308417

18

UNIVERSIDAD PANAMERICANA

2ej

ESCUELA DE INGENIERIA
CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

GENERALIZACION DEL PRODUCTO VECTORIAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
AREA: INGENIERIA MECANICA

P R E S E N T A :

CARLOS FERNANDO DIEZ DE SOLLANO NAVARRO

DIRECTOR: ING. CLAUDIO PITA RUIZ VELASCO

MEXICO, D. F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

AL CREADOR
A QUIEN ME DEBO

A MIS PADRES, CARLOS Y MARÍA DE LOURDES
POR SU APOYO CONSTANTE E INCONDICIONAL
POR SU FE, PACIENCIA Y CARIÑO

A MIS HERMANOS
JUAN PABLO
ALFONSO MARÍA
MARÍA DE LOURDES

A MI MAESTRO DE ÁLGEBRA LINEAL
DR. ALEJANDRO LÓPEZ YAÑEZ
POR SU EXCELENTE CÁTEDRA
Y SU AMISTAD DESINTERESADA

A MI AMIGO Y PROFESOR
ING. CLAUDIO PITA RUIZ VELASCO
POR SU INVALUABLE GUÍA Y APOYO
POR LA CONFIANZA Y PACIENCIA CON QUE ME ACOMPAÑÓ
EN ESTE PROYECTO

INDICE

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN. El material que compone esta tesis fue elaborado para responder a la pregunta:

¿ Se puede o no definir una operación en $\mathbf{R}^n$ que tenga propiedades similares a las que posee el Producto Vectorial en $\mathbf{R}^3$?

Para el estudiante de ingeniería que cursa la materia de Álgebra Lineal en el segundo semestre de la carrera, esta pregunta no es trivial. De hecho, en esta materia, es la única operación que no puede concebir en $\mathbf{R}^n$, sino sólo en $\mathbf{R}^3$. La exposición del tema intenta ser transparente y emplea los conocimientos que posee todo estudiante al término del primer año de la carrera. Se procede por inducción y por analogía, motivando cada resultado, con la intención de proporcionar un material de carácter didáctico y no una simple exposición de resultados.

Subyace también la idea de sustentar la tesis más general de que el alumno de ingeniería es capaz de realizar investigación original en temas no cubiertos por las asignaturas. Se quiere destacar la necesidad de incrementar la cultura matemática del ingeniero, pues a sólo un lustro del siglo XXI no es exagerado afirmar que sus conocimientos matemáticos no rebasan el estado de la matemática del siglo XIX. Y es necesario, pues sólo así se le preparará para la investigación o en su caso, para incorporar a la industria los adelantos de la ciencia durante el ejercicio de su profesión.

1. GENERALIZACIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL

1.1. EL PRODUCTO VECTORIAL. El producto vectorial se le presenta al alumno como una operación que aplicada sobre dos vectores, **b** y **c**, en el espacio tridimensional, entrega como resultado un tercero, $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, el cual es perpendicular tanto a **b** como a **c**. Esta operación se define normalmente en forma explícita para el resultado, con observaciones que dependen del autor. El esquema general de estas definiciones y sus observaciones se puede resumir como sigue:

Definición 1 [Producto Vectorial]. *Dados* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ *y* $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ *en el espacio tridimensional, se define su Producto Vectorial* $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ *como*

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{bmatrix}$$

Observación 1. *Se puede reescribir este resultado mediante la base canónica* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$*:*

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Entonces se identifica la parte derecha de esta expresión con el desarrollo por cofactores, a lo largo del primer renglón, del siguiente "determinante"

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Este simbolismo es tan fácil de recordar que en ocasiones se presenta, incorrectamente, como la definición del producto vectorial.

Observación 2. *Si se quiere evitar el simbolismo anterior se nota que las componentes de* $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ *escritas como determinantes*

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \left[\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right]$$

pueden obtenerse del siguiente arreglo

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

de donde se retira la i-ésima columna para obtener una matriz de 2×2 *cuyo determinante multiplicado por* $(-1)^{i+1}$ *es la i-ésima componente del producto vectorial.*

La interpretación geométrica es simple:

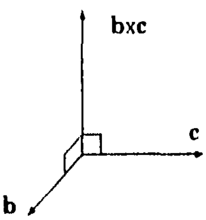

Figura 1

Las observaciones son importantes pues le dan al alumno una cierta noción de orden en una operación de apariencia caótica. A continuación un ejemplo con los vectores

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces, según la definición

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0(0) - 3(1) & 3(0) - 1(0) & 1(1) - 0(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o bien según la primer observación

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{k} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y de acuerdo con la última

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \square & 0 & 3 \\ \square & 1 & 0 \end{vmatrix}, (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & \square & 3 \\ 0 & \square & 0 \end{vmatrix}, (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & \square \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por último se verifica que $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ es normal tanto a $\mathbf{b}$ como a $\mathbf{c}$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 1(-3) + 0(0) + 3(1) = 0$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0(-3) + 1(0) + 0(1) = 0$$

Después de asimilar la definición y sus observaciones resulta natural preguntarse si dados $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{R}^4$ se puede definir una operación " $\mathbf{b} \times \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ " cuyo resultado sea ortogonal a $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$. Retomando la idea del determinante se hace la prueba con los siguientes vectores

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y se propone

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}\times\mathbf{d}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\mathbf{e}_1-\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}\mathbf{e}_2+\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}\mathbf{e}_3-\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}\mathbf{e}_4$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}\mathbf{e}_4=-\left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\right)\mathbf{e}_4=-(1-9)\,\mathbf{e}_4=8\mathbf{e}_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

resultado que a todas luces es ortogonal a sus argumentos.

Por analogía y de una manera más general se escribe el "determinante"

$$\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4\end{vmatrix}$$

que representa al vector

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}\times\mathbf{d}=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4\\ c_2 & c_3 & c_4\\ d_2 & d_3 & d_4\end{vmatrix}\mathbf{e}_1-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_3 & c_4\\ d_1 & d_3 & d_4\end{vmatrix}\mathbf{e}_2+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_4\\ d_1 & d_2 & d_4\end{vmatrix}\mathbf{e}_3-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ d_1 & d_2 & d_3\end{vmatrix}\mathbf{e}_4$$

donde $\left\{\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_4\right\}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^4$; se señala que sus componentes pueden obtenerse del arreglo

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4\end{bmatrix}$$

de donde se retira la i-ésima columna para obtener una matriz de 3×3 cuyo determinante, multiplicado por $(-1)^{i+1}$ es la i-ésima componente de $\mathbf{b}\times\mathbf{c}\times\mathbf{d}$.

Falta ver que efectivamente este vector que se ha representado por $\mathbf{b}\times\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ es ortogonal a $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$. Para esto se calcula $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\times\mathbf{d})$

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4\\ c_2 & c_3 & c_4\\ d_2 & d_3 & d_4\end{vmatrix}b_1-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_3 & c_4\\ d_1 & d_3 & d_4\end{vmatrix}b_2+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_4\\ d_1 & d_2 & d_4\end{vmatrix}b_3-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ d_1 & d_2 & d_3\end{vmatrix}b_4$$

el lado derecho puede ser identificado como el desarrollo por cofactores de un determinante con dos renglones idénticos

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual se prueba la ortogonalidad de $\mathbf{b}$ con $\mathbf{b}\times\mathbf{c}\times\mathbf{d}$.

De la misma manera se encuentra que $\mathbf{c}\perp(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ y $\mathbf{d}\perp(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\times\mathbf{d})$.

Ya que se ha tenido suerte en el primer intento, resulta atractivo pensar que dados $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}\in\mathbf{R}^n$ es posible definir una operación $\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2\times\cdots\times\mathbf{b}_{n-1}$ tal que $\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2\times\cdots\times\mathbf{b}_{n-1}\perp\mathbf{b}_i\quad\forall\, i=1,\ldots,n-1$. Esquemáticamente

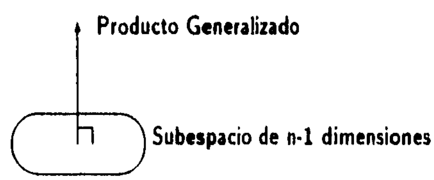

Figura 2

De nueva cuenta se escribe

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

que representa a su vez el vector

$$\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \times \cdots \times \mathbf{b}_{n-1} = \begin{vmatrix} b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \cdots + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \mathbf{e}_n$$

donde $\left\{ \mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \cdots, \ \mathbf{e}_n \right\}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^n$; se señala que las componentes de $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \times \cdots \times \mathbf{b}_{n-1}$ pueden obtenerse de la matriz de orden $(n-1) \times n$

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

al retirar la i-ésima columna para obtener una matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ cuyo determinante multiplicado por $(-1)^{i+1}$ es la i-ésima componente de $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \times \cdots \times \mathbf{b}_{n-1}$.

Demostrar que $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \times \cdots \times \mathbf{b}_{n-1} \perp \mathbf{b}_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, n-1$ no es difícil pues calcando el procedimiento que se emplea en el caso de $\mathbf{R}^4$ se puede prever que

$$\mathbf{b}_i \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \times \cdots \times \mathbf{b}_{n-1}) = \begin{vmatrix} b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,n} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n-1$$

Ahora se harán algunas precisiones

1. En estos ejemplos se ha preservado la notación cruz $(\times)$ del producto vectorial originalmente definido en $\mathbf{R}^3$, lo cual puede generar cierta confusión. Por ejemplo, en $\mathbf{R}^3$ las expresiones $\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ y $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{d}$ tienen sentido y por lo general son diferentes, pero $\mathbf{b} \times \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ no posee sentido alguno; en cambio en $\mathbf{R}^4$ las dos primeras no tienen sentido y la última sí adquiere significado.

2. De lo anterior se desprende que al generalizar el Producto Vectorial éste pierde su principal característica, precisamente la de ser un producto, entendido este último como una operación binaria. A esta generalización se le llamará Producto Vectorial Generalizado con el propósito de establecer su relación con el Producto Vectorial, que es a final de cuentas su caso particular más importante.

3. Sobre la notación se debe decir que la cruz $(\times)$ resulta adecuada cuando se trabaja en $\mathbf{R}^n$ con $n \geq 3$ pero deja un vacío para el caso $n = 2$. Para superar esto se puede emplear la notación de paréntesis cuadrados [,] que también es de uso común en $\mathbf{R}^3$. Por ejemplo, sean $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$, y $\left\{ \mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2 \right\}$ la base canónica de $\mathbf{R}^2$, entonces su producto vectorial generalizado será (simbólicamente):

$$[\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{b} \cdot [\mathbf{b}] = b_1 (b_2) + b_2 (-b_1) = 0$$

1.2. EL PRODUCTO VECTORIAL GENERALIZADO. Con estos elementos se aventurará a definir una nueva operación que se llamará Producto Vectorial Generalizado para después comparar sus propiedades con las del Producto Vectorial. Esta nueva operación tomará $n - 1$ vectores de $\mathbf{R}^n$ y dará como resultado un vector, también en $\mathbf{R}^n$.

Notación.- A lo largo de esta tesis se denotarán:

- Escalares mediante letras itálicas, n.
- Vectores mediante negritas, $\mathbf{b}$.
- Productos interiores mediante paréntesis, $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, o bien $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2$

Definición 2 [Producto Vectorial Generalizado]. *Dados $n-1$ vectores $\mathbf{b}_i \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, digamos $\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,n} \end{bmatrix}$ con $i = 1, ..., n-1$, se define su Producto Vectorial Generalizado $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] \in \mathbf{R}^n$ como el vector*

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \begin{vmatrix} b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,i-1} & b_{1,i+1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,i-1} & b_{n-1,i+1} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} \mathbf{e}_i + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \mathbf{e}_n$$

donde $\left\{ \mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \cdots, \ \mathbf{e}_n \right\}$ *es la base canónica de* $\mathbf{R}^n$.

Observación 3. *Se identifica la parte derecha de esta expresión con el desarrollo por cofactores, a lo largo del primer renglón, del siguiente "determinante"*

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

que se usará como recurso nemotécnico exclusivamente.

Observación 4. *Para evitar el simbolismo anterior se nota que las componentes de* $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]$ *pueden obtenerse del siguiente arreglo*

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

de donde se retira la i-ésima columna para obtener una matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ *cuyo determinante multiplicado por* $(-1)^{i+1}$ *es la i-ésima componente del producto vectorial.*

Observación 5. *Desde el principio de esta tesis se ha escrito al menos un determinante por página. Es más, de acuerdo con la última definición, cada coordenada del producto vectorial generalizado es un determinante. Esta última observación es importante pues se discutirá brevemente cómo llegar a una expresión compacta al asociar cada determinante con un producto interior. Se reescribe el Producto Vectorial Generalizado mediante una sumatoria*

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,i-1} & b_{1,i+1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,i-1} & b_{n-1,i+1} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} \mathbf{e}_i$$

y de nuevo se asocia el determinante de $(n-1) \times (n-1)$ con signo, con la expansión de un determinante de $n \times n$

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{1,1} & \cdots & b_{1,i-1} & b_{1,i} & b_{1,i+1} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,i-1} & b_{2,i} & b_{2,i+1} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,i-1} & b_{n-1,i} & b_{n-1,i+1} & & b_{n-1,n} \end{vmatrix} \mathbf{e}_i$$

Es decir que la i-ésima componente de $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]$ *está dada por*

$$(\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{1,1} & \cdots & b_{1,i-1} & b_{1,i} & b_{1,i+1} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,i-1} & b_{2,i} & b_{2,i+1} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,i-1} & b_{n-1,i} & b_{n-1,i+1} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

y se concluye

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\, \mathbf{e}_i$$

2. PROPIEDADES

El análisis de las propiedades es sugerido directamente por las propiedades del Producto Vectorial. En este proceso se encontrará una relación verdaderamente íntima entre el producto vectorial generalizado, los determinantes y el producto interior. Se destacará principalmente el Producto Mixto Escalar, una generalización del Triple Producto Escalar, en donde se fusionan los tres conceptos y que será fundamental para los desarrollos; con él se fortalecerá la última observación y se verá cómo, de sus propiedades, se siguen de una manera natural las del producto vectorial generalizado. Cuando sea oportuno se ofrecerá una interpretación adicional en términos de determinantes. Como introducción se revisarán las propiedades del producto cruz y después, siguiendo la misma lógica, las del caso general.

