44
2
3

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
" ACATLAN "

"FUNDAMENTO MATEMATICO DEL JUEGO TACHTLI"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A :

MARIA DEL ROSARIO SANTANDER ROSAS

ASESOR: M. C. LUCIO PEREZ RODRIGUEZ

ACATLAN, ESTADO DE MEXICO 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A mi hija

Stephany.

Al

Lector.

Doy gracias

a **DIOS,**	*por haberme permitido terminar este proyecto.*
a **MIS PADRES,**	*por haberme dado la vida.*
a **MIS HERMANOS,**	*por su gran apoyo y cariño.*
a **MIS TIOS,**	*por haber creído en mi, en la realización de esta tesis.*
a **MI ASESOR LUCIO PÉREZ,**	*por su orientación, que fué fundamental en la realización de este trabajo.*
a **MI UNIVERSIDAD,**	*por la formación que me dió.*
a **MIS PROFESORES,**	*que me dejaron gran parte de sus conocimientos.*
a **MIS AMIGOS,**	*por su sincera amistad.*

"Una invención es un 10 por ciento de inspiración y un 90 por ciento de sudor."

Thomas Alva Edison.

CONTENIDO

GLOSARIO.

Adyacencia. Dos vértices son adyacentes entre sí si existe una línea que los relaciona.

Camino. Un camino es una secuencia (e_1, e_2, e_3,...) de arcos tal que el extremo final de cada uno corresponde al extremo inicial del siguiente. Un camino puede ser finito o no. Se puede también designar un camino por los nodos que contiene.

Un camino es *simple* si no incluye repetido el mismo arco.

Un camino es *elemental* si no pasa repetidamente por el mismo nodo. Todo camino elemental es simple, pero el recíproco no es cierto.

Circuito. Un circuito es un camino finito, en el que no se pasa por un nodo más de una vez, exceptuando al nodo inicial, que coincide con el nodo final. Un circuito puede estar representado por sus nodos o por sus arcos. Los calificativos *simple* y *elemental* se aplican también a los circuitos. Un circuito formado por un único nodo (a la vez inicio y fin del circuito), se denomina *bucle* o *loop*.

Complemento del evento *A*. El complemento del evento *A*, denotado por *A'*, es el evento que consta de todos los elementos del espacio muestral que no están contenidos en *A*.

Espacio muestral. Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio y usualmente se denota con la letra *S*.

Los espacios muestrales y los eventos, en particular, las relaciones que existen entre eventos, con frecuencia se ilustran por medio de diagramas de Venn. En cada caso, el espacio muestral se representa por medio de un rectángulo, mientras que los eventos se representan por medio de regiones contenidas en el rectángulo, generalmente por medio de círculos o parte de círculos.

Evento. A un subconjunto de un espacio muestral se le conoce como evento, por subconjunto se entiende a una parte cualquiera de un conjunto, incluso al conjunto como un todo y en forma trivial, al **conjunto vacío** que se representa como Ø, el cual no tiene elementos en absoluto.

En muchos problemas de probabilidad se debe trabajar con eventos que se componen al formar uniones, intersecciones y complementos.

Experimento. La palabra *experimento* en este caso, se refiere a cualquier proceso de observación o medición. Por tanto un experimento puede consistir en contar cuantas veces ha faltado a clase un estudiante; puede ser el simple proceso de observar si una luz está encendida o apagada o si una persona es soltera o casada; o bien puede constar del proceso muy complicado de obtención y evaluación de datos para predecir tendencias en la economía, para determinar la fuente de desorden en la sociedad o para estudiar la causa de una enfermedad.

Experimento aleatorio. Un experimento es aleatorio cuando cumple los siguientes requisitos:

- que se pueda, al menos conceptualmente, repetir indefinidamente el experimento en idénticas condiciones, y
- que el resultado de una realización particular del experimento resulte impredecible.

Cuando se estudian los resultados de un experimento aleatorio, las diversas posibilidades suelen identificarse con números, puntos o algunos otros tipos de símbolos, de manera que se pueden responder todas las preguntas a cerca de ellos en forma matemática, sin tener que correr largas descripciones verbales de lo que ha sucedido, lo que está sucediendo o lo que pasará.

Fundamento. (lat. fundaméntum), m. Principio y cimiento en que estriba y sobre que se funda un edificio u otra cosa.- Hablándose de personas, seriedad o formalidad.- *Razón principal o motivo con que se pretende afianzar y asegurar una cosa.*- Fondo o trama de los tejidos.- fig. Raíz, principio y origen en que estriba y tiene su mayor fuerza una cosa no material. // Filos. Principio de algo, razón de una realidad; origen de una entidad.

Gráfica. Una gráfica G es un conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y un conjunto de líneas $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a las cuales se les denomina también arcos de tal forma que a cada línea se le asocia un par de vértices.

Gráfica dirigida (Digráfica). Una gráfica dirigida G consiste de un conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, un conjunto de líneas $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ y un mapeo (dirección) r que relaciona todas las líneas con pares ordenados de vértices (v_i, v_j) también se conocen con el nombre de gráficas orientadas o dirigidas. $G = \{V, E, \Upsilon\}$.

Incidencia. Se dice que un arco es incidente al vértice v_i y v_j si dichos vértices son vértices terminales de ese arco.

Intersección de dos eventos *A* y *B*. La intersección de dos eventos A y B, denotada por $\boldsymbol{A \cap B}$, es el evento que consta de todos los elementos contenidos en $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

Líneas adyacentes. Dos líneas que no son paralelas pero son incidentes a un vértice común.

Líneas paralelas. Si la relación entre un par de vértices no es única, a esa relación se le conoce con el nombre de líneas paralelas.

Longitud de un camino. La longitud de un camino es el número de arcos que contiene.

Loop. Es la relación de un vértice con sigo mismo.

Matemáticas. Las matemáticas, al igual que el idioma español o el inglés son un lenguaje. Las matemáticas se componen de signos o símbolos y de reglas a seguir para poder combinar dichos signos.

Matemático. adj. Perteneciente a la matemática: regla matemática.- fig. Exacto, preciso.- m. El que por profesión o estudio se dedica a la matemática.

Matriz de adyacencia. La matriz de adyacencia A de una gráfica G de orden p con vértices denotados por $v_1, v_2, \ldots, v_p$ y sin líneas paralelas es una matriz cuadrada $A_{p \times p} = A(G) = [a_{ij}]$ en la cual $a_{ij} = 1$ si v_i y v_j son adyacentes y $a_{ij} = 0$ en otro caso.

Características de la matriz de adyacencia:

- A es simétrica ($a_{ij} = a_{ij}$ para $1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq p$).
- Cuando no hay loops los elementos de la diagonal principal son 0's ($a_{ii} = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, p$).

- La suma de alguna columna o renglón proporciona el grado del vértice y sólo en caso de tener un loop, incrementa este en uno.
- Los vértices con grado uno (vértices colgantes) se pueden observar al sumar un renglón o una columna.
- Si la suma de un renglón es igual a cero, indica que el vértice i es aislado.
- Una gráfica desconectada con 2 componentes se representa como:

$$A(g) = \begin{bmatrix} A(G_1) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{bmatrix}$$

- Dada una matriz binaria, cuadrada y simétrica de orden n siempre se podrá construir una gráfica G de n vértices.

Matriz de incidencia. La matriz asociada con la gráfica G sin loops en la cual los nodos y los arcos están etiquetados es la matriz de incidencia $B = B(G) = [b_{ij}]$ de n x e donde n es el número de vértices de la gráfica y e es el número de arcos. Donde el elemento $b_{ij} = 1$ si el arco j es incidente al vértice i y $b_{ij} = 0$ en otro caso.

Observaciones de la matriz de incidencia:

- La suma de la columna de la matriz siempre es igual a 2.
- La suma de los unos en un renglón i representa al grado del vértice i:
  1. Si la suma es igual a cero, el vértice es aislado.
  2. Si la suma es igual a uno, el vértice es colgante.
- Cuando se tienen 2 o más columnas iguales se trata de líneas paralelas.
- Si una gráfica es desconectada y consta de dos o más componentes de dicha gráfica puede ser representada como:

$$B(g) = \begin{bmatrix} B(G_1) & 0 \\ 0 & B(G_2) \end{bmatrix}$$

- Permutaciones de dos renglones y columnas en $B(G)$ implica reetiquetar vértices y arcos.
- Dada una martriz de incidencia siempre es posible generar el diagrama gráfico correspondiente.

Relación entre una matriz de adyacencia y una matriz de incidencia:

Si una gráfica no tiene líneas paralelas, ni loops, la matriz de adyacencia $A(G)$ tiene toda la información correspondiente a la gráfica G, pero por el contrario, si la gráfica tiene líneas paralelas y no tiene loops, entonces la matriz de incidencia contiene toda la información; y si se tiene una gráfica simple tanto $A(G)$ como $B(G)$ tienen toda la información de la gráfica, esto se ve lógico a partir de la matiz de adyacencia se pueda formar la matriz de incidencia y viceversa.

Matriz potencia. Al multiplicar la matriz de adyacencia o elevarla a alguna potencia, el resultado de esa operación es otra matriz cuadrada de orden n, simétrica más no binaria.

Probabilidad. El término probabilidad está ligado al grado de *incertidumbre* que existe sobre la ocurrencia de un acontecimiento. De manera que cuando se habla de una probabilidad pequeña se asocia la idea con una gran incertidumbre y cuando se habla de un acontecimiento con probabilidad 1 seguramente ocurrirá el acontecimiento y desaparecerá la incertidumbre. Esto es, a la incertidumbre se le pueden asignar números para medirla, llamados probabilidades.

Punto muestral. A cada uno de los resultados posibles se le llama punto muestral o evento elemental.

Relaciones digráficas. $G = \{V, E, \Upsilon\}$

Sea un conjunto de objetos X donde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y una relación binaria R el par (x_i, x_j), es cual puede escribirse como $x_i \, R \, x_j$. Cada relación R de un conjunto X es definida para cada par de vértices (v_i, v_j). Los objetos de X están representados por vértices, cada vértice es un objeto que debe pertenecer forzosamen'e al conjunto X. Si el objeto x_i está relacionado con x_j, en la digráfica, debe existir forzosamente una línea dirigida que una el vértice v_i con el vértice v_j.

Relación reflexiva.

Si se tiene una relación R puede suceder que objeto exista una relación a si mismo. Tal relación en un conjunto X que satisface x_i relacionado con x_j tal que i es igual a j $\forall x_i \in X$ es llamada relación reflexiva, se representa por medio de un loop en la digráfica correspondiente a la cual se le denomina digráfica reflexiva.

Relación simétrica.

Si se tiene una relación R en la cual $\forall$ par de vértices v_i , v_j, existe una relación de v_i a v_j (v_i R v_j) y también existe una relación de v_j a v_i (v_j R v_i) la digráfica correspondiente es conocida con el nombre de digráfica simétrica.

Relación transitiva.

Una relación R se dice transitiva si para cada par de vértices (v_i , v_j) existe una relación de v_i a v_j y una relación de v_j a v_k existe entonces una relación de v_i a v_k .

Relación de equivalencia.

Una relación R se llama de equivalencia si cumple con ser una relación reflexiva, simétrica y transitiva. La digráfica correspondiente se llama digráfica de equivalencia.

Simulación.

Los modelos *representan* la realidad, la simulación la *imita*. La simulación siempre implica la manipulación de un modelo; en efecto, esta es una forma de manipular un modelo de manera que produzca una imagen dinámica de la realidad. La simulación puede emplear modelos analógicos, icónicos o simbólicos. En la simulación simbólica se desea evaluar una expresión en un ecuación o la ecuación completa donde uno o más componentes son variables estocásticas.

La simulación es útil para:

- ❶ Estudiar procesos de transición, la simulación hace posible captar la "imagen" de esta transición y determinar sus características.
- ❷ Estimar los valores de los parámetros del modelo o su forma funcional.

- Discutir cursos de acción que no se pueden formular dentro del modelo. (juegos operacionales).

La simulación es una manera de operar el modelo para que imite a la realidad. Tiene un valor particular cuando el modelo contiene expresiones estocásticas que son difíciles o imposibles de evaluar analíticamente. La base de la simulación es el muestreo aleatorio de los valores posibles de la variable. Por tanto, para llevarla a cabo se requieren números aleatorios que deben convertirse en aleatorios variables a partir de la distribución relevante. Existen subrutinas disponibles para generar números (pseudo) aleatorios y para convertirlos en desvíos aleatorios. Se pueden utilizar varias técnicas par reducir la varianza de las estimaciones que se obtienen por medio de la simulación como el muestreo en orden de importancia, la ruleta rusa y el desdoblamiento, el uso de valores esperados, el muestreo sistemático, el muestreo estratificado, y la correlación y la regresión.

Teoría de probabilidad. La *teoría de la probabilidad* es capaz, de evaluar en forma cuantitativa aspectos importantes de lo que puede esperarse al observar acontecimientos aleatorios, estudia los métodos de análisis que son comunes en el tratamiento de fenómenos aleatorios, cualquiera que sea el área en que estos se presenten (física, química, biología, etc.). La probabilidad es, pues, la ciencia de los fenómenos aleatorios, en el sentido de que estudia las propiedades de estos fenómenos que dependen esencialmente del concepto de aleatoriedad y no de otros aspectos particulares.

La *teoría de la probabilidad* es la rama de las matemáticas que se encarga del estudio de la probabilidad; las matemáticas de la oportunidad. La teoría de la probabilidad se creó originalmente en relación con jugos de azar.

Unión de dos eventos *A* y *B*. La unión de dos eventos A y B representada por $A \cup B$, es el evento que consta de todos los elementos (resultados) contenidos en el evento A, en el evento B, o ambos.

Variable estocástica. Es aquella cuyo valor en cualquier momento del tiempo es una selección aleatoria de valores posibles de cierta distribución de probabilidad.

Vértice terminal. Son aquéllos vértices que se encuentran asociados por una línea.

Lista de símbolos

$\cong$	aproximado
$\mid$	dado que
$\neq$	diferente
/	división
$\in$	elemento de
$\exists$	existe
$\equiv$	identidad
=	igual
∞	infinito
$\forall$	para todo
%	porciento
$\pm$	más menos
>	mayor que
$\geq$	mayor o igual que
$\leq$	menor o igual que
<	menor que
*	multiplicación
$\notin$	no pertenece a
$\not\subset$	no subconjunto de
$\sqrt{}$	raíz cuadrada
-	resta
Σ	sigma, operador suma
$\subset$	subconjunto
$\subseteq$	subconjunto de o igual al conjunto
+	suma
$\rightarrow$	tiende a
$\cup$	unión

$A_1, A_2, \dots, A_i,$	cursos alternativos de acción; estrategia factible
$E_1, E_2, \dots, E_j$	estados de la Naturaleza
$E(X)$	valor esperado de la variable aleatoria X
$f(x_i)$	función de la variable explicativa
ε_j	premio; evento elemental
$\varepsilon_i > \varepsilon_j$	el premio ε_i es preferible al premio ε_j
$\varepsilon_j > \varepsilon_i$	el premio ε_j es preferible al premio ε_i
$\varepsilon_i \sim \varepsilon_j$	es indiferente tener el premio ε_i o ε_j
L	lotería elemental; lotería de una sola etapa en donde se tiene $L = \{(p_1, \varepsilon_1), (p_2, \varepsilon_2), \dots, (p_m, \varepsilon_m)\}$
$L(\varepsilon_j)$	lotería de recurrencia en donde $L(\varepsilon_j) = \{(\mu, \varepsilon_1), (1 - \mu, \varepsilon_m)\}$
$\mathcal{L}$	lotería de dos etapas donde $\mathcal{L} = \{(q_1, L_1), (q_2, L_2), \dots, (q_k, L_k)\}$
μ_j	índice de utilidad
$\mu_j = \mu(\varepsilon_j)$	función de utilidad
$\mu_L = \sum_{j=1}^{m} \mu_j p_j$	función esperada de la lotería L
$P(E)$	probabilidad de ocurrencia del evento E
$P(E')$	probabilidad de ocurrencia del evento complemento de E
$P(E_1 \cup E_2)$	probabilidad de ocurrencia del evento E_1 o del evento E_2
$P(E_1 \cap E_2)$	probabilidad conjunta de ocurrencia del evento E_1 y E_2
$P(E_1 / E_2)$	probabilidad condicional de ocurrencia del evento E_1 dado que haya ocurrido el evento E_2
$P(S) = 1$	probabilidad del espacio muestral es igual a uno
$p(X)$	distribución de probabilidad de la variable aleatoria X
$p(x_i)$	probabilidad de ocurrencia del evento tal que $X = x_i$
R_{ij}	resultados de la matriz de decisiones
S	espacio muestral
VEIP	valor esperado de la información perfecta; costo de la incertidumbre;
VME	valor monetario esperado
x_i	variable explicativa
X	variable independiente
Y	variable dependiente

Nota.

Por cuestión de espacio, la nomenclatura utilizada en el modelo del juego, no se expresa aquí, la definición de cada una de las variables y constantes empleadas en el modelo, así como su notación simbólica se encuentra en el capítulo 5.

Lista de tablas y figuras.

Pag.

RESUMEN

Desde siempre el hombre ha jugado. Un juego es un artificio para proporcionar experiencias de peligro y de conflicto mientras se excluyen sus realizaciones físicas, el juego pone de manifiesto las tensiones y problemas de nuestra condición humana y está íntimamente entretejido de nuestra personalidad, en el juego se encuentra una forma de aprender, de fantasear, de interaccionar o convivir con otras personas, de hacer ejercicio físico y/o mental, de ponerse a prueba a uno mismo, de ser reconocido por los demás y de contrarrestar las tensiones. Además el estres de las grandes ciudades pide formas de escape y el juego es una de ellas que tiene la cualidad de no ser nociva.

Por otra parte, dada la urgencia de producir productos que estén al nivel de cualquier producto internacional de alta calidad, es que surge la necesidad de esta investigación. En la que se dan las reglas de un nuevo juego de mesa. Se parte primero de una idea, para obtener un prototipo inicial, el cual se estudia dándole un enfoque matemático de manera que se sugieran o se propongan nuevas reglas, se les de una justificación matemática e incluso se refinan, obteniendo así la proposición de las reglas finales del juego. Ahora bien, el modelo propuesto describe el desarrollo del juego en forma simbólica.

El modelo desarrollado es un modelo matemático múltiple que consta de 4 partes principalmente, correspondientes a las 3 fases del juego y a la estrategia sugerida a los jugadores en la segunda de estas fases. Es múltiple porque esas partes se resolvieron individualmente y se tomaron las salidas de unos modelos como la entrada de otros. Tanto el modelo propuesto como su implementación computacional tienen el propósito de:

- Dar formalidad a la creación de este nuevo juego.
- Realizar la presentación del juego.
- Explicar sus reglas de una manera clara.
- Realizar el juego con la computadora.
- Observar el desarrollo del juego con las reglas planteadas.
- Poder modificar las reglas.
- Dar a las reglas del juego una base teórico-matemática.
- Refinar las reglas propuestas y poder proponer las reglas finales del juego.
- Sugerir estrategias a los jugadores de este nuevo juego.

La representación simbólica de los elementos del juego, que son: Los movimientos tanto aleatorios como personales, el número total de jugadores, los jugadores, el jugador en turno, las alternativas de cada movimiento, el número de alternativas, la alternativa elegida, las probabilidades de las diversas alternativas, los pagos para cada jugador al efectuarse algún movimiento y al final del juego, el estado de información de cada jugador en cada

decisión que él tiene que realizar, el tablero, las fichas, etc., así como la aplicación de las reglas del juego, son desarrolladas específicamente para este juego.

La manipulación del modelo se hace mucho más sencilla gracias a la computación. El modelo se implementó computacionalmente en lenguaje C++. Y se proporcionan al lector: El manual del programador, el manual del usuario (para un hacer más fácil la operación del sistema), el código del sistema y algunas corridas; con el objeto de que el usuario tenga una idea más clara de su programación, e incluso, si desea modificar las reglas del juego pueda observar el desarrollo del mismo. Cabe señalar que en su mayoría, se definieron funciones matemáticas para obtener el valor de las variables requeridas por el sistema.

La implementación computacional del modelo, queda abierta para que en un trabajo posterior se le pueda dar animación, quizá con la digitalización de imágenes y con los recursos multimedia para obtener así un juego computacional de excelente calidad y muy atractivo.

El análisis de la presente tesis tiene como base a la teoría de juegos, a los juegos diferenciales, a la teoría de decisiones, a la teoría de probabilidades, específicamente al análisis combinatorio, así como algunos conceptos de la teoría de gráficas y del álgebra matricial; también retoma aspectos psicológicos relacionados con los juegos y datos históricos de la cultura Azteca plasmándolos en las reglas del juego. Cabe mencionar que este trabajo forma parte de un proyecto interdisciplinario (con la Licenciatura de Diseño Industrial), que consiste en la invención de un nuevo juego de mesa, por lo que además se toman en cuenta aspectos estéticos y comerciales (en otra investigación).

Así pues, a esta tesis corresponde únicamente el aspecto funcional del juego.

ABSTRACT

Trough the years the mankind has been played games; the boardgame is an screen that gives us hazardous and conflict experiences without physical risks. This kind of games shows the problems and downs of our human nature and it's intimate attached to our personalities, in the game we can find a way to learn, dream interact or meet other people. Make physical or mental exercise, prove ourselves, be noticed by the others or get down our tensions. Besides the big city's stress demands others ways to escape of it, and the games (any kind) it's one of the best 'cause it isn't novice.

By other way with the urgency to make first rate products that could be at the level of high quality international market at the worldwide it's the needing of this research in which we gives the new rules of a board game. First we start of an idea, wichone we study to reach an a prototype, which I study with a mathematical point of view in fact we propose new rules given them a theoric-mathematic justification for get the final rules of the game. Well now, the proposed math model describes the performance of the game.

Tee developed math model it's a multi-model game which its has 4 principal episodes which them belongs to the 3 phases of the game and the suggested strategy for the players in the second phase. It's multi-model because wichone of this parts was individually resolved and every finish was counted as a start for another. The suggested math model as well as his computer implementation has the following proposes:

- Give a fprmality to the creation of this new game
- Make the presentation of the game.
- Explain his rules in an easy way.
- Realize the game in a computer without an human opponent.
- Evaluate the performance of the rules of the game and in if it's needed modificate them.
- With an theoric-math base give the rules of the game.
- Modificate the prototype rules with the meaning of reach the best performance of them in the final game.
- Suggest strategies of the game to the players.

The symbolic representation of the game's elements are: The aleatory and personal moves, the total number of players, the players an the player in turn, the alternatives in every move, the number of alternatives, the chosen alternative, the probability of every alternative, the payme"ts of every player in every move and in the finish of the match. The status of every player in every decision of he makes, the board, the chips etc., as well as the applications of the rules was developed specifically for this game.

The manipulation of this math-model makes easier thanks of the computation. The model was used in C++ language and they are given to the reader. the programmer's manual. The user's manual (to make easier the use of the system), the code of the system and some running are included with the meaning of a better comprenhesion of the system and if he wishes modify it by himself by the performance of the game indeed. It's better include the math functions for obtain the request variables for the system.

The computational implementation of the model was open because in a further work it has the chance to give it animation, maybe with the digitalization of images and with another multimedia sources get a first rate product.

In the present thesis analysis has the game's theory, the differential players, the decision's theory, the probability theory and specially combinatory analysis theory as base as well as some concepts of the graphic theory and matrix algebra, takes psychological aspects with the games, historic dates of the Aztec culture and put all together in the rules of the game. the present work is an interdisciplinary with the Industrial Design Bachelor which it consists in the idea of the game an some commercial and design aspects (in other research).

As well as this thesis only looks the functionally aspects of the game.

INTRODUCCIÓN.

Los juegos son una parte fundamental de la vida humana. Al hombre le gusta probar sus fuerzas y habilidades. Tienta a otras personas a jugar con él e inventa cosas con las que jugar. El recién nacido juega con los dedos de las manos y los pies, incita a los adultos a jugar con él y a compartir sus juegos. Los niños pequeños disfrutan revolcándose los unos sobre los otros. Los adultos también juegan, incluso llegan a pagar a otros para enfrentarse con dichos juegos. ***Jugar es humano.***

Además, el hombre necesita contrarrestar por algún medio las tensiones que producen problemas en las relaciones humanas tales como: enojo, angustia, agresividad, aburrimiento, generadas por el ajetreo de las grandes urbes. Estos medios pueden ser positivos y negativos. Los negativos son aquellos que no permiten la descarga total de las tensiones dando origen a otro tipo de tensiones, causando daño físico y/o mental; estas pueden ser fumar, beber, comer, utilizar enervantes, etc. Los positivos son aquellos que permiten una descarga casi total de las tensiones, no crean daños posteriores ni adicciones; las actividades que pertenecen a este grupo son: deportes, actividades recreativas, pasatiempos y juegos.

Un juego es: una situación en la que dos o más jugadores (*tomadores de decisiones*) seleccionan cursos de acción y en la que el resultado se ve afectado por la combinación de selecciones tomadas colectivamente, es decir, los jugadores *interaccionan*. Una característica fundamental en los juegos es el *conflicto*. El conflicto puede originarse cuando un grupo de personas cuyos intereses son contrapuestos actúan sobre un mismo proceso, o bien, siempre que es necesario tomar una decisión respecto de ciertas acciones sobre un objetivo y los resultados finales de estas acciones solamente pueden estimarse en una forma *probabilística*. Rapoport, identificó tres modelos de conflicto: Luchas (en las que el objetivo es eliminar al oponente), juegos (en los cuales el objetivo es sacar ventaja al oponente, es decir, ser más astuto que el oponente, pero sin eliminarlo) y debates (en los que el objetivo es convencer al oponente). La teoría clásica de Von Neumann y Morgenstern, desarrollada en 1944, se ocupó de los juegos. Se sabe también que *la teoría de juegos* y *la teoría de decisiones* son dos secciones de las matemáticas que estudian los métodos de toma de decisiones racionales en situaciones de conflicto, por tanto, *la funcionalidad de los juegos está íntimamente relacionada con las matemáticas*. Además de que la representación simbólica de la realidad por medio de modelos matemáticos, permite una más fácil descripción, explicación y manipulación de ésta sin necesidad de exponerla.

Existen juegos informales, en los cuales las reglas son dichas en forma vaga, produciendo disputas sobre las reglas por permitir que se desarrollen situaciones que las reglas no arbitran. Un *juego diseñado formalmente* elimina esta posibilidad porque las reglas cubren todas las contingencias encontradas en el juego.

Por otra lado, el desarrollo de nuevos productos es una de las tareas de mercadotecnia que es muy susceptible a los éxitos de largo término de una empresa. Hoy y siempre México ha requerido de la producción de artículos de excelente calidad para poder competir a nivel nacional e internacional; esto se logra cuidando todos los detalles que involucran la creación, producción y comercialización de éstos. Actualmente la crisis económica de México ha dado lugar a la sugerencia de consumir productos nacionales, pero no por eso se está excento de hacer el mejor esfuerzo por comercializar excelentes productos, ya que tanto los consumidores nacionales como los extranjeros merecen la adquisición de buenos productos. No debe olvidarse que está en vigor el Tratado de Libre Comercio el cual es una opción para la exportación de productos mexicanos y así ayudar a la economía de este país.

¡ Crear un nuevo juego resultaría algo muy interesante !

Carla Maritza Guillén Domínguez y Maritza Valencia Román, pasantesde la Licenciatura de Diseño Industrial, eligieron como tema de tesis el diseño de un nuevo juego de mesa. Para llevar a cabo este proyecto, es conveniente considerar y evaluar la mayor variedad posible de los aspectos del diseño, entonces, si se desea que el juego tenga el carácter de formal y más aún si se pretende comercializar ***es necesario sustentarlo en un estudio matemático,*** ésta es la razón para la creación de un equipo interdisciplinario de investigación.

Todo lo anterior da origen a esta investigación, cuyo objetivo es ***diseñar y analizar con un enfoque matemático*** al nuevo juego en su aspecto puramente funcional.

Este nuevo juego se llamará *TACHTLI*. La palabra *TACHTLI* viene del vocablo azteca "TLACHTLI", que significa juego sagrado de pelota, si se le quita la primera letra "l", resulta la palabra *TACHTLI* que es el nombre de un nuevo juego de mesa en proyecto.

TACHTLI está inspirado en una de las culturas más importantes de México tanto por su arte, su lengua, su organización social y política como por su pensamiento mitológico y teológico, siendo ésta la cultura azteca. De esta cultura se tomaron algunos aspectos relevantes que se hacen notar en las reglas del juego, es importante señalar esto porque podrían surgir preguntas tales como: ¿Por qué este número máximo de jugadores?, ¿por qué este tipo de fichas?, ¿por qué este valor de las fichas?, ¿por qué este tipo de casillas?, etc., cuyas respuestas tienen una base histórica y que a su vez son aspectos fundamentales en la funcionalidad del juego quien es objeto de estudio en esta investigación. Cabe señalar, que no se desea representar la historia tal cual, sino únicamente hacer un juego de entretenimiento.

Como se está partiendo desde cero para la invención de este juego, si se pretende hacer un buen diseño de él, deben considerarse también aspectos psicológicos en su funcionalidad, para determinar incluso el tipo de consumidores a los que va dirigido (personas mayores de 17 años) y obtener un juego funcional en todos sus aspectos, es decir, un juego atractivo, divertido, dinámico, que tenga solución, etc.

Las bases que se tomaron para la creación de *TACHTLI* son: Un tablero con un diseño prehispánico, competencia entre los jugadores, decisión de los jugadores, el azar y el tiempo. Para lograr la forma en la cual se pudieran conjugar todos estos aspectos en el juego, se optó por el método científico, cuyos pasos son: 1) observación (¿por qué las personas juegan?, ¿qué hace a un juego más atractivo respecto de otro?, ¿cuándo se tiene una situación competitiva?, ¿cuáles son los axiomas de la teoría de juegos?, ¿qué es un juego diferencial?, etc.), 2) definición del problema (inventar las reglas de un nuevo juego inspirado en la cultura azteca), 3) formulación de una hipótesis (prototipos del juego), 4) experimentación (jugar con esos prototipos y obtener el más allegado a los aspectos propuestos. Cabe mencionar que la evolución de los prototipos propuestos fue desarrollada en forma conjunta con Carla M. Guillén y Maritza Valencia) y 5) verificación (por medio de un enfoque matemático comprobar y/o sugerir las reglas que arbitren las posibles situaciones encontradas en el juego).

Finalmente se obtuvo un juego dividido en tres secciones: inicio, primera etapa y segunda etapa, el inicio tiene como objetivo la repartición inicial de las fichas entre los jugadores y es meramente un juego de azar; la primer etapa tiene como objetivo hacer un filtro entre los jugadores para determinar a aquellos que continúan jugando, aquí se tiene un juego en el que el resultado de la decisión de los jugadores depende de la situación que guarde el juego en ese momento (juego diferencial); por último la segunda etapa consta de objetivos diferentes para cada uno de los jugadores, esta etapa al igual que la segunda se trata de un juego diferencial, pero es más estratégica que la primera.

Por tanto, el modelo planteado es un modelo múltiple que consta de 4 modelos: el primero de ellos es un modelo probabilístico que permite conocer las probabilidades de localizar en el tablero ciertas fichas para su distribución inicial y su posterior utilización en el juego, con este resultado se hace la simulación de este experimento aleatorio y se llega a la definición de una de las primeras reglas del juego. El segundo modelo es de decisión bajo riesgo que proporciona al jugador en turno la estrategia para su correspondiente ficha en movimiento en base al criterio del valor monetario esperado. El tercer modelo describe la situación que guarda el juego en determinado momento de éste, simula el desarrollo del juego en la segunda etapa y proporciona al jugador toda la información que requiere al efectuar su jugada. Es de mencionar, que el uso de matrices es de gran utilidad para la elaboración de este modelo, que consiste en una serie de ecuaciones que representan en forma simbólica la aplicación de las reglas del juego. El cuarto y último modelo es un modelo integrado por un conjunto de ecuaciones que permite observar la evolución del juego en la segunda etapa, aquí nuevamente se emplea la notación matricial para la obtención del modelo. Estos modelos, facilitan la variación de las reglas del juego si en algún momento dado quisieran modificarse. Dichos modelos se implementaron computacionalmente, permitiendo así la comprobación de su validez y también la presentación del juego (sin necesidad de jugarlo con personas reales, sino con la computadora misma); es de señalar que este sistema computacional del juego puede utilizarse como base para un posterior trabajo al que únicamente restaría darle animación por medio quizá de la digitalización de imágenes y el uso de recursos multimedia para hacer en determinado momento de *TACHTLI* un juego computacional de vanguardia.

La presente investigación está organizada de la siguiente manera: Se inicia en el Capítulo 1 con una definición de modelo, más específicamente de los modelos matemáticos, sus ventajas y desventajas, sus elementos, su clasificación y se dan unos tips para su desarrollo. En el Capítulo 2 se hace referencia a la Teoría de Decisiones y al modelo de decisiones en la I de O. El Capítulo 3 trata de las situaciones competitivas, la Teoría de Juegos y los Juegos No Diferenciales. Como se ve, los tres primeros capítulos son la base teórica sobre la cual descansa esta investigación, en la que no se pretende profundizar, sino únicamente tener presentes conceptos que son de gran utilidad en la elaboración de los modelos propuestos. El capítulo 4 describe los aspectos psicológicos, históricos e incluso comerciales (tipos de juegos y juguetes en el mercado) que se tomaron como base para la invención de las reglas del juego, también se hace mención de la importancia de la minimización de información en la creación de dichas reglas, dentro del proceso de evaluación de un nuevo producto y finalmente se narra como fueron evolucionando los prototipos del juego hasta obtener el más convincente. Con estos aspectos de fondo se sigue en el capítulo 5 con la formulación de cada uno de los modelos descritos anteriormente, para lo cual, se hace primero el planteamiento del problema para los jugadores en cada fase del juego; cabe mencionar que al ir desarrollando este modelo múltiple, fueron surgiendo observaciones que ayudaron a refinar las reglas del juego. Para que no quedara este modelo en el aire, se realizó su implementación computacional, programándolo en lenguaje C++, el manual del usuario y el manual del programador se presentan en el capítulo 6. En base a las corridas efectuadas de dicho sistema se obtuvieron una serie de resultados (ejemplificados con éstas) que permitieron refinar, o bien, justificar aún más las reglas del juego y así obtener las reglas finales de éste, mismas que se dan en el capítulo 7 y último de esta investigación, cabe señalar que en él se proporcionan una serie de sugerencias a los jugadores de *TACHTLI* para ganar el juego, así como también importantes datos probabilísticos sobre el juego. El último apartado de esta investigación es el de las conclusiones y/o recomendaciones, en el que se dan las conclusiones generales de la investigación y algunas sugerencias al lector a cerca de como formular los problemas en forma simbólica. Además, se anexa un apartado que trata del análisis combinatorio y da las definiciones de probabilidad, ya que estos son también aspectos teóricos fundamentales en esta tesis; por último se proporciona al lector el listado del sistema que simula al juego.

Finalmente, deseo dar mi agradecimiento a aquellas personas que de alguna manera hicieron posible la realización de esta investigación, en especial al Maestro en Ciencias Lucio Pérez Rodríguez por su dirección y apoyo.

CAPÍTULO 1.

MODELOS.

"El que trabaja en la elaboración de un modelo es más un artista que un científico."

Patrick Rivett.

Dada la importancia de poder contar con una base sólida en el desarrollo del capítulo 5, referente a la formulación de los modelos matemáticos que representan el juego, es que se pensó en incluir este capítulo. Donde se inicia con la definición del término modelo, se continúa con la clasificación de los modelos y se profundiza un poco más en los modelos matemáticos mencionando sus ventajas y desventajas, sus tipos, así como unos tips para su elaboración.

1.1 DEFINICIÓN DE MODELO.

Los modelos son representaciones de la realidad. Si fuesen complejos y difíciles de controlar como la realidad, no habría ninguna ventaja en utilizarlos. Afortunadamente, en general, se pueden construir modelos que son mucho más sencillos que la realidad y, a la vez, pueden utilizarse para predecir y explicar fenómenos con un alto grado de precisión. Pues, a pesar de que pueda requerirse un gran número de variables para predecir con exactitud perfecta un fenómeno, normalmente basta un número pequeño de variables para lograrlo. Por supuesto, el arte está en encontrar el número de variables adecuado y su interrelación correcta.

Robert J. Thierauf en su libro titulado *Toma de decisiones por medio de I de O* da la siguiente definición de modelo:

> *"El modelo es una representación o abstracción de una situación u objeto reales, que muestra las relaciones (directas e indirectas) y las interrelaciones de la acción y la reacción en términos de causa y efecto. Como un modelo es una abstracción de la realidad, puede parecer menos complicado que la misma. Para que sea completo, el modelo debe ser representativo de aquellos aspectos de la realidad que está investigándose"*[1].

Entonces, un modelo es una *representación simplificada* de un sistema (o evento) real, por medio de abstracciones, que se realiza con algún objetivo particular.

A continuación se van a ver los tipos de modelos en forma general y posteriormente se particularizará en los modelos matemáticos.

1.2 TIPOS DE MODELOS.

Son 3 tipos de modelos los que se utilizan en casi toda la ciencia:

- icónicos,
- analógicos y
- simbólicos.

---

[1] Thierauf, Robert J. *Toma de decisiones por medio de I de O.* Ed. Limusa, 1991, pág. 24.

En los modelos **icónicos**, las propiedades relevantes del fenómeno real se representan de acuerdo con las mismas propiedades, normalmente con un cambio de escala. De aquí que, estos modelos se ven como lo que representan, pero difieren en tamaño, son *imágenes*. Algunos ejemplos comunes son las fotografías, dibujos, mapas, etc. En general, los modelos icónicos son específicos, concretos y difíciles de manejar para fines experimentales.

Los modelos **analógicos** pueden representar situaciones dinámicas y se usan más que los icónicos en cuestiones experimentales, porque pueden mostrar las características del acontecimiento que se estudia. Las curvas de demanda, las curvas de distribución de frecuencia en las estadísticas y los diagramas de flujo, son ejemplos de modelos analógicos. Al transformar las propiedades en propiedades analógicas, con frecuencia se puede incrementar la capacidad de hacer cambios.

Los modelos **simbólicos** comienzan como modelos abstractos que se forman en la mente y que luego se registran como modelos simbólicos. Los modelos simbólicos utilizan letras, números y otros tipos de símbolos para representar las variables y sus relaciones. De aquí que sean el tipo de modelo más general y abstracto. Normalmente son los más sencillos de manejar experimentalmente. Los modelos simbólicos toman la forma de relaciones matemáticas (ecuaciones o inecuaciones) que reflejan la estructura de lo que representan.

