

17
20j

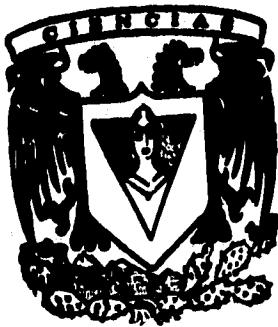


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DETERMINACION DE LA DIMENSION DEL ATRACTOR
Y EL LIMITE DE PREDICTIBILIDAD DE UNA SERIE DE
TIEMPO DE HORAS CALOR

T E S I S
Que para obtener el Título de
F I S I C O
presenta:
ROBERTO HERNANDEZ ARRIAGA



FACULTAD DE CIENCIAS
CIUDAD UNIVERSITARIA

MEXICO, D. F.

1996

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CIUDAD UNIVERSITARIA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios
Profesionales
Exp. Núm. 55

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Universidad Nacional Autónoma de México.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo
revisado el trabajo de tesis que realizó el pasante Roberto
Hernández Arriaga
con número de cuenta 6710902-7 con el título: "DETERMINACION
DE LA DIMENSION DEL ATRACTOR Y EL LIMITE DE PREDICTIBILIDAD DE UNA
SERIE DE TIEMPO DE HORAS CALOR"

Consideramos que reúne los méritos necesarios para que pueda conti-
nuar el trámite de su Examen Profesional para obtener el título de
FISICO.

GRADO NOMBRE Y APELLIDOS COMPLETOS

FIRMA

M. en C. TOMAS MORALES AGOLTZI
Director de Tesis
Dr. HENRI WAELBROECK GOGNEAUX

Dr. GUSTAVO MARTINEZ MEHLER

Dr. RAMOS LOPEZ PEÑA

Suplente
Dr. VICTOR MANUEL MENDOZA CASTRO
Suplente

Waelbroeck
Gustavo Martínez Mehlér
Ramos López Peña
Victor Mendoz C.

Ciudad Universitaria, D.F., a 9 de Febrero de 1995

AGRADECIMIENTO A MI FAMILIA

AGRADEZCO PLENAMENTE A MIS PADRES Y HERMANOS,

MUY EN ESPECIAL, A MI ESPOSA BEATRIZ Y A MI HIJA ROSARIO

**POR SU INFINITA COMPRESION Y APOYO QUE HICIERON POSIBLE LA
TERMINACION DE ESTE TRABAJO QUE CULMINA TODA UNA VIDA DE
SACRIFICIOS COMPARTIDOS.**

AGRADEZCO PROFUNDAMENTE AL JURADO:

M.en C. TOMAS MORALES ACOLTZI

Dr. HENRI WEALBROECK GONNEAUX

Dr. GUSTAVO MARTINEZ MEKLER

Dr. VICTOR MANUEL MENDOZA CASTRO

Dr. RAMON LOPEZ PEÑA

**SU VALIOSO APOYO CON LA REVISION DE ESTA TESIS, QUE CON SUS
COMENTARIOS Y OBSERVACIONES LA ENRIQUECIERON.**

AGRADECIMIENTO ESPECIAL:

**A MI AMIGO Y DIRECTOR DE TESIS TOMAS MORALES ACOLTZI AGRADEZCO
INFINITAMENTE SU APOYO DESINTERESADO, Y SU COMPRESION QUE
HICIERON POSIBLE LA REALIZACION TOTAL DE ESTE TRABAJO DE TESIS**

AGRADECIMIENTO:

**AL CENTRO DE CIENCIAS DE LA ATMOSFERA DE LA UNAM POR EL APOYO
PARA LA REALIZACION TOTAL DE LOS CALCULOS COMPUTACIONALES QUE SE
REQUIERON DURANTE EL DESARROLLO DEL PRESENTE TRABAJO**

INDICE

INTRODUCCION	1
BASES TEORICAS	5
PREDICTIBILIDAD	16
Coeficientes de Lyapunov	22
Coeficientes característicos para una distancia	24
límite fija	
Combinación y método de análisis	27
ANALISIS DE DATOS	29
Series de tiempo observadas	29
Serie de tiempo determinística	36
RESULTADOS	38
Coeficientes de correlacion.....	38
Series de tiempo observadas	
Serie de tiempo determinística	
Zonas de invarianza de escala	38
Series de tiempo observadas	
Serie de tiempo determinística	
Dimensión contenedora de los atractores	40
Series de tiempo observadas	
Serie de tiempo determinística	
Límites de predictibilidad	45
Series de tiempo observadas	
Espectros de potencia	45
Series de tiempo observadas	
CONCLUSIONES	51
COMENTARIOS Y RECOMENDACIONES	53
BIBLIOGRAFIA	54

APENDICE 1.- Horas-Calor (Series de tiempo observadas).....	59
APENDICE 2.- Gráficas de $\text{LnC}(r,m)$ vs. Lnr	66

I. INTRODUCCION

La presión, la precipitación, la temperatura, la evaporación, etc. son las variables del tiempo que se registran en estaciones meteorológicas. Los efectos simultáneos de estas variables, en cierta región de la Tierra, son los causantes de los fenómenos atmosféricos (lluvias, brisas, huracanes, etc.) que ahí se producen. El gran número de variables meteorológicas involucradas en los sistemas dinámicos dificulta la predicción del tiempo, lo cual hace suponer que la atmósfera es un Sistema Dinámico complejo e irregular y por lo tanto impredecible.

La Teoría de Sistemas Dinámicos (S.D.) ha permitido dar inicio al esclarecimiento del comportamiento de la atmósfera. Aún cuando, hasta ahora, no se pueda predecir el tiempo, la Teoría de los S.D. ha abierto caminos en la investigación del tiempo y su predicción.

Desde hace aproximadamente tres décadas algunos físicos, astrónomos, biólogos, y varios científicos de otras disciplinas han aplicado la Teoría de los S.D. a series de tiempo con el objetivo de determinar que tan caótica es la serie y cual es el número mínimo de variables o ecuaciones requeridas para describir la evolución del sistema. La aplicación de esta teoría permite distinguir entre ruido y caos. Cuando la serie de datos manifiesta un grado importante de ruido entonces no se presenta un límite de predicción porque no existe una convergencia tan rápida (saturación) de la información como sucede con las series caóticas para las cuales si existe un límite de predictibilidad, que es período durante el cual se puede realizar predicción en forma determinística.

Al aplicar la Teoría de S.D. a series de tiempo se encuentran dos tipos de atractores: Fractales (de dimensión fraccionaria) y no Fractales (de dimensión entera). Para los primeros se obtiene un

limite de predicción y para los siguientes se asegura predicción a largo plazo. Algunos sistemas dinámicos deterministas -que dependen de ciertos parámetros- muestran comportamientos impredecibles, los cuales se observan para valores adecuados de los parámetros o de la amplitud y frecuencia del forzamiento. Manifestándose un comportamiento aparentemente caótico. Algunos sistemas evolucionan hacia un atractor extraño que muestra una estructura fractal. Aquí surge la pregunta de si este aparente desorden es tal o es el reflejo de un orden con una estructura complicada. En este trabajo, en el que se aplica la Teoría de S.D., se demuestra que no es posible realizar una predicción exacta y extendida, pero si parcial, de la evolución de un sistema como es el caso de la Atmósfera Terrestre.

La pretendida Teoría del Caos ha abierto nuevos horizontes en la ciencia y ya es considerada por algunos científicos como uno de los grandes descubrimientos del siglo XX. Casi todos los sistemas de la naturaleza son caóticos. La aplicación de la Teoría del Caos en el estudio de los S.D. ha sugerido que la naturaleza impone límites a la predicción. Sin embargo, al mismo tiempo, puede demostrarse que la existencia de atractores implica que lo azaroso de un sistema dinámico está restringido por estos atractores. La atmósfera puede ser caótica pero su evolución está confinada a un volumen específico en el espacio de estado que está ocupado por el atractor. Los estados fuera de este volumen no están permitidos. Por ejemplo, los vientos asociados con un sistema de alta presión, nunca pueden girar en sentido contrario a como giran las manecillas de un reloj.

Se sabe que el estudio de los Sistemas Dinámicos Caóticos nos proveen de cierto optimismo, pues nunca seremos capaces de predecir el tiempo "exactamente", ya que tales sistemas son sensibles a las condiciones iniciales pero las mejoras en los aciertos del pronóstico del tiempo son posibles si se realizan medidas cuidadosas de tales condiciones iniciales de la atmósfera, y si se comprende que la predictibilidad no es la misma en las diferentes

escalas del tiempo. El impacto de la Teoría del Caos ya se ha hecho sentir en muchas áreas de la ciencia. Si se le da la importancia que merece su impacto se sentirá muy fuerte en las ciencias de la atmósfera. La Teoría del Caos ha atraído mucho la atención del público, principalmente de los científicos, porque ésta trae alguna forma de entendimiento hacia la frontera fascinante entre orden y desorden en los sistemas físicos.

La Teoría de los Sistemas Dinámicos Caóticos ya ha sido aplicada a series de tiempo obtenidas en las estaciones meteorológicas de ATLANGA y TLAXCO, localizadas en el estado de TLAXCALA. Se ha empleado como serie de tiempo, entre otras variables, a la temperatura ambiente registrada diariamente, durante 6 años, en los meses de marzo, abril, mayo y junio (Meneses, 1993). Los objetivos consistieron en obtener las bases de un diseño de modelos determinísticos y establecer una metodología operacional de predicción del tiempo, de ser posible, para la región de Atlanga-Tlaxco. Sin embargo, la temperatura ambiente no es una variable objetiva ya que los registros que se hacen de ella dependen, entre otras cosas, de la técnica mal empleada, de la puntualidad de la persona que hace la observación, etc.

En este trabajo se emplea como serie de tiempo a las horas calor, obtenidas a partir de las temperaturas máxima y mínima, registradas cada 24 horas en las mismas estaciones de Atlanga y Tlaxco, y durante el mismo periodo de tiempo. El registro de estas temperaturas se realiza en forma automática y con mayor precisión; por lo tanto, se puede asegurar que se está trabajando con una variable más objetiva. Además, un estudio analítico para poder aplicar esta teoría exige que por lo menos se cuente con un registro de 500 datos y para este trabajo se tienen 732 por cada estación, para continuar estudiando la posibilidad de obtener información de la dinámica de las series de tiempo con relativamente pocos datos.

El objetivo principal de este trabajo consiste en demostrar que a partir de los registros de temperaturas máximas y mínimas, es posible determinar la dinámica (puntos fijos, puntos periódicos, etc.) del tiempo, para las estaciones de Atlanga y Tlaxco, y determinar el límite de predictibilidad de la variable denominada Horas-Calor. También se aplica la misma metodología a una serie de tiempo DETERMINISTICA, obtenida del mapeo logístico, con el fin de evaluar la metodología aplicada, así como el código desarrollado.

II. BASES TEORICAS

Para estudiar un sistema en particular se siguen tres etapas básicas:

1) En la primera se elige al sistema a estudiar, se identifican todas y cada una de las variables que influyen en él de manera que sea lo más completo posible, para que en cualquier instante se pueda establecer, en función de ellas mismas, cual es el estado del sistema observado, obteniéndose en esta primera etapa un modelo conceptual del sistema en estudio.

2) En esta etapa se realizan mediciones, lo más preciso posible de las variables identificadas en la etapa anterior. Estudiando como se comportan dichas variables a lo largo del tiempo se puede intentar encontrar fórmulas o reglas que expresen su variación instantánea (sus derivadas con respecto al tiempo). Si se tiene éxito en esta etapa se obtendrá un modelo matemático que permita efectuar nuevos experimentos para ir refinando las hipótesis hasta obtener un modelo de simulación con el cual se pueda conocer de una manera apropiada al sistema.

3) La tercera consiste en predecir la evolución del sistema. Si se tiene éxito en las tres etapas el modelo obtenido será determinista. Sin embargo, no siempre es posible pasar de una etapa a la otra, por lo cual en este estudio se recurre al modelaje a partir de series de tiempo registradas en estaciones meteorológicas.

Algunos investigadores consideran que existe una cuarta etapa al estudiar un sistema la cual consiste, si fuese posible, en actuar sobre el mismo para aprovecharlo en beneficio del hombre.

La atmósfera es un sistema dinámico donde se desarrollan

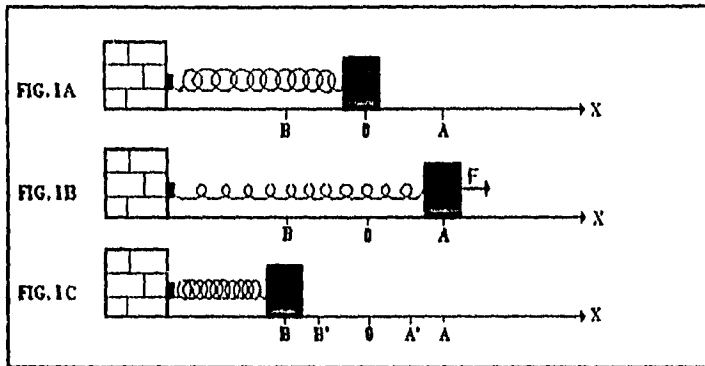
diferentes tipos de flujos que van desde flujos laminares hasta movimientos turbulentos. Debido a esta complejidad e irregularidad, la atmósfera se supone impredecible. Se sabe que en la naturaleza coexisten sistemas complejos o desordenados y sistemas regulares u ordenados; solamente necesitamos observar a nuestro alrededor para darnos cuenta que prácticamente todos los fenómenos se desarrollan, en forma aparente, de una manera azarosa. Por lo tanto: ¿la irregularidad de la atmósfera es completamente al azar o existe un orden detrás de su irregularidad?. La Teoría de Caos aplicada a S.D. permite determinar el grado de orden o desorden de un sistema, así como el grado de predictibilidad del sistema. Esto permite entender que existe un orden en aquellos fenómenos que se creía eran completamente azarosos o desordenados.

Se define a un Sistema Dinámico como un sistema que evoluciona con el transcurso del tiempo, y cuando se conocen las condiciones iniciales que lo determinan su evolución puede ser descrita por ciertas reglas o ecuaciones matemáticas. Tal evolución se puede describir de una forma más clara si el sistema es descrito por su espacio de estado. Un espacio de estado se obtiene al considerar como coordenadas a todas las variables de un sistema que describan su evolución. Con objeto de entender el concepto de espacio de estado se estudia a un oscilador armónico. Para ello consideremos un resorte (sin deformar) sujeto fuertemente a una pared rígida y teniendo unido, en su extremo libre, a un cuerpo (Fig.1A) que pueda moverse libremente sobre un plano horizontal. Si se estira al resorte con una fuerza externa hasta que el cuerpo alcance la posición A (Fig. 1B) y posteriormente se suelta, el cuerpo comenzará a oscilar de tal forma que en la posición A su elongación es máxima y su rapidez es nula. Al regresar hacia la posición de equilibrio (debido a la fuerza restauradora) incrementa su rapidez y al pasar por la posición de equilibrio (punto O) su elongación es cero y su rapidez es máxima. Después al irse comprimiendo disminuye su rapidez y al llegar a la posición B (Fig.1C) su rapidez es nuevamente nula y su elongación es máxima. Cuando vuelve nuevamente a estirarse, regresa a la posición de equilibrio donde su rapidez

es máxima y su elongación es cero. Después comienza a estirarse de nuevo, pero como existe algo de fricción alcanza la elongación máxima en el punto A' donde su rapidez vuelve a anularse. Sin embargo, la posición de A' es más cercana del punto O que lo que está el punto A. Posteriormente, el cuerpo cambiará su sentido y ocupará la posición B' (con una rapidez nula) pero a menor distancia del punto O que a la que se encuentra el punto B. Este proceso seguirá hasta que el cuerpo finalmente se detenga en la posición O.

