓN DE LA CURVA C EN n-1 PUNTOS

El punto Q_i, con coordenadas (ξ_i,η_i), $i=0,1,2,3,\ldots,n$, se encuentra situado entre dos puntos sucesivos de una subdivisión como P_{i-1} y P_i, de la curva C (FIGURA 1.23).

Al formar la suma:

$$\left[P(\xi_1,\eta_1)(x_1-x_0)+Q(\xi_1,\eta_1)(y_1-y_0)\right]+$$
$$\left[P(\xi_2,\eta_2)(x_2-x_1)+Q(\xi_2,\eta_2)(y_2-y_1)\right]+\cdots+\left[P(\xi_n,\eta_n)(x_n-x_{n-1})Q(\xi_n,\eta_n)(y_n-y_{n-1})\right],$$

se puede expresar en forma abreviada como:

$$\sum_{i=1}^{n}\{P(\xi_i,\eta_i)(x_i-x_{i-1})+Q(\xi_i,\eta_i)(y_i-y_{i-1})\}=\sum_{i=1}^{n}\{P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\} \quad (1)$$

Si existe el límite de esta suma para $n \to \infty$ de modo que todos los $\Delta x_i, \Delta y_i$ tiendan a cero, tal límite se llama integral curvilínea a lo largo de C y se denota como *(PROTTER, M. H., MORREY, C. B., 990-991)*:

$$\int_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad \text{o} \quad \int_{A}^{B} Pdx + Qdy \qquad (2)$$

El límite existe si P y Q son continuas en todo punto de C. El valor de la integral depende no solamente de P y Q, y de los puntos A y B, sino también de la curva C elegida.

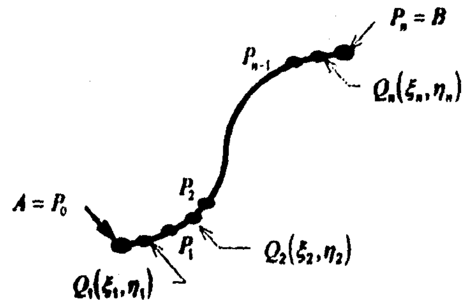


FIGURA 1.23 INTEGRAL CURVILÍNEA

De manera análoga se puede definir una integral curvilínea a lo largo de una curva C en el espacio tridimensional como

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\{A_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + A_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + A_3(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\}$$
$$= \int_{C} A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz \qquad (3)$$

siendo $A_1, A_2,$ y A_3 funciones de $x, y,$ y z.

1.7.1.2 Propiedades

La integral curvilínea tiene propiedades análogas a la integral ordinaria, por ejemplo:

1. $$\int_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{C} P(x,y)dx + \int_{C} Q(x,y)dy \qquad (4)$$

2. $$\int_{A}^{B} Pdx + Qdy = -\int_{B}^{A} Pdx + Qdy \qquad (5)$$

al invertir el camino de integración se cambia el signo de la integral curvilínea.

3. Si C_1 es una curva que se extiende desde A_1 hasta A_2, y C_2 es una curva que se extiende desde A_2 hasta A_3, entonces:

$$\int_{A_1}^{A_2} Pdx + Qdy + \int_{A_2}^{A_3} Pdx - Qdy = \int_{A_1}^{A_3} Pdx + Qdy \qquad (6)$$

es decir, si C está formada por un conjunto de curvas regulares consecutivas (FIGURA1.24), entonces por medio de la ecuación anterior, existe la integral curvilínea a lo largo de C y es la suma de las integrales curvilíneas tomadas a lo largo de cada una de las curvas.

FIGURA1.24 INTEGRAL DE LÍNEA (CURVAS CONSECUTIVAS)

1.7.1.3 Calculo de la integral curvilínea

Si la ecuación de una curva C del plano $z=0$ viene dado como $y=f(x)$, la integral curvilínea (2) se puede calcular haciendo $y=f(x), dy=f'(x)dx$ en el integrando para obtener una integral definida ordinaria,

$$\int_{a_1}^{a_2} P\{x, f(x)\}dx + Q\{x, f(x)\}f(x)'dx. \qquad (7)$$

Análogamente, si C está dada como $x=g(y)$, entonces $dx=g'(y)dy$ y la integral curvilínea se convierte en la integral,

$$\int_{b_1}^{b_2} P\{g(y), y\}g'(y)dy + Q\{g(y), y\}dy. \qquad (8)$$

Si C está dada en forma paramétrica $x=\phi(t), y=\psi(t)$, la integral curvilínea es entonces igual a la

$$\int_{t_1}^{t_2} P\{\phi(t), \psi(t)\}\phi'(t)dt + Q\{\phi(t), \psi(t)\}\psi'(t)dt \qquad (9)$$

donde t_1 y t_2 denotan los valores de t que corresponden a los puntos A y B, respectivamente *(BOURNE, D. E., KENDALL, P. C., 290-293)*.

Ejemplo 1. Calcular $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy$ a lo largo

a) de una recta de $(0,1)$ a $(1,2)$,
b) de las rectas de $(0,1)$ a $(1,1)$ y luego de $(1,1)$ a $(1,2)$,

c) de la parábola $x = t$, $y = t^2 + 1$

a) La ecuación de la recta que pasa por $(0,1)$ y $(1,2)$ en el plano xy es $y = x + 1$. Entonces $dy = dx$ y la integral curvilínea es igual a

$$\int_{x=0}^{1} \{x^2 - (x+1)\}dx + \{(x+1)^2 + x\}dx = \int_0^1 (2x^2 + 2x)dx = 5/3$$

b) A lo largo de la recta de $(0,1)$ a $(1,1)$, $y = 1$, $dy = 0$, por lo que:

$$\int_{x=0}^{1} \{x^2 - 1\}dx + \{1 + x\}0 = \int_0^1 (x^2 - 1)dx = -2/3$$

A lo largo de la recta $(1,1)$ y $(1,2)$, $x=1$, $dx=0$, la integral curvilínea es igual a

$$\int_{y=1}^{2} \{1 - y\}0 + \{y^2 + 1\}dy = \int_1^2 (y^2 + 1)dy = 10/3$$

Luego el valor buscado es $= -2/3 + 10/3 = 8/3$.

c) Como $t=0$ en $(0,1)$ y $t=1$ en $(1,2)$, la integral curvilínea es igual a

$$\int_{t=0}^{1} \{t^2 - (t^2+1)\}dt + \{(t^2+1)^2 + t\}2t\,dt = \int_0^1 (2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1)\,dt = 2$$

1.7.1.4. Notación vectorial

La integral curvilínea (3) se puede expresar en forma vectorial como:

$$\int_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz = \int_C (A_1\mathrm{i} + A_2\mathrm{j} + A_3\mathrm{k})\bullet(dx\,\mathrm{i} + dy\,\mathrm{j} + dz\,\mathrm{k})$$
$$= \int_C \mathrm{A}\bullet d\mathrm{r} \qquad (10)$$

donde $\mathrm{A} = A_1\mathrm{i} + A_2\mathrm{j} + A_3\mathrm{k}$ y $d\mathrm{r} = dx\,\mathrm{i} + dy\,\mathrm{j} + dz\,\mathrm{k}$. La integral curvilínea (2) es un caso especial de ésta cuando $z = 0$ *(MURRAY, R., SPIEGEL, P. D.,[1] 200-201).*

Ejemplo 2. Calcular $\int_C \mathrm{A}\bullet d\mathrm{r}$ donde $\mathrm{A} = y\mathrm{i} + x\mathrm{j}$, desde el punto $(0,0)$ hasta $(2,4)$, si $y = x^2$.

Si el parámetro es x, entonces $0 \le x \le 2$, donde $y = x^2$ y $dy = 2x\,dx$, por lo que la integral curvilínea es igual a

$$\int_0^2 x^2 dx + 2x^2 dx = \int_0^2 3x^2 dx = 8$$

Si el parámetro es y, entonces $0 \le y \le 4$, donde $x = \sqrt{y}$ y $dx = dy/2\sqrt{y}$, por lo que la integral curvilínea es igual a

$$\int_0^4 y\left(\frac{dy}{2\sqrt{y}}\right) + \sqrt{y}\,dy = \int_0^4 \frac{\sqrt{y}\,dy}{2} + \sqrt{y}\,dy = \int_0^4 \frac{3}{2}\sqrt{y}\,dy = 8$$

Ejemplo 3 Calcular $\int_C \mathrm{A} \bullet d\mathrm{r}$ donde

$$\mathrm{A}=(3x^2-6yz)\mathrm{i}+(2y+3xz)\mathrm{j}+(1-4xyz^2)\mathrm{k},$$

desde el punto $(0,0,0)$ **hasta** $(1,1,1)$, **si** $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$..

Si $x=t, y=t^2, z=t^3$, los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$, corresponden a $t=0$ y $t=1$ respectivamente. Entonces,

$$\int_C \mathrm{A} \bullet d\mathrm{r}=\int_{t=0}^{1}\{3t^2-6(t^2)(t^3)\}dt+\{2t^2+3(t)(t^3)\}d(t^2)+\{1-4(t)(t^2)(t^3)^2\}d(t^3)$$

$$=\int_0^1(3t^2-6t^5)dt+(4t^3+6t^5)dt+(3t^2-12t^{11})dt=2$$

Cuando una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria, desde el punto A hasta B. El cambio de energía cinética es igual al trabajo realizado por el campo de fuerzas, si el vector F representa la fuerza aplicada a una partícula que se desplaza a través de la curva C. La integral (10) representa físicamente el trabajo total efectuando al mover el objeto a lo largo de la curva C, entonces:

$$\int_C \mathrm{F} \bullet d\mathrm{r} \qquad (10a)$$

Ejemplo 4. Hallar el trabajo total realizado para desplazar una partícula en un campo de fuerzas dado por $\mathrm{F}=3xy\mathrm{i}-5z\mathrm{j}+10x\mathrm{k}$ a lo largo de la curva dada por las ecuaciones parametricas $x=t^2+1,\ y=2t^2,\ z=t^3$ desde $t=1$, a $t=2$.

Dado que $\mathrm{F}=3xy\mathrm{i}-5z\mathrm{j}+10x\mathrm{k}$, por lo que al sustituir $x=t^2+1,\ y=2t^2,\ z=t^3$, se tiene:

$$\mathrm{F}=3(t^2+1)(2t^2)\mathrm{i}-5(t^3)\mathrm{j}+10(t^2+1)\mathrm{k}$$

$$=(6t^4+6t^2)\mathrm{i}-5t^3\mathrm{j}+(10t^2+10)\mathrm{k}.$$

$$d\mathrm{r}=(2tdt)\mathrm{i}+(4tdt)\mathrm{j}+(3t^2dt)\mathrm{k}$$

$$\int_C \mathrm{F} \bullet d\mathrm{r}=\int_1^2\{[(6t^4+6t^2)(2tdt)]-[(5t^3)(4tdt)]+[(10t^2+10)(3t^2dt)]\}$$

$$=\int_1^2(12t^5+10t^4+12t^3+30t^2)dt=303$$

1.7.1.5 Curva simple cerrada

1.7.1.5.1 Definición

Curva simple cerrada es una curva cerrada que no se corta a sí misma en ningún punto. **Matemáticamente**, una curva del plano está definida por las ecuaciones paramétricas $x=\phi(t),\ y=\psi(t)$, siendo ϕ y ψ funciones continuas y diferenciables en $t_1 \le t \le t_2$. Si $\phi(t_1)=\phi(t_2)$ y $\psi(t_1)=\psi(t_2)$ a curva se dice **cerrada**.

Si una región plana tiene la propiedad de que toda curva cerrada de la región se puede reducir a un punto sin salir de la región, se dice que la región es simplemente **conexa**, si no, que es **múltiplemente conexa**.

Al variar el parámetro t de t_1 a t_2 la curva plana queda descrita en un cierto sentido o dirección. Para curvas del plano xy se escoge como positiva o negativa, esto equivale a decir que recorrer la curva en sentido contrario a las agujas del reloj es recorrerla en sentido positivo y recorrerla en sentido de las agujas del reloj es recorrerla en sentido negativo *(BELAUNZARAN, G. E., FRONTANA, D. B., GÓMEZ, S. R., et. all.,182).*

1.7.1.5.2. Condiciones de independencia de trayectoria

Una condición necesaria y suficiente para que la integral curvilínea (2), sea independiente de la trayectoria de la curva C (la cual une dos puntos dados cualesquiera en una región R), es que en R

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{11}$$

donde las derivadas parciales son continuas.

La condición (11) es también la condición para que $Pdx+Qdy$ sea diferencial exacta, es decir, para que exista una función $\phi(x,y)$ tal que $Pdx+Qdy=d\phi$. En ese caso, si los puntos extremos de la curva C son (x_1,y_1) y (x_2,y_2), el valor de la integral curvilínea está dado por:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx+Qdy=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} d\phi=\phi(x_2,y_2)-\phi(x_1,y_1) \tag{12}$$

Si (11) se verifica y C es cerrada se tiene $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, y

$$\oint_C Pdx+Qdy=0 \tag{13}$$

Lo anterior se puede generalizar a integrales curvilíneas en el espacio.

Si se parte de que una condición necesaria y suficiente para que la integral (3) sea independiente de la trayectoria C (la cual une dos puntos cualesquiera en una región R), es que en R

$$\frac{\partial A_1}{\partial y}=\frac{\partial A_2}{\partial x},\frac{\partial A_3}{\partial x}=\frac{\partial A_1}{\partial z},\frac{\partial A_2}{\partial z}=\frac{\partial A_3}{\partial y} \tag{14}$$

donde las derivadas parciales sean continuas. Lo anterior se puede expresar de manera concisa con vectores. Si $A=A_1i+A_2j+A_3k$, la integral curvilínea se puede escribir en la forma (10) y la condición (14) es equivalente a la condición $\nabla\times A=0$. Si A representa un campo de fuerzas F que actúan sobre un objeto, el enunciado equivale a decir que el trabajo hecho al mover el objeto de un punto a otro es independiente de la trayectoria que une los puntos si, y solo si, $\nabla\times A=0$.

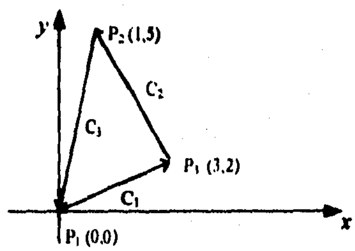
La condición (14) [o la condición equivalente $\nabla \times A = 0$] es también la condición para que $A_1dx + A_2dy + A_3dz$ [o $A \bullet dr$] sea diferencial exacta, es decir, de que exista una función $\phi(x,y,z)$ tal que $A_1dx + A_2dy + A_3dz = d\phi$. En este caso, si los extremos de la curva C son $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, el valor de la integral curvilínea está dado por:

$$\int_A^B A\bullet dr = \int_A^B d\phi = \phi(x_2,y_2,z_2) - \phi(x_1,y_1,z_1) \qquad (15)$$

Si C es cerrada y $\nabla \times A = 0$, se tiene (*MURRAY, R., SPIEGEL, P. D.,*[1] *196-198*):

$$\oint_C A\bullet dr = 0 \qquad (16)$$

Ejemplo 5. Calcular las siguientes integrales de línea a través del triángulo formado por los puntos (0,0), (3,2) y (1,5) efectuando el recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj.