Los modelos se pueden también separar por categorías:

❶ modelos cualitativos y
❷ modelos cuantitativos.

Hay muchos problemas que no pueden cuantificarse exactamente debido a uno o más de los siguientes motivos: técnicas inadecuadas de medición, necesidad de muchas variables, algunas variables desconocidas, relaciones especiales desconocidas y relaciones con todas sus peculiaridades y excepciones que son demasiado complejas para expresarse en forma cuantitativa.

Cuando se construye un modelo matemático y se insertan símbolos para representar constantes y variables (en gran parte números), se llama a este modelo cuantitativo. Las fórmulas, matrices o series de valores que se obtienen mediante procesos algebraicos son ejemplos comunes de modelos matemáticos.

1.3 MODELOS MATEMÁTICOS.

El modelo matemático es una estructura cuantificada, por la cual se liga entre sí, en términos numéricos, la configuración de la relación de causa y efecto obtenida de una realidad.

1.3.1 VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS.

Una ventaja importante de la construcción de modelos es que suministra un marco de referencia para la consideración del problema, o sea, que el modelo puede indicar huecos que no sean inmediatamente aparentes.

Otra ventaja de los modelos es que permiten variar parámetros sin tener que iniciar la construcción real de algún proyecto.

Tan pronto como un problema se expresa en notación matemática y en forma de ecuaciones, existe la ventaja de la facilidad de manipulación de las matemáticas.

El lenguaje simbólico ofrece muchas ventajas para la comunicación, porque permite una expresión precisa del problema en contraste con la descripción verbal. Puede integrarse fácilmente con otros trabajos en el mismo lenguaje. El empleo de formas matemáticas permite una mejor descripción y comprensión de los hechos, presenta factores y descubre relaciones que se olvidaron en la descripción verbal del fenómeno en estudio.

Los modelos matemáticos tienen la capacidad de exponer las abstracciones de un problema. Al considerar un mundo complejo, el individuo tiene que escoger aquellos atributos y conceptos que son aplicables. El modelo matemático indica qué datos hay que obtener para tratar el problema en forma cuantitativa. Hace posible ocuparse del problema en su totalidad y permite considerar simultáneamente todas las variables importantes del problema. Puede usarse una computadora para manipular las variables y factores principales de un modelo, lo que facilita la consideración de cada elemento importante.

Los modelos matemáticos tienen sus inconvenientes, uno de ellos es el problema tratado con abstracciones, lo que significa que el modelo puede requerir una simplificación exagerada, esto hará que refleje el mundo real de un modelo inexacto. Otro problema de la abstracción consiste en no tener en cuenta todas las excepciones, provocando un error de omisión o comisión. Además es difícil definir todos los elementos de un modelo en términos matemáticos y llevarlos a papel. Al final del proceso inicial de abstracción, el modelo puede ser tan complejo que se hace muy difícil documentar los elementos en forma apropiada creando una gran dificultad para hacer cambios correctos en el modelo (estos cambios podrían deberse a que pueden ocurrir condiciones cambiantes que afectan al sistema en estudio -productos, mercados, gobierno, la sociedad, etc.- por lo anterior, debe revisarse periódicamente el modelo para determinar si es conveniente hacer algunos cambios o incluso construir un nuevo modelo).

Aveces los modelos pueden ser muy costosos en su creación si se comparan las utilidades que se esperan al usarlos. Por ejemplo en un caso de administración, no sólo se trata de ingresos y costos marginales, sino también de comunicación con el personal administrativo que no comprende las técnicas ni los modelos y por consiguiente, tiene una gran dificultad para aceptar los resultados. A menudo es más eficiente emplear métodos directos que los complicados modelos matemáticos.

1.3.2 ELEMENTOS QUE CONSTITUYEN UN MODELO MATEMÁTICO.

El modelo matemático como ya se dijo, puede resultar ser una serie de ecuaciones o inecuaciones, cada una de las cuales es una traducción de la descripción en lenguaje corriente de algún aspecto relevante del problema real.

Los componentes de las ecuaciones y de las inecuaciones son:

- variables,
- parámetros (constantes) y
- operadores.

Si en el análisis no se permite que cambie una influencia particular entonces se convierte en un **parámetro**, en contraposición a aquellas influencias que se supone están variando y que se llaman **variables**. Las variables, representan las distintas partes del sistema. Los parámetros son factores de ponderación dentro de las ecuaciones de un modelo, pueden también representar características esenciales que definen a una población.

Las variables pueden ser de dos tipos:

- determinísticas (se pueden predecir con certeza) o
- estocásticas (no se pueden predecir con certeza);

o bien, las variables son:

- endógenas (dependientes) o
- exógenas (independientes);

a su vez, las variables son:

- contínuas o

- discretas.

En forma matemático-algebraica, un modelo debe consistir de al menos tantas ecuaciones como cantidades desconocidas se tengan. El número de cantidades o variables en un modelo será frecuentemente más grande que el número total de ecuaciones, esto es porque se supone que algunas de las variables actúan como datos para el modelo, i.e, afectan a las desconocidas pero no son afectadas por ellas, y se llaman **variables casuales o exógenas**; las que no se conocen se denominan como **variables endógenas**. Estas se determinan dentro del modelo, i.e., se explican en el modelo, aquellas son externas al sistema de ecuaciones a la mano, i.e., pueden afectar a las variables en el modelo pero no se hace ningún esfuerzo por explicarlas con el modelo. El número de unas y otras variables depende de qué tan potente sea el modelo a la mano para explicar a las variables. Los modelos simples tienen pocas variables endógenas y muchas exógenas, mientras que en los modelos complejos es al revés.

Las variables endógenas pueden ser variables *objetivo*, cuando se les fija un nivel a alcanzar o un comportamiento en el tiempo.

Las variables exógenas, además, pueden ser *controlables* o *no controlables*.

Tanto los **parámetros** como las variables exógenas se determinan fuera del modelo, la diferencia entre ambos es que en el análisis los parámetros no cambian mientras que las variables exógenas si pueden hacerlo. En efecto, mucho del análisis de los modelos matemáticos tiene que ver con la determinación de las implicaciones para las variables endógenas de cambio en las variables exógenas dados los parámetros del sistema. Las variables endógenas pueden usarse como exógenas siempre y cuando se tomen con retraso.

Si los parámetros no son conocidos, se sustituyen por estimaciones.

Los operadores indican la relación que existe entre los elementos del sistema y pueden ser tales como: = (ecuaciones o igualdades), ≠, >, <, ≥, ≤ (inecuaciones o desigualdades).

1.3.3 TIPOS DE MODELOS MATEMÁTICOS.

Los modelos matemáticos pueden clasificarse de acuerdo con:

- su objetivo,
- su tipo de análisis,
- el tratamiento de la aleatoriedad, y
- la generalidad de su aplicación.

Con respecto a su objetivo o finalidad, existen modelos:

- descriptivos,
- explicativos,
- de pronóstico,
- de optimización y
- de control.

Modelos descriptivos. Simplemente expresan el tipo de comportamiento del fenómeno. En algunas situaciones un modelo se construye sencillamente como descripción matemática de una condición del mundo real. Se usan para aprender más sobre algún problema, además pueden emplearse para mostrar más gráficamente la situación, para ver en qué forma puede arreglarse de nuevo y para determinar los valores de la misma que están implícitos en las circunstancias atenuantes, pero que no son claramente visibles para el observador. Si hay selecciones el modelo las mostrará, y puede ayudar al observador a evaluar los resultados de una selección sobre los de otra. El modelo descriptivo tiene la capacidad de solución. Sin embargo, en ese modelo no se hace intento alguno para escoger la mejor alternativa, sino tan sólo describir las selecciones presentes. Generalmente, estos modelos contienen variables controlables.

Modelos explicativos. Pretenden relacionar el comportamiento causa-efecto del fenómeno. Con frecuencia es necesario construir modelos descriptivos como paso preliminar en el desarrollo de un modelo de decisión explicativo. En general, los modelos explicativos no contienen variables controlables.

Modelos de pronóstico. Se utilizan para predecir el comportamiento futuro o bajo ciertas circunstancias.

Modelos de optimización. Tiene como objetivo lograr el mejor valor de una función, ya sea de costos o de ganancias. Se debe tener presente que es posible no llegar a una solución óptima cuando se usa un enfoque demasiado estrecho dentro de un problema. Cuando un modelo de optimización se usa en forma apropiada, suministra la mejor alternativa de acuerdo con los criterios de entrada. Por consiguiente un modelo de optimización se ocupa de llegar a una solución óptima cuando se presentan alternativas.

Modelos de control. Su finalidad es mantener el fenómeno dentro de ciertos límites prefijados.

Por otro lado, con respecto al tipo de análisis, los modelos matemáticos pueden ser:

- analíticos o numéricos,

- lineales o no lineales,
- discretos o continuos,
- estáticos o dinámicos.

Los modelos matemáticos pueden enmarcarse en términos estáticos o dinámicos. En un **modelo estático**, todas sus ecuaciones son estáticas; en un **modelo dinámico** al menos una de sus ecuaciones es dinámica. Una relación es **estática** si no involucra una dependencia explícita del tiempo; el añadir sufijos de tiempo a las variables no convierte a una ecuación estática en dinámica. En una ecuación **dinámica** el tiempo juega un papel relevante; si, por ejemplo, aparecen en ella variables retrasadas se tendría una **ecuación en diferencia**, o si se contiene tasas de cambio en el tiempo de alguna de sus variables se da lugar a una **ecuación diferencial**.

En un modelo dinámico puede haber variables exógenas y endógenas, corrientes y retrasadas en ambos casos. Todas las exógenas y las endógenas retrasadas se llaman **variables predeterminadas** y las endógenas corrientes se denominan simplemente **variables endógenas**.

Los modelos matemáticos, respecto al tratamiento de la aleatoriedad son:

- determinísticos o
- estocásticos.

En el primer caso, los resultados se pueden predecir con certeza, no así en el segundo, ya que involucran variables aleatorias. Aunque ambos modelos se ocupan de acontecimientos presentes y futuros, en los modelos deterministas se usan valores precisos y determinados, mientras que esto no ocurre necesariamente en los probabilísticos. En vez de ello hay una base de experiencia pasada para calcular la probabilidad de que existan las condiciones pertinentes presentes y futuras.

De acuerdo a la generalidad de su aplicación, puede hablarse de modelos:

- pre-construídos o
- hechos a la medida de las necesidades.

Se tiene un **modelo hecho a la medida** cuando se usan los conceptos básicos de las diversas disciplinas y especialmente las matemáticas, para construir un modelo que se ajuste al problema de que se trate. La construcción de un modelo hecho a la medida puede extender el tiempo y el costo para resolver el problema de modo aceptable.

Modelos Múltiples. En algunos casos el modelo de la situación puede ser demasiado complicado o demasiado grande para resolverse. Frecuentemente es posible descomponer el modelo en partes que se puedan resolver individualmente y tomar la salida de un modelo como la entrada al otro.

1.3.4 FORMULACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO.

La construcción del modelo es el centro de la ciencia. La importancia de la construcción del modelo varía en las distintas ciencias y en general, está relacionada con la dificultad económica o física de la experimentación.

El modelo es la construcción cuantitativa y ordenada, dentro de la cual puede experimentar el científico.

Como ya se ha mencionado, los modelos permiten distinguir entre las variables controlables y no controlables, y también determinar la importancia relativa de cada una. Además permiten estudiar las relaciones de causa y efecto que pueden no ser fácilmente aparentes. En otras palabras, al modelar, se caracterizan matemáticamente las relaciones que gobiernan la interacción de los componentes del sistema y de las actividades endógenas y exógenas.

Al construir un modelo matemático se debe tener sumo cuidado de no construir una red de causa y efecto, que refleje lo que se desearía que sucediera en un bonito mundo ordenado, en lugar de otra que demuestre cuán desordenada puede ser la realidad.

El conjunto de establecimientos matemáticos es el que toma el constructor de modelos para reunir todo lo que es relevante en un problema "real". Puede verse que hay una base subjetiva en la construcción del modelo, porque la percepción de lo que es real será personal. Aunque las percepciones de la realidad fueran idénticas, los modelos construidos serían diferentes, ya que no hay un único modelo concreto. Además, la determinación de los aspectos relevantes para el que va a hacer uso del modelo no es totalmente clara. Lo que es importante para uno puede no serlo para otro. Por consiguiente, el modelo es tan personal para un científico, como un saque lo es para un jugador.

Pues bien, *modelar es más un arte, que una técnica*. Resulta imposible proporcionar reglas mediante las cuales se puedan construir modelos matemáticos. Sin embargo, se pueden proporcionar algunos marcos de referencia, que más que ilustrar los pasos de la modelación, dan criterios para discriminar la información que se utilizará en el modelo.

La mejor forma para iniciar la construcción del modelo consiste en detallar todos los componentes que contribuirán a la efectividad de la operacion del sistema. Una vez que se ha completado la lista de los elementos componentes, el paso siguiente consiste en determinar si deben usarse esos componentes[2]. Cuando se ha terminado con cada elemento, es necesario determinar si es fijo o variable (no controlable o controlable). Después de esa descomposición, el siguiente paso es asignar un símbolo a cada elemento, en donde por lo menos un símbolo represente la medida de eficacia[3] o ineficacia. Se puede construir una sola ecuación o una serie de ellas para expresar la eficacia del proceso o sistema. La(s) fórmula(s) resultante(s) es(son) un modelo simbólico o matemático de los elementos que se estudian, lo que permite valorar los resultados variando ciertos elementos dentro de las restricciones.

Existe el peligro de que la persona que construyó su modelo, se sienta tan satisfecho con su modelo que insista en que representa el mundo real cuando en verdad no lo hace. Como el modelo es una creación humana, un modelo sólo es tan bueno como su creador. Si el que lo construye no sabe lo que está haciendo, esto se reflejará en el resultado del modelo construido.

PATRONES DE CONSTRUCCIÓN DEL MODELO.

Russell L. Ackoff y Maurice W. Sasieni en su libro que lleva por título *Fundamentos de Investigación de Operaciones* hacen referencia a la calidad de un modelo diciendo:

> *"La calidad de un modelo depende principalmente de la imaginación y creatividad del investigador. La intuición, la perspicacia, y otras operaciones mentales que son esencialmente no regulables juegan un papel importante en el proceso. Por tanto, no es posible preparar un manual de instrucciones para la construcción de modelos. Si tal manual pudiera prepararse, sería más probable que se restringiera a estimular a la creatividad"*[4].

Y proponen ciertos patrones para poder estimular la imaginación y guiar la creatividad. Estos patrones varían dependiendo de la ambigüedad de la estructura del sistema que se estudia y de la facilidad de acceso que tenga el investigador a los trabajos internos del sistema. A continuación se va a narrar brevemente en que consiste cada uno de ellos. Se debe tener presente que estos patrones no son exclusivos ni exhaustivos.

---

[2] Aquí se puede apreciar claramente la base subjetiva en la construcción del modelo.

[3] Desde el punto de vista de la eficacia del modelo el criterio debe ser: ¿El modelo se ajusta a las condiciones que existen actualmente y a las de un futuro próximo? Debe tenerse presente que mientras un modelo puede ser bueno para un sistema puede no serlo para otro.

[4] Ackoff, R. L., y Maurice W. Sasieni. *Fundamentos de Investigación de Operaciones*. Ed. Limusa, 1987, pág. 78.

Patrón 1.

Este patrón ocurre cuando la estructura del sistema es lo suficientemente simple y clara como para entender por medio de una inspección y/o una discusión con quienes están implicados en y con el sistema.

Pero aún cuando un modelo apropiado sea fácil de construir o encontrar las variables no controlables y las constantes, pueden ser, muy difíciles o imposibles de evaluar. La situación de los estados ocasiona que se modifique el modelo, de manera que los parámetros que aparezcan en él, se puedan evaluar. Estas modificaciones con frecuencia son más difíciles que el análisis original, requiriendo a uno de los patrones que se van a describir.

Patrón 2.

En situaciones en las que la estructura es relativamente evidente, pero la forma de representarla simbólicamente no lo es, se puede muchas veces subscribir una analogía de la estructura del sistema problema a otro cuya estructura se conoce mejor. Entonces se usa ya sea el otro sistema análogo o el modelo simbólico de él, como un modelo del sistema problema.

Patrón 3.

En este tipo de situaciones la estructura del sistema no es evidente, pero puede extraerse por análisis de los datos que describen la operación del sistema. Los datos pueden estar disponibles o puede ser que sea necesario recopilarlos, pero en cualquier caso el análisis de ellos es para revelar la estructura del sistema. Realmente, el análisis produce hipótesis estructurales que requieren confirmación por medio de la utilización de otros datos diferentes a aquellos que se usaron en la generación de las hipótesis.

Patrón 4.

En situaciones en las que no es posible aislar los efectos de variables individuales por análisis de los datos de operación, quizá sea necesario recurrir a la experimentación para determinar qué variables son relevantes y cómo afectan la operación del sistema. El uso de la experimentación es la característica esencial de este patrón.

Patrón 5.

En esta última y más difícil situación no están disponibles o no se pueden obtener suficientes datos descriptivos sobre la operación del sistema y la experimentación sobre el mismo no se incluye. Esta parece una situación en la que nada se pude hacer, pero no necesariamente es así.

Véase el siguiente método. Primero, se construye una situación experimental relativamente compleja, la cual es la más simple que satisface las siguientes condiciones:

❶ Debe ser lo suficientemente rica para probar un gran número de hipótesis que se formulan acerca del sistema en estudio. Evidentemente tales pruebas no pueden confirmar hipótesis, pero pueden definir los límites de su generalidad y sugerir al mismo tiempo cómo se pueden generalizar. El propósito de este requisito es ligar la situación experimental a la realidad. La naturaleza de la unión se hace por medio de la segunda condición.

❷ Debe haber una formulación explícita de las variables y sus escalas a lo largo de las cuales se pueden llevar a cabo simplificaciones sobre la realidad. Esto hace posible que se enriquezca la situación experimental exitosamente, por medio de la adición de complejidades ya sea una a la vez o en combinación.

❸ El comportamiento relevante en la situación experimental debe poder describirse en términos cuantitativos.

❹ La situación debe ser susceptible de descomponerse en un conjunto de situaciones experimentales más simples y siempre que sea posible deben ser las que ya se han experimentado o las que se asemejan más a aquéllas sobre las que ya se ha hecho el trabajo.

La situación experimental que satisface estas condiciones se utiliza como una "realidad artificial". No se utiliza como modelo de la realidad, sino más bien como una *realidad que se va a modelar.* La realidad artificial se utiliza para generar una historia, que se va a explicar por medio de una teoría que se elaborará. La historia se genera por una prueba sistemática de hipótesis que se formulan acerca del mundo real, en el artificial. Los experimentos también se efectúan con las partes descompuestas de la realidad artificial, i. e., con juegos de conflictos sencillos. Se desarrollan "microteorías" separadas para cada uno de los experimentos simples o se construye una "microteoría" general para tales situaciones experimentales sencillas en las que las características de la situación entran como parámetros. Luego se hace un esfuerzo para agregar o generalizar estos modelos dentro de uno de la realidad artificial.

Simultáneamente se hace un esfuerzo para formular una teoría de la realidad artificial para "macroanálisis" directo de la historia que genera. Estos dos esfuerzos de modelado interaccionan hasta que se desarrolla un modelo satisfactorio (M_1) de la realidad artificial. Luego se modifica la realidad artificial a lo largo de una escala bien definida en la dirección de la realidad y se hacen los esfuerzos para generalizar el modelo anterior. El resultado es un modelo más general M_2, del cual M_1 es el caso especial. Este procedimiento se continúa con la esperanza de producir un conjunto de modelos sucesivamente generales,

M_1, M_2, ... , M_n. A medida que este conjunto se expande, se analiza para encontrar los principios que expliquen cómo deben generalizarse los modelos de la misma manera en que la realidad artificial se aproxima a la realidad. El desarrollo de tal metateoría (teoría del modelo o construcción de la teoría), debe ser posible seguirla por medio de grandes saltos hacia la realidad y posiblemente alcanzarla.

Para finalizar este capítulo, se va a decir que:

> *Quienes construyen modelos tienen dos objetivos: "hacer el modelo tan fácil de resolver y tan preciso como sea posible"*[5].

[5] Ackoff, R. L., y Maurice W. Sasieni. *Fundamentos de Investigación de Operaciones.* Ed. Limusa, 1987, pág. 96.

CAPÍTULO 2.

TEORÍA DE DECISIONES.

"La adopción de decisiones puede ser una experiencia llena de atractivos, de emociones e incluso fascinante"

James L. Riggs.

En este capítulo se darán conceptos básicos sobre la teoría de toma de decisiones, por ser éstos, junto con los de el siguiente capítulo la base teórica sobre la cual descansa esta investigación. Sin tener el propósito de profundizar en dichos conceptos para no hacer más extenso este trabajo, únicamente se desea tenerlos presentes.

Se iniciará haciendo referencia al significado de decisión, se seguirá con la descripción de los elementos en la toma de decisiones, así como con la naturaleza de las decisiones, también se narrarán brevemete los acontecimientos históricos que dieron origen a la teoría estadística de decisiones, posteriormente se hablará de la metodología científica en la toma de decisiones, se describirá el modelo general de decisión y finalmente se hablará de las situaciones decisorias, haciendo mayor énfasis en la toma de decisiones bajo riego, ya que dadas las reglas iniciales del juego (capítulo 4, sección 4.7.3) será de mucha utilidad tomar en cuenta estos conceptos para poder efectuar el estudio del juego que se lleva a cabo en el capítulo 5.

Adicionalmente se plantea el modelo de decisión en la Investigación de Operaciones, por proporcionar ésta un método sistemático y racional para los problemas fundamentales del control de sistemas, mediante la toma de decisiones, proponiendo prototipos de problemas entre los cuales se encuentran los problemas competitivos.

2.1 SIGNIFICADO DE DECISIÓN.

DEFINICIÓN ETIMOLÓGICA DE DECISIÓN.

Etimológicamente la palabra decisión significa "**corte**". / Corte entre el pasado y el futuro para cambiar una situación o crear una situación. / Es el fin de un proceso y el principio de otro. / Es la ruptura de una situación para crear otra nueva.

DECIDIR.

Decidir es un proceso por el que una o más personas seleccionan una alternativa de entre un conjunto para, de acuerdo a ciertos criterios, alcanzar una serie de objetivos y metas preestablecidas; todo lo anterior, dentro del entorno de los posibles estados que pueda guardar la Naturaleza.

2.2 ELEMENTOS EN LA TOMA DE DECISIONES.

La persona que toma una decisión quiere lograr algo, es decir, alcanzar una situación distinta a la de su estado original. Además, esta persona escoge una cierta manera de actuar porque piensa que ésta, es la forma que más le ayudará a conseguir sus objetivos que especificó de antemano. Su actuación toma la forma concreta de una cierta utilización de sus recursos limitados. Por otra parte, existen algunos factores que afectan el logro de los objetivos especificados y que se encuentran fuera del control del decisor (a los que se les llama **estados de la naturaleza**).

En cualquier acto de decisión se distinguen los elementos siguientes:

- Uno o más **decisores** que tienen una serie de **objetivos** y **metas** (cuantitativas en el tiempo y en el espacio) supuestamente bien definidos.
- Un conjunto de posibles **acciones** o **alternativas** disponibles a los decisores.
- Un conjunto de posibles **resultados** generados por las alternativas.
- Un **entorno** dado por los posibles estados que guarda la naturaleza en relación a los objetivos de los decisores, sobre los cuales éstos no ejercen ningún control.
- Una **función** que liga acciones y resultados con el entorno.
- Un proceso de decisión (llamado también proceso de selección de políticas, estrategias, programas), que selecciona una o varias acciones, dado un cierto entorno y metas explícitas del grupo de decisores.
- Un **criterio** que enmarca el proceso de decisión.

2.3 NATURALEZA DE LAS DECISIONES.

2.3.1 INTUICIÓN O ANÁLISIS.

Cuando se adopta una decisión ésta se basa en datos sobre los resultados obtenidos en el pasado y establece una línea de acción que dará lugar a unos resultados en el futuro. El enfoque analítico para la adopción de decisiones supone un estudio sistemático y una evaluación cuantitativa del pasado y el futuro, mientras que la intuición se orienta hacia el presente, pero abarca desordenadamente recuerdos del pasado y estimaciones de lo que puede ocurrir en el futuro. Con ambos métodos se elaboran juicios y ambos tienen un puesto en la tarea de adoptar decisiones, esto es, antes de que una persona tome una decisión, efectúa un análisis racional de la situación de interés, que puede ser intensivo o no según las características particulares de la situación considerada. El proceso racional de toma de decisiones implica las fases siguientes:

- diagnosticar el problema,
- hallar las alternativas más adecuadas,
- analizar estas alternativas y compararlas y
- seleccionar la alternativa más conveniente.

Por tanto, el proceso de decisión puede realizarse haciendo uso de los principios de la metodología científica o la improvisación.

Cabe señalar, que en muchos circunstancias, la conclusión de un proceso racional de toma de decisiones puede considerarse como inicio de otro proceso parecido, a esta descripción de la toma de decisiones se le conoce como **decisiones secuenciales**.

2.3.2 TÁCTICA Y ESTRATEGIA.

Son dos términos militares muy familiares. Se asocian las decisiones estratégicas con el Alto Mando y las decisiones tácticas con las operaciones en el campo de batalla; la estrategia establece los objetivos amplios, mientras que las tácticas asociadas a ella definen las múltiples maniobras que se necesitan para lograr los objetivos.

ESTRATEGIA.

Normalmente existen varios objetivos estratégicos aceptables. Una decisión estratégica selecciona idealmente el objetivo que representa el mejor uso de los recursos de una organización o sistema, de acuerdo con sus metas a largo plazo. La medida de este tipo de decisión es la **eficacia**; que es el grado en que un objetivo estratégico satisface las metas económicas de una organización o sistema.

TÁCTICA.

Un plan estratégico puede usualmente llevarse acabo de diferentes formas. Estas alternativas a nivel funcional son las tácticas. El valor relativo de las elecciones tácticas se califica de acuerdo con su **eficiencia**, que es el grado en el que una operación realiza la acción económica pretendida.

La eficacia de cada estrategia se evalúa inicialmente por efecto que ejercerá sobre los objetivos del sistema, sirviendo así como guía hacia el área dentro de la cual las tácticas producirán la mayor eficiencia. La eficiencia real de cada táctica se determina por el estudio de las actividades requeridas para producir una operación táctica. Sin embargo, puede suceder que una estrategia con una eficacia menor posea la táctica denotada de la eficiencia más alta.

PROBLEMAS TÁCTICOS Y ESTRATÉGICOS.

La diferencia entre problemas tácticos y estratégicos se basa, cuando menos, en tres características:

- Un problema es más táctico que otro si el efecto de su solución es de menor duración, es decir, si su solución puede modificarse o anularse fácilmente. Cuanto mayor es la duración del efecto de la solución en el problema, éste es más estratégico. Se puede hacer referencia a esta característica como su **rango**.

- Un problema es más estratégico cuanto mayor sea la parte del sistema afectada directamente por su solución. Esta característica de un problema puede referirse como su **alcance**.

- Un problema es más estratégico cuanto más implica la determinación de fines, metas u objetivos. Todos los problemas comprenden la selección de medios para alcanzar los resultados deseados, pero muchos consideran los resultados deseados como dados o proporcionados. En la medida en que lo hacen, son tácticos. Esta característica se llama **orientación a fines**.

No hay puntos de separación definidos en las escalas que representan estas tres características que distinguen los problemas tácticos de los estratégicos. Por esta razón, lo más que se puede decir de un problema es que es más o menos estratégico que otro, en función a estas características.

SUBOPTIMIZACIÓN.

Es el intento de optimizar un segmento táctico de un problema prestando escasa o ninguna atención a la eficacia estratégica de la solución.

OBJETIVOS MÚLTIPLES Y SUBOPTIMIZACIÓN.

Cuando se presentan objetivos múltiples en una situación decisoria, surge la necesidad de reconocer todos los objetivos destacados de el sistema para poder jerarquizarlos y establecer prioridades.

Se deben diferenciar los **objetivos fundamentales** de los **instrumentales**. El conjunto de los objetivos fundamentales se determinan en base a una evaluación de las oportunidades del sistema, de sus recursos y sus capacidades para su explotación, éstos delinean el dominio básico de acción de dicho sistema.

Obviamente, los diversos niveles jerárquicos del sistema requieren objetivos más directamente con sus áreas específicas, éstos constituyen los objetivos instrumentales. Por lo tanto, los objetivos instrumentales son los medios para alcanzar las metas fundamentales.

Entonces, cuando existen objetivos múltiples para un sistema en particular, es probable que no exista ni una línea de acción que optimice todos ellos, es decir, aunque se pudiera conseguir una auténtica optimización del objetivo principal, solamente se podría llegar a una suboptimización global, porque los demás objetivos tendrían que ser considerados como factores limitantes; por consiguiente se tiene que tratar de seleccionar una alternativa que logre el mejor equilibrio posible entre los objetivos en conflicto.

Además, la suboptimización puede manifestarse en términos del horizonte de planeación que se emplee.

2.3.3 EFECTO DEL TIEMPO EN LA TOMA DE DECISIONES Y SU GRADO DE INCERTIDUMBRE.

Las tácticas basadas en un horizonte de planeación de uno o dos unidades de tiempo (años, sexenios, etc.), no tienen necesariamente la misma eficiencia que las basadas en un número mayor de unidades de tiempo. Así como un horizonte de planeación demasiado breve puede deformar gravemente los valores, un período más largo tiende a introducir incertidumbre y a medida que, busca de estimaciones, se penetra en el futuro, las predicciones pierden fiabilidad. Este hecho se tiene en cuenta en el tratamiento dado a las decisiones con diferentes grados de certidumbre. Además, con un horizonte de planeación largo, es posible que el sistema necesite una proporción determinada de las utilidades en el presente inmediato y no pueda esperar pacientemente a que maduren las perspectivas a largo plazo.

Por tanto, cualquier esfuerzo de planeación resulta muy vulnerable a los efectos de la suboptimización la cual se manifestará ulteriormente en los resultados de las decisiones tomadas anteriormente.

Jean Paul Rheaut en su libro titulado *Introducción a la Teoría de Decisiones* dice lo siguiente respecto al tomador de decisiones:

> *"Finalmente, el decisor es un todo complejo, integrado por muchos elementos, entre los cuales se pueden contar su cultura, su personalidad, su experiencia, y sus aspiraciones"*[1].

El estudio formal de la toma de decisiones lo lleva a cabo la *Teoría de decisiones*. A continuación se narra una breve historia de la teoría estadística de las decisiones.

2.4 BREVES NOTAS HISTÓRICAS DE LA TEORÍA ESTADÍSTICA DE DECISIONES.

La teoría de decisiones permite evaluar la eficiencia de una decisión al medir el grado en el que sus resultados satisfacen el objetivo u objetivos especificados de antemano por la persona o grupo de personas, que tomaron la decisión.

El contenido de la teoría de decisiones se originó de tres corrientes principales que son:

1. La Teoría de las Preferencias y de la Utilidad,
2. La Teoría de las Probabilidades y
3. La Teoría de la Inferencia Estadística.

Los economistas del siglo XIX utilizaron los conceptos de valor, utilidad, preferencias, curvas de inferencia; tales ideas pueden ser atribuidas aún a Adam Smith. Jevons, en su libro titulado *The Theory of Political Economy*, publicado en 1871, explicó el uso del concepto de las escalas de preferencias (concepto de utilidad cardinal). En 1901, en su libro *Principles of Economics*, Marshall elaboró el concepto de órdenes de preferencia (utilidad ordinal), por medio del análisis de las curvas de inferencia. Sin

[1] Rheault, Jean P. *Introducción a la Teoría de Decisiones con Aplicaciones a la Administración.* Ed. Limusa. 1986, pág. 15.

embargo no había ningún indicio de que este conocimiento se integrase al cálculo de las probabilidades conocido en aquel entonces.

Desde la relación entre Pascal y Fermat el tema de las probabilidades siguió un desarrollo continuo y alcanzó la posición de una teoría muy integrada y de muchas aplicaciones posibles. James Bernoulli fue el primero que señaló explícitamente las leyes de adición y multiplicación de las probabilidades y el primero que proporcionó una fórmula general para los experimentos bininiales. De Moivre, Lagrange, Laplace y Gauss aportaron contribuciones significativas cuando desarrollaron la curva normal y el teorema del límite central. Jeffreys, en su obra titulada *Theory of Probability*, publicado en 1939, y J. M. Keynes, en su libro *Treatise on Probability*, (1921), sostenían el concepto de que las probabilidades son grados de creencia. En esa misma época, Ramsey y De Finetti presentaron el concepto de probabilidad subjetiva.

El mérito de que haya vuelto a surgir el interés por la probabilidad subjetiva y por el argumento bayesiano, le pertenece en gran parte a L. J. Savage, quien escribió *The Foundations of Statistics*, (1954) y *The Foundations of Statistical Inference*, (1962).

Kolmogorov en su libro titulado *The Foundations of Probability*, (1933) demostró cómo la estructura completa de la teoría de las probabilidades puede derivarse de unos cuantos axiomas simples. Esto hizo notar las ventajas que pueden obtenerse cuando se fundamentan firmemente los problemas estudiados.

En 1925, R. A. Fisher desarrolló los principios que apoyan al problema de estimación y sus métodos; también desarrolló un buen número de tests estadísticos estándares. Años después, Neyman y Pearson formularon de nuevo los principios para probar las hipótesis. La relación de este conocimiento con la teoría de las probabilidades es la siguiente: la teoría de las probabilidades proporciona los medios para describir la situación estudiada, gracias a un conjunto de modelos posibles; la inferencia estadística tiene por objeto examinar los datos disponibles y decidir cuáles de esos modelos son razonables y cuáles no lo son.

En 1944, Von Neumann y Morgenstein publicaron *The Theory of Games and Economic Behaviour*, en el que combinaron los conceptos y las técnicas del cálculo de las probabilidades y la teoría económica; el factor de incertidumbre se incorporó a la teoría de la utilidad a través de la identificación de la utilidad recompensa en un juego de azar; de esta forma, fue posible un tratamiento estadístico aceptable de la competencia bajo condiciones de incertidumbre.

Una vez combinada la teoría de la utilidad y la teoría de las probabilidades, el siguiente paso era reunir la teoría de la utilidad con la inferencia estadística. En 1950, Abraham Wals, en su libro titulado *Statistical Decision Funcions*, presentó un análisis muy bien desarrollado sobre ese tema. Gradualmente volvió a surgir un interés por el enfoque bayesiano; ese interés culminó en varias obras publicadas por Howard Raiffa y Robert Schlaifer.

2.5 METODOLOGÍA CIENTÍFICA EN LA TOMA DE DECISIONES.

La metodología científica es la aplicación secuencial de los siguientes pasos:

1. **Observar** el sistema donde incide la decisión.
2. **Identificar y formular** el o los problemas sobre los cuales se requiere decidir.
3. **Establecer una serie de hipótesis**, que pueden ser aceptadas o refutadas mediante el uso de modelos que se han diseñado explícitamente para tal fin.
4. **Experimentar**, i.e., resolver los modelos.
5. **Verificar** que los resultados de los modelos sean universalmente aplicables al problema en cuestión, cuando éste se encuentre bajo las mismas circunstancias, en periodos de tiempo distintos.

James L. Riggs en su libro titulado *Modelos de Decisión Económica para Ingenieros y Gerentes de Empresa*, resume los pasos anteriores en los siguientes:

1. Definición del problema.
2. Recolección de datos.
3. Formulación del modelo.
4. Evaluación del modelo.

2.6 LA NATURALEZA DE UN PROBLEMA.

Para encontrar la solución de un problema, primero se debe ser capaz de encontrar el problema y formularlo de manera que sea factible someterlo a una investigación. Primero deben buscarse los síntomas antes de poder hacer un diagnóstico correcto, esto es, para encontrar y formular correctamente un problema, se debe saber en qué consiste el mismo.

Las condiciones para que exista el más simple de los problemas son:

1. Debe existir un individuo a quien se le puede atribuir el problema. El individuo ocupa un medio ambiente.

❷ El individuo debe tener, por lo menos, un par de alternativas para resolver el problema.

❸ Deben existir, cuando menos, dos resultados posibles, de su elección, de los cuales él prefiere uno en vez del otro. Esta preferencia está asociada a un cierto objetivo dentro del marco de referencia en donde se encuentra el individuo del sistema.

❹ Los cursos de acción disponibles, deben ofrecer cierta opurtunidad de lograr su objetivo, pero no pueden dar la misma oportunidad para ambos. De otra manera su selección no tiene importancia. De aquí que las selecciones deben tener eficiencias distintas para los resultados deseados.

Al tomar decisiones, la dificultad para quien ha de tomarlas puede aumentar por una combinación de las siguientes condiciones:

- El problema recae en un grupo de individuos.
- El marco de referencia (medio ambiente) cambia, en forma dinámica, de modo que afecta la efectividad de los cursos de acción o los valores de los resultados.
- El número de cursos de acción alternativos puede ser muy grande.
- El número de objetivos puede también ser muy grande y dichos objetivos pueden no ser completamente consistentes, o bien, no pueden catalogarse en una escala de valores comunes.
- Los cursos de acción seleccionados por el o los tomadores de decisiones pueden ser llevados a cabo por otros cuya buena voluntad y habilidad para actuar son, en consecuencia, relevantes.
- Algunas personas que no intervienen en la toma o realización de la decisión pueden resultar afectadas por ella y reaccionar favorable o desfavorablemente.

La información necesaria que se debe conocer para la formulación de un problema es:

❶ ¿Quién tomará la decisión?
❷ ¿Cuál o cuáles son sus objetivos?
❸ ¿Qué aspectos de la situación están sujetos al control de quien toma las decisiones (variables controlables) y con que amplitud se pueden controlar estas variables (restricciones)?
❹ ¿Qué otros aspectos del medio, comprendiendo o no a los humanos, pueden afectar a los resultados de las selecciones disponibles (variables no controlables)?

Al considerar los problemas de toma de decisiones se debe distinguir entre la **forma** y el **contenido**. La forma se refiere al modo en que se relacionan entre sí las propiedades de un problema (variables y constantes), i. e., la estructura de causa y efecto que está en acción. El contenido se refiere a la naturaleza (significado) de esas propiedades. Por ejemplo, muchos pares diferentes de variables son capaces de relacionarse entre sí, de manera que puedan representarse gráficamente por una línea recta. De este modo, los pares de variables que están relacionados linealmente tienen igual forma, pero diferente contenido; de aquí que se tengan problemas económicos, políticos, sociales, etc.