2.1. CERRADURA. Esta propiedad está establecida desde la definición del producto vectorial generalizado, pero aún así se enunciará un teorema acerca de ella.

Teorema 1 [Cerradura]. *Dados* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, *su Producto Vectorial Generalizado pertenece al mismo espacio n-dimensional*

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] \in \mathbf{R}^n$$

Demostración. De la definición se desprende que

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{e}_i$$

donde los $k_i \in \mathbf{R}$ son ciertas constantes. Por la propiedad de cerradura del producto de un escalar por un vector se tiene que $k_i \mathbf{e}_i \in \mathbf{R}^n$ y como la suma de vectores posee también la propiedad de cerradura, se concluye que

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] \in \mathbf{R}^n$$

con lo que queda demostrada la propiedad de cerradura del producto vectorial generalizado. □

2.2. EL PRODUCTO MIXTO ESCALAR. En el siguiente ejemplo se tienen los vectores

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

cuyo producto vectorial es (según se calculó anteriormente)

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se desea el producto interior de éste con cualquier otro vector, por decir

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

su cálculo es muy simple, a saber

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = -3(-3) + 2(0) + 3(1) = 9 + 0 + 3 = 12$$

El hecho de emplear directamente el resultado de $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ no aporta mucho al problema planteado; pero si se intenta usar la siguiente expresión que se maneja en el cálculo de $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

se obtiene algo más

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = -3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Este resultado es interesante pues dice que es posible calcular un producto interior mediante un determinante

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

Esta operación se conoce como Triple Producto Escalar, el cual se estudiará de una manera más general.

El Triple Producto Escalar se obtiene como sigue: dados $\mathbf{u}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbf{R}^3$ donde $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} b_{i,1} & b_{i,2} & b_{i,3} \end{bmatrix}$ $i = 1,2$, el Triple Producto Escalar de los tres vectores está dado por el producto interior

$$(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_i (\mathbf{e}_j, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]) (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{3} u_i (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]) =$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{vmatrix}$$

donde se conjugan las tres operaciones mencionadas anteriormente en una sola

$$(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{vmatrix}$$

Otro ejemplo, ahora en $\mathbf{R}^4$. Se proponen de nuevo los vectores

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

cuyo producto vectorial generalizado está dado por

$$[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}] = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_4$$

de nuevo, su producto punto con $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ puede expresarse mediante un determinante

$$(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 24$$

resultado que se puede verificar pues $[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ y

$$(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]) = -1(0) - 3(0) + 2(0) + 3(8) = 24$$

Más adelante se dará una interpretación geométrica de esta operación.

Para el caso general se procederá por analogía. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ $n \geq 2$ con $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,n} \end{bmatrix}$ $i = 1, \ldots n-1$. Se reescribe el vector $\mathbf{u}$ como sigue

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i$$

y se procede a calcular el producto interior

$$\left(\mathbf{u}, \left[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}\right]\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} u_j \mathbf{e}_j \, , \, \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,i-1} & b_{1,i+1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,i-1} & b_{n-1,i+1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \mathbf{e}_i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,i-1} & b_{1,i+1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,i-1} & b_{n-1,i+1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix} u_j \left(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,i-1} & b_{1,i+1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,i-1} & b_{n-1,i+1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix} u_i$$

y tal como se hizo anteriormente, se identifica el lado derecho de esta expresión con el desarrollo por cofactores, a lo largo del primer renglón, del siguiente determinante:

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

fórmula que servirá para enunciar la siguiente

Definición 3 [Producto Mixto Escalar]. *Dados* $\mathbf{u}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, *con* $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$ *y* $\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,n} \end{bmatrix}$ $i = 1, \ldots n-1$, *se define su Producto Mixto Escalar como el producto interior de* $\mathbf{u}$ *y* $\left[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}\right]$, *el cual tiene la siguiente expresión*

$$\left(\mathbf{u}, \left[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}\right]\right) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

El Producto Mixto Escalar puede interpretarse geométricamente (gracias a que es un determinante) como el volumen del "paralelepípedo" n-dimensional cuyas aristas principales son los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}$. En el caso bidimensional se tiene el área de un paralelogramo:

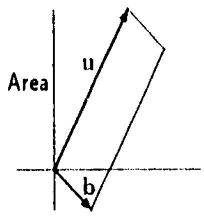

Figura 3

Y en el caso tridimensional se trata del volumen de un paralelepípedo

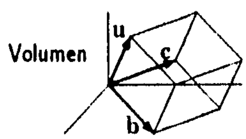

Figura 4

Todo esto sin perder de vista el sentido geométrico del producto interior

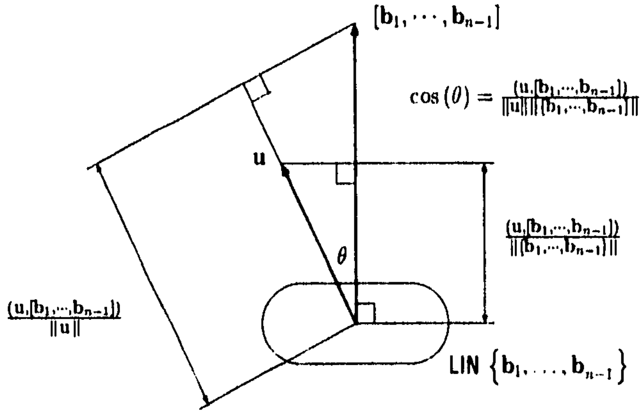

Figura 5

Corolario 1. *La definición del Producto Mixto Escalar refuerza la observación* (5) *donde la i-ésima componente del Producto Vectorial Generalizado es un Producto Mixto Escalar*

$$(\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{1,1} & \cdots & b_{1,i-1} & b_{1,i} & b_{1,i+1} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,i-1} & b_{2,i} & b_{2,i+1} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,i-1} & b_{n-1,i} & b_{n-1,i+1} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

y se concluye

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\, \mathbf{e}_i$$

2.3. PROPIEDADES BÁSICAS. En este punto se dará un repaso informal a ciertas propiedades del triple producto escalar y de ellas se deducirán las propiedades equivalentes del producto vectorial. Se empezará pues con la expresión del triple producto escalar

$$(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{vmatrix}$$

A continuación se manipula el determinante, por ejemplo, permutando renglones

$$(\mathbf{u},[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2]) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \end{vmatrix} = -(\mathbf{u},[\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_1])$$

¿Cómo se refleja esto en el producto vectorial?. Es inmediato que

$$[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2] = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i,[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2])\,\mathbf{e}_i = -\sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i,[\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_1])\,\mathbf{e}_i = -[\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_1]$$

Ahora se probará otra permutación, por ejemplo

$$(\mathbf{u},[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2]) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{3,1} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{3,1} \end{vmatrix} = -(\mathbf{b}_1,[\mathbf{u},\mathbf{b}_2])$$

Esta igualdad es útil en el siguiente caso

$$(\mathbf{u},[(p\mathbf{b}_1 + q\mathbf{a}),\mathbf{b}_2]) = -(p\mathbf{b}_1 + q\mathbf{a},[\mathbf{u},\mathbf{b}_2]) =$$

donde por las propiedades del producto punto y el resultado de permutar argumentos se obtiene

$$= -p(\mathbf{b}_1, [\mathbf{u}, \mathbf{b}_2]) - q(\mathbf{a}, [\mathbf{u}, \mathbf{b}_2]) = p(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]) + q(\mathbf{u}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}_2])$$

resultado que también puede obtenerse de los determinantes pues

$$(\mathbf{u}, [(p\mathbf{b}_1 + q\mathbf{a}), \mathbf{b}_2]) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ pb_{1,1} + qa_1 & pb_{1,2} + qa_2 & pb_{1,3} + qa_3 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{3,1} \end{vmatrix} =$$

$$= p \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{3,1} \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{3,1} \end{vmatrix} = p(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]) + q(\mathbf{u}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}_2])$$

Esto se refleja en el producto vectorial de forma transparente

$$[(p\mathbf{b}_1 + q\mathbf{a}), \mathbf{b}_2] = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i, [(p\mathbf{b}_1 + q\mathbf{a}), \mathbf{b}_2])\,\mathbf{e}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \{p(\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]) + q(\mathbf{e}_i, [\mathbf{a}, \mathbf{b}_2])\}\,\mathbf{e}_i =$$

$$= p \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2])\,\mathbf{e}_i + q \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{a}, \mathbf{b}_2])\,\mathbf{e}_i =$$

$$= p\,[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] + q\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}_2]$$

Con este enfoque informal se ha mostrado la razón por la cual se le dió importancia al producto mixto escalar.

Las propiedades que se consideran básicas son la permutación de los argumentos y la linealidad en un argumento. Como el Producto Mixto Escalar es a final de cuentas un determinante, se aprovechan algunos resultados que se conocen de éstos, como es el efecto de permutar dos renglones. Dos resultados inmediatos se tienen en el siguiente teorema que se basa en la permutación de dos renglones en un determinante,

Teorema 2 [Permutaciones-PME]. *Dados* $\mathbf{u}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, *se verifican la siguientes igualdades*

$$(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = -\left(\mathbf{b}_i, \left[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{u}, \mathbf{b}_{i+1}, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}\right]\right)$$

$$(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_j, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = -(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_j, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])$$

Demostración

$$(\mathbf{u},[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{n-1}]) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i-1,1} & b_{i-1,2} & b_{i-1,3} & \cdots & b_{i-1,n} \\ b_{i,1} & b_{i,2} & b_{i,3} & \cdots & b_{i,n} \\ b_{i+1,1} & b_{i+1,2} & b_{i+1,3} & \cdots & b_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

se permuta el primer renglón con el renglón de las componentes de $\mathbf{b}_i$

$$= - \begin{vmatrix} b_{i,1} & b_{i,2} & b_{i,3} & \cdots & b_{i,n} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i-1,1} & b_{i-1,2} & b_{i-1,3} & \cdots & b_{i-1,n} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ b_{i+1,1} & b_{i+1,2} & b_{i+1,3} & \cdots & b_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} = -\left(\mathbf{b}_i, \left[\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_{i-1},\mathbf{u},\mathbf{b}_{i+1},\cdots,\mathbf{b}_{n-1}\right]\right)$$

y así queda demostrada la primera afirmación. En cuanto a la segunda

$$(\mathbf{u},[\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_i,\cdots,\mathbf{b}_j,\cdots,\mathbf{b}_{n-1}]) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & b_{i,2} & b_{i,3} & \cdots & b_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j,1} & b_{j,2} & b_{j,3} & \cdots & b_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j,1} & b_{j,2} & b_{j,3} & \cdots & b_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & b_{i,2} & b_{i,3} & \cdots & b_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} = -(\mathbf{u},[\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_j,\cdots,\mathbf{b}_i,\cdots,\mathbf{b}_{n-1}])$$

permutando el renglón de $\mathbf{b}_i$ con el de $\mathbf{b}_j$. □

De este resultado hereda una propiedad similar el producto vectorial generalizado

Teorema 3 [Permutaciones-PVG]. *Dados* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, $n > 2$, *al permutar dos argumentos de* $[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]$ *se da la siguiente igualdad*

$$[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_j, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = -[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_j, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]$$

Demostración

$$[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_j, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{e}_k, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_j, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\, \mathbf{e}_k =$$

en virtud del teorema anterior

$$= \sum_{k=1}^{n} -(\mathbf{e}_k, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_j, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\, \mathbf{e}_k =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{e}_k, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_j, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\, \mathbf{e}_k = -[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_j, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]$$

con lo que queda demostrado el teorema. □

A continuación se explorará la linealidad del producto mixto escalar en un argumento del producto vectorial generalizado. Esta propiedad puede ser expresada a través de los determinantes o del producto interior más los resultados anteriores.