En base a la figura anterior se puede obtener las ecuaciones que rigen el comportamiento de cada una de las rectas asociadas al triángulo:

C_1: $y = \frac{2}{3}x,\ dy = \frac{2}{3}dx$ $\qquad$ C_2: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2},\ dy = -\frac{3}{2}$ $\qquad$ C_3: $y = 5x,\ dy = 5dx$

a) $\oint_C 2xydx + x^2dy$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \therefore \quad 2x = 2x$$

En consideración a lo anterior dicha integral debe ser igual a cero, a continuación se que tiene que demostrar. Dado que se trata de tres curvas, el calculo puede realizar por separado, siendo el siguiente:

P_1 a P_2) $0 \le x \le 3$ $\quad \int_0^3 2x(\tfrac{2}{3}x)dx + x^2(\tfrac{2}{3}dx) = \int_0^3 2x^2dx = 18$

P_2 a P_3) $3 \le x \le 1$ $\quad \int_3^1 2x(-\tfrac{3}{2}x + \tfrac{13}{2})dx + x^2(-\tfrac{3}{2}dx) = \int_3^1 (13x - \tfrac{9}{2}x^2)dx = -13$

P_3 a P_1) $1 \le x \le 0$ $\quad \int_1^0 2x(5x)dx + x^2(5dx) = \int_1^0 15x^2dx = -5$

$$\oint_C 2xydx + x^2dy = 18 - 13 - 5 = 0$$

b) $\oint_C 3x^2y^2dx + 2x^3ydy$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad . \quad 6x^2y = 6x^2y$$

Dicha integral es igual a cero. Demostración:

$$P_1 \text{ a } P_2) \quad 0 \le x \le 3 \quad \int_0^3 3x^2(\tfrac{2}{3}x)^2 dx - 2x^3(\tfrac{2}{3}x)(\tfrac{2}{3}dx) = \int_0^3 \tfrac{20}{9}x^4 dx = 108$$

$$P_2 \text{ a } P_3) \quad 3 \le x \le 1 \quad \int_3^1 3x^2(-\tfrac{3}{2}x + \tfrac{13}{2})^2 dx + 2x^3(-\tfrac{3}{2}x + \tfrac{13}{2})(-\tfrac{3}{2}dx)$$

$$= \int_3^1 (\tfrac{45}{4}x^4 - \tfrac{312}{4}x^3 - \tfrac{507}{4}x^2)dx = -83$$

$$P_3 \text{ a } P_1) \quad 1 \le x \le 0 \quad \int_1^0 3x^2(5x)^2 dx - 2x^3(5x)(5dx) = \int_1^0 125x^4 dx = -25$$

c) $\oint_C (x-y)dx + (y-x)dy$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \therefore \quad -1 = -1$$

Dicha integral es igual a cero. Demostración:

$$P_1 \text{ a } P_2) \quad 0 \le x \le 3 \quad \int_0^3 (x - \tfrac{2}{3}x)dx + (\tfrac{2}{3}x - x)(\tfrac{2}{3}dx) = \int_0^3 \tfrac{1}{9}x dx = 0.5$$

$$P_2 \text{ a } P_3) \quad 3 \le x \le 1 \quad \int_3^1 (x + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{13}{2})dx + (-\tfrac{3}{2}x + \tfrac{13}{2} - x)(-\tfrac{3}{2}dx)$$

$$= \int_3^1 (\tfrac{25}{4}x - \tfrac{65}{4})dx = 7.5$$

$$P_3 \text{ a } P_1) \quad 1 \le x \le 0 \quad \int_1^0 (x - 5x)dx + (5x - x)(5dx) = \int_1^0 16x dx = -8$$

$$\oint_C (x-y)dx + (y-x)dy = 0.5 + 7.5 - 8 = 0$$

1.7.2 Integral doble

1.7.2.1. Integral doble en regiones rectangulares

1.7.2.1.1. Definición

Sea $F(x,y)$ una función definida en una región rectangular R, expresada por:

$$R: a \le x \le b, \ c \le y \le d$$

la cual al ser subdividida (FIGURA 1.25), en pequeñas porciones de área,

$$\Delta A = \Delta x \Delta y$$

donde ΔA_i, $i = 1,2,3,\ldots,n$, y seleccionar un punto (ξ_i, η_i) en cada porción ΔA_i y formar la suma

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i)\Delta A_i \tag{17}$$

Si f **es** continua en R, entonces al hacer que el número n de subdivisiones aumente en forma indefinida, de modo que Δx y Δy tienda a cero, las sumas (17) tienden a un limite llamado **integral doble** de f sobre R, que se denota por

$$\iint_R f(x,y)dA \quad \text{o bien} \quad \iint_R f(x,y)dxdy$$

Asl,

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i)\,\Delta A_i \tag{18}$$

El limite en (18) es independiente del orden en que se numeran las áreas ΔA_i, e independiente de la elección del punto (x_i,y_i) en cada ΔA_i *(FINNEY,R. L., THOMAS,G. B., 921).*

1.7.2.1.2. Propiedades

Dado que $f(x,y)$ y $g(x,y)$, son dos funciones continuas y definidas en R, entonces:

1. $$\iint_R k\,f(x,y)dA = k\iint_R f(x,y)dA \tag{19}$$

donde k es un constante, es decir, cualquier número real.

2. $$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA \tag{20}$$

3. Si una región R se puede dividir en varias subregiones, entonces:

$$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA + \ldots + \iint_{R_n} f(x,y)dA \tag{21}$$

donde R, es la unión de R_n, que no se superponen *(LEITHOLD, L.,946).*

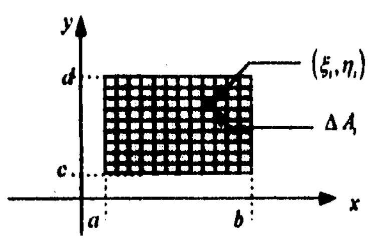


FIGURA 1.25 MALLA RECTANGULAR QUE SUBDIVIDE LA REGIÓN RECTANGULAR R EN PEQUEÑOS RECTÁNGULOS DE ÁREA $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

1.7.2.1.3 Interpretación de la integral doble como un volumen

Cuando $f(x,y) > 0$, se puede interpretar

$$\iint_R f(x,y)dA$$

como el volumen de un sólido encerrado por R, los planos $x=a, x=b,\ y=c, y=d$ y la superficie $z=f(x,y)$ (FIGURA 1.26). Cada termino $f(\xi_i,\eta_i)\ \Delta A_i$ de la suma

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i)\,\Delta A_i$$

es el volumen de un prisma rectangular vertical que aproxima el volumen de la porción de sólido situada directamente sobre la base ΔA_i. Así dicha sumatoria aproxima el volumen total, de un sólido y se define dicho volumen como *(hSU, H. P., MEHRA, R., 256)*:

$$\text{Volumen} = \iint_R f(x,y)dA \tag{22}$$

1.7.2.1.4 Cálculo de integral doble

El calculo de la integral doble se basa en el teorema de Guido Fibini que dice: la integral doble de cualquier función continua sobre un rectángulo puede calcularse como un integral iterada o repetida en cualquier orden de integración.

Si $f(x,y)$ es continua en la región rectangular R: $a \le x \le b,\ c \le y \le d$, entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \tag{23}$$

Esto significa que se puede calcular una integral doble integrando una sola variable cada vez. Y que dicha integración se puede realizar en cualquier orden.

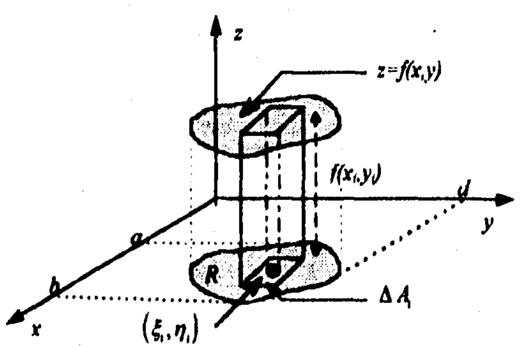


FIGURA 1.26 APROXIMACIÓN DEL VOLUMEN DE UN SÓLIDO CON PRISMAS RECTANGULARES

Ejemplo 6. Calcular $\iint_R F(x,y)dA$ para

$$f(x,y) = 1-6x^2y \qquad \text{y} \qquad R{:}0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1$$

Al aplicar el teorema de Fubini

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(1-6x^2y)dxdy = \int_{-1}^{1}(x-2x^3y)\Big|_{x=0}^{x=2}dy$$
$$= \int_{-1}^{1}[2-16y]dy = 2y-8y^2\Big|_{-1}^{1}$$
$$= (2-8)-(-2-8) = 4$$

Si se invierte el orden de integración se obtiene la misma respuesta

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_0^2\int_{-1}^{1}(1-6x^2y)dydx = \int_0^2(y-3x^2y^2)\Big|_{y=-1}^{y=1}dx$$
$$= \int_0^2[(1-3x^2)-(-1-3x^2)]dx$$
$$= \int_0^2 2dx = 4$$

Ejemplo 7. Calcular $\iint_R F(x,y)dA$ para

$$f(x,y) = xy^2 \qquad \text{y} \qquad R{:}\,1 \le x \le 3,\;\; 1 \le y \le 2$$

Al aplicar el teorema de Fubini

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_1^2\int_1^3(xy^2)dxdy = \int_1^2\left(\frac{x^2y^2}{2}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=3}dy$$
$$= \int_1^2[4y^2]dy = \frac{4y^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{28}{3}$$

Si se invierte **el** orden de integración se obtiene la misma respuesta

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_1^3\int_1^2(xy^2)dydx = \int_1^3\left(\frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_{y=1}^{y=2}dx$$
$$= \int_1^3\frac{7x}{3}dx = \frac{28}{3}$$

1.7.2.2 Integral doble para regiones acotadas no rectangulares

1.7.2.2.1 Definición

Sea una función $f(x,y)$ en una región acotada no rectangular (FIGURA 1.27) definida en una región cerrada R del plano xy.

Dado que es una función continua, entonces al subdividir a la misma en n subregiones ΔR_i de área. ΔA_i, donde $i = 1,2,3,\ldots,n$ (FIGURA 1.28). Al solo incluir en la suma parcial los elementos de área $\Delta A = \Delta x \Delta y$ que están completamente contenidos en la región, en la cual al elegir un punto (ξ_i, η_i) en cada ΔA_i y formar la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i)\,\Delta A_i$$

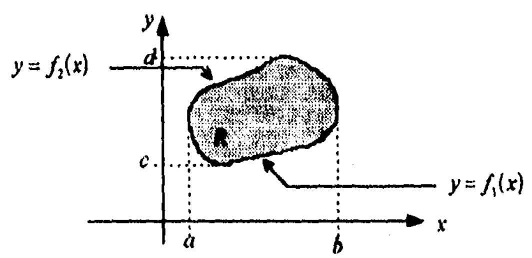


FIGURA 1.27 FUNCIÓN $f(x,y)$, DEFINIDA EN UNA REGIÓN R ACOTADA, NO RECTANGULAR

La única diferencia entre la sumatoria anterior y la (17) es que ahora las áreas ΔA_i puede no cubrir toda la región R, pero al hacer que el número de subdivisiones aumente en forma indefinida de manera que sea mayor la parte incluida en la región. Si f es continua y la frontera de R esta formada por un número finito de segmentos de rectas o curvas unidas por sus extremos, entonces dichas sumas tendrán un limite cuando $\Delta x \Delta y$ tiendan a cero. Por lo que:

$$\iint_R F(x,y)\,dA = \lim_{n \to \infty} F(\xi_i, \eta_i)\,\Delta A_i$$

se le llama **integral doble** de f sobre la región R.

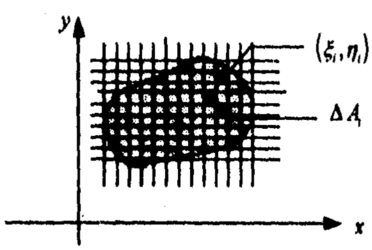


FIGURA 1.28 MALLA RECTANGULAR QUE SUBDIVIDE EN CELDAS A LA REGIÓN R, ACOTADA NO RECTANGULAR

1.7.2.2.2. Cálculo

1. Si R **esta** definida por $a \le x \le b$, y $f_1(x) \le y \le f_2(x)$ donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ **son** funciones **continuas** en $[a,b]$, entonces(FIGURA 1.27):

$$\iint_R F(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b}\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dy\,dx$$
$$= \int_{x=a}^{b}\left\{\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dy\right\}dx \qquad \textbf{(24a)}$$

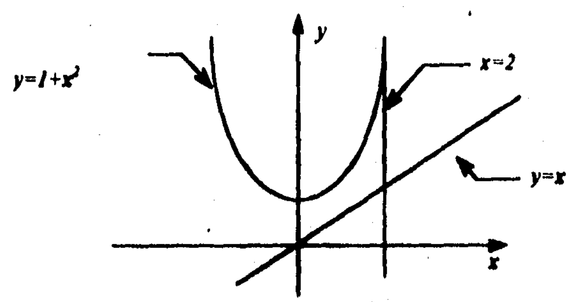
donde la integral entre llaves se ha de calcular primero (manteniendo x constante) para integrar finalmente con respecto a x entre a y b. La ecuación (24a) indica cómo se puede calcular una integral doble expresándola por dos integrales simples iteradas.