Mediante el proceso de abstracción se separa la forma y el contenido de un problema. El lenguaje en el que se expresa la forma desligada de su contenido es el de las **Matemáticas**. Por esa razón *un modelo de decisión es una representación de un problema.*

Para poder elegir la alternativa más conveniente en la toma de decisiones, se debe realizar un pronóstico de los resultados del cambio en forma cuantitativa. El establecimiento cuantitativo de las consecuencias de las distintas decisiones controlables del que ha de tomar la decisión, es lo que se denomina el modelo. El modelo permite apreciar los resultados de las decisiones, sin que el decisor se vea obligado a tomarlas realmente. En la construcción del modelo el arte principal es el de entender una situación decisoria y construir su estructura. A continuación se muestra el modelo general de decisiones.

2.7 MODELO GENERAL DE DECISIONES.

Del método científico (sección 2.5 del presente capítulo), se derivan las etapas del proceso de construcción de modelos matemáticos para la toma de decisiones (véase el patrón 2 para la construcción de un modelo, expuesto en el capítulo 1 sección 1.3.4).

A partir del problema real se tienen 5 etapas:

- ❶ Estudio inicial del sistema.
- ❷ Construcción de un modelo real.
- ❸ Conversión del modelo real, en un modelo matemático.
- ❹ Estudio del modelo matemático.
- ❺ Comparación de los resultados del estudio del modelo matemático con el modelo real.

La figura 2.1 muestra los pasos de este procedimiento en la construcción de modelos matemáticos para la toma de decisiones en forma esquemática.

La construcción del modelo real involucra idealizar, aproximar e identificar, además de seleccionar conceptos básicos, eliminar información inecesaria y depurar la información que quede. Existen muchos tipos de modelos reales, tales como: los icónicos, los verbales y los analógicos. Puede haber muchos modelos reales para un problema real.

Para convertir un modelo real a un modelo matemático, como ya se ha mencionado, se utiliza la abstracción y representación simbólica. No se debe olvidar que puede haber muchos modelos matemáticos para un sólo modelo real.

Los resultados de encontrar una similitud entre el modelo matemático al que se llega y un modelo matemático estandar se llaman teoremas desde el punto de vista teórico o pronósticos desde el punto de vista empírico.

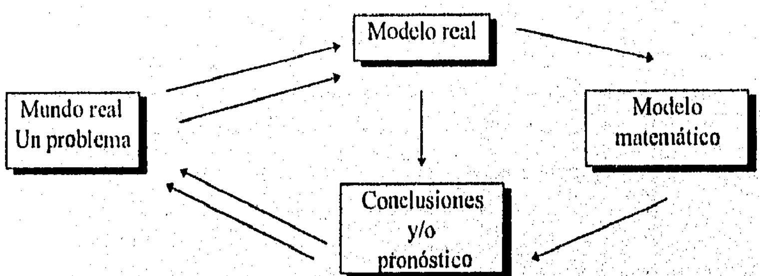


FIGURA 2.1 *Proceso cíclico de la construcción de un modelo matemático para la toma de decisiones.*

Ahora bien, desígnense con A_i los cursos posibles de acción y con E_j los estados de la naturaleza.

Para cada estrategia factible y para cada ocurrencia de un estado de la naturaleza específico, habrá un resultado único, denotado por R_{ij}.

En la terminología matemática, los resultados se denominan variables dependientes; los cursos de acción y los estados de la Naturaleza reciben el nombre de variables independientes. En forma simbólica,

$$R_{ij} = f(A_i, E_j). \tag{2.7.1}$$

Cuando no pueden elaborarse relaciones matemáticas para describir los resultados, habrá que utilizar la experiencia y la estimación.

Si se emplea la notación matricial, se construye una matriz rectangular en la cual cada renglón representa una estrategia específica y cada columna representa un estado de la

Naturaleza. Se obtiene así una **matriz de decisiones**, esta matriz permite comparar fácilmente los resultados y ayuda a asegurarse de que todas las alternativas se evalúen sobre bases equivalentes, esa matriz se muestra en la figura 2.2.

Este modelo representa lo siguiente:

❶ Aquellos aspectos de la situación real que son pertinentes para el que ha de tomar las decisiones.
❷ La dependencia lógica de estos aspectos entre sí, su interacción conjunta en la producción de resultados alternos.
❸ Los valores cuantitativos que expresan el grado de estas relaciones, y su efecto cuantitativo sobre los resultados.

CURSOS DE ACCION (ESTRATEGIAS)	ESTADOS DE LA NATURALEZA			
	E_1	E_2	E_3	E_n
A_1	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{1n}
A_2	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{2n}
A_m	R_{m1}	R_{m2}	R_{m3}	R_{mn}

FIGURA 2.2 *Matriz de decisiones.*

Nótese que los conjuntos respectivos a las estrategias A_i, y a los estados de la naturaleza E_j, se deben enumerar en tal forma que sus elementos correspondientes sean mutuamente excluyentes y totalmente exhaustivos para la situación de decisiones considerada, es decir, que solamente una estrategia se pueda seleccionar y sólo un estado de la naturaleza pueda ocurrir.

A veces, diferentes estados de la Naturaleza relacionados entre sí se consideran conjuntamente porque ejercen el mismo efecto sobre las alternativas. Sólo al estimar los resultados R_{ij} se sabe si se pueden emplear estados combinados. La combinación es válida, si para cada alternativa, un resultado mide con precisión el efecto de todas las circunstancias que intervienen en ese estado combinado.

2.8 SITUACIONES DECISORIAS.

Una vez que se han identificado y definido los tomadores de decisiones, sus objetivos, los cursos de acción y las variables no controlables, es necesario construir una medida de eficiencia que se pueda usar para determinar cuál es la mejor alternativa y qué función de esta medida (la "función objetivo") deberá usarse como criterio de "la mejor" solución. La construcción de un criterio de "la mejor" solución a un problema, requiere la familiarización con un conjunto de conocimientos que se conocen como *teoría de decisiones*.

El tipo de criterio de decisión que es adecuado para un problema, depende de qué tan bien se conozcan los resultados que se supone están disponibles. Existen tres tipos de suposiciones, de aquí los tipos de problemas:

❶ **Problemas de certidumbre.** Situaciones en las cuales, quien toma las decisiones cree que cada curso de acción conduce a un sólo resultado.

❷ **Problemas de riesgo.** Situaciones en las cuales, para cada curso de acción, el tomador de decisiones piensa que pueden ocurrir resultados alternos, cuyas probabilidades se conocen o se pueden suponer.

❸ **Problemas de incertidumbre.** Situaciones en las cuales, para cada curso de acción, el tomador de decisiones no sabe qué resultados pueden ocurrir y, por lo tanto, no puede asignar probabilidades a los posibles resultados.

Los problemas de certidumbre e incertidumbre se pueden considerar como casos límites, i. e., conocimiento completo e ignorancia absoluta de los resultados de los problemas de riesgo.

Por tanto, los procesos de decisión pueden hacerse bajo:

- Completa certeza.
- Riesgo.
- Completa incertidumbre.
- Conflicto.

Usualmente, solamente en el caso de conflicto existen por lo menos dos grupos diferentes de decisores, en los casos restantes se tiene un sólo grupo. Esto hace que, el contenido de la teoría de decisiones se divida en dos campos principales:

❶ La Toma de Decisiones Individuales y

❷ La Toma de Decisiones en Grupo.

La estadística clásica resuelve problemas de decisión en el caso de riesgo y en el de total incertidumbre, pero sólo si es posible experimentar. Si la experimentación no es factible, el análisis clásico (conocido también como enfoque objetivista) no es útil para dar solución a los problemas de decisión. En estos casos se requieren de otras técnicas y enfoques, conocidos como *teoría de decisión estadística.*

2.8.1 TOMA DE DECISIONES BAJO CERTIDUMBRE.

Los procesos de decisión bajo completa certeza, llamados también *determinísticos*, se caracterizan porque el grupo decisor conoce perfectamente cuál va a ser el estado de la naturaleza relativo a sus objetivos y, por lo tanto, selecciona aquella acción que, de acuerdo al criterio imperante, logrará acercarlos más rápido a la meta preestablecida; por esto, las matrices de decisiones poseen solamente una columna donde se especifica el estado natural pertinente. Consecuentemente, a cada curso de acción factible se le asigna un único resultado posible.

Los criterios que imperan en el proceso de decisión son generalmente dos:

❶ Minimización de costos, pérdidas, esfuerzos.
❷ Maximización de ganancias, beneficios.

Aparentamente, el problema es sencillo pero en muchos casos la cantidad de estrategias y sus correspondientes R_{ij} son tantas que no es posible enumerarlas ni mucho menos cuantificarlas, por lo que el problema no es tan sencillo como aparenta. Cuando el número de estrategias es muy grande, se emplean las técnicas y métodos de la Investigación de Operaciones así como la Programación Lineal en la solución del problema de decisión.

2.8.2 TOMA DE DECISIONES BAJO RIESGO.

En el caso con riesgo, conocido también como *estocástico*, se tienen dos o más estados de la Naturaleza. No se conoce perfectamente el estado que adoptará la Naturaleza, pero se asocia a éste una distribución de probabilidad. En función a ésta última, el grupo decisor selecciona aquella acción que maximiza la esperanza de acercarlos a la meta propuesta, i. e., se consideran todas las R_{ij} compensaciones posibles para cada una de las alternativas A_i estrategias disponibles ponderando esas compensaciones utilizando las probabilidades respectivas que tienen de presentarse, eligiéndose la estrategia que tenga el valor esperado más acorde a los objetivos.

Por lo general, las probabilidades de ocurrencia de los estados de la Naturaleza se conocen mediante la determinación de la frecuencia con que estos estados ocurrieron en el pasado, i. e., se utiliza el enfoque de frecuencia relativa para calcular dichas probabilidades.

Muchos problemas a corto plazo y algunos a largo plazo pueden quedar englobados dentro de este marco de referencia.

Los criterios empleados en estas situaciones, son:

❶ El criterio de decisión del valor monetario esperado.
❷ El criterio de decisión bayesiano.
❸ Utilidad esperada.

2.8.2.1 CRITERIO DE DECISIÓN DEL VALOR MONETARIO ESPERADO.

El valor asignable a un curso de acción determinado puede representarse adecuadamente en términos monetarios.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

❶ Calcúlese el beneficio (o la pérdida) neto condicional de cada curso de acción factible.

❷ Calcúlese el beneficio neto esperado de cada curso de acción, tal como el promedio ponderado de los beneficios netos condicionales de todas las acciones consideradas; pondérese cada beneficio condicional con su respectiva probabilidad de ocurrencia.

❸ Selecciónese el curso de acción que proporcionará el beneficio neto esperado más elevado.

Simbólicamente el **valor esperado** para cada una de las alternativas disponibles es:

$$E(R_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} p_E(j)\, R_{ij} \qquad \forall\ i = 1, \ldots, m \text{ alternativas posibles.} \tag{2.8.1}$$

donde $p_E(j)$ es la probabilidad de que el estado de la Naturaleza sea E_j.

Es razonable pensar que un decisor que se enfrente a un problema de decisión bajo riesgo, tiene que decidir si utiliza o no el valor monetario esperado (VME) como criterio de decisión, mediante esta regla:

> *"El VME debe utilizarse si la persona, responsable de la toma de decisiones, lo usa como su norma para seleccionar un curso de acción que proporcione con certeza una cantidad determinada de dinero, o para seleccionar un curso de acción que acarree la mejor o la peor de todas las consecuencias posibles asociadas con un conjunto de alternativas factibles en una situación concreta de decisiones bajo riesgo"*[2] .

Nunca debe de utilizarse a ciegas un criterio de decisión. Además de cualquiera que sea el criterio de decisión utilizado, también hay que utilizar el sentido común y el juicio crítico.

Observación.

> Generalmente, en realidad el valor esperado para las diferentes estrategias nunca ocurre, el beneficio que ocurrirá será uno de los beneficios netos condicionales listados en el renglón correspondiente a esa estrategia.
>
> El valor esperado debe interpretarse como el beneficio que se debe esperar a la larga, aún cuando una decisión debe tomarse una vez. Se supone que la Naturaleza seguirá comportándose en el futuro tal como lo hizo en el pasado.

Las situaciones en las cuales las pérdidas o ganancias posibles son muy grandes, el VME deja de ser un criterio de decisión adecuado. En este caso, el criterio que puede utilizarse es el de la utilidad esperada.

2.8.2.2 CRITERIO DE DECISIÓN BAYESIANO.

En las situaciones de decisión en las cuales se utiliza el criterio de decisión del valor monetario esperado y se tienen las condiciones siguientes:

- ⇨ no hay oportunidad de recabar información adicional antes de tomar la decisión;

[2] Rheault, Jean P. *Introducción a la Teoría de Decisiones con Aplicaciones a la Administración.* Ed. Limusa. 1986, pág. 125.

- la determinación de las probabilidades de ocurrencia de los eventos de interés se hace con base en el concepto de la *probabilidad subjetiva*[3],

frecuentemente, el criterio de decisión del valor monetario esperado se llama criterio de decisión bayesiano.

Las personas que toman decisiones a menudo tienen convicciones firmes acerca de la verosimilitud con que pueden ocurrir los diferentes resultados de una situación determinada de la toma de decisiones bajo riesgo.

Las probabilidades proveen un método cuantitativo para que el decisor exprese sus convicciones acerca de la frecuencia con la cual puedan ocurrir esos resultados.

Las personas asignan medidas de probabilidad con base a experiencias propias y en sus conocimientos de la situación analizada. Si dos personas distintas han tenido la misma experiencia, asignarán aproximadamente la misma medida de probabilidad a cierto evento específico de interés.

Para poder asignar probabilidades subjetivas adecuadamente, se debe tener una descripción clara y completa del conjunto de los estados posibles de la Naturaleza. Esto es:

- es necesario considerar todo los posibles estados de la Naturaleza porque, de lo contrario, también se omitirían las consecuencias correspondientes al evaluar las distintas estrategias posibles;
- un evento será imposible si el decisor desea considerarlo así;
- la lista de los eventos considerados debe ser completa en el sentido de que uno de ellos necesariamente debe ocurrir;
- hay que enumerar los eventos de tal manera que sean mutuamente excluyentes.

Con base en las consideraciones anteriores, se pueden formular las reglas que definen los valores numéricos que representan a las ponderaciones que el decisor asignará a cada evento posible y son las siguientes:

- La suma de todas las ponderaciones asignadas a cualquier espacio de eventos debe ser igual a 1.

- La ponderación asignada a cualquier evento debe ser un número comprendido entre 0 y 1.

[3] Para mayor referencia a cerca de la defnición probabilidad subjetiva véase el anexo A de esta investigación.

- Si dos o más eventos mutuamente excluyentes se agrupan en uno solo evento compuesto, la ponderación asignada a ese evento deberá ser igual a la suma de las ponderaciones asignadas a los eventos elementales integrantes.

Nótese que esas reglas son los axiomas básicos del cálculo de probabilidades para el caso de espacios de eventos finitos.

El conjunto de números asignados a los diversos eventos de interés según las reglas anteriores, representan las probabilidades subjetivas de la persona que toma la decisión.

Según el criterio bayesiano, el decisor debe escoger el curso de acción que dará el beneficio neto esperado más elevado.

Tratar de maximizar beneficios esperados o minimizar pérdidas esperadas, es un criterio plausible si se considera una situación que se repite una y otra vez. Sin embargo, en situaciones de decisiones únicas, no resulta muy claro que sea conveniente elegir el curso de acción que maximice el beneficio esperado, o que minimice la pérdida esperada.

Para mayor referencia se puede estudiar la teoría bayesiana de decisión. Por tratarse de un trabajo de por sí extenso, no se va a profundizar en esta teoría.

Apoyándose en la teoría de la utilidad, se tiene la evaluación subjetiva de las consecuencias monetarias.

2.8.2.3 LA EVALUACIÓN SUBJETIVA DE LAS CONSECUENCIAS MONETARIAS

Las consecuencias monetarias pueden tener una *utilidad* diferente según el decisor y la situación concreta de la que se trate.

Los resultados monetarios obtenidos al escoger una estrategia particular tal vez dependan del prestigio personal del decisor, de su patrimonio financiero, de la posibilidad de una bancarrota, de la preferencia o aversión hacia el riesgo, de la contribución potencial del empresario a la comunidad, etc.

Por consecuencia, se necesita de un modelo más general de la toma de decisiones, que además de los monetarios, incluya la influencia de otros factores importantes en la situación de decisiones bajo riesgo. *La teoría de la utilidad* proporciona ese modelo.

La teoría de la utilidad y preferencia fue elaborada por Jhon Von Neumann - Morgenstern, y dice lo siguiente:

> *"... la utilidad es el número utilizado por el responsable de la decisión para medir el valor de las retribuciones monetarias de diferentes grados de incertidumbre. Cuando las retribuciones monetarias asociadas con distintos actos tienen una certeza que el cien por ciento, el responsable de la decisión alcanzará su más elevada escala de preferencia si sigue el curso de acción que maximiza la utilidad esperada"*[4].

La función de utilidad toma en cuenta todos los aspectos de la actitud del decisor con respecto a las consecuencias posibles, monetarias y no monetarias, de determinada situación de decisiones. Por lo tanto, la función de utilidad tiene que ser algo muy subjetivo y suficientemente flexible para adecuarse a las características sumamente personales de cada decisor.

Para introducir el concepto de la **función de utilidad** se van a utilizar a los juegos de azar llamados loterías.

2.8.2.4 LOTERÍAS Y EL COMPORTAMIENTO RACIONAL.

El individuo que desea participar en una lotería de una sola etapa, debe de comprar un boleto y acercarse a una mesa en donde hay una ruleta con m diferentes números marcados en la circunferencia. El individuo entrega el boleto al operador quien hace girar la ruleta; si la bola se detiene en el número j, el individuo gana un premio denotado por ε_j.

Por lo general, los premios pueden ser cualquier cosa; no tienen que representar necesariamente pagos monetarios. Más aún, el proceso de recibir el premio puede extenderse por un período muy largo de tiempo.

Se hacen los supuestos siguientes:

- no hay dos premios exactamente iguales;
- los premios reflejan una cierta cantidad de dinero que el jugador tuvo que pagar por el boleto.

[4] Von Neumman, Jhon y Oskar Morgenstern. *The Theory of Games end Economic Behaviour*, Ed. J. Wiley, 1944, pág. 30.

De esta manera, se pude representar a la lotería como un experimento aleatorio cuyos resultados están indicados por este conjunto de eventos:

$$E = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_j, \dots, \varepsilon_m\},$$

en donde la probabilidad p_j del evento ε_j está dada por el cociente del sector de la circunferencia de la ruleta.

Se indicará una lotería de una sola etapa con el símbolo L. Esta lotería puede caracterizarse por el conjunto E_j de premios y por la distribución de probabilidades $p(E_j)$, que asocia a cada premio con la probabilidad de obtenerlo.

En notación de conjuntos, la lotería L está dada por:

$$L = \{(p_1, \varepsilon_1), (p_2, \varepsilon_2), \dots, (p_m, \varepsilon_m)\},$$

o sea, un conjunto de pares ordenados en donde cada par está formado por un premio específico y por su probabilidad correspondiente de obtención.

Existe una representación gráfica de la lotería L; esa representación es un diagrama de árbol, ver figura 2.3.

Se tienen m ramas, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ que emanan de un nodo común indicado por L. Hay una rama para cada premio, y en el extremo de cada rama se anota uno de los premios posibles. El valor de la probabilidad p_j de ganar el premio ε_j se escribe sobre la rama.

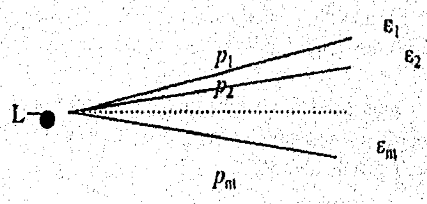


FIGURA 2.3 *Una lotería de una sola etapa.*

Nota.

Una lotería de una sola etapa puede considerarse como un problema de decisiones en el que la Naturaleza es la que toma la decisión, puesto que dice, en qué número se tiene que detener la ruleta del juego. Hay m cursos de acción posibles que corresponden a los m números en que la bola puede parar cuando la ruleta ya no gire.

Además de las loterías de una sola etapa, hay muchos casos concretos de loterías de muchas etapas. A continuación se describe una lotería de dos etapas:

❶ El jugador obtiene su boleto y se acerca a la mesa de ruleta, entrega el boleto al operador quien gira la ruleta.

❷ Supóngase que en la ruleta hay k números y que ésta se detiene en el número i, con lo que el jugador ha ganado un segundo boleto que le permite participar en la lotería L_i de una sola etapa.

❸ El jugador se dirige al operador de la ruleta de la lotería L_i, le entrega su boleto y ése hace girar la ruleta. Como consecuencia, el jugador recibe uno de los premios de la lotería L_i.

❹ Supóngase que el conjunto de premios posibles es el mismo, independientemente de cuál sea la lotería de una sola etapa en que el jugador juegue por último; ese conjunto de premios es el siguiente:

$$E = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m\}.$$

❺ Se indica con el símbolo $\mathcal{L}$ una lotería de dos etapas; $\mathcal{L}$ queda completamente representada por las loterías L_i de una sola etapa que la integran y por las probabilidades q_i de que un jugador termine jugando la lotería L_i. Por lo tanto, se tiene:

$$\mathcal{L} = \{(q_1, L_1), (q_2, L_2), \ldots, (q_k, L_k)\}.$$

❻ Gráficamente, se puede representar esa lotería de dos etapas de la manera siguiente:

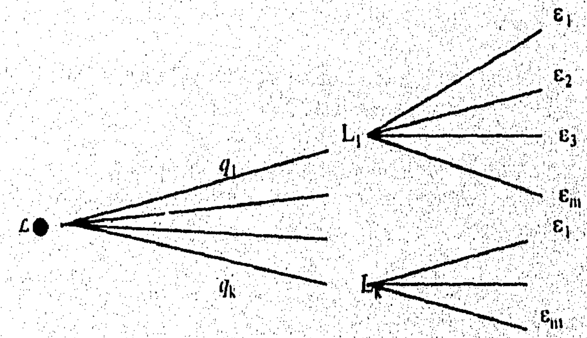


FIGURA 2.4 *Lotería de dos etapas.*

Este diagrama de árbol se interpreta como un problema de decisiones de dos etapas, en el que la Naturaleza primero decide a qué lotería L_i *de una sola etapa va a parar el jugador, y después cuál es el premio que obtiene.*

En esa forma y siguiendo con un proceso inductivo, se puede definir una lotería de n etapas como una lotería de una sola etapa cuyos premios son k loterías de $(n - 1)$ etapas.

Ahora, se quiere mostrar que cualquier problema de decisiones, en condiciones de riesgo, se reduce a que el decisor seleccione la lotería que él prefiera de entre un conjunto determinado de loterías. Esas loterías pueden ser de una sola etapa o de varias etapas, o una combinación de ambos tipos.

El modelo del comportamiento racional, derivado de la teoría de la utilidad, puede formularse como un conjunto de axiomas, y una persona que toma decisiones racionales será aquella cuyo proceso lógico, para la toma de decisiones, satisfaga estos axiomas.

Axioma 1. *Preferencia y transitividad de la misma.*

Dados dos eventos cualesquiera $\varepsilon_i, \varepsilon_j \in E = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$ $i \neq j$, sólo persiste una de las siguientes situaciones mutuamente excluyentes:

$\varepsilon_i > \varepsilon_j$ o sea ε_i es preferible a ε_j;
$\varepsilon_j > \varepsilon_i$ o sea ε_j es preferible a ε_i;

o

$\varepsilon_i \sim \varepsilon_j$ o sea le son indiferentes al decisor.

Más aún, si , $\varepsilon_i > \varepsilon_j$ y $\varepsilon_j > \varepsilon_k$ entonces $\varepsilon_i > \varepsilon_k$ para cualquier i, j, k, $i \neq j \neq k$.

Axioma 2. *Independencia.*

Un decisor racional es indiferente entre una lotería $\mathcal{L}$ de dos etapas y una L de una etapa que tiene la misma probabilidad de ocurrencia.

Lo anterior indica que lo único que le interesa a un decisor racional es la probabilidad de los diferentes eventos aleatorios y no la Naturaleza misma de los experimentos.

Axioma 3. *Continuidad.*

Para cualquier evento $\varepsilon_j \in E$, diferente de ε_1 (el de mayor preferencia) y ε_m (el de menor preferencia), el decisor racional es indiferente a que ocurra ε_j con certeza o jugar una lotería en donde existen sólo premios, ε_1 y ε_m. En otras palabras, existe una probabilidad μ_j, tal que el decisor es indiferente entre una lotería con probabilidad μ_j, de ganar ε_1 y probabilidad $(1 - \mu_j)$ de ganar ε_m, o simplemente obtener ε_j con certeza.

Axioma 4.

Considérese la lotería de una etapa

$$L = \{(p_1, \varepsilon_1), (p_2, \varepsilon_2), \ldots, (p_m, \varepsilon_m)\}$$

y la de dos etapas

$$\mathcal{L} = \{(q_1, L_1), (q_2, L_2), \ldots, (q_k, L_k)\}$$

donde la probabilidad de obtener ε_j o L_j es la misma, es decir p_j, para toda $j = 1, \ldots, m$. Entonces un decisor racional es indiferente entre $\mathcal{L}$ y L.

Este axioma generaliza de cierta manera al axioma anterior.

Axioma 5.

Dadas las loterías cualesquiera, de n y k etapas respectivamente ($n \geq 1$, $k \geq 1$), denotadas $\mathcal{L}$ y L^*, entonces prevalece uno y sólo uno de los siguientes estados mutuamente excluyentes:

$$\mathcal{L} > L^*,$$
$$L^* > \mathcal{L}$$

o

$$\mathcal{L} \sim L^*.$$

Además, prevalece la propiedad de transitividad entre loterías, es decir, si $\mathcal{L} > L^*$ y $L^* > L'$, entonces $\mathcal{L} > L'$.

Axioma 6.

Considérese dos loterías L_a y L_b que contienen cada una dos premios (o castigos), ε_1 y ε_m. Sea p_a la probabilidad asociada a ε_1 en la lotería L_a, y p_b la probabilidad de ε_1 en L_b. Entonces,

$$L_a > L_b, \text{ si } p_a > p_b,$$
$$L_a \sim L_b, \text{ si } p_a = p_b$$

y

$$L_b > L_a, \text{ si } p_b > p_a.$$

Se dice que un *decisor es racional* si su comportamiento de selección de alternativas respeta los seis axiomas anteriores.

Ahora bien, se verá como este conjunto de axiomas se relaciona con el problema de determinar la función de utilidad del decisor racional.

Considérese la situación siguiente:

❶ Sea un conjunto de eventos E_j tal que:

$$E_j = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$$

❷ Supóngase que E_j es representativo del conjunto de eventos de cualquiera de las loterías que se están considerando de modo que el premio que se obtenga, al jugar a cualquiera de estas loterías, será uno y solamente uno de los premios ε_j especificados anteriormente con el conjunto E_j.

❸ Supóngase que los premios del conjunto E_j han sido enumerados en orden de preferencia, por un decisor racional, de tal manera que ε_1 es el evento de mayor preferencia y ε_m es el de menor preferencia.

❹ Para cada evento ε_j, en donde j = 2, 3, ... , *k*, ... , *m* - 1, pídanse al decisor que considere esta situación: se tiene una lotería de $L(\varepsilon_j)$, de una sola etapa, tal que:

$$L(\varepsilon_j) = \{(\mu, \varepsilon_1), (1 - \mu, \varepsilon_m)\}$$

donde ε_1 es el premio más favorable y ε_m es el menos favorable.

Se le pregunta al decisor qué valor tendría μ, que es la probabilidad de ganar el premio ε_1 en la lotería $L(\varepsilon_j)$, para que él considere con absoluta indiferencia las ofertas de jugar a esa lotería y la de recibir con certeza el premio ε_j.

❺ Se indica por μ_j el valor de μ asignado a por el decisor para cada premio ε_j del conjunto E_j en donde *j* = 2, 3, ... , *m* - 1.

❻ La variable μ_j es tal que: $0 \leq \mu_j \leq 1$.

❼ Se asocia el número $\mu_j = 1$ con el premio ε_1 de mayor preferencia, y el número $\mu_m = 0$ con el premio ε_m de menor preferencia.

En resumen, el decisor ha determinado los números μ_j, que son las probabilidades de ganar los premios ε_j de la lotería $L(\varepsilon_j)$, con la propiedad de que al decisor le es indiferente recibir, con certeza, ε_j o jugar a la lotería $L(\varepsilon_j)$.

De esta manera, se obtiene la función numérica de $\mu_j = \mu(\varepsilon_j)$ cuyo dominio es el conjunto E_j, con $E_j = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m\}$. Esta función se llama **función de utilidad** del decisor. Los números μ_j se llaman **índices de utilidad** para los premios ε_j, y sirven como cifras relevantes para caracterizar a los premios pertinentes.

El resultado siguiente de Von Neuman y Morgenstern, es fundamental en el proceso de decisión cuando la función de consecuencias R_{ij} para toda $a_i \in A$, $e_j \in E$, es una función de utilidad.

Principio básico de decisión. Un decisor racional selecciona, de un conjunto de loterías, aquella que maximiza (minimiza) su utilidad esperada, en caso de que los eventos aleatorios de un experimento sean ganancias (pérdidas).

El principio anterior es a la función de utilidad, lo que el *criterio de Bayes* es a la función monetaria.

2.8.2.5 REACCIÓN ANTE EL RIESGO.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD.

La representación gráfica de la función de utilidad es conveniente para obtener una curva de utilidad y poder comentarla. Se hace un diagrama cartesiano en el cual el eje horizontal representa las sumas monetarias pertinentes al problema de decisiones estudiado, mientras que la escala de la utilidad está representada por el eje vertical. Así se tienen los siguientes tipos de curvas de utilidad:

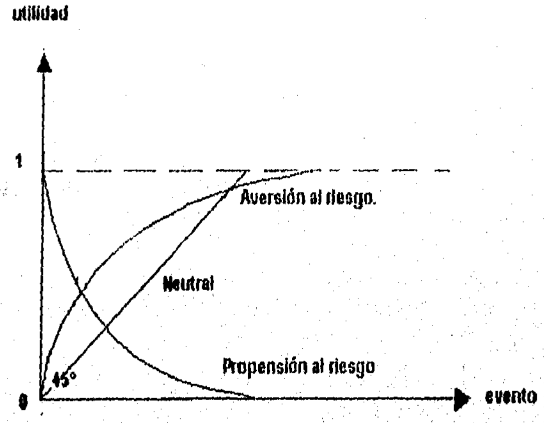


FIGURA 2.5 *Características de un decisor.*

Principalmente, existen dos actitudes importantes en relación con el riesgo: la preferencia y la aversión hacia el riesgo. Algunos decisores prefieren una actitud cautelosa y prudente ante los resultados anticipados que se asocian con los cursos de acción considerados. Obviamente, estas personas sienten aversión hacia el riego. Otros opinan que tienen buena suerte y prefieren correr un riesgo relativo.

El perfil de la curva de utilidad guarda una estrecha relación con la *adversión o propensión al riesgo de un decisor*. Si la función de utilidad es cóncava, el decisor tiene aversión al riesgo; si es convexa, propensión al riesgo. Una función de utilidad es neutral, cuando no es de adversión o propensión al riesgo. Su gráfica es una línea recta de 45 ° de cualquier eje coordenado (ver figura 2.5).

ALGUNOS COMENTARIOS ACERCA DE LAS FUNCIONES DE UTILIDAD.

Es importante aclarar que una curva de utilidad no representa "un valor en dinero", sino que refleja la totalidad de elementos diversos que deben considerarse tales como beneficios, pérdidas, patrimonio inicial, actitud hacia el riesgo, etc. en cada situación específica dada, que si bien son intagibles y no tienen o no es posible darles valor numérico, si pueden rastrearse por la influencia que ejercen sobre el decisor.

Las características más sobresalientes son:

- La función de utilidad refleja las preferencias de un problema particular pero no las preferencias respecto a otras situaciones aunque se trate del mismo decisor.
- Si la situación del decisor cambia (incluso por su estado de ánimo), la función puede cambiar también.
- La función de utilidad puede cambiar con el tiempo para el mismo decisor y el mismo tipo de problema.
- No es posible comparar entre diversas personas ni regiones o países.

Los índices de utilidad se proponen de tal forma que las decisiones puedan basarse en el valor esperado, sin incluir otras consideraciones posteriores o efectos a largo plazo, de tal manera que la utilidad se refiere más a consecuencias inmediatas y no a consecuencias finales; reflejando así la evaluación subjetiva que el decisor hace de los factores intangibles que afectan los resultados verdaderos si la decisión se toma a largo plazo.

2.8.2.6 ÁRBOLES DE DECISIÓN.

El árbol de decisiones es una técnica sencilla que señala el grado de riesgo involucrado en una decisión permitiendo al decisor hacer comparaciones entre los cursos de acción.

Algunos de los matemáticos que dieron origen al desarrollo de esta técnica son: John Von Neumann, Robert Schalaefer y Horward Raiffa.

La característica singular de esta técnica es que permite al decisor combinar técnicas analíticas con una representación clara del impacto de la incertidumbre parcial.

La técnica del árbol de decisiones puede ser utilizada en situaciones de decisiones secuenciales; en estas situaciones, las decisiones tomadas en cierto momento son base para las decisiones a tomar en un momento futuro y deben equilibrar la necesidad de capitalizar sobre oportunidades de ganancias que puedan existir y conservar la capacidad necesaria para actuar adecuadamente con respecto a necesidades y circunstancias futuras, ya que, con frecuencia, el seleccionar lo que parece ser una decisión óptima en el primer punto de decisión y poner en práctica esa decisión, al observar el resultado y después repetir el proceso en los puntos de decisión posteriores, no optimiza la serie completa de decisiones; por tanto, el enfoque de árboles de decisión es un método conveniente para representar y analizar una serie de decisiones hechas a través del tiempo, esto es, los árboles de decisión se usan en situaciones de toma de decisiones en las que se debe optimizar una serie de decisiones.

Por medio de este método gráfico, se expresan en orden cronológico las acciones disponibles al decisor y los eventos aleatorios asociados a los estados de la Naturaleza.

El método de árboles de decisión contempla dos etapas:

- ❶ Diseño.
- ❷ Solución.

DISEÑO.

Un árbol de decisión consta de una serie de ramificaciones, cada rama representa una alternativa de acción.

La simbología de los componentes de un árbol de decisión es:

a) Puntos de decisión, representados por cuadrados (□).
b) Decisiones ($D_1, D_2, \ldots, D_n$).
c) Probabilidad de ocurrencia de los eventos posibles como resultado de las decisiones ($p_1, p_2, \ldots, p_n$).
d) Nodos de eventos, que representan a los eventos aleatorios asociados a los estados de la Naturaleza (○).
e) Resultados o consecuencias ($X_1, X_2, \ldots, X_n$).

El diseño se hace cronológicamente de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo; la solución en sentido contrario.

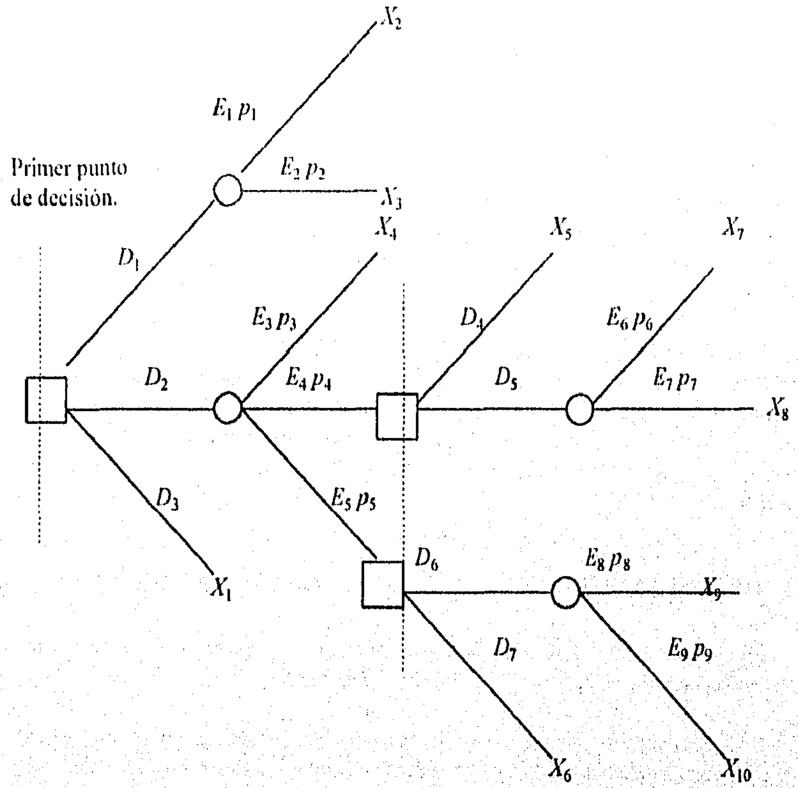


FIGURA 2.6 *Ejemplo de un árbol de decisión.*

SOLUCIÓN.

Para resolver el árbol de decisión se utiliza en cada una de las ramas asociadas al estado de la Naturaleza el valor de la función de consecuencias correspondiente.

El análisis comienza a la extrema derecha del árbol de decisiones y se mueve a través de los nodos de eventos y puntos de decisión hasta que se ha identificado una secuencia óptima de decisiones que comienza en el punto de decisión. Se usan las siguientes reglas:

- En cada nodo de evento se hace un cálculo del Valor Esperado.
- En cada p:nto de deci·ión se selecciona la alternativa con valor esperado óptimo. Marcando con un doble slash (//) las alternativas no óptimas.

La ramificación de decisiones es una forma de supervisar, por adelantado, el entronque de los puntos decisorios en un proyecto en curso y de preveer todo lo que es probable que suceda si se toma cada una de las ramas.

En este enfoque de la ramificación de decisiones, es posible anticipar y ver por adelantado qué línea del proyecto de investigación debe autorizarse que se prosiga. Esto permite concentrar los recursos, en todo momento, en aquellas partes particulares de la investigación que es probable lleven a un resultado. El resultado será función del tipo de producto que es probable que se obtenga si la investigación sigue una rama particular de la ramificación.