Teorema 4 [Linealidad-PME]. *Dados* $\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, *con* $p, q \in \mathbf{R}$, *existe linealidad en un argumento de* $[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]$ *en* $(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])$

$$(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, (p\mathbf{b}_i + q\mathbf{a}), \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = p(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) + q(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{a}, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])$$

Demostración

$$(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, (p\mathbf{b}_i + q\mathbf{a}), \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = -\left((p\mathbf{b}_i + q\mathbf{a}), [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{u}, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]\right) =$$

$$= -p(\mathbf{b}_i, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{u}, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) - q(\mathbf{a}, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{u}, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) =$$

$$= p(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) + q(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{a}, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])$$

Demostración [Alternativa]

$$(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, (p\mathbf{b}_i + q\mathbf{a}), \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ pb_{i,1} + qa_1 & pb_{i,2} + qa_2 & \cdots & pb_{i,n} + qa_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ pb_{i,1} & pb_{i,2} & \cdots & pb_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ qa_1 & qa_2 & \cdots & qa_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= p \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= p(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) + q(\mathbf{u}, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{a}, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])$$

□

La repercusión en el Producto Vectorial Generalizado se aprecia en el siguiente teorema.

Teorema 5 [Linealidad-PVG]. *Dados* $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, *con* $p, q \in \mathbf{R}$, *se tiene que* $[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]$ *es lineal en su i-ésimo argumento,* $i = 1, \ldots, n-1$

$$[\mathbf{b}_1, \cdots, (p\mathbf{b}_i + q\mathbf{a}), \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = p[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] + q[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{a}, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]$$

Demostración

$$[\mathbf{b}_1, \cdots, (p\mathbf{b}_i + q\mathbf{a}), \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{e}_k, [\mathbf{b}_1, \cdots, (p\mathbf{b}_i + q\mathbf{a}), \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\, \mathbf{e}_k =$$

que por el teorema anterior

$$= \sum_{k=1}^{n} \{p(\mathbf{e}_k, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) + q(\mathbf{e}_k, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{a}, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\}\, \mathbf{e}_k =$$

$$= p\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{e}_k, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\, \mathbf{e}_k + q\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{e}_k, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{a}, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\, \mathbf{e}_k =$$

$$= p[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] + q[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{a}, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]$$

lo que se quería demostrar.

□

Hasta el momento no se ha hablado sobre la magnitud del producto vectorial generalizado en las propiedades básicas. Esto se debe en parte a que es posible derivar diferentes expresiones de ella y que la mayoría de éstas no son precisamente triviales; por ahora se presentará el enfoque más simple y conforme se vaya ahondando en el estudio surgirán otras expresiones.

Teorema 6. *Dados* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, *la magnitud de* $[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]$ *está dada por*

$$\|[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])^2}$$

Demostración. Es trivial pues conocido el hecho de que $\|\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})$ se calcula

$$\|[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]\|^2 = ([\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}], [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\, \mathbf{e}_i\,,\ \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{e}_j, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\, \mathbf{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])(\mathbf{e}_j, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])(\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])^2$$

y resta únicamente tomar la raíz cuadrada de la expresión. □

2.4. APUNTES SOBRE ORTOGONALIDAD E INDEPENDENCIA LINEAL.

La motivación más fuerte que condujo a desarrollar esta operación fue precisamente la ortogonalidad; se ha pospuesto su estudio hasta ahora pues era necesario desarrollar un mínimo de propiedades que permitieran avanzar rápidamente en este tema. La primera avanzada es el asentar que el producto vectorial generalizado siempre es ortogonal a sus argumentos. Para esto se tomará el producto mixto escalar. El análisis es simple y da una idea de las propiedades tan fuertes que posee el producto mixto escalar; como ejemplo se considera el caso en $\mathbf{R}^3$

$$(\mathbf{b}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]) = \begin{vmatrix} b_{i,1} & b_{i,2} & b_{i,3} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{vmatrix} = 0 \qquad i = 1, 2$$

El razonamiento es de dos líneas:

1. Las propiedades relacionadas con los determinantes aseguran que la operación da siempre, como resultado, cero.

2. Este cero y las propiedades relacionadas con el producto interior aseguran que $\mathbf{b}_i \perp [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$ con $i = 1, 2$.

Ahora se está listo para enunciar el siguiente teorema

Teorema 7. *El Producto Vectorial Generalizado es ortogonal a sus argumentos, es decir,*

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] \perp \mathbf{b}_i \in \mathbf{R}^n, \; con \; n \geq 2, \quad i = 1, \ldots n-1.$$

Demostración. Se sabe que

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] \perp \mathbf{b}_i \iff (\mathbf{b}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = 0$$

Este último producto escalar es precisamente el producto mixto escalar, que se calcula en seguida

$$(\mathbf{b}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = \begin{vmatrix} b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,n} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} \quad \forall\, i = 1, \ldots n-1$$

El determinante es idénticamente igual a cero, pues posee al menos dos renglones iguales. Entonces

$$(\mathbf{b}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots n-1$$

y queda demostrada la afirmación.

□

La interpretación gráfica de este teorema es la siguiente

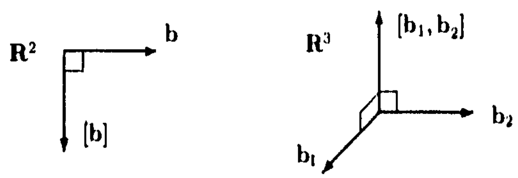

Figura 6

Corolario 2. *El Producto Vectorial Generalizado es ortogonal a cualquier combinación lineal de sus argumentos.*

Demostración. Es simple, pues si

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathbf{b}_i \qquad c_i \in \mathbf{R}$$

entonces

$$(\mathbf{u}\,,\ [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathbf{b}_i\,,\ \ [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} c_i\,(\mathbf{b}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = 0$$

gracias a las distributividades del producto interior y el teorema que se acaba de demostrar.

□

Gráficamente

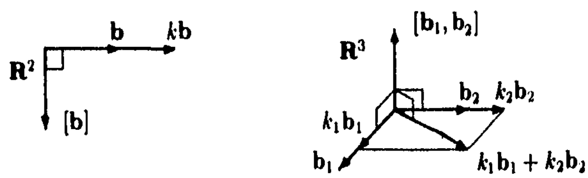

Figura 7

Ahora, apoyados de nueva cuenta en el producto mixto escalar, se estudiará el producto vectorial generalizado $[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]$ cuando $\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Un ejemplo. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbf{R}^4$ tales que $\mathbf{b}_1 = p\mathbf{b}_2 + q\mathbf{b}_3$ y $\mathbf{u}$ un vector cualquiera. Se calcula su producto mixto escalar

$$(\mathbf{u},\ [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) = -(\mathbf{b}_1,\ [\mathbf{u}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) =$$

$$= -(p\mathbf{b}_2 + q\mathbf{b}_3,\ [\mathbf{u}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) =$$

$$= -((0)\mathbf{u} + p\mathbf{b}_2 + q\mathbf{b}_3,\ [\mathbf{u}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) = 0$$

de acuerdo con el corolario del teorema anterior; con este resultado se procede de la manera usual

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = \sum_{i=1}^{4} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3])\, \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{4} (0)\, \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

es decir que el producto vectorial generalizado se anula cuando sus argumentos son linealmente dependientes. Es oportuno señalar que cuando se trabaje en $\mathbf{R}^2$ el conjunto $\{\mathbf{a}\}$ que se usará para calcular $[\mathbf{a}]$ será considerado linealmente dependiente cuando $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Se formalizarán estas ideas en los siguientes dos teoremas:

Teorema 8. *Dados* $\mathbf{u}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, *tales que* $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}\}$ *es un conjunto linealmente dependiente, se verifica la siguiente igualdad*

$$(\mathbf{u},\ [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = 0$$

Demostración. Como se ha asumido dependencia lineal de los vectores, existen las constantes $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \in \mathbf{R}$ no todas nulas tales que

$$k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2 + \cdots + k_{n-1}\mathbf{b}_{n-1} = \mathbf{0}$$

sin pérdida de generalidad sea $k_1 \neq 0$

$$\Longrightarrow \mathbf{b}_1 = -\frac{1}{k_1} \sum_{i=2}^{n-1} k_i \mathbf{b}_i = -\sum_{i=2}^{n-1} \frac{k_i}{k_1} \mathbf{b}_i$$

$$\Longrightarrow (\mathbf{u}\,,\ [\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{n-1}]) = \left(\mathbf{u}\,,\ \left[\left(-\sum_{i=2}^{n-1}\frac{k_i}{k_1}\mathbf{b}_i\right),\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{n-1}\right]\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{k_i}{k_1}\right)\mathbf{b}_i\,,\ [\mathbf{u},\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{n-1}]\right) = 0$$

por el corolario del teorema anterior.

□

Teorema 9. *Dados* $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}\in\mathbf{R}^n$, $n\geq 2$, *tales que* $\left\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}\right\}$ *es un conjunto linealmente dependiente, se cumple la siguiente identidad*

$$[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{n-1}] = \mathbf{0}$$

Demostración. Es inmediata pues $(\mathbf{e}_i,[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{n-1}]) = 0$ por la dependencia lineal de $\left\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}\right\}$ de acuerdo con el último teorema

$$\Longrightarrow\ [\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{n-1}] = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{e}_i,[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{n-1}])\,\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}(0)\,\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

y queda demostrado.

□

En el siguiente teorema se fortalece este resultado.

Teorema 10. *Dados* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, *se verifica la identidad*

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \mathbf{0}$$

si y solo si $\left\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}\right\}$ *es un conjunto linealmente dependiente.*

Demostración. La suficiencia está demostrada en el teorema anterior. Para demostrar la necesidad se procederá por reducción al absurdo. Se supone entonces que los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}$ son linealmente independientes. Entonces

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \mathbf{0} \Longrightarrow \|[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]\| = 0$$

$$\Longrightarrow \|[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])^2 = 0$$

$$\Longrightarrow (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])^2 = 0 \Longrightarrow (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) = 0 \qquad \forall \quad i = 1, \ldots, n$$

Se sabe que existe $\mathbf{b}_0 \in \mathbf{R}^n$ tal que $\left\{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}\right\}$ es una base de $\mathbf{R}^n$ (todo conjunto de $k \leq (n)$ vectores linealmente independientes en $\mathbf{R}^n$ puede ser extendido para completar una base del espacio) y por lo tanto

$$\begin{vmatrix} b_{0,1} & b_{0,2} & \cdots & b_{0,n} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} \neq 0$$

pero

$$\begin{vmatrix} b_{0,1} & b_{0,2} & \cdots & b_{0,n} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} = (\mathbf{b}_0, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]) =$$

$$= \left(\mathbf{b}_0\,,\ \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\,\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}])\,(\mathbf{b}_0, \mathbf{e}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (0)\,(\mathbf{b}_0, \mathbf{e}_i) = 0$$

que es una contradicción y descarta la viabilidad de nuestra hipótesis. Queda demostrada la necesidad.

□

Corolario 3. *Dado el conjunto linealmente independiente* $\left\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}\right\} \subset \mathbf{R}^n$, *los siguientes conjuntos son bases de* $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$

$$\left\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]\right\}$$

$$\left\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, -[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]\right\}$$

Un tema ineludible en el álgebra lineal es el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, el cual, como su nombre sugiere, ortonormaliza un conjunto de vectores; el producto vectorial generalizado no es un proceso de ortonormalizacion, únicamente toma n-1 vectores en $\mathbf{R}^n$ y entrega otro, ortogonal a ellos. Es interesante estudiar cómo se puede representar el producto vectorial generalizado en términos del proceso de Gram-Schmidt, sobre todo cuando se permite que éste opere sobre los argumentos de nuestra operación. En el siguiente teorema se explora dicha relación.

Corolario 3. *Dado el conjunto linealmente independiente* $\left\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}\right\} \subset \mathbf{R}^n$, *los siguientes conjuntos son bases de* $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$

$$\left\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]\right\}$$

$$\left\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, -[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]\right\}$$

Un tema ineludible en el álgebra lineal es el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, el cual, como su nombre sugiere, ortonormaliza un conjunto de vectores; el producto vectorial generalizado no es un proceso de ortonormalizacion, únicamente toma n-1 vectores en $\mathbf{R}^n$ y entrega otro, ortogonal a ellos. Es interesante estudiar cómo se puede representar el producto vectorial generalizado en términos del proceso de Gram-Schmidt, sobre todo cuando se permite que éste opere sobre los argumentos de nuestra operación. En el siguiente teorema se explora dicha relación.

Teorema 11. *Dados los vectores linealmente independientes* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, *con* $n \geq 2$, *se cumple*

$$[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \|\mathbf{b}_1\| \, \|\mathbf{b}_2 - proy_{U_1}\mathbf{b}_2\| \cdots \left\|\mathbf{b}_{n-1} - proy_{U_{n-2}}\mathbf{b}_{n-1}\right\| [\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-1}]$$

donde: (a) $U_i = \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_i\}$ *es la base ortonormal que genera el mismo subespacio que* $S_i = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_i\}$ *y se obtiene al aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a* S_i. *(b)* $proy_{U_{i-1}}\mathbf{b}_i = \sum_{1 \leq j \leq i-1} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{b}_i)\, \mathbf{u}_j$ *es la proyección de* $\mathbf{b}_i$ *sobre el subespacio generado por* U_i.