2. Si R está definida por $c \le y \le d$ y $g_1(y) \le x \le g_2(y)$, con $x = g_1(y)$ y $x = g_2(y)$, funciones continuas en $[c,d]$, entonces (FIGURA 1.27):

$$\iint_R F(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d}\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{y=c}^{d}\left\{\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dx\right\}dy \qquad \textbf{(24b)}$$

Ejemplo 8. **Evaluar $\iint_R (x+1)\,dA$, donde R es la región en el plano xy acotada por las gráficas de las ecuaciones:**

$$x = 2, \qquad y = 1 + x^2 \qquad \text{y} \qquad y = x.$$



En base a la gráfica anterior la región R esta acotada por:

$$0 \le x \le 2 \quad \text{y} \quad x \le y \le 1 + x^2$$

Por lo que al sustituir en la ecuación (24a), se tiene que:

$$\int_0^2\int_x^{1+x^2}(x+1)\,dy\,dx = \int_0^2 y(x+1)\Big|_x^{1+x^2}dx$$
$$= \int_0^2 (x^3+1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_0^2 = 10$$

Ejemplo 9. Evaluar $\iint_R xy\,dA$, donde R es la región acotada en el primer **cuadrante** limitado por las curvas:

$$y^2 = x, \qquad y^2 = 4 - x \qquad \text{y} \qquad y = 0.$$

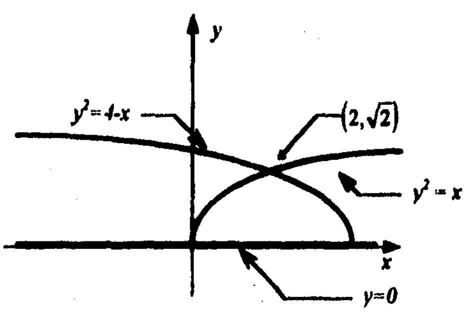
En base a la gráfica siguiente, la región R esta acotada por:

$$0 \le y \le \sqrt{2} \quad \text{y} \quad y^2 \le x \le 4 - y^2$$

Por lo que al sustituir en la ecuación (24b), se tiene que:

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_{y^2}^{4-y^2}(xy)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2 y}{2}\Bigg|_{y^2}^{4-y^2} dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\left(\frac{16y}{2}-\frac{8y^3}{2}\right)dy = \left[\frac{16y^2}{4}-\frac{8y^4}{8}\right]_0^{\sqrt{2}} = (8-4) = 4$$



1.7.2.2.3 Interpretación de la integral doble como un área

Si en la definición de la integral doble sobre una región R acotada no rectangular, se considera que $f(x,y)=1$, las sumas parciales se reducen a:

$$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i,\eta_i)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \qquad (25)$$

y proporcionan una aproximación del área de la región. A medida que Δx y Δy tienden a cero, se define el área de R, como el limite:

$$\text{Area} = lim\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i = \iint_R dA \qquad (26)$$

Para el cálculo de la integral de área (26), se debe integrar la función constante $f(x,y)=1$ sobre R *(Mc QUISTAN, R. B., 287).*

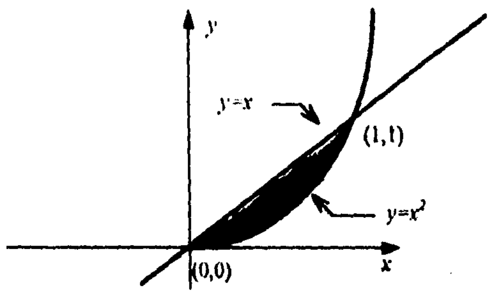
Ejemplo 10. Calcular el área de la región R acotada por $y=x$ y $y=x^2$ en el primer cuadrante.

En base a la gráfica siguiente, la región R esta acotada por:

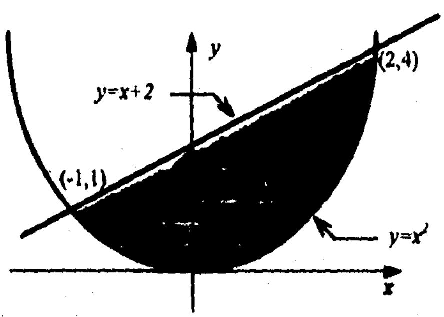
$$0 \le x \le 1 \quad \text{y} \quad x^2 \le y \le x$$

Por lo que al sustituir en la ecuación (26), se tiene que:

$$A=\int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx=\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}$$



Ejemplo 11. Calcular el área de la región R encerrada por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=x+2$.



En base a la gráfica, la región R esta acotada por:

$$-1\le x\le 2 \quad \text{y} \quad x^2\le y\le x+2$$

Por lo que al sustituir, se tiene que:

$$A=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx=\int_{-1}^{2}\left[(x+2)-x^2\right]dx=\frac{9}{2}$$

Dada una función $F(x,y,z)$ definida en una región cerrada tridimensional R. Al ser subdividida la región en n subregiones de volumen ΔV_i, $i=1,2,3,\ldots,n$, sea (ξ_i,η_i,ζ_i) un punto cualquiera en cada región. Al sumar,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta V_i \qquad (27)$$

donde el número n de subdivisiones tiende a infinito, de modo que la máxima dimensión lineal de cada subregión tiende a cero, este límite, si existe, se denota por

$$\iiint_R F(x,y,z)dV \qquad (28)$$

y se llama **integral triple** de $F(x,y,z)$ sobre R. El límite existe si $F(x,y,z)$ es continua en R.

Si se construye una red con planos paralelos a los planos xy, yz, xz, la región R queda subdividida en subregiones que son ahora paralelepípedos rectángulos. En tal caso se puede expresar la integral triple sobre R dada por (28) como **integral iterada** de la forma

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\left\{\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\right\}dy\right]dx \qquad (29)$$

(debiéndose calcular primero la integral interior) o como suma de integrales semejantes. La integración puede hacerse también en cualquier otro orden para obtener un resultado equivalente. Son posibles también generalizaciones con un mayor número de dimensiones.

TESIS

COMPLETA

Capítulo 2
Plan de estudios de la Licenciatura de Ingeniería en Alimentos

Dada la necesidad de intensificar el aprovechamiento de los recursos naturales destinados a la producción y transformación de alimentos, la Universidad Nacional Autónoma de México, en cumplimiento de su función social, se planteó la tarea de elaborar un plan educativo para la formación de profesionistas, investigadores y técnicos que el desarrollo económico del país en 1976, estaba demandando.

Como una acción paralela en la solución del problema alimentario en el país, diversos sectores de la comunidad universitaria basándose en la necesidad de incrementar el desarrollo de los estudios profesionales en el campo de la ciencia de los alimentos y de la nutrición, propusieron la formación de un profesionista que participara en la ejecución de planes orientados a promover, coordinar y organizar acciones integradoras en las ramas agropecuaria, pesquera, industrial y comercial que hiciera posible la disponibilidad de alimentos de primera necesidad al alcance de las mayorías.

Durante el primer semestre de 1976, se creó una comisión interna formada por un grupo de profesores encaminados a determinar las necesidades que prevalecían en el campo profesional de las ciencias alimentarias, para ello se recurrió a una comisión externa de consulta en que participaron personas involucradas en el desarrollo de estas ciencias, tales como directores de centros de investigación, técnicos con amplia experiencia en el campo de alimentos, profesores e investigadores universitarios. Posteriormente, la comisión interna recogió las diversas recomendaciones y se dio a la tarea de diseñar un plan de estudios, con base a las características propias de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, el cual estuviera basado en las necesidades reales del país.

2.1 Estructura del plan de estudios

PROPÓSITO FUNDAMENTAL DE LA LICENCIATURA DE INGENIERÍA EN ALIMENTOS

Capacitar profesionistas que apliquen sus conocimientos y experiencias en el campo de la ciencia alimentaria, como una necesidad de bienestar de la comunidad dentro del marco de transformaciones económicas y sociales del país.

2.1.1 Perfil del egresado

El egresado de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos deberá tener las siguientes características:

1°. Capacidad para desarrollar tecnología propia y especifica para México, considerando la realidad del país. Esta búsqueda de tecnología nacional se enfocará primordialmente a los siguientes aspectos:

- Desarrollar técnicas y procesos de manufactura e industrialización aplicables a los recursos agropecuarios y pesqueros del país que actualmente no se industrializan por carecer de ellas.

- Participar en el diseño y utilización de los equipos y maquinaria necesarios para industrializar los productos primarios del país.
- Adaptar y mejorar las tecnologías existentes buscando su optimización .
- Desarrollar tecnologías de empaque y conservación con un criterio dirigido a la producción de alimentos nutritivos y baratos (producir alimentos no empaques).
- Desarrollar tecnologías accesibles y aplicables a la pequeña y mediana industria, de fácil divulgación que ayuden a la solución de los grandes problemas de México.
- Contemplar una mayor utilización de mano de obra en lugar de una utilización de equipo sofisticado y caro. Desarrollar procesos y técnicas basadas en la utilización de equipo de fabricación local.

2°. Capacidad para estudiar y evaluar los recursos naturales susceptibles a transformarse en alimentos.

- Mediante el análisis de la composición química, valor nutritivo y de sus características biofisicoquímicas de los alimentos, coadyuvar a la producción de los alimentos de alto valor proteico, utilizando de preferencia las materias primas de producción nacional.
- Estudiar los aspectos biológicos que nos permitan mejorar la conservación, transformación y comercialización de alimentos para una mejor disponibilidad y consumo.
- Impulsar por medio de la investigación el desarrollo de nuevos productos alimenticios que permitan cubrir deficiencias nutritivas en la comunidad.
- Industrializar productos agrícolas, pecuarios y marinos susceptibles de transformarse en alimentos.

3°. Capacidad de planear, organizar y administrar un centro productor o transformador de alimentos.

- Establecer los programas agrícolas y calendarios de producción.
- Indicar las inversiones que se requerirán para la operación del proceso de producción de alimentos.
- Seleccionar el equipo más adecuado al producto alimenticio que se desee producir.
- Hacer las recomendaciones necesarias en el mejoramiento de los equipos instalados a efecto de lograr una mayor rentabilidad o eficiencia.
- Establecer los procedimientos de control de operación en los procesos de transformación.
- Evaluar y administrar los aspectos contables de rentabilidad y factibilidad en los proyectos de producción de alimentos.
- Organizar los programas de producción y transformación de alimentos con la debida orientación, a efecto de evitar al máximo las pérdidas y desperdicios.

4°.Capacidad para actuar como promotor de la pequeña industria procesadora de alimentos.

- Como un extensionista de la ciencia y tecnología de los alimentos, estará informado de los procesos de transformación, así como de la Ingeniería en Alimentos, lo que permitirá hacer las recomendaciones técnicas más adecuadas en cuanto a los diversos tratamientos del producto alimenticio, su conservación, manejo y distribución.
- Participar en centros de producción de alimentos, así como en organizaciones dedicadas a la industrialización y comercialización de productos alimenticios.
- Encauzar los esfuerzos de las comunidades productoras de alimentos, a efecto de promover la creación de empresas, ya sea en el campo de la transformación o a nivel de comercialización.
- Programar los planes de trabajo en la producción de alimentos de tal manera que se busque mediante una acción técnica justificada, reducir las importaciones tanto de materia prima básica, como de productos terminados, dándole un mayor impulso a las exportaciones y favoreciendo así el desarrollo económico del país.

5°. Mediante la práctica de campo profesional, y a través de los módulos finales del programa de estudios el Ingeniero en Alimentos podrá estar capacitado para participar en las siguientes actividades:

- Evaluaciones económicas de los recursos naturales y humanos disponibles en una comunidad y preparar o ejecutar planes de realización.
- Estudios de comercialización. distribución y mercado de los productos alimenticios.
- Formación de cooperativas y pequeñas empresas que faciliten una mejor utilización de los recursos alimentarios. Establecer procedimientos para lograr mejores resultados en la transformación de alimentos a través de la mutua colaboración con los productores primarios de materias primas.
- Mejoramiento de productos alimenticios de poco interés por su valor nutritivo.
- Desarrollo de tecnologías propia para la transformación de alimentos, principalmente de aquellos que su producción está confinada a una sola región.
- Control bioquímico de los productos alimenticios (DEPTO.DE CIENCIAS BIOLOGICAS, 5-26).

2.1.2. Estructuración

Con base en las concepciones del profesionista y sus interrelaciones con respecto a la sociedad, se hizo necesario tomar en cuenta los factores que deben regir la planificación curricular de una profesión, entendiéndose desde luego que para cada profesión, sus factores estarán definidos de acuerdo a:

- Naturaleza de las actividades profesionales.
- Áreas de las mismas y su relación con actividades conexas.
- Diversificación de las especialidades dentro del área.

- Grado de calificación requerido por el mercado de trabajo.
- Perspectivas de desarrollo del ámbito de actividadas, tanto en amplitud como en lo que se refiere a nuevas especialidades.

En base a los factores de planificación curricular, perfil del ingeniero y propósito de la creación de la carrera de Ingeniería en Alimentos, la estructura del plan de estudios fue conformada tomando en cuenta: el aspecto técnico y el aspecto social. (DIAGRAMA 1.1).

- Aspecto técnico
  - Parte formativa
    - Asignaturas básicas
    - Asignaturas fundamentales
  - Parte informativa
    - Asignaturas complementarias
    - Información extracurrirular
- Aspecto social
  - Área de influencia

DIAGRAMA 1.1 ESTRUCTURA DEL PLAN DE ESTUDIOS: ASPECTOS TÉCNICO Y SOCIAL.

2.1.2.1 Aspecto técnico

Contempla las necesidades concretas de la sociedad, como contratante de servicios.

Parte formativa

Comprende materias académicas y trabajos experimentales a través de los cuales se conocen los elementos de estudio que se consideran indispensables para la especialidad, sus interrelaciones, la metodología del desarrollo y las técnicas de trabajo y aplicación de los conocimientos consecuentes.

Asignaturas básicas. Contemplan los elementos académicos primarios (material o ideas) que se manejan en el curso de la carrera; así como de las leyes que rigen las relaciones cualitativas y cuantitativas entre dichos elementos.

Asignaturas fundamentales. Contemplan la aplicación de los conocimientos adquiridos en forma directa con base a las asignaturas básicas (técnicas y métodos); así como de las leyes del desarrollo en el área de los conocimientos de las asignaturas básicas.

Parte informativa

Asignaturas complementarias. Materias académicas que ofrecen información especializada en torno a conocimientos primarios y consecuentes, y sus leyes respectivas.

Información extracurricular. Vías de información adicional.

2.1.2.2 Aspecto social

Necesidades generales de la sociedad como un todo en desarrollo.

Área de influencia

Asignaturas de capacitación para la proyección social de una profesión. Estructura de la sociedad (con especial referencia a los sectores de beneficio directo).

El hecho de que una asignatura en lo general, se considere formativa e informativa, sólo significa que en su estructura hay un mayor contenido de material formativo e informativo, pero de ninguna manera implica que tenga por ello algún carácter exclusivo.

En consecuencia, del mismo modo que se hace con el plan de estudios, el programa de una materia académica también debe ser sometida a un análisis cuidadoso para formular la proporción adecuada de cada una de ambas, requerida para que la asignatura cumpla su función dentro del contexto del plan de estudios.

Con esta finalidad, resulta indispensable entender el significado de estos conceptos:

Lo **formativo** de una asignatura lo constituye el conjunto de conocimientos que aporta, en tanto permiten el dominio de la metodología general de la materia en cuestión.

Lo **informativo** de una asignatura académica en cambio, lo estructura el conjunto de conocimientos que ofrece, en cuanto incrementan el acervo de datos de ejemplos, aplicaciones, etcétera.