El árbol de decisión hace más clara las alternativas, riesgos, beneficios, objetivos e información necesaria que implique un problema de decisión, además muestra las formas que permiten llegar a los diversos resultados posibles. Sin embargo, la utilidad de este método es más pedagógica e ilustrativa que práctica, ya que si los conjuntos ***A***, ***E*** y ***X*** tienen más de 5 elementos cada uno, la gráfica sería demasiado grande resultando impráctica.

2.8.3 TOMA DE DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE COMPLETA.

En el proceso de decisión bajo completa incertidumbre, no se tiene una idea sobre la distribución de probabilidad asociada a los diferentes entornos.

No necesariamente se tienen identificadas todas las alternativas, por lo que se tiene que trabajar con no toda la totalidad. Se pueden evaluar todas las posibles R_{ij} consecuencias considerando lo anterior.

Un problema bajo condiciones de incertidumbre se trata inicialmente como un problema bajo riesgo. Se elaboran diferentes soluciones alternativas. Se identifican los posibles hechos futuros o estados de la naturaleza con la mayor precisión posible. Se estiman los resultados correspondientes a cada alternativa bajo el supuesto de que el estado futuro ocurrirá con certeza. Con las cifras resultantes se forma la matriz de decisión (también llamada matriz de pagos).

Es importante identificar todos los estados de la Naturaleza concernientes al problema. La omisión de estados de la Naturaleza equivale a ignorar estados de riesgo; pero es más fácil detectar una omisión bajo riesgo, porque las probabilidades asociadas sumarían una cantidad menor que 1.

El decisor se enfrenta e este tipo de problemas cuando se encuentra con situaciones que nunca han ocurrido y que quizá no se repitan de esa misma forma en el futuro previsible.

Los criterios de decisión que se emplean cuando se tienen situaciones de completa incertidumbre, reflejan los valores personales y las actitudes fundamentales hacia el riesgo del tomador de decisiones, es decir, se tiene que recurrir a conceptos filosóficos y psicológicos para elegir alguna alternativa.

Como criterios se pueden elegir las alternativas utilizando las teorías de:

• Wald	Pesimismo.
• Hurwicz	Coeficiente de optimismo.
• Savage	Arrepentimiento o aflicciones.
• Laplace	Criterio de la razón insuficiente.

2.8.3.1 CRITERIO DE WALD.

Según el estadísta Abraham Wald, se supone que el decisor piensa que, una vez que ha elegido un cierto curso de acción, quizá la Naturaleza se vuelva malévola y, por tanto, seleccione el estado natural que minimice los beneficios del decisor. De acuerdo con ese criterio el decisor debiera escoger la estrategia que maximiza su retribución de acuerdo con esa suposición pesimista. Esto es, Wald sugirió que una elección de *lo mejor de lo peor*, es una forma razonable de protegerse a sí mismo. Por lo tanto, este criterio propone la elección del curso de acción que reditúe el máximo de las consecuencias mínimas. De aquí que se emplee el término *máximin*.

La técnica para este criterio es:

- Construir una tabla que indique el peor resultado asociado a cada estrategia:

ESTRATEGIA	RESULTADO MÍNIMO
A_1	mín (R_{1j})
A_2	mín (R_{2j})
...	...
A_m	mín (R_{mj})

$\forall j = 1, \dots, n.$

- Por consiguiente, para poder escoger lo mejor de lo peor, el decisor seleccionará la alternativa que prometa darle un resultado máximin. Esto es, elegirá la alternativa que cumpla con tener el valor máximo del resultado mínimo. máx (mín (R_{ij})).

Existe otra versión del criterio de Wald y se conoce con el nombre de *mínimax*. Este criterio asigna un valor a cada uno de los cursos de acción de acuerdo con lo peor que puede suceder con esa estrategia.

Es decir, para cada estrategia el decisor determina la pérdida máxima y escoge después la estrategia a la cual le corresponde el mínimo de las pérdidas máximas.

El criterio mínimax ignora un amplio rango de pérdidas de oportunidad y sólo se fija en las consecuencias más importantes para cada estrategia considerada. El criterio máximin maximiza su mínima ganancia potencial. Además, estos criterios pueden hacer que se tomen decisiones que no son consistentes en términos de la actitud fundamental del decisor hacia el riesgo.

2.8.3.2 CRITERIO DE HURWICZ.

Un punto de vista moderado, entre estos extremos de optimismo y pesimismo, es este criterio. El grado de optimismo se establece mediante un coeficiente llamado α, que puede tomar cualquier valor entre 0 (pesimismo) y 1(optimismo).

Después de decidir el valor de α que mide el grado de optimismo del decisor, se identifican las ganancias máxima y mínima de cada alternativa. A continuación se multiplican los pagos máximos por α y los mínimos por $(1 - \alpha)$, se suman los dos productos de cada alternativa y se elige la alternativa que presenta la suma mayor.

Los criterios minimax-maximin y maximax son casos especiales del criterio de Hurwicz. Para $\alpha = 1$ solo se incluyen en la selección alternativa final los pagos máximos, porque los pagos mínimos han sido eliminados al ser multiplicados por 0; el caso contrario se presenta para $\alpha = 0$, es decir, una visión completamente pesimista. Cualquier valor de α que no sea 0 ni 1 refleja una opinión de compromiso entre las de hostilidad y benevolencia de la Naturaleza.

2.8.3.3 CRITERIO DE LAPLACE.

El criterio es el siguiente:

> Puesto que no se conocen las probabilidades de ocurrencia de los estados de la Naturaleza, se dará por supuesto que las probabilidades son las mismas para esos estados. Calcúlese después el valor monetario esperado de cada estrategia y escógase la que tenga el valor monetario esperado más elevado.

El hecho de que el supuesto de probabilidades iguales implica el llamado *principio de la razón insuficiente*, suscitó apasionados debates académicos durante muchos años. El meollo de este principio es el siguiente: sin ninguna causa específica, no sucederá ningún evento específico.

Dado que no se conoce motivo alguno para que se produzca un estado de la Naturaleza en lugar de otro, se da por supuesto que es probable que se produzca tanto uno como el otro.

Laplace sostiene que hay pocos problemas de decisiones en los cuales la incertidumbre es completa; además, opina que casi todos los decisores tienen alguna información útil, en lo que se refiere a las probabilidades de ocurrencia de los estados de la Naturaleza. Por consiguiente, él proponía que se asignaran probabilidades subjetivas, con las cuales el problema se transforma en un problema de decisiones bajo riesgo, en el cual se puede utilizar el criterio bayesiano de la toma de decisiones.

2.8.3.4 CRITERIO DE L. J. SAVAGE.

El estadista Leonard J. Savage propuso un criterio basado en lo siguiente:

> Quien toma decisiones podría arrepentirse si después de haber elegido alguna alternativa y de que se haya producido el estado de la Naturaleza, se da cuenta de que la estrategia que escogió no fue la óptima, es decir, este criterio sugiere que realmente se debe preocupar por lo mal que se sentiría el tomador de decisiones al comparar lo que logró con lo que podría haber logrado si su decisión hubiese sido la correcta.

Savage sostiene que el decisor deberá de tratar de minimizar el arrepentimiento que experimentaría después de haber tomado su decisión.

El grado de arrepentimiento según Savage, se puede conocer mediante la diferencia entre el resultado que realmente se ha obtenido y el resultado que se hubiese obtenido si de antemano se conociera que estado de la Naturaleza iba a ocurrir.

La matriz de arrepentimiento se obtiene a partir de la matriz de decisiones original de la siguiente forma:

- Anótese un cero en las celdas de la matiz en que se encuentra el mejor resultado correspondiente a cada una de las alternativas.

- Sustitúyanse los valores originales de todas las demás celdas efectuando la diferencia entre el resultado óptimo de cada alternativa.

Una vez construida la matriz de arrepentimientos, se puede aplicar el criterio de Savage que dice:

> Elíjase la estrategia que corresponda al mínimo de los máximos arrepentimientos.

En este criterio Savage sostiene que el pesar, la falta de ganancia o arrepentimiento son reducidos al mínimo antes de elegir realmente cierta estrategia.

Nótese que si en la matriz de decisiones original, las compensaciones son expresadas en valores monetarios, el calcular arrepentimientos es equivalente a determinar pérdidas de oportunidad.

La pérdida de oportunidad $l(R_{ij})$ para un estado específico de la Naturaleza E y alguna alternativa A, se representa simbólicamente como sigue:

$$l(R_{ij}) = X(R_{ij}) - X(R_{kj}),$$

donde $X(R_{ij})$ significa que es el resultado obtenido al elegir A_i y $X(R_{kj})$ es el resultado más deseable para el estado natural E_j.

2.8.3.5 EL VALOR ESPERADO DE LA INFORMACIÓN PERFECTA.

Para determinar este valor, se tiene que calcular el beneficio esperado cuando se tiene información perfecta y luego sustraer de esa cifra el beneficio esperado que se puede tener en condiciones de incertidumbre.

Para ilustrar este concepto, supóngase que se tiene la siguiente matriz de decisiones:

ESTRATEGIAS	ESTADOS DE LA NATURALEZA.		
	E_1	E_2	E_3
A_1	12 000	3 000	- 750
A_2	6 000	1 000	150

Además supóngase que se asignan las siguientes probabilidades subjetivas a los eventos futuros de interés:

$$p(E_1) = .20$$
$$p(E_2) = .50$$
$$p(E_3) = .30$$

El cálculo del beneficio esperado con ayuda de la información perfecta se basa en la ganancia esperada si el decisor tiene acceso a un pronosticador perfecto. Se supone que éste predice con exactitud qué estado de la Naturaleza ocurrirá en particular.

Por tanto, si el pronosticador dice que ocurrirá E_1, el decisor seleccionará la estrategia A_1, la cual le promete la mayor contribución bajo estas condiciones; si el pronosticador informa que el estado de la Naturaleza será E_2, el decisor volverá a escoger A_1, por último, si se le pronostica el estado E_3, el decisor elegirá a A_2. Esto es, cada vez que el pronosticador dice su pronóstico, el decisor elige la estrategia que le promete la ganancia óptima.

Desde el enfoque de la frecuencia relativa, las probabilidades subjetivas, asignadas a cada estado de la Naturaleza, se interpretan como la porción de veces que el pronosticador pudiera predecir que ocurrirá cada estado determinado, si la situación analizada lo constata repetidas veces.

El beneficio esperado con base en la información perfecta se calcula ponderando estas ganancias óptimas con las respectivas probabilidades de ocurrencia y totalizando estos productos. Esto es:

Cálculo de las ganancias esperadas con información perfecta.

Evento Pronosticado	Ganancias Condicionales	Probabilidades	Ganancias Esperadas
E_1	12 000	0.20	2 400
E_2	3 000	0.50	1 500
E_3	150	0.30	45
Totales		1.00	3 945

Entonces, el beneficio esperado con base en la información perfecta es de 3 945. Este valor se puede interpretar como el beneficio promedio que el decisor puede obtener si confronta este problema de decisiones muchas veces y en condiciones idénticas, y si eligió cada vez la mejor estrategia después de haber recibido el pronóstico del pronosticador perfecto.

Para calcular el valor esperado de la información perfecta, se necesita calcular el beneficio esperado en condiciones de incertidumbre parcial.

Ganancias esperadas bajo condiciones de incertidumbre

ESTRATEGIA	GANANCIAS ESPERADAS
A_1	12 000 (.20) + 3 000 (.50) + (- 750) (.30) = 3 675
A_2	6 000 (.20) + 1 000 (.50) + 150 (.30) = 1 745

Por consiguiente, bajo condiciones de incertidumbre, la mejor estrategia sería A_1 y el beneficio esperado sería de 3 675 unidades.

Por lo tanto, el valor de la información perfecta se calcula haciendo la diferencia entre las ganancias esperadas en condiciones de información perfecta y las ganancias esperadas en condiciones de incertidumbre:

$$\begin{aligned} VEIP &= 3\,945 - 3\,675 \\ &= 270 \end{aligned}$$

Este valor representa el aumento en el beneficio esperado que se obtendría con el uso del pronosticador perfecto.

Además, se puede probar que el VEIP es igual a la pérdida de oportunidad esperada asociada con la estrategia óptima en condiciones de incertidumbre parcial.

Otro término equivalente que se emplea para designar el VEIP es el costo de la incertidumbre, esto es, el beneficio esperado sería mayor si pudiera desaparecer la incertidumbre.

El análisis anterior es un análisis a priori.

El análisis a posteriori, es aquel en el cual las ganancias esperadas se calculan por medio de las probabilidades a priori revisadas a partir de la información adicional; dicha información se obtiene mediante el método de muestreo estadístico. Se utiliza la regla de Bayes para calcular esas probabilidades revisadas, las cuales se llaman probabilidades a posteriori.

El propósito principal de intentar incorporar más información antes de decidir, a través de un método de muestreo estadístico, es el de reducir el costo de incertidumbre. Generalmente, si el costo de la incertidumbre es alto, entonces es conveniente reunir información adicional antes de tomar una decisión.

El análisis pre-a posteriori indica si es conveniente o no reunir más información para incorporarla a las probabilidades a priori antes de tomar una decisión, también indica que tan grande debe ser el tamaño de la muestra a utilizar en términos de costos de muestreo. Finalmente, en el caso de que valga la pena muestrear, este método indica cuál es el curso óptimo de acción que debe elegirse para cada tipo de información muestral recolectada.

Una vez que se ha tomado la decisión, es conveniente que se vuelva a estudiar la situación para asegurarse de que se han considerado adecuadamente todos los aspectos importantes. Los efectos potenciales de la decisión deberían examinarse de nuevo antes de que se implemente el curso de acción preferido.

Se puede hacer la figura siguiente representando las fases del proceso racional de toma de decisiones:

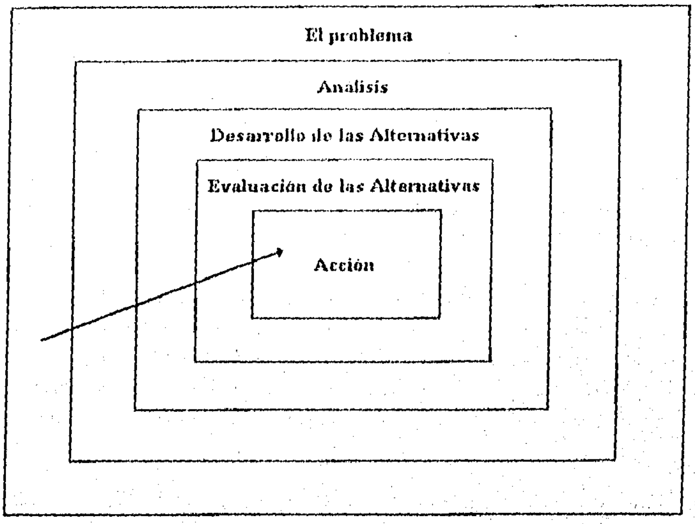


FIGURA 2.7 *Las fases del proceso racional de toma de decisiones.*

2.8.4 TOMA DE DECISIONES BAJO CONFLICTO.

En el caso conflictivo, los estados de la Naturaleza obligan a que el logro de las metas de un grupo de decisores reduzca simultáneamente las posibilidades de que el otro grupo alcance las suyas. La teoría de juegos y los juegos diferenciales estudian estas situaciones. Se va a hablar de esta teoría en el capítulo 3.

2.9 EVALUACIÓN DEL MODELO DE TOMA DE DECISIONES.

El mérito de un modelo se determina por su fidelidad para representar al mundo real. La prueba final de su capacidad predictiva se presenta cuando las predicciones se comparan con la realidad. Sin embargo, es una precaución de seguridad someterle a unas pruebas previas. La veracidad de un modelo puede comprobarse inicialmente aplicándolo a datos históricos; si hay acuerdo entre lo previsto y las cifras reales, ello indica que el modelo puede utilizarse para predicciones en el momento presente, con tal de que el entorno decisorio no haya cambiado en lo esencial.

Cada clase de modelo se evalúa en forma diferente; en los modelos físicos se realizan mediciones operando bajo condiciones controladas; en los modelos esquemáticos se evalúan las posiciones; normas, algoritmos y criterios decisorios que establecen los medios de juzgar los modelos matemáticos. Todo buen modelo de datos cuantificados contribuye a completar el análisis haciendo más asequibles las soluciones resultantes de las diferentes colecciones de datos, a la vez que aumenta el tiempo de que dispone el decisor para concentrarse en el análisis de los intangibles.

Se debe tener presente que el conocimiento de lo que hay detrás de la información cambia el pronóstico. Una gran parte del personal administrativo tiende a interpretar rígidamente los resultados en vez de emplearlos como instrumentos para la toma de decisiones. El resultado del modelo, templando con la experiencia de los diversos administradores interesados y con la consideración de las condiciones presentes y futuras (tanto internas como externas), es la mejor manera de aprovechar los beneficios de los modelos.

En estudios donde existen objetivos múltiples, generalmente, se debe contentar con evaluar las distintas funciones objetivo, en distintas escalas de medida, y dejar que el que ha de tomar las decisiones haga él mismo la reducción final a una escala común (por proceso subjetivo).

Una vez que se han utilizado todos los instrumentos disponibles para tomar decisiones, la autoridad final recae en el decisor; él tiene que evaluar la exactitud y fiabilidad de sus datos y del modelo; tiene que atemperar la predicciones del modelo de acuerdo con las consideraciones intangibles significativas y tras esto tiene que ver su decisión sometida a prueba en un mundo real y hostil.

1.10 EL MODELO DE DECISIÓN EN LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

Juan Prawda en su libro titulado *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Vol. 1. Modelos Determinísticos* da la definición de la Investigación de Operaciones diciendo:

> *"La Investigación de Operaciones es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas (hombre-máquina) a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización."*[5]

Como se puede apreciar de esta definición, es necesario tomar decisiones en un sistema u organización de manera que éste opere en las óptimas condiciones, entonces

[5] Prawda, J. *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones*. Vol. 1. Modelos Determinísticos. Ed. Limusa, 1989, pág. 20.

surge la pregunta ¿cómo lograrlo?, de la definición se tiene la respuesta y es con la aplicación del método científico. Recuérdese que en el método científico se debe plantear un modelo para representar al sistema en estudio y poder someterlo a una investigación científica.

Como ya se había dicho, primero se debe hacer el planteamiento del problema para poder construir el modelo que lo represente.

En la formulación del problema se considera el establecimiento de los cursos de acción alternos entre los que se debe hacer la elección, la determinación de las consecuencias de una de estas elecciones y la fijación de objetivos.

Establecer los objetivos de una organización es bastante difícil, ya que existen ciertas cosas que tanto las organizaciones como las personas sienten que no pertenece a su misión en la vida y no las harán, aunque la persona se prive de un ingreso extra o la compañía deje perder un beneficio extra. Por tanto el establecimiento de los objetivos no es tan sencillo, aún cuando se trata con una sola unidad como es el beneficio, por la dificultad de determinar lo que se entiende por costo, rédito o periodo de tiempo durante el cual se producirá la maximización del beneficio. La cuestión se hace mucho más difícil cuando se encuentran varios objetivos distintos.

Se tienen, por lo tanto, tres fundamentos de la toma de decisiones: elección, consecuencias y objetivo; y estos tres campos están vinculados entre sí por el establecimiento estructural del modelo.

Los modelos de Investigación de Operaciones se representan con ecuaciones, que aunque pueden resultar complicadas desde el punto de vista matemático, tienen una estructura fundamental muy sencilla (la siguiente expresión es equivalente a la ecuación (2.7.1)):

$$U = f(X_i, Y_j), \tag{2.10.1}$$

donde U es la utilidad o valor de la ejecución del sistema.
X_i son las variables (o constantes) no controlables, que afectan a U.
f es la relación entre U, X_i y Y_j.
Y_j son las variables controlables.

Frecuentemente se requieren una o más ecuaciones o inecuaciones, para expresar el hecho de que algunas de las variables controlables o todas, solamente pueden manejarse dentro de ciertos límites. La ecuación de ejecución y las restricciones constituyen, juntas, un modelo del sistema y del problema que se quiere resolver. De aquí que el modelo resulte tanto de *decisión* como del *sistema*.

La tarea del investigador es la de pronosticar la tendencia general de las variables Y, y del análisis de la relación funcional de estas variables incontrolables X con las controlables, deducir el conjunto particular de variables X que han de seleccionarse para acercarse al máximo a la consecución del objetivo del lado izquierdo. Todo esto es muy maravilloso e ideal en la teoría, sin embargo, en la práctica, se presentan algunos obstáculos.

Hay problemas en los que la gama de elecciones es grande. Pueden ser problemas en los que las consecuencias de cada elección particular son bien conocidas, pero la labor aritmética de escoger entre la gama total es tan grande que no se puede esperar a hacerlo y llegar a elegir la óptima.

El sistema puede ser tal que no siempre se puedan conocer todas las Y_j anticipadamente a las decisiones de las X_i. En tales casos, si f es suficientemente sencilla, algunas veces se puede calcular el promedio de las variables desconocidas y seleccionar decisiones que den el mejor valor promedio. Sin embargo, el proceso de promediar frecuentemente es tan complicado que esto no es factible y en lugar de eso, se experimenta sobre el modelo, seleccionando los valores de las variables no controlables con las frecuencias relativas impuestas por sus distribuciones de probabilidad. Esto hace posible calcular los valores correspondientes de U y finalmente su distribución. Los métodos de I de O, por consiguiente, tienen algo importante que aportar a esta zona general de la variabilidad y la probabilidad, y, evidentemente, es en el análisis estadístico de la información.

Una vez que se construye el modelo, puede usarse para encontrar exacta o aproximadamente, los valores óptimos de las variables controlables, i. e., los valores que producen la mejor ejecución del sistema para valores específicos de las variables no controlables sujetas a las condiciones y restricciones representadas por él, esto es, se puede *derivar una solución* para el problema a partir del modelo (resolver el modelo). En consecuencia, la optimización produce la mejor solución para el problema que se está modelando. Pero, debido a que un modelo nunca es una representación perfecta del problema, la solución óptima nunca será la mejor. En el mejor de los casos, el modelo es una "buena" representación del problema, de aquí que la solución óptima o cercana a la óptima derivada de él, es una "buena" aproximación de la solución óptima del problema.

Los métodos de las matemáticas clásicas se pueden utilizar en algunos casos para obtener soluciones de *manera deductiva*. Cuando esto no es posible, frecuentemente se pueden obtener soluciones de *manera inductiva* por medio del *análisis numérico*. Las reglas que hacen tender los ensayos hacia una solución, se llaman *iterativas*.

Las deducciones de soluciones que se obtienen por medio de los siguientes métodos:

- *simulación*: experimentación sobre el modelo.
- *juegos operacionales*: un tipo de simulación que implica a tomadores de decisiones reales.
- *optimización experimental*: experimentación en el sistema mismo.

En ciertos casos el papel del que toma las decisiones en el sistema no se comprende lo suficientemente bien para poder representarlo en forma explícita en el modelo. Entonces, en la simulación pueden intervenir seres humanos en un juego en el que los participantes asumen diferentes papeles. Dicha simulación de llama **juego operacional.**

Puesto que los valores de optimización de la solución mejoran la ejecución del sistema sólo si el modelo es una buena representación del mismo, debe probarse la correspondencia del modelo a la realidad y valorar la solución.

Finalmente, debido a que el objetivo de la I de O[6] es mejorar la realización de los sistemas, los resultados de la investigación se deben *poner en ejecución* (si son aceptados por quienes deben tomar las decisiones). En este punto se efectúa la última prueba y evaluación de la investigación.

Si la decisión que se estudia es una que se tomará más de una vez, es muy probable que los valores de las variables no controladas y aun de la estructura del sistema, cambien entre una decisión y otra. Por tanto, se deben detectar los cambios significativos en el sistema y en su comportamiento y la solución debe ajustarse a las necesidades. En otras palabras, las soluciones que son reglas para decisiones repetitivas o decisiones que se proyectan durante cierto tiempo, deben mantenerse o controlarse.

Para resumir, se han identificado cinco etapas en un proyecto de I de O:

1. Planteamiento del problema.
2. Construcción del modelo.
3. Deducción de una solución.
4. Prueba del modelo y evaluación de la solución.
5. Ejecución y control de la solución.

Aunque dichas etapas de un proyecto de I de O usualmente se inician en el orden enumerado, por lo general no terminan en ese orden. De hecho, cada fase precede normalmente hasta que se termina el proyecto e interacciona en forma continua con las

[6] El objetivo de la I de O es proporcionar un método sistemático y racional para los problemas fundamentales del control de sistemas, mediante la toma de decisiones los cuales, de alguana forma, producen los mejores resultados a la luz de toda la información que se usa ventajosamente.

otras. Debe tenerse presente que es probable que, en el transcurso del tiempo, las mismas se superpongan e interaccionen.

En la Investigación de Operaciones se pueden establecer problemas prototipo para hacer más sencilla la construcción del modelo y por tanto su solución. Estos problemas son:

- Líneas de espera.
- Inventarios.
- Asignación.
- Secuenciación y coordinación.
- Búsqueda.
- Trayectorias.
- Reposición y mantenimiento.
- Competencia.

Esta lista no es exhaustiva, es posible fabricar ejemplos que no entren claramente en ninguna de estas categorías. No obstante, parece cubrir la mayor parte de los problemas de toma de decisiones que pueden presentarse. No debe pensarse que cuando se presenta un problema pertenecerá únicamente a una de estas estructuras. Las estructuras, en sí mismas, se suponen, y es una característica de los problemas de decisiones el dividirlos en una cantidad de subproblemas, cada uno de los cuales tiene distinta estructura.

Como puede verse en los siete primeros prototipos de problemas, el resultado de una decisión es el resultado de una interacción entre la armazón de unas variables controlables y la ocurrencia de unas variables incontrolables. No se ha introducido la idea de una tercera serie de variables en el modelo, las variables que están bajo el control de un competidor. En este caso, la forma amplificada del modelo toma el siguiente aspecto:

$$U = f(X; Y, Z) \tag{2.10.2}$$

donde las variables agrupadas con la anotación Z son las que están controladas por el competidor. Por otra parte, se está en una situación en la que la función objetivo y la función objetivo del competidor son mutuamente incompatibles, hasta el punto de que cuanto más contento se esta, más descontento se siente el oponente y viceversa. Sin embargo, no son necesariamente iguales y opuestas. En algunos casos de mercados competitivos, por ejemplo, el oponente se permite una escalada en los gastos de promoción y publicidad teniendo como principal objetivo la protección de su participación en la partición del mercado consumidor, cuando un gasto inferior, hechas las cuentas, le permitiría mayores beneficios, aun a expensas, quizá, de desprenderse de una parte del mercado total.

Con esta sección se pone fin a este capítulo. Este capítulo será de gran utilidad para la explicación de la formulación del modelo matemático propuesto en el capítulo 5, ya que en un juego (problema competitivo) los jugadores tienen que tomar una decisión al elegir su movimiento (en el caso de movimentos personales).

CAPÍTULO 3.

TEORÍA DE JUEGOS Y JUEGOS DIFERENCIALES

"Un estratega debe continuamente monitorear y sondear la estrategia para determinar la necesidad de cambios"

Peter Drucker.

En este capítulo se expondrán conceptos básicos de la teoría de juegos (estudio de los juegos no diferenciales) y de los juegos diferenciales. Este capítulo será de gran apoyo en los capítulos posteriores. Dado que se diseñará un nuevo juego es necesario saber qué es un juego desde el punto de vista matemático, cómo se clasifican los juegos y cómo se pueden analizar éstos. Este capítulo iniciará con algunos comentarios introductorios y la formalización de las situaciones competitivas; se continuará con la explicación de los juegos diferenciales, dando una descripción general y form:! de éstos (axiomas de la teoría de juegos), así como los criterios para su clasificación y las técnicas para su solución (búsqueda de las estrategias óptimas para los jugadores); finalmente se hablará de los juegos diferenciales, cabe señalar que en dichos juegos el tiempo es un factor fundamental.

3.1 COMENTARIOS PREVIOS.

Se ha visto que el proceso de la toma de decisiones requiere que un individuo (o un grupo de individuos) seleccionen el valor de una variable controlable X; dependiendo del valor seleccionado y de los valores de las variables no controlables Y, habrá un pago U para el individuo y

$$U = f(X, Y).$$

Se han supuesto cualquiera de las dos situaciones siguientes:

- El valor de Y se puede medir antes que se determine el de X y no cambiará hasta que se haya tomado la decisión y recibido el pago. En este caso, se selecciona $X = X_0$, donde X_0 maximiza el pago, i.e., para todas las X

$$f(X_0, Y) = f(X, Y). \tag{3.1.1}$$

- El valor de Y no se puede conocer antes que se tome la decisión, pero se conoce la distribución de Y. Si $\phi(Y)$ es la función de densidad de probabilidad para Y, se escoge X de tal manera que maximice el pago esperado; i.e., se selecciona $X = X_0$, donde para todas las X

$$\int f(X_0, Y)\, \phi(Y)\, \mathrm{d}Y \geq \int f(X, Y)\, \phi(Y)\, \mathrm{d}Y. \tag{3.1.2}$$

Los tres problemas implicados por estas situaciones son:

- ⇨ la determinación de la función $f(X, Y)$,
- ⇨ el cálculo de su valor esperado, y
- ⇨ el cálculo de X_0.

Los problemas en donde la mayor dificultad es el cálculo de X_0 se llaman de *programación matemática*[1], y las técnicas son completamente generales puesto que se

[1] Cuando el problema de la distribución o asignación de rescursos escasos entre fines competitivos en un instante de tiempo determinado se presenta en forma matemática, i. e., cuando el problema consiste en determinar los valores de ciertas variables sujetas a un conjunto preestablecido de restricciones en cuanto a sus posibles valores, de modo que se maximice una función dada, se conoce como problema de *programación matemática* (los casos especiales más importantes de este son: la *programación clasica* -las restricciones son de igualdad-, la *programación no lineal* -las restricciones son de no negatividad y de desigualdad- y la *programación lineal* -caso especial de la programación no lineal para el que tanto la función objetivo como las costantes de restricción son todas lineales-).

pueden aplicar a cualquier situación problema una vez que se ha derivado un modelo. Por otro lado, *la construcción del modelo, generalmente es bastante específica, y la mayoría de los modelos se aplican a situaciones particulares.*

Desafortunadamente, (3.1.1) y (3.1.2) no agotan las situaciones posibles. Puede ser que se tengan que tomar decisiones en circunstancias en las que no se conocen ni Y ni su distribución. Por supuesto, si no se conoce nada acerca de Y, es casi imposible tomar una decisión racional acerca de X. Casi siempre sucede que se tiene alguna información *a priori*. Por ejemplo, un comandante militar normalmente no conoce las tácticas defensivas que adoptará su oponente; sin embargo, si se sabe quién es el comandante oponente, o las filosofías de campaña del ejército que él estrenó, se puede inferir algo acerca de su comportamiento probable. Aún sin dicha información, a menudo se puede inferir algo, si se conocen los objetivos del oponente y como afecta su decisión y las del tomador de decisiones. Un enfoque pesimista pero realista es tomar la decisión para obtener el mejor pago posible aun si la variable Y toma el peor valor posible desde el punto de vista del decisor. Tal enfoque es el mejor que se puede tener si Y es seleccionada por un oponente racional que este fuera del alcance del decisor, pero que irregularmente puede ser pesimista si Y es seleccionada por la *"naturaleza", la cual se puede suponer que es indiferente a los problemas propios del decisor*. Si no se desea que sea irregularmente pesimista, se pueden preferir los enfoques del máximo generalizado o la reconsideración minimax que ya se han visto.

3.2 ESTRUCTURA FORMAL DE LAS SITUACIONES COMPETITIVAS.

Supóngase que en un medio ambiente dado un individuo J_1 puede seleccionar el valor de X. Es conveniente designar los valores posibles de X como 1, 2, 3, ... , m. Si J_1 escoge $X = x$, el pago para él es $f_1(x, y)$, donde y es el valor de una variable Y que J_1 no puede controlar. Supóngase que el valor de Y no se puede observar hasta que se selecciona el valor de X. Ahora imagínese un segundo individuo quien selecciona el valor de Y. Sea q_y la probabilidad de que J_2 seleccione y o y, donde $y = 1, 2, \ldots, n$, y sea p_x la probabilidad de que J_1 seleccione $X = x$. Luego el pago para J_1 es V_1, donde

$$V_1 = \sum_{x=1}^{m} \sum_{y=1}^{n} f_1(x, y)\, p_x\, q_y \tag{3.1.3}$$

Por otro lado, si J_2 no está presente, quizá Y tome el valor y con una probabilidad q_y; luego J_1 puede cambiar su elección de probabilidades de tal manera que la probabilidad de que $X = x$ sea $\underline{p}_x$. Por lo tanto en ausencia de J_2 el pago esperado para J_1 es $\underline{V}_1$, donde

$$\underline{V}_1 = \sum_{x=1}^{m} \sum_{y=1}^{n} f_1(x, y)\, \underline{p}_x\, q_y. \tag{3.1.4}$$

Si $V_1 = \underline{V}_1$, la presencia o ausencia de J_2 no produce ninguna diferencia para J_1; de cualquier otra forma si la produce. Si $V_1 > \underline{V}_1$, la presencia de J_2 se agrega a la probabilidad de J_2 y se puede decir que **coopera** con J_1 (quiera o no). La diferencia $D_{1\,2} = V_1 - \underline{V}_1$ es una medida del grado de cooperación de J_2 con J_1. Esta medida puede ser negativa, en cuyo caso se tiene un **conflicto**. Por lo tanto, si la presencia de J_2 disminuye la probabilidad de J_1 se dice que J_2 está en conflicto con J_1.

Si existe también una función de pago $f(x, y)$ para J_2, se pueden definir probabilidades V_2 y $\underline{V}_2$ para J_2 en la presencia o ausencia de J_1. La diferencia $D_{2\,1} = V_2 - \underline{V}_2$ es el grado de cooperación de J_1 con J_2. Nótese que $D_{2\,1}$ no necesariamente debe ser igual a $D_{1\,2}$. Si son diferentes, se puede decir que uno de los dos J_1 o J_2 está *explotando* al otro, de acuerdo a cual de los dos $D_{1\,2}$ o $D_{2\,1}$ es mayor. Si $D_{1\,2} > D_{2\,1} > 0$, se dice que J_1 está explotando a J_2, y que la explotación es *benévola*, debido a que J_2 se está beneficiando con la presencia de J_1 pero menos de lo que se está beneficiando J_1 con la presencia de J_2. Por otro lado, si $D_{1\,2} > 0 > D_{2\,1}$, la explotación es *malévola*. Se puede considerar a la diferencia como el grado de explotación, $(DE)_{1\,2}$:

$$(DE)_{1\,2} = D_{1\,2} - D_{2\,1}.$$

Nótese que

$$(DE)_{2\,1} = -(DE)_{1\,2}.$$

La *intensidad* del conflicto se puede medir de dos maneras: aumenta su función de disminución de $D_{1\,2} + D_{21}$ y de la de $|D_{1\,2} - D_{2\,1}|$. El conflicto crece a medida que cada parte se opone más una a la otra y a medida también que la explotación disminuye.

La competencia se trata a menudo, sin fundamento, como si fuera un sinónimo de conflicto. Sin embargo, después de reflexionar un poco, es claro que en algún sentido la competencia es un conflicto regulado o restringido. Si se reflexiona un poco más, se vuelve evidente que la competencia implica tanto el conflicto como la cooperación.

Considérese una situación en la que J_1 e J_2 están en conflicto con sus respectivos objetivos (resultados deseados) O_1 y O_2. Es decir, cuando las probabilidades de J_1 de obtener O_1 aumentan, las J_2 de obtener O_2 disminuyen. Ahora supóngase que J_1 e J_2 tienen un objetivo común O_3. Por ejemplo, si J_1 e J_2 son oponentes en tenis, J_1 quiere ganar (O_1)

y lo mismo quiere el oponente J_2 (O_2); de aquí que están en conflicto relativo a O_1 y O_2 pero además desean divertirse (O_3) y el conflicto es válido con respecto a O_3. Luego se puede decir que J_1 e J_2 están **compitiendo**. Su conflicto está regulado (restringido por medio de reglas), con lo que se intenta asegurar la eficiencia del conflicto para su objetivo "cooperativo".

Ahora supóngase que el objetivo O_3 no es válido para J_1 e J_2, pero lo es para J_3, que es una tercera parte o grupo. Por ejemplo, J_3 puede ser el público asistente y O_3 su objetivo de entretenimiento. En tal caso, el conflicto de J_1 e J_2 está enclavado a su competencia extrínseca (en contraste con la intrínseca). De aquí que la competencia económica en los negocios generalmente es extrínseca, involucrando al consumidor como la "tercera parte".

Rapoport, identificó tres modelos de conflicto:

- **Luchas**, en las cuales el objetivo es eliminar al oponente.
- **Juegos**, en los cuales el objetivo es sacar ventaja al oponente, es decir, ser más astuto que el oponente, pero sin eliminarlo.
- **Debates**, en los que el objetivo es convencer al oponente.

La teoría clásica de Von Neumann y Morgenstern, desarrollada en 1944, se ocupó de los juegos; trabajos posteriores de Rapoport se ocuparon de otras formas de competitividad.

En esta investigación se hará referencia a la teoría de juegos, así como a los juegos diferenciales, para lo cual, se iniciará con su ubicación dentro una tabla construida por Michael D. Intriligator en su libro que lleva por título *Optimización Matemática y Teoría Económica*, donde de acuerdo el tipo de problema (estático de programación o dinámico de control), a la naturaleza de las restricciones del modelo y al número de personas que toman la decisión ubica a éstos.

Tratamiento del tiempo / Naturaleza de las restricciones; Número de personas que deciden.	Problemas estáticos de programación.	Problemas dinámicos de control.
Ninguna restricción o restricciones de igualdad; un tomador de decisiones.	Programación clásica.	Cálculo de variaciones.
Restricciones de desigualdad; un tomador de decisiones.	Programación no lineal y Programación lineal.	Programación dinámica y Principio del máximo.
Dos o más tomadores de decisiones.	Teoría de juegos	Juegos diferenciales

TABLA 3.1 *Problemas de la optimización matemática.*

La teoría de juegos considera que:

Un juego es una situación en la que dos o más tomadores de decisiones (o jugadores) seleccionan cursos de acción y en la que el resultado se ve afectado por la combinación de selecciones tomadas colectivamente (esto es, los tomadores de decisiones *interaccionan*). Más específicamente:

- Hay n tomadores de decisiones, $n \geq 2$.