Si se grafica la rapidez del cuerpo contra la elongación se obtiene una gráfica como la que aparece en la figura 2. Esta muestra la trayectoria, en el espacio de estado, del oscilador armónico con solamente dos coordenadas: la rapidez y la elongación. Ahora bien, sin depender cuales sean las condiciones iniciales (de rapidez y elongación) de otro oscilador, semejante al anterior, la trayectoria que se obtiene al unir todos los puntos del espacio de estado será semejante a la de la Fig. 2. El punto O donde concurren todas las trayectorias es llamado un atractor (Tsonis and Elsner, 1989) porque "atrae" a cualquier trayectoria. De esta manera nos podemos dar cuenta que la trayectoria de la Fig. 2 nos permite tener una visualización de la evolución del sistema. Por lo tanto podemos afirmar que se puede predecir, a largo plazo, la evolución de este sistema dinámico (oscilador armónico) y su comportamiento puede ser entendido completamente. Los atractores puntuales como el punto O corresponden a Sistemas Dinámicos que se desarrollan determinísticamente y finalmente terminan en un estado donde su movimiento es nulo.

Otra forma simple de atractor se puede obtener empleando el oscilador armónico del ejemplo anterior, solamente que en este caso trataremos de que el cuerpo, en cada una de sus oscilaciones, recupere la energía perdida por el rozamiento. Empleando, tal vez, algún mecanismo que logre contrarrestar a la fuerza de fricción el cuerpo oscilará indefinidamente de tal forma que el punto A' coincide con el punto A y el punto B' con el punto B. Entonces, si



EL OSCILADOR ARMONICO EN EL ESPACIO FISICO

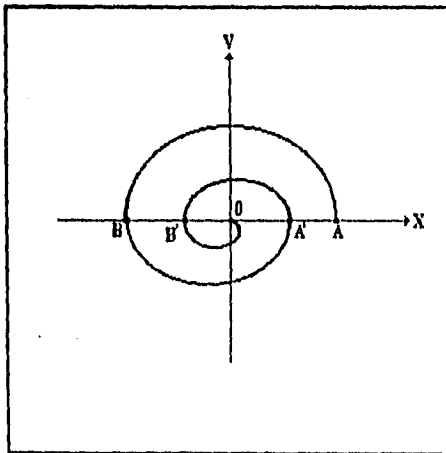


FIG. 2. EL OSCILADOR ARMONICO EN EL ESPACIO DE ESTADO

se grafica (Fig.3) en el espacio de estado a este movimiento periódico, se obtiene una trayectoria cerrada llamada ciclo límite. El ciclo límite es un atractor que garantiza predictibilidad a largo plazo.

Otra forma de atractor es el toro (Tsonis and Elsner,1989). El toro es semejante a un neumático y en este caso todas las trayectorias en el espacio de estado son atraídas hacia la superficie del toro.

Los sistemas estudiados aquí se desarrollan determinísticamente y se caracterizan por poseer un atractor con una dimensión entera (no fractal) igual a la dimensión de cierto subespacio del espacio de estado. Intuitivamente, la dimensión de un espacio de estado es el mínimo número de coordenadas necesarias para especificar la localización de un punto de la evolución de cualquier sistema dinámico. Objetos geométricos con dimensión entera son: los puntos (dimensión cero), las curvas (dimensión uno), y el toro (dimensión dos). Estas dimensiones llamadas topológicas (dimensión de atractores) no cambian aún cuando se deformen los objetos. Una característica importante de los atractores no fractales es que trayectorias vecinas -inicialmente- permanecen dentro del atractor lo cual garantiza predictibilidad a largo plazo.

Existen en la naturaleza sistemas dinámicos que tienen un atractor cuya dimensión no es un valor entero, este tipo de atractores se denominan fractales. Para entender el carácter fractal de un atractor (Hao Bai-Lin,1989) consideremos primeramente un cuadrado en el plano (Fig.4) el cual incrementa sus lados originales "r" veces en cada dirección. Entonces obtendremos un cuadrado el cual es r^2 veces más grande que el primero. El mismo incremento de lados lineales, cuando se aplica a un cubo, permite obtener otro cubo el cual resulta r^3 veces más grande que el original. En general, si se tiene un objeto geométrico A y queremos un objeto N veces mayor incrementando "r" veces sus lados

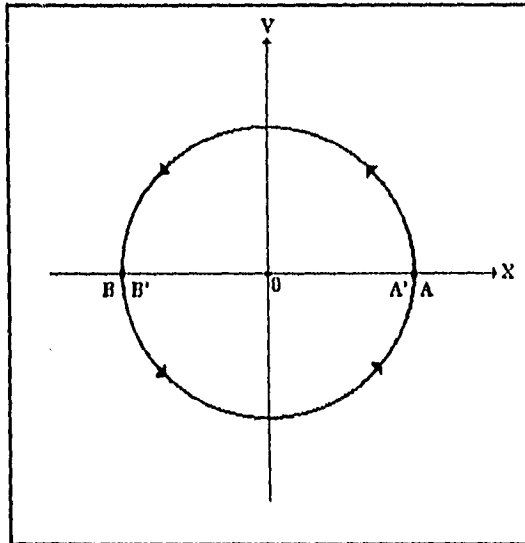
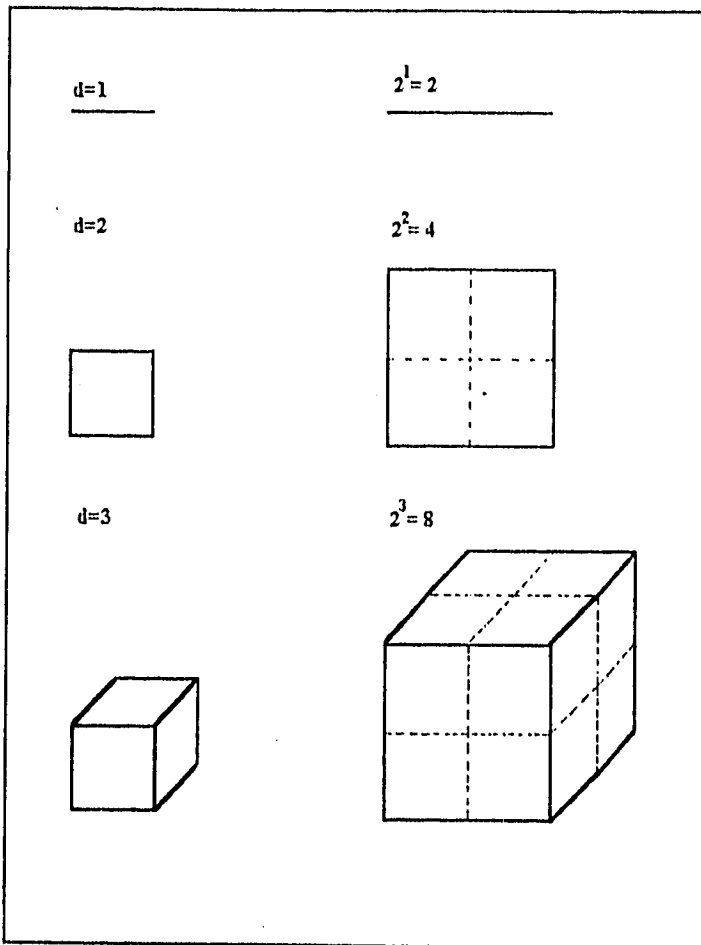


FIG. 3 CICLO LIMITE



FIGA. CAMBIOS DE ESCALA DE OBJETOS GEOMETRICOS REGULARES

originales se obtiene la siguiente relación

$$N=r^d \quad (1)$$

donde d es la dimensión del objeto. Aplicando la función logaritmo natural en ambos lados se obtiene que

$$d=\frac{\text{Ln}N}{\text{Ln}r} \quad (2)$$

La variable " d " toma valores enteros cuando la dimensión del atractor es no fractal y coincide con la dimensión topológica del objeto. Sin embargo, la dimensión " d " no está restringida a valores enteros. Los valores no enteros de esta variable es lo que caracteriza a los atractores caóticos (extraños) llamados fractales. Un ejemplo clásico de un objeto con una dimensión fractal (no entera) es el conjunto Cantor (Fig.5). Este se obtiene dividiendo un segmento (de 0 a 1) de recta en tercios, descartando el tercio medio (el conjunto abierto) y repitiendo el procedimiento para los dos tercios restantes, así hasta infinito. Después de varios procesos iterativos, en contraste con el segmento de recta original, el conjunto Cantor muestra un conjunto de puntos contenidos en una distancia igual a la longitud de este segmento. A fin de calcular la dimensión fractal de este conjunto, se toma cada lado, derecho o izquierdo, de la figura 5 como una unidad original y se incrementa por un factor $r=3$. Para este caso resulta $N=2$ y por lo tanto el conjunto Cantor tiene una dimensión

$$d=\frac{\text{Ln}2}{\text{Ln}3}=0.6309\dots$$

que no es entera. Cuando se trata de objetos más intrincados, la aplicación directa de la igualdad (2) puede acarrear muchas dificultades y en consecuencia resultar inoperante. Sin embargo, se puede recurrir a ciertos algoritmos, como el que se aplica en este trabajo, que permiten estimar la dimensión de ciertos atractores fractales (Tsonis and Elsner, 1989).

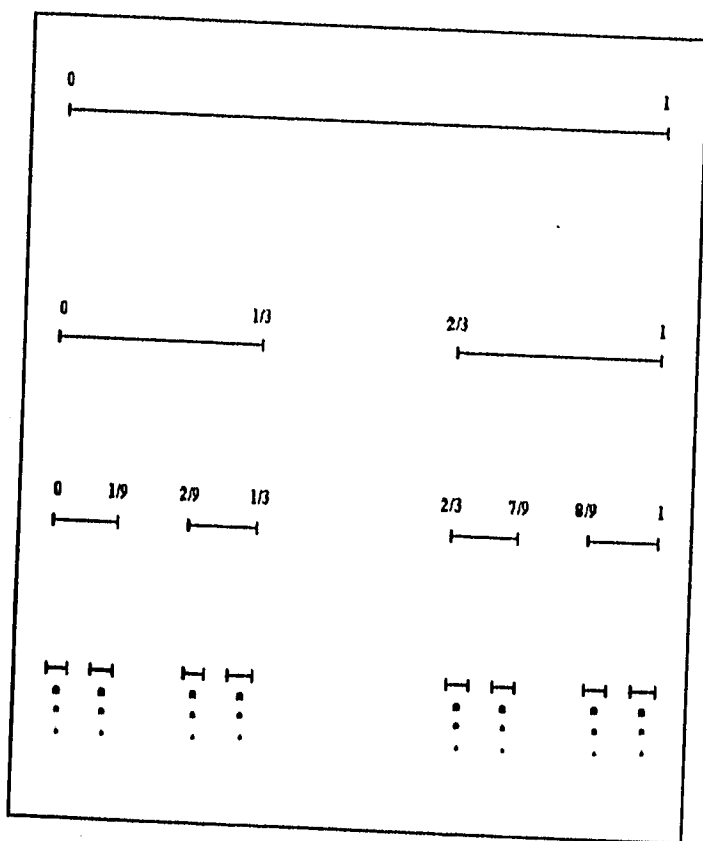


FIG. 5. EL CONJUNTO CANTOR

Los atractores fractales se caracterizan porque al ampliar o disminuir la escala tantas veces como se quiera se obtienen estructuras parecidas. Estos atractores son subespacios (del espacio de estado) que atraen a las trayectorias. Sin embargo, con este tipo de atractores existen límites sobre la predicción de un sistema, porque se manifiesta divergencia en trayectorias que inicialmente se encuentran cercanas, lo cual implica que la predictibilidad a largo plazo no esté garantizada.

La dimensión de los atractores, fractales o no, se puede obtener conociendo el número de ecuaciones (o variables) que debe tener un modelo para poder predecir la evolución de un sistema.

Basta mirar a nuestro alrededor para darnos cuenta que en la mayoría de los fenómenos naturales se manifiestan oscilaciones o vibraciones, monótonas o no monótonas, que permiten clasificar a los movimientos en regulares e irregulares o en periódicos y no periódicos. Los movimientos periódicos los encontramos en la rotación de la Tierra, el ritmo cardiaco, en la evolución de una célula etc. El estudio de los movimientos periódicos es importante porque cualquier sistema que evoluciona con el tiempo puede ser descrito por una suma de contribuciones periódicas de acuerdo a la transformada de Fourier. Otra cuestión importante es que los sistemas dinámicos que no son periódicos poseen atractores fractales. En este punto cabe reflexionar sobre lo siguiente: si la trayectoria de un fenómeno se repite periódicamente, entonces no tiene nada de caótica. Sin embargo, ¿no podría ser que un aparente comportamiento caótico no fuera más que una parte de una trayectoria periódica de periodo muy grande?. Por otro lado, los descubrimientos sobre el Caos Determinista han demostrado que sistemas muy simples pueden evolucionar de una manera compleja e imprevisible, que a pesar de un determinismo de principio, resulta inevitable una descripción probabilística de estos sistemas (Grassberger and Procaccia, 1983).

El estudio de los atractores extraños (fractales) ha permitido

comprender la evolución de diversos sistemas. Cuando se dispone de modelos matemáticos suficientemente fiables, los análisis finos permiten entender el comportamiento aparentemente caótico de esos sistemas que van desde circuitos eléctricos, arritmias cardíacas hasta reacciones químicas y rayos láseres. En algunos problemas como el de la turbulencia de la atmósfera, se encuentra la dificultad adicional de que coexisten distintos sistemas a distinta escala espacial y temporal. Si fuera posible, idealmente, analizar primero cada uno por separado y luego estudiar cómo se influyen, se daría un gran paso para su comprensión.

Aplicando los conocimientos acerca de la transformada de Fourier es posible distinguir entre sistemas dinámicos que poseen atractores regulares y atractores extraños en contraste con desarrollos puramente azarosos y aquellos que contienen "ruido".

Si deseamos analizar y clasificar un proceso dinámico, el ESPECTRO DE POTENCIA es particularmente apropiado para reconocer a los diferentes tipos de atractores: para un atractor puntual el espectro de potencias consiste de un simple impulso; para el ciclo límite se obtienen impulsos equidistantes; para un toro se obtiene una combinación lineal entera de dos impulsos básicos.

Si se quiere distinguir procesos caóticos deterministas de procesos con ruido blanco, se puede emplear el espectro de potencias, para estos últimos es una constante. Sin embargo, un desarrollo caótico se caracteriza por el hecho de que el espectro de potencia consiste de una banda ancha y continua de frecuencias, posiblemente acompañada por picos característicos simples.

III. PREDICTIBILIDAD

Aparentemente, la evolución de un sistema depende exclusivamente de las condiciones iniciales y puede ser descrito por reglas determinísticas. Sin embargo, puede comportarse de una manera extraña. Tales sistemas, lo mismo que sus atractores, son llamados caóticos. Las implicaciones de tales descubrimientos son profundas. Si se conocen exactamente las condiciones iniciales, se puede seguir la trayectoria que corresponde a la evolución de sistema básicamente por siempre y de una manera precisa (Tsonis and Elsner, 1989). El problema sin embargo, es que no se pueden conocer perfectamente las condiciones iniciales. Nuestros instrumentos solamente pueden medir en forma aproximada las variables (temperatura, presión, etc.) que son empleadas como condiciones iniciales. Siempre habrá algún error en las medidas de las actuales condiciones iniciales. Por otro lado, ni siquiera se conocen totalmente las leyes físicas que gobiernan a un sistema debido a la naturaleza del atractor fundamental. El estado del sistema en un tiempo posterior puede ser totalmente diferente de lo predicho por esas leyes. Simplemente, debido a la naturaleza del sistema, los errores iniciales aumentan y por lo tanto la predicción es limitada. Recientemente, las ideas de las Teorías de Caos y de S.D. han sido aplicadas a modelos que describen fluctuaciones del clima y transiciones entre las edades glaciares (Nicolis, 1987; Tsonis and Elsner, 1988). Esos estudios muestran, en la extensa banda de estructuras del espectro de los datos climáticos observados, la presencia de atractores caóticos no periódicos. Los atractores son sensibles a las condiciones iniciales, de acuerdo con la impredecibilidad de los sistemas climáticos (Lorenz, 1965).

La evolución de un sistema se puede estudiar de dos maneras diferentes: o bien se tienen las ecuaciones matemáticas que lo describen o se cuenta con una serie de datos. Si la descripción matemática de un sistema es dada, el número de variables se conoce

y la generación del espacio de estado y del atractor es directa (Morales-Acoltzi y Adem, 1994). En este trabajo de investigación no se dispone de la formulación matemática precisa, para el caso de las estaciones climatológicas se cuenta con las series de datos de horas-calor y de una serie determinística dependiente del tiempo. Ahora bien, es conveniente reemplazar al espacio de estado por el denominado espacio de fase. El espacio de fase de un sistema se obtiene al considerar como coordenadas a una sola de las variables y a sus respectivas derivadas que lo describen. El empleo del espacio de fase se justifica físicamente porque el registro de una sola variable del tiempo es el resultado de la interacción o interrelación de las restantes variables del espacio de estado que determinan la evolución de un sistema. De esta manera no se pierde la información de la dinámica del sistema pues está incluida en cualquier variable observable.