Dada la importancia de cada una de las áreas que engloban estos aspectos, se prosiguió a determinar las asignaturas que cumplían dichos requisitos, para la conformación del plan de estudios (DIAGRAMA 1.2).

Una vez analizadas las diferentes asignaturas cualitativa y cuantitativamente, el problema inmediato lo constituye la necesidad de distribuir convenientemente las materias académicas seleccionadas, dentro del marco de temporalidad asignada a cada profesión en particular.

2.1.2.3 Criterios de distribución de tiempos

El criterio para la distribución debe tomar en cuenta:

a) **Número predeterminado de semestres**, el cual es resultado de una consideración técnico-sicológica.

b) **Número de créditos por semestre**, el cual es consecuencia de una evaluación técnico-pedagógica, cuyo fin es la búsqueda de condiciones que permitan que las

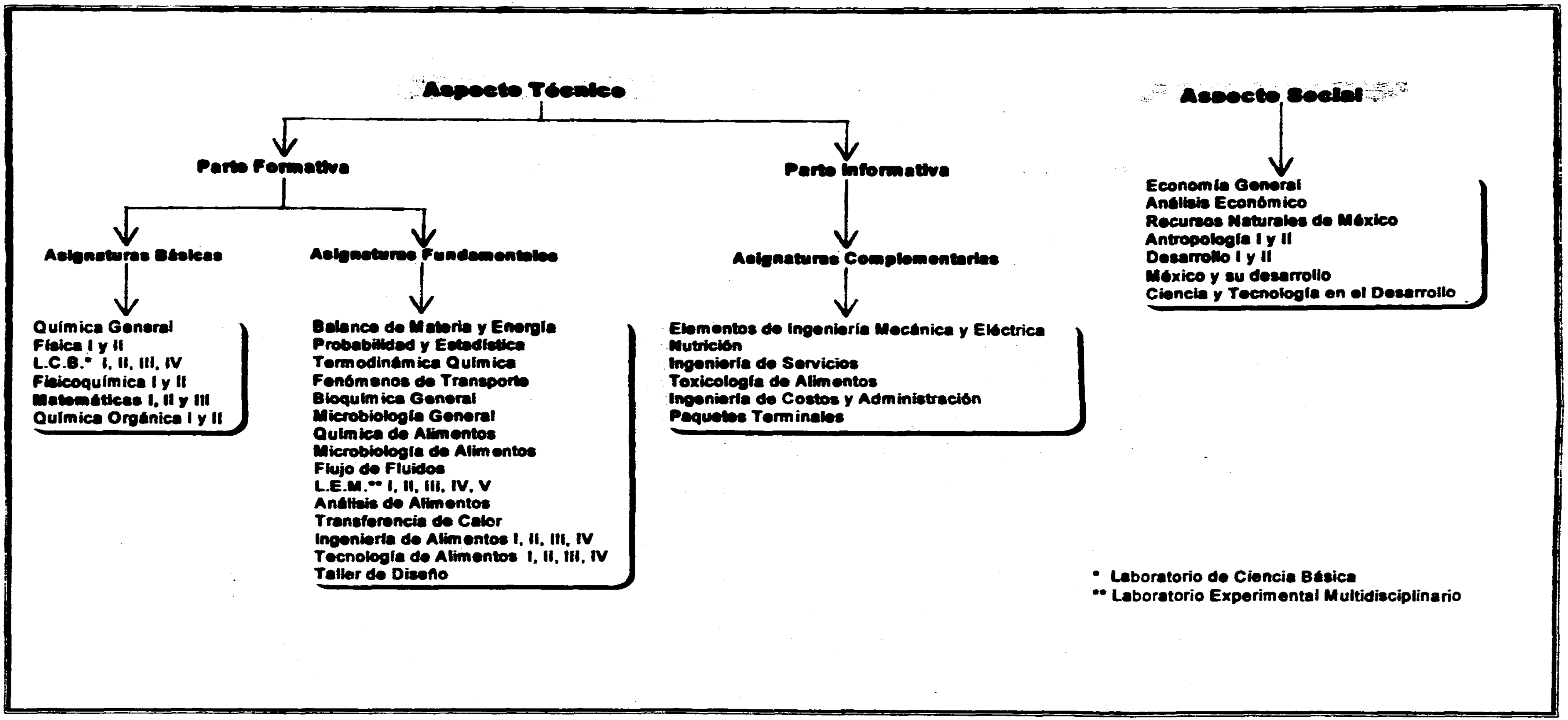


DIAGRAMA 1.2 ESTRUCTURA DEL PLAN DE ESTUDIOS: ASIGNATURAS

actividades del alumno tendientes a su formación profesional sean realizadas en una forma balanceada.

c) **Coordinación horizontal de asignaturas**, es la adecuada disposición de las asignaturas en cada semestre, con la pretensión de crear niveles congruentes de estudios en cada etapa académica a fin de:

- Mantener, hasta donde sea posible, un panorama progresivo y equilibrado de la profesión y un criterio sistemáticamente más avanzado a medida que se cursan los diferentes semestres del plan.
- Evitar que se cursen simultáneamente, asignaturas seriadas o que algunas de ellas requerirán del antecedente de otra en el mismo nivel para su debida y natural compresión.

d) **Coordinación vertical de asignaturas**, tiene como propósitos concatenar en forma conveniente a las diferentes materias académicas, ordenándolas en base a alguno de los criterios que más se ajusten a las necesidades del caso:

- Según su grado de complejidad.
- De acuerdo con el carácter formativo de cada una de las asignaturas en relación con el resto del área correspondiente.
- En función de su requerimiento para la comprensión de otra u otras asignaturas del plan de estudios.

Los dos primeros son exteriores al análisis académico, en tanto que, la coordinación tanto horizontal como vertical de asignaturas son totalmente de análisis académico interno. Tomando en consideración los parámetros mencionados se planteó y aceptó el siguiente plan de estudios (DIAGRAMA 1.3):

DIAGRAMA 1.3 PLAN DE ESTUDIOS DE LA LICENCIATURA DE INGENIERÍA EN ALIMENTOS

Primer semestre	
Química General	
Matemáticas I	
Matemáticas II	
Física I	
Laboratorio de Ciencia Básica I	
Economía General	
Segundo semestre	
Química Orgánica I	
Fisicoquímica I	
Matemáticas III	Matemáticas I, Matemáticas II
Física II	Física I
Laboratorio de Ciencia Básica II	Laboratorio de Ciencia Básica I
Recursos Naturales de México	Economía General

Tercer semestre

Química Orgánica II	Química Orgánica I
Fenómenos de Transporte	Matemáticas II
Fisicoquímica II	Fisicoquímica I
Probabilidad y Estadística	Matemáticas I
Balance de Materia y Energía	Fisicoquímica I
Laboratorio de Ciencia Básica III	Laboratorio de Ciencia Básica II
Análisis Económico	

Cuarto semestre

Bioquímica General	Química Orgánica II
Microbiología General	
Flujo de Fluidos	Fenómenos de Transporte
Termodinámica Química	Fisicoquímica II
Laboratorio de Ciencia Básica IV	Laboratorio de Ciencia Básica III
Antropología I	

Quinto semestre

Química de Alimentos	Bioquímica General
Microbiología de Alimentos	Microbiología General
Transferencia de calor	Fenómenos de Transporte
Ingeniería de Alimentos I	Física I, Balance de Materia y Energía
Elementos de ingeniería mecánica y eléctrica	Física I, Física II
Laboratorio Experimental Multidisciplinario I	Laboratorio de Ciencia Básica IV
Antropología II	Antropología I

Sexto semestre

Análisis de Alimentos	Química Orgánica II
Nutrición	Bioquímica General
Tecnología de Alimentos I	Química de Alimentos
Ingeniería de Alimentos II	Termodinámica Química
Laboratorio Experimental Multidisciplinario II	Laboratorio Experimental Multidisciplinario I
Desarrollo I	

Séptimo semestre

Toxicología de Alimentos	Bioquímica General
Tecnología de Alimentos II	Química de Alimentos
Ingeniería de Alimentos III	Termodinámica Química
Ingeniería de servicios	Elementos de Ingeniería Mecánica y eléctrica
Laboratorio Experimental Multidisciplinario III	Laboratorio Experimental Multidisciplinario II
Desarrollo II	Desarrollo I

Octavo semestre

Ingeniería de costos y administración	
Tecnología de Alimentos III	Química de Alimentos
Ingeniería de Alimentos IV	Microbiología General, Termodinámica Química
Taller de Diseño	Ingeniería de Alimentos II
Laboratorio Experimental Multidisciplinario IV	Laboratorio Experimental Multidisciplinario III
México y su desarrollo	Desarrollo II
Paquete terminal	

Noveno semestre

Tecnología de alimentos IV	Química de Alimentos
Laboratorio Experimental Multidisciplinario V	Laboratorio Experimental Multidisciplinario IV
Ciencia y tecnología en el desarrollo	Desarrollo II

Paquetes terminales

* Enzimas de aplicación en alimentos
* Propiedades físicas de los alimentos
* Frutas y hortalizas
* Ingeniería de refrigeración y congelación
* Ingeniería de almacenamiento de granos

2.1.3 Descripción del Plan de Estudios

En consideración a los criterios metodológicos sugeridos anteriormente, se hizo posible estructurar el plan de estudios (DIAGRAMA 1.3), en el cual se visualizan diversas asignaturas, para una mayor comprensión, es necesario hacer resaltar las áreas por las que está estructurado (DIAGRAMA 1.4), las cuales permiten una vinculación con el contexto socioeconómico nacional.

2.1.3.1 Área quimicobiológica

El profesionista egresado de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos debe tener la capacidad para estudiar y evaluar los recursos naturales susceptibles a transformarse en alimentos, es por ello necesario cubrir los diferentes niveles metodológicos de enseñanza, de tal forma que dicha área está compuesta tanto por materias básicas (Química General, Química Orgánica I y II), como fundamentales, estas últimas se inician con Bioquímica y Microbiología General, lo que permite tener una visión global, para continuar con materias de importancia dentro del campo de los alimentos, tales como Química de Alimentos, Microbiología y Análisis de Alimentos, terminando así con materias de carácter informativo como Nutrición y Toxicología de Alimentos en las que se hacen resaltan los aspectos de Salud Pública.

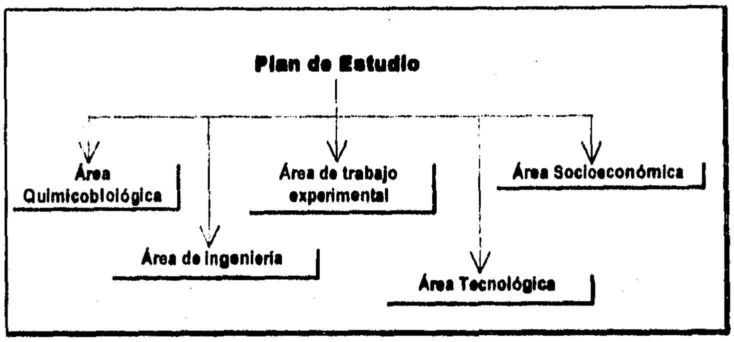


DIAGRAMA 1.4 ESTRUCTURA DEL PLAN DE ESTUDIOS: DISTRIBUCIÓN POR ÁREAS DE VINCULACIÓN CON EL CONTEXTO SOCIOECONÓMICO NACIONAL

2.1.3.2 Área de trabajo experimental

Dicha área contempla un único laboratorio a lo largo de la licenciatura, proporcionando así al estudiante una formación experimental, práctica, de nivel profesional, la cual junto a la preparación teórica recibida en el salón de clases, constituye un equilibrio adecuado entre el saber y el saber hacer que todo profesionista debe de tener al concluir los estudios superiores.

Estructura del laboratorio único

El laboratorio cuenta con dos etapas (DIAGRAMA 1.5):

a) Laboratorio de Ciencia Básica (L.C.B): **4 semestres**
b) Laboratorio Experimental Multidisciplinario (L.E.M.): 5 **semestres**

SEMESTRES CURRICULARES								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Introducción al trabajo experimental y a la metodología científica.		Trabajo experimental integrado en torno a temas.		Trabajo de campo profesional				
1er Curso	2o curso	3o Curso	4o Curso	**Laboratorio Experimental Multidisciplinario**				
Laboratorio de Ciencia Básica								

DIAGRAMA 1.5 DISTRIBUCIÓN DEL LABORATORIO ÚNICO

Laboratorio de Ciencia Básica. Dicho laboratorio está considerado durante los 4 primeros semestres, donde los Laboratorios de Ciencia Básica I y II tienen como objetivos:

1. Que el estudiante aprenda la metodología científica y experimental a través de la realización de experimentos.

2. Introducir al alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
3. Desarrollar en el estudiante el sentido de responsabilidad y gusto por el trabajo experimental.
4. Que el alumno conozca y comprenda la metodología experimental básica de la Química, Fisicoquímica y Bioquímica .
5. Que el alumno desarrolle el trabajo experimental en forma integrada.

En el centro de esta metodología se destaca que los temas experimentales incluidos en los cursos de ciencia Básica III y IV así como en el Laboratorio Experimental Multidisciplinario (tomando en cuenta sus propias características), permitan desarrollar el trabajo experimental en forma integrada y dentro de los propósitos del sistema de enseñanza-aprendizaje.

Es importante señalar que la integración del trabajo debe darse en dos niveles: Internamente al curriculum, y con el entorno social.

El primer aspecto contempla la necesidad de que a través de los laboratorios se aprenda a resolver problemas experimentales y que la actividad experimental propicie, estimule el desarrollo de mentes creativas, inventivas y críticas; que todas las actividades que el alumno emprende permitan realmente la integración del trabajo teórico y el trabajo práctico.

El segundo aspecto, plantea que a lo largo de la enseñanza experimental el estudiante se interese en el contexto de los problemas que el país tiene con relación a los recursos producción y transformación de alimentos, así como, al trabajo profesional en la industria alimentaria (tanto la establecida como la que debe crearse).

Los temas que se incluyen en los cursos de ciencia Básica III y IV, deben seleccionarse en base a tres criterios fundamentales.

- La importancia socioeconómica que para el país tenga el tema.
- Considerando que el tema incluya diversos aspectos fundamentales para la formación práctica de nivel profesional en el ámbito de la Ingeniería en alimentos.
- Que el tema permita integrar a las asignaturas teóricas en un verdadero contexto teórico-práctico.

Laboratorio Experimental Multidisciplinario. Tiene la finalidad de proporcionar al estudiante una preparación práctica de nivel profesional, vinculando la enseñanza profesional a las necesidades que tiene el país. Por ello se da la necesidad del un trabajo de campo se desarrolla dentro del L.E.M., donde se habrán de traer los problemas tecnológicos del país al recinto Universitario, es decir, el trabajo experimental esta orientado al estudio y solución de problemas tecnológicos: aprovechamiento, producción y transformación de alimentos.