- Existe un conjunto de reglas que especifican cuáles cursos de acción se pueden seleccionar (esto es, cuáles jugadas se pueden realizar) y los jugadores las conocen.

- Hay un conjunto bien definido de estados finales para saber en qué momento termina la competencia (por ejemplo, ganar, perder o retirarse).

- Los pagos asociados con cada posible estado final se especifican *a priori* y cada jugador los conoce, es decir, se conoce una serie de consecuencias asociadas con una decisión i de cada jugador y una j, de otro. Estas consecuencias se expresan por lo general en valores monetarios y se presentan en la forma de matrices de consecuencias. Es oportuno aclarar, que todas las transacciones en el desarrollo de un juego se consideran puramente monetarias, i. e., que se atribuye a todos los jugadores un motivo de ganancia exclusivamente monetario.

Se notará inmediatamente que sólo una parte de las situaciones competitivas se pueden modelar como juegos, debido a que en realidad las condiciones (2), (3) y (4) con frecuencia no se satisfacen.

Precisamente estas suposiciones son las que limitan la utilidad de la teoría de juegos. Como ya se había mencionado. por lo general un tomador de decisiones puede intuir, mas no necesariamente conocer con certeza lo que otro decisor hará bajo ciertas circunstancias. La construcción de una tabla de consecuencias no sólo es un proceso muy difícil, sino por lo general, imposible de realizar en la práctica, porque se requiere saber qué curso de acción tomará el oponente como respuesta a una estrategia seleccionada por el otro. Esto es, por lo general no existen los "intermediarios de información".

3.3 JUEGOS NO DIFERENCIALES.

El estudio de las situaciones que implican a más de un "tomador de decisiones" se conoce como "teoría de juegos" porque en forma matemática tales situaciones son en muchos aspectos similares a las que se presentan en los juegos de salón que requieren una estrategia, como el ajedrez, el póquer, etc.. Evidentemente, las consecuencias de la teoría de juegos desbordan ampliamente los juegos de salón, alcanzando las matemáticas, la economía, la política y la estrategia militar, entre otras actividades. En razón de sus orígenes, sin embargo, buena parte de la terminología de la teoría de juegos se ha tomado de las situaciones de los juegos de salón.

Así, los que toman decisiones se denominan *jugadores* y la función objetivo se llama *función de pago*. Los jugadores pueden ser individuos, grupo de individuos, empresas, naciones, etc. La función de pago produce pagos numéricos a cada uno de los jugadores. Michael D. Intriligator define un **juego** así:

> *"Un juego es, una colección de reglas conocidas por todos los jugadores, que determinan lo que los jugadores pueden hacer y los resultados y pagos con sus elecciones"*[2].

Un *movimiento* es un punto del juego en el cual los jugadores deben elegir entre varias alternativas, y cualquier conjunto determinado de movimientos y elecciones es una *jugada del juego*. La característica esencial de un juego es que el pago para cualquier

[2] Intriligator, Michael D. *Optimización Matemática y Teoría Económica*. Ed. Pretince Hall, 1973, pág. 101.

jugador depende específicamente no solamente de sus propias elecciones, sino también de las elecciones de los otros jugadores.

Cada jugador debe tener en cuenta esta dependencia conjunta al seleccionar una *estrategia*, conjunto de decisiones formuladas con anticipación al juego y que especifica las elecciones que han de hacerse ente cada contingencia posible. El concepto de estrategia es muy importante en la teoría de juegos, y de hecho a esta disciplina se le llama a veces "juegos de estrategia".

3.3.1 DESCRIPCIÓN GENERAL Y FORMAL DE LOS JUEGOS DE ESTRATEGIA.

Antes de dar una definición matemática de un juego de estrategia, se verá el concepto simplificado de un juego.

3.3.1.1 EL CONCEPTO SIMPLIFICADO DE UN JUEGO.

3.3.1.1.1 EXPLICACIÓN DEL TÉRMINO TÉCNICO DE JUEGO.

Para dar una definición exacta del concepto de juego se tiene primero que clarificar el uso del término juego. Hay algunas nociones que son bastante fundamentales para discusiones de juegos, pero el uso del término juego en el lenguaje diario es altamente ambiguo. Las palabras que lo describen están utilizadas a veces en un sentido, a veces en otro, y ocasionalmente como si fueran sinónimos. Se tiene, por lo tanto, que introducir el uso del término técnico y adherirlo rígidamente en todo lo que sigue.

Primero, se deberá distinguir entre el concepto abstracto de un juego y un "juego" individual de ese juego. El juego es simplemente la totalidad de las reglas que lo describen. Cada ejemplo particular en que el juego que está siendo jugado -en un modo particular- de comenzar y finalizar, es un "juego"[3].

Segundo, la distinción corresponde a los **movimientos**, *que son los componentes elementales del juego*. Un movimiento es la elección de una opción entre diversas alternativas, y debe ser realizado ya sea por uno de los jugadores, o por algún dispositivo destinado para ello, bajo condiciones precisamente prescritas por las reglas del juego. La especificación de la alternativa elegida en un instante concreto es la elección. Así los movimientos son relacionados con las elecciones de la misma forma como el juego es para

[3] El término juego se emplea para denotar por ejemplo al tenis y el término "juego" para denotar por ejemplo un set.

el "juego". *El juego consiste en una secuencia de movimientos, y el "juego" de una secuencia de elecciones.*

Finalmente, las reglas del juego no deberán ser confundidas con las estrategias de los jugadores. Cada jugador selecciona su estrategia libremente. Mientras cualquier estrategia particular puede ser mala o buena, es dentro de la discreción del jugador para utilizarla o para rechazarla. Las reglas del juego, sin embargo, son mandos absolutos. Si siempre se estuvieran violado, entonces toda la transacción por definición cesa de ser el juego descrito por aquellas reglas. En muchos casos es hasta físicamente imposible violar las reglas del juego.

3.3.1.1.2 LOS ELEMENTOS DEL JUEGO.

Considérese ahora un juego Γ de n jugadores denotados por $1, \ldots, n$; este juego es una secuencia de movimientos. Por ahora se denota el número de movimientos en Γ por ν -éste es un entero $\nu = 1, 2, \ldots$-. Los movimientos denotados por $m_1, \ldots, m_\nu$, y supóngase que este es el orden cronológico en el que se está prescrito participar a los jugadores.

Cada movimiento m_k, $k = 1, \ldots, \nu$, consiste en un número de alternativas, entre las cuales la opción -la cual constituye el movimiento m_k- tiene lugar. Denótese la cantidad de estas alternativas por α_k y las alternativas de cada movimiento por $A_k(1), \ldots, A_k(\alpha_k)$.

Los movimientos son de dos clases. Un movimiento de la primera clase o un movimiento personal, es un escogido o hecho por un jugador específico, i. e., es hecho en dependencia de su decisión libre y nada más. Un movimiento de la segunda clase o un movimiento aleatorio, es una opción en dependencia de algún dispositivo mecánico, que hace su resultado fortuito con probabilidades definidas. Así por cada movimiento personal deberá ser especificada la decisión del jugador que determina este movimiento. Denótese al jugador en cuestión (i. e., su número) por k_k. Así $k_k = 1, \ldots, n$. Para un movimiento aleatorio se pone (convencionalmente) $k_k = 0$. En este caso las probabilidades de las diversas alternativas $A_k(1), \ldots, A_k(\alpha_k)$ tiene que estar dadas. Denótense estas probabilidades por $p_k(1), \ldots, p_k(\alpha_k)$ respectivamente.

En un movimiento m_k, la opción consiste en seleccionar una alternativa $A_k(1), \ldots, A_k(\alpha_k)$, i. e., su número $1, \ldots, \alpha_k$. Denótese el número elegido por σ_k. Así esta opción está caracterizada por un número $\sigma_k = 1, \ldots, \alpha_k$. Y el juego completo está descrito especificando todas las posibilidades, correspondientes a todo movimiento $m_k, \ldots, m_\nu$. Es decir, está descrito por una secuencia $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$.

Ahora las reglas del juego Γ tienen que especificar el resultado del juego para cada jugador $k = 1, \ldots, n$, si el juego es descrito por la secuencia dada $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$. Es decir, qué pagos recibe cada jugador cuando el juego está completado. Denótese el pago para el jugador k por F_k ($F_k > 0$ si k recibe un pago, $F_k < 0$ si tuviera que hacer un pago, $F_k = 0$ en otro caso). Así cada F_k tiene que estar dado como una función de $\sigma_1, \dots, \sigma_v$.

$$F_k = F_k(\sigma_1, \dots, \sigma_v),\ k = 1, \dots, n.$$

Enfatícese de nuevo en que las reglas del juego Γ especifican la función $F_k(\sigma_1, \dots, \sigma_v)$ solamente como una función, i. e., la dependencia abstracta de cada F_k en las variables $\sigma_1, \dots, \sigma_v$. Pero todo el tiempo cada σ_k es una variable, con el dominio de variabilidad $1, \dots, \alpha_k$. Una especificación de valores numéricos particulares para el σ_k, i. e., la selección de una secuencia particular $\sigma_1, \dots, \sigma_v$ no es ninguna de las partes del juego Γ. Esto es, como se señaló anteriormente, la definición de un juego.

3.3.1.1.3 INFORMACIÓN Y PRELIMINARIDAD.

La descripción del juego Γ no está aún completa, falta incluir las especificaciones acerca del estado de información de cada jugador en cada decisión que él tiene para hacer.

Esta información se requiere para cada movimiento $m_k, \dots, m_v$, para saber que opción elegir. Por lo tanto se prestará atención en un movimiento particular m_k. Si este m_k es un movimiento aleatorio, entonces la opción está decidida por el azar, nadie, ni el conocimiento de nadie pueden influenciarla. Pero si m_k es un movimiento personal, pertenece al jugador k_k decidir su opción, entonces es bastante importante el estado de información que tenga el jugador k_k para que forme su decisión que concierne al movimiento m_k, i. e., su opción de σ_k.

Las únicas cosas que de las que puede estar informado son las elecciones correspondientes al los movimientos precedentes al movimiento m_k, esto es, los movimientos $m_1, \dots, m_{k-1}$, i. e., él puede conocer los valores de $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$. Pero él no necesita conocer tanto. Esto es una peculiaridad importante de Γ, justamente cuánta información concerniente a $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ otorgada al jugador k_k, cuando está llamado para escoger σ_k.

El tipo más simple de regla que describa el estado de información de k_k en m_k es este: un conjunto Λ_k consistiendo de algunos números de entre $\lambda = 1, \dots, k-1$, está dado. Está especificado que k_k sabe los valores de σ_λ con λ perteneciendo a Λ_k, y que es totalmente ignorante de σ_λ con cualquier otro λ.

En este caso se dice que, cuando λ pertenece a Λ_k, que λ es preliminar para k. Esto implica que $\lambda = 1, \dots, k-1$, i. e., que $\lambda < k$, pero no tiene que estar implicado por él. O, si se considera, en lugar de eso a λ, k, los movimientos correspondientes m_λ, m_k: Preliminarmente implicados con anterioridad, pero no tiene que estar implicado por él.

A pesar de su carácter algo restrictivo, este concepto de preliminaridad merece un análisis más profundo. En si mismo y en su relación a anterioridad, esto da ocasión a diversas posibilidades combinatorias. Estos tienen significados definidos en aquellos juegos en que ocurren, y ahora se van a ilustrar para algunos ejemplos particularmente esas características.

3.3.1.1.4 PRELIMINARIDAD, TRANSITIVIDAD Y ANTERIORIDAD.

Se va a comenzar observando que existen juegos en que los términos preliminaridad y anterioridad son la misma cosa, i. e., donde los jugadores k_k, que hagan el movimiento personal m_k están informados acerca del resultado de las posibilidades de todos los movimientos anteriores $m_1, \ldots, m_{k-1}$. El ajedrez es representante típico de esta clase de juegos de información "perfecta". Están considerados generalmente para ser de un carácter particularmente racional. El ajedrez tiene la característica de que todos sus movimientos son personales. El Backbammon es un ejemplo de los tipos de juegos donde los movimientos no son personales. Sin embargo, no quiere decir que un juego con jugadas aleatorias no sea un juego de carácter racional.

Considérense ahora los juegos donde anterioridad no implica preliminaridad. Esto es, donde el jugador k_k que hace el movimiento personal m_k no está informado acerca de todo lo que ocurrió previamente. Hay una familia grande de juegos en que esto ocurre. Estos juegos contienen generalmente movimientos no personales así como movimientos personales. Generalmente se les considera como de un carácter mezclado: *mientras su resultado es definitivamente dependiente del azar, están también influenciados fuertemente por las habilidades estratégicas de los jugadores.*

El Póker y el Bridge son buenos ejemplos.

La anterioridad, i. e., la ordenanza cronológica de los movimientos, posee la propiedad de transitividad, i. e., si m_μ es anterior a m_λ y m_λ a m_k, entonces, m_μ es anterior a m_k. Ahora en el caso presente la preliminaridad no tiene que ser transitiva.

Por ejemplo, el Póker: Sea m_μ el movimiento donde se distribuye la "mano" para el jugador 1 -un movimiento aleatorio-; m_λ la primera propuesta de jugador 1 -un movimiento personal del jugador 1-; m_k la primer propuesta del jugador 2 -un movimiento personal del jugador 2-. Entonces m_μ es preliminar a m_λ y m_λ a m_k pero m_μ no es preliminar a m_k. Así se tiene intransitividad pero involucra a ambos jugadores. Sin duda, puede primero parecer poco probable que preliminaridad puede en algún juego ser intransitivo entre el movimiento personal de un jugador particular. Requeriría que este jugador debería "olvidar" lo que sucede entre los movimientos m_λ a m_k el resultado de la elección conectada con m_μ -es difícil de ver como este "olvidar" puede estar logrado y hasta imponerse-.

3.3.1.2 CONCEPTO COMPLETO DE UN JUEGO.

LA VARIABILIDAD DE LAS CARACTERÍSTICAS DE CADA MOVIMIENTO.

Los elementos α_k , k_k , Λ_k y $A_k(\sigma)$, $p_k(\sigma)$ para $\sigma = 1, \ldots, \alpha_k$ -dependiendo exclusivamente de k o también de otras cosas-. Estas "otras cosas" pueden, por supuesto, solamente ser el resultado de las posibilidades correspondientes a los movimientos que son anteriores a m_k, i. e., los números $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$.

Esta dependencia requiere una discusión más detallada.

Primero, la dependencia de las alternativas $A_k(\sigma)$ es inmaterial. Se puede suponer también que la elección correspondiente al movimiento m_k no está hecha entre las mismas $A_k(\sigma)$, pero sí entre sus números σ. En resumen, son solamente los σ de m_k, i. e., σ_k.

Segundo, todas las dependencias (en $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$) las cuales surgen cuando m_k se entrega para ser un movimiento aleatorio -i.e., cuando $k_k = 0$- no provoquen complicaciones. No interfieren con el análisis del comportamiento de los jugadores. Estas disponen, en particular, de todas las probabilidades $p_k(\sigma)$, ya que ocurren solamente en conexión con movimientos aleatorios. (Por otra parte, Λ_k nunca ocurre en movimientos aleatorios).

Tercero, se tienen que considerar las dependencias (en $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$) de α_k, k_k, Λ_k cuando m_k se realiza como un movimiento personal. Esta posibilidad es sin duda una fuente de complicaciones. Y es una posibilidad muy real. La razón es esta.

El jugador k_k, tiene que estar informado al realizar el movimiento m_k de los valores α_k, k_k, Λ_k, ya que estos son ahora parte del juego que él tiene que observar. En cuanto a la dependencia de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$, puede dibujar ciertas conclusiones concernientes a esos valores. Pero está suponiendo que no conoce absolutamente nada en lo concerniente a σ_λ con $\lambda \notin \Lambda_k$. Es difícil saber como puede evitarse el conflicto.

Para ser precisa: no hay conflicto en este caso especial: Sea Λ_k independiente de todas las $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$, y sean α_k, k_k dependientes solamente en σ_λ con $\lambda \in \Lambda_k$. Entonces el jugador k_k puede no obtener información con certeza a cerca de α_k, k_k, Λ_k más allá de lo que sabe de todos modos (i. e., los valores de σ_λ con $\lambda \in \Lambda_k$). Si este fuera el caso, se dice que se tiene la forma especial de dependencia.

Pero, ¿se tiene siempre dependencia de forma especial? Para tomar un caso extremo: Si Λ_k es siempre vacío -i. e., k_k esperó ser completamente informado en el movimiento m_k - y no obstante e. g. α_k depende explícitamente en parte de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$.

Esto es claramente inadmisible. Se tiene que demandar que todas las conclusiones numéricas que pueden estar derivando del conocimiento de α_k, k_k, Λ_k tienen que ser explícitas. Sería erróneo, sin embargo, intentar obtener esto incluyendo en Λ_k los índices λ de todo los σ_k, en el cual α_k, k_k, Λ_k depende explícitamente. Aunque Λ_k depende solamente de k y no de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$, i. e., si la información disponible para cada jugador en cada momento es independiente del curso previo del juego- el procedimiento anterior puede aún ser inadmisible. Asumiendo por ejemplo que α_k depende con certeza de una combinación de algunos σ_λ para $\lambda = 1, \ldots, k - 1$, y que las reglas del juego hacen innecesario proveer que el jugador k_k para el movimiento m_k deberá conocer los valores de esta combinación, pero no conocerá el valor individual de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$, por ejemplo, puede conocer los valores de $\sigma_\mu + \sigma_\lambda$ donde μ, λ ambos anteriores a k ($\mu, \lambda < k$), pero no está autorizado para conocer el valor separado de σ_μ, σ_λ.

Unos intentarían diversos trucos para devolver la situación anterior al caso en que se describe el estado de información de k_k por medio del conjunto Λ_k establecido. Pero se pone completamente imposible para desenredar los diversos componentes de información de k_k en m_k, si ellos mismos se originaran de movimientos personales de los jugadores, o de igual jugador pero en diferente etapa de información. En el ejemplo anterior esto ocurre si $k_\mu \neq k_\lambda$, o si $k_\mu = k_\lambda$ pero el estado de información de este jugador no es el mismo para k_μ y para k_λ.

LA DESCRIPCIÓN GENERAL.

Hay aún diversos trucos, más o menos artificiales, para los cuales se puede intentar entrampar estas dificultades. Pero el procedimiento más natural parece ser admitirlos.

Este es hecho para sacrificar el Λ_k como unos medios de descripción del estado de información. En lugar de eso, se describe el estado de información del jugador k_k en el momento de su movimiento personal m_k explícitamente: enumerando aquellas funciones de la variable σ_k anterior a este movimiento -i. e., de los $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$- los valores numéricos del cual está supuesto para conocer a este momento. Este es un sistema de funciones y está denotado por ϕ_k.

Así ϕ_k es un conjunto de funciones

$$h(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}).$$

Desde los elementos de ϕ_k se describe la dependencia de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$, así ϕ_k está arreglado, i. e., dependiendo solamente de k. α_k, k_k pueden depender de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$ y ya que sus valores son conocidos para k_k en m_k, estas funciones

$$\alpha_k = \alpha_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}), \qquad k_k = k_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1})$$

tenga que pertenecer a ϕ_k. Por supuesto, siempre que $k_k = 0$ (para un conjunto especial de valores $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$), entonces el movimiento m_k es una casualidad, y no se usará para ϕ_k.

La necesidad de reemplazar A_k por ϕ_k es originada por el deseo de mantener generalidad formal absoluta (*matemática*).

El punto más importante, sin embargo, es este.

En persecución de los objetivos que se han establecido se tiene que lograr la certidumbre de haber agotado todas posibilidades combinatorias en conexión con la acción recíproca completa de las diversas decisiones de los jugadores, sus estados cambiantes de información, etc.. Estos son problemas que se han estado estudiando extensivamente en la literatura económica. Se va a empezar por mostrar de que se puede estar dispuesto completamente. Pero por esta razón es que se quiere estar seguro de no haber pasado por alto alguna posibilidad esencial por especialización indebida.

Además, estará visto que todos los elementos formales que se están introduciendo ahora en la discusión no hace complicado el análisis final.

Considérese primero el "arreglo" de movimientos. La variabilidad posible de la naturaleza de cada movimiento- i. e., de este k_k- ha recibido ya consideración completa. La ordenanza de los movimientos m_k, $k = 1, \dots, v$, estuvo desde el comienzo simplemente cronológico.

Considérese después el número de movimientos v. *Esta cantidad también puede ser variable, es decir, depende del curso del juego.*

El curso del juego está caracterizado por la secuencia (de posibilidades) $\sigma_1, \dots, \sigma_v$. La formulación correcta es esta: Imagínese que las variables $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ están elegidas una después de la otra. Si esta sucesión de posibilidades fuera indefinida, entonces las reglas del juego tienen que en alguna v se detiene el procedimiento. Entonces v para el cual ocurre el tope dependerá de, por supuesto, todas las posibilidades hasta ese momento. Esto es el número de movimientos en ese juego particular.

Ahora esta *regla de tope* tiene que ser como dar una certidumbre de que cada juego concebible estará detenido alguna vez. Mientras v puede depender de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$, es seguro que $v < v^*$ donde v^* no depende de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$. Si este fuera el caso, se dice que la regla de tope esté limitada por v^*. Se supondrá que los juegos que se consideren deben de tener reglas limitadas por números v^*.

Ahora se pude hacer uso de este límite v^* para poder deshacer totalmente de la variabilidad de v.

Esto se hace simplemente extendiendo el plan del juego de modo que hay siempre ν^* movimientos $m_1, \ldots, m_{\nu^*}$. Si se considera un movimiento m_k, $k = 1, \ldots, \nu^*$, para una secuencia $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ por el que $\nu < k$, entonces se hace m_k un movimiento aleatorio con una alternativa solamente, i. e., uno en que nada ocurra.

3.3.1.3 LAS PARTICIONES QUE DESCRIBEN UN JUEGO.

Supóngase un número de movimientos para ser arreglado. Denótese este número de nuevo por ν, y los movimientos por $m_1, \ldots, m_\nu$.

Considérese todos los "juegos" posibles del juego Γ, y fórmese el conjunto Ω de los cuales ellos son elementos. Todos los "juegos" posibles son simplemente todas secuencias posibles $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$. Donde existe solamente un número finito de tales secuencias, y por tanto Ω es un conjunto finito.

Hay, sin embargo, también modos más directos de formar a Ω. Se puede por ejemplo fomarlo describiendo cada "juego" como la secuencia de $\nu + 1$ posiciones consecutivas que surjan durante su curso. En general, por supuesto, una posición dada puede no estar seguida por una posición arbitraria, pero las posiciones que son posibles en un momento dado están restringidas por las posiciones previas, de modo que tienen que estar descritas precisamente por las reglas del juego. Ya que la descripción de las reglas del juego comienza formando a Ω, puede ser indeseable permitir a Ω mismo depender así pesadamente en todos los detalles de aquellas reglas. Se observa, por lo tanto, que *no hay objeción para incluir en Ω secuencias absurdas* de posiciones como secuencias no absurdas también. Así sería perfectamente aceptable hasta permitir que Ω consistiera en todas las secuencias de $\nu + 1$ posiciones sucesivas, sin ningunas restricciones.

Se detallará más sobre el curso de un "juego".

Considérese un momento definido durante este curso, que dice uno de los movimientos que inmediatamente precede a un movimiento dado m_k. Para este momento las siguientes especificaciones generales tienen que estar dadas por las reglas del juego.

Primero es necesario describir qué eventos se han realizado hasta el movimiento m_k han determinado el curso del juego. Cada secuencia particular de estos escasos eventos del conjunto Ω para un subconjunto $\mathbf{A}_k$: Este es el conjunto de todos aquellos "juegos" de Ω, el curso de los cuales es, hasta m_k, la secuencia particular de eventos referidos. En la terminología de las secciones anteriores, Ω es el conjunto de todas las secuencias $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$; entonces $\mathbf{A}_k$ sería el conjunto de aquellas secuencias $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ por las que las $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$ han dado valores numéricos. Pero desde un punto de vista más amplio solamente se dice que $\mathbf{A}_k$ tiene que ser un subconjunto de Ω.

Ahora los diversos cursos posibles del juego que pueden haberse tomado para m_k tienen que estar representados por los diferentes conjuntos $\mathbf{A}_k$. Cualesquiera dos de tales cursos, si fueran diferentes uno del otro, inician dos conjuntos totalmente disjuntos de "juegos". Esto significa que cualesquiera dos diferentes conjuntos $\mathbf{A}_k$ tienen que ser disjuntos.

Así las posibilidades formales completas del curso de todos los "juegos" concebibles del juego hasta m_k están descritos por una familia de parejas de subconjuntos disjuntos de Ω. Esta es la familia de todos los conjuntos $\mathbf{A}_k$ mencionados anteriormente. Se denota esta familia por A_k.

La suma de todos conjuntos $\mathbf{A}_k$, contenidos en A_k tienen que contener todos los "juegos" posibles. Pero ya que se permitió explícitamente una redundancia de Ω, esta necesidad de suma no obstante no es igual a Ω. Esto es:

$$A_k \text{ es una partición en } \Omega. \tag{3.3.1}$$

Se puede también decir que la partición A_k describe el patrón de información de una persona que sepa todo lo que ha ocurrido hasta m_k;

Segundo, se tiene que conocer cual es la naturaleza del movimiento m_k que se está haciendo. Esto está expresado por k_k: $k_k = 1, \ldots, n$ si el movimiento es personal y pertenece al jugador k_k; $k_k = 0$ si el movimiento es al azar. k_k puede depender del curso del "juego" para m_k, i. e., sobre la información encerrada en A_k. Esto significa que k_k tiene que ser una constante dentro de cada conjunto $\mathbf{A}_k$ de A_k, pero que puede variar de un $\mathbf{A}_k$ a otro.

Se puede formar para cada $k = 0, 1, \ldots, n$ un conjunto $\mathbf{B}_k(k)$, que contenga todos los conjuntos $\mathbf{A}_k$ con $k_k = k$, los diversos $\mathbf{B}_k(k)$ son conjuntos disjuntos. Así el conjunto $\mathbf{B}_k(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, forma una familia de subconjuntos disjuntos de Ω. Esta familia se denota por B_k.

> B_k es de nuevo una partición en Ω. Ya que cada $\mathbf{A}_k$ de A_k es un subconjunto de algún $\mathbf{B}_k(k)$ de B_k, por lo tanto A_k es una partición de $\mathbf{B}_k$.
>
> (3.3.2)

Pero mientras no había ninguna ocasión para especificar cualquier enumeración particular de los conjuntos $\mathbf{A}_k$ de A_k, no es así con B_k. B_k consiste de exactamente $n + 1$ conjuntos $\mathbf{B}_k(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, que aparecen de este modo en una enumeración arreglada por medio de $k = 0, 1, \ldots, n$. Y esta enumeración es esencial desde el reemplazo de la función k_k.

Tercero, las condiciones bajo las que la opción conectada con el movimiento m_k tiene lugar deberán ser descritas con detalle.

Supóngase primero que m_k es un movimiento aleatorio. Entonces las cantidades significativas son: la cantidad de alternativas α_k y las probabilidades $p_k(1), \dots, p_k(\alpha_k)$ de estas diversas alternativas, todas estas cantidades pueden depender de la información completa envuelta en α_k, desde m_k donde ahora es un movimiento aleatorio. Es decir, α_k y $p_k(1), \dots, p_k(\alpha_k)$ tiene que ser constantes dentro de cada conjunto $\mathfrak{A}_k$ de A_k, pero pueden variar de un $\mathfrak{A}_k$ a otro.

Dentro de cada una de estas $\mathfrak{A}_k$ la opción entre las alternativas $A_k(1), \dots, A_k(\alpha_k)$ tiene lugar. Esto puede estar descrito especificando α_k subconjuntos disjuntos de $\mathfrak{A}_k$ que correspondan a la restricción expresada por $\mathfrak{A}_k$, más que a la opción de σ_k que haya tenido lugar. Llámense a estos conjuntos $\mathfrak{C}_k$, y su sistema -consistiendo de todos los $\mathfrak{C}_k$ en todo el $\mathfrak{A}_k$ que sean subconjuntos de $\mathfrak{B}_k(0)$- $C_k(0)$. Así $C_k(0)$ es una partición en $\mathfrak{B}_k(0)$. Y ya que cada $\mathfrak{C}_k$ de $C_k(0)$ es un subconjunto de algún $\mathfrak{A}_k$ de A_k, por lo tanto $C_k(0)$ es una subpartición de A_k.

Para $p_k(1), \dots, p_k(\alpha_k)$ esta descripción sugiere asimismo: Con cada $\mathfrak{C}_k$ de $C_k(0)$ un número $p_k(\mathfrak{C}_k)$ (su probabilidad) tiene que estar asociado.

Supóngase, en segundo lugar, que m_k es un movimiento personal, hecho por el jugador $k = 1, \dots, n$, en este caso se tiene que especificar el estado de información del jugador k en m_k. k sabe en m_k los valores de todas las funciones $h(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1})$ de ϕ_k y nada más. Esta cantidad de información opera una subdivisión de $\mathfrak{B}_k(k)$ en varios subconjuntos disjuntos, correspondientes a los diversos contenidos posibles de información de k en m_k. Llámense a estos conjuntos $\mathfrak{D}_k$ y su sistema $D_k(k)$. Así $D_k(k)$ es una partición en $\mathfrak{B}_k(k)$.

Por supuesto, la información de k en m_k es parte de la existencia de la información total en ese momento que está envuelta en A_k por lo tanto, en un $\mathfrak{A}_k$ de A_k, que es un subconjunto de $\mathfrak{B}_k(k)$, no puede existir ambigüedad. Esto significa que el $\mathfrak{A}_k$ en cuestión tenga que ser un subconjunto de un $\mathfrak{D}_k$ de $D_k(k)$. En otras palabras: dentro de $\mathfrak{B}_k(k)$ α_k es una subpartición de $D_k(k)$.

En realidad el curso del juego es estricto para m_k dentro de un conjunto $\mathfrak{A}_k$ de A_k. Pero el jugador k cuyo movimiento es m_k no conoce tanto: como esté concernido, el "juego" esta simplemente dentro de un conjunto $\mathfrak{D}_k$ de $D_k(k)$. Tiene ahora que elegir la opción entre las alternativas $A_k(1), \dots, A_k(\alpha_k)$, i. e., una de las opciones $\sigma_k = 1, \dots, \alpha_k$, α_k puede bien ser variable, pero puede solamente depender de la información encerrada en $D_k(k)$. Así la opción de una $\sigma_k = 1, \dots, \alpha_k$, puede estar descrita especificando α_k, subconjuntos disjuntos de $\mathfrak{D}_k$, que corresponda a la restricción expresada por $\mathfrak{D}_k$, más la opción de σ_k que haya tenido lugar. Llámense a estos conjuntos C_k y a sus sistemas $C_k(k)$. Así $C_k(k)$ es una partición en $B_k(k)$. Y ya que cada C_k de $C_k(k)$ es un subconjunto de algún D_k de $D_k(k)$, por lo tanto $C_k(k)$ es una subpartición de $D_k(k)$.

Solamente una cosa se recomienda: Para reintroducir en esta nueva terminología, las cantidades F_k, $k = 1, \ldots, n$. F_k es el resultado del "juego" para el jugador k. F_k tiene que ser una función del "juego" real que ha tenido lugar. Si se utiliza el símbolo π para indicar esos "juegos", entonces se puede decir que: F_k es una función de una variable π con el dominio de variabilidad de Ω. Es decir:

$$F_k = F_k(\pi), \quad \pi \text{ en } \Omega, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

3.3.1.4 FORMULACIÓN AXIOMÁTICA.

LOS AXIOMAS Y SUS INTERPRETACIONES.

La descripción del concepto general de un juego, con la nueva técnica de involucrar el uso de conjuntos y de particiones, está ahora completa.

Todas las construcciones y definiciones han sido suficientemente explicadas en las secciones anteriores y se puede, por lo tanto proceder a una definición axiomática rigurosa de un juego. Esta es, por supuesto, solamente una reafirmación concisa de las cosas que se han discutido más profundamente en las secciones anteriores.

Un juego n-personal Γ, i. e., el sistema completo de estas reglas, está determinado por la especificación de la siguiente información:

- Un número v. v es la longitud del juego Γ.
- Un conjunto finito Ω. Ω es el conjunto de todos los "juegos" de Γ.
- Por cada $k = 1, \ldots, n$: Una función

  $$F_k = F_k(\pi), \quad \pi \text{ en } \Omega.$$

  $F_k(\pi)$ es el resultado de los "juegos" π para el jugador k.
- Por cada $k = 1, \ldots, v, v + 1$: Una partición A_k en Ω. A_k es el patrón del árbitro de información, un A_k de A_k es la información real del árbitro en el movimiento m_k. (Para $k = v + 1$: Al cabo del juego).

❺ Por cada $k = 1, \ldots, v$: Una partición B_k en Ω. B_k consisten de $n + 1$ conjuntos $\mathfrak{B}_k(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, enumerados en esta forma. B_k es el patrón de asignación, un $\mathfrak{B}_k(k)$ de B_k, es la asignación real, del movimiento m_k.

❻ Por cada $k = 1, \ldots, v$ y cada $k = 0, 1, \ldots, n$: Una partición $C_k(k)$ en $\mathfrak{B}_k(k)$. C_k es el patrón de opción, un $\mathfrak{C}_k$ de $C_k(k)$ es la opción real, del jugador k en el movimiento m_k. (para $k = 0$: de aleatoriedad).

❼ Por cada $k = 1, \ldots, v$ y cada $k = 1, \ldots, n$: Una partición $D_k(k)$ en $\mathfrak{B}_k(k)$. D_k es el patrón de información del jugador k, un $\mathfrak{D}_k$ de $D_k(k)$ es la información real del jugador k, en el movimiento m_k.

❽ Por cada $k = 1, \ldots, v$ y cada $\mathfrak{C}_k$ de $C_k(0)$: Un número $p_k(\mathfrak{C}_k)$. $p_k(\mathfrak{C}_k)$ es la probabilidad de la opción real $\mathfrak{C}_k$ en el movimiento (aleatorio) m_k.

(3.3.3)

Estas entidades tienen que satisfacer los siguientes requisitos:

❶ A_k es una subpartición de B_k. El patrón de arbitraje de información en el movimiento m_k. Incluye la asignación de ese de movimiento.

❷ $C_k(0)$ es una subpartición de A_k. El patrón de opción en un movimiento aleatorio m_k, incluye el patrón de arbitraje de información en ese movimiento.

● Para cada $k = 1, \ldots, n$: $C_k(k)$ es una subpartición de $D_k(k)$. El patrón de opción en un movimiento personal m_k del jugador k incluye el patrón de información del jugador k en ese movimiento.

● Para cada $k = 1, \ldots, n$: Con $\mathfrak{B}_k(k)$, A_k es una subpartición de $D_k(k)$. El patrón de arbitraje de información en el movimiento m_k incluye -la extensión a la cual este es un movimiento personal del jugador k- el patrón del jugador k de información en ese movimiento.

● Para cada $k = 1, \ldots, v$ y para cada $\mathfrak{A}_k$ de A_k, que es un subconjunto de $\mathfrak{B}_k(0)$: Para todos los $\mathfrak{C}_k$ de $C_k(0)$ que sean subconjuntos de este $\mathfrak{A}_k$, $p_k(\mathfrak{C}_k) \geq 0$, y para la suma extendida sobre ellos $\sum p_k(\mathfrak{C}_k) = 1$. Las probabilidades de las diversas alternativas posibles para un movimiento aleatorio m_k se comportan como probabilidades pertenecientes a alternativas disjuntas y exhaustivas.

⑥ A_1 consiste del conjunto Ω. El patrón de arbitraje de información en el primer movimiento es nulo.

⑦ $A_{\nu+1}$ consiste de un elemento del conjunto. El patrón de arbitraje de información al cabo del juego determina completamente el "juego".

⑧ Para cada $k = 1, \ldots, \nu$: A_{k+1} se obtiene de A_k sobreponiéndola con todas las $C_k(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. El patrón de arbitraje de información en el movimiento m_{k+1} (para $k = \nu$: Al final del juego) obtenido desde el movimiento m_k, sobreponiéndolo con el patrón de opción en el movimiento m_k.

⑨ Para cada $k = 1, \ldots, \nu$: Si $\mathfrak{A}_k$ de A_k y $\mathfrak{C}_k$ de $C_k(k)$, $k = 1, \ldots, n$ son subconjuntos del mismo $\mathfrak{B}_k$ de $D_k(k)$, entonces la intersección $\mathfrak{A}_k \cap \mathfrak{C}_k$ no tiene que ser vacía. Sea m_k un movimiento dado, el cual es un movimiento personal del jugador k, y cualquier información real del jugador k en ese movimiento también dado. Entonces cualquier información real del arbitraje en ese movimiento y cualquier opción real del jugador k en ese movimiento, que están ambas dentro de esta información real (del jugador), son también compatibles una con otra. Es decir, que ocurren en el "juego" real.

⑩ Para cada $k = 1, \ldots, \nu$ y cada $k = 1, \ldots, n$ y para cada $\mathfrak{B}_k$ de $D_k(k)$: Algún $\mathfrak{C}_k(k)$ el cual es un subconjunto de $\mathfrak{B}_k$, tiene que existir. Sea m_k un movimiento realizado, el cual es un movimiento personal del jugador k, y alguna información real del jugador k para ese movimiento. Entonces, el número de alternativas reales escogidas, también está dado al jugador k, y no es cero.

(3.3.4)

Todo esto es, por supuesto, simplemente es un sumario conciso de las consideraciones intuitivas de las secciones precedentes, que guían hasta esta axiomatización. Este procedimiento es más apropiado para desarrollar conceptos marcadamente definidos. Esto concluye la formalización del plan general de un juego. Estos conceptos pueden ser los objetos de una exacta investigación matemática.

ALGUNOS COMENTARIOS A CERCA DE LA FORMULACIÓN AXIOMÁTICA.

Lo único que se hizo fue dar un formalismo exacto para los juegos. Desde el punto de vista estrictamente lógico-matemático, hasta el juego más simple cumple con estos axiomas, por tanto, no existen categorías en este caso, ya que los axiomas tiene que definir una clase de entidades (juegos) y no una entidad única.

Hay dos notas más que deben hacerse en conexión con esta axiomatización.

Primero, el procedimiento sigue las líneas clásicas de obtener una formulación exacta para intuitivamente -empíricamente- dar ideas. La noción de un juego existe en general como una experiencia en una forma prácticamente satisfactoria, no obstante también se necesita soltura para adoptar el tratamiento exacto.