En meteorología la variable elegida para representar al espacio de fase puede ser la velocidad vertical del viento, la temperatura, la presión, etc. Para justificar, matemáticamente, el cambio del espacio de estado al espacio de fase. Primeramente, supóngase que el espacio de estado de un sistema está representado por N diferentes variables (coordenadas) todas distintas x_i , $i=1, \dots, N$, de tal forma que a un tiempo inicial " t_0 " estará descrito por el vector $X_0=(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_N(t_0))$ en el espacio de estado. Posteriormente, se considera la evolución (con el tiempo) del sistema empleando ecuaciones diferenciales ordinarias que describan los procesos que la determinan. Esas ecuaciones pueden ser transformadas convenientemente a un conjunto de N ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\dot{X}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N), i=1, \dots, N \quad (3)$$

Derivando sucesivamente una de estas ecuaciones, todo el sistema puede ser sustituido por una sola ecuación altamente no lineal de N -ésimo orden. Por ejemplo, si se deriva a la primera ($i=1$) resulta que:

$$X_1^N = f_1(X_1, \dot{X}_1, \ddot{X}_1, \dots, X_1^{N-1}) \quad (4)$$

Entonces sin pérdida de generalidad de la dinámica del sistema, el espacio de fase queda descrito por

$$(X_1, \dot{X}_1, \ddot{X}_1, \dots, X_1^{N-1})$$

o bien por

$$(\dot{X}_1, \ddot{X}_1, \ddot{X}_1, \dots, X_1^N) \quad (5)$$

donde solamente aparece una variable y sus derivadas.

En este trabajo se dispone de series de datos discretos de una variable del tiempo (las horas calor) y la correspondiente al caso logístico, en lugar de una variable continua $x(t)$ y sus derivadas. La variable discreta $x(t)$ y sus cambios sucesivos por un parámetro "s" de retrasos en el tiempo (tiempo de auto correlación o escala de macro tiempo) será suficiente para identificar a los atractores en la evolución de esa única variable. Uno puede pensar que al realizar un corrimiento de una serie de datos discretos, dependientes del tiempo, es análogo a la diferenciación de series continuas de tiempo. Por lo tanto, para la única variable observable $x(t)$ se puede definir totalmente al vector $X(t)$ por medio de sus coordenadas $[x(t+s), x(t+2s), \dots, x(t+Ns)]$ en el espacio de estado. Este procedimiento permite obtener las coordenadas del espacio de fase el cual muestra la dinámica del sistema a partir de la observable $x(t)$. Con tan sólo las series de tiempo de esta variable en el espacio de estado, muestreada a intervalos iguales de tiempo, se pueden determinar la dimensión de los atractores, los coeficientes característicos del flujo y los pedazos de trayectorias independientes que evolucionan sobre ellos. Otra característica importante del espacio de fase es que las coordenadas deben ser linealmente independientes lo cual se logra aún para tiempos de retraso mayores que "s" ya que en este

caso los datos se vuelven no correlacionados y la serie tiende a cero.

También se utiliza el concepto conocido como información mutua, que mide la dependencia GENERAL de dos variables; por lo tanto, éste provee un mejor criterio para la selección de "s" que la función de autocorrelación.

Existen algunos algoritmos que permiten obtener de una manera aproximada la dimensión de un atractor, a partir de series de tiempo de una sola variable. Como ejemplos podemos citar el algoritmo de conteo de cajas (Mandelbrot, 1983), el algoritmo del vecino cercano (Badii and Politi, 1985) y las denominadas Redes Neuronales (Waelbroeck et al, 1994). Esta última metodología fué aplicada con 19 neuronas para la estación TLAXCALA y los resultados que se obtuvieron se tomarán de testigo para nuestros resultados, en el caso de las series de tiempo observadas. El algoritmo que emplearemos en el desarrollo de este trabajo consiste en efectuar un análisis estadístico de la distancia entre pares de puntos contenidos en el espacio de fase (Grassberger and Procaccia, 1983, 1984), que permitirá estimar la dimensión de los atractores y la divergencia de los pedazos de trayectorias que los envuelven o contienen.

Sean $X_m(t_i)$ y $X_m(t_j)$ dos puntos en el espacio de fase m-dimensional cuyas coordenadas retrazadas en el tiempo están descritas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} X_m(t_i) &= [x(t_i), x(t_i+s), x(t_i+2s), \dots, x(t_i+(m-1)s)] \\ X_m(t_j) &= [x(t_j), x(t_j+s), x(t_j+2s), \dots, x(t_j+(m-1)s)] \end{aligned} \quad (6)$$

Usando norma Euclidiana, la distancia $d_{ij}(m)$ entre ambos puntos, la cual depende de la dimensión m del espacio de fase, está dada por

$$d_{ij}(m) = |X_m(t_i) - X_m(t_j)| \quad \text{donde} \quad |t_i - t_j| > s \quad (7)$$

Ahora bien, Hao Bai-Lin (1989) propone que la distancia entre ambos puntos (vectores) resulta igual a la distancia máxima que existe entre las respectivas componentes. Por lo tanto

$$d_{ij}(m) = \max(X_m(t_i) - X_m(t_j)) \quad \text{donde} \quad t_i - t_j > s \quad (8)$$

la cual se debe probar para todas las componentes desde 1 a m. Esta propuesta de Hao Bai-Lin es aplicable para un gran número de datos del orden de 3000 en adelante, en cuyo caso se debe usar el método de información mútua para realizar los corrimientos (Fraser and Swinney, 1986).

De esta forma el número total de parejas de puntos $N_m(r)$ cuyas distancias son menores que el límite "r" elegido previamente, se determina formalmente por la siguiente expresión

$$N_m(r) = \sum_{i,j=1}^N h(r - d_{ij}(m)) \quad (9)$$

donde h es la función de Heaviside con

$$h(r - d_{ij}(m)) = 1 \quad \text{si} \quad (r - d_{ij}(m)) > 0 \quad (10)$$

$$h(r - d_{ij}(m)) = 0 \quad \text{si} \quad (r - d_{ij}(m)) < 0 \quad (11)$$

Como N representa el número total de puntos en el espacio de estado entonces la función de distribución acumulativa $C_m(r)$ se normaliza por el total de los N^2 pares de puntos

$$C_m(r) = \frac{N_m(r)}{N^2} \quad (12)$$

La función de distribución representa al número medio relativo de puntos contenidos en un elemento de volumen m-dimensional o esfera de radio r que rodea a cada punto o estado de la trayectoria $X(t)$ en el atractor. Si se incrementa la distancia límite r, el número $C_m(r)$ de pares de puntos también se incrementa, y además $C_m(r)$ cambia de forma al incrementar la dimensión contenedora m. Cuando

el número de puntos (N) tiende a infinito (nosotros investigamos con un mínimo de 732), la función de distribución permite determinar:

a) la dimensión de los atractores, y

b) la divergencia de las trayectorias que envuelven al atractor lo cual equivale a poder predecir determinísticamente la evolución del sistema (Klaus, 1987).

Cuando N tiende a infinito un atractor descrito por la trayectoria $X(t)=[x(t), x(t+s), x(t+2s), \dots, x(t+(m-1)s)]$ evolucionando en un espacio de fase suficientemente alto dimensionalmente ($m \rightarrow \infty$). Tiene una dimensión (de acuerdo a (1)), a la que denotaremos por d_2 , que permanece invariante en escala con la función de distribución a cumulativa (12) de parejas de puntos sobre la trayectoria. Por lo tanto cuando r tiende a cero, resulta que (ver fig.4 y Ec.1)

$$C_m(r) = r^{d_2} \quad (13)$$

El exponente de escala d_2 o dimensión de correlación del atractor para el espacio m-dimensional se obtiene despejándolo de (13)

$$d_2 = \frac{\text{Ln}[C_m(r)]}{\text{Ln}r} \quad (14)$$

de esta forma, d_2 se deduce a partir de la pendiente lineal de la función de distribución acumulativa en un diagrama de $\text{Ln}r$ contra $\text{Ln}[C_m(r)]$.

Para series de tiempo azarosas no hay correlación espacial en cualquier dimensión contenedora m y de esta forma no se observa saturación en el exponente d_2 . La ecuación (14) requiere de un gran número de puntos debido a que la dimensión contenedora m debe ser suficientemente alta ($m > m_c$) para que el atractor quede contenido en el espacio de fase de m_c coordenadas de tiempo recorrido. De esta forma, la dimensión (d_2) del atractor se obtiene como un valor de

saturación d_c que no varía aunque se agreguen más coordenadas al espacio de fase que lo contiene, lo cual se cumple si las pendientes de las distribuciones acumulativas permanecen constantes.

3.1 COEFICIENTES DE LYAPUNOV

Se sabe que un sistema es estable si al sufrir una pequeña perturbación, sus trayectorias a través del espacio de fase cambian muy poco de lo que pudieran cambiar por otras causas. El matemático ruso Aleksandr M. Lyapunov se dio cuenta que un simple número puede ser usado para representar el cambio originado por una perturbación. Se divide el tamaño de la perturbación de un sistema en un instante por sus perturbaciones en un momento anterior. Este mismo cálculo se efectúa en varios intervalos de tiempo y promediando los resultados se obtienen unas cantidades conocidas como los coeficientes de Lyapunov, las cuales describen el cambio promedio de un sistema al estar sometido a una perturbación.

Los coeficientes de Lyapunov definen caos en términos de la sensibilidad de las condiciones iniciales. Si el estado inicial de un sistema ($X_0 = X(t_0)$) en el tiempo t_0 sufre un cambio infinitesimal (δX_0), sus desviaciones (δX) cambian exponencialmente con el tiempo $t = t_0 + ms$, incrementándose por m pasos de tiempo de duración s :

$$\delta X = \delta X_0 \exp(Lms)$$

por lo tanto

$$L = d/dt (\ln \delta X)$$

existe y es denominado el mayor de los coeficientes de Lyapunov.

Otros exponentes de Lyapunov surgen para otros valores iniciales de (δX_0) . En la fórmula anterior L representa la razón de separación (por unidad de tiempo) de los pedazos de trayectoria que inicialmente pasan cerca de X_0 .

Si el $L < 1$ la perturbación termina y el sistema es estable. Si $L=0$ el sistema es conservativo. Sin embargo, si $L > 1$ la perturbación crece, el sistema se vuelve inestable y los pedazos de trayectoria divergen exponencialmente. Los sistemas llamados caóticos son aquellos que tienen un coeficiente de Lyapunov mayor que la unidad y son siempre inestables. Esta es la raíz de la impredecibilidad de estos sistemas.

El concepto de los coeficientes característicos de Lyapunov (L), para trayectorias en un espacio de fase m -dimensional, pueden ser caracterizados como la razón exponencial media de la divergencia de trayectorias encerradas, inicialmente, dentro de un esferoide o de un elemento de volumen contenidos en ese espacio. L toma uno de los N valores L_1, L_2, \dots, L_N (Eckmann and Ruelle, 1985), los cuales en general son mayores que la unidad, y además

$$L_1 > L_2 > \dots > L_N \quad (15)$$

Así, los coeficientes de Lyapunov caracterizan las expansiones o contracciones, en las diferentes direcciones, de los elementos de volumen en el espacio de fase. En general, la razón de crecimiento exponencial de un vector infinitesimal $X(t)$ en el espacio de fase m -dimensional está dado por el mayor (L_1) de los coeficientes de Lyapunov; la razón de crecimiento de un elemento infinitesimal de superficie está dado por la suma de los dos más grandes coeficientes característicos L_1+L_2 ; en general, la razón de crecimiento de un N -ésimo elemento infinitesimal de un volumen está dado por la suma $(\sum_{L_i=L^{(N)}}) L_1+L_2+\dots+L_N$ de todos los N eigenvalores o coeficientes característicos de Lyapunov (Lichtenberg and Lieberman, 1983). Para un elemento de volumen de un sistema conservativo $L^{(M)}=0$; para un sistema disipativo el volumen se

contrae y $L^{(N)} < 0$. Por otro lado, para un proceso Browniano $L^{(N)} = 0$ porque el volumen se expande infinitamente por movimiento estocástico.

Cada coeficiente positivo describe una dirección en la cual el sistema realiza ensanchamiento o divergencia de estados vecinos correlacionados. El término mayor del desarrollo de un sistema dada la condición inicial $X_0(t_0)$ no puede ser predicho. Estas son características de un sistema caótico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales. Cada coeficiente característico de Lyapunov positivo $L_i > 0$ contribuye a la divergencia o expansión de un elemento de volumen, contenido en un espacio de fase, alrededor del estado inicial X_0 (es decir en un estado inicial del tiempo); su suma define una razón de crecimiento exponencial h de pequeños errores iniciales

$$h(X_0) = \sum L_i \quad \text{con } L_i > 0 \quad (16)$$

y provee una medida cuantitativa de predictibilidad (impredictibilidad); también describe la expansión de un elipsoide infinitesimal para el cual solamente las componentes divergiendo ($L_i > 0$) en los ejes principales, contribuyen. El valor recíproco, $1/h$, denota una medida de escala de tiempo sobre la cual la predictibilidad determinística puede ser posible; esto caracteriza en un tiempo medio la expansión volumétrica exponencial de un sistema dinámico dentro de un espacio de fase.

3.2 COEFICIENTES CARACTERISTICOS PARA UNA DISTANCIA LIMITE FIJA

Dentro de un espacio de fase m -dimensional de coordenadas recorridas durante $(m-1)$ pasos del tiempo, se encuentra un estado $X_m(t_1) = [X(t_1), X(t_1+s), \dots, X(t_1+(m-1)s)]$ el cual define un punto de la dinámica original alrededor del cual se puede construir un esferoide m -dimensional de tamaño r que rodea al estado $X_m(t_1)$. Existen otros estados, como el estado

$X_m(t_j) = [X(t_j), X(t_j+s), \dots, X(t_j+(m-1)s)]$, que definen a otros puntos de otras trayectorias (fig.6), los cuales permanecen juntos a una distancia menor que r durante los $(m-1)$ pasos del tiempo. La función de distribución acumulativa $C_m(r)$, permite determinar el número relativo promedio de parejas de pedazos de trayectorias contenidas dentro de una distancia menor que r durante el tiempo $(m-1)s$ que dura la evolución del sistema. Pero como parten a diferentes tiempos, se deben realizar los promedios sobre cada uno de los puntos (estados) del atractor.

Para una distancia límite fija r , todo incremento en la dimensión contenedora desde m a $m+1$, implica que los pedazos de trayectoria se prolonguen por un paso de tiempo s desde $(m-1)s$. Con la nueva función de distribución acumulativa C_{m+1} se determina el valor promedio (disminuido) de los pedazos de trayectorias que permanecen dentro de los esferoides de radio r , los otros pedazos han quedado fuera (fig.6). El cambio de las funciones de distribución acumulativa de C_m a C_{m+1} , o la variación en los pasos de tiempo de $(m-1)s$ a ms proporciona una medida de la razón media de la divergencia (escape) de los pedazos de trayectorias vecinas sobre el atractor. Lo cual se identifica con los coeficientes característicos de Lyapunov (Klaus, Fraedrich, 1987). Por este motivo es necesario deducir una ley de invarianza de escala (scaling) de la función de distribución acumulativa de distancias $C_m(r)$ con los coeficientes de Lyapunov ($h(X_0) = \sum L_i$, con $L_i > 0$).