2.1.3.3 Área socioeconómica

La cual esta constituida por asignaturas tales como Economía General, Análisis Económico, Recursos Naturales de México, Antropología I y II, Desarrollo I y II , México y su desarrollo, etcétera, las cuales permiten al egresado tener la capacidad de entender y participar conscientemente en el desarrollo del país deacuerdo a la realidad especifica del mismo.

2.1.3.4 Área de Ingeniería

Es un área fundamental dentro del ciclo profesional, debido a que el profesionista egresado debe tener características básicas como el de participar en el diseño de equipo y maquinarias necesarios para industrializar productos primarios, contemplando la utilización de mano de obra en lugar de equipo sofisticado y caro; junto con tener la capacidad de planear, organizar y administrar un centro productor o transformador de alimentos. Para cumplir dichos objetivos se debe de contar con herramientas idóneas, por ello se contempla la posibilidad de ofrecer una primera etapa constituida tanto por materias básicas (Matemáticas II, Física I y II, y Fisicoquímica I y II), como fundamentales (Balance de Materia y Energía, Fenómenos de Transporte, Flujo de Fluidos, Termodinámica Química y Transferencia de Calor).
La segunda etapa dentro de esta área la integran cuatro cursos de Ingeniería de Alimentos caracterizados por el análisis de las operaciones unitarias en la conservación y transformación de alimentos. A la vez se hace evidente, la necesidad de una tercera etapa donde se brinden herramientas tales como Ingeniería de Servicios y por otra parte Ingeniería de Costos y Administración. El Taller de Diseño, por su parte, se constituye como un integrador de los conocimientos adquiridos durante los cursos previos, en esté el estudiante evaluará procesos y diseñará equipo con criterio propio y bajo la asesoría de personal especializado, permitiendo así un contacto con fuentes reales, tanto de problemas como materiales, recursos, proveedores, etcétera.

2.1.3.5 Área tecnológica

Dado que el egresado de dicha licenciatura debe tener la capacidad de desarrollar tecnología propia y específica, es decir, desarrollar técnicas y procesos de manufactura e industrialización aplicables a los recursos agropecuarios y pesqueros del país, el área de tecnología se forma por cuatro cursos donde se le dedica principal atención a los grupos de alimentos como cereales, leguminosas, frutas y hortalizas, productos pecuarios y marinos. Finalizando con una tecnología dedicada a los procesos fermentativos para la producción de alimentos.

Y finalmente hacia el 8° y 9° semestre se encuentran los paquetes terminales, que consisten en actividades académicas con orientación específica hacia ciertos renglones de posible interés profesional, de los cuales el estudiante tiene la oportunidad de seleccionar en base a lo que más se apegue a sus intereses.

Capítulo 3
Alternativas de la asignatura Matemáticas III entorno al Plan de Estudios de la Licenciatura de Ingeniería en Alimentos

3.1 Relación horizontal y vertical de la asignatura Matemáticas III entorno al plan de estudios

Dentro de la estructura del plan de estudios de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos (DIAGRAMA 1.1), la asignatura Matemáticas III se encuentra catalogada como una asignatura básica (formativa) de aspecto técnico (DIAGRAMA 1.2). El carácter básico de dicha asignatura es debido a que contempla elementos académicos primarios o básicos, que son indispensables para la comprensión de asignaturas subsecuentes.

Matemáticas III, es cursado durante el segundo semestre de la licenciatura, junto con otras asignaturas que en su mayoría son también de carácter básico, tales como: Química Orgánica I, Física II, Fisicoquímica I y Laboratorio de Ciencia Básica I (DIAGRAMA 1.3). En cuanto a su posición en forma vertical de dicha asignatura con respecto al plan de estudios (DIAGRAMA 1.6), se puede observar que existen dos asignaturas como prerequisitos para cursar Matemáticas III, tales asignaturas son Matemáticas I* y Matemáticas II**. En cuanto a su posterior seriación se puede observar que no existe ninguna.

Por otro lado, en cuanto a la distribución por áreas realizada dentro del plan de estudios, dicha asignatura no se encuentra asociada a ninguna de las áreas planteadas dentro del mismo.

3.2 Relación entre la asignatura Matemáticas III y las demás asignaturas del plan de estudios

Como ya se mencionó, Matemáticas III es catalogada como una asignatura básica, debido a que contempla el estudio de elementos primarios o básicos que son indispensables para estudios posteriores, lo cual lleva a pensar que dicha asignatura debe formar parte de alguna seriación de asignaturas, la cual no existe dentro del plan de estudios(DIAGRAMA 1.6). Dicho pensamiento debe tener bases sólidas, para lo cual se hará uso de algunos de los temas del programa de la asignatura Matemáticas III desarrollado en el capítulo uno de este trabajo.

Dado que la naturaleza de dicha asignatura es formativa, es decir, que en una mayor proporción contiene conocimientos básicos que posteriormente tendrán una aplicación a lo largo de la licenciatura. A continuación se presentan algunos ejemplos que por su simplicidad serán útiles para meditar acerca de la importancia de la misma dentro del plan de estudios de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos.

---

* Contempla conceptos y principios fundamentales proporcionando conocimientos tanto teóricos como técnicos para el manejo e implementación de las Matemáticas.

** Contempla conceptos fundamentales del Calculo Diferencial e Integral de funciones de una sola variable real, así como una introducción a Ecuaciones Diferenciales.

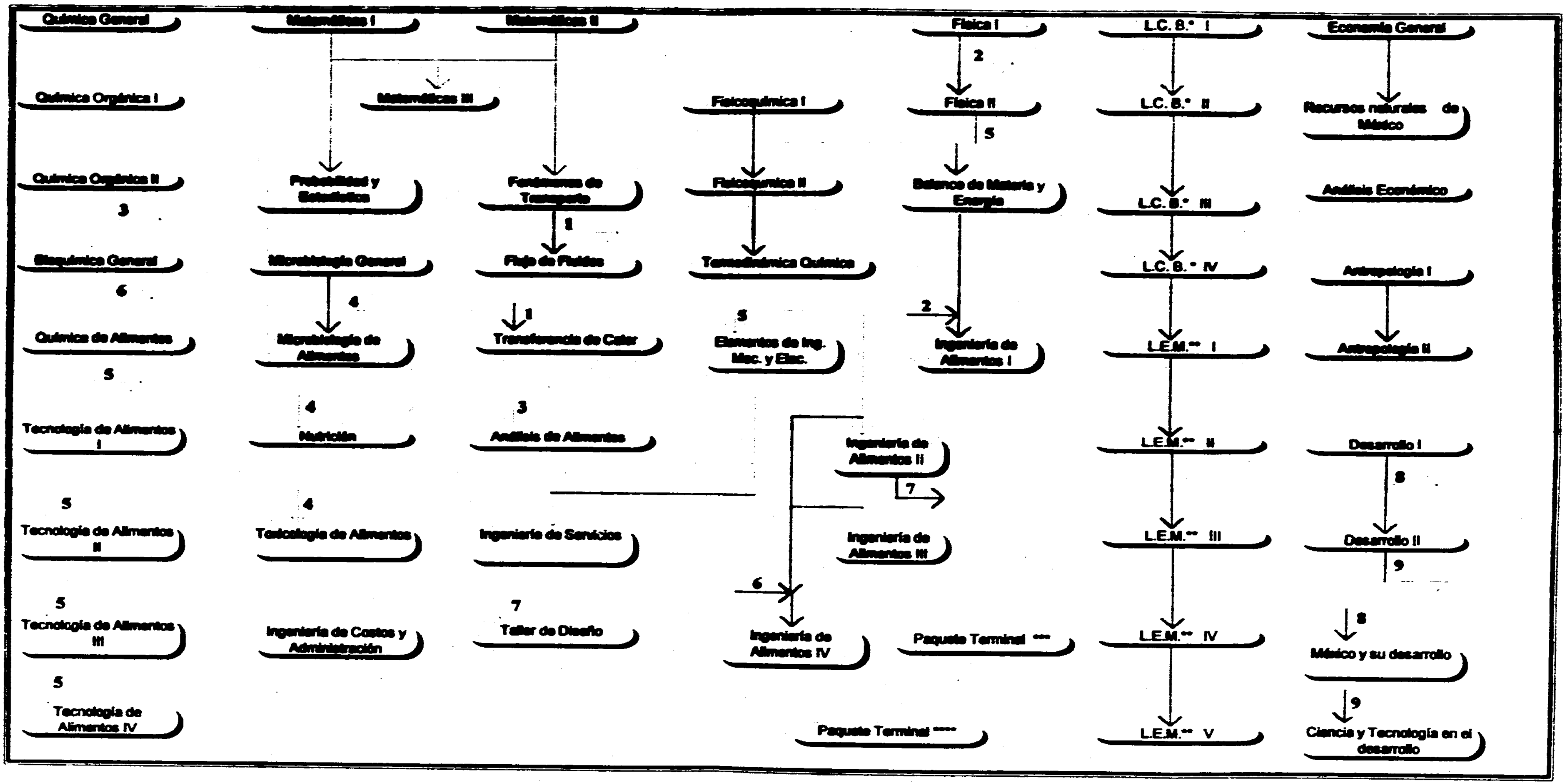


DIAGRAMA 1.6 ESTRUCTURA DEL PLAN DE ESTUDIOS: SERIACIÓN

3.2.1 Ejemplos de aplicación

3.2.1.1 A la Química

Se tiene una tanque con V_0 lts de agua en la cual se encuentran disueltos x_0 kg. de cierta sustancia S (por ejemplo sal). A un tiempo $t = 0$ comienza a fluir hacia el tanque una solución que lleva a kg. de S por litro de solución a una velocidad de b litros por minuto(FIGURA 1.29). Considerando que existe agitación ideal an el tanque (es decir, a medida que va llegando la solución al tanque esta se incorpora en forma *inmediata* a la que ya había en el mismo), la mezcla es entonces desalojada del tanque a una velocidad de c litros cada minuto *(PITA, R. C.,203-205)*.

Determinar cuál es la cantidad de S en el tanque a un tiempo t.

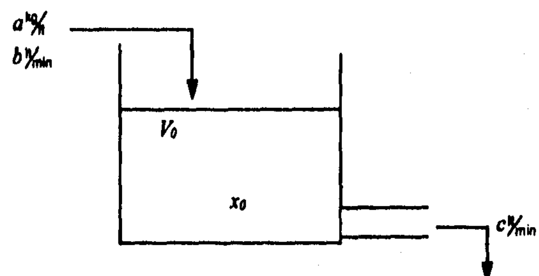


FIGURA 1.29 APLICACIÓN A LA QUÍMICA

Sea x la cantidad de S en el tanque a un tiempo t, entonces lo que se busca es $x(t)$. Al hacer un balance de S en el tanque a un tiempo t, se obtiene que:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Variación en la}\\ \text{cantidad de } S\\ \text{en el tanque}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Cantidad de } S \text{ que}\\ \text{llega al tanque}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{Cantidad de } S \text{ que}\\ \text{sale del tanque}\end{matrix}\right\}$$

Como

$$\left\{\begin{matrix}\text{Cantidad de } S \text{ que}\\ \text{llega al tanque (en la}\\ \text{unidad de tiempo)}\end{matrix}\right\} = \left(a\frac{\text{kg}}{\text{lt}}\right)\left(b\frac{\text{lt}}{\text{min}}\right) = ab\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Cantidad de } S \text{ que}\\ \text{sale del tanque (en la}\\ \text{unidad de tiempo)}\end{matrix}\right\} = \left(\frac{x\ \text{kg}}{V\text{lt}}\right)\left(c\frac{\text{lt}}{\text{min}}\right) = \frac{cx}{V}\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

donde V es el volumen de solución en el tanque a un tiempo t, es decir:

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \left(b\frac{\text{lt}}{\text{min}}\right)(t\,\text{min}) - \left(c\frac{\text{lt}}{\text{min}}\right)(t\,\text{min}) \\ &= V_0 + (b-c)t \;\; [=] lt \end{aligned}$$

La variación de S con respecto a t en el tanque, puede ser representada como dx/dt, es decir, como *(ROSS, S. L., 93)*:

$$\frac{dx}{dt} = ab - \frac{cx}{V_0 + (b-c)t} \qquad (1a)$$

o

$$\frac{dx}{dt} + \frac{cx}{V_0 + (b-c)t} = ab \qquad (1b)$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} + Q(t)x = R(t)$$

cuya solución general es:

$$x = e^{-\int Q(t)dt} \int R(t)\, e^{\int Q(t)dt} dt + C$$

donde C es la constante de integración que se puede calcular con las condiciones iniciales del problema $x(0)=x_0$. Entonces

$$\int Q(t)dt = \int \frac{c}{V_0 + (b-c)t} dt = \begin{cases} \dfrac{c}{b-c} \ln[V_0 + (b-c)t] & \text{si } b \neq c \\ \dfrac{c}{V_0} t & \text{si } b = c \end{cases}$$

Si el caso es $b \neq c$ (es decir, la velocidad de flujo de la solución que llega al tanque es diferente de la velocidad de flujo con la que la solución mezclada abandona el tanque), entonces:

$$e^{\int Q(t)dt} = e^{\frac{c}{b-c}\ln[V_0+(b-c)t]}$$
$$= [V_0 + (b-c)t]^{\frac{c}{b-c}}$$

Al calcular la integral

$$\int R(t)\, e^{\int Q(t)dt} dt = \int ab[V_0 + (b-c)t]^{\frac{c}{b-c}} dt$$
$$= \left(\frac{ab}{b-c}\right)\left(\frac{[V_0+(b-c)t]^{\frac{c}{b-c}+1}}{\frac{c}{b-c}+1}\right)$$
$$= a[V_0 + (b-c)t]^{\frac{c}{b-c}+1}$$

Como

$$e^{-\int Q(t)dt} = [V_0 + (b-c)t]^{\frac{c}{c-b}}$$

finalmente, se tiene que:

$$x(t)=a\left[V_0+(b-c)t\right]+C$$

cuando $x(0)=x_0$, se obtiene

$$C=(x_0-aV_0)$$

entonces la solución, es decir, la ecuación que representa la cantidad de sal en el tanque a un tiempo t, viene dada por:

$$x(t)=a\left[V_0+(b-c)t\right]+(x_0-aV_0)$$

donde $b\neq c$.