Segundo, es posible describir y discutir acciones humanas matemáticamente en las cuales yace el énfasis principal del factor psicológico. En el caso presente el elemento psicológico fue presentado por la necesidad de decisiones analíticas, la información sobre la base de la cual están tomadas, y es mutuamente relacionado con tales conjuntos de información (en los diversos movimientos) de unos a otros. Esta interrelación es originada en la conexión de los diversos conjuntos de información en el tiempo origen, y por la hipótesis especulativa de los jugadores que conciernen de unos a otros.

Hay por supuesto muchos y más importantes aspectos psicológicos que se tiene que tomar en cuenta, pero de hecho los principales han sido axiomatizados.

3.3.1.5 LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN JUEGO.

La representación gráfica de las numerosas particiones que se tuvieron que utilizar para representar un juego no es fácil. No se intenta tratar esta cuestión sistemáticamente: hasta los juegos relativamente simples parecen guiar a diagramas complicados y confusos, de modo que las usuales ventajas de la representación gráfica no se obtienen.

Hay, sin embargo, algunas posibilidades restringidas de la representación gráfica.

En primer lugar debe recordarse que A_{k+1} es una subpartición de A_k, i. e., que en la secuencia de particiones $A_1, \ldots, A_v, A_{v+1}$ cada una es una subpartición de su predecesor inmediato. Por consiguiente esto puede ser dibujado por un árbol (Figura 3.1-a). (Desde la longitud del juego Γ, está supuesto para estar arreglado, todas las ramas del árbol tiene que continuar a su altura completa). No se intenta añadir a $B_k(k)$, $C_k(k)$, $D_k(k)$ en este diagrama.

Hay, sin embargo, una clase de juegos donde la secuencia $A_1, \ldots, A_\nu, A_{\nu+1}$ dice prácticamente la historia completa. Esta es una clase importante, donde preliminaridad y anterioridad son equivalentes. Sus características encuentran una expresión simple en el formalismo presente.

Preliminaridad y anterioridad son equivalentes, si y sólo si cada jugador que haga un movimiento personal sabe en ese momento la historia anterior completa del juego. Sea k jugador k, el movimiento m_k. La afirmación de que m_k es movimiento personal de k significa, entonces, que se está dentro de $\mathbf{B}_k(k)$. Por lo tanto, la afirmación es que dentro de $\mathbf{B}_k(k)$ el patrón de información del jugador k coincide con el patrón de arbitraje de información, i. e., que $D_k(k)$ es igual a A_k dentro de $\mathbf{B}_k(k)$. Pero $D_k(k)$ es una partición en $\mathbf{B}_k(k)$; por tanto, la declaración anterior significa que $D_k(k)$ simplemente es esa parte de A_k que yace en $\mathbf{B}_k(k)$.

Es importante resaltar lo siguiente:

> *"Preliminaridad y anterioridad coinciden -i. e., cada jugador que hace un movimiento personal está en ese momento completamente informado acerca de la historia anterior completa del juego- si y solamente si $D_k(k)$ es esa parte de A_k que yace en $\mathbf{B}_k(k)$"*[4].

Si este fuera el caso, entonces se puede discutir como sigue: por (3.2.3-8) y el $C_k(k)$ que ahora deberá ser una subpartición de A_k. Para movimientos personales, i. e., para $k = 1, \ldots, n$, pero para $k = 0$. Ahora (3.2.3-8) permite la inferencia de que A_{k+1} coincide con $C_k(k)$ en $\mathbf{B}_k(k)$. Para $k = 0, 1, \ldots, n$. Pero $C_k(k)$ es una partición en $\mathbf{B}_k(k)$; por lo tanto, la declaración anterior significa que $C_k(k)$ simplemente es esa parte de A_{k+1} cual yace en $\mathbf{B}_k(k)$.

Se resalta lo siguiente:

> Si la condición de (3.2.3-2) se cumple, entonces $C_k(k)$ es esa parte de A_{k+1} que yace en $\mathbf{B}_k(k)$.

Así cuando preliminaridad y anterioridad coinciden, entonces formalmente, la secuencia $A_1, \ldots, A_\nu, A_{\nu+1}$ y los conjuntos $\mathbf{B}_k(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, para cada $k = 1, \ldots, \nu$, describen al juego completamente.

---

[4] Von Neumman, John and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Ed. J. Wiley, 1903, pág. 78.

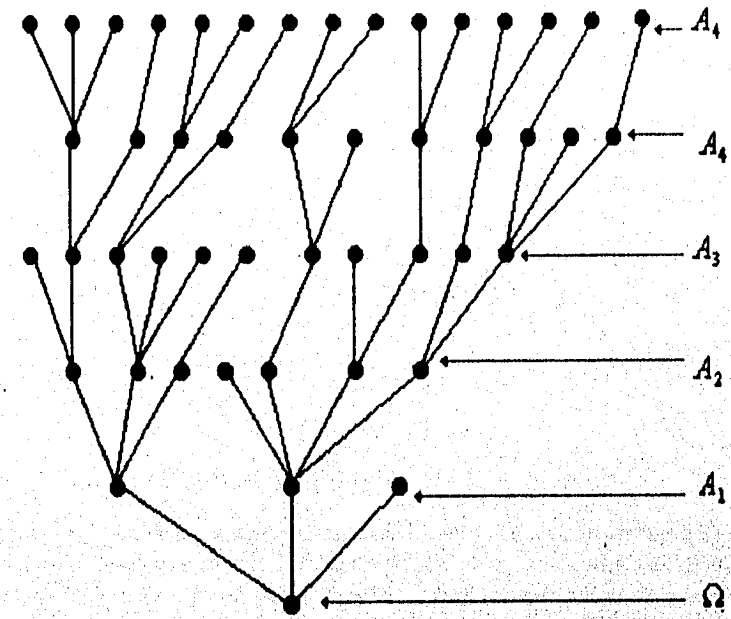


FIGURA 3.1-a *Representación gráfica de un juego.*

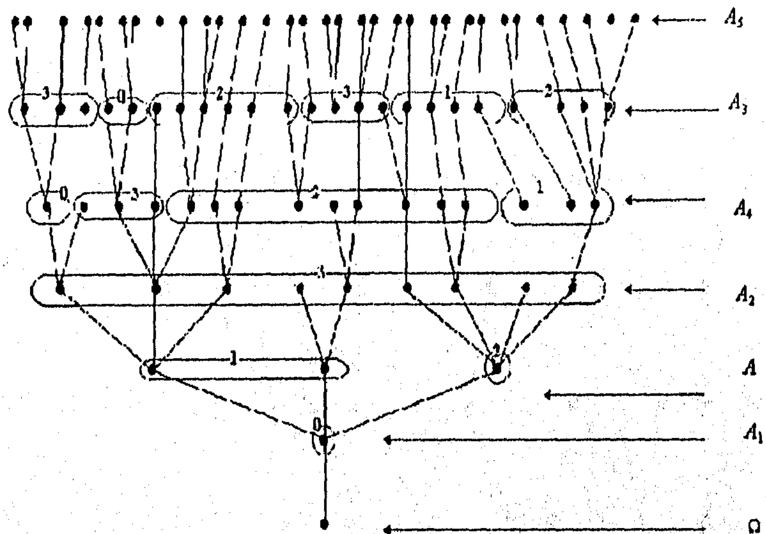


FIGURA 3.1-b *Representación gráfica de un juego.*

El diagrama de la figura 3.1-a, deberá ser amplificado solamente por categorías juntando esos elementos de cada A_k las que pertenecen al mismo conjunto $B_k(k)$. Esto se puede hacer rodeándolos con una línea, a través de la que el número k de $\mathbf{I}_k(k)$ es escrita. Así $\mathbf{I}_k(k)$ esta ahora vacío y puede ser omitido. (figura 3.1-b).

En muchos juegos de esta clase hasta este dispositivo extra no es necesario, debido a que por cada k solamente un $\mathbf{I}_k(k)$ es no vacío, esto es, el carácter de cada movimiento m_k es independiente del curso previo del juego. Entonces es suficiente para indicar a cada A_k el carácter del movimiento m_k.

3.3.1.6 LAS ESTRATEGIAS Y LA SIMPLIFICACIÓN FINAL DE LA DESCRIPCIÓN DE UN JUEGO

3.3.1.6.1 EL CONCEPTO DE ESTRATEGIA Y SU FORMALIZACIÓN.

Regresando al curso de un "juego" real π del juego Γ.

Los movimientos m_k siguen uno a otro en el orden $k = 1, \ldots, v$. Para cada movimiento m_k se toma una opción, ya sea aleatoria o por un jugador $k = 1, \ldots, n$. La opción consiste en la selección de un $\mathfrak{C}_k$ de $C_k(k)$ ($k = 0$ o $k = 1, \ldots, n$), para el cual el "juego" está entonces restringido. Si la opción está hecha por un jugador k, entonces se tienen que tomar precauciones para el patrón de información de este jugador que debería estar hasta este momento $D_k(k)$, como requerido.

Imagínese ahora que cada jugador $k = 1, \ldots, n$, comienza a jugar con un plan completo: un plan que especifica que opciones elegirá en cada situación posible, por cada posible información real con la que él puede poseer en ese momento en conformidad con el patrón de información que las reglas del juego le estipulan para ese caso. Llamese a este plan una **estrategia.**

Si se requerir que cada jugador cuente con una estrategia al comenzar el juego, no se puede restringir su libertad de acción. En particular, no se forza a tomar decisiones sobre la base de información que habría disponible para él en cada ejemplo práctico en un juego real. Esto es debido a que la estrategia está supuesta para especificar cada decisión particular solamente como una función de exactamente esa cantidad de información real que fuera disponible para este propósito en un juego real. Solamente se da al jugador una suposición intelectual extra para estar preparado con una regla de comportamiento para todas las eventualidades, -aunque es para jugar uno juego solamente-. Pero esta es una suposición innocua dentro de los límites de un análisis matemático.

El componente aleatorio del juego puede estar tratado de la misma forma.

Es sin duda es obvio que no es necesario para hacer las elecciones que no son tomadas por el azar. Un arbitro puede hacer todo por adelantado, y exponer su resultado a los jugadores en los diversos momentos y para la extensión variable, como las reglas del juego provee acerca de su información.

Es verdadero que el arbitro no puede conocer por adelantado que movimientos será hechos, y con qué probabilidades; esto dependerá en general de el curso real del juego. Pero -como en las estrategias que consideramos anteriormente- se pueden estipular todos los imprevistos: puede decidirse por adelantado cual resultado de la opción en cada posible movimiento aleatorio debería ser, por cada posible curso anterior del juego, o sea, por cada posible información del arbitro real en el movimiento en cuestión. Bajo estas condiciones las probabilidades prescritas por las reglas del juego para cada una de las instancias anteriores estarían determinada completamente- y de modo que el arbitro puede arreglar por cada una de las opciones necesarias para ser afectadas por la suerte, con las probabilidades apropiadas.

Los resultados deberán entonces ser discutidos por el árbitro para los jugadores -en los momentos adecuados y para la extensión adecuada- como se describe anteriormente.

Se llamará a tal una decisión preliminar de las posibilidades de toda la casualidad concebible de los movimientos como un árbitro de opción.

Ya se vió que el remplazo de las posibilidades de todos los movimientos personales del jugador k por la estrategia del jugador k es legítimo; esto significa que no se modifica el carácter fundamental del juego Γ. Claramente este remplazo de las posibilidades de todo movimiento aleatorio por la opción de un arbitro es legítima en el mismo sentido.

Una estrategia del jugador k hace esto: considérese un movimiento m_k. Supóngase que ha resultado ser un movimiento personal del jugador k. Considérese una información real posible del jugador k en ese momento, entonces la estrategia en cuestión tiene que determinar su opción a estas alturas.

Formalizado:

> Una estrategia del jugador k es una función $\Sigma_k(_k; \mathfrak{D}_k)$ que es definido para cada $k = 1, \ldots, v$ y cada $\mathfrak{D}_k$ de $D_k(k)$, y cuyo valor
>
> $$\Sigma_k(_k; \mathfrak{D}_k) = \mathfrak{C}_k$$
>
> tiene siempre estas propiedades: $\mathfrak{C}_k$ pertenece a $C_k(k)$ y es un subconjunto de $\mathfrak{D}_k$.

(3.3.5)

Esas estrategias existen para todos las coincidencias precisamente con los postulados (3.3.4-10).

Una opción de arbitraje es esta:

Considérese un movimiento m_k. Supóngase que ha resultado ser un movimiento aleatorio. Considérese una información real posible del arbitraje en ese momento. Considérese un $\mathfrak{A}_k$ de A_k que es un subconjunto de $\mathfrak{B}_k(0)$. Entonces el arbitro escogido en cuestión tiene que determinar la opción aleatoria para este momento, esto es, un $\mathbf{C}_k$ de $C_k(0)$ que es un subconjunto del $\mathbf{A}_k$ anterior.

Formalizado:

> Una opción de arbitraje es una función $\Sigma_0(_k; \mathbf{A}_k)$ que es definida para cada $k = 1, \ldots, \nu$ y cada $\mathbf{A}_k$ de A_k que es un subconjunto de $\mathbf{I}_k(0)$ y cuyo valor
>
> $$\Sigma_k(_k; \mathbf{A}_k) = \mathbf{C}_k$$
>
> tiene siempre estas propiedades: $\mathbf{C}_k$ pertenece a $C_k(0)$ y es un subconjunto de $\mathbf{A}_k$.

(3.3.6)

Desde que el resultado de la opción de arbitraje depende del azar, la correspondencia de las probabilidades tienen que estar especificadas. Ahora la opción de arbitraje es un agregado de eventos aleatorios independientes. Tal evento existe, para cada $k = 1, \ldots, \nu$ y cada $\mathbf{A}_k$ de A_k que es un subconjunto de $\mathbf{I}_k(0)$. Tanto como este evento es concerniente a la probabilidad del resultado particular $\Sigma_k(_k; \mathbf{A}_k) = \mathbf{C}_k$ es $p_k(\mathbf{C}_k)$. Por lo tanto, la probabilidad de la opción de arbitraje completa, representada por la función $\Sigma_k(_k; \mathbf{A}_k)$ es el producto de las probabilidades individuales $p_k(\mathbf{C}_k)$.

Formalizado:

> La probabilidad de la opción de arbitraje, representada por la función $\Sigma_k(_k; \mathbf{A}_k)$ es el producto de las probabilidades $p_k(\mathbf{C}_k)$, donde $\Sigma_k(_k; \mathbf{A}_k) = \mathbf{C}_k$ y k, $\mathbf{A}_k$, corre sobre el dominio completo de la definición de $\Sigma_k(_k; \mathbf{A}_k)$.

(3.3.7)

Si se consideran las condiciones de (3.3.3-5) para todos estos pares k, $\mathbf{A}_k$, y se multiplican todos, unos a otros, entonces estos hechos resultan: las probabilidades de (3.3.7) y son todas ≥ 0 y su suma (extendida sobre todas las opciones de arbitraje) es uno. Esto es como debería ser, desde la totalidad de todas las posibilidades de arbitraje es un sistema disjunto pero las alternativas son exhaustivas.

3.2.1.6.2. LA SIMPLIFICACIÓN FINAL DE LA DESCRIPCIÓN DE UN JUEGO.

Si una estrategia definida ha estado adoptado por cada jugador $k = 1, \ldots, n$, y si una opción de arbitraje definida ha sido seleccionada, entonces estos determinan el curso completo del juego, únicamente y de conformidad con su resultado también, para cada jugador $k = 1, \ldots, n$. Todos estos conceptos deberían ser aclarados en forma verbal, pero una prueba formal igualmente simple puede ser dada.

Denótense las estrategias en cuestión por $\Sigma_k(\kappa; \mathfrak{D}_k)$, $k = 1, \ldots, n$, y la opción de arbitraje por $\Sigma_0(\kappa; \mathfrak{A}_k)$. Se determina la información real de arbitraje para todos los momentos $k = 1, \ldots, \nu, \nu + 1$. Para evitar confusión con la variable anterior $\mathfrak{A}_k$ se va a denotar con $\mathfrak{F}_k$.

$\mathfrak{A}'_k$ es, por supuesto, igual al mismo Ω.

Considérese ahora un $k = 1, \ldots, \nu$, y suponga que su correspondiente $\mathfrak{A}'_k$ es conocido. Entonces $\mathfrak{A}'_k$ es un subconjunto de precisamente un $\mathfrak{B}_k(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Si $k = 0$, entonces m_k es un movimiento aleatorio, de modo que el resultado de la opción es $\Sigma_0(\kappa; \mathfrak{A}'_k)$. Entonces, $\mathfrak{A}'_{k+1} = \Sigma_0(\kappa; \mathfrak{A}'_k)$. Si $k = 1, \ldots, n$, entonces es un movimiento personal del jugador k. $\mathfrak{A}'_k$ es un subconjunto de precisamente un $\mathfrak{D}'_k$ de $D_k(k)$. De modo que el resultado de la opción es $\Sigma_k(\kappa; \mathfrak{D}'_k)$. Entonces $\mathfrak{A}'_{k+1} = \mathfrak{A}'_k \cap \Sigma_k(\kappa; \mathfrak{D}'_k)$.

Así se determinan inductivamente $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2, \ldots, \mathfrak{A}'_\nu, \mathfrak{A}'_{\nu+1}$ en sucesión. Pero, $\mathfrak{A}'_{\nu+1}$ es un elemento del conjunto denotado por su único elemento π'.

Este es el juego real que tuvo lugar. Por consiguiente el resultado del juego es $F_k(\pi')$ para el jugador $k = 1, \ldots, n$.

El hecho que las estrategias de todos los jugadores y la opción de arbitraje determinen juntas el juego real -y de modo que también el resultado para cada jugador- abre la posibilidad de una nueva y mucho más simple descripción del juego Γ.

Considérese un jugador dado $k = 1, \ldots, n$. Fórmense todas las estrategias posibles de sus $\Sigma_k(\kappa; \mathfrak{D}_k)$ o para abreviar Σ_k. Mientras su número es enorme es obviamente finito. Denotado por β_k, y las estrategias de ellos mismos por $\Sigma_k^1, \ldots, \Sigma_k^{\beta_k}$.

En forma similar todas las posibles opciones del árbitro, $\Sigma_0(\kappa; \mathfrak{A}_k)$ o para abreviar Σ_0 de nuevo su número es finito y se denota, por β_0, y las opciones de arbitraje por, $\Sigma_0^1, \ldots, \Sigma_0^{\beta_0}$. Denotando sus probabilidades por $p^1, \ldots, p_0^{\beta_0}$ respectivamente. Todas estas probabilidades son ≥ 0 y su suma es uno.

Una opción definida de todas las estrategias y de las posibilidades de arbitraje, dada por $\Sigma_k^{\tau_k}$ para $k = 1, \dots, n$ y para $k = 0$ respectivamente, donde

$$\tau_k = 1, \dots, \beta_k \qquad \text{para } k = 0, 1, \dots, n.$$

determina el juego π', y su resultado $F_k(\pi')$ para el jugador $k = 1, \dots, n$. Escríbanse

$$F_k(\pi') = \delta_k(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n) \qquad \text{para el jugador } k = 1, \dots, n. \tag{3.3.8}$$

El juego completo ahora consiste en que cada jugador k elige una estrategia $\Sigma_k^{\tau_k}$, i. e., un número $\tau_k = 1, \dots, \beta_k$; y de la posibilidad de la opción de arbitraje de $\tau_0 = 1, \dots, \beta_0$, con las probabilidades $p^1, \dots, p_0^{\beta_0}$ respectivamente.

El jugador k tiene que escoger su estrategia, esto significa que, escoge su τ_k, sin ninguna información concerniente a las posibilidades de los otros jugadores, o de los eventos aleatorios (la opción de arbitraje). Esta tiene que ser así, ya que toda la información que se puede poseer en cualquier momento está encerrada en su estrategia $\Sigma_k = \Sigma_k^{\tau_k}$. Aunque mantiene puntos de vista definidos en cuanto a cuales estrategias de los otros jugadores son probablemente las que elegirán, tienen estos que estar contenidos en la función $\Sigma_k(\tau_k; \beta_k)$.

Toda esto significa, sin embargo, que Γ ha sido devuelto a la descripción más simple. Se tienen $n + 1$ movimientos, uno aleatorio y uno personal por cada jugador $k = 1, \dots, n$ -cada movimiento tiene un número de arreglos de las alternativas, β_0 para el movimiento aleatorio y $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ para los movimientos personales- y cada jugador tiene que hacer su elección con absolutamente ninguna información concerniente a los resultado de todas las demás posibilidades.

Ahora se puede prescindir del movimiento aleatorio. Si las posibilidades de los jugadores han tenido lugar, el jugador k habiendo elegido τ_k, entonces la influencia total del movimiento aleatorio es ésta: el resultado del juego para el jugador k pueden ser algunos de los números

$$G_k(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n) \qquad \tau_0 = 1, \dots, \beta_0.$$

con las probabilidades $p^1, \dots, p_0^{\beta_0}$ respectivamente. Consecuentemente, su "esperanza matemática" del resultado es

$$H_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_{\tau_0 = 1}^{\beta_0} p^{\tau_0} G_k(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n).$$

(3.3.9)

El juicio del jugador tiene que estar dirigido exclusivamente por esta "esperanza matemática", debido a que los diversos movimientos, y en particular el movimiento aleatorio, están aislados completamente uno del otro. Así los movimientos en cuestión son solamente los movimientos personales de los jugadores $k = 1, \ldots, n$.

La formulación final es por tanto la siguiente:

El juego de n-personal (el sistema completo de sus reglas), está determinado por la especificación de la siguiente información:

❶ Para cada $k = 1, \ldots, n$: Un número β_0.

❷ Para cada $k = 1, \ldots, n$: Una función

$$H_k = H_k(\tau_1, \ldots, \tau_n),$$

$$\tau_j = 1, \ldots, \beta_j, \qquad \text{para } j = 1, \ldots, n.$$

(3.3.10)

El curso de un juego de Γ es el siguiente:

Cada jugador k escoge un número $\tau_k = 1, \ldots, \beta_k$. Cada jugador tiene que hacer su opción en ignorancia absoluta de las posibilidades de las otros. Después todas las elecciones que se han hecho, son sometidas a un arbitraje quien determina que el resultado del juego para el jugador k es $H_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

3.3.1.6.3 EL PAPEL DE LAS ESTRATEGIAS EN LA FORMA SIMPLIFICADA DE UN JUEGO.

Cada jugador tiene un movimiento, y solamente uno; y tiene que hacerlo en ignorancia absoluta de todos los demás. Esta cristalización completa del problema en esta forma rígida y final estuvo lograda por las manipulaciones de las secciones anteriores en que la transición del movimiento original de estrategias fue logrado. Ya que ahora se trataron a esas mismas estrategias como movimientos, no hay necesidad por hacer estrategias de un orden más alto.

3.2.1.6.4 EL SIGNIFICADO DE LAS RESTRICCIONES DEL JUEGO DE SUMA CERO.

Se concluyen estas consideraciones determinando el lugar de los juegos de suma cero.

En la notación de (3.2.3) un juego de suma cero significa lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(\pi) = 0 \qquad \text{para todo } \pi \text{ elemento de } \Omega. \tag{3.3.11}$$

Si se pasa $F_k(\pi)$ a $G_k(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$, entonces ésta se hace:

$$\sum_{k=1}^{n} G_k(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n) = 0 \qquad \text{para todo } \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n. \tag{3.3.12}$$

Y si finalmente se introduce $H_k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) = 0 \qquad \text{para todo } \tau_1, \ldots, \tau_n. \tag{3.3.13}$$

Consecuentemente, es claro que la condición (3.3.13) hace al juego Γ, que se definió en la sección 3.3.1.6.2, un juego de suma cero.

En seguida se hará una clasificación de los juegos.

3.3.2 CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS.

En base a las secciones anteriores los juegos se pueden clasificar de acuerdo a:

- el número de jugadores,
- la actitud de los jugadores,
- la naturaleza de la función de pago,
- la relación entre los jugadores,
- la cantidad de información,
- el tipo de movimientos,
- el número de movimientos,
- el número de estrategias disponibles a cada jugador y
- su finalidad.

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS EN BASE AL NÚMERO DE JUGADORES.

Los juegos pueden clasificarse en base al número de jugadores. Según esta clasificación, los juegos se dividen en:

- **Juegos con un participante** (solitario).
- **Juegos con dos participantes** (juegos bipersonales).
- etc., i. e., **juegos *n*_personales.**

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS POR LA ACTITUD DE LOS JUGADORES.

La actitud de los jugadores es un criterio para la clasificación de los juegos. En términos de este criterio todos los juegos se pueden dividir en dos tipos: juegos antagónicos y juegos no antagónicos.

- **Juegos antagónicos.** Los juegos antagónicos se caracterizan por que los intereses de los participantes son abiertamente opuestos. Cada uno de los jugadores tiende a asegurarse el beneficio máximo y por consiguiente, tiende a que sus contrincantes pierdan el máximo. *La teoría de juegos*, lleva a cabo el estudio de este tipo de juegos.

- **Juegos no antagónicos.** En el caso de los juegos no antagónicos, algunos de los jugadores (o por lo menos uno) no tiende a hacer un máximo de su beneficio. De dichos juegos se dice que son juegos con la naturaleza. La *teoría de toma de decisiones* se encarga de estudiar a los juegos no antagónicos.

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS DE ACUERDO A LA NATURALEZA DE LA FUNCIÓN DE PAGO.

Un punto de vista importante al clasificar los juegos es la suma de todos los pagos recibidos por todos los jugadores (al cabo del juego), en base a esto los juegos se clasifican en:

- **juegos de suma cero** y
- **juegos de suma no cero o metajuegos.**

En los primeros, los pagos de los jugadores suman cero. En el juego de suma cero con dos jugadores lo que un jugador gana lo pierde el otro, i. e., los jugadores están en conflicto directo. En el caso de los juegos de suma no cero existen elementos tanto de conflicto como de cooperación.

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS EN RELACIÓN CON LOS JUGADORES (NATURALEZA DE LA NEGOCIACIÓN PREVIA).

Además de las clasificaciones antes expuestas, los juegos pueden ser **de coalición** (cooperativos). Un juego cooperativo es un juego de suma no constante. Estos juegos se distinguen de los demás juegos porque, en el curso del proceso del juego los participantes adversos pueden formar coaliciones temporales o permanentes y por que en estas circunstancias se reparte, previo acuerdo, el premio entre los participantes de la coalición. Como resultado de conversaciones previas entre los jugadores, la coalición puede estimar con mayor exactitud los designios de unos y otros y sus posibilidades de obtener para sí las decisiones más favorables. El problema básico de un problema cooperativo es dividir el pago de la coalición entre los miembros de la misma. Existen juegos cooperativos con pagos laterales, en los cuales los rendimientos son transferibles, y sin pagos laterales, en los que los rendimientos no son transferibles.

Si por el contrario, no es posible coordinar las estrategias de manera que se pueda formar una coalición para *discutir su estrategia antes de que el juego sea jugado* y llegar a acuerdos para limitar sus estrategias, el juego es un juego **no cooperativo.**

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS POR EL TIPO DE MOVIMIENTOS.

Un criterio más para la clasificación de los juegos es el hecho relativo a que el jugador puede elegir en una forma determinística o aleatoria el movimiento en turno, de acuerdo con este criterio los juegos se dividen en:

- **Juegos con movimientos aleatorios,** p. e., tirar una moneda al aire.
- **Juegos sin movimientos aleatorios.**

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS POR LA CANTIDAD DE INFORMACIÓN.

Otro criterio para la clasificación de los juegos es el grado en que disponen los jugadores de la información relativa a una cierta etapa del juego y que es pertinente a las jugadas procedentes del adversario y a sus posibilidades, los juegos conforme a este criterio podrán reunirse en dos tipos:

- **Juegos con información completa.** En estos juegos, el jugador dispone de una información completa, este es el caso en que al elegir su jugada siguiente tiene una información completa respecto a la situación que guarda el juego en el movimiento k y de las posibilidades de cada uno de los jugadores, por ejemplo, el ajedrez y las damas.

- **Juegos con información incompleta.** Estos son en los que la situación antes descrita no se da. En esta clasificación se encuentran el domino y juegos de cartas "tapadas".

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS DE ACUERDO CON EL NÚMERO DE MOVIMIENTOS.

Los juegos pueden clasificarse en términos del número máximo de movimientos realizados por uno cualquiera de los jugadores. En el caso de mayor generalidad, se puede considerar que todos los jugadores realizan el mismo número de movimientos y aún la abstención de jugar se cuenta como jugada. De acuerdo con esta clasificación los juegos son:

- **de una partida** y
- **de varias partidas.**

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS EN BASE AL NÚMERO DE ESTRATEGIAS DISPONIBLES PARA CADA JUGADOR.

Otra forma de clasificar los juegos es por el número de estrategias disponibles a cada jugador:

- **juegos finitos** y
- **juegos infinitos.**

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS DE ACUERDO A SU FINALIDAD.

Finalmente, los juegos en una forma más general se pueden clasificar en base al uso que se les de, en:

- **juegos de entretenimiento** y
- **juegos operacionales o de investigación.**

Los juegos en los cuales no se involucra ninguna producción o distribución de bienes de los jugadores (i. e., los jugadores solamente pagan unos a otros) se denominan **juegos de entretenimiento.** (La utilización que se les da es meramente de entretenimiento).

En algunos problemas de toma de decisiones competitivas donde el desempeño de los tomadores de decisiones no puede modelarse (debido a que no es posible enumerar o caracterizar de antemano todos sus cursos de acción, o aún, si se pudieran enumerar pero no es posible caracterizarlos por medio de un conjunto de variables cuantitativas), ellos mismos pueden colocarse en una situación modelada para determinar los efectos de su comportamiento así como el comportamiento de otras variables, sobre los sucesos. Cuando se efectúa una simulación donde se discuten cursos de acción que no pueden formularse dentro del modelo y los tomadores de decisiones son humanos, a dicha simulación se llama **juego operacional.**

La utilización de juegos se ha incrementado particularmente en el estudio de operaciones militares e industriales complejas, así como también en problemas económicos y gubernamentales, también se utilizan para seleccionar personal y entrenarlo, para familiarizar al personal con las operaciones de un sistema complejo y para demostrar una nueva idea sobre el mismo. Es decir, los juegos también pueden usarse como *instrumento de investigación.* Los usos de los juegos en la investigación de resolución de problemas cae en tres clases:

- para ayudar a desrrollar un modelo de decisión,
- para ayudar a encontrar la solución de tal modelo y
- para ayudar a evaluar las soluciones propuestas para los problemas, modelados mediante el juego.

Los juegos pueden auxiliar en la construcción de un modelo proporcionando una base para probar la relevancia de las variables o la forma funcional del modelo. También puede utilizarse tanto para ayudar a descubrir cursos de acción y estrategias de decisión como para comparar las alternativas. En algunos casos en los que no se puede deducir analíticamente a partir del modelo un curso de acción completamente especificado o un procedimiento de decisión, pero se puede deducir el curso de acción o el procedimiento parcialmente especificados, el efecto de uno o de otro se puede determinar por medio de juegos.

Los juegos concretos pueden pertenecer simultáneamente a varios de los tipos enumerados.

3.3.3 SOLUCIÓN DE UN JUEGO.

En general, un juego n-personal puede reducirse a un juego de suma cero de $(n + 1)$ participantes.

La teoría de juegos de suma cero n-personal, está basada en el caso especial de los juegos de dos personas de suma cero.

Las preguntas esenciales en estos juegos son de diferente naturaleza:

- ¿Cómo planea cada jugador su curso de acción, i. e., cómo cada jugador formula un concepto exacto de una estrategia?
- ¿Qué información es disponible para cada jugador en cada etapa del juego?
- ¿Cuál es el papel de un jugador que se informa acerca de la otra estrategia del jugador oponente?
- ¿Que hay acerca de la teoría completa del juego?

Todas estas preguntas son por supuesto esenciales en todos los juegos para cualquier número de jugadores, incluso cuando se hacen coaliciones y compensaciones.

La teoría de juegos busca estrategias que maximicen o minimicen alguna función objetivo. (Es decir, alguna función de las utilidades de los pagos al tomador de decisiones).

Una **solución** a un juego se obtiene cuando se determina la "mejor" estrategia para cada jugador. La "mejor" se define en términos de una función objetivo específica. La función objetivo "apropiada" depende de la clase de conocimientos que tengan los jugadores a priori acerca de las alternativas de cada uno de los otros. *El objetivo de la teoría de juegos es convertir el tipo de situación de incertidumbre en un tipo de situación de certeza utilizando ciertas "suposiciones racionales" con respecto a los jugadores.* Se supone que cada jugador actúa para maximizar su utilidad esperada. A partir de esta suposición se arguye que cada jugador actuará para maximizar su ganancia mínima o minimizar su pérdida máxima.

La dificultad yace en la deducción a partir de la suposición de "racionalidad" que el otro jugador maximizará su ganancia mínima. Aún entre los juegos teóricos, no existe un criterio único con respecto a que los jugadores racionales deberían actuar así, por otro lado, existe demasiada evidencia de que dichos jugadores racionales, de hecho, no actúan de esa manera ni de ninguna otra que sea consistente. Por lo tanto, la teoría de juegos generalmente se interpreta como una teoría "como si", es decir, como si los tomadores de decisión se comportaran de alguna manera bien definida (pero arbitrariamente seleccionada), tal como maximizar las ganancias mínimas.

En cuanto a los métodos que utiliza la teoría de juegos para alcanzar el objetivo propuesto para los jugadores se tienen:

1. Técnicas de punto silla.
2. Conceptos de dominación.
3. Métodos algebraicos o matriciales.
4. Métodos gráficos.
5. Programación lineal.

3.3.3.1 SOLUCIÓN DE JUEGOS DE DOS PERSONAS DE SUMA CERO.

3.3.3.1.1 PROGRAMACIÓN LINEAL.

Supóngase que el jugador A debe seleccionar un número de entre 1, 2, ... , m y el jugador B debe seleccionar uno de entre 1, 2, ... , n. Cada uno hace su elección ignorando la del otro. Si A selecciona i y B selecciona j, A recibirá a_{ij} de B. Por lo tanto, B ganará - a_{ij} y se tiene un juego de suma cero.

Sea x_i la probabilidad de que A seleccione i e y_j la probabilidad de que B seleccione j. El pago esperado para A es

$$E = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j\, a_{ij}.$$

La teoría de juegos ahora supone que A seleccionará $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de tal manera que:

1. no importa que B seleccione $y_1, y_2, \ldots, y_m$ la ganancia para A será cuando menos v,

y

2. la cantidad v es tan grande como sea posible.

Ahora

$$E = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} x_i\, a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} y_j\, v_j. \tag{3.3.14}$$

donde

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} x_i\, a_{ij}. \tag{3.3.15}$$

Divídanse las v_j en dos subconjuntos S y S'. En el conjunto S se colocan todas las $\{v_j\}$ tales que:

⇒ todas la v_j en S son iguales,
⇒ todas las v_j en S son menores que cualquier v_j que no esté en S' y
⇒ todas las v_j están en S o en S'.

Debido a que B desea minimizar las ganancias de A, es obvio que seleccionará $y_j = 0$ si v_j está en S'. Por lo tanto A deberá escoger $x_1, x_2, \dots, x_m$ tal que,

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geq v,$$

y v es tan grande como sea posible; de aquí que son no negativas y suman la unidad. Por tanto, el problema de A es determinar $x_1, x_2, \dots, x_m$ para maximizar v sujeta a:

$$v - \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \leq 0 \qquad j = 1, 2, \dots, n, \tag{3.3.16}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \tag{3.3.17}$$

y

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m. \tag{3.3.18}$$

Como v es una función lineal de v y de $x_1, x_2, \dots, x_m$ y las restricciones obviamente son lineales, esto es un problema de programación lineal.

Considérese el problema desde el punto de vista de B. La diferencia principal es que el pago a B es $-a_{ij}$. B llegará a la siguiente formulación:

Maximizar u sujeto a:

$$u - \sum_{j=1}^{n} y_j(-a_{ij}) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{3.3.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \tag{3.3.20}$$

y

$$y_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3.21}$$

Con el principio de dualidad se puede demostrar que la ganancia máxima que A puede garantizar, es igual a la pérdida mínima que puede garantizar B. La pérdida es $-u$, que se denota por u'. De esta manera se puede reformular al problema de B.

Minimizar u' sujeta a:

$$u' - \sum_{j=1}^{m} y_j a_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.3.19a}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1, \tag{3.3.20a}$$

y

$$y_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3.21a}$$

De manera que el problema de B es el dual de A, y se concluye que,

$$\text{mín } u' = \text{máx } v.$$

El valor común se denomina **valor del juego** de A.

Se entiende por valor del juego el promedio de ganancias (o pérdidas) a lo largo de las múltiples jugadas.

El principio de dualidad asegura que si cualquier solución para el problema de A produce un valor v igual al valor u' correspondiente a alguna solución para el problema de B, el valor común es el mayor posible de v y el mínimo posible u'. Por lo tanto, se resuelven ambos problemas si se pueden determinar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_m$ y u tales que todas las x y las y sean no negativas y

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

(3.3.17)

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

(3.3.20)

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geq v \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

(3.3.16a)

$$\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} \geq v \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

(3.3.19b)

Debe mencionarse que si alguna $x_i = 1$ y todas las otras son cero, se dice que A utiliza una **estrategia pura**. Si A utiliza dos o más de estas estrategias, cada una con una probabilidad menor a 1, se dice que utiliza una **estrategia mixta**.

Si la política óptima de A es una estrategia mixta en la que exactamente r estrategias puras tienen probabilidades no cero, la estrategia óptima de B también utilizará r estrategias puras. Esto depende de la forma en que se construya la solución del problema dual a partir del principal.

Si para cualquier j se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} > v,$$

entonces,

$$y_j = 0,$$

y si para cualquier i se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} < v,$$

entonces,

$$x_i = 0.$$

En la práctica rara vez es necesario utilizar un algoritmo de programación lineal para resolver un juego; los métodos siguientes se pueden probar primero.

3.3.3.1.2 TÉCNICAS DE PUNTO SILLA.

Un elemento en la matriz $[a_{ij}]$ se llama **punto silla** si cumple con las siguientes propiedades:

❶ es un mínimo de su renglón, y
❷ es el máximo de su columna.