Durante $(m-1)$ pasos del tiempo s , la probabilidad de que un gran número de pedazos de trayectoria divergiendo permanezcan atrapadas dentro de un elemento de volumen o esferoide (en una distancia límite $< r$) disminuye de manera proporcional a la expansión (divergencia) a lo largo de los ejes principales (aquellos que divergen, $L_i > 0$). Es decir, $\exp(-L_i ms)$. De manera concordante, el número relativo promedio de parejas de puntos C_m cuyas distancias d_{ij} son menores que el límite fijo r , decrece proporcionalmente a: $C_m = \exp(-msL_1); \exp(-msL_2), \dots = \exp[-ms(L_1+L_2+\dots)] = \exp(-msh)$. Resumiendo

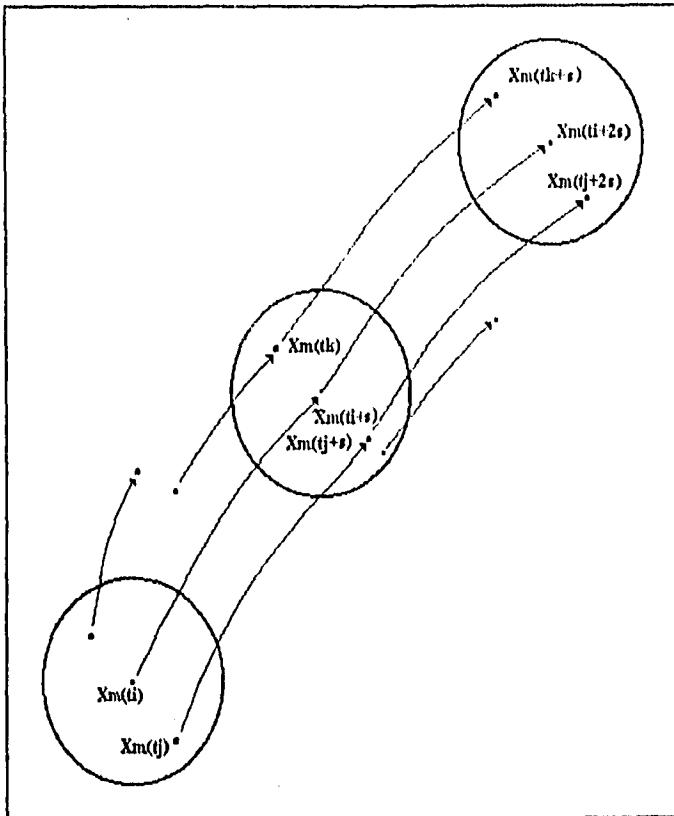


FIG. 6 . ESFERAS DE RADIO r CENTRADAS EN $X_m(i)$, $X_m(i+s)$, Y $X_m(i+2s)$.
DONDE: $d(X_m(i), X_m(j)) < r$, $d(X_m(i+s), X_m(j+s)) < r$,
 $d(X_m(i+2s), X_m(j+2s)) < r$, etc.

$$C_m = \exp(-msh) \quad (17)$$

De igual forma, la probabilidad para que los pedazos de trayectoria muestren divergencia lejos del valor límite fijado durante el siguiente paso de tiempo s decrece proporcionalmente a $\exp(msh)$.

Como ya se vio anteriormente, h es una medida cuantitativa de predictibilidad promediada sobre todos los puntos del atractor, y describe la expansión o divergencia media de pedazos de trayectoria de longitud ms .

3.3 COMBINACION Y METODO DE ANALISIS

La combinación de las proporcionalidades (13) y (17) conduce a la siguiente ley de invarianza de escala de la función de distribución acumulativa de distancias $C_m(r)$:

$$C_m(r) = r^{d_s} \exp(-msh) \quad (18)$$

En esta ley se acoplan la razón promedio de creación de información o reducción de predictibilidad con la suma h (con $L_1 > 0$) de los coeficientes característicos de Lyapunov.

Las pendientes obtenidas en los diagramas $\ln C_m(r)$ contra $\ln(r)$ pueden emplearse para predecir sobre los atractores contenidos en el espacio de fase de coordenadas recorridas en el tiempo, siempre y cuando la dimensión contenedora m sea suficientemente alta (tiende a infinito, $m \gg m_c$). Al haber un incremento k en la dimensión contenedora, para una distancia límite fija r , la nueva función de distribución (de acuerdo a la ec.(18)) adquiere la siguiente forma

$$C_{m+k}(r) = r^{d_s} \exp[-(m+k)sh]$$

con lo cual

$$\text{Ln} \frac{C_m(r)}{C_{m,k}(r)} = ksh$$

por lo tanto

$$h = \frac{1}{kS} \text{Ln} \frac{C_m(r)}{C_{m,k}(r)} \quad (19)$$

Como ya se dijo anteriormente, el recíproco (1/h) de la suma de los coeficientes característicos de Lyapunov o divergencia media, proporciona una medida de la escala de tiempo dentro de la cual es posible predecir; esto permite determinar, para un cierto tiempo, la expansión volumétrica exponencial de un sistema dinámico. Ahora bien, el límite fijo r se debe seleccionar de tal forma que se cumpla la relación $C_m(r) = r^{d_2}$, lo cual implica que en un intervalo de $\text{Ln}(r)$ las distribuciones relacionadas $\text{Ln}[C_m(r)]$ pueden ser aproximadas por líneas rectas de igual pendiente.

La búsqueda de atractores en el tiempo es conducida por el deseo de investigar la complejidad observada en la atmósfera. La Teoría de Caos proporciona nuevas herramientas para realizar justamente eso. Una formulación matemática exacta de los procesos atmosféricos no ha sido desarrollada, por lo tanto las variables observables, que varían con el tiempo, son consideradas en la búsqueda de atractores para los procesos atmosféricos. Sin embargo, la carencia de datos, para largos períodos de tiempo, causa alguna incertidumbre acerca del valor estimado de la dimensión de los atractores. Tal vez con nuevos y más eficientes algoritmos, que permitan extender el análisis a escalas de tiempo muy corto, se tendrá cuidado de tales limitaciones (Ver Essex, Lookman and Nerenberg, 1987). En este punto, aunque existan o no atractores en el tiempo, se sabe que los estudios empíricos indican la existencia de atractores de baja dimensión que pueden estar presentes en las condiciones atmosféricas de cada región.

IV. ANALISIS DE DATOS

En el presente trabajo se analizarán dos tipos de series de tiempo:

- a) Series de tiempo observadas: para las estaciones climáticas de Atlanga y Tlaxco
- b) Series de tiempo determinística: generada con el modelo logístico, para $b=3.9999$ y $x=0.66$

4.1 SERIES DE TIEMPO OBSERVADAS

El estado de Tlaxcala nos muestra un ejemplo típico de un sistema de clima tropical semi-cerrado: Es un gran valle rodeado por una cordillera montañosa la cual, casi, lo aísla de sistemas externos que puedan influir internamente en el comportamiento del clima y el tiempo. También muestra un microclima que manifiesta patrones de lluvia aparentemente impredecibles que son típicos de climas tropicales. Una cuestión importante es saber si en tales climas tropicales se manifiesta un sistema fundamental determinístico caótico, lo cual implicaría algún grado de predictibilidad; o bien, que la dinámica es estocástica (o caótica con un atractor dimensionalmente alto), y por lo tanto ciertamente impredecible.

A fin de resolver esta cuestión se examinaron series de tiempo registradas durante 6 años en el Observatorio meteorológico central del Estado de Tlaxcala. Dos de las variables registradas desde 1988 a 1993- fueron las temperaturas máxima y mínima. La incidencia de errores detectables en los valores y la carencia de datos, en forma combinada, dan un total del 0.01 % de error en los datos del conjunto. Los errores en los datos se podrán corregir cuando se suponga algún valor original, o cuando sean reemplazados por el promedio estacional de todos los valores restantes (incluyendo las omisiones), a fin de minimizar estos efectos en la

aplicación del método.

En las estaciones climatológicas de ATLANGA y TLAXCO, en el Estado de Tlaxcala (ver Mapas 1A y 1B), se registran cada 24 horas (a las 8 A.M.) los valores de algunas de las variables climatológicas entre las cuales se encuentran la temperatura ambiente, la evaporación, la precipitación, la visibilidad, la nubosidad, la dirección y magnitud del viento, etc. La variable elegida en este trabajo fué: las horas calor, para seis años, de 1988 a 1993 para los meses de marzo, abril, mayo y junio. Las horas calor se obtienen restando a la temperatura máxima la temperatura mínima

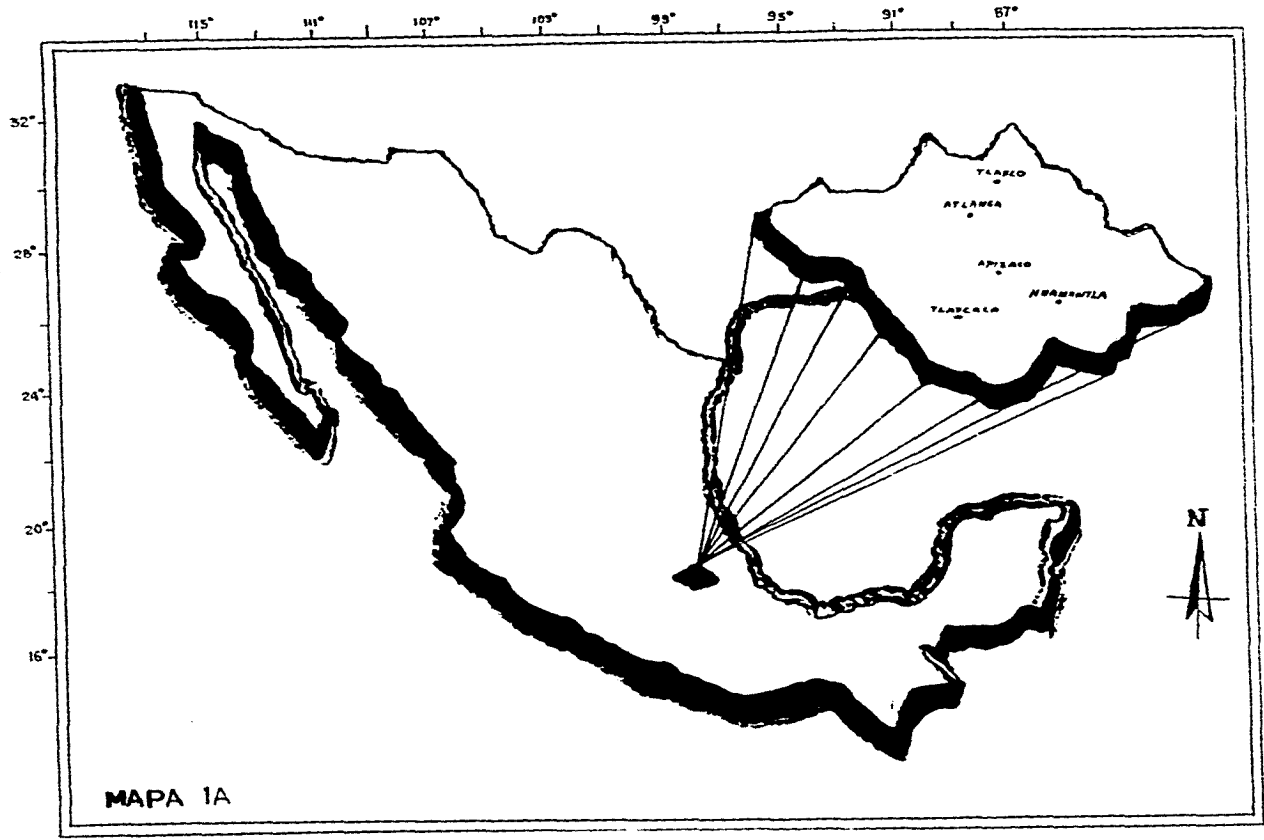
$$H_{\text{calor}} = T_{\text{máx}} - T_{\text{mín}}$$

Las estaciones climatológicas de Atlanga y Tlaxco se encuentran separados una distancia aproximada de 10 Km. y a una diferencia de alturas (con respecto al nivel medio del mar) de aproximadamente 40 metros. Además, en la Estación de Atlanga existe un cuerpo de agua (laguna) permanente que influye notablemente en los cambios meteorológicos de la zona. Por ejemplo, en Tlaxco se registran, en promedio, 50 heladas por año mientras que en Atlanga el promedio es de 100 heladas por año (ver Tabla 1), lo cual determina una diferencia del 50 %. El periodo de heladas se manifiesta, en ambos lugares, de enero a junio, mientras que algunas heladas inesperadas se presentan de mayo a agosto.

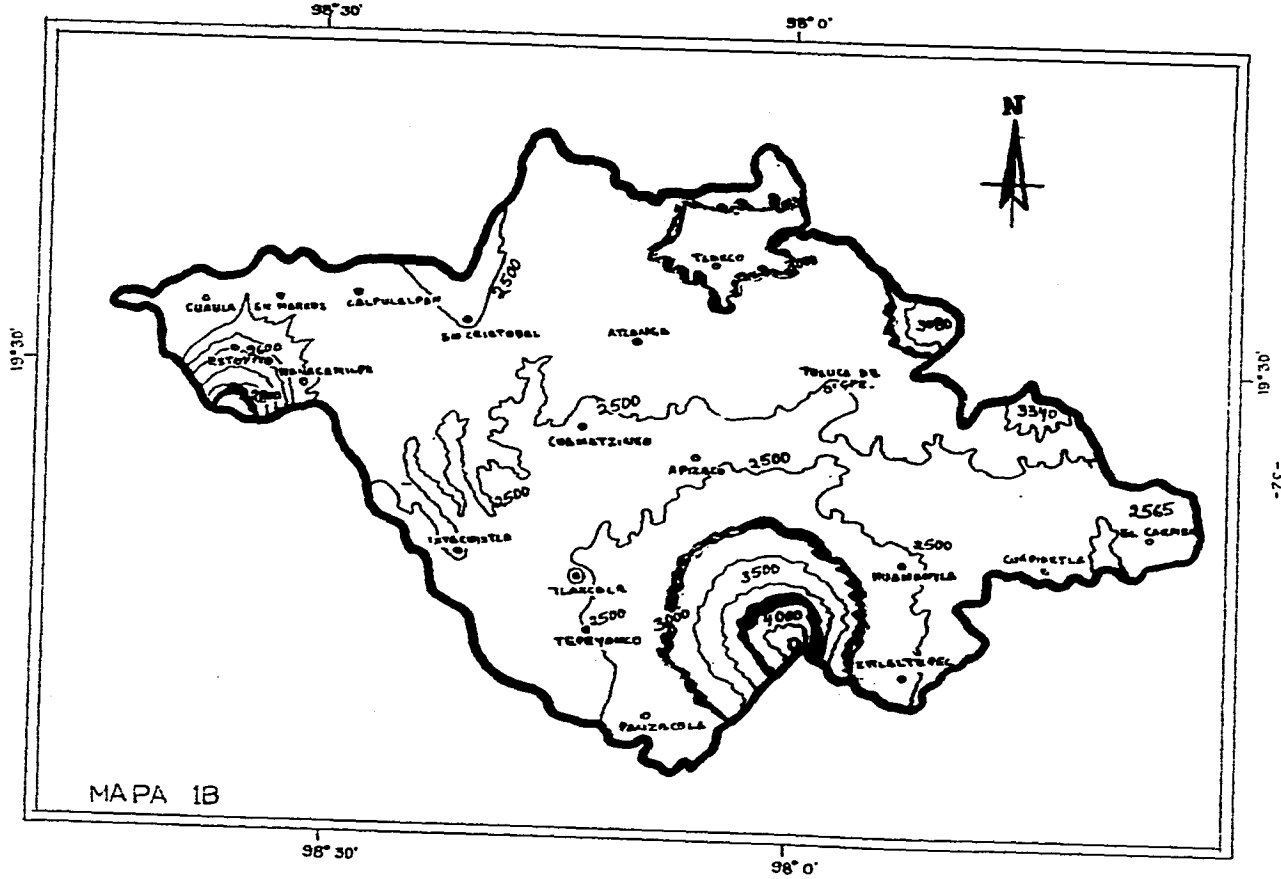
El periodo de estudio que se seleccionó (de 1988 a 1993) fué para los meses de marzo, abril, mayo y junio, precisamente porque la fecha de inicio de la temporada de lluvias, en las diferentes regiones del Estado de Tlaxcala, está comprendida en ese periodo. En este trabajo se aplicó la Teoría de Sistemas Dinámicos a la serie de datos de horas calor (H_{calor}) para determinar:

a) la dimensión y el tipo de atractor

REPUBLICA MEXICANA



ESTADO DE TLAXCALA



MAPA 18

ATLANGA

MES	1988	1989	1990	1991	1992		
Enero	27	27	28	28	22	T O T A L	P R O M E D I O
Feb.	19	23	16	22	22		
Mar.	9	26	12	12	5		
Abr.	1	11	1	2	0		
May.	0	5	0	0	1		
Jun.	0	0	0	0	1		
Jul.	0	0	0	0	0		
Agos.	0	0	0	0	0		
Sep.	1	0	1	0	0		
Oct.	7	12	2	5	5		
Nov.	26	17	18	22	3		
Dic.	27	23	29	24	22		
Annual	117	144	107	115	81	564	113

TLAXCO

MES	1988	1989	1990	1991	1992		
Enero	12	15	14	15	3	T O T A L	P R O M E D I O
Feb.	4	14	6	9	7		
Mar.	0	12	4	1	2		
Abr.	0	5	0	1	0		
May.	0	0	0	0	1		
Jun.	0	0	0	0	0		
Jul.	0	2	0	0	0		
Agos.	0	0	0	0	0		
Sep.	0	0	1	0	0		
Oct.	0	12	1	3	3		
Nov.	28	5	4	11	2		
Dic.	17	12	17	11	19		
Annual	61	75	47	51	37	271	54

TABLA I: NUMERO MENSUAL, ANUAL Y PROMEDIO ANUAL DE HELADAS PARA EL PERIODO 1988-1992, PARA ATLANGA Y TLAXCO

b) el limite de predictibilidad sobre el atractor.