Demostración. Los elementos de U_i están relacionados con los de S_i mediante el proceso de Gram-Schmidt, esto da las siguientes igualdades:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}$$

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{b}_k - proy_{U_{k-1}}\mathbf{b}_k}{\left\|\mathbf{b}_k - proy_{U_{k-1}}\mathbf{b}_k\right\|} = \frac{\mathbf{b}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{b}_k)\, \mathbf{u}_j}{\left\|\mathbf{b}_k - proy_{U_{k-1}}\mathbf{b}_k\right\|}$$

donde los índices corren $1 < k \leq n - 1$. Se obtienen las siguientes expresiones

$$\mathbf{b}_1 = \|\mathbf{b}_1\| \, \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{b}_k = \left\| \mathbf{b}_k - proy_{U_{k-1}} \mathbf{b}_k \right\| \mathbf{u}_k + \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{b}_k)\, \mathbf{u}_j$$

por el momento sean

$$\mathbf{v}_1 = \| \mathbf{b}_1 \| \, \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$$

y en general

$$\mathbf{v}_k = \left\| \mathbf{b}_k - proy_{U_{k-1}} \mathbf{b}_k \right\| \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{w}_k = \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{b}_k)\, \mathbf{u}_j$$

de tal manera que $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1$ y $\mathbf{b}_k = \mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k$. Se calcula el producto generalizado

$$[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1), (\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2), \cdots, (\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1})] =$$

$$= [\mathbf{v}_1, (\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2), \cdots, (\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1})] + [\mathbf{w}_1, (\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2), \cdots, (\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1})]$$

donde el segundo producto se anula pues $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$; de nuevo se aprovecha la linealidad en un argumento

$$= [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, (\mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3), \cdots, (\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1})] + [\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, (\mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3), \cdots, (\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1})]$$

en el segundo producto $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{w}_2$ resultan ser linealmente dependientes pues

$$\mathbf{w}_2 = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{b}_2)\,\mathbf{u}_1 = \frac{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{b}_2)}{\|\mathbf{b}_1\|}\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_1 \qquad c \in \mathbf{R}$$

y este producto se anula; en general se encuentra que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w}_k\}$ es linealmente dependiente pues

$$\mathbf{w}_k = \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{b}_k)\,\mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{b}_k)}{\left\| \mathbf{b}_k - proy_{U_{k-1}}\mathbf{b}_k \right\|}\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{k-1} c_j\mathbf{v}_j \qquad c_j \in \mathbf{R}$$

y cada vez que se use la propiedad de linealidad para obtener dos productos, el segundo se anulará, ya que sus primeros k argumentos son linealmente dependientes, esto es:

$$\left[\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w}_k, (\mathbf{v}_{k+1} + \mathbf{w}_{k+1}), \cdots, (\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1})\right] = \mathbf{0}$$

así se encuentra que

$$[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = [\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{n-1}] =$$

$$= \left[\|\mathbf{b}_1\|\,\mathbf{u}_1\,,\ \|\mathbf{b}_2 - proy_{U_1}\mathbf{b}_2\|\,\mathbf{u}_2\,, \cdots,\ \left\|\mathbf{b}_{n-1} - proy_{U_{n-2}}\mathbf{b}_{n-1}\right\|\,\mathbf{u}_{n-1}\right] =$$

$$= \|\mathbf{b}_1\|\ \|\mathbf{b}_2 - proy_{U_1}\mathbf{b}_2\| \cdots \left\|\mathbf{b}_{n-1} - proy_{U_{n-2}}\mathbf{b}_{n-1}\right\|\ [\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-1}]$$

y queda demostrado lo que se quería. □

Corolario 4. *Como U_i genera el mismo subespacio que S_i*

$$[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = \|\mathbf{b}_1\| \; \|\mathbf{b}_2 - proy_{S_1}\mathbf{b}_2\| \cdots \left\|\mathbf{b}_{n-1} - proy_{S_{n-2}}\mathbf{b}_{n-1}\right\| \; [\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-1}]$$

Se completará este estudio en el siguiente capítulo, cuando se vea la identidad de Lagrange y se obtengan algunos resultados sobre transformaciones lineales.

3. PROPIEDADES AVANZADAS

3.1. LA IDENTIDAD DE LAGRANGE. Una de las identidades interesantes del producto vectorial es la llamada Identidad de Lagrange

$$([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \end{vmatrix}$$

cuya demostración generalmente se reduce a un ejercicio de álgebra. En espacios de dimensión superior se pueden encontrar identidades similares. Una expresión análoga en $\mathbf{R}^4$ sería:

$$([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3) \\ (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3) \end{vmatrix}$$

y en el caso general en $\mathbf{R}^n$ se puede establecer que:

$$([\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_{n-1}],[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots,\mathbf{b}_{n-1}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_{n-1}) \\ (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{b}_{n-1}) \end{vmatrix}$$

Para su demostración se enuncia el siguiente teorema que será el argumento central

Teorema 12. *Dados* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_i \in \mathbf{R}^n$, $i \in \mathbf{N}$, *tales que*

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1},\dots,a_{ij},\dots,a_{in})$$

$$\mathbf{b}_i = (b_{i1},\dots,b_{ij},\dots,b_{in})$$

se cumple la siguiente igualdad

$$(n-i)\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_i) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_i,\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_i,\mathbf{b}_i) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1) - a_{1j}b_{1j} & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_i) - a_{1j}b_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_i,\mathbf{b}_1) - a_{ij}b_{1j} & \cdots & (\mathbf{a}_i,\mathbf{b}_i) - a_{ij}b_{ij} \end{vmatrix}$$

Demostración. Se procederá por inducción; Existe base para inducir pues si $i = 1$

$$\sum_{j=1}^{n} |(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) - a_{1j}b_{1j}| = n\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{1j} = n\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) - (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = (n-1)(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$$

donde las barras de la sumatoria indican un determinante de 1×1. Como hipótesis de inducción se supone que se cumple para cierta i. Ahora se verifica que esto implique la validez del caso $i + 1$

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) - a_{1j}b_{1j} & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_i) - a_{1j}b_{ij} & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{i+1}) - a_{1j}b_{i+1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1) - a_{ij}b_{1j} & \cdots & (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) - a_{ij}b_{ij} & (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_{i+1}) - a_{ij}b_{i+1,j} \\ (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_1) - a_{i+1,j}b_{1j} & \cdots & (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_i) - a_{i+1,j}b_{ij} & (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_{i+1}) - a_{i+1,j}b_{i+1,j} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_i) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{i+1}) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) - a_{2j}b_{1j} & \cdots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_i) - a_{2j}b_{ij} & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_{i+1}) - a_{2j}b_{i+1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_1) - a_{i+1,j}b_{1j} & \cdots & (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_i) - a_{i+1,j}b_{ij} & (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_{i+1}) - a_{i+1,j}b_{i+1,j} \end{vmatrix} -$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{1j}b_{1j} & \cdots & a_{1j}b_{ij} & a_{1j}b_{i+1,j} \\ (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_i) & (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_i) & (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_{i+1}) \end{vmatrix} =$$

$$= (n-i)\,(\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1)\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_{i+1}) \end{vmatrix} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1}\,(n-i)\,(\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_{i+1})\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_i) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_i) \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_{i+1}) \end{vmatrix} =$$

$$= (n-i)\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_{i+1}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{i+1},\mathbf{b}_{i+1}) \end{vmatrix} =$$

$$= (n-(i+1))\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_{i+1}) \end{vmatrix}$$

□

Corolario 5. *Si $i = n-1$ tenemos*

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) - a_{1j}b_{1j} & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{n-1}) - a_{1j}b_{n-1,j} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_1) - a_{n-1,j}b_{1j} & \cdots & (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_{n-1}) - a_{n-1,j}b_{n-1,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{n-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_{n-1}) \end{vmatrix}$$

Con este corolario se tienen elementos suficientes para establecer la identidad generalizada de Lagrange.

Teorema 13 [Identidad de Lagrange]. *Dados $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, con $n \geq 2$ la identidad generalizada de Lagrange es*

$$([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{n-1}) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_{n-1}) \end{vmatrix}$$

Demostración. Reexpresando cada producto vectorial generalizado

$$([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ b_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,i} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & b_{11} & \cdots & b_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b_{1i} & \cdots & b_{n-1,i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{1n} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,i-1} & a_{n-1,i+1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n-1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1,i-1} & \cdots & b_{n-1,i-1} \\ b_{1,i+1} & \cdots & b_{n-1,i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1)-a_{1,i}b_{1,i} & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_{n-1})-a_{1,i}b_{n-1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{b}_1)-a_{n-1,i}b_{1,i} & \cdots & (\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{b}_{n-1})-a_{n-1,i}b_{n-1,i} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_{n-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{b}_{n-1}) \end{vmatrix}$$

de acuerdo con el corolario del teorema anterior. □

Corolario 6. *Expresando cada producto interior como*

$$(\mathbf{a}_p,\mathbf{b}_q)=\|\,\mathbf{a}_p\|\;\|\,\mathbf{b}_q\|\cos(\theta_{pq})$$

donde θ_{pq} es el ángulo entre $\mathbf{a}_p$ y $\mathbf{b}_q$ se obtiene la siguiente expresión

$$([\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}]\,,[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}])=\begin{vmatrix} \cos\theta_{11} & \cdots & \cos\theta_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \cos\theta_{n-1,1} & \cdots & \cos\theta_{n-1,n-1} \end{vmatrix}\prod_{i=1}^{n-1}\|\,\mathbf{a}_i\|\;\|\,\mathbf{b}_i\|$$

Corolario 7. *Una aplicación inmediata de la Identidad de Lagrange se presenta en el cálculo de la magnitud del PVG, pues*

$$\|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]\|^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_{n-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_{n-1}) \end{vmatrix}$$

Corolario 8. *Sea* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$ *una base ortonormal de* $\mathbf{R}^n$, *entonces*

$$\|[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}]\| = 1$$

Es más, se puede ver que $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}] = \pm\, \mathbf{u}_n$. La determinación del signo se hará cuando se estudien las transformaciones lineales. Mientras, se retoma el último teorema del capítulo anterior para obtener otra expresión de la magnitud del PVG.

Corolario 9. *Sean* $S = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n\}$ *una base cualquiera de* $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, *y* $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$ *la base ortonormal que se obtiene al aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a* S, *entonces, de acuerdo con el teorema (11)*

$$\|[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}]\| = \|\mathbf{b}_1\| \; \|\mathbf{b}_2 - proy_{S_1}\mathbf{b}_2\| \cdots \left\|\mathbf{b}_{n-1} - proy_{S_{n-2}}\mathbf{b}_{n-1}\right\|$$

o bien

$$\| [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] \| = \| \mathbf{b}_1 \| \; \| \mathbf{b}_2 - proy_{U_1} \mathbf{b}_2 \| \cdots \left\| \mathbf{b}_{n-1} - proy_{U_{n-2}} \mathbf{b}_{n-1} \right\|$$

Por último se ve otro tipo de producto, trivial, que por su aspecto recuerda la identidad de Lagrange.

Teorema 14. *Dados* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbf{R}^n \quad n \geq 2$

$$(\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]) \; (\mathbf{b}_1, [\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_n) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \end{vmatrix}$$

Demostración. Se limita a una simple multiplicación de determinantes

$$(\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]) \; (\mathbf{b}_1, [\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n]) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_n) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \end{vmatrix}$$

□

3.2. TRANSFORMACIONES LINEALES. Las transformaciones lineales que se estudiarán son aquéllas representables mediante matrices cuadradas

$$T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

donde $Tx = Ax$ con $x \in \mathbf{R}^n$. Se utilizarán vectores columna en este desarrollo. Se emplearán, ocasionalmente, flechas en las matrices para asociar columnas o renglones con ciertos vectores, por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \leftarrow & \mathbf{a}_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \mathbf{a}_n & \rightarrow \end{bmatrix}$$

La motivación principal es determinar cuál es la relación que existe entre

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}] \qquad \text{y} \qquad [A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \ldots, A\mathbf{b}_{n-1}]$$

Se estudiará el caso en $\mathbf{R}^3$. Se calculan $A\mathbf{b}_1$ y $A\mathbf{b}_2$

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \leftarrow & \mathbf{a}_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{a}_2 & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{a}_3 & \rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \mathbf{b}_1 \\ \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1) \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \leftarrow & \mathbf{a}_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{a}_2 & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{a}_3 & \rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \mathbf{b}_2 \\ \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \\ (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2) \end{bmatrix}$$

de donde

$$[A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2] = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i, [A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2])\, \mathbf{e}_i =$$

$$= \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2) \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2) \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 =$$

reexpresando cada coeficiente mediante una identidad de Lagrange

$$= ([\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2])\, \mathbf{e}_1 - ([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2])\, \mathbf{e}_1 + ([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2])\, \mathbf{e}_1$$

Se estudiará el caso en $\mathbf{R}^3$. Se calculan $A\mathbf{b}_1$ y $A\mathbf{b}_2$

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \leftarrow & \mathbf{a}_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{a}_2 & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{a}_3 & \rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \mathbf{b}_1 \\ \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1) \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \leftarrow & \mathbf{a}_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{a}_2 & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{a}_3 & \rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \mathbf{b}_2 \\ \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \\ (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2) \end{bmatrix}$$

de donde

$$[A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2] = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i, [A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2])\, \mathbf{e}_i =$$

$$= \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2) \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2) \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 =$$

reexpresando cada coeficiente mediante una identidad de Lagrange

$$= ([\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2])\, \mathbf{e}_1 - ([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2])\, \mathbf{e}_1 + ([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2])\, \mathbf{e}_1$$

es decir

$$[A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2] = \begin{pmatrix} \leftarrow & [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] & \rightarrow \\ \leftarrow & -[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3] & \rightarrow \\ \leftarrow & [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] & \rightarrow \end{pmatrix} [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$$

Como se ha visto, la identidad de Lagrange resultó ser el concepto toral detrás de esta igualdad y probablemente sea ésta su aplicación más clara.