Supóngase que un juego tiene un punto silla en (h, k), entonces, A debería seleccionar h y B debería elegir k. El valor del juego es a_{hk}. El resultado se justifica de la siguiente forma: Supóngase por el momento que sólo existe un punto silla; si A escoge h, debe ganar cuando menos a_{hk} (todos los demás elementos en el renglón h exceden a a_{hk}). Si A selecciona cualquier otro renglón que no sea el h, no puede estar seguro de que ganará tanto como a_{hk}, debido a que B puede escoger k y $a_{rk} < a_{hk}$ para toda $r \neq h$. Por lo tanto, A escogerá h. De igual manera B hará lo mismo con k.

Si hay dos o más puntos silla, deben ser iguales. Más aún, si (h, k) y (h', k') son punto silla con $h \neq h'$ y $k \neq k'$; entonces, también lo son (h, k') y (h', k).

3.3.3.1.3 CONCEPTO DE DOMINACIÓN.

Un jugador A, nunca escogerá una estrategia k cuando $a_{ij} \geq a_{kj}$ para una i cualquiera, $i = 1, \dots, m$, $i \neq k$ y toda j, $j = 1, \dots, n$. Es decir, si se cumple para una i cualquiera y una k dada, $i \neq k$,

$$a_{ij} \geq a_{kj} \qquad\qquad j = 1, \dots, n$$

entonces

$$x_k = 0.$$

En este caso se dice que cualquier estrategia i domina a la estrategia k y, por tanto, se puede eliminar a ésta última del proceso de decisión. En forma análoga se pueden analizar las estrategias del jugador B, observando si existe dominación de una columna a otra, pudiéndose eliminar del proceso de decisión del jugador B la columna dominada.

3.3.3.1.4 MÉTODOS ALGEBRAICOS.

Si ambos jugadores tienen solamente dos alternativas (juegos de dos por dos) y si el juego no tiene punto silla, este puede resolverse como sigue:

Si la matriz de pagos A es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y se desea encontrar $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$, y v para satisfacer:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 = 1 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & a_{11} x_1 + a_{21} x_2 \geq v \\ & a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \geq v \\ & a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \leq v \\ & a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \leq v. \end{aligned}$$

Se supone que todas las restricciones son igualmente estrictas y se obtiene:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12}}; \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}}$$

por lo que el valor del Juego es,

$$v = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

3.3.3.1.5 SOLUCIONES GRÁFICAS.

Los métodos gráficos se utilizan sólo para el caso en que uno de los jugadores tiene 2 estrategias, independientemente del número de estrategias disponibles para el otro jugador.

Para explicar esta técnica considérese el siguiente juego, cuya matriz de pagos es:

		B				Probabilidades
		B_1	B_2	B_3	B_4	
A	A_1	5	35	10	25	x_1
	A_2	20	10	15	5	x_2
Probabilidades		y_1	y_2	y_3	y_4	

El método gráfico procede de la siguiente manera: Se trazan 2 rectas paralelas que representan los pagos para el jugador A. La recta horizontal que las une representa las probabilidades x_1 y x_2 del jugador A. Para cada estrategia de B (columnas de la matriz), se traza una recta uniendo los dos pagos de A asociados a dicha estrategia, como se puede observar en la figura 3.2. Como el jugador A tiende a maximizar el número de sus ganancias, su estrategia mixta lo proporciona el punto de cruce entre dos estrategias del jugador B que genera el valor mínimo del juego. Para el ejemplo anterior, este punto ocurre entre B_3 y B_4, generando un valor de $x_2 = 0.6$ (por consiguiente $x_1 = 0.4$) y $v = 13$.

Los métodos gráficos se ven severamente limitados, ya que sólo sirven para juegos de suma cero de dos oponentes con una matriz de pagos de orden $2m$ ($m \geq 2$).

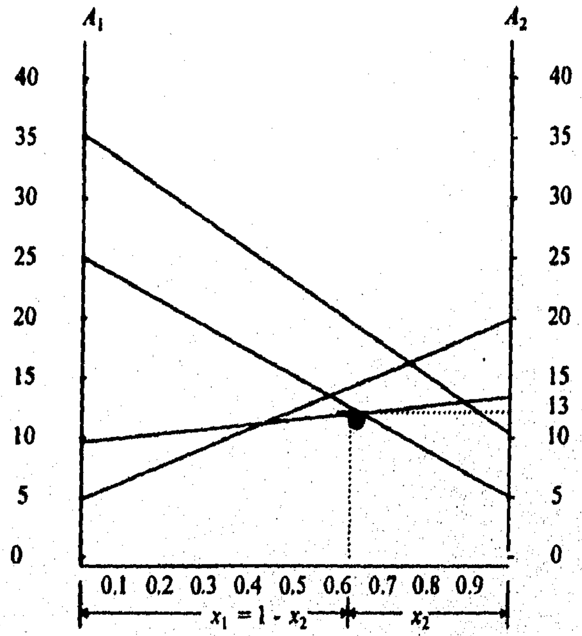


FIGURA 3.2 *Solución gráfica de un juego.*

3.3.3.1.6 RESUMEN DE MÉTODOS PARA RESOLVER JUEGOS DE DOS PERSONAS DE SUMA CERO.

Utilícense los siguientes métodos en el orden que se dan:

- Búsqueda de un punto silla.
- Utilícese el concepto de dominio para reducir el tamaño del juego.
- Para juegos de 2 x n, utilícese un método gráfico para reducirlos a 2 x 2.
- Para juegos de 2 x 2, utilícese la fórmula.
- Si estos métodos fallan, trátese de determinar cuáles restricciones se vuelven igualdades, resuélvanse las ecuaciones resultantes, y verifíquense las restricciones restantes.
- Si todo lo anterior falla, utilícese un algoritmo de programación lineal.

3.3.3.2 JUEGOS DE SUMA NO CERO.

Nigel Howard (1966) desarrolló una extensión de la teoría de juegos, *la teoría de los meta-juegos*, que parece describir como juega la mayoría de la gente, los juegos de suma no cero involucran cualquier número de personas. Es capaz también de prescribir como debería jugar la gente dichos juegos. A continuación se presentan las características de esta teoría.

Considérese un juego de dos personas de suma no cero muy común: el dilema del prisionero. El juego deriva su nombre de la siguiente historia. El fiscal tiene a dos ladrones de bancos en celdas separadas y ofrece a cada uno la oportunidad de confesar. Si uno confiesa y el otro no, entonces al que confesó lo condena a dos años y al otro a 10. Si ambos confiesan los condenará a 8 años y si ninguno de los dos confiesa, solamente existe evidencia para asegurar la convicción por un cargo menor y a cada uno lo condenará a 5 años. En la tabla 3.2, aparece una matriz de pagos para el dilema, donde los elementos de la matriz de pagos indican el orden de preferencia de los dos jugadores. Los valores absolutos de los pagos no son relevantes para el desarrollo de la teoría de los meta-juegos.

La naturaleza de este dilema se pone de manifiesto al examinar la tabla 3.2. Se puede suponer que si los dos jugadores estudian la situación ambos decidirían jugar 1, que da a cada uno un pago de 3 por jugada. Sin embargo, con un poco más de meditación *A* puede razonar como sigue: si *B* juega 1, entonces yo jugaría 2 debido a que esto aumentará mi ganancia en 4. Pero *B* puede utilizar el mismo razonamiento y decidir también jugar 2. Si los dos jugadores juegan 2 cada uno recibe un pago de sólo 2. El par de jugadores (2, 2) constituye un **punto de equilibrio**, porque si cualquiera de las partes se sale del punto sin que la otra haga lo mismo, estará peor que como estaba antes de que saliera de él. La teoría de juegos parece indicar que ellos deberían jugar (2, 2) porque éste es un punto de equilibrio, pero intuitivamente no es satisfactorio. Por otro lado, (1, 1) es intuitivamente satisfactorio pero no parece proporcionar estabilidad. De aquí el dilema.

Considérese el caso en el cual dos grandes corporaciones tienen el mismo precio para sus principales productos en competencia. Cada una considera una reducción en sus precios para ganar participación en el mercado y utilidades. La situación aparece en la tabla 3.3. Esto se puede identificar como un dilema del prisionero.

Existen muchos ejemplos prácticos de esta clase de dilema. Por ejemplo, considérese el problema que enfrenta la industria agrícola. Cada agricultor puede maximizar su propio ingreso maximizando el volumen de las cosechas que produce. Sin embargo, cuando todos los agricultores siguen esta política, la oferta excede a la demanda y los precios caen. Por lo tanto, los agricultores pueden aumentar sus ingresos colectivamente reduciendo su producción. En la práctica, tiene que intervenir el Gobierno Federal con un completo sistema de controles diseñado para proporcionar la seguridad de que la producción total que se logre en el mercado sea lo suficiente baja como para mantener los precios.

En un intento por extender la teoría de juegos para que se identifiquen mejor los puntos a los que los jugadores tienden realmente para estabilizar sus jugadas en un juego de suma no cero, Howard arguye lo siguiente:

Haciendo referencia a la tabla 3.2., supóngase que *B* conocía o pensaba que podría predecir con precisión lo que *A* iba a hacer. Luego *B* podría formular 4 diferentes políticas, que son las que aparecen en la tabla 3.4. Se observará que en esta matriz extendida solamente hay aún un punto de equilibrio (2, 2) que es el mismo que aparecía en la matriz original.

Ahora supóngase que *A*, conoce o cree que puede predecir, en forma precisa, lo que *B* perseguirá en las cuatro políticas. Luego *A* puede formular 16 políticas posibles. Estas se muestran en la tabla 3.5. La primera política de *A* consiste en jugar 1 sin importar cuál política elija *B*.

Su segunda política consiste en jugar 1 a no ser que *B* juegue "tal para cual", en cuyo caso él juega 2; y así sucesivamente. Se observará que en esta matriz aparecen 3 puntos de equilibrio incluyendo (1, 1), que domina a (2, 2). Nótese que la política 14 de *A* (2, 2, 1, 2) es la política racional, que maximiza la ganancia de *A* para cada una de las políticas de *B*.

Es natural que se desee saber lo que pasaría si *B* fuera a formular ahora una matriz más basada en el conocimiento de las 16 estrategias de *A*. Sin embargo, Horward ha demostrado que un conocimiento adicional de la matriz más allá de *n* niveles (donde *n* es el número de jugadores), no revelará ningún punto de equilibrio adicional.

Nótese que si *A* juega la política 14 y *B* juega "tal para cual", este último no puede estar seguro de si *A* está jugando la política 14 o la 5. Si *B* piensa que *A* está jugando 5, estará tentado a cambiar a "2 indiferente" e incrementar su ganancia. Esto a su vez conducirá a *A* a la política 16 y un pago (2, 2) para ambos. El papel de las comunicaciones para evitar tales malas interpretaciones es claro. Al jugar experimentalmente juegos de suma no cero y sin comunicación entre los jugadores, se ha encontrado que los juegos con comunicación no sólo tienen una probabilidad mayor de alcanzar estabilidad, sino que lo logran más rápidamente.

La teoría de los meta-juegos no sólo identifica los puntos de equilibrio, pasados por alto por la teoría de juegos tradicional, en juegos que tienen uno o más de ellos, sino que también lo hace así en aquéllos en los que dicha teoría tradicional no encuentra tales puntos. Por ejemplo, considérese el juego que aparece en la tabla 3.6. Este juego no tiene punto de equilibrio "tradicional", pero en la matriz de meta-juego derivada de él, aparece (1, 1) como punto de equilibrio.

Un punto de equilibrio que domina a todos los demás, en la matriz del meta-juego, parece ser el que la mayoría de los jugadores en conflictos experimentales y reales selecciona.

De particular importancia en la teoría de meta-juegos es lo que se conoce como punto de **equilibrio altruista.** Es un punto de equilibrio dominante que tiene una característica adicional: resulta del intento de cada jugador para maximizar la ganancia mínima del oponente. De acuerdo con Horward, solamente un punto de equilibrio altruista, si existe, será completamente aceptado por todos los jugadores.

TABLA 3.2 *Un dilema del prisionero.*

		B 1	*B* 2
A	1	3, 3	1, 4
A	2	4, 1	2, 2

TABLA 3.3 *Otro dilema del prisionero.*

		B MANTENER PRECIOS	*B* REDUCIR PRECIOS
A	MANTENER PRECIOS	3, 3 Status quo.	1, 4 B gana participación en el mercado y utilidades.
A	REDUCIR PRECIOS	4, 1 A gana participación en el mercado y utilidades	2, 2 Ambos conservan Participación en el mercado pero pierden utilidades

TABLA 3.4 *Políticas de B con conocimiento de A*

		1 Indiferente	2 Indiferente	"Tal para cual"	"Cual para tal"
A	1	(1) = 3, 3	(2) = 1, 4	(1) = 3, 3	(2) = 1, 4
	2	(1) = 4, 1	(2) = 2, 2	(2) = 2, 2	(1) = 4, 1

TABLA 3.5 *Matriz de pagos de un mata-juego.*

Políticas posibles de A	Políticas posibles de B			
	1 Indiferente	2 Indiferente	"Tal para cual"	"Cual para tal"
1. 1, 1, 1, 1	3, 3	1, 4	3, 3	1, 4
2. 1, 1, 1, 2	3, 3	1, 4	3, 3	4, 1
3. 1, 1, 2, 1	3, 3	1, 4	2, 2	1, 4
4. 1, 2, 1, 1	3, 3	2, 2	3, 3	1, 4
5. 2, 1, 1, 1	4, 3	1, 4	3, 3	1, 4
6. 1, 1, 2, 2	3, 3	1, 4	2, 2	4, 1
7. 1, 2, 1, 2	3, 3	2, 2	3, 3	4, 1
8. 2, 1, 1, 2	4, 1	1, 4	3, 3	4, 1
9. 1, 2, 2, 1	3, 3	2, 2	2, 2	1, 4
10. 2, 1, 2, 1	4, 1	1, 4	2, 2	1, 4
11. 2, 2, 1, 1	4, 1	2, 2	3, 3	1, 4
12. 1, 2, 2, 2	3, 3	2, 2	2, 2	4, 1
13. 2, 1, 2, 2	4, 1	1, 4	2, 2	4, 1
14. 2, 2, 1, 2	4, 1	2, 2	3, 3	4, 1
15. 2, 2, 2, 1	4, 1	2, 2	2, 2	1, 4
16. 2, 2, 2, 2	4, 1	2, 2	2, 2	4, 1

TABLA 3.6 *Un meta-juego(ejemplo).*

		B: 1	B: 2
A	1	4,3	1,4
A	2	3,2	2,1

En suma, se ha desarrollado una estructura de la teoría matemática para describir como se debe comportar la gente en circunstancias competitivas. La teoría requiere de algunas suposiciones acerca de los motivos de las personas involucradas, para que cada una pueda inferir el comportamiento de los otros y de esta manera en cierto sentido optimizar el suyo.

Para los juegos de dos personas de suma cero se supone que cada jugador desea maximizar la cantidad mínima que se puede garantizar así mismo, sin importar lo que haga el otro jugador. Cuando cada jugador se enfrente a un número finito de cursos de acción (estrategias puras), los problemas siempre se pueden resolver permitiendo estrategias mixtas en las que cada curso de acción se selecciona por medio de un mecanismo de azar con probabilidades predeterminadas. Tal mecanismo asegura que los jugadores están incapacitados para tomar ventaja de alguna predicción que pudieran hacer acerca del comportamiento de sus oponentes.

Es posible determinar estrategias estables para los juegos de suma no cero. Estas son tales que si $(n - 1)$ de los n jugadores utilizan la estrategia estable, el que no la utiliza esta en perores condiciones, que si acompañara a los otros. Desafortunadamente, las estrategias estables a menudo dan como resultado que todos los jugadores estén en peores condiciones que si se hubieran puesto de acuerdo en alguna otra estrategia. La dificultad con estos acuerdos es que si $(n - 1)$ de los n jugadores cumplen un acuerdo, el que no lo cumple puede estar en mejores condiciones que si se adhiere a los demás.

Observación.

> Un problema interesante y muy importante en los juegos de n-personales es el de determinar qué ocurrirá cuando el número de jugadores aumenta sin límite. Con un número infinito de jugadores existe siempre un punto de equilibrio. La teoría de juegos, proporciona un análisis satisfactorio para los juegos con uno o dos jugadores y de los juegos con infinidad de jugadores, pero no un análisis satisfactorio para los juegos con un número finito de tres o más jugadores.

3.4 JUEGOS DIFERENCIALES.

3.4.1 EL PROBLEMA DEL CONTROL.

El problema dinámico de economizar consiste en distribuir recursos escasos entre objetos que compiten en un intervalo de tiempo, que va desde un **tiempo inicial** hasta un **tiempo terminal**. En términos matemáticos, el problema consiste en elegir cursos temporales para ciertas variables, llamadas **variables de control**, dentro de una clase dada de cursos temporales llamada **conjunto de control**. La elección de los cursos temporales para las variables de control se comporta mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales llamadas **ecuaciones de movimiento**, los cursos temporales para ciertas variables que describen al sistema, llamadas **variables de estado** y los cursos temporales de las variables de control se eligen de modo tal, que maximicen un funcional dado dependiente de los cursos temporales para las variables de control y de estado, llamado **funcional objetivo**. Cuando se presenta en esta forma, el problema se denomina **problema de control**.

TIPOS DE CONTROL.

Existen dos tipos de control:

- **Control de circuito abierto**. En el que todas las decisiones se toman de antemano.
- **Control de circuito cerrado**. En el que las decisiones pueden revisarse a la luz de la nueva información contenida en las variables de un curso de estado.

3.4.2 JUEGOS DIFERENCIALES GENERALIDADES.

Un **juego diferencial** es una situación de conflicto o cooperación en la cual los jugadores eligen estrategias en el tiempo. En un juego diferencial hay más de un jugador, y los pagos de cada jugador dependen de las trayectorias de control empleadas por todos los jugadores. Por otra parte, en contraste con los juegos anteriormente tratados, en un juego diferencial los jugadores hacen sus movimientos sobre un intervalo de tiempo, de modo que el número de movimientos, y por tanto, el número de estrategias, son infinitos.

Los juegos diferenciales pueden clasificarse de las mismas maneras en que se clasificaron los juego no diferenciales, adicionando otro criterio de clasificación. Una clasificación es por el número de jugadores -**juego diferencial de dos personas, de tres personas, ... , de *n* personas**. Otra clasificación es de acuerdo con la naturaleza de las funciones de pago, como **juego diferencial de suma nula o suma no nula**, según que la suma de los pagos de todos los jugadores sea igual o no a cero (o más generalmente a cualquier constante). Otra forma de clasificar los juegos diferenciales es en cuanto a si el **juego es estocástico o determinístico**. Una forma de clasificar los juegos diferenciales que no se da en juegos estáticos es según la naturaleza del tiempo; si el tiempo se mide en unidades discretas, entonces el juego es un **juego diferencial discreto**, y si el tiempo se mide en unidades continuas, entonces es un **juego diferencial continuo**.

UN NUEVO JUEGO

> *"La tarea suprema del hombre no es la instrucción, ni la civilización, sino la libre creatividad".*
>
> STIRNER.

Si se desea comprender los juegos y diseñar juegos, se debe primero definir lo que se entiende por la palabra *juego*. Se debe también determinar las características fundamentales de los juegos, así como describir brevemente las clases principales de juegos. Aunque estos puntos ya fueron desarrollados en el capítulo anterior, es necesario hacer referencia a éllos desde otro punto de vista además del matemático. Partiendo de lo anterior, se puede proponer un prototipo del juego teniendo identificados, además, los aspectos psicológicos, las bases comerciales, estéticas, matemáticas e históricas en las que se sustentará al nuevo juego. En este capítulo se darán a conocer las reglas propuestas del juego, que serán motivo de estudio en esta investigación. También se verá un poco de historia, de la que se tomarán algunos elementos para la invención del juego. Y como *TACHTLI* es un nuevo producto, se hablará de la importancia de la minimización de información en la evaluación de las reglas del juego.

4.1 UN ENFOQUE PLANEADO EN LA ELABORACIÓN DE LAS REGLAS DEL JUEGO TACHTLI.

Para la **elaboración de las reglas del juego** TACHTLI es necesario la utilización de un enfoque planeado (método científico). Sus pasos básicos son: 1) observación, 2) definición del problema, 3) formulación de una hipótesis, 4) experimentación y 5) verificación.

- **Observación.** Este paso queda cubierto con los primeros apartados de este capítulo: concepto de juego, características fundamentales de los juegos, clasificación de los juegos, por qué las personas juegan y lo atractivo de unos juegos respecto de otros, la fundación de la ciudad de México-Tenochtitlán, la importancia de la minimización de información en la invención de las reglas del juego, así como con los capítulos anteriores, además de el trabajo realizado por Carla Guillén y Maritza Valencia en su tesis "TACHTLI. Sistema lúdico para adultos" donde hacen un estudio de los diferentes juegos existentes en el mercado, del material utilizado en la construcción tablero y fichas, etc..

- **Definición del problema.** El problema es crear un nuevo juego de mesa de tipo formal, ***basado en un estudio matemático*** e inspirado en la fundación de la ciudad de México-Tenochtitlán. Para lo que se propone un primer prototipo del juego en el que se mencionan las bases que se quieren para este nuevo juego.

- **Desarrollo de soluciones alternativas.** Esto se realiza en la sección 4.7.3 Evolución de sus reglas, ya que se proponen diferentes reglas del juego.

- **Selección de la solución óptima mediante la experimentación.** En este caso, después de realizar varias pruebas con las diferentes reglas del juego, se va a determinar cuáles harían al juego interesante, divertido, atractivo, con un alto índice de interacción, con mayor conflicto, es decir, que sean las reglas más convincentes desde el punto de vista psicológico, funcional, estético y comercial.

- **Verificación de la solución óptima.** Este punto es el que se desarrolla a lo largo de los capítulos 5, 6 y 7. No olvidando que a esta investigación sólo corresponde el aspecto funcional del juego.

Como se está partiendo desde cero para la invención de las reglas del juego, es necesario contemplar aspectos psicológicos además de los matemáticos, para su invención, es por esto que, en los siguientes apartados se darán definiciones en materia de psicología. (Las pertenecientes al área de las matemáticas ya se han dado en los capítulos anteriores).

4.2 CONCEPTO DE JUEGO.

No existe una definición única y de comprensión total del término **juego**. A continuación se exponen las más explicativas:

CONCEPTO DE JUEGO SEGÚN LA PSICOLOGÍA.

Una definición dentro del ámbito de la psicología es la siguiente:

El juego es una función del "yo", es un intento por sincronizar los procesos corporales y sociales del mismo. El juego pone de manifiesto las tensiones y problemas de nuestra condición humana. El juego está íntimamente entretejido de nuestra personalidad y de nuestro modo de vida.

El juego puede ser individual o en conjunto, jugar con otros puede significar competir o colaborar con ellos.

DEFINICIÓN DE JUEGO SEGÚN GRAWFORD.

Chris Grawford, quien en 1986 fuera el Director del grupo de investigación de juegos de Atari da la siguiente definición de juego:

> *"Un juego es una representación simplificada artísticamente de un fenómeno. Un juego es una manera segura de experimentar la realidad; más precisamente, las consecuencias de un juego son siempre menos rígidas que las situaciones que el juego modela. Un juego es un artificio para proporcionar experiencias de conflicto y de peligro mientras se excluyen sus realizaciones físicas. Un juego es una colección de partes que interactúan cada una con las otras, a menudo de forma completa. Es un sistema"*[1].

[1] Grawford, Chris. El arte del diseño de juegos con microcomputadora. Ed. Aosborne-Mc Graw Hill, 1986, pág. ...

4.3 CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES DE LOS JUEGOS.

Se pueden identificar cuatro factores comunes en los juegos:

- representación,
- interacción,
- conflicto y
- seguridad.

REPRESENTACIÓN.

Un juego representa, a lo más, un subconjunto de la realidad. El jugador percibe el juego para representar algo de su mundo de fantasía privada. Así pues, un juego representa algo de la realidad subjetiva. Un juego crea una representación de fantasía.

INTERACCIÓN.

La interacción es importante por algunas razones. En primer lugar, inyecta un elemento social o interpersonal en el mismo. Segundo, la interacción transforma un reto pasivo en un reto activo. Por ejemplo, un rompecabezas siempre representará al jugador el mismo reto, pero un juego como el fútbol, el jugador debe crear una solución mejor apropiada a las personalidades de ambos, el jugador y el oponente.

Algunos juegos, tales como el Pong, proporcionan muy poca interacción entre los jugadores (decisión binaria para defenderse o atacar). Estos juegos no permiten a los jugadores poner mucho de ellos mismos en el juego o reaccionar de forma extensiva con sus oponentes. Otros, tales como el fútbol, permiten una interacción bastante más rica. Los jugadores pueden luchar unos con otros en algunos niveles, haciendo estos juegos más excitantes que los otros. Lo importante respecto a la interacción no es su mecánica sino su significación emocional. En el Pong el jugador no puede expresar mucha personalidad a través del medio de una pelota rebotando, en cambio, en el fútbol se incluyen elementos de trabajo en equipo, decepciones y cooperaciones, se puede involucrar mucho mejor la personalidad en un juego de fútbol. Así pues, el grado de interacción proporciona un índice útil de "*calidad del juego*". Cabe mencionar que un juego existe interacción, mientras que en otros medios de entretenimiento, como pueden ser leer o ver la televisión[2] no.

CONFLICTO.

El conflicto surge de forma natural de la interacción en el juego. El jugador está percibiendo activamente algún objetivo, cuyos obstáculos le evitan lograrlo fácilmente;

[2] Dada la importancia de la interacción, actualmente se propuso en México la televisión interactiva con el concurso "telegana".

estos obstáculos requieren un agente inteligente. Si ese agente inteligente bloquea activamente los intentos del jugador para alcanzar sus objetivos, el conflicto entre el jugador y el agente es inevitable. El conflicto es fundamental en todos los juegos.

SEGURIDAD.

En un juego se experimenta de manera segura la realidad ya que no se le expone. Por supuesto, los juegos también tienen consecuencias. La apuesta presenta un riesgo financiero real al jugador y perder frente a otra persona da origen a una pérdida de dignidad.

4.4 CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS.

Existen diferentes clasificaciones de los juegos, se verán algunas de ellas.

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS DESDE EL PUNTO DE VISTA PSICOLÓGICO.

La clasificación de los juegos desde el punto de vista psicológico es importante para saber donde se quiere situar a *TACHTLI*.

Desde el punto de vista psicológico los juegos se clasifican en:

- juegos de simple ejercicio,
- juegos de imaginación y
- juegos de reglas.

Los **juegos de simple ejercicio.** Se subdividen en :

- Aquellos que se limitan a generar una conducta ordinaria (juegos que implican el movimiento corporal). Poseen un fin previo.

- Aquellos en los que el sujeto no se limita a realizar actividades ya adquiridas. No tienen un fin previo. A esta clasificación pertenecen los juguetes armables por bloques, cuyas piezas en conjunto generan objetos.

- Juegos sensorio-motores. Son aquellos en los cuales intervienen los sentidos (generación de olores, sonidos, texturas, sensaciones, etc).

Los **juegos de imaginación (simbólicos).** Son aquellos que se emplean en la etapa infantil. Su objetivo es la incorporación del niño al mundo real (imitación).

Los **juegos de reglas.** Este es uno de los tipos de juegos más utilizados por adolescentes y adultos. Existen juegos cuyas reglas pueden adaptarse al número de jugadores, condiciones de estos, etc. Y también existen aquellos cuyas reglas son la estructura principal de éste.

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS POR SUS REGLAS.

Dentro de esta clasificación se encuentran dos grupos:

- Juegos formales y
- juegos informales.

Juegos formales. Son aquellos que eliminan la posibilidad de que en el desarrollo del juego se presenten situaciones que las reglas no arbitran.

Juegos informales. En estos juegos, las reglas son dichas en forma vaga, produciendo disputas sobre las reglas por permitir que se desarrollen situaciones que las reglas no arbitran.

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS Y JUGUETES POR SU FINALIDAD.

La siguiente clasificación de los juegos es importante desde el punto de vista comercial. Por su finalidad los juegos y juguetes se clasifican de la siguiente manera:

- reactivos,
- educativos,
- bélicos,
- científicos,
- juegos de salón, y
- juegos de mesa,

Juegos y juguetes reactivos. Una de sus finalidades es el desarrollo del sistema motriz, el concepto del cuerpo y del conocimiento social en general. Entre ellos se sitúan los patines, los columpios, las pelotas, etc.

Juegos y juguetes educativos. Su principal fin consiste en despertar la creatividad, la imaginación, la habilidad, la capacidad de concentración, el desarrollo de conceptos y memoria. Entre ellos se tiene a los rompecabezas, cubos, etc.

Juegos y juguetes bélicos. Son los que permiten canalizar la agresividad a través de pistolas, arcos, tanques, etc.

Juegos y juguetes científicos. Despiertan la curiosidad del "saber", "explican el porque de las cosas" (se incluyen juguetes de sustancias químicas y de laboratorio).

Juegos de salón. Estimulan y desarrollan la agilidad mental fomentando el espíritu de competencia, como el ajedrez, las damas chinas, etc.

Juegos de mesa. Se caracterizan por tener un alto grado de dependencia de la "suerte" y otros factores que permiten la interacción mediante la manipulación del juego. Por ejemplo la lotería, el turista, etc.

CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS SEGÚN GRAWFORD.

Grawford percibe cuatro grandes categorías de juegos:

- juegos de tablero,
- juegos de cartas,
- juegos atléticos y
- juegos de computadora.

Juegos de tablero. Un juego de tablero consiste en una superficie dividida en sectores poblados por un conjunto de piezas movibles. En la disposición más usual, las piezas están controladas de forma directa por los jugadores, pero la superficie de juego representa un medio ambiente más allá del control directo del jugador. Los jugadores maniobran con sus piezas a través de la superficie de juego en un esfuerzo por capturar las piezas de otros jugadores, alcanzar un objetivo, obtener el control de un territorio o adquirir alguna comodidad valorada.

Juegos de cartas. Los juegos de cartas utilizan un conjunto de 52 símbolos generados de combinaciones de dos factores: rango (13 valores) y palos (4 valores). Los jugadores pueden ganar o perder la posición de símbolos, ya sea por procesos aleatorios o por coincidencias de algunas combinaciones permitidas por las reglas del juego. A cada combinación legal se le asigna un valor para la decisión final de los resultados del juego. Los jugadores deben reconocer ambas combinaciones existentes y potenciales y poder estimar la probabilidad de obtener las cartas necesarias para completar una combinación. Debido a que el número de combinaciones es muy grande, el cálculo preciso de las probabilidades requeridas excede de las capacidades mentales de casi todos los jugadores, y el juego se hace básicamente un ejercicio intuitivo. Así pues, el interés fundamental del jugador en estos juegos es el análisis de las combinaciones.

Juegos atléticos. Estos juegos enfatizan proezas físicas más que mentales. Las reglas del juego especifican estrictamente un conjunto preciso de acciones que al jugador se le permite o se le requiere que ejecute. El uso habilidoso del cuerpo es el interés fundamental del jugador.

Juegos de computadora. La computadora actúa como oponente y árbitro en la mayoría de estos juegos; en muchos de ellos también se proporcionan gráficos animados. La forma más común de juegos de computadora son los juegos de habilidad y acción que enfatizan la coordinación de mano vista. Estos juegos son frecuentemente violentos. Hay otras muchas clases de juegos de computadora: juegos de aventuras como el Dangerous, juegos de fantasía y juegos de guerra, por nombrar algunos.

4.5 PORQUE LAS PERSONAS JUEGAN Y LO ATRACTIVO DE UNOS JUEGOS RESPECTO DE OTROS.

¿Porqué las personas juegan?, ¿qué los motiva?, ¿qué hace a los juegos divertidos?. Las respuestas a estas preguntas son cruciales para un buen diseño del juego.

A continuación se hará mención de las **motivaciones** para jugar. Las motivaciones son:

- el deseo de aprender (y no necesariamente necesita ser consciente),
- la fantasía,
- ponerse a prueba uno mismo,
- por conveniencias sociales,
- por ejercicio y
- necesidad de reconocimiento.

Fantasía. Un juego puede transportar al participante del mundo real que lo oprime y crear un mundo de fantasía en el cual puede olvidar sus problemas. Los juegos son potencialmente superiores a otros medios de escape (películas, libros, música) porque los juegos son participativos. La necesidad de escapar, de fantasear, es ciertamente una motivación importante para jugar juegos.

Husmear. Una función común de los juegos es proporcionar un medio de vencer restricciones sociales, al menos en fantasía. Muchos juegos colocan al jugador en un papel que no sería socialmente aceptable en la vida real, aquel de un ladrón por ejemplo. Algunas veces el papel del jugador es socialmente aceptable, pero las acciones tomadas se desaconsejan en la vida real.

Probarse a uno mismo. Otra razón de por qué las personas juegan es para demostrar su valentía. Su objetivo fundamental no es simplemente ganar sino batir a alguien, preferentemente a alguien digno de ser batido. El ajedrez tiene una inusualmente alta concentración de tales peligros. Puesto que todos los juegos tienen el potencial para ser jugados de una forma fuertemente competitiva, algunas personas que son especialmente sensibles a los riesgos sociales de los juegos se rehusan a jugar porque perciben que los juegos sean seguros; si ellos juegan prefieren hacerlo con juegos de puro azar, no tanto para disuadir el peligro como para crear una situación en la cual la victoria está evidentemente no relacionada con la valentía. Si las condiciones de victoria son arbitrarias, se elimina el riesgo social y se restaura la seguridad. En la mayoría de los juegos, por supuesto, la seguridad del riesgo social se confiere por las actitudes de los jugadores, su buena voluntad, de decir "es solamente un juego".

Lubricación social. Los juegos se utilizan frecuentemente (especialmente por adultos) como lubricantes sociales. El juego en sí mismo es de menor importancia a los jugadores, su significancia real es que proporciona un punto para un acontecimiento social.

Ejercicio. El ejercicio es otra motivación común para jugar. El ejercicio puede ser mental o físico o una combinación de ambos. En cualquier caso, el juego es una forma de entrenamiento para mantenerse en forma. A algunos jugadores les gusta ejercitar sus habilidades cognoscitivas, otros prefieren utilizar la intuición y algunos prefieren ejercitar sus habilidades atléticas.

Necesidad de reconocimiento. Todo ser humano necesita ser conocido por otras personas. Ansía no simplemente un conocimiento de su existencia, sino de su personalidad. Esta es una razón de por qué la interacción es tan importante en un juego; permite conocerse a los jugadores el uno al otro. Un juego verdaderamente excelente permite poner de manifiesto una gran parte de la personalidad del jugador en el desarrollo del juego.

Algunas cosas motivan a una persona a jugar juegos en general, otras pueden motivar a una persona a seleccionar de entre juegos similares, para preferir un juego de otro. Por ejemplo, los efectos especiales pueden proporcionar soporte sensorial a un juego de fantasía y puede diferenciar un buen juego de un mal juego. Pero no se debe confundir sus papeles. El tejido sensorial puede mejorar el impacto de la fantasía creada por el juego, aunque los gráficos o sonidos maravillosos no hagan por sí mismos buenos un juego. La graficación sensorial a través de efectos especiales debería proporcionar un soporte crucial, no ser la característica central del juego. Pero los efectos especiales podrían bien ser razón de por qué alguien puede preferir un juego de otro similar.

La respuesta de un futuro jugador a cualquier juego depende fundamentalmente de la personalidad y de los gustos de esa persona. Y los gustos de una persona en juegos no son estáticos. Cuando una persona cambia lo hacen también sus gustos y motivaciones.

¿Se puede descubrir los rasgos de personalidad y diferencias que actualmente determinan las preferencias del público entre los juegos? ¿Se puede anticipar la evolución de dichos gustos?. Una forma sería observar y catalogar grupos de jugadores e identificar los rasgos del juego que son valiosos a estos grupos.

En seguida se verá el perfil psicológico del *jugador-comprador* por su edad. Las etapas de la vida son:

- Niñez.
- Adolescencia.
- Juventud.
- Madurez.
- Periodo de transición.
- Vejez.

TABLA 4.1 *Perfil psicológico del jugador-comprador por su edad.*

EDAD	INTERESES
ADOLESCENCIA 13-18 años.	Juegos que encierran rivalidad de grupo, reglamentos y trabajo colectivo.
JUVENTUD 18-25 años.	Intereses por los juegos en equipo, que contengan en su mecánica el desarrollo de alguna actividad física o mental.
MADUREZ 26-50 años.	Juegos de competencia, adquisición de bienes y obtención del poder. Sus juegos son superficiales i. e., no permiten una intromisión en su intimidad
VEJEZ 60--	Interés en los juegos de habilidad mental y de azar, en los que no intervengan actividades físicas.

Fuente: RAPPOPORT, LEON., (1977), "La personalidad de los 13 a los 26 años", Buenos Aires: Ed. Paidos. RAPPOPORT, LEON., (1977), "LA personalidad de los 26 hasta la ancianidad", Buenos Aires: De. Paidos.

Se ha comprobado que ciertos intereses son especialmente masculinos y otros femeninos. Los hombres se interesan preferentemente por la actividad física, por los objetos, los problemas mecánicos y científicos, por la política y el comercio. Mientras que las mujeres presentan mayor preferencia por el arte, la música, la literatura, el trabajo de oficina, la enseñanza y el servicio social. De aquí, se tiene la siguiente tabla de comparación:

TABLA 4.2 *Intereses de las personas por su sexo.*

SEXO	INTERESES
MASCULINO	Adquisición de bienes, construcción, competencia.
FEMENINO	Actividades culturales.

Fuente: SUPER Y ALDE., (1967), "Psicología de los intereses y las vocaciones"

4.6 CONCEPTO DE TACHTLI.

La palabra Tlachtli significa juego sagrado de pelota. Si se le quita la primera letra "*l*" resulta la palabra *TACHTLI* que es el nombre de un nuevo juego en proyecto. Como tal, deberá cumplir con las características fundamentales de los juegos. A continuación se sentarán las bases para su creación.

⇨ **Representatividad.** *TACHTLI* está inspirado en la historia de la fundación de la ciudad de México-Tenochtitlán, de la que se van a tomar algunos elementos, haciéndolos notar en el juego, en el tipo de fichas, en el diseño del tablero, etc.; pero sin la intención de representar a la historia tal cual, es decir, no se pretende hacer un juego de investigación, sino meramente de entretenimiento (véase el capítulo 3, sección 3.3.2).

⇨ **Interacción.** En *TACHTLI* una jugada hecha por algún jugador deberá repercutir en todo el ambiente del juego y en la situación de los demás jugadores, esto va hacer de *TACHTLI* un juego con un alto índice de interacción.