En primer lugar, se obtuvieron directamente de las estaciones climatológicas de ATLANGA y TLAXCO, los registros de las temperaturas máxima y mínima, en los periodos antes mencionados. A continuación se realizó el correspondiente cálculo de las horas calor (Apéndice 1), que constituye la serie observada (S_o) para este trabajo, la cual corresponde al primer eje coordenado (dimensión uno).

En segundo lugar, se procedió a obtener los corrimientos de esta serie para crear cada uno de los siguientes ejes coordenados, si la correlación entre los corrimientos es adecuada (uno por cada dimensión adicional). Esto último se efectúa de la siguiente manera: Supóngase que los valores de la observable, que se obtuvieron cada 24 horas, se representan por la serie $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Entonces, el primer corrimiento (SoR_1) que representa al segundo eje, se obtiene de la observable eliminando al primer valor (X_1); esto es cierto porque para el siguiente día (tiempo de correlación $S=24$ horas) los valores empiezan con X_2 , y SoR_1 tendrá como serie de datos a $X_2, X_3, X_4, \dots, X_n$. De igual forma el segundo corrimiento (SoR_2), que representa al tercer eje (se obtiene eliminando a X_1 y X_2 de la serie observada) tendrá como serie de datos a $X_3, X_4, X_5, \dots, X_n$. Este procedimiento se realiza hasta la dimensión m-ésima permitida por el banco de datos. Resumiendo:

S_o	SoR_1	SoR_2	SoR_3	...
X_1	X_2	X_3	X_4	...
X_2	X_3	X_4	X_5	...
X_3	X_4	X_5	X_6	...
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	X_{n+3}	...

En tercer lugar, se construyeron los puntos coordenados (con la correlación de los datos de la serie observada) para dos dimensiones (2D), tres dimensiones (3D), cuatro dimensiones (4D), así hasta la m-ésima dimensión para poder encontrar las dimensiones de los atractores como valores de saturación de d_m , los cuales no cambiaban aunque se agregaran más coordenadas al espacio de fase contenedor. De esta forma, los puntos de coordenadas para cada dimensión se obtienen de la siguiente manera:

2D	3D	4D.....
$P_1(X_1, X_2)$	$P_1(X_1, X_2, X_3)$	$P_1(X_1, X_2, X_3, X_4)$
$P_2(X_2, X_3)$	$P_2(X_2, X_3, X_4)$	$P_2(X_2, X_3, X_4, X_5)$
$P_3(X_3, X_4)$	$P_3(X_3, X_4, X_5)$	$P_3(X_3, X_4, X_5, X_6)$
.	.	.
$P_{n-1}(X_{n-1}, X_n)$	$P_{n-2}(X_{n-2}, X_{n-1}, X_n)$	$P_{n-3}(X_{n-3}, X_{n-2}, X_{n-1}, X_n)$

Como podrá observarse para dos dimensiones el i-ésimo punto se encuentra por medio de la expresión $P_i(X_i, X_{i+1})$; para tres dimensiones $P_i(X_i, X_{i+1}, X_{i+2})$; para cuatro dimensiones $P_i(X_i, X_{i+1}, X_{i+2}, X_{i+3})$; etc., donde $i=1, 2, 3, \dots, n$. De igual forma se deduce que la última coordenada de cualquier punto P_i está dada por la expresión $X_{i+(m-1)}$.

En cuarto lugar, se calcularon las distancias existentes entre todos los puntos que se formaron con los datos observados para cada una de las dimensiones (2D, 3D, ..., mD). Para ello se empleo norma Euclidiana, aún cuando también se puede emplear el método sugerido por Hao Bai-Lin (Ver Ec. (8)) el cual considera que la distancia entre dos puntos cualesquiera resulta igual a la distancia máxima que existe entre sus respectivas componentes.

En quinto lugar, se obtuvieron las correspondientes funciones de distribución acumulativa (Ec. (12)) para cada una de las dimensiones [$C_{2D}(x), C_{3D}(x), \dots, C_{mD}(x)$]. El valor límite r se eligió

de tal forma que se observara de una manera clara como estaba variando (generalmente aumentando) el número de puntos contenidos dentro de los esferoides m -dimensionales al ir aumentando la resolución del radio, hasta que todos los puntos quedaran dentro de esos esferoides. Los valores de los radios que se emplearon, para cada dimensión, se fueron incrementando de 0.001 en 0.001. También se realizaron experimentos con grano mayor, es decir, con incrementos de 0.01, de 0.1, de 0.2, de 0.25, de 0.5 y de 1 en 1; obteniéndose resultados semejantes.

En sexto lugar, se trazaron las gráficas de $\text{Ln}r$ contra $\text{Ln}C_m(r)$ para obtener el ajuste de rectas, que permitió determinar la zona de invarianza de escala (scaling) de la función de distribución acumulativa (Ec. (18)).

En séptimo lugar, para ambos casos, series de tiempo observadas y serie determinística, se trazaron las gráficas de número de coordenadas contra pendientes para obtener la dimensión de los atractores correspondientes.

En octavo lugar, para probar que se tiene un grado de orden en las series de tiempo observadas, se tomó -para el caso de Tlaxco- una muestra aleatoria del tamaño de la serie, y se le aplicó la misma metodología.

Finalmente, considerando la región de invarianza, se determinaron los límites de predictibilidad.

También, se determinaron los espectros de potencia correspondientes, con la finalidad de obtener información del tipo de comportamiento de las series de tiempo observadas.

4.2 SERIE DE TIEMPO DETERMINISTICA-MAPEO LOGISTICO

El biólogo Robert M. May estudio la dinámica poblacional de

animales con el fin de describir los cambios de población por generación. Para ello introdujo una función cuadrática (MAPEO LOGISTICO) que ha sido muy estudiada (Betrami, 1987) y esta dada por

$$x(t+1) = bx(t) [1-x(t)]$$

donde b es un parámetro que reproduce la influencia de las condiciones climáticas, el alimento con el que cuenta la población, espacio disponible u otros aspectos similares. Por otro lado $X(t+1)$ representa el porcentaje de la población que sobrevive en cada generación. Ahora bien, realizando un análisis matemático se demuestra que b y $x(t)$ varían de acuerdo a los siguientes rangos

$$0 \leq b \leq 4$$

y

$$0 \leq x(t) \leq 1$$

En este estudio se consideró el caso especial: $b=3.9999$ y $x=0.66$.

V. RESULTADOS

5.1 COEFICIENTES DE CORRELACION

5.1.1 Series de tiempo observadas

En la tabla 2, se muestran los coeficientes de correlación (tiempo de correlación: $s=24$ horas) entre las coordenadas de Horas calor para una primavera. Como puede observarse, en la diagonal principal aparecen los coeficientes de correlación de cada coordenada consigo misma que obviamente deben ser igual a la unidad. Los valores de los coeficientes de cualquier coordenada con respecto a las siguientes muestran una sensible disminución lo cual garantiza que las coordenadas son linealmente independientes (Klaus, 1987), ya que los coeficientes de correlación son menores del 10%. Para tiempos de correlación mayores de 24 horas (48, 72, 96...) se puede demostrar la misma independencia lineal entre las coordenadas. Por lo tanto, queda garantizado el empleo de estas coordenadas para la construcción del espacio de fase.

5.1.2 Serie de tiempo determinística

En este caso, el análisis de correlación demostró la misma independencia lineal de las coordenadas del espacio de fase, al realizar corrimientos de un sólo paso de tiempo (generación).

5.2 ZONAS DE INVARIANZA DE ESCALA

5.2.1 Series de tiempo observadas

En el apéndice 2, se muestran las gráficas de $\text{Ln}C_m(r)$ contra $\text{Ln}(r)$ para Atlanga, pudiéndose comprobar que al incrementar una a una las coordenadas, la zona de invarianza de escala se alcanza entre 12 y 16 coordenadas.

Asimismo, para la estación de Tlaxco la zona de invarianza de

	So	SoR1	SoR2	SoR3	SoR4	SoR5	SoR6	SoR7
So	1	0.6514	0.5356	0.3939	0.2943	0.2540	0.1844	0.1622
SoR1	0.6514	1	0.8581	0.6329	0.4967	0.2959	0.3549	0.2263
SoR2	0.5356	0.8581	1	0.6511	0.3208	0.4372	0.3998	0.3956
SoR3	0.3939	0.6329	0.6511	1	0.6513	0.6612	0.5175	0.3449
SoR4	0.2943	0.4967	0.3208	0.6513	1	0.6357	0.4799	0.4726
SoR5	0.2540	0.2959	0.4372	0.6612	0.6357	1	0.5659	0.4915
SoR6	0.1844	0.3549	0.3998	0.5175	0.4799	0.5659	1	0.3830
SoR7	0.1622	0.2263	0.3956	0.3449	0.4726	0.4915	0.3830	1

TABLA 2: COEFICIENTES DE CORRELACION ENTRE LAS COORDENADAS.

escala se alcanza entre 11 y 15 coordenadas, permaneciendo casi constante aún cuando se agreguen más coordenadas.

En este apéndice aparecen el mismo tipo de gráficas para una muestra aleatoria de los datos de Tlaxco, gráfica 8. Sin embargo, en este caso, no existe ninguna zona de invarianza de escala ya que no se manifiesta paralelismo entre las diferentes curvas.

5.2.2 Serie de tiempo determinística

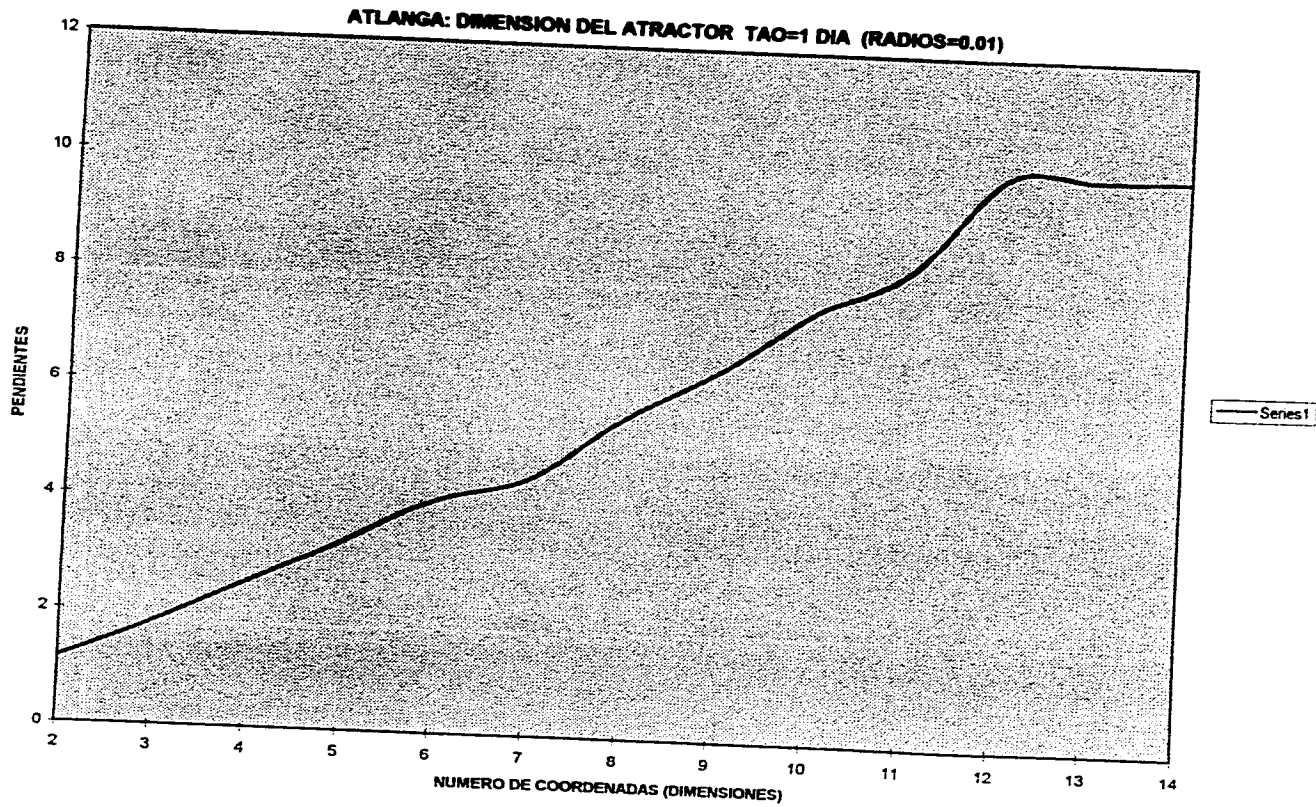
Para este caso el comportamiento es muy sencillo, mostrando rectas casi paralelas, con espacios de baja dimensión, gráfica 9.

5.3 DIMENSION CONTENEDORA DE LOS ATRACTORES

a) Series de tiempo observadas

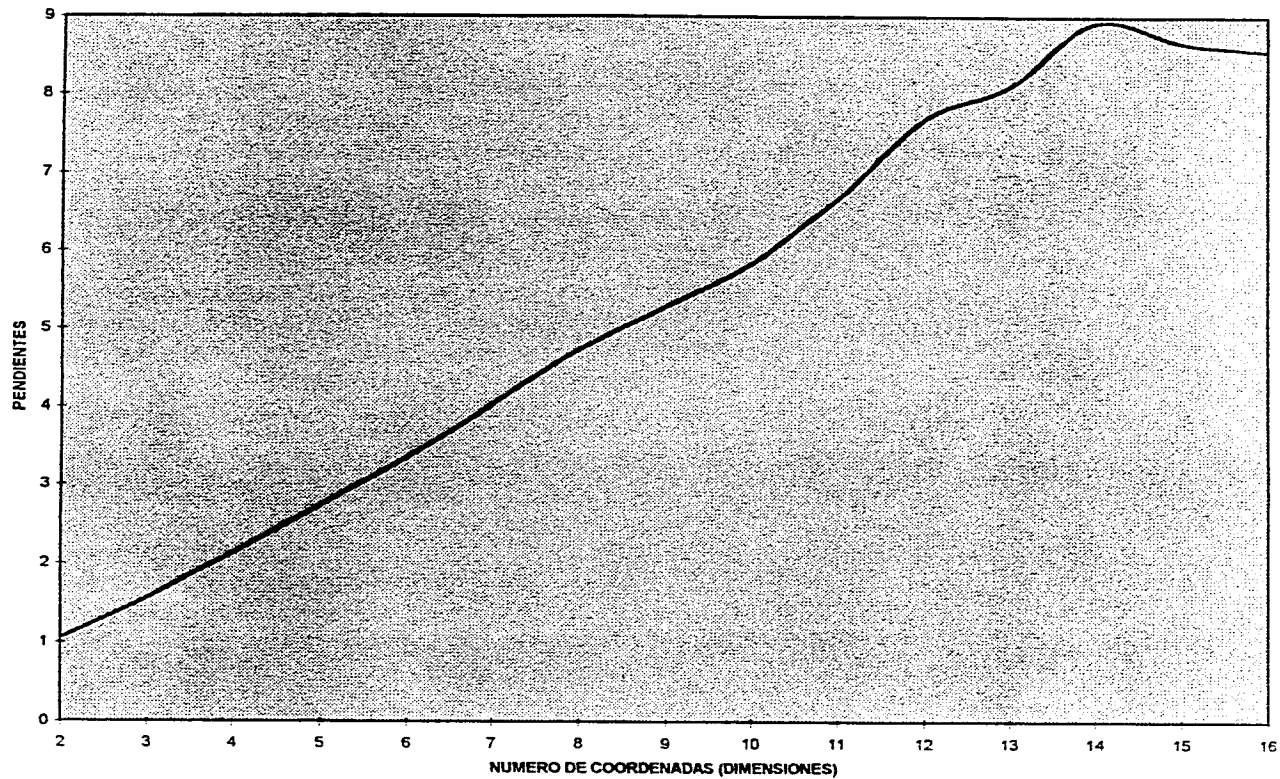
En la gráfica 1, se muestra la variación de las pendientes contra el número de coordenadas para la estación de Atlanga, se observa saturación de la información porque, finalmente, la curva se tiende horizontalmente, y su proyección de esta parte plana sobre el eje vertical determina que la dimensión del atractor (en la zona de invarianza de escala) se encuentra entre 10 y 11, mostrando su carácter fractal.