Teorema 15. *Dados los vectores* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, *con* $n \geq 2$ *y la matriz* $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ *de una cierta transformación lineal se cumple la siguiente igualdad*

$$[A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_{n-1}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]^T \\ \vdots \\ (-1)^{i+1}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n]^T \\ \vdots \\ (-1)^{n+1}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]^T \end{pmatrix} [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}]$$

donde $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})^T$ *y las* a_{jk} *son elementos de* A.

Demostración. Se calcula la i-ésima componente

$$(-1)^{i+1}([\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n], [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}]) =$$

$$
= (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{n-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}_{n-1}) \\ (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_{n-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_{n-1}) \end{vmatrix} =
$$

$$
= (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{n-1}) & \cdots & (\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}_{n-1}) & (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_{n-1}) & \cdots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_{n-1}) \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{n-1}) & \cdots & (\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}_{n-1}) & (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_{n-1}) & (\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_{n-1}) & \cdots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_{n-1}) \end{vmatrix} =
$$

$$
= (\mathbf{e}_i, [A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_{n-1}])
$$

□

Teorema 16. *Sea $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, cuyos elementos a_{jk} son también elementos de los vectores $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})^T$. Entonces la matriz que aparece en el teorema anterior* *es la matriz de cofactores de A, es decir*

$$cof\,(A) = \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]^T \\ \vdots \\ (-1)^{i+1}\,[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n]^T \\ \vdots \\ (-1)^{n+1}\,[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]^T \end{pmatrix}$$

Demostración. Puesto que $adj\,(A) = (cof\,(A))^T$, la comprobación se realiza mediante el siguiente producto:

$$A\,adj\,(A) = \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{a}_1^T \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{a}_i^T \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{a}_n^T \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]^T \\ \vdots \\ (-1)^{i+1}\,[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n]^T \\ \vdots \\ (-1)^{n+1}\,[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]^T \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [\mathbf{a}_2, \ , \mathbf{a}_n] & (-1)^{i+1}[\mathbf{a}_1, \ , \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ , \mathbf{a}_n] & (-1)^{n+1}[\mathbf{a}_1, \ , \mathbf{a}_{n-1}] \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, \ , \mathbf{a}_n]) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{i+1}(\mathbf{a}_i, [\mathbf{a}_1, \ , \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ , \mathbf{a}_n]) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1}(\mathbf{a}_n, [\mathbf{a}_1, \ , \mathbf{a}_{n-1}]) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, \ , \mathbf{a}_n]) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & (\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, \ , \mathbf{a}_n]) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & (\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, \ , \mathbf{a}_n]) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det(A) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix}$$

pues $(-1)^{k+1}(\mathbf{a}_i,[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{a}_{k+1},\ldots,\mathbf{a}_n]) = (-1)^{k+1}(-1)^{k-1}(\mathbf{a}_1,[\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n]) =$ $\det(A)$. Se concluye que se trata de la matriz de cofactores de A. □

Corolario 10. *Las siguientes igualdades son válidas*

$$[A\mathbf{b}_1,\ldots,A\mathbf{b}_{n-1}] = adj\left(A^T\right)[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}]$$

Si $\det(A) \neq 0$ *entonces*

$$[A\mathbf{b}_1,\ldots,A\mathbf{b}_{n-1}] = \frac{\left(A^T\right)^{-1}}{\det(A)}[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}]$$

Si $\det(A) \neq 0$ *y además* A *es simétrica*

$$[A\mathbf{b}_1,\ldots,A\mathbf{b}_{n-1}] = \frac{A^{-1}}{\det(A)}[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}]$$

Si A es ortogonal

$$[A\mathbf{b}_1,\ldots,A\mathbf{b}_{n-1}] = \frac{A}{\det(A)}[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}]$$

Si A es una rotación

$$[A\mathbf{b}_1,\ldots,A\mathbf{b}_{n-1}] = A[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}]$$

Teorema 17. *Sea $U = \{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{n-1},\mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbf{R}^n$, entonces*

$$[\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{n-1}] = (-1)^{n+1}\det(O)\ \mathbf{u}_n$$

donde O es una matriz de orden $n\times n$, cuya i-ésima columna es el vector $\mathbf{u}_i$, $1\leq i\leq n$.

Demostración. La matriz O es la matriz que transforma la base canónica en la base U. Del corolario anterior se desprende que

$$[\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{n-1}] = [O\mathbf{e}_1,\ldots,O\mathbf{e}_{n-1}] = \frac{O}{\det(O)}[\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1}] = \det(O)\,O\,[\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1}]$$

pues $\det(O) = \pm 1$. Ahora se calcula

$$[\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1}] = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{e}_i,[\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1}])\,\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_n,[\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1}])\,\mathbf{e}_n =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{e}_n = (-1)^{n+1}\,\mathbf{e}_n$$

Entonces

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}] = (-1)^{n+1} \det(O)\, O\mathbf{e}_n = (-1)^{n+1} \det(O)\; \mathbf{u}_n$$

lo que se quería demostrar. □

Corolario 11. *Según la definición de producto mixto escalar se tiene*

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}] = (\mathbf{u}_n, [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}])\; \mathbf{u}_n$$

Corolario 12. *Sean* $S = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n\}$ *una base cualquiera de* $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, *y* $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\}$ *la base ortonormal que se obtiene al aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a* S, *entonces, de acuerdo con el teorema (11)*

$$[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_{n-1}] = (\mathbf{u}_n, [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}])\; \|\mathbf{b}_1\|\; \|\mathbf{b}_2 - proy_{S_1}\mathbf{b}_2\| \cdots \left\|\mathbf{b}_{n-1} - proy_{S_{n-2}}\mathbf{b}_{n-1}\right\|\; \mathbf{u}_n$$

o bien

$$[\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_{n-1}] = (\mathbf{u}_n, [\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{n-1}])\ \|\mathbf{b}_1\|\ \|\mathbf{b}_2 - proy_{U_1}\mathbf{b}_2\| \cdots \left\|\mathbf{b}_{n-1} - proy_{U_{n-2}}\mathbf{b}_{n-1}\right\| \mathbf{u}_n$$

Por último, se puede pensar en obtener alguna expresión similar que relacione las magnitudes de ambos productos vectoriales generalizados. Sobre este particular no se enunciará teorema alguno pero sí se estudiará un caso particular para dar luz sobre este punto. Se considera la siguiente matriz de determinante nulo

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{(n-1)\times(n-1)} & 0_{(n-1)\times 1} \\ 0_{1\times(n-1)} & 0_{1\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow & \mathbf{a}_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \mathbf{a}_{n-1} & \rightarrow \\ \leftarrow & \mathbf{0} & \rightarrow \end{pmatrix}$$

y los vectores $\mathbf{b}_i = (b_{i1},\ldots,b_{i,n-1},0)$ con $i = 1,\ldots,n-1$ entonces

$$[A\mathbf{b}_1,\ldots,A\mathbf{b}_{n-1}] = \begin{pmatrix} \leftarrow & \mathbf{0} & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \mathbf{0} & \rightarrow \\ \leftarrow & (-1)^{n+1}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}]^T & \rightarrow \end{pmatrix} [\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}] =$$

$$= (-1)^{n+1}\left([\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}], [\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}]\right)\mathbf{e}_n =$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{n-1}) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_{n-1}) \end{vmatrix} \mathbf{e}_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \left(\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{b}}_1\right) & \cdots & \left(\overline{\mathbf{a}}_{n-1}, \overline{\mathbf{b}}_1\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{b}}_{n-1}\right) & \cdots & \left(\overline{\mathbf{a}}_{n-1}, \overline{\mathbf{b}}_{n-1}\right) \end{vmatrix} \mathbf{e}_n$$

donde los vectores $\overline{\mathbf{a}}_i \in \mathbf{R}^{n-1}$ estan formados por los primeros n-1 elementos de $\mathbf{a}_i$, es decir que $\overline{\mathbf{a}}_i^T$ es el i-ésimo renglón de $\overline{A}_{(n-1)\times(n-1)}$, y los vectores $\overline{\mathbf{b}}_i \in \mathbf{R}^{n-1}$ están compuestos por los primeros n-1 elementos de $\mathbf{b}_i$. De acuerdo con el último teorema dado en la sección de la identidad de Lagrange, se tiene

$$= (-1)^{n+1} \left(\overline{\mathbf{a}}_1, [\overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_{n-1}]\right) \left(\overline{\mathbf{b}}_1, \left[\overline{\mathbf{b}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{b}}_{n-1}\right]\right) \mathbf{e}_n =$$

$$= (-1)^{n+1} \left(\det \overline{A}\right) \begin{vmatrix} \leftarrow & \overline{\mathbf{b}}_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & \overline{\mathbf{b}}_{n-1} & \rightarrow \end{vmatrix} \mathbf{e}_n = \left(\det \overline{A}\right) \begin{vmatrix} \leftarrow & \mathbf{0} & \rightarrow & 1 \\ \leftarrow & \overline{\mathbf{b}}_1 & \rightarrow & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ \leftarrow & \overline{\mathbf{b}}_{n-1} & \rightarrow & 0 \end{vmatrix} \mathbf{e}_n =$$

$$= \left(\det \overline{A}\right) [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}]$$

Se ha encontrado que

$$[A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_{n-1}] = \left(\det \overline{A}\right) [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}]$$

que implica

$$\|[A\mathbf{b}_1,\ldots,A\mathbf{b}_{n-1}]\| = \left\|\det \overline{A}\right\| \, \|[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}]\|$$

pero

$$\|[A\mathbf{b}_1,\ldots,A\mathbf{b}_{n-1}]\| \neq \|\det A\| \, \|[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}]\| = 0$$

3.3. RESULTADOS SOBRE PRODUCTOS COMPUESTOS. Los productos compuestos que se estudiarán aquí son del tipo

$$[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}]]$$

y es precisamente en estos productos donde se encuentra otra aplicación de la identidad de Lagrange. Como introducción se verá en $\mathbf{R}^3$ el producto

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]$$

Se observa que este vector es perpendicular al vector $[\mathbf{b},\mathbf{c}]$ y por ello pertenece al plano formado por $\mathbf{b},\mathbf{c}$, es decir que existen las constantes β,γ tales que

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

a continuación es posible hacer varias simplificaciones y consideraciones de índole geométrica (las cuales son de apariencia más o menos artificial para el alumno cuando las ve por primera vez) que conducirán al conocido resultado

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) + \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

La deducción de resultados similares en el caso general es más natural como se verá en el siguiente ejemplo en $\mathbf{R}^4$.

Dados $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbf{R}^4$ el vector

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]]$$

pertenece al subespacio formado por $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$, y por esta razón existen constantes $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, tales que

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3$$

además se sabe que $\mathbf{a}_i \perp [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]]$, propiedad que se aprovecha para los siguientes productos interiores

$$(\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]]) = \beta_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + \beta_2 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) + \beta_3 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3) = 0$$

$$(\mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]]) = \beta_1 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) + \beta_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) + \beta_3 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3) = 0$$

Si se forman los siguientes vectores en $\mathbf{R}^3$ (una dimensión menor que la original)

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = ((\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1), (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2), (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3))$$

$$\hat{\mathbf{a}}_2 = ((\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1), (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2), (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3))$$

$$\hat{\mathbf{b}} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

se estará en condiciones de reexpresar los productos interiores como sigue

$$(\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]]) = \left(\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{b}}\right) = 0$$

$$(\mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]]) = \left(\hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{b}}\right) = 0$$

Ahora se interpreta al vector $\hat{\mathbf{b}}$ como un vector perpendicular al plano formado por $\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2$, lo cual implica la existencia de una constante k tal que

$$\hat{\mathbf{b}} = k [\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2]$$

Para determinar el valor de esta constante se emplea la identidad de Lagrange. Sea

$\mathbf{a}_3 \in \mathbf{R}^4$ cualquier vector, se calcula

$$(\mathbf{a}_3, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]]) = -([\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3], [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = -([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) =$$

$$= -\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3) \\ (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3) \end{vmatrix} =$$

$$= -(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1)\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3) \end{vmatrix} + (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2)\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3) \end{vmatrix} - (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3)\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\mathbf{a}_3, -\sum_{j=1}^{3} (\hat{\mathbf{e}}_j, [\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2])\, \mathbf{b}_j\right)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ constituyen la base canónica de $\mathbf{R}^3$, este último resultado implica $k = -1$, es decir que los coeficientes estaban dados básicamente por $[\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2]$, y esta constante sólo afecta la "dirección " del resultado; Se concluye

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] = -\sum_{j=1}^{3} (\hat{\mathbf{e}}_j, [\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2])\, \mathbf{b}_j$$

Es decir que

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] =$$

$$= -\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3) \end{vmatrix} \mathbf{b}_1 + \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3) \end{vmatrix} \mathbf{b}_2 - \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \end{vmatrix} \mathbf{b}_3$$

Resulta interesante que los coeficientes β_i son las componentes de un producto vectorial generalizado que se realiza una dimensión abajo de la del producto compuesto original.