⇨ **Conflicto.** *TACHTLI* va a constar de un inicio y dos etapas. El inicio será puramente estocástico, mientras que en las siguientes dos etapas los jugadores tendrán un objetivo y se enfrentarán a muchos obstáculos a vencer para lograrlo. En la primera de ellas, estos obstáculos los representarán el azar, las jugadas hechas por otros jugadores y el mismo tablero. En la segunda, los obstáculos a vencer serán el contrincante y el tiempo.

⇨ **Seguridad.** Como ya se ha mencionado el juego está inspirado en un hecho histórico y dado que ya aconteció, el juego no expondrá a ninguna realidad. (No se realizarán apuestas obligatorias en el juego).

Se quiere que *TACHTLI* sea :

⇨ Un juego de mesa.
⇨ Un juego de reglas.
⇨ Un juego *n*-personal en su primer etapa y en la segunda bipersonal.
⇨ Un juego de varias partidas.
⇨ Un juego de información completa.
⇨ Un juego con una combinación de jugadas aleatorias y determinísticas.
⇨ Un juego diseñado para jugadores mayores de 17 años.

4.7 CREACIÓN DEL JUEGO TACHTLI.

Primero se va a ver de donde surgen algunas ideas para la generación de las reglas del juego.

4.7.1 INSPIRACIÓN DE TACHTLI: LA FUNDACIÓN DE LA CIUDAD DE MÉXICO-TENOCHTITLÁN.

Ya que este juego se pretende comercializar, se cree buena la idea de difundir la cultura mexicana. La cultura azteca es una de las más importantes dentro de la historia de nuestro país, por la fascinación que ejercen su arte, su lengua, su organización social y política, así como por su pensamiento mítico y teológico. Este es el motivo por el cual se van a tomar algunos aspectos históricos de la peregrinación de los aztecas y de la fundación de la Ciudad de México-Tenochtitlán, para la generación de ideas en la invención del juego. A continuación se va a narrar un poco de historia prehispánica.

La historia del pueblo mexica se remonta hasta el año 1160, fecha en que salieron de un lugar llamado Aztlán, de aquí que siendo Aztlán el lugar de su origen, se les conociera tiempo después como aztecas.

Aztlán es un lugar remoto y legendario, cuya ubicación nunca ha podido ser precisada, algunos autores la colocan en la isla de Mexcala, otros en San Pedro Mexticacán, pero nadie puede fijar el asiento de esa mitológica ciudad. Sólo se cree haber llegado a la conclusión de que estuvo situada tal vez en un paralelo más alto de Alta California.

Una pintura indica que los aztecas, para llegar a Aztlán, tuvieron que atravesar un gran Río, la pintura puede interpretarse con facilidad, si se supone a todos los Nahoa viviendo en lo que ahora son los Estados Unidos, al norte, de donde caminaron hacia el sur; unos grupos por la parte central, y otros, entre ellos los *aztecas, por la orilla del pacífico, de tal manera que continuaron por Baja California, donde pudieron pasar el golfo de Cortés*, para llegar probablemente a Sonora.

Los aztecas parten de Aztlán e inician su viaje "para alcanzar el lugar elegido por el dios Huitzilopochtli"[3], (esta peregrinación duró 200 años según cuenta la historia). No se sabe a ciencia cierta porque emigraron los aztecas de Aztlán, pero una fábula refiere lo siguiente:

> *"Aparecíase frecuentemente un pájaro que se posaba en los árboles y que repetía con insistencia Ti Hui, Ti Hui, Ti Hui. El sumo sacerdote Huit Tzin Ton, puso en conocimiento del jefe Guerrero, lo que sucedía; y como se le preguntase lo que quería decir aquel extraño pájaro, le hizo saber al jefe Guerrero, que las palabras Ti Hui, Ti Hui, Ti Hui, claramente decían vamos ya, vamos ya, vamos ya. El mismo sumo Sacerdote explicó que el pájaro lo que ordenaba era que se continuase la marcha, y que era necesario obedecer, y seguir el camino"*[4].

Tal es la razón mitológica de la peregrinación de los aztecas.

Algunos autores dicen que son ocho, otros que siete las tribus que salieron de Aztlán. Véase el siguiente relato:

Salieron las tribus de Aztlán, iban juntos los matlazinca, los tecpanaca, los malinalca, los cholteca, los xochimilca, los huexotzinca y los aztecas. Las tribus llegaron juntas hasta Chico Móztoc[5], el cual está al norte de Zacatecas, y en ese lugar residieron las tribus por algún tiempo (9 años). *La Tradición dice que atravesaron primero el río Colorado y después el Gila, que de ahí pasaron a Casa Grande, Chihuahua; que volvieron a atravesar la Sierra Madre, rumbo al occidente, y que entonces se establecieron en Culhuacán.*

---

[3] HUITZILOPOCHTLI. Palabra compuesta en que la voz Opochtli quiere decir dios torcido a la izquierda o simplemente dios torcido.

[4] Morales, G. A. *El Tlilamatl o libro de los dioses.* Ed. Inter-continental, 1944, pág. 145.

[5] MÓZTOC. Palabra que quiere decir Lugar de las siete cuevas.

En el Chico Móztoc se efectuó la primera división de las tribus viajeras. La tradición narra de manera simbólica el suceso:

> "*Estaban las tribus protegidas por un gran árbol, es decir, unidas entre sí como las ramas y ramillas de los árboles; y debajo de aquel árbol vivían y se sustentaban todas las tribus. Pero repentinamente acaeció algo inexplicable, el árbol se partió por la mitad, y tal cosa se tuvo por mal aguero, aunque ninguna de las tribus pudo interpretar ese mal aguero.* La tribu del dios Huitzilopochtli consultó el caso con su deidad, y ésta, apartándola de las tribus, aconsejó que despidiese a las demás tribus y que la suya se quedase. *Así se hizo, con gran tristeza de todos; y entre sollozos y lágrimas se* separaron los peregrinos. *Salieron las otras tribus, y los Aztecas volvieron a comunicarse con su Dios, para que explicase aquel misterio.* Huitzilopochtli explicó que los había separado de las otras tribus, porque ellos eran sus predilectos, sus escogidos; y que ya no se llamarían azteca, sino mexica"[6].

Los mexica siguieron caminando después hacia el sur, llegaron a Michoacán, en donde ya otra tribu norteña, adoraba a un dios pájaro Tzin Tzuni, o el colibrí, que era su dios de la guerra. La influencia de la civilización propia de Michoacán produjo una nueva división entre los mexica. Se produjo la separación de Malinalco situado en el valle de Toluca, aproximadamente hacia el año 1196.

Una fábula, la de la **hechicera** revela el estado moral de la tribu:

> "***Iba entre los dioses de los peregrinos una hermana de Huitzilipochtli, hechicera y mala, autora de muchos perjuicios y que se hacía temer por su influencia sobre el pueblo, al que engañaba con toda clase de mañas y supercherías; maquinaciones todas encaminadas a que la adorasen y la siguiesen. Los mismos audaces guerreros le temían y toleraban, por ser hermana del Dios de la guerra. Entonces los sacerdotes del Sol se quejaron con el mismo Huitzilopochtli en contra de la Hechicera, y el Dios, hablándole en sueños al Sumo Sacerdote le aconsejó lo que debía hacer, de acuerdo con los guerreros. Se convocó al pueblo, y, ya estando reunido, el Sumo Sacerdote pronunció una especie de sermón, en el cual les dijo: nuestro dios está muy enojado con su hermana por los prejuicios que le causa al pueblo. Es cierto que le fue concedido poder sobre los animales bravos, pero no que se vengase y persiguiese a los***

[6] Morales, G. A. *El Tlilamatl o libro de los dioses*. Ed. Inter-continental, 1944, pág. 145.

fieles, como lo hacía, pues siempre les estaba dando órdenes a las arañas, a los ciempiés, a los alacranes, a las víboras y a todos los animales ponzoñosos, para que picasen y matasen a todo el mundo con su veneno. Y para que todo eso se acabe y tenga fin, el dios tiene ordenado que esta noche, cuando esté profundamente dormida la Hechicera con los suyos, se levante el campo y se la deje abandonada. Nuestro dios no ha venido para engañar y hechizar a los pueblos, sino para hacerlos grandes por el ánimo y esfuerzo; *ha venido a levantar al pueblo mexicano hasta las nubes, para que todos sean señores del oro, de la plata y de todos los metales; ha venido para que todos posean ricas plumas de diversos colores y tesoros de piedras preciosas policromadas; ha venido para fabricar casas para todos, y palacios y templos cuajados de rubíes, esmeraldas y toda clase de piedras preciosas.* Pero para que lleguen todos a vivir en el descanso de la abundancia y la riqueza, y en una felicidad perenne, hay que seguir peregrinando; *y eso es lo que tiene ordenado nuestro dios Huitzilopochtli. La plática enardeció el ánimo de todos los guerreros, de todos los sacerdotes del Sol y de todos los audaces y esforzados, quienes durante la noche se alejaron silenciosamente del campamento*"[7].

Años más tarde llegaron a Zumpango, donde se establecieron siete años debido a la hospitalidad de Tochpanécatl, señor de ese lugar. De las buenas relaciones con los habitantes de la región, derivó el matrimonio de una doncella azteca con un hijo del rey. El enlace matrimonial fue de gran trascendencia, pues de esa unión derivaría la futura nobleza azteca.

Posteriormente la peregrinación azteca pasó por Toltepetlac y Tepeyac, lugares situados a orillas del lago de Texcoco, su presencia en esas tierras despertó temores y recelos, por lo que al sentirse hostilizados se trasladaron a Chapultepec, hacia el año 1245. Para entonces, el contacto con los diferentes grupos humanos había hecho progresar a los aztecas. En Chapultepec construyeron viviendas, se dedicaron a la siembra del maíz y surgió en ellos el deseo de elegir a un señor rey, como tenían los demás pueblos. Anteriormente, durante el recorrido fueron dirigidos por diferentes sacerdotes.

Precisamente, el grupo dominante hasta entonces era el de los sacerdotes, quienes se oponían a la elección de un solo rey, pues en cierta forma temían ser despojados de su poder y privilegios, y por tanto aducían que los dioses deseaban que fuesen gobernados a través de ellos exclusivamente. Sin embargo, no todos estuvieron de acuerdo, así que se organizó un "partido político" que estaba en contra de los sacerdotes, y que optó por llevar a cabo la elección de un soberano.

---

[7] Morales, G. A. *El Tlilamatl o libro de los dioses.* Ed. Inter-continental, 1944, págs. 147 y 148.

Así pues, muy pronto Huitzilihuitli, hijo de la doncella Ihuícatl y del príncipe de Zumpango, ocupó el poder. Ahora bien, a Huitzilihuitli no se le ha considerado como verdadero rey, porque los aztecas carecían en ese momento de lo más indispensable para fundar su reino, esto es, de territorio propio.

Tras 17 años de habitar en Chapultepec, los aztecas tuvieron que emprender la retirada, dirigiéndose hacia Acocolco[8], en donde vivirían 52 años. En cuanto se establecieron en ese nuevo lugar, el señor de Culhuacán les comunicó que los territorios que habían ocupado eran de su propiedad y que por lo tanto, *debían pagarle tributo.* Al principio los azteca se rebelaron, pero finalmente se impusieron los culhuacanos, por lo que *no les quedó más remedio que someterse, pagarles tributo y ayudarles en la guerra.* Así pues, *fueron aliados* en la lucha contra los xochimilcas.

Un recorrido posterior llevó a los aztecas a Mexicaltzingo, de donde pasaron a Iztacalco. Precisamente al abandonar este último lugar, encontraron en el Lago de Texcoco el símbolo que su dios había profetizado que hallarían en el lugar preciso para su asentamiento definitivo, (un águila parada sobre un nopal devorando una serpiente). Pero el asentamiento ahí no era fácil, pues esta isla pertenecía al pueblo de Azcapotzalco, y la única forma de esteblecerse ahí era convirtiéndose en sus tributarios. A pesar de las dificultades los aztecas habitaron la isla.

En resumen. Los aztecas parten de Aztlán e inician su viaje para alcanzar el lugar elegido por el dios Huitzilopochtli, Dios de la Guerra. Durante la peregrinación que duró 200 años, este Dios les cambio el nombre de aztecas por **mexicas**. En este lapso son guiados bajo el designio de Huitzilopoctli hasta arribar al lago de Texcoco, para establecerse definitivamente en una isla a la que denominaron *México-Tenochtitlán.* La organización política y social de los aztecas, al igual que su actividad guerrera estaban supeditadas a la religión y el uso de la **guerra** se convirtió desde el principio, en un recurso vital para los aztecas, cuya historia está vinculada a combates y batallas, como medio para conseguir su espacio territorial. El arte de la guerra basado en **la aplicación de la táctica y la estrategia** alcanzó en el apogeo del imperio Mexica formas inusitadas que le permitieron expander y consolidar su dominio hacia los cuatro rumbos de la tierra. **Los mexicas, amos de la guerra y de la política de alianzas, como recursos para vencer los obstáculos,** pronto adquirieron el prestigio y el poderío suficiente para dominar, primero, la cuenca de México y, después, otros espacios del territorio Mesoamericano.

El **tributo** fue la expresión de poder político y económico, que se expandió para controlar centros estratégicos de un extenso y variado territorio para su práctica, los mexicas desarrollaron formas de organización tributaria que hicieron posible la recaudación, el almacenamiento y registro cuidadoso de los bienes cuya suerte y destino se decidía en el corazón del imperio: *LA GRAN CIUDAD TENOCHTITLÁN.*

[8] ACOLOLCO. Palabra que significa lugar de refugio.

A continuación se describe el hallazgo del águila devorando la serpiente, símbolo anhelado que mostraba ser el lugar de su destino:

"Llegaron entonces
allá donde se yergue el nopal.
Cerca de las piedras vieron
con alegría
cómo se erguía un águila sobre aquel nopal.
Allí estaba comiendo algo,
lo desgarraba al comer.
Cuando el águila vino a los aztecas,
inclinó su cabeza.
De lejos estuvieron mirando al águila,
su nido de varias plumas preciosas.
Plumas de pájaro azul,
plumas de pájaro rojo,
todas plumas preciosas, también estaban esparcidas allí
cabezas de diversos pájaros,
garras y huesos de pájaros..."[9]

[9] León Portilla, Miguel. *Los antiguos mexicanos a través de sus crónicas y cantares.* Ed. Fondo de cultura económica, 1961, pág. 39.

4.7.2 IMPORTANCIA DE LA MINIMIZACIÓN DE INFORMACIÓN EN LA INVENCIÓN DE LAS REGLAS DEL JUEGO.

No debe olvidarse que se está creando un *nuevo juego* o bien un nuevo producto, por lo que antes de ver la evolución de las reglas del juego, es conveniente hacer notar la importancia de la minimización de información en la evaluación de las reglas del juego.

La evaluación de nuevos productos es importante por considerarse la minimización de tres componentes de la evaluación total del costo:

1. El costo de introducir nuevos productos que finalmente fallarían. **(Error tipo II).**
2. El costo de oportunidad de productos que hubieran sido exitosos. **(Error tipo I).**
3. El costo de evaluación de nuevas ideas de producción, modelos y prototipos. (Aquí se reconoce que los procesos de evaluación extensos tales como la investigación de mercado pueden reducir ambos tipos de error, pero produce un costo general mayor).

En el diagrama del proceso de evaluación de un nuevo producto (Figura 4.1), se puede apreciar que *en general, los primeros pasos son los menos costosos y deberán ser los más eficientes en eliminar ideas pobres.* En esta investigación se van a desarrollar los dos primeros pasos (generación de una idea y filtración de la idea). En este diagrama se hace evidente que el marco de trabajo de la toma de decisión del nuevo producto envuelve la opción de aceptar una alternativa, rechazar un alternativa o diferir una decisión hasta coleccionar la suficiente información para poder efectuar la decisión de aceptación o no aceptación. La colección de información es una operación costosa.

La información a la que se hace referencia en este caso particular, es a la que se requiere para decidir si una idea a cerca de las reglas del juego no se rechaza, se rechaza o se continúa analizando más profundamente para finalmente determinar si es rechazada o no. Esta información puede ser adquirida con el simple hecho de jugar el juego con esa idea y observar si resulta ser aburrido, tedioso, cansado, sin sentido, sin conflicto, con poca interacción entre los jugadores, etc., o si por el contrario, es divertido, interesante, atractivo, con un alto índice de interacción, etc., si ese fuese el caso, se requiere de un estudio formal basado en las matemáticas para dar un enfoque que permita en determinado momento decidir si la regla del juego se rechaza o no.

Además de la información existen otros factores como los costos fijos, bienes de capital y otros que tiene que ver con el aprovechamiento del nuevo producto, sin embargo, la contemplación de estos factores quedan fuera de esta investigación, sólo diré que existen métodos para la programación de los pasos de la evaluación de un producto como lo son: la programación dinámica, la toma de decisión bayesiana y el muestreo secuencial.

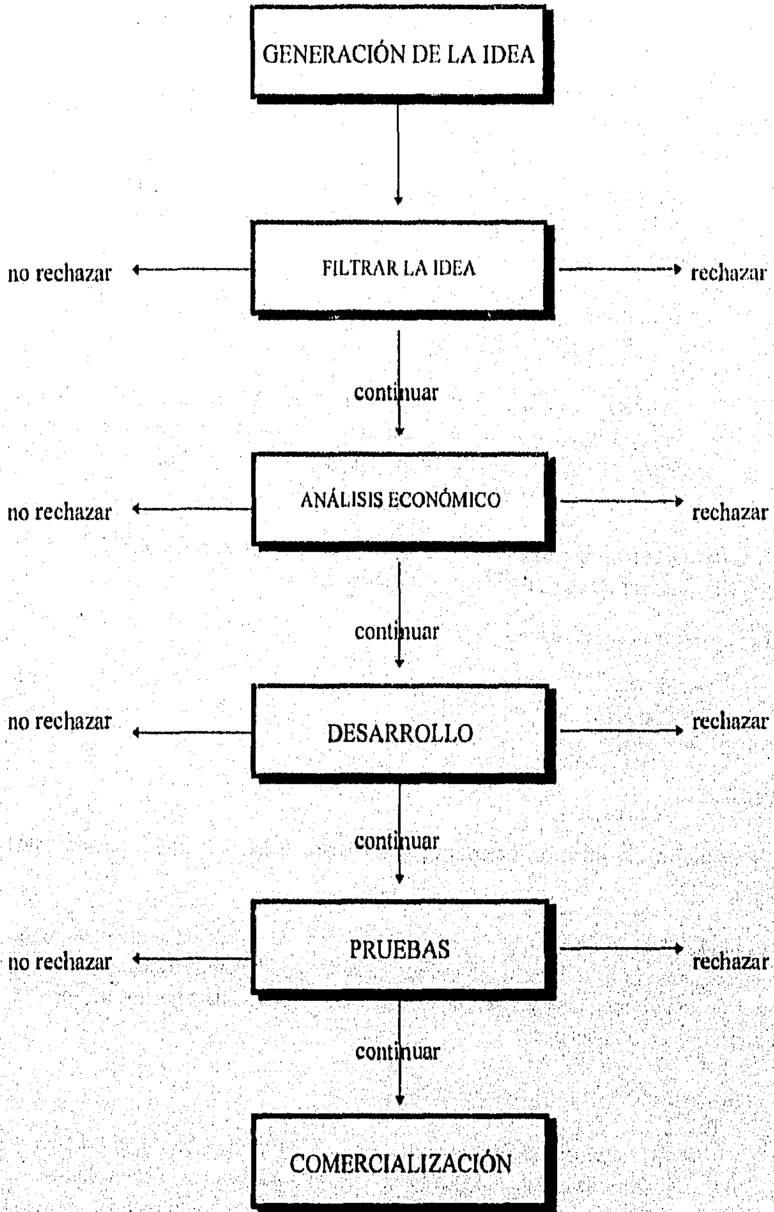


FIGURA 4.1 *Proceso de evaluación de un nuevo producto.*

4.7.3 EVOLUCIÓN DE SUS REGLAS.

Primeramente se va a elaborar un prototipo de la parte funcional del juego. En este **primer prototipo** el objetivo de los jugadores es la fundación de la ciudad de México-Tenochtitlán. En el juego participan ocho jugadores que representan a las tribus peregrinas de Aztlán. En el desarrollo del juego se emplean tentativamente un dado y 3 tipos de fichas, cada una con un valor significativo:

- **Señales**. Con un valor de 3 puntos. Las señales representan a los símbolos que los aztecas recibían de su Dios Huitzilipochtli durante su peregrinación.

- **Guerreros**. Su valor es de 2 puntos. Los guerreros simbolizan a los peregrinos de Aztlán.

- **Tributos**. Tienen un valor de 1 punto. Los tributos, como su nombre lo indica, representan a los tributos que los aztecas tuvieron que pagar en los territorios que no eran suyos y a los tributos que posteriormente otros pueblos les pagaron.

A cada jugador le corresponden ocho guerreros (hay ocho diferentes colores de guerreros), cada jugador elege un color para sus fichas.

El juego consta de tres etapas:

⇨ Inicio,
⇨ 1ª etapa y
⇨ 2ª etapa.

INICIO.

El *objetivo* del inicio es determinar con cuántas fichas de tributo iniclará cada jugador.

Como se puede observar en la figura 4.2, el tablero consta de un anillo exterior, en el que se encuentran localizados ocho divisiones cada una con 6 compartimentos que en su parte superior estan iluminados con seis colores diferentes, estos seis colores corresponden a los colores de cada cara del dado.

El juego se inicia de la siguiente manera:

❑ **1.1)** Primero se gira el anillo exterior del tablero, con el fin de que el jugador de al lado coloque los tributos en forma aleatoria en cualquiera de los seis compartimentos, después se regresa el anillo a su posición original. Los jugadores tiran del dado para localizar los tributos escondidos, en su correspondiente división. Los tributos encontrados se emplean posteriormente en el juego.

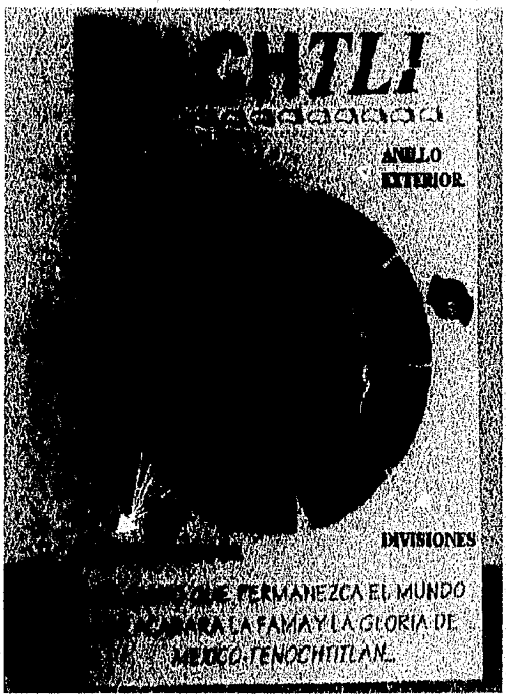


FIGURA 4.2 *Tablero utilizado en el primer prototipo del juego (serpiente enroscada 1).*

1ª ETAPA.

El *objetivo* de esta etapa es hacer un filtro de los jugadores que pasarán a la siguiente etapa. El juego irá tornándose más difícil. Para esta etapa, el tablero consta de 3 tipos de **casillas**:

- **Pantanos.** (Representando a los ríos y zonas peligrosas que los peregrinos de Aztlán tuvieron que recorrer). Las fichas que caigan en este tipo de casillas se descartan del juego (simulando que el guerrero muere).

- **Hechiceros.** En estas casillas los jugadores intercambian dos fichas adquiridas en enfrentamientos con otros jugadores, por una ficha de tributo.

- **Tributo.** En estas casillas el jugador deposita una de sus fichas de tributo, de no tenerla, el guerrero desaparece del juego.

Las casillas de *tributo y hechicero* son fijas, mientras que las de pantano son aleatorias dentro de un rango de casillas.

- ❑ 2.1) La salida de los guerreros es en pareja. Al continuar el juego estos avanzan separados.
- ❑ 2.2) En caso de encontrarse dos guerreros en una misma casilla no pueden ser atacados.
- ❑ 2.3) En caso de que un tercero caiga en la misma casilla el tiro pierde validez, y se deberá avanzar con otro guerrero.
- ❑ 2.4) Al caer un guerrero en una casilla donde haya otro jugador se produce un **enfrentamiento** entre los jugadores, el jugador vencedor debe dar una señal de las que posea a su oponente.

Al final de esta etapa deben quedar sólo cuatro jugadores. El jugador que haya obtenido el mayor puntaje en esta etapa es denominado el MEXICA, el fundador de la Ciudad de México-Tenochtitlán.

2ª ETAPA.

EL *objetivo* de esta etapa es que los tres jugadores restantes impidan que gane el MEXICA, o bien el objetivo para el MEXICA es ganar el juego. El factor tiempo es importante en esta etapa. Esta etapa debe ser de estrategia.

- 3.1) Los jugadores restantes tratan de imperdir el paso de las fichas guerreros del jugador denominado MEXICA hacia el valle.
- 3.2) El primer guerrero del jugador MEXICA que llegue al valle es el fundador de la Ciudad de México-Tenochtitlán.
- 3.3) Si la ciudad no se funda en un determinado tiempo, el juego se da por terminado.

Observaciones.

Hasta este momento no se tiene definido:

- ⇨ El número de dados con el que se juega el juego.
- ⇨ El número de fichas guerreros para cada jugador.
- ⇨ La cantidad de tributos a esconder en cada compartimento.
- ⇨ El número de tiros del dado para encontrar a las fichas de tributos y cómo se van a distribuir éstas en los compartimentos.
- ⇨ Qué criterio se aplicará para determinar al jugador que es el primero a salir.
- ⇨ Cómo salir.
- ⇨ De cuántas fichas salir.
- ⇨ El número máximo y mínimo de jugadores que pueden participar en el juego y qué sucede de acuerdo a esta variación.
- ⇨ En qué parte del juego sólo quedan cuatro jugadores.
- ⇨ Cómo se efectúan los enfrentamientos entre los jugadores.
- ⇨ El número de casillas total en el tablero.
- ⇨ Cuántas zonas de casillas de pantano hay en todo el tablero.
- ⇨ Cómo se efectúa la etapa de estrategia.

Además, si se supone una casilla inicio para cada jugador, este diseño de tablero presenta un inconveniente: el jugador que inicia el juego tiene ventaja sobre los demás, ya que tiene mayor oportunidad de llegar primero a la segunda etapa (asumiendo que el numero de casillas por avanzar corresponde al número del dado obtenido en su lanzamiento).

Por las observaciones anteriores se llegó a la conclusión de que es conveniente modificar el diseño del tablero y definir más precisamente los puntos anteriores.

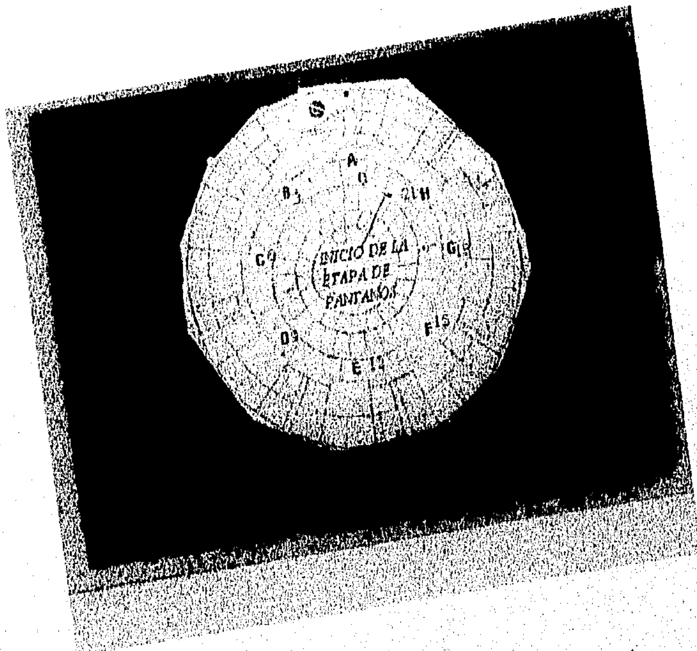


FIGURA 4.3 *La serpiente enroscada 2 (tablero).*

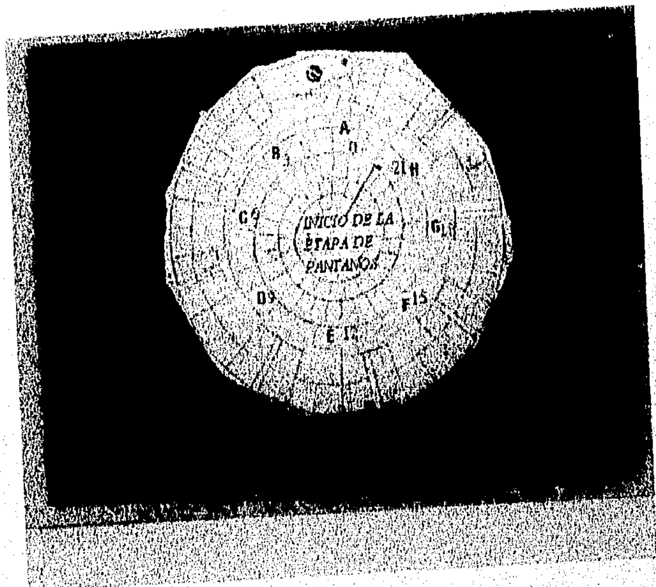


FIGURA 4.3 *La serpiente enroscada 2 (tablero).*

INICIO Y 1er ETAPA.

2° PROTOTIPO DEL JUEGO.

Con el tablero mostrado en la figura 4.3 se aplican las mismas bases que en el anterior, pero se modifican algunas reglas.

La regla 1.1) se modifica y queda dividida en tres:

- ❑ 1.1) Cada jugador tira del dado dos veces, dando inicio al juego aquel que haya obtenido la mayor suma en sus lanzamientos, el turno para los demás es en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- ❑ 1.2) A cada jugador le corresponde de entrada una señal.
- ❑ 1.3) La primer regla del prototipo anterior relativa a la repartición inicial de los tributos entre los jugadores se conserva eliminando el giro del anillo exterior.

Nota.

El número de lanzamientos, el número de tributos a esconder por casilla y el número de tributos a esconder, son el tema de estudio del capítulo 5 de esta investigación.

Observación.

El inicio de cada jugador se encuentra marcado en la figura 4.3.

- ❑ 1.4) Al completar una vuelta con todas sus fichas cada jugador, sale del círculo inicial de acuerdo al orden en que cada jugador termine su ciclo y continúa jugando en la zona de pantanos.

Las reglas para la primera etapa quedan igual sólo se amplía la regla 2.4) quedando de la siguiente manera:

- ❑ 2.4) Al caer un guerrero en una casilla donde haya otro jugador se produce un enfrentamiento entre los jugadores y el jugador vencedor debe dar una de sus señales a su oponente. Dicho enfrentamiento se lleva a cabo como sigue: Se lanza el dado una vez (el tiro del dado lo realiza el jugador que llega a esa casilla) y de acuerdo con el número obtenido de su lanzamiento se procederá de acuerdo con la tabla 4.3.

TABLA 4.3 *Enfrentamientos entre los jugadores de TACHTLI (2°prototipo).*

No. Del Dado	Acción
1	Brincar a la siguiente casilla.
2	Se queda ahí el guerrero invasor.
3	El guerrero invadido se inmoviliza una jugada.
4	El guerrero invasor se inmoviliza una jugada.
5	Muere el guerrero invadido.
6	Muere el guerrero invasor.

Para analizar el desarrollo del juego en su primer etapa, particularmente en la parte del círculo, se diseñó la *notación* siguiente:

$$(J;\, d;\, S.g;\, S,\, g;\ldots;\, J_1 > J_2), \tag{4.7.1}$$

donde
J: Jugador, con $J \in \{A, \ldots, H\}$.
S: Número de casilla en la que se encuentra situado el jugador J.
g: Número de guerreros con los que cuenta el jugador $J.g \in \{0, \ldots, 8\}$
$>$: Jugador al que se paga una señal. (Por ejemplo $A > B$: el jugador A, le da una señal al jugador B).
d: Número del dado que quede en la cara superior del dado después de efectuar su lanzamiento. $d \in \{1, \ldots, 6\}$.
pp: El jugador J tiene inhabilitada una jugada.

1er TIRO

A; 1; 0, 6; 1, 2
A; 2; 0, 6; 2, 2
A; 3.1; 0, 6,; 4, 2
A; 3.2; 0, 6; 3, 2
A; 3.3; 0, 6; 3, 2 *B*; 3, 6; 3,2 *pp*
A; 3.4; 0, 6; 3, 2 *pp*
A; 3.5; 0, 6; 3, 2 *B*>*A* *B*; 3, 6
A; 3.6; 0, 6 *A*>*B*
A; 4; 0, 6; 4, 2
A; 5; 0, 6; 5, 2
A; 6.1; 0, 6; 7, 2

A; 6.2; 0, 6; 6, 2
A; 6.3; 0, 6; 6, 2 C; 6; 6; 6, 2 *pp*
A; 6.4; 0, 6; 6, 2 *pp*
A; 6.6; 0, 6 *A*>C

2º TIRO

A; 1; 0, 6; 1, 2
A; 2; 0, 6; 2, 2
A; 3.2; 0, 6; 6,2
A; 3.6; 0, 6 *A*>*B*
A; 6.6; 0, 6 *A*>C
B; 1; 3, 6; 4, 2
B; 2; 3, 6; 5, 2
B; 3.1; 3, 6; 7, 2
B; 3.2; 3, 6; 6, 2
B; 3.3; 3, 6; 6, 2 C; 6, 6; 6, 2 *pp*
B; 3.4; 3, 6; 6, 2 *pp*
B; 3.5; 3, 6; 6, 2 C>*B* C; 6, 6
B; 3.6; 3, 6 *B*>C

Sin embargo, antes de concluir con este análisis, se van a ver las siguientes observaciones.

Observaciones.

- Cuando se presentaban enfrentamientos con el número de dado 3 o 4 se prestaba a mucha confusión, ya que no había quedado claro si solamente era el guerrero en turno el que se inmovilizaba, o si por el contrario eran todos los guerreros del jugador en turno. Si era lo primero, esta regla carecía de sentido, ya que se podía avanzar con otro guerrero. Si se trataba de lo segundo, el jugador inmovilizado perdía mucho avance con respecto a los otros jugadores.

- Al principio cuando se salía de dos en dos guerreros el juego era muy rápido, pero cuando ya nada más se podía avanzar de uno en uno el juego se volvía lento.

- Por lo general, llegaba primero el jugador que era el primero en salir.

- Desde el segundo tiro el jugador *B* podía contar con tan sólo cuatro guerreros, esto es, con la mitad de los que había iniciado.

Por lo anterior se decidió cambiar las reglas.

Nota.

Únicamente se estudió la parte del juego correspondiente al círculo.

3er PROTOTIPO DEL JUEGO.
TABLERO ANTERIOR JUGADO CON DOS DADOS.

Las reglas 1.5) y 2.4) se modifican y quedan así:

- ❑ 1.5) La etapa del círculo termina con la llegada de por lo menos un guerrero de cada jugador a su correspondiente casilla de origen.
- ❑ 2.5) En esta regla se modifican las equivalencias del número del dado al realizarse enfrentamientos (tabla 4.4).

TABLA 4.4 *Enfrentamientos entre los jugadores de TACHTLI.(3er. prototipo).*

NO. DEL DADO	ACCIÓN
1 o 3	Moverse una casilla.
2 o 4	Se queda ahí el guerrero invasor.
5	Muere el guerrero invadido.
6	Muere el guerrero invasor.

Se adiciona una regla en la 2ª etapa:

- ❑ 2.5) Cuando dos guerreros de jugadores diferentes estan en una misma casilla y un tercero caiga en ésta, éste retrocederá una casilla.

Al jugarlo se *concluyó* que con estas reglas se agiliza el juego; sin embargo, el hecho de dar vueltas es un tanto monótono y muy común en otros juegos, por lo que se buscaron otras alternativas de diseño y nuevas reglas, con las siguientes bases:

- ⇨ Tomar más raíces prehispánicas para construir el tablero.
- ⇨ Formar caminos entrelazados.
- ⇨ Que los jugadores tomen decisiones al mover sus fichas.
- ⇨ Intervención de factores tales como: el azar y el tiempo.
- ⇨ Enfrentamiento entre los jugadores.
- ⇨ Existencia de casillas de pantanos, de tributos y de hechiceros.

Con base a lo anterior se diseñaron las siguientes reglas con el tablero que se muestra en la figura 4.4.

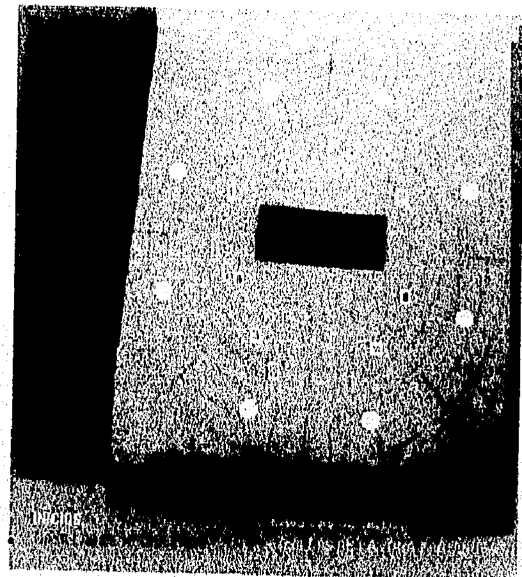


FIGURA 4.4 *Plano del templo mayor (tablero).*

4° PROTOTIPO DEL JUEGO.

INICIO.

- ❑ 1.1) Cada jugador tira del dado dos veces, dando inicio al juego aquel que haya obtenido la mayor suma en sus lanzamientos, el turno para los demás es en sentido contrario a las manecillas del reloj. En caso de empate repetir esta regla.
- ❑ 1.2) A cada jugador le corresponde de entrada una señal.
- ❑ 1.3) Cada jugador distrubuye sus tributos en forma aleatoria en cualquiera de los seis compartimentos indicados en la figura 4.2, después los jugadores tiran del dado para localizar los tributos escondidos, en su correspondiente división. Los tributos encontrados se emplean posteriormente en el juego.

1ª ETAPA.

- ❑ 2.1) Se coloca un guerrero de cada pueblo o jugador en los diferentes inicios (divisiones -ver figura 4.2-).
- ❑ 2.2) Todos