De igual forma, en la gráfica 2, se muestra que para Tlaxco la dimensión del atractor de la serie original se encuentra entre 8 y 9. Este experimento refuerza los resultados obtenidos para la dimensión de los atractores de cada estación los cuales no son de baja dimensión (como lo menciona gran parte de la literatura), ya que la dinámica del sistema en estudio es el resultado de la interacción de la atmósfera-oceanos-criósfera (conjunto de hielo y nieve)-continentes-biósfera, y esto de acuerdo a las escalas espacio-temporales que estén siendo registradas por la estación y la intensidad de su acoplamiento. En la gráfica 2A, se muestra el caso de Tlaxco aleatorio, para el cual no se manifiesta saturación de la información, pues la curva muestra una pendiente constante, por lo tanto no es posible determinar la dimensión de su atractor



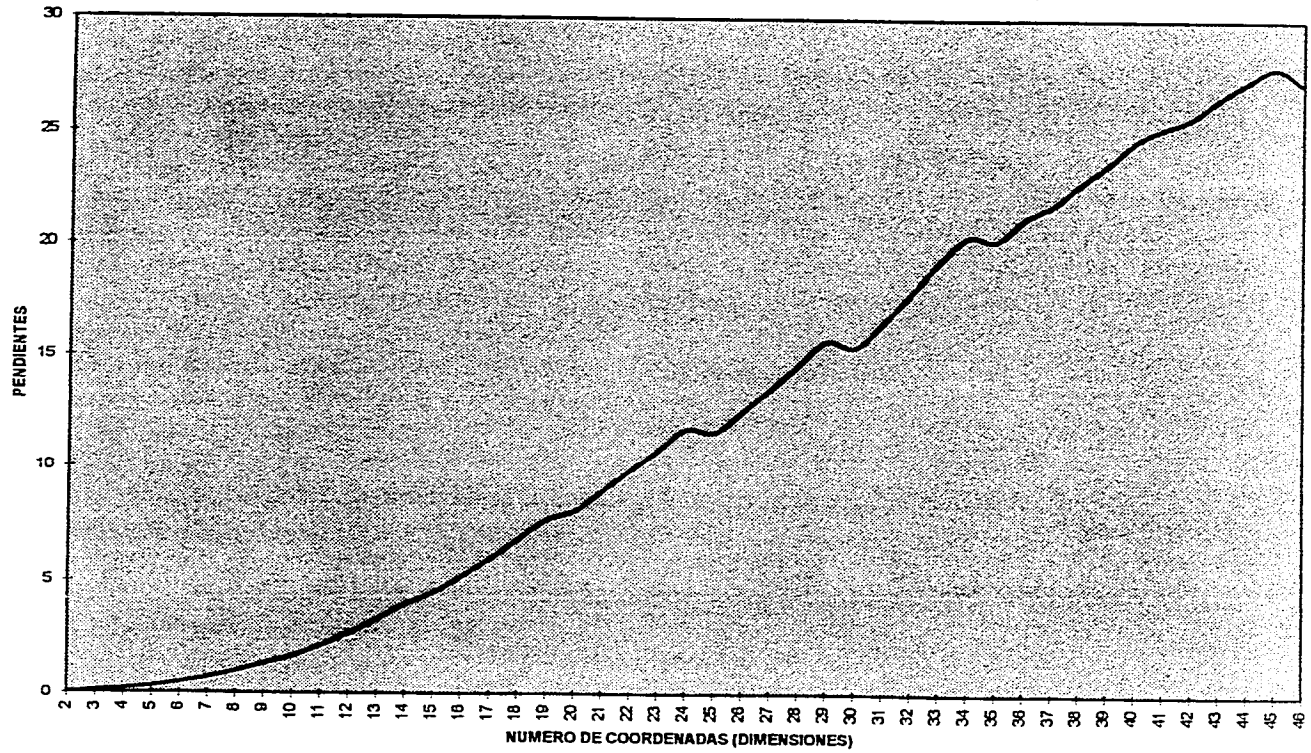
GRAFICA 1

TLAXCO: DIMENSION DEL ATRACTOR TAO=1 DIA (RADIOS=0.01)



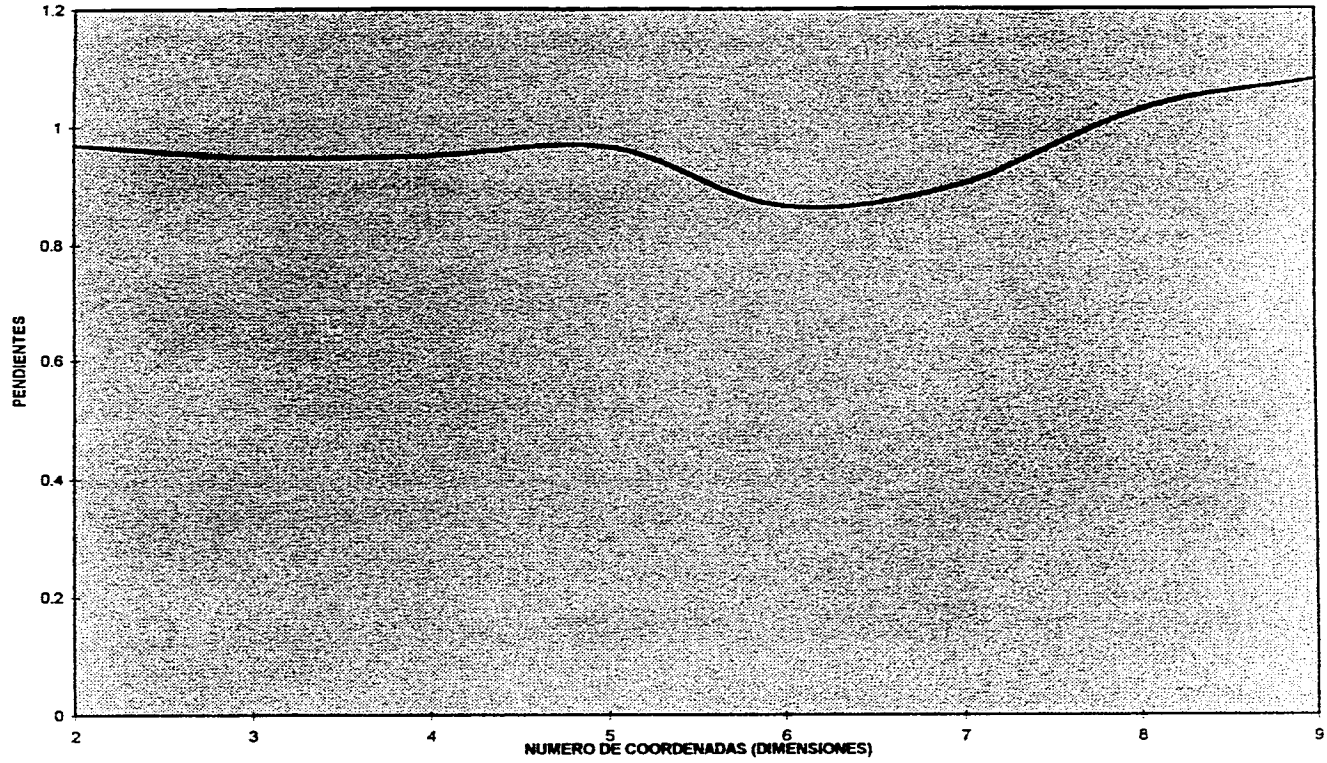
GRAFICA 2

TLAXCO ALEATORIO: DIMENSION DEL ATRACTOR TAO=1 DIA (RADIOS=0.1)



GRAFICA 2A

SERIE DETERMINISTICA MU=3.9999 X=0.1 TAO=1 DIA (RADIOS DE 0.01)



GRAFICA 2B

(si existe).

b) Serie de tiempo determinística

En la gráfica 2B, se muestra un valor de la dimensión del atractor comprendida entre 0.9 y 1.1, (este último valor resulta por considerar más de 5 coordenadas para su espacio de fase). Que de acuerdo a la teoría debe tender a uno. Lo cual representa una prueba de la validez de la metodología aplicada, así como del proceso de programación involucrado.

5.4 LIMITES DE PREDICTIBILIDAD

a) Series de tiempo observadas

Aplicando la ecuación 19, en la zona de invarianza de escala para Atlanga (12D-16D), se determinaron los límites de predictibilidad los cuales se muestran en la última columna de la tabla 3. M se fija en 12 coordenadas y k se va variando de uno en uno hasta cubrir la zona de invarianza de escala. El límite de predictibilidad media tiende a 1.55 días.

De igual forma, para la estación de Tlaxco, en la última columna de la tabla 4, se muestra el límite de predictibilidad media que es de 1.52 días.

5.5 ESPECTROS DE POTENCIA

a) Series de tiempo observadas

En la gráfica 3 se muestra el espectro de potencias para los datos de horas calor de 1988 para la estación de Atlanga. Los resultados muestran que existe una amplia banda de frecuencias donde la potencia tiende a cero, lo cual implica que la serie tiene un comportamiento caótico.

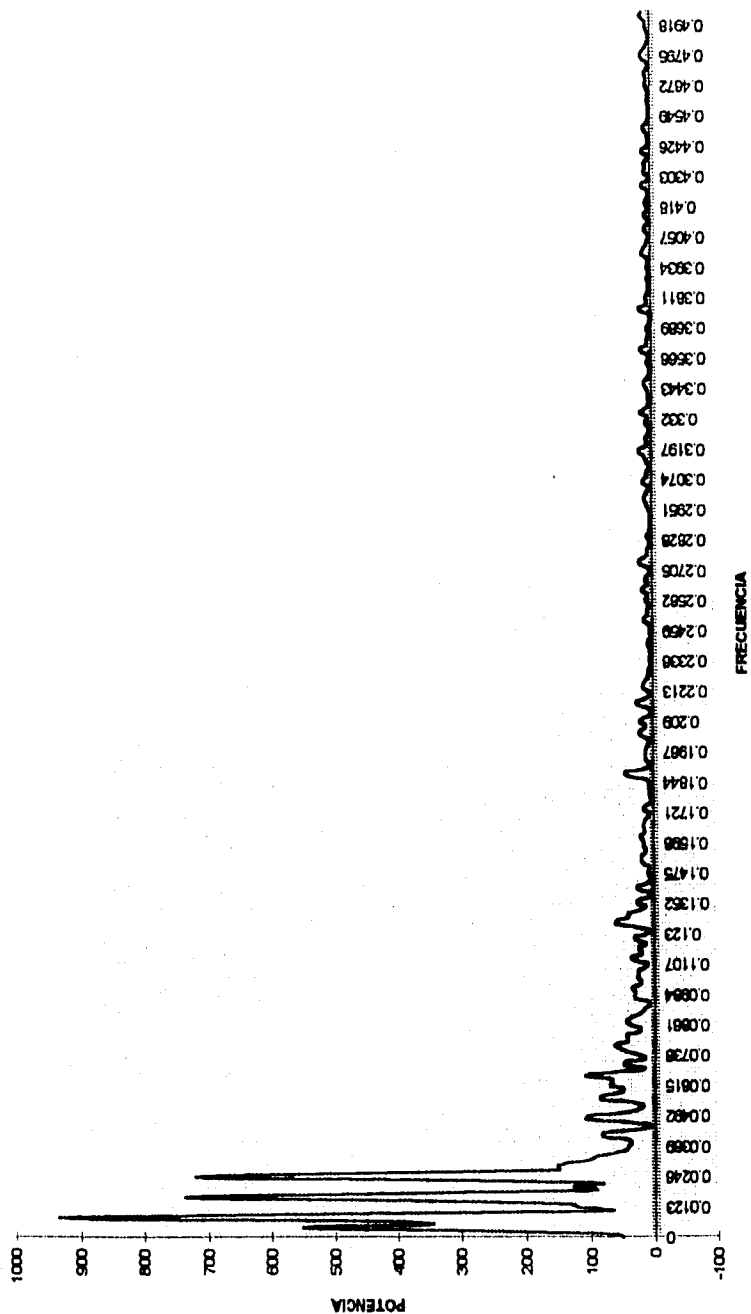
Ln r	Ln Cm (r)	M COORDENADAS	k DIFERENCIA ENTRE M y M+K	PREDICTIBILIDAD (DIAS)
1.906578	-17.4483	12		
1.906578	-18.0655	13	1	1.6149
1.906578	-18.7173	14	2	1.573
1.906578	-19.4252	15	3	1.5159
1.906578	-20.0965	16	4	1.509
				PROM.= 1.553 DIAS
TABLA 3. CALCULO DE PREDICTIBILIDAD PARA ATLANGA				

Ln r	Ln Cm (r)	M COORDENADAS	k DIFERENCIA ENTRE M y M+K	PREDICTIBILIDAD (DIAS)
1.857859	-18.1311	11		
1.857859	-18.7773	12	1	1.5475
1.857859	-19.4378	13	2	1.5308
1.857859	-20.1128	14	3	1.513
1.857859	-20.8003	15	4	1.498
				PROM.=1.522 DIAS
TABLA 4. CALCULO DE PREDICTIBILIDAD PARA TLAXCO				

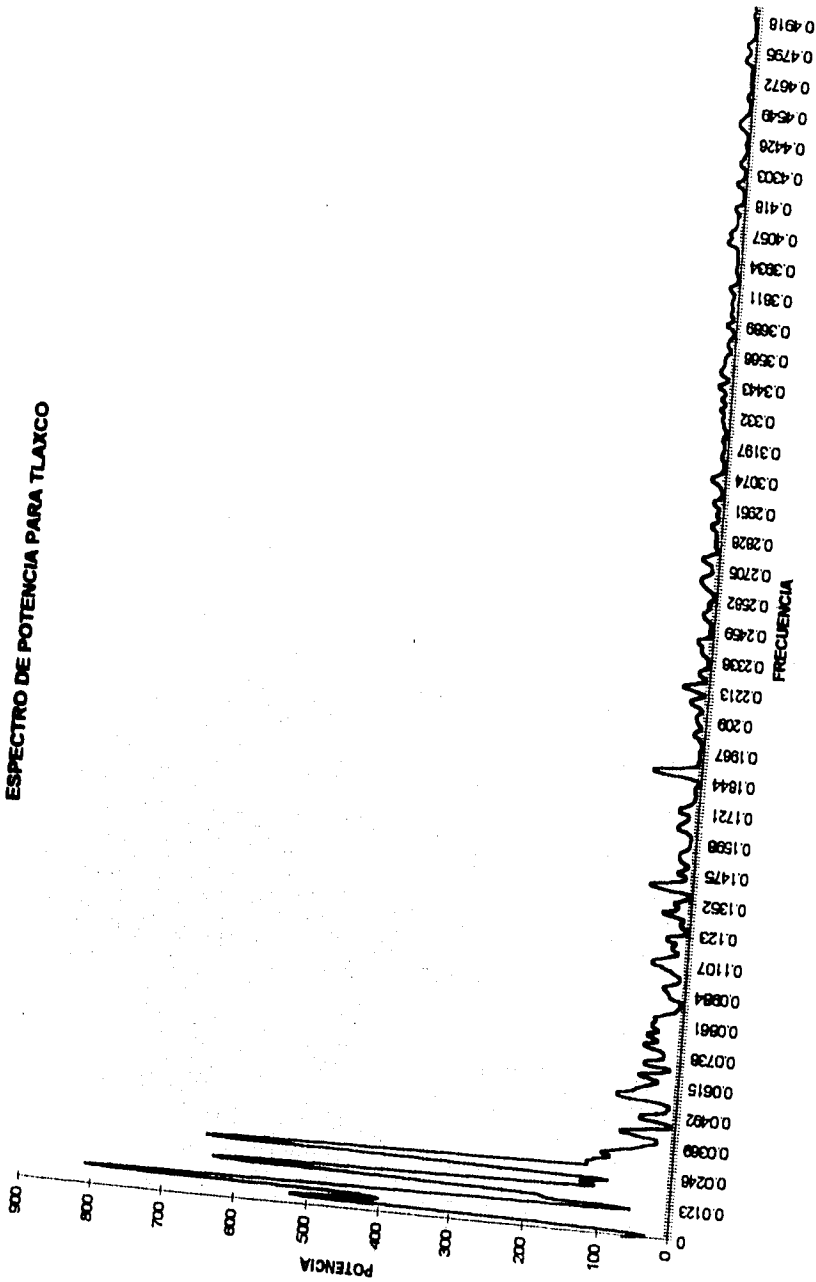
De igual forma en la gráfica 4 se presenta el espectro de potencia para la serie de tiempo de horas calor para Tlaxco, para cada año y para el promedio, mostrándose nuevamente el carácter caótico de la serie.