Cuando es $b=c$ (es decir, la velocidad de flujo de la solución que llega al tanque es igual a la velocidad de flujo con la que la solución mezclada abandona el tanque), la ecuación (1a) se reduce a *(SPIEGEL, M. R., 95-97)*:

$$\frac{dx}{dt}=ab-\frac{c}{V_0}x \quad \text{o} \quad \frac{dx}{dt}+\frac{c}{V_0}x=ab$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de variables separables, donde la variable independiente es el tiempo t, y la variable dependiente es x. Al separar las variables se tiene:

$$V_0\left(\frac{dx}{dt}\right)=V_0ab-cx;\quad V_0dx=(V_0ab-cx)dt;\quad \frac{dx}{(V_0ab-cx)}=\frac{dt}{V_0}$$

al utilizar el método de separación de variables para la solución de dicha ecuación diferencial, es decir, integrando en ambos lados:

$$\int\frac{dx}{(V_0ab-cx)}=\int\frac{dt}{V_0}$$

$$-\frac{1}{c}\ln(V_0ab-cx)=\frac{1}{V_0}t+C$$

si inicialmente hay x_0 de kg. de sal en el tanque, se tiene que $x=x_0$ en $t=0$; por lo que al sustituir en la ecuación anterior, $C=-\frac{1}{c}\ln(V_0ab-cx_0)$. Así,

$$-\frac{1}{c}\ln(V_0ab-cx)=\frac{1}{V_0}t-\frac{1}{c}\ln(V_0ab-cx_0)$$

$$\frac{1}{c}\ln(V_0ab-cx)-\frac{1}{c}\ln(V_0ab-cx_0)=-\frac{1}{V_0}t$$

$$\ln(V_0ab-cx)-\ln(V_0ab-cx_0)=-\frac{c}{V_0}t$$

$$\ln\frac{(V_0ab-cx)}{(V_0ab-cx_0)}=-\frac{c}{V_0}t;\quad \frac{(V_0ab-cx)}{(V_0ab-cx_0)}=\ell^{-\frac{c}{V_0}t}$$

$$x(t)=\frac{-(V_0ab-cx_0)\ell^{-\frac{c}{V_0}t}+V_0ab}{c}$$

la anterior ecuación representa la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t donde $b=c$.

El ejemplo anterior, es un caso típico de aplicación de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, a un balance de materia de un sistema homogéneo sin reacción química.

Este ejemplo consistió en el balance de materia de un tanque con agitación ideal, el cual contenía una solución de sal. Inicialmente en el tanque se tenía x_0 kg. de sal disuelta en agua; al cual se le alimentó a una cierta velocidad una solución que contiene a kg. de sal por litro. Dicha mezcla era desalojada a una velocidad de c litros por minuto. El problema era determinar la cantidad de sal que hay en tanque presente a un tiempo t.

Para la solución de esté, se realizó el calculo para determinar la cantidad de sal que era alimentada al tanque por unidad de tiempo, al igual que la desalojada, pero para esta última se consideró la cantidad de sal inicial presente en el tanque con respecto a un volumen determinado. Posteriormente, dado que la variación de la cantidad de sal presente en el tanque puede ser representada como dx/dt, es decir, como una ecuación diferencial de primer orden, la solución es inmediata independientemente de que la velocidad de entrada y la de salida sean iguales o no. Esto es debido a que dentro de la asignatura de Matemáticas III, se contemplan los métodos de solución para este tipo de ecuaciones diferenciales.

El objetivo de la asignatura de Balance de Materia y Energía, cursada durante el tercer semestre de la Licenciatura de Ingeniería en Alimentos (Diagrama 1.3), es introducir la aplicación de principios de conservación de la materia y la energía a la solución de problemas representativos de la Industria Alimentaria*(DEPTO. CIENCIAS BIOLOGICAS,25)*. Un caso particular es la aplicación del principio de la conservación de la materia en sistemas homogéneos sin reacción química, en donde para la solución de estos, se hace uso de ecuaciones diferenciales, por lo que es lógico pensar que debe de existir una relación en cuanto a seriación se refiere con respecto a asignatura de Matemáticas III.

Hay que hacer notar que la aplicación de ecuaciones diferenciales no únicamente se limita a balances de materia en sistemas homogéneos sin reacción química, sino que también se extiende a balances de materia y energía en sistemas homogéneos o heterogéneos con o sin reacción química, los cuales también son estudiados dentro la asignatura de Balance de Materia y Energía.

3.2.1.2 Al flujo de calor en estado estacionario

Dada una pieza de material sólido, uniforme de longitud indefinida acotada por los planos paralelos A y B (FIGURA 1.30), a una temperatura de T_I y T_0 respectivamente, donde $T_I>T_0$ y la diferencia se denota por ΔT ($\Delta T = T_I - T_0$), la cual se mantiene constante, ya que existe un flujo de calor Q, esto sucede cuando se alcanzan condiciones estacionarias, es decir, que se establece un flujo de calor de forma que la temperatura de cada punto sea constante en el tiempo*(AGUILAR, M. L.,7)*.

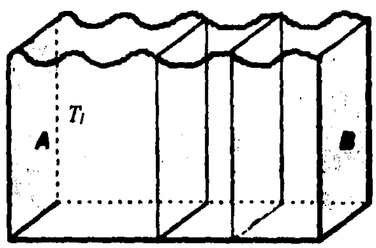


FIGURA 1.30 FLUJO DE CALOR A TRAVÉS DE UNA PLACA DE MATERIAL SÓLIDO

De la misma manera se puede considerar un tubo de material uniforme, cuyo corte transversal aparece en la FIGURA 1.31, donde la parte exterior se mantiene a una temperatura de T_0 y la interior a T_I; existiendo una superficie (línea punteada) en la cual cada punto esta a una temperatura T_2, donde $T_I > T_2 > T_0$.

Planos paralelos a A y en forma perpendicular al mismo (FIGURA 1.30), se llaman **líneas isotérmicas**, mientras que la curva punteada (FIGURA 1.31), es una **curva isotérmica**, tanto los planos correspondientes (FIGURA 1.30), como las curvas (FIGURA 1.31) se les llama **superficies isotérmicas**. En general, las superficies isotérmicas no son líneas o círculos, sino familias de curvas (FIGURA 1.32).

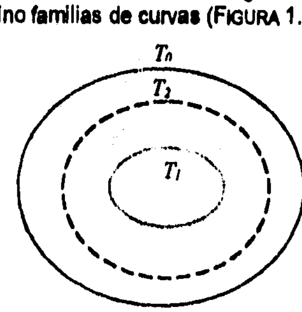


FIGURA 1.31 FLUJO DE CALOR A TRAVÉS DE UN CILINDRO: CORTE TRANSVERSAL

Si se consideran pequeñas porciones de dos superficies isotérmicas contiguas (FIGURA 1.33) separadas por una distancia Δn, donde la temperatura correspondiente a la superficie S_1 es T_1, y la correspondiente a S_0 es T_0, y dado que $T_1 > T_0$ la diferencia de temperatura es $T_1 - T_0 = \Delta T$. Experimentalmente se encuentra el flujo de calor que fluye de S_1 a S_0 por unidad de área es aproximadamente proporcional a $\Delta T / \Delta n$, dicha aproximación llega a ser más precisa a medida que Δn (y desde luego ΔT) se hace más pequeña, en el caso límite a medida que $\Delta n \to 0$, $\Delta T / \Delta n \to dT/dn$, al cual se le llama gradiente de T (razón de cambio de T en la dirección normal a la superficie o curva isotérmica)*(SPIEGEL, M. R., 101-106)*. Por lo anterior se dice que el flujo de calor por unidad de área es directamente proporcional al gradiente de temperatura con la distancia n; y esto es afectado directamente por el parámetro de proporcionalidad k que es la conductividad calorífica del material, el cual es específico para cada material. La ecuación que representa este fenómeno es:

$$\frac{Q}{A} = k\frac{\Delta T}{\Delta n}$$

Esta ecuación sólo representa la transferencia de calor por conducción en sólidos, líquidos y gases. Expresada en forma diferencial:

$$q_x = -k\frac{dT}{dx} \qquad (2)$$

Donde q_x es el flujo local de calor por unidad de área en dirección x, existiendo una ecuación análoga para las direcciones y y z *(AGUILAR, M. L.,8)*.

El vector de flujo local de calor (q_x) es normal a la superficie isotérmica y está dirigido en el sentido de las temperaturas decrecientes, puesto que el calor fluye siempre desde las superficies calientes a las frías. En consecuencia los vectores q y el gradiente de temperaturas tienen la misma dirección pero sentidos opuestos, lo que explica el signo menos en el segundo miembro de la ecuación (2).

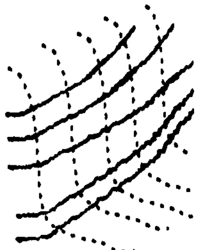


FIGURA 1.32 FLUJO DE CALOR: FAMILIA DE CURVAS

Cuando las temperaturas varían con el tiempo y de un punto a otro, ya no se habla de un estado estacionario sino de un campo de temperaturas transitorio (estado inestable), por lo que la ecuación (2) se modifica para representar el fenómeno transitorio, el cual es el que se presenta con más frecuencia (en el procesamiento de alimentos, como en la industria de las conservas, los alimentos enlatados se calientan por inmersión en baños de vapor o se enfrían sumergiéndolos en agua fría):

$$\frac{dT}{dt} = -k\frac{dT}{dx}$$

Para calcular la cantidad de calor que pasa a través de cualquier superficie de un cuerpo, es necesario conocer el campo de temperaturas establecido en su interior y es precisamente este campo de temperaturas, el que constituye el principal objetivo de estudio de la teoría analítica de la conducción de calor.

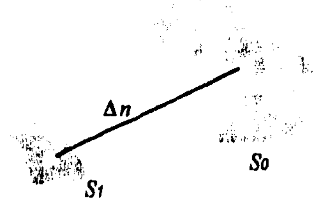


FIGURA 1.33 FLUJO DE CALOR: SUPERFICIES ISOTÉRMICAS CONTIGUAS

Ejemplo:

Supóngase que se tiene un tubo largo de acero, de conductividad térmica k, el cual tiene un radio interior de a m. y un radio exterior de b m., donde la superficie interna se mantiene a una temperatura T_1 y la superficie exterior se mantiene a T_2. Dicho tubo tiene una longitud de l m.

• Encontrar la ecuación de la temperatura como una función de la distancia r del eje común de los cilindros concéntricos.

Es claro que las superficies isotérmicas planteadas son cilindros concéntricos. El área de tal superficie con radio r y la longitud l es $2\pi rl$. La distancia dx en este caso es dr. Así, la ecuación (2) puede ser escrita

$$q = -k(2\pi rl)\frac{dT}{dr}$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables, donde la variable independiente es el radio r y la variable dependiente es T, y queda expresada como:

$$q\frac{dr}{r} = -k(2\pi l)dT$$

donde q es un valor constante. Al utilizar el método de separación de variables se tiene que:

$$-2\pi lkT = q\ln r + C$$

considerando las condiciones:

$$T = T_1 \qquad r = a$$
$$T = T_2 \qquad r = b$$

y sustituir en la ecuación anterior,

$$-2\pi l k T_1 = q \ln a + C$$
$$-2\pi l k T_2 = q \ln b + C$$

de donde se obtiene:

$$q = \frac{2\pi l k(-T_1 + T_2)}{(\ln a - \ln b)}$$

$$\therefore \quad c = 2\pi l k\left[-T_2 - \frac{(-T_1 + T_2)\ln b}{(\ln a - \ln b)}\right]$$

Por tanto,

$$T = T_2 + \left[\frac{T_2 - T_1}{\ln a - \ln b}(-\ln r + \ln b)\right]$$

Esté ejemplo es un caso típico de aplicación de ecuaciones diferenciales ordinarias, de primer orden a un proceso de transferencia de calor en estado estacionario.

En cual se considera que se tiene un tubo de acero, con un radio interior de a m y un radio exterior de b m; en donde la superficie interior esta a una temperatura T_1 y la superficie exterior a una temperatura T_2, ambas superficies son isotérmicas. En donde se desea encontrar la ecuación que determine la temperatura en función del radio del tubo.

Para su solución se consideró que en el tubo se esta llevando a cabo el fenómeno de transferencia de calor, el cual esta relacionado con la razón de intercambio de calor entre cuerpos calientes y fríos, llamados fuente y recibidor respectivamente, esto se verifica debido a la diferencia de temperaturas en donde el calor fluye de una región de alta temperatura a una de más baja. Una vez comprendido lo anterior se hace uso de la ecuación (2) en donde se encuentra implicada la variación de la temperatura con respecto a la distancia, en este caso con respecto al radio debido a que se trata de cilindros concéntricos, una vez ya modificada la ecuación (2), se resuelve debido a que esta se convierte en una ecuación diferencial de primer orden de variables separables.

El objetivo de la asignatura de **Fenómenos de Transporte**, la cual es cursada durante el tercer semestre de la Licenciatura (Diagrama 1.3), es introducir al estudiante el análisis teórico y fenomenológico de los fenómenos de transferencia de momento, masa y calor; por lo al considerar el ejemplo anterior es lógico pensar que debe de existir una relación en cuanto a seriación se refiere con respecto a Matemáticas III.

El uso de ecuaciones diferenciales no se limita únicamente a este tipo de problemas, es decir, a la aplicación a fenómenos de transferencia de calor por conducción en estado estacionario, sino que se extiende a procesos de transferencia de calor en estado transciente, así como a la aplicación a fenómenos de transferencia de calor por convección, transferencia de momentum y de masa, los cuales también son analizados en dicha asignatura.

3.2.1.3 A problemas de crecimiento y decrecimiento

La ecuación diferencial $$\frac{dx}{dt} = ax \qquad (3)$$

describe que la razón de cambio en el tiempo t de una cantidad x, es proporcional a x. Si la constante de proporcionalidad a es positiva y x es positiva, entonces dx/dt es positivo y x aumenta; en este caso se habla de un problema de **crecimiento**. Por otro lado, si a es negativa y x, es positiva, entonces dx/dt es negativo y x decrece, el problema que se involucra es **decrecimiento.**

Un caso práctico de este tipo de problemas es la Ley de Newton para el enfriamiento

3.2.1.3.1 Ley de Newton para el enfriamiento

Dicha ley puede enunciarse de la siguiente manera: ***la velocidad a la que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre él y el medio que lo rodea*** *(KERN, D.G., 10-13).*

Si se denota como T a la temperatura del cuerpo a un tiempo t, y T_m a la temperatura del medio en el que se encuentra, se tiene entonces que:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Si T_0 era la temperatura del cuerpo a $t=0$, se tiene que, al separar variables e integrar:

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T - T_m} = -k \int_0^t dt$$

de donde

$$\ln \frac{T - T_m}{T_0 - T_m} = -kt$$

y

$$T = (T_0 - T_m)e^{-kt} + T_m$$

la cual es la expresión de la temperatura del cuerpo a un tiempo t.