Sin más preámbulo se enuncia el caso general

Teorema 18. *Dados* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n \quad n \geq 3$

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}]] = (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\mathbf{e}}_j, [\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_{n-2}])\, \mathbf{b}_j$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_j$, $j = 1, \ldots, n-1$ *es la base canónica de* $\mathbf{R}^{n-1}$ *y*

$$\hat{\mathbf{a}}_j = ((\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_1), \ldots, (\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_{n-1})) \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

Demostración. Sea $\mathbf{a}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ cualquier vector, entonces

$$(\mathbf{a}_{n-1}, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}]]) =$$

$$= -\left([\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}], [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}]\right) =$$

$$= -\left([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}]\right) =$$

$$= - \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{n-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_{n-1}) \end{vmatrix} =$$

$$= - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j-1} (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_j) \cdot$$

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{j-1}) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{j+1}) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{b}_{j-1}) & (\mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{b}_{j+1}) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{b}_{n-1}) \end{vmatrix} =$$

$$= - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j-1} (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_j) & \cdots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{b}_1) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{b}_j) & \cdots & (\mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{b}_{n-1}) \end{vmatrix} (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_j) =$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\mathbf{e}}_j, [\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_{n-2}]) (\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}_j) =$$

$$= \left(\mathbf{a}_{n-1}, (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\mathbf{e}}_j, [\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_{n-2}]) \, \mathbf{b}_j \right)$$

de donde es inmediato que

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}]] = (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\mathbf{e}}_j, [\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_{n-2}])\, \mathbf{b}_j$$

□

Esta fórmula puede ser empleada para obtener diferentes expresiones de productos en donde intervienen más de un producto vectorial generalizado. Sin ahondar demasiado en este tipo de sofisticaciones se verán algunos ejemplos. Se asume que los vectores empleados en cada expresión pertenecen al espacio vectorial adecuado.

Primer ejemplo, sea la expresión

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-2}, [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}]]] =$$

$$= \left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\hat{\mathbf{e}}_j, \left[\hat{\mathbf{b}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{b}}_{n-2}\right]\right) \mathbf{c}_j\right] =$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\hat{\mathbf{e}}_j, \left[\hat{\mathbf{b}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{b}}_{n-2}\right]\right) [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{c}_j]$$

Ahora se calcula su producto interior con cualquier vector $\mathbf{a}_{n-1}$

$$(\mathbf{a}_{n-1}, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-2}, [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}]]]) =$$

$$= -\left([\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-2}, [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}]], [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{a}_{n-1}]\right) =$$

$$= -([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{a}_{n-1}], [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-2}, [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}]]) =$$

$$= -\left([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{a}_{n-1}], (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\hat{\mathbf{e}}_j, \left[\hat{\mathbf{b}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{b}}_{n-2}\right]\right) \mathbf{c}_j \right) =$$

$$= (-1)^n \sum_{j=1}^{n-1} \left(\hat{\mathbf{e}}_j, \left[\hat{\mathbf{b}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{b}}_{n-2}\right]\right) ([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{a}_{n-1}], \mathbf{c}_j)$$

Otro ejemplo, sea

$$[[\mathbf{b}_{11}, \mathbf{b}_{12}, \ldots, \mathbf{b}_{1,n-1}], [\mathbf{b}_{21}, \mathbf{b}_{22}, \ldots, \mathbf{b}_{2,n-1}], \ldots, [\mathbf{b}_{n-1,1}, \mathbf{b}_{n-1,2}, \ldots, \mathbf{b}_{n-1,n-1}]] =$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\mathbf{e}}_j, [\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_{n-2}])\, \mathbf{b}_{n-1,j}$$

donde las componentes de los vectores $\hat{\mathbf{a}}_i$ son determinantes (productos mixtos escalares) pues

$$\hat{\mathbf{a}}_i = ((\mathbf{b}_{n-1,1}, [\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \ldots, \mathbf{b}_{i,n-1}]), \ldots, (\mathbf{b}_{n-1,n-1}, [\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \ldots, \mathbf{b}_{i,n-1}])) \qquad i = 1, \ldots, n-2$$

y así resulta que casi todas las componentes del determinante $(\hat{\mathbf{e}}_j, [\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_{n-2}])$ son a su vez, determinantes.

3.4. LA IDENTIDAD DE JACOBI. Esta es una de las identidades más interesantes del producto vectorial generalizado; Su apariencia en $\mathbf{R}^3$ es

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{0} \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$$

Por cálculo directo se puede verificar que en $\mathbf{R}^4$ hay dos identidades similares que se pueden llamar de Jacobi

$$[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]]-[\mathbf{b}_1,\mathbf{a}_2,[\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{a}_1]]+[\mathbf{b}_2,\mathbf{a}_2,[\mathbf{b}_3,\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1]]-[\mathbf{b}_3,\mathbf{a}_2,[\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2]]=\mathbf{0}$$

$$[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]]-[\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1,[\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{a}_2]]+[\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_2,[\mathbf{b}_3,\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1]]-[\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_3,[\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2]]=\mathbf{0}$$

De igual manera en $\mathbf{R}^5$ se encuentran tres, la primera de las cuales es

$$[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4]]+[\mathbf{b}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,[\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4,\mathbf{a}_1]]+[\mathbf{b}_2,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,[\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4,\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1]]+$$

$$+[\mathbf{b}_3,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,[\mathbf{b}_4,\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2]]+[\mathbf{b}_4,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,[\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]]=\mathbf{0}$$

las dos identidades restantes se obtienen intercambiando en cada producto compuesto el primer argumento con el segundo o bien el tercero, según corresponda. De estos casos particulares se infiere que deben existir $n-2$ identidades de Jacobi en $\mathbf{R}^n$. El comportamiento de los signos es algo que llama la atención, a continuación se verá cómo cada signo está dado por el signo de la permutación de los argumentos. Este tipo de permutación es circular o cíclica y en seguida se estudiará cómo determinar si la permutación es par o impar. Considérese la siguiente permutación circular

$$\pi:(1,2,\ldots,n-1,n)\longrightarrow(2,\ldots,n-1,n,1)$$

si se concibe esta permutación como una composición de $n-1$ transposiciones de elementos contiguos, entonces será par o impar según sea positivo o negativo el siguiente número

$$\prod_{i=1}^{n-1} (-1) = (-1)^{n-1}$$

A su vez la composición de p permutaciones circulares claramente será par o impar según sea positivo o negativo

$$\prod_{i=1}^{p} (-1)^{n-1} = (-1)^{p(n-1)}$$

En seguida se define una función permutación circular que será útil más adelante.

Definición 4. *Se llamará π_j a la composición de $j-1$ permutaciones circulares sobre* $(1, 2, \ldots, n-1, n)$

$$\pi_j : (1, 2, \ldots, n-1, n) \longrightarrow (\pi_j(1), \pi_j(2), \ldots, \pi_j(n-1), \pi_j(n)) \qquad 3 \leq n \in \mathbf{N}$$

La permutación π_j será par o impar según sea positivo o negativo el entero

$$(-1)^{(j-1)(n-1)}$$

Por cálculo directo se puede verificar que cuando n, que corresponde a la dimensión, es impar, todas las permutaciones circulares son pares y de ahí que su signo es positivo, tal como se ve en los ejemplos de $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^5$; Cuando n es par la permutación será par o impar según lo sea j, de ahí que los signos se alternen en la misma forma que en los ejemplos de $\mathbf{R}^4$.

Ahora se propone el caso general de la primera identidad en $\mathbf{R}^n$. Por simplicidad se emplearán los siguientes vectores

$$\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n \in \mathbf{R}^n$$

distribuidos en el primer término de la suma como sigue

$$[\mathbf{c}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, [\mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n]]$$

Así los vectores que se permutarán serán los $\mathbf{c}_i$. La primera identidad generalizada de Jacobi en $\mathbf{R}^n$ toma la siguiente forma

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] = \mathbf{0}$$

La demostración de esta identidad se hará por partes, la primera y más difícil contempla el caso en que los vectores $\mathbf{c}_i$ son linealmente dependientes, la segunda trata el caso en que dichos vectores son ortogonales entre sí y la última, que corresponde a un caso cualquiera, utilizará las dos precedentes.

Teorema 19. *Dados* $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, *tales que* $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ *son linealmente dependientes, la siguiente suma se anula*

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right]$$

Demostración. Se toma la suma dada y se manipula

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] +$$

$$+ (-1)^{(n-1)^2} \left[\mathbf{c}_n, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, [\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}]\right] =$$

Sin pérdida de generalidad sea

$$\mathbf{c}_n = \sum_{p=1}^{n-1} \gamma_p \mathbf{c}_p$$

y se sustituye en el segundo término

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{(j-1)(n-1)}\left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)},\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},\left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)},\ldots,\mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{(j-1)(n-1)}\left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)},\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},\left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)},\ldots,\mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right]+$$

$$+(-1)^{(n-1)^2}\sum_{p=1}^{n-1}\gamma_p\left[\mathbf{c}_p,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{n-1}]\right] \qquad (\star)$$

A continuación se estudiarán los productos compuestos de la primera de estas sumatorias. Primero se nota que $\pi_j(1)=j$, entonces

$$\left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)},\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},\left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)},\ldots,\mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right]=$$

$$=\left[\mathbf{c}_j,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},[\mathbf{c}_{j+1},\ldots,\mathbf{c}_n,\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{j-1}]\right]$$

De nuevo aparece $\mathbf{c}_n$. Se sustituye con la sumatoria que ya se usó antes

$$\left[\mathbf{c}_j,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},[\mathbf{c}_{j+1},\ldots,\mathbf{c}_n,\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{j-1}]\right]=$$

$$=\left[\mathbf{c}_j,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},\left[\mathbf{c}_{j+1},\ldots,\sum_{p=1}^{n-1}\gamma_p\mathbf{c}_p,\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{j-1}\right]\right]=$$

$$=\left[\mathbf{c}_j,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},\sum_{p=1}^{n-1}\gamma_p\left[\mathbf{c}_{j+1},\ldots,\mathbf{c}_p,\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{j-1}\right]\right]$$

Los productos que se están sumando, son nulos excepto en el caso $p = j$ pues $\mathbf{c}_j$ no es uno de los restantes argumentos de ese producto vectorial generalizado. Luego

$$[\mathbf{c}_j, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, [\mathbf{c}_{j+1}, \ldots, \mathbf{c}_n, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{j-1}]] =$$

$$= \gamma_j [\mathbf{c}_j, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, [\mathbf{c}_{j+1}, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{j-1}]]$$

Los argumentos de $[\mathbf{c}_{j+1}, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{j-1}]$ son las $\mathbf{c}_k$ tales que $1 \leq k \leq n-1$. Ahora se debe determinar la permutación necesaria para llevar esta última expresión a $[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}]$. Para regresar a $\mathbf{c}_j$ a la última posición hacen falta $j-1$ transposiciones de elementos contiguos, permutación que será par o impar de acuerdo con

$$(-1)^{j-1}$$

Así se logra que

$$[\mathbf{c}_{j+1}, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{j-1}] = (-1)^{j-1} [\mathbf{c}_{j+1}, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{j-1}, \mathbf{c}_j]$$

A continuación se requieren $((n-1)-(j+1)+1) = (n-j-1)$ permutaciones circulares de $(n-1)$ elementos para llevar todos los argumentos a la posición donde su índice es igual al lugar que ocupan dentro del producto.