Finalmente, en la gráfica 5, se muestra el espectro de potencias para la serie aleatoria de tlaxco. Pero a diferencia de las anteriores, la potencia no tiende a cero, pero oscila en un pequeño rango donde se mantiene casi constante.

ESPECTRO DE POTENCIA PARA ATLANGA

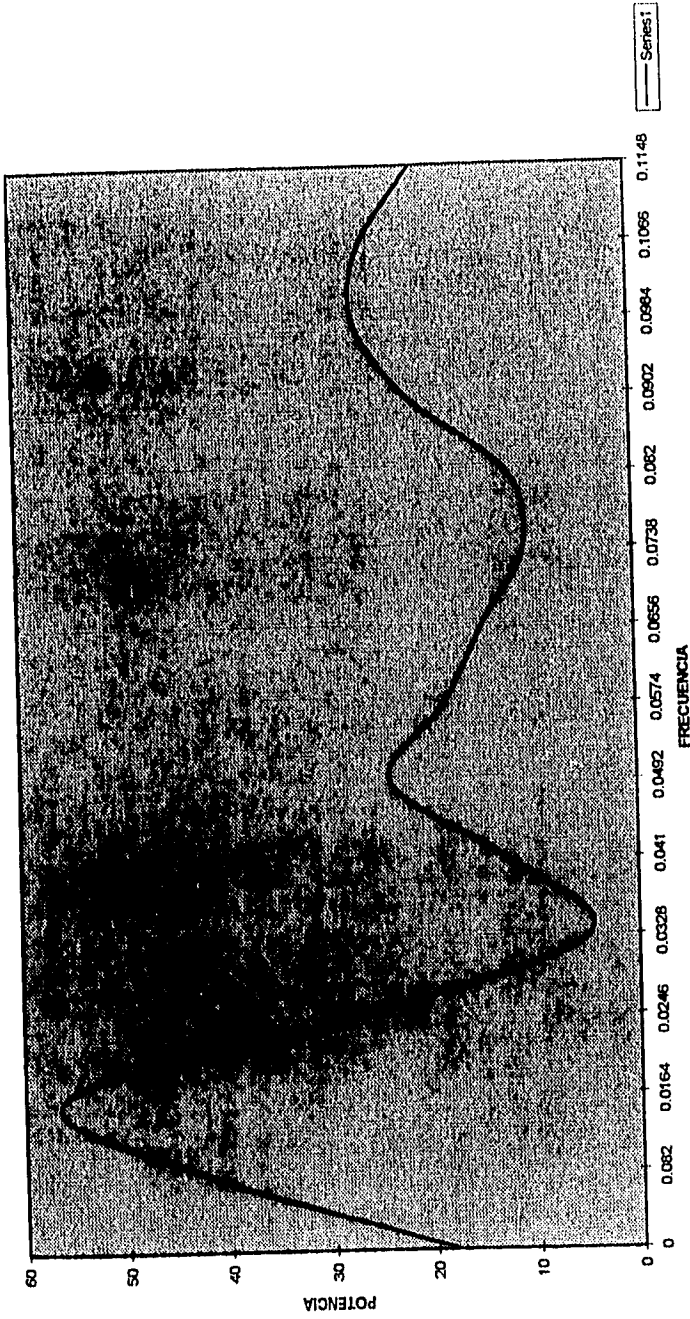


GRAFICA 3



GRAFICA 4

ESPECTRO DE POTENCIA PARA EL CASO ALEATORIO DE TLAXCO : MARZO-JUNIO DE 1988 (RESOLUCION 61/122)



GRAFICA 5

VI CONCLUSIONES

a) Series de tiempo observadas

Para el caso de dimensiones bajas, no se encontraron atractores, sin embargo, a partir de los datos obtenidos, para las estaciones de Atlanga y Tlaxco, de la variable observable (Horas - Calor) fué posible determinar:

-La dimensión y tipo de los atractores

-El límite de predictibilidad

que a manera de propuesta se discuten los resultados, con énfasis en características observadas.

La propiedad fractal (no entera) que mostraron las dimensiones de los atractores, son prueba del comportamiento irregular de la evolución de las Horas - Calor registradas diariamente, durante el periodo de los seis años (1988 a 1993) analizados.

El radio del esferoide encontrado para Atlanga es de 6.7, el cual resultó mayor que el de Tlaxco siendo éste de 6.4. Además, la dimensión del atractor para Atlanga se encuentra entre 12 y 16, mientras que para Tlaxco esta entre 11 y 15. Estos resultados se pueden explicar ya que, como se mencionó anteriormente, Atlanga se encuentra a orillas de un cuerpo de agua permanente (laguna) y próxima a una cadena de montañas lo cual implica que la dinámica del tiempo en Atlanga tenga más grados de libertad activos que los que tiene Tlaxco, a pesar de que esta estación se encuentra a 10 Km. de la primera y sobre un terreno plano ligeramente inclinado hacia la laguna. Esta característica en la orografía permite entender porque existen diferencias en el registro del número de heladas. Ahora bien, siendo mayor la dimensión del atractor de Atlanga con respecto a Tlaxco, se requieren mayor número de variables para describir la evolución del tiempo en Atlanga que en Tlaxco.

Sin embargo, analizando las tablas 3 y 4 se observa que el límite de predictibilidad es menor para Tlaxco lo cual parece una contradicción con respecto al mayor número de grados de libertad de Atlanga, pero esta última tiene mayor orden dinámico impuesto por la inercia térmica de la laguna lo cual se verifica en los datos de horas-calor, ya que en Atlanga existe mayor persistencia que en Tlaxco.

EL concepto de persistencia es usado como un modelo, el más sencillo, para hacer predicción considerando que el valor actual de la variable a predecir, permanece constante por un periodo igual al tiempo de muestreo, es decir, se encuentran grupos de dos y tres valores iguales.

Se puede obtener una predictibilidad media del orden de un día, para ambas estaciones, que concuerda con los resultados obtenidos por Waelbroeck et al. (1994) para Tlaxcala capital, y Klaus (1987).

VII. COMENTARIOS Y RECOMENDACIONES

Es recomendable que este mismo trabajo se realice empleando otras variables presentes en los cambios meteorológicos de Atlanga y de Tlaxco, para garantizar que con cualquiera de ellas se llega a resultados equivalentes comprobando la validez de esta teoría. También se sugiere emplear otras metodologías para el mismo propósito como son: el algoritmo de la Caja Contenedora (Mandelbrot, 1983), el algoritmo del Vecino Cercano (Badii and Politi, 1985) y el método de las Redes Neuronales (Waelbroech et al, 1994).

También se sugiere se maneje la Teoría de Información para analizar las propiedades de independencia de las coordenadas generadas por corrimientos, estudiando el comportamiento de la información mutua entre dos series. Sin embargo, este método requiere de mayor longitud en la serie de tiempo. Cuando se tiene información con una longitud mediana, se presentan distribuciones muy agudas, debiéndose aplicar operadores matemáticos de suavizamiento; y como el método de análisis de la dimensión del atractor y predictibilidad es muy sensible, entonces no se debe olvidar esta propiedad.

Para el caso de la serie determinística generada con el mapeo logístico, se ve que es necesario explotar este laboratorio matemático/computacional rico en comportamientos.

BIBLIOGRAFIA

- Atmanspacher H., Scheingraber H., and Voges W. 1988 "Global Scaling Properties of a Chaotic Attractor Reconstructed from Experimental data". Physical Review A. Vol.37, No.4, 1314-1322.
- Badii, R., and A. Politi. 1985. Statistical description of chaotic attractors: The dimension function. J. Stat. Phys.40: 725-750.
- Beltrami, E., 1987 "Mathematics for Dynamic Modeling". Academic Press.
- Carles, S., 1991. "La Ciencia del Caos". Mundo Cientifico No. 115, Vol.11, 698-708.
- Eckmann, J. P. and Ruelle D. 1985 "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors" Rev. Modern Phys. Vol.57, 617-656.
- Essex, C., Lookman, T. and Nerenberg, M. A. N., 1987 "The Climate Attractor over Short Timescales" Nature. Vol. 326, No. 5, 64-66.
- Fraser, A.M. and Swinney, H.L., 1986 "Independent coordinates for strange attractors from mutual information" Physical Review A, vol. 33, No.2, 1134-1139.
- Glass, L., Guevara, M. R., Belair, J., and Shrier, A., 1984 "Global Bifurcations of a Periodically Forced Biological Oscillator" physical Review A, vol.24, No.3, 1348-1357.
- Grassberger, P., and I. Procaccia, 1983: Characterization of strange attractors. Phys. Rev. Lett.,50, 346-349.

- Grassberger, P., and I. Procaccia, 1984: Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach. *Physica*, 13D, 34-54.
- Hao Bai-Lin, 1989 "Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems" World Scientific.
- Kauffman, S.A., 1991 "Antichaos and Adaptation" *Scientific American*, 78-84.
- Klaus, Fraedrich, 1987. "Estimating Weather and Climate Predictability on Attractors", *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol.44, No.4, 722-728.
- Lichtenberg, A. I. and Lieberman, M.A. 1983 "Regular and Stochastic Motion" Springer-Verlag.
- Lorenz E. N. 1965 "A Study of the Predictability of a 28-Variable Atmospheric Model" *Tellus*, Vol.27, 636-646.
- Mandelbrot, B. B., 1983 "The Fractal Geometry of Nature" New York: Freeman.
- Marsden J. E. and Mc. Cracken M. 1976 "The Hopf Bifurcation and its Applications" *Appl. Math. Sci.* Vol. 19. Springer-Varley, Berlin.
- May R. M., 1976 "Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics" *Nature* vol.261, 459-467.
- Meneses A. 1993. "Aplicación de la Teoría de caos para identificar el número de variables con capacidad de predicción del tiempo para el norte-centro de Tlaxcala". Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Tlaxcala.
- Morales-Acoltzi, T. y Adem, J., 1994 "On Asymptotic Behaviour of the

Adem Thermodynamic Model for the Ocean Temperature Prediction". *ATMOSFERA*, Vol. 7, No. 2, 105-116.

Nicolis, J. S. 1987 "Chaotic Dynamics Applied to Biological information Processing " Akademie-Verlag, Berlin.

Tsonis A. A. and Elsner J. B., 1988 "The Weather Attractor Over Very Short Timescales" *Nature*. Vol. 333, No. 6173, 545-547.

Tsonis, A. A. and Elsner J. B., 1989 "Chaos, Strange Attractors, and Weather" *Bulletin American Meteorological Society*. Vol. 70, No. 1, 14-23.

Waelbroeck, H., López, R., Morales, T. and Zertuche, F. 1994 "Chaos and Predictability in a Tropical Microclimate data set" *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 51, No. 22, pp. 3360-3364.

GLOSARIO

ATRACTORES.- Son subespacios que atraen a todas las trayectorias de un Sistema Dinámico Disipativo. Un atractor es un subespacio del espacio de estado formado por una colección infinita de trayectorias periódicas estables, ninguna de las cuales predomina en condiciones naturales.

CAOS.- El caos es un término que literalmente significa ausencia completa de orden, el cual se emplea como sinónimo de irregular, de impredecible, azaroso, etc.

COEFICIENTES CARACTERISTICOS DE LYAPUNOV.- Son cantidades que describen el cambio promedio de la perturbación de un sistema. Para lograrlo se divide el tamaño de la perturbación en un instante de tiempo por su perturbación en un instante posterior. Ejecutando esto mismo en varios intervalos, se promedian los resultados.

DIMENSION DE UN ATRACTOR.- La dimensión fractal es una medida de la complejidad o irregularidad del sistema estudiado y proporciona un estimado del número mínimo de variables para describir al sistema. Un conocimiento completo del conjunto de dimensiones del sistema es equivalente a una completa caracterización física del fractal.

ESPACIO DE ESTADO.- Un espacio de estado de un sistema se obtiene al considerar como coordenadas a todas las variables (necesarias) de un sistema que describan sus propiedades dinámicas de una manera exacta.

ESPACIO DE FASE.- El espacio de fase de un sistema se obtiene al considerar como coordenadas a las variables y a sus derivadas temporales que lo describen.

FRACTAL.- Son formas geométricas autosimilares en el cambio de escala que se caracterizan porque, al variar su escala tantas veces

como se quiera, permanecen inalteradas obteniéndose estructuras parecidas. Son conjuntos cerrados. Su dimensión es mayor a su dimensión Euclidiana.

SISTEMA.- Consiste de muchas partes individuales que interactúan cada una con las otras.

SISTEMA DINAMICO.- Es un sistema que evoluciona con el tiempo y cuando se conocen las condiciones iniciales que lo determinan, su evolución puede ser descrita por ciertas reglas o ecuaciones matemáticas.

TEORIA DE CAOS.- En la Teoría de Caos se define al orden y al desorden generado por los Sistemas Dinámicos como el grado de predictibilidad del sistema. La Teoría de Caos es considerada como uno de los grandes descubrimientos del siglo XX.