Ejemplo:

Dentro del proceso de elaboración de un nuevo producto alimenticio, se requiere que se le alimente a una marmita, una mezcla a una temperatura determinada. Para ello se hace agregar al mismo tiempo, un mismo volumen de una solución "X" la cual tiene una temperatura elevada, a los tanques A y B. Al tiempo $t=0$, al tanque A se le agrega inmediatamente una pequeña cantidad del ingrediente "Y" y espera t_0 minutos para comenzar a ser alimentado a la marmita. Mientras que al tanque B, se espera primeramente t_0 minutos, y luego se le añade la misma cantidad del ingrediente "Y" y se comienza a alimentar a la marmita. Considerando que el ingrediente "Y" estaba en refrigeración y que no se volvió a introducir a la cámara de refrigeración. ¿Cuál de las mezclas esta más caliente al momento de ser alimentadas a la marmita?

Si se introducen algunas variables antes de proceder a plantear la solución del problema.

T_C = temperatura de la solución "X" al ser vaciada a los tanques A y B (a $t=0$).
T_{Ct_0} = temperatura del solución "X" después de t_0 minutos.
T_{CC0} = temperatura de la mezcla (solución "X"–ingrediente"Y"), que se forma en el tanque A a $t=0$.
T_A = temperatura a la que es alimentada la mezcla del tanque a A a la marmita.
T_B = temperatura a la que es alimentada la mezcla del tanque a B a la marmita.
T_{CCt_0} = temperatura de la mezcla (solución "X"–ingrediente"Y"), que se forma en el tanque B a $t=t_0$.
T_{CR} = temperatura inicial del ingrediente "Y".
T_{CRt_0} = temperatura del ingrediente "Y" después de t_0 minutos.
T_m = temperatura del medio ambiente

En el ejemplo se habla de una solución "X" que tiene una temperatura elevada y un ingrediente "Y" con temperatura baja, por lo anterior se debe interpretar estos datos como que $T_C > T_m$ y $T_{CR} < T_m$

Entonces se tiene un proceso simultáneo que consiste en:

i) Se forma (en el tanque A sucede) una mezcla solución "X"–ingrediente "Y", y está se enfría durante t_0 minutos.

ii) Durante estos t_0 minutos se enfría la solución "X" que se encuentra en el tanque B y a su vez "se calienta [*]" el ingrediente "Y", de modo que a los t_0 minutos se hace la mezcla solución "X"–ingrediente "Y"(la solución "X" yá no está tan caliente como aquella que se usó para la mezcla en el tanque A, ni el ingrediente "Y" estaba tan frío como el usado en tal mezcla).

Tanto la velocidad de enfriamiento de la mezcla solución"X"–ingrediente"Y" del tanque A y la de la solución "X" del tanque B, como la velocidad de "desenfriamiento" del ingrediente "Y", se rigen por la ley de Newton.

Al introducir ahora un par de hipótesis, las cuales son físicamente aceptables y constituirán puntos claves en la solución del mismo.

La constante de proporcionalidad k que aparece en la formulación matemática de la ley de Newton para el enfriamiento depende de las caracteristicas físicas del cuerpo sometido a enfriamiento (o calentamiento). Se llamará k_l a la constante correspondiente

---

[*] En realidad lo que acontece con ingrediente "Y" en el transcurso de estos t_0 minutos es que éste va quedando cada vez menos frío.

al enfriamiento de la solución "X" (presente en el tanque B). Estrictamente hablando la constante de proporcionalidad para el proceso de enfriamiento de la mezcla solución"X"-ingrediente"Y" del tanque A no tiene la misma que la del tanque B (o sea k_1). Sin embargo, al considerar que en el ejemplo se habla de "una pequeña cantidad" del ingrediente "Y" (es decir, al considerar que las características físicas que intervienen en la determinación de k_1 no son substancialmente alteradas por la adición de esa pequeña cantidad del ingrediente "Y"), se tomará también como k_1 esta constante de proporcionalidad (la del proceso de enfriamiento de la mezcla solución"X"-ingrediente"Y" efectuada en el tanque A a t=0).

La segunda de las hipótesis que se introduce se explica a continuación.

Otro de los parámetros que tienen influencia en la determinación de la constante de proporcionalidad citada en la hipótesis anterior es la superficie de contacto del cuerpo con el medio. Esto es, k será mayor mientras más grande sea la superficie de contacto con el medio ($k > 0$). Físicamente resulta aceptable que la velocidad a la que se enfría un cuerpo en forma de lámina es mayor que la velocidad a la que éste se enfriaría si estuviera en forma de esfera compacta *(GEANKOPLIS, C. J., 436)*. En este problema el recipiente en donde está contenida la solución "X" es mayor que el recipiente en donde se encuentra el ingrediente "Y", de modo que la velocidad a la que se enfría la solución "X" es mayor que la velocidad a la que se "desenfría" el ingrediente "Y". Si k_2 es la constante de proporcionalidad en la formulación matemática del proceso de "desenfriamiento" del ingrediente "Y"; donde según la hipótesis introducida aquí, es que $k_1 > k_2$.

Al formular entonces los modelos matemáticos de enfriamiento de la solución "X" de los tanques A y B.

Para el tanque A se tiene:

$$\frac{dT}{dt} = -k_1(T - T_m)$$

donde T es la temperatura de la mezcla a un tiempo t. Al separar variables e integrar queda que:

$$\int_{T_{CC0}}^{T_A} \frac{dT}{T - T_m} = -k_1 \int_0^{t_0} dt$$

de donde

$$\ln \frac{T_A - T_m}{T_{CC0} - T_m} = -k_1 t_0$$

al despejar T_A

$$T_A = (T_{CC0} - T_m)e^{-k_1 t_0} + T_m$$

que es la temperatura a la que la mezcla del tanque A es alimentada a la marmita. Para el tanque B se tiene:

$$\int_{T_C}^{T_{Ct_0}} \frac{dT}{T - T_m} = -k_1 \int_0^{t_0} dt$$

de donde $$T_{Ct_0} = (T_C - T_m)\,e^{-k_1 t} + T_m$$

Ésta es la temperatura de la solución "X" presente en el tanque B después de t_0 minutos.

También durante esos t_0 minutos el ingrediente "Y" pasa de una temperatura T_{CR} a una temperatura $T_{CR\,t_0}$, siendo la relación entre estas variables dada por:

$$\int_{T_C}^{T_{CR_{t_0}}} \frac{dT}{T - T_m} = -k_2 \int_0^{t_0} dt$$

$$\ln \frac{T_{CR_{t_0}} - T_m}{T_{CR} - T_m} = -k_2\, t_0^{*}$$

de donde $$T_{CR_{t_0}} = (T_{CR} - T_m)\,e^{-k_2 t_0} + T_m$$

Los resultados obtenidos hasta ahora se pueden observar resumidos en la siguiente gráfica

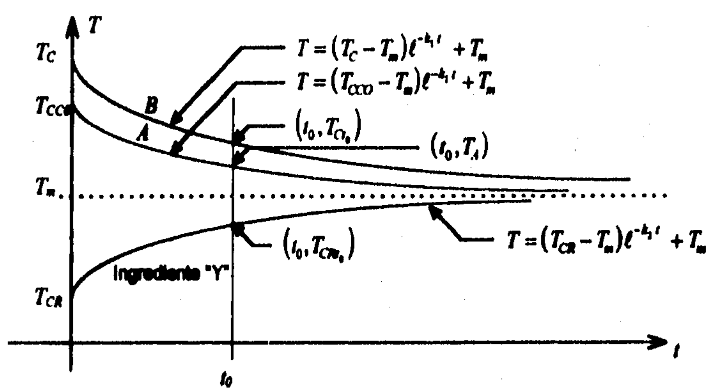


FIGURA 1.34 TEMPERATURA DE LA SOLUCIÓN "X" EN EL TANQUE A, B Y DEL INGREDIENTE "Y".

---

* Para el proceso de "desenfriamiento" del ingrediente "Y" se tiene que

$$\frac{dT}{dt} = -k_2 (T - T_m)$$

puesto que $T_m > T$ y $k_2 > 0$. Así que $\frac{dT}{dt} > 0$, que establece el hecho de que la temperatura del ingrediente "Y" es una función *creciente* del tiempo.

Ahora se tiene que determinar T_{CCO} (temperatura inicial de la mezcla en el tanque A) en términos de T_C y T_{CR} (temperatura de la solución "X" y temperatura del ingrediente "Y"), así como T_B (temperatura inicial de la mezcla en el tanque B) en términos de T_{Cto} y T_{CRto} (temperatura de la solución "X" a los t_0 minutos-momento en el que al tanque B se le adiciona el ingrediente "Y" a la temperatura T_{CRto} formando la mezcla).

Este problema puede ser resuelto, como la siguiente situación física:

Un cuerpo de masa m_1 y temperatura T_1 se pone en contacto (se mezcla) con otro cuerpo de masa m_2 y temperatura T_2, con $T_1 > T_2$. ¿ Cuál será la temperatura T de la mezcla?

Para resolver este problema se observa que

Calor perdido por
el cuerpo de masa $\quad m_1 = m_1 c_1 (T_1 - T)$
Calor perdido por
el cuerpo de masa $\quad m_2 = m_2 c_2 (T - T_2)$

donde c_1 y c_2 son los calores específicos de los cuerpos de masas m_1 y m_2 respectivamente. Según el principio de la conservación de la energía se tiene que:

$$m_1 c_1 (T_1 - T) = m_2 c_2 (T - T_2)$$

de donde

$$T = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

Sea entonces m_C la masa de la solución "X" presente en los tanques a A y B y m_{CR} la masa del ingrediente "Y" agregada a la solución "X". Sean c_C y c_{CR} los calores específicos correspondientes.

Entonces es claro que:

$$T_{CCO} = \frac{m_C c_C T_C + m_{CR} c_{CR} T_{CR}}{m_C c_C + m_{CR} c_{CR}}$$

y

$$T_B = \frac{m_C c_C T_{Ct_0} + m_{CR} c_{CR} T_{CRt_0}}{m_C c_C + m_{CR} c_{CR}}$$

que son las relaciones que se querían establecer.

Para simplificar estas expresiones se tiene que $m_C c_C = W_C$ y $m_{CR} c_{CR} = W_{CR}$ (datos conocidos). Entonces

$$T_{CCO} = \frac{W_C T_C + W_{CR} T_{CR}}{W_C + W_{CR}}$$

y

$$T_B = \frac{W_C T_{C1_0} + W_{CR} T_{CR_0}}{W_C + W_{CR}}$$

(T_{CCO} y T_B, ahora se encuentran expresados en términos de datos conocidos). Entonces la temperatura a la que es alimentada la mezcla de A a la marmita es:

$$T_A = \left(T_{CCO} - T_m\right)\ell^{-k_1 t_0} + T_m$$

o

$$T_A = \left[\frac{W_C T_C + W_{CR} T_{CR}}{W_C + W_{CR}} - T_m\right]\ell^{-k_1 t_0} + T_m \qquad \text{(I)}$$

y la temperatura a la que es alimentada la mezcla de B a la misma es:

$$T_B = \frac{W_C T_{C1_0} + W_{CR} T_{CR_0}}{W_C + W_{CR}}$$

o

$$T_B = \frac{1}{W_C + W_{CR}}\left[W_C\left[\left(T_C - T_m\right)\ell^{-k_1 t_0} + T_m\right] + W_{CR}\left[\left(T_{CR} - T_m\right)\ell^{-k_2 t_0} + T_m\right]\right] \qquad \text{(II)}$$

Tanto (I) como (II) han quedado en términos de datos conocidos. La pregunta es ahora: ¿que número es mayor, el reportado por (I) o el reportado por (II)?

Al calcular la diferencia $T_A - T_B$

$$\begin{aligned} T_A - T_B &= \left[\frac{W_C T_C - W_{CR} T_{CR}}{W_C + W_{CR}} - T_m\right]\ell^{-k_1 t_0} + T_m \\ &\quad - \frac{1}{W_C + W_{CR}}\left[W_C\left[\left(T_C - T_m\right)\ell^{-k_1 t_0} + T_m\right] + W_{CR}\left[\left(T_{CR} - T_m\right)\ell^{-k_2 t_0} + T_m\right]\right] \\ &= \frac{W_{CR}\left(\ell^{-k_2 t_0} - \ell^{-k_1 t_0}\right)\left(T_m - T_{CR}\right)}{W_C + W_{CR}} \end{aligned}$$

Ciertamente $W_{CR} > 0$ y $W_C > 0$, y además, por la segunda de las hipótesis planteadas, $k_1 > k_2$, lo cual implica que $\ell^{-k_2 t_0} > \ell^{-k_1 t_0}$ y también que $T_m > T_{CR}$

Entonces $\qquad T_A - T_B > 0$

es decir, $\qquad T_A > T_B$

por lo que la mezcla del tanque A se encuentra más caliente que la de B, en el momento de ser alimentada a la marmita.

Éste ejemplo es típico de la aplicación de ecuaciones diferenciales ordinarias, de primer orden a un caso práctico de decrecimiento.

El problema en general se rige por la Ley de Newton para el enfriamiento, la cual dice que la velocidad a la que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas entre él y el medio que lo rodea *(KERN, D. G., 10-13)*. Dado que e problema consiste en determinar la temperatura a la cual se alimenta a una marmita una mezcla preparada a partir de dos ingredientes (solución "*X*" y ingrediente "*Y*"), bajo condiciones de temperatura relativamente diferentes. Las ecuaciones que se obtiene después del análisis pertinente resultan ser ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, por lo que la solución se obtiene inmediatamente.

Al igual que en el ejemplo anterior, en este se efectúa un proceso de transferencia de calor, con lo que se reafirma la importancia de una posible seriación de la asignatura Matemáticas III con **Fenómenos de Transporte**.

3.3 Alternativas de la asignatura Matemáticas III en relación al plan de estudios

Después de haber analizado los ejemplos anteriores, así como el contenido de la asignatura Matemáticas III, se observa que tal materia debe tener alguna relación en cuanto a seriación se refiere con **Fenómenos de Transporte** y **Balance de Materia y Energía**, las cuales se cursan durante el tercer semestre de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos, debido a que el alumno que ha cursado dicha asignatura cuenta con las bases suficiente para poder plantear y resolver mediante un lenguaje matemático los problemas típicos de las asignaturas antes mencionadas. En base a lo anterior se puede proponer una posible modificación en cuanto a seriación se refiere al plan de estudios (DIAGRAMA 1.7), ésta consiste en el planteamiento de que previó a cursar las asignaturas de Fenómenos de Transferencia y Balance de Materia y Energía, el alumno debe de haber aprobado Matemáticas III, es decir, **Matemáticas III** debe ser un antecedente de con **Fenómenos de Transporte** y **Balance de Materia y Energía**.