Dicha permutación será par o impar según el signo de

$$(-1)^{(n-j-1)(n-2)}$$

Entonces

$$[\mathbf{c}_{j+1},\ldots,\mathbf{c}_{n-1},\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{j-1},\mathbf{c}_j] = (-1)^{(n-j-1)(n-2)}[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{n-1}]$$

Ahora se está en condiciones de afirmar que

$$\left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)},\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},\left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)},\ldots,\mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] =$$

$$= (-1)^{j-1}(-1)^{(n-j-1)(n-2)}\gamma_j\left[\mathbf{c}_j,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{n-1}]\right]$$

Con lo cual la primera sumatoria queda

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{(j-1)(n-1)}\left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)},\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},\left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)},\ldots,\mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] =$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{(j-1)(n-1)}(-1)^{j-1}(-1)^{(n-j-1)(n-2)}\gamma_j\left[\mathbf{c}_j,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{n-1}]\right]$$

Simplificamos la expresión correspondiente al signo

$$(-1)^{(j-1)(n-1)}(-1)^{(j-1)}(-1)^{(n-j-1)(n-2)} = (-1)^{2(-2n+j+1)}(-1)^{n^2} = (-1)^{n^2}$$

Es decir que

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{(j-1)(n-1)}\left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)},\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},\left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)},\ldots,\mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] =$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n^2}\gamma_j\left[\mathbf{c}_j,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{n-1}]\right]$$

Se retoma la suma de sumatorias ($\star$) y se sustituye este resultado

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{(j-1)(n-1)}\left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)},\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},\left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)},\ldots,\mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] =$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n^2}\gamma_j\left[\mathbf{c}_j,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{n-1}]\right]+$$

$$+\sum_{p=1}^{n-1}(-1)^{(n-1)^2}\gamma_p\left[\mathbf{c}_p,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{n-1}]\right] =$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\left((-1)^{n^2}+(-1)^{(n-1)^2}\right)\gamma_j\left[\mathbf{c}_j,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-2},[\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{n-1}]\right] = \mathbf{0}$$

pues para toda n entera

$$(-1)^{n^2}+(-1)^{(n-1)^2}=0$$

Teorema 20. *Dados* $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, *linealmente independientes, tales que*

$$(\mathbf{c}_p, \mathbf{c}_q) = 0 \quad si \quad p \neq q$$

entonces se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] = \mathbf{0}$$

Demostración. Las restricciones impuestas a los vectores $\mathbf{c}_p$ implican que estos son ortogonales entre sí, es decir, que existen las constantes k_i diferentes de cero tales que

$$k_{\pi_j(1)}\mathbf{c}_{\pi_j(1)} = \left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right] \qquad j = 1, \ldots, n$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} k_{\pi_j(1)} \left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{c}_{\pi_j(1)}\right] = \mathbf{0}$$

□

Con estos dos teoremas ya es posible demostrar el caso general. Se ilustra el método que se empleará con la primera identidad de $\mathbf{R}^4$

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] - [\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_1]] + [\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]] - [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]]$$

Se descompone $\mathbf{a}_1$ de la siguiente forma

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{12}$$

donde $\mathbf{a}_{11} \in lin\,\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ y $\mathbf{a}_{12} \| [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$. Se sustituye en la expresión:

$$[\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] - [\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{12}]] + [\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_1]] -$$

$$- [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]] =$$

$$= [\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] - [\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{11}]] + [\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{11}, \mathbf{b}_1]] - [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_{11}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]] +$$

$$+ [\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] - [\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}]] + [\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_1]] - [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]]$$

Los primeros cuatro sumandos se anulan de acuerdo con el primer teorema sobre el tema, el quinto sumando aún cuando se desvanece, se preserva. Ahora se descompone

$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_{11} + \mathbf{b}_{12}$ con $\mathbf{b}_{11} \in lin\,\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}\}$ y $\mathbf{a}_{12} \| \,[\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}]$. Se repite la operación

$$= [\,\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_{11} + \mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] - [\,\mathbf{b}_{11} + \mathbf{b}_{12}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}]] + [\,\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_{11} + \mathbf{b}_{12}]] -$$

$$- [\,\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_{11} + \mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_2]] =$$

$$= [\,\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_{11}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] - [\mathbf{b}_{11}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}]] + [\,\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_{11}]] - [\,\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_{11}, \mathbf{b}_2]] +$$

$$+ [\,\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] - [\mathbf{b}_{12}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}]] + [\,\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_{12}]] - [\,\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_2]] =$$

$$= [\,\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] - [\mathbf{b}_{12}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}]] + [\,\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_{12}]] - [\,\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_2]]$$

El primer grupo de cuatro sumandos se anula por la misma razón. Se repite la operación hasta obtener

$$[\,\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]] - [\,\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_1]] + [\,\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]] - [\,\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]] =$$

$$= [\,\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_{22}, \mathbf{b}_{32}]] - [\mathbf{b}_{12}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_{22}, \mathbf{b}_{32}, \mathbf{a}_{12}]] +$$
$$+ [\,\mathbf{b}_{22}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{b}_{32}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_{12}]] - [\,\mathbf{b}_{32}, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_{12}, \mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_{22}]] = \mathbf{0}$$

El resultado es cero pues esta última suma corresponde al caso previsto en el segundo teorema sobre el tema.

Teorema 21 [Identidad de Jacobi]. *Dados* $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, *se cumple la siguiente identidad que se llamará Primera Identidad Genera-*

lizada de Jacobi

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{c}_{\pi_j(n)} \right] \right] = \mathbf{0}$$

donde la función permutación circular π_j es tal como se definió anteriormente.

Demostración. Se reexpresa el vector $\mathbf{c}_i$ como una suma de dos vectores, el primero de los cuales pertenece al subespacio formado por los restantes vectores $\mathbf{c}_j$ y el segundo es perpendicular al primero, es decir

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{g}_i + \mathbf{h}_i \qquad \mathbf{g}_i \in lin\,\{\mathbf{c}_j \mid i \neq j, 1 \leq j \leq n\} \qquad \mathbf{h}_i \parallel [\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{i-1}, \mathbf{c}_{i+1}, \ldots, \mathbf{c}_n]$$

y sean los vectores

$$\mathbf{g}_j = \mathbf{c}_j \qquad i \neq j$$

$$\mathbf{h}_j = \mathbf{c}_j \qquad i \neq j$$

Al sustituir $\mathbf{c}_i = \mathbf{g}_i + \mathbf{h}_i$ en la identidad, por la propiedad de linealidad en un argumento se obtienen dos sumatorias, en la primera de las cuales los vectores que permutan son

$$\{\mathbf{g}_i, \mathbf{c}_j \mid i \neq j, 1 \leq j \leq n\} = \{\mathbf{g}_i \mid 1 \leq j \leq n\}$$

y en la segunda son

$$\{\mathbf{h}_i, \mathbf{c}_j \mid i \neq j, 1 \leq j \leq n\} = \{\mathbf{h}_i \mid 1 \leq j \leq n\}$$

es decir que

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{g}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{g}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{g}_{\pi_j(n)}\right]\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{h}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{h}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{h}_{\pi_j(n)}\right]\right] =$$

$$= \mathbf{0} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{h}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{h}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{h}_{\pi_j(n)}\right]\right]$$

pues la primera sumatoria se desvanece en virtud del primer teorema dado en este apartado. Realizando este proceso para $i = 1, \ldots, n$ (en realidad sólo hace falta hasta $n - 1$) se llegará a la siguiente igualdad

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{c}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\overline{\mathbf{c}}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\overline{\mathbf{c}}_{\pi_j(2)}, \ldots, \overline{\mathbf{c}}_{\pi_j(n)}\right]\right] = \mathbf{0}$$

donde los vectores $\bar{\mathbf{c}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{c}}_n$ son mutuamente ortogonales, hecho que permite aplicar el resultado obtenido en el teorema anterior. □

Corolario 13. *Existen n-2 identidades de Jacobi en* $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$. *La primera de ellas se acaba de demostrar y las demás se obtienen, como se mencionó anteriormente, mediante el intercambio de argumentos. Sea* $i = 1, \ldots, n-2$, *entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)(n-1)} \left[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{c}_{\pi_j(1)}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_{n-2}, \left[\mathbf{c}_{\pi_j(2)}, \ldots, \mathbf{c}_{\pi_j(n)}\right]\right] = \mathbf{0}$$

A modo de observación y sin intentar profundizar, se dirá que el producto vectorial satisface la operación "corchete" de Lie, con lo cual $\mathbf{R}^3$ resulta ser un álgebra de Lie. Las reglas de esta operación corchete son tres, a saber, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$ entonces

1) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$

2) $[\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$

3) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{0}$

con $[\cdot, \cdot] : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Resulta interesante que se ha definido una operación

$$\underbrace{[\bullet, \ldots, \bullet]}_{\text{n-1 argumentos}} : \underbrace{\mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n}_{\text{n-1 veces}} \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

tal que cumple con tres reglas similares: la anticonmutatividad (alternancia), la linealidad en un argumento y la "Identidad Generalizada de Jacobi". De alguna manera el Producto Vectorial Generalizado es un "Paréntesis Generalizado de Lie". Sobra decir que las consecuencias inmediatas de esta observación, que seguramente existen, exceden con mucho el alcance de esta tesis.

3.5. MATRICES ANTISIMÉTRICAS. Por último se estudiará la manera de representar el producto vectorial generalizado mediante una transformación lineal. Los resultados que se obtendrán son en cierta medida, sorpresivos. Considérense el siguiente vector $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^T$ y la matriz antisimétrica:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación se efectuará el producto

$$Xb = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3 b_2 + a_2 b_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ -a_2 b_1 + a_1 b2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

con $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^T$. Se ha reexpresado $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ cómo una transformación lineal. La matriz de dicha transformación es antisimétrica y sus elementos dependen exclusivamente de $\mathbf{a}$. Esta representación es deducible de la definición de $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ como sigue

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])\, \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \left(\mathbf{e}_i, \left[\mathbf{a}, \sum_{j=1}^{3} b_j \mathbf{e}_j \right] \right) \mathbf{e}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_j\, (\mathbf{e}_i, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_j])\, \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_i, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_1]) & (\mathbf{e}_i, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_2]) & (\mathbf{e}_i, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_3]) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_i =$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_1]) & (\mathbf{e}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_2]) & (\mathbf{e}_1, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_3]) \\ (\mathbf{e}_2, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_1]) & (\mathbf{e}_2, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_2]) & (\mathbf{e}_2, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_3]) \\ (\mathbf{e}_3, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_1]) & (\mathbf{e}_3, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_2]) & (\mathbf{e}_3, [\mathbf{a}, \mathbf{e}_3]) \end{pmatrix} \mathbf{b} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b}$$

Ahora se enuncia un teorema para el caso tridimensional:

Teorema 22. *Dados* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^T$ *y* $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^T$ *en* $\mathbf{R}^3$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = X(\mathbf{a})\, \mathbf{b}$$

donde

$$X(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Este teorema permite reexpresar fórmulas escritas en términos del producto vectorial como matriciales y viceversa. Para obviar esta situación se hará el siguiente cambio de notación

$$[\mathbf{a}\times] = X(\mathbf{a})$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = [\mathbf{a},\mathbf{b}]$$

Entonces se puede decir que

$$[\mathbf{a}\times]\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

Un caso práctico. En $\mathbf{R}^3$ la rotación de un vector **b** alrededor de un vector unitario cualquiera **a**, está dada por

$$\mathbf{b}' = R\mathbf{b}$$

donde

$$R = \begin{pmatrix} a_1a_1(1-\cos\theta)+\cos\theta & a_1a_2(1-\cos\theta)-a_3\sin\theta & a_1a_3(1-\cos\theta)+a_2\sin\theta \\ a_1a_2(1-\cos\theta)+a_3\sin\theta & a_2a_2(1-\cos\theta)+\cos\theta & a_2a_3(1-\cos\theta)-a_1\sin\theta \\ a_1a_3(1-\cos\theta)-a_2\sin\theta & a_2a_3(1-\cos\theta)+a_1\sin\theta & a_3a_3(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix}$$

Reexpresando esta matriz

$$R = \begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2a_2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3a_3 \end{pmatrix}(1-\cos\theta) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cos\theta + \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\sin\theta =$$

$$= \mathbf{a}\mathbf{a}^T(1-\cos\theta) + I\cos\theta + [\mathbf{a}\times]\sin\theta$$

con la cual se calcula la rotación

$$\mathbf{b}' = R\mathbf{b} = \left(\mathbf{a}\mathbf{a}^T (1-\cos\theta) + I\cos\theta + [\mathbf{a}\times]\sin\theta\right)\mathbf{b}$$

$$= \mathbf{a}\mathbf{a}^T\mathbf{b}\,(1-\cos\theta) + I\mathbf{b}\cos\theta + [\mathbf{a}\times]\,\mathbf{b}\sin\theta =$$

$$= \mathbf{a}(\mathbf{a},\mathbf{b})\,(1-\cos\theta) + \mathbf{b}\cos\theta + \mathbf{a}\times\mathbf{b}\sin\theta$$

Esta expresión se conoce como la fórmula de Rodríguez. Se puede obtener una forma diferente si se utiliza la siguiente igualdad

$$[\mathbf{u}\times]^2 = \mathbf{u}\mathbf{u}^T - I\,\|\mathbf{u}\|^2$$

Volviendo con R

$$R = \mathbf{a}\mathbf{a}^T (1-\cos\theta) + I\cos\theta + [\mathbf{a}\times]\sin\theta =$$

$$= \left([\mathbf{a}\times]^2 + I\,\|\mathbf{a}\|^2\right)(1-\cos\theta) + I\cos\theta + [\mathbf{a}\times]\sin\theta =$$

$$= [\mathbf{a}\times]\left([\mathbf{a}\times](1-\cos\theta) + I\sin\theta\right) + I$$

Luego

$$\mathbf{b}' = R\mathbf{b} = \left([\mathbf{a}\times]\left([\mathbf{a}\times](1-\cos\theta) + I\sin\theta\right) + I\right)\mathbf{b} =$$

$$= [\mathbf{a}\times][\mathbf{a}\times]\mathbf{b}(1-\cos\theta) + [\mathbf{a}\times]\mathbf{b}\sin\theta + I\mathbf{b} =$$

$$= \mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(1-\cos\theta) + \mathbf{a}\times\mathbf{b}\sin\theta + \mathbf{b}$$

En seguida se aborda el caso general, tomando como guía el desarrollo que se realizó para $\mathbf{R}^3$. Sean $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}\in\mathbf{R}^n$, y en particular $\mathbf{b}_{n-1} = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$, $n\geq 3$

$$[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}] = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{e}_i,[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-1}])\,\mathbf{e}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{e}_i,\left[\mathbf{b}_1,\ldots,\sum_{j=1}^{n} b_j\mathbf{e}_j\right]\right)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_j\,(\mathbf{e}_i,[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-2},\mathbf{e}_j])\,\mathbf{e}_i$$

sea $x_{ij} = (\mathbf{e}_i,[\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-2},\mathbf{e}_j])$, entonces

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_j x_{ij}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} x_{i1} & \cdots & x_{ii} & \cdots & x_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}\mathbf{e}_i =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & \cdots & x_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{b}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -x_{1k} & \cdots & 0 & \cdots & x_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{1n} & \cdots & -x_{kn} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b}_{n-1}$$

pues $x_{kk} = 0$ y además $x_{ij} = -x_{ji}$. Luego esta matriz también es antisimétrica.