APENDICE 1

HORAS CALOR

MARZO 90
20 3
18 6
18 3
21 2
19 2
22 2
23 3
20 3
21 2
22 4
20 4
27 5
25 7
22 4
23 4
21 1
23 4
22 5
10 2
23 2
23 0
21 4
18 5
17 4
20 6
19 7
20 4
19 5

ABRIL 90
22 4
24 6
25 6
24 6
23 8
22 8
22 6
22 4
25 7
26 7
16 5
21 7
22 8
22 4
22 4
24 3
23 4
24 6
21 5
20 9
19 8
19 7
21 4
20 4
22 7
24 8
23 9
22 6
23 7

MAYO 90
24 8
24 10
26 10
25 9
22 11
21 9
19 9
15 10
17 8
24 7
25 8
24 12
24 10
20 9
23 7
23 8
25 5
25 8
25 8
26 12
25 10
21 8
17 7
23 5
24 6
24 6
28 10
27 11
25 7

JUNIO 90
24 5
22 10
24 9
25 6
25 5
23 8
23 8
22 9
22 8
21 6
21 10
25 12
22 10
22 10
22 7
22 7
22 11
21 6
21 10
21 10
22 12
22 12
22 11
21 11
21 10
20 8
20 8
20 11
21 8
19 8
20 13
19 8
18 6
14 7
20 12
20 13
21 11
19 8
19 9

MARZO 91
23 1
23 1
25 0
25 1
18 -4
26 -1
26 3
29 3
28 3
26 5
21 3
23 4
23 4
25 6
25 4
26 3
27 4
29 5
28 5
27 6
25 5
25 4
25 5
24 4
26 4
27 5
28 5
23 7
28 7
23 7
23 6
24 4

ABRIL 91
14 1
20 0
23 4
27 5
28 7
23 7
20 5
21 5
22 5
25 4
23 6
27 6
28 7
28 7
24 9
25 5
26 6
26 6
27 7
21 7
27 9
27 19
24 18
25 20
26 20
26 19
29 23
25 17
21 8
19 8
27 11
27 16
26 18
28 20
28 19
28 18
26 10
26 20
26 18

MAYO 91
27 10
25 6
28 8
24 8
29 6
20 7
22 5
21 9
24 6
25 6
23 5
23 9
24 6
22 7
26 8
25 7
27 4
25 9
26 9
25 8
22 7
23 4
24 6
22 7
27 9
26 8
26 9
27 10
25 8
24 9
24 7
24 6
22 10

JUNIO 91
25 8
26 5
26 5
25 5
25 5
26 3
23 6
21 7
22 10
22 7
21 10
21 9
21 10
21 10
22 11
20 11
18 9
22 11
18 11
18 12
19 11
19 8
19 8
21 11
18 10
18 10
18 10
19 11
16 12
19 10
20 11
21 11

MARZO 90

23		
24		18
25		20
26	2	10
27		
28		
29		
30		
31		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		

ABRIL 90

24		20
25		21
26	6	22
27		18
28	8	20
29		22
30		22
1	6	22
2		22
3		22
4		22
5		22
6		22
7		22
8		22
9		22
10		22
11		22
12		22
13		22
14		22
15		22
16		22
17		22
18		22
19		22
20		22
21		22
22		22
23		22
24		22
25		22
26		22
27		22
28		22
29		22
30		22
31		22

MAYO 90

27	5	18
28		15
29		13
30		19
31		8
1		11
2		12
3		8
4		15
5		16
6		15
7		14
8		13
9		12
10		11
11		10
12		9
13		8
14		7
15		6
16		5
17		4
18		3
19		2
20		1
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		

JUNIO 90

6		24
7		24
8		24
9		24
10		24
11		24
12		24
13		24
14		24
15		24
16		24
17		24
18		24
19		24
20		24
21		24
22		24
23		24
24		24
25		24
26		24
27		24
28		24
29		24
30		24
31		24

MARZO 91

28	3	5
29		5
30		5
31		5
1		5
2		5
3		5
4		5
5		5
6		5
7		5
8		5
9		5
10		5
11		5
12		5
13		5
14		5
15		5
16		5
17		5
18		5
19		5
20		5
21		5
22		5
23		5
24		5
25		5
26		5
27		5
28		5
29		5
30		5
31		5

ABRIL 91

18		2
19		2
20		2
21		2
22		2
23		2
24		2
25		2
26		2
27		2
28		2
29		2
30		2
31		2

MAYO 91

30		10
31		20
1		21
2		22
3		23
4		24
5		25
6		26
7		27
8		28
9		29
10		30
11		31
12		1
13		2
14		3
15		4
16		5
17		6
18		7
19		8
20		9
21		10
22		11
23		12
24		13
25		14
26		15
27		16
28		17
29		18
30		19
31		20

JUNIO 91

29	5	0
30		6
31		7
1		8
2		9
3		10
4		11
5		12
6		13
7		14
8		15
9		16
10		17
11		18
12		19
13		20
14		21
15		22
16		23
17		24
18		25
19		26
20		27
21		28
22		29
23		30
24		31
25		1
26		2
27		3
28		4
29		5
30		6
31		7

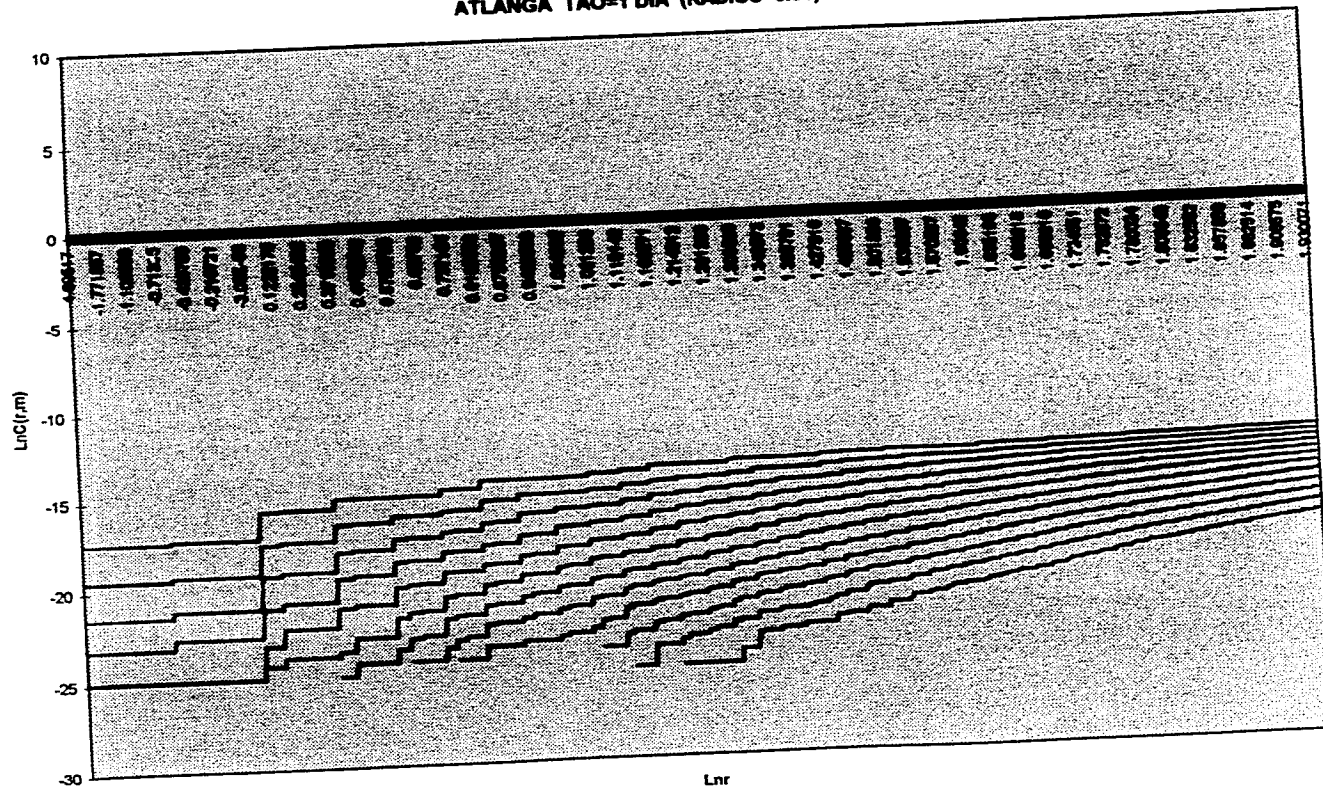
APENDICE 2

GRAFICAS

DE

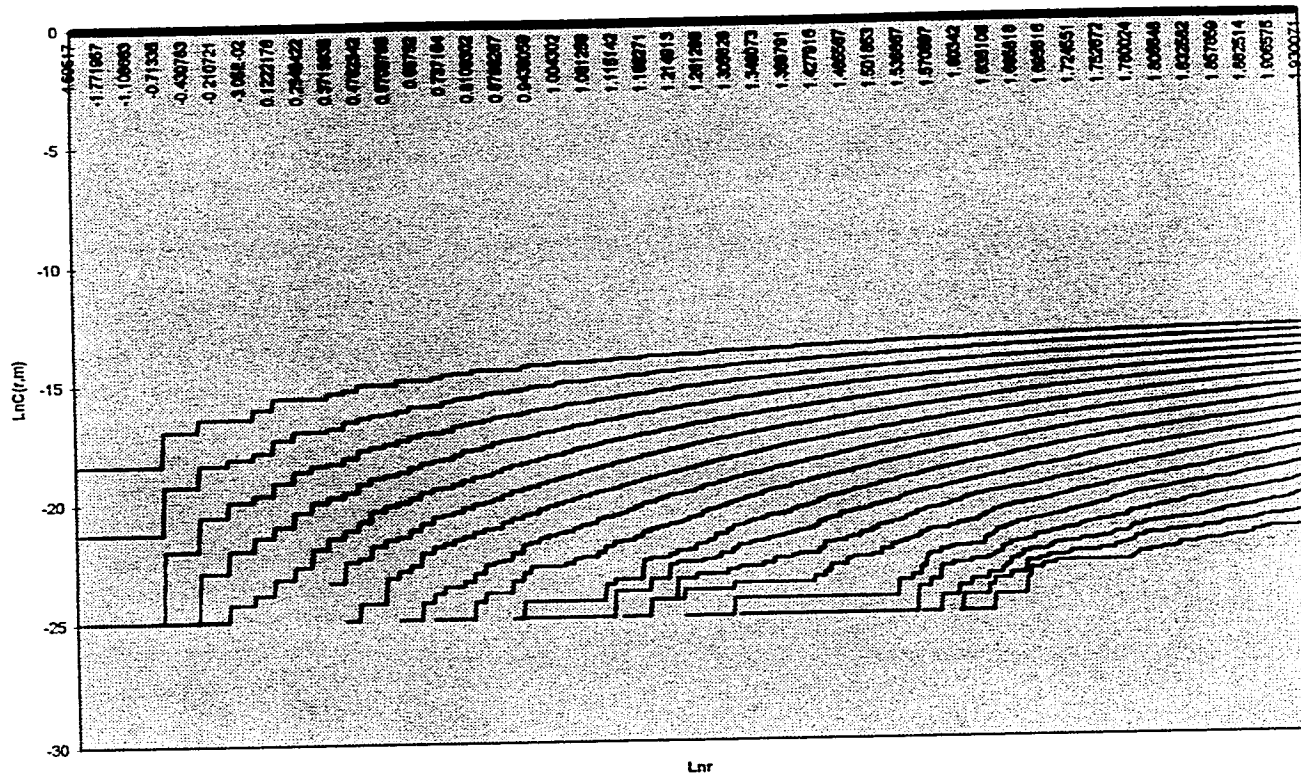
$\text{LnC}(r,m)$ vs Lnr

ATLANGA TAO=1 DIA (RADIOS=0.01)



GRAFICA 6

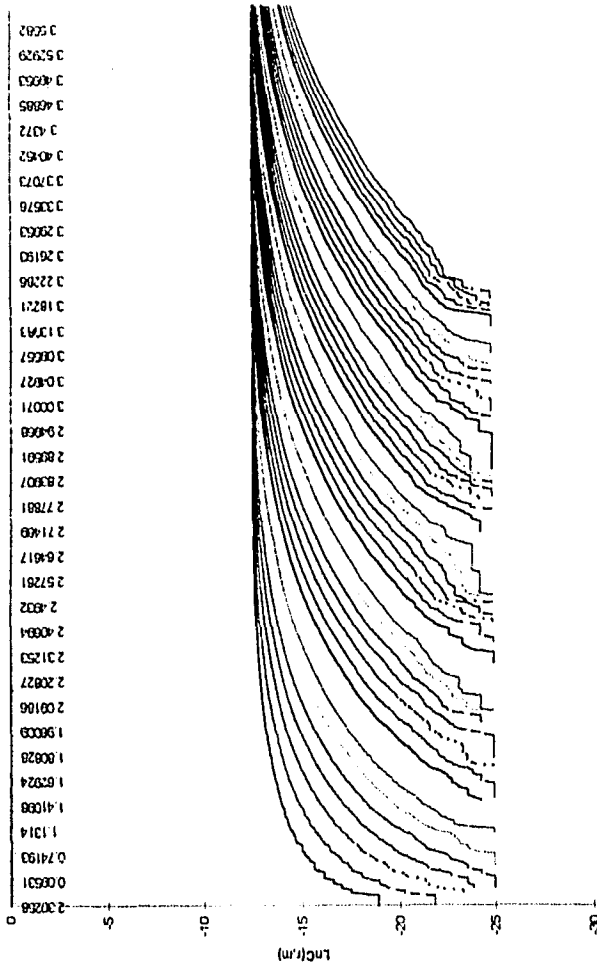
TLAXCO TAO=1 DIA (RADIOS=0.01)



GRAFICA 7

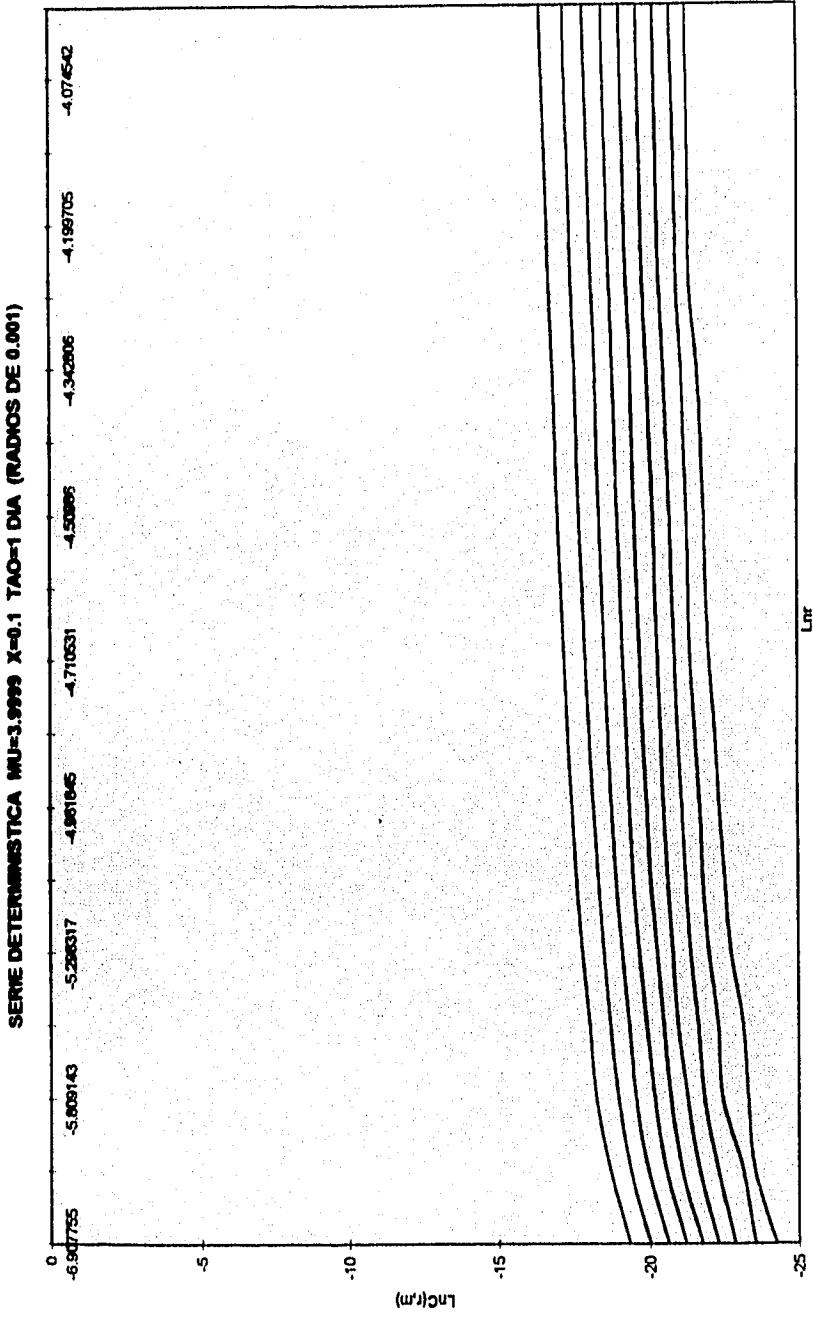
- Series1
- Series2
- Series3
- Series4
- Series5
- Series6
- Series7
- Series8
- Series9
- Series10
- Series11
- Series12
- Series13
- Series14
- Series15
- Series16
- Series17
- Series18
- Series19
- Series20
- Series21
- Series22
- Series23
- Series24
- Series25
- Series26
- Series27
- Series28
- Series29
- Series30
- Series31
- Series32
- Series33
- Series34
- Series35
- Series36
- Series37

TLAXCO ALEATORIO 2-47 (0.1)



Ln(r)

GRAFICA 8



GRAFICA 9