Como posible alternativa para un mayor aprovechamiento, se puede considerar la propuesta anterior, es decir, la modificación en cuanto a seriación se refiere, debido a que en primera instancia se reconocería la importancia que tiene ésta dentro del plan de estudios de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos. Al mismo tiempo serviría como una solución inmediata a la problemática que presenta la asignatura con respecto al índice de aprobación (FIGURA 1.35), ya que se observa que el promedio de alumnos aprobados en Matemáticas III, durante el periodo de 1980-1995 es de aproximadamente el 37% , es decir, menos del 50% de los inscritos son aprobados, lo cual se puede deber a que algunos desertan, no viéndose obligados a cursar y aprobar la asignatura(ya que no esta seriada), y dejarla para alguno de los últimos semestres repercutiendo en forma negativa, porque en la mayoría de los casos, el alumno ya no cuenta con las bases de Cálculo diferencial e integral, ni con la practica que tenía en relación a las Matemáticas durante el primer semestre, perdiéndose así la esencia de la asignatura de Matemáticas III frente al estudiante.

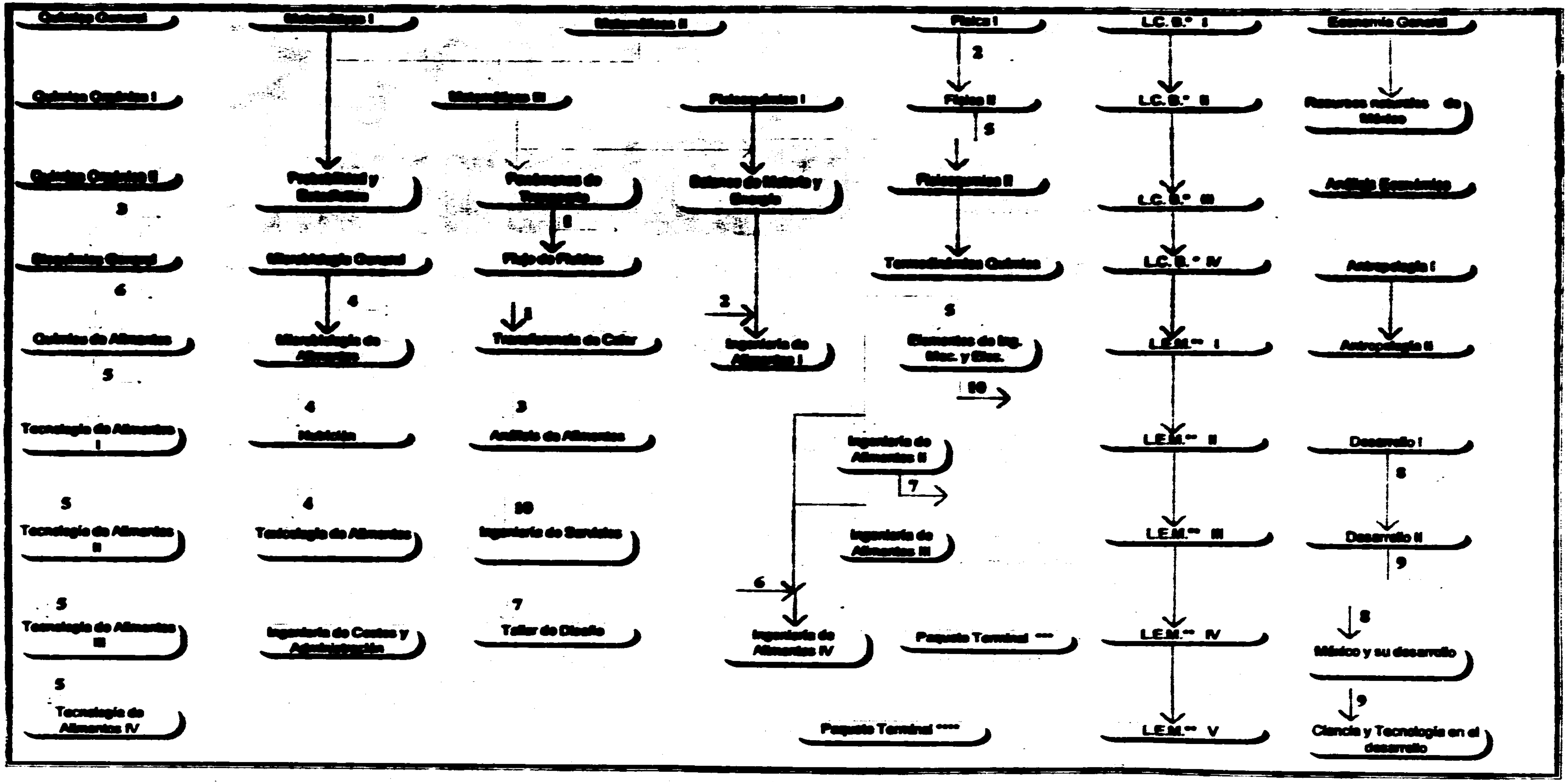
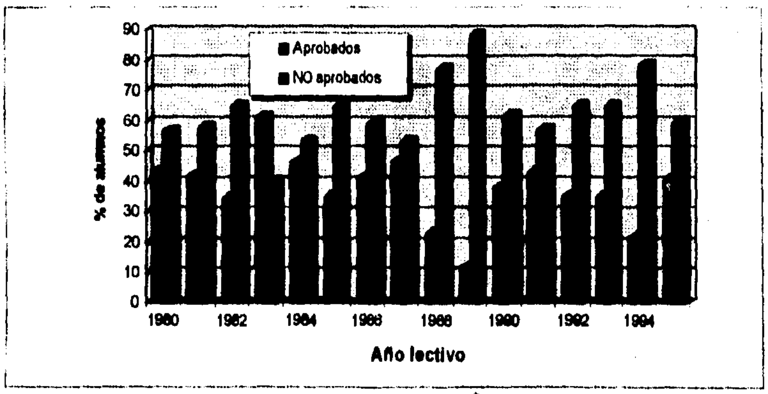


DIAGRAMA 1.7 RESTRUCTURACIÓN DEL PLAN DE ESTUDIOS

En forma paralela, se puede proponer a los catedráticos de las asignaturas de Fenómenos de Transporte y Balance de Materia y Energía una mayor profundidad en relación al estudio de cada uno de los temas de éstas asignaturas, motivando así al alumno a tener las bases matemáticas suficientes para la comprensión de los mismos, ya que en ocasiones los catedráticos se ven en la necesidad de repasar las bases matemáticas necesarias para el estudio de los temas correspondientes a dichas asignaturas, lo cual tiene como consecuencia una reducción en cuanto a tiempo para el estudio de los temas de cada uno de los programas repercutiendo en forma negativa para las asignaturas subsecuentes.



* DEPARTAMENTO DE CONTROL ESCOLAR

FIGURA 1.35 ÍNDICE DE APROVECHAMIENTO DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS III

Conclusiones

En base al análisis del temario comprendido por Matematicas III, se da la pauta para determinar la existencia en orden de aparición de dos temas centrales en éste, como son Cálculo vectorial y Ecuaciones diferenciales.

Al analizar la importancia de Matematicas III frente al plan de estudios, mediante ejemplos sencillos de aplicación, se pudo concluir que existe una relación directa de ésta asignatura y las demás asignaturas del plan de estudios, en particular, con Fenómenos de Transporte y Balance de Materia y Energía, las cuales se cursan durante el tercer semestre de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos, es por ello que se propone una posible modificación en cuanto a seriación se refiere al plan de estudios, ésta consiste en el planteamiento de que previó a cursar Fenómenos de Transferencia y Balance de Materia y Energía, el alumno debe de haber cursado y aprobado Matemáticas III.

La propuesta anterior, servirá como una alternativa de solución para la problemática que presenta la asignatura con respecto al índice de aprobación (donde el promedio de alumnos inscritos que aprobaron, durante el periodo de 1980-1995, fue aproximadamente el 37% ,es decir, menos del 50%), el cual también se puede deber a las siguientes causas:

a) Orden de aparición de los temas en el programa de la asignatura, debido a que el alumno de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos, previó a éste curso no ha tenido contacto alguno con lo que se refiere al Álgebra vectorial, la cual es la base para la comprensión del primer tema central, como lo es Cálculo vectorial.

El segundo tema central es el de Ecuaciones diferenciales que por estar en ese orden de aparición, el alumno algunas veces no alcanza su asimilación en cuanto a la posible aplicación del mismo, debido a que continuamente tiene que estar revisando los apuntes del curso anterior (Matematicas II: Cálculo diferencial e integral), el cual es la base para la comprensión de este tema.

Una alternativa a lo anterior puede ser la modificación en cuanto al orden de aparición de los temas del programa de Matematicas III, una propuesta de ello, se da en el capitulo uno de este trabajo, donde se desarrolla el temario siguiendo un orden invertido, como lo es el estudio de Ecuaciones diferenciales seguido por el de Cálculo vectorial.

Dado que algunas veces el lenguaje de los temas comprendidos en la asignatura de Matematicas III en algunos libros tiende a ser técnico, se propone que el temario desarrolla en el capítulo uno de este trabajo, sirva como base para una futura elaboración de un libro de apuntes ayudando así al alumno que cursa la materia.

b) La extensión del temario de la asignatura. Al revisar cada uno de los temas de Matematicas III, se puede decir que el programa que se debe cumplir es muy extenso, es por ello que en ocasiones los temas no son analizados con la profundidad que se requiere, repercutiendo ello, en que el alumno no comprenda el concepto básico del tema en cuestión, a la vez la importancia de éste como una base para el entendimiento de posteriores asignaturas.

Como alternativa de solución se propone:

- incrementar el número de horas de estudio asignadas a la asignatura de Matematicas III.
- la división del temario del programa de Matematicas III, en dos asignaturas, una de ellas que contemple únicamente el estudio del tema de Ecuaciones diferenciales incluyendo la aplicación de éste a problemas relacionados con la Ingeniería de Alimentos. Mientras que la segunda asignatura comprenda desde el Álgebra vectorial hasta Cálculo vectorial.

Finalmente, se debe considerar a la asignatura Matemáticas III, dentro de la distribución por áreas de vinculación con el contexto socioeconómico nacional; del plan de estudios de la licenciatura de Ingeniería en Alimentos, en el área de Ingeniería debido a que ahí se encuentran incluidas asignaturas de carácter básico como Matematicas I y II, las cuales son prerequisito de ésta y asignaturas fundamentales tales como Fenómenos de Transporte y Balance de Materia y Energía.

Bibliografía

Aguilar, M. L. 1991 *Uso de la técnica de elemento finito en el estudio de problemas de transferencia de calor y masa en la Ingeniería en alimentos*, Tesis, F.E.S. Cuautitlán(UNAM), Estado de México. 102 p.p.

Allendoerfer, C. B., Oakley, C. O., 1993 *Matemáticas universitarias*, 4a. De., McGraW-Hill, México, 383 p.p.

Ayres, F. D. 1969 *Teoría y problemas de ecuaciones diferenciales*, 3a. ed., McGraW-Hill, México, 298 p.p.

Belaunzaran, G. E., Frontana, D. B., Gómez, S. R., et all. 1981 *Apuntes de cálculo vectorial*, UNAM, México, 282 p.p.

Bers, I., Karal, F. 1978 *Cálculo*, Interamericana, México, 788 p.p.

Bourne, D. E., Kendall, P. C. 1976 *Análisis vectorial y tensores cartesianos*, Limusa, México, 301 p.p.

Boyce, E. W., DiPrima, R. C.[1] 1994 *Cálculo*, CECSA, México, 1154 p.p.

Boyce, E. W., DiPrima, R. C.[2] 1984 *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 3a. ed., Limusa, México, 744 p.p.

Bronson, R. 1982 *Teoría y problema de ecuaciones diferenciales modernas*, 2a. ed., McGraW-Hill, México, 310 p.p.

Departamento de Ciencias Biológicas. 1977 *Plan de estudios de la carrera de Ingeniería en Alimentos*, E.N.E.P Cuautitlán (UNAM), Estado de México, 143 p.p.

Derrick, W. R., Grossman, S. I. 1986 *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, Addison-Wesley Iberoamericana, México, 642 p.p.

Edwards, C. H., Penney, D. E. 1986 *Elementary diferential equations with aplications*, Prentice-Hall Inc., Georgia, 681 p.p.

Finney, R. L., Thomas, G. B. 1987 *Cálculo con geometría analítica*, Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1181 p.p.

Geankoplis, C. J., 1982 *Procesos de transporte y operaciones unitarias*, C.E.C.S.A., México, 749 p.p.

Hsu. H. P., Mehra, R. 1973 *Análisis vectorial*, Fondo educativo Interamericano, E.U.A., 286 p.p.

Kells, L. M. 1980 *Ecuaciones diferenciales elementales*, 5a. ed., McGraW-Hill, México, 321 p.p.

Kern, D. Q. 1990 *Procesos de transferencia de calor*, 22a. ed., Continental, México, 981 p.p.

Leithold, L. 1973 *El cálculo con geometría analítica*, 2a. ed., Harla, México, 1115 p.p.

Mc Quistan, R. B. 1978 *Campos escalares y vectoriales*, Limusa, México, 322 p.p.

Murray, R., Spiegel, M. R.[1] 1973 *Análisis vectorial y una introducción al análisis tensorial*, 2a. ed., McGraW-Hill, Colombia, 225 p.p.

Murray, R., Spiegel, M. R.[2] 1980 *Teoría y problemas de cálculo superior*, 6a. ed., McGraW-Hill, México, 381 p.p.

Pita, R. C., *Ecuaciones diferenciales*, 2a. ed., Limusa, México, 582 p.p.

Protter, M. H., Morrey, C. B. 1986 *Cálculo con geometría analítica*, 3a. ed., Addison-Wesley Iberoamericana, México, 872 p.p.

Purcell, E. J., Varberg, D. 1991 *Cálculo con geometría analítica*, 4a. ed., Prentice Hall, México, 868 p.p.

Rainville, D. E. 1976 *Ecuaciones diferenciales elementales*, 2a. ed., Trillas, México, 555 p.p.

Ray, W. C. 1985 *Matemáticas superiores para ingeniería*, 4a. ed., McGraW-Hill, México, 1028 p.p.

Ross, S. L. 1982 *Introducción a las ecuaciones diferenciales*, 3a. ed., Interamericana, México, 502 p.p.

Spiegel, M. R. 1983 *Ecuaciones diferenciales aplicadas*, 4a. ed., Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 668 p.p.

Terrazas, V. G. 1983 *Calculo vectorial*, I.P.N. México, tomo I, 130 p.p.

Zill, D. G. 1988 *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, 2a. ed., Iberoamericana, México. 516 p.p.