Teorema 23. *Todo Producto Vectorial Generalizado en* $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, *es expresable mediante una transformación lineal aplicada a uno de sus argumentos. Dicha transformación lineal está dada por una matriz antisimétrica de orden* $n \times n$, *cuyos elementos son función de los restantes argumentos del producto vectorial generalizado. Es decir*

$$[\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}] = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -x_{1k} & \cdots & 0 & \cdots & x_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{1n} & \cdots & -x_{kn} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b}_{n-1}$$

donde $x_{ij} = (\mathbf{e}_i, [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-2}, \mathbf{e}_j])$, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$.

¿Se puede afirmar que el producto de cualquier matriz antisimétrica por un vector dado constituye un cierto Producto Vectorial Generalizado?. Sean $A = -A^T$ de $n \times n$

y $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, entonces

$$\mathbf{b}^T A\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\left(-A^T\right)\mathbf{b} = -\left(\mathbf{b}^T A^T \mathbf{b}\right) = -\left((A\mathbf{b})^T \mathbf{b}\right) = -\left(\mathbf{b}^T (A\mathbf{b})\right)^T = -\mathbf{b}^T A\mathbf{b}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{b}^T A\mathbf{b} = 0 \Longrightarrow (\mathbf{b}, A\mathbf{b}) = 0 \Longrightarrow \mathbf{b} \perp A\mathbf{b}$$

$$\Longrightarrow A\mathbf{b} \parallel [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-2}, \mathbf{b}] \qquad \text{para ciertos } \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-2} \in \mathbf{R}^n, \text{ no necesariamente únicos}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbf{R} \text{ tal que } A\mathbf{b} = k\,[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-2}, \mathbf{b}]$$

$$\Longrightarrow A\mathbf{b} = [k\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-2}, \mathbf{b}]$$

Teorema 24. *Todo producto de una matriz antisimétrica de orden $n \times n$, con $n \geq 3$, por un vector dado, se puede concebir como el Producto Vectorial Generalizado de $n-1$ vectores, uno de los cuales es precisamente el vector dado.*

Dejamos al final el caso bidimensional por dos razones, la notación y que no cumple el último teorema.También se puede expresar mediante una transformación lineal "antisimétrica"

$$[\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b}$$

pero esta matriz antisimétrica es la única que multiplicada por un vector dado da como resultado el PVG de dicho vector; Cualquier otro caso entrega un múltiplo del

PVG o bien, el PVG de un múltiplo del vector dado

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b} = k\,[\mathbf{b}] = [k\mathbf{b}] \neq [\mathbf{b}] \qquad k \in \mathbf{R}$$

4. APLICACIONES

Es posible hallar diferentes tipos de problemas en los cuales el uso del producto vectorial generalizado permite expresar de una manera diferente los planteamientos o bien los resultados o soluciones derivados de su análisis. En gran medida su aplicación dependerá del conocimiento que se posea tanto del problema como de las propiedades de esta operación. Aunque es posible sugerir ciertas aplicaciones en determinados problemas de ingeniería relacionados con circuitos eléctricos o con la representación de sistemas lineales en espacio de estado por ejemplo, nos concretamos en este capítulo a exponer el concepto de bases recíprocas y a presentar un proceso de ortonormalización diferente del de Gram-Schmidt.

4.1. BASES RECÍPROCAS. Dada una base del espacio vectorial $\mathbf{R}^n$ es posible construir otra base del mismo espacio con ciertas propiedades interesantes; En seguida se mostrará la manera en que se construye dicha base y las propiedades que la relacionan con la primera. Se llamará $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbf{R}^n$ a la primera base, la segunda estará constituida por los vectores

$$\mathbf{b}_i = \frac{[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n]}{(\mathbf{a}_i, [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n])} \qquad i = 1, \ldots, n$$

estos vectores tienen la característica de ser ortogonales a cualquier $\mathbf{a}_j$ con $j \neq i$ pues

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_i) = \frac{(\mathbf{a}_j, [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n])}{(\mathbf{a}_i, [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n])} = 0 \qquad j \neq i$$

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) = \frac{(\mathbf{a}_i, [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n])}{(\mathbf{a}_i, [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n])} = 1$$

claramente el denominador $(\mathbf{a}_i, [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n])$ es el mismo en cada $\mathbf{b}_i$ excepto tal vez por el signo, el cual se puede determinar rápidamente al observar que se requieren $i-1$ intercambios de argumentos consecutivos en dicho producto mixto escalar para obtener

$$(\mathbf{a}_i, [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n]) = (-1)^{j-1} (\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n])$$

con esta observación se puede enunciar la siguiente

Definición 5. *Dada la base* $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_i \mid \mathbf{a}_i \in \mathbf{R}^n,\ i = 1, \ldots, n\,; 2 \leq n\}$ *se llamará al conjunto* $\mathbf{B} = \{\mathrm{b}_i \mid \mathrm{b}_i \in \mathbf{R}^n,\ i = 1, \ldots, n\,; 2 \leq n\}$ *la base recíproca de* $\mathbf{A}$. *Los vectores de* $\mathbf{B}$ *se calculan según*

$$\mathrm{b}_i = (-1)^{i-1} \frac{[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n]}{(\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n])} \qquad i = 1, \ldots, n$$

4.2. PROCESO DE ORTONORMALIZACIÓN. Este proceso de ortonormalización aprovecha del producto vectorial generalizado la característica de ortogonalidad del resultado y los argumentos. Por simplicidad se aborda el método en dos pasos, el primero es un proceso de ortogonalización consistente en una secuencia de productos vectoriales generalizados compuestos, y el paso terminal contempla únicamente la normalización de los vectores obtenidos en el primer paso. Para ejemplificar, se explica el método. Tomemos una base cualquiera de $\mathbf{R}^n$, por decir, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, ahora se calculan los siguientes vectores

$$\mathbf{b}_1 = [\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

$$\mathbf{b}_2 = [\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

$$\mathbf{b}_i = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1} \ldots, \mathbf{a}_n] \qquad 2 \leq i \leq n-1$$

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n$$

resulta obvio que los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_n$ con $2 \leq i \leq n-1$ son ortogonales entre sí, pues dados dos de ellos, uno de los dos es argumento del producto vectorial generalizado que define al otro; Una diferencia básica de este método con el de Gram-Schmidt es que cualquier vector calculado $\mathbf{b}_j$ no sólo es ortogonal a los anteriormente obtenidos, sino que también lo es a aquéllos que faltan de "procesar". Esto último permite detener el proceso en cualquier momento, con la consecuencia de haber obtenido las bases de dos subespacios "ortogonales" de $\mathbf{R}^n$ cuya unión es base del espacio completo. De estas dos bases una está ortogonalizada, a saber $\{\mathbf{b}_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, y la otra, $\{\mathbf{a}_i \mid k+1 \leq i \leq n\}$ no necesariamente. Una vez realizado el proceso completo o parcial, resta normalizar cada vector calculado

$$\bar{\mathbf{b}}_i = \frac{\mathbf{b}_i}{\|\mathbf{b}_i\|}$$

Para evitar conflictos con el manejo de los índices, exponemos dos casos, uno para $\mathbf{R}^2$ y otro para $\mathbf{R}^n$ con $n \geq 3$.

Teorema 25. *Dados los vectores linealmente independientes* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbf{R}^2$ *la siguiente constituye una base ortonormal de* $\mathbf{R}^2$

$$\bar{\mathbf{b}}_1 = \frac{[\mathbf{a}_2]}{\|\mathbf{a}_2\|}$$

$$\bar{\mathbf{b}}_2 = \frac{\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_2\|}$$

Demostración. Se verifican las magnitudes y el producto punto de ambos vectores

$$\|\bar{\mathbf{b}}_1\| = \left\| \frac{[\mathbf{a}_2]}{\|\mathbf{a}_2\|} \right\| = \frac{\|[\mathbf{a}_2]\|}{\|\mathbf{a}_2\|} = \frac{\|\mathbf{a}_2\|}{\|\mathbf{a}_2\|} = 1$$

$$\|\overline{\mathbf{b}}_2\| = \left\| \frac{\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_2\|} \right\| = \frac{\|\mathbf{a}_2\|}{\|\mathbf{a}_2\|} = 1$$

$$\left(\overline{\mathbf{b}}_1, \overline{\mathbf{b}}_2\right) = \left(\frac{[\mathbf{a}_2]}{\|\mathbf{a}_2\|}, \frac{\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_2\|}\right) = \frac{(\mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_2])}{\|\mathbf{a}_2\|^2} = 0$$

□

Teorema 26 [Proceso de Ortonormalización]. *Dada una base* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *de* $\mathbf{R}^n$ *con* $n \geq 3$ *la siguiente constituye un base* $\mathbf{B}$ *ortogonal del mismo espacio*

$$\mathbf{b}_1 = [\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

$$\mathbf{b}_2 = [\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

$$\mathbf{b}_i = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1} \ldots, \mathbf{a}_n] \qquad 2 \leq i \leq n-1$$

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n$$

a partir de la cual se obtiene la base ortonormal $\overline{\mathbf{B}}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *cuyos vectores son*

$$\overline{\mathbf{b}}_i = \frac{\mathbf{b}_i}{\|\mathbf{b}_i\|} \qquad 1 \leq i \leq n$$

Demostración. Es prácticamente trivial pues para $\mathbf{B}$ es inmediato que dados dos vectores cualesquiera de ellos, estos son ortogonales entre sí pues uno de ellos forzosamente debe ser argumento del producto vectorial generalizado que define al otro. Por otro lado

$$\|\mathbf{b}_j\| \neq 0 \qquad 1 \leq j \leq n-1$$

pues los argumentos del producto vectorial que lo define son linealmente independientes. Para $\bar{\mathbf{B}}$ resulta todavía más fácil, pues sus elementos son los vectores normalizados de un conjunto cuyos elementos ya eran ortogonales entre sí. La argumentación de la demostración está completa.

Corolario 14. *Si el proceso de ortogonalización se detiene en un cierto vector* $\mathbf{b}_k$, *entonces los conjuntos* $\{\mathbf{b}_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ *y* $\{\mathbf{a}_i \mid k+1 \leq i \leq n\}$ *constituyen bases de subespacios ortogonales pues*

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_i) = 0$$

para cualquier $i = 1, ..., k$ *y* $j = k+1, ..., n$. *La unión de estos dos conjuntos es una base de* $\mathbf{R}^n$. *Además los vectores del conjunto* $\{\mathbf{b}_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ *son suceptibles de ser normalizados para formar así una base ortonormal de un cierto subespacio de* $\mathbf{R}^n$.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES. Se definió una operación en $\mathbf{R}^n$ que tiene propiedades similares a las que presenta el Producto Vectorial en $\mathbf{R}^3$. De hecho esta operación, que se ha llamado Producto Vectorial Generalizado posee al Producto Vectorial como caso particular y es al mismo tiempo, caso particular de otra operación todavía más general, el Producto Exterior. Este desarrollo constituye un atisbo al álgebra multilineal. Destacan el Proceso de Ortonormalización presentado, las identidades generalizadas de Lagrange y Jacobi, los resultados sobre productos compuestos y sobre la transformación lineal de los argumentos del PVG. De hecho el tema está lejos de haber sido agotado y se puede preguntar, por ejemplo, ¿Cómo impactan estos resultados en el Cálculo en $\mathbf{R}^n$?, ¿Tiene sentido pensar en un Paréntesis Generalizado de Lie?. Aún cuando la inquietud que dio origen a este trabajo fue plenamente satisfecha, queda sin respuesta la pregunta tal vez más interesante, de cómo lograr que el alumno se interne en aventuras como ésta durante la carrera.

BIBLIOGRAFÍA

AITKEN A. C., Determinants and Matrices, Oliver and Boyd LTD., Edinburgh, 1959, (9 ed.).

ANTON Howard, Introducción al Álgebra Lineal, (Trad. José H. Perez C.), Limusa, México, 1986, (3 ed.).

AYRES Frank, Matrices Serie Schaum, (Trad. Luis Gutiérrez D., Ángel Gutiérrez V.), Mc Graw Hill, México, 1982.

CÁRDENAS Humberto; LLUIS Emilio; RAGGI Francisco; TOMÁS Francisco; Álgebra Superior, Trillas, México, 1985.

CRAIG John J., Introduction to Robotics, Addison-Wesley, Massachusetts,1986.

GROSSMAN Stanley I., Álgebra Lineal, (Trad. Javier Alagón, Carlos Muñoz, Jesús Noriega; Rev. Blanca G. Fischmann), Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1985.

KREYSZIG Erwin, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, (Trad. José H. Perez C.; Rev. Arturo Delgado R.), Limusa, México, 1983, (3 ed.), vol. 1.

MALTSEV A. I., Fundamentos de Álgebra Lineal, (Trad. David Alfaro L.), Siglo XXI Editores, México, 1970.

PITA RUIZ Claudio de Jesús, Álgebra Lineal, Mc Graw Hill, México, 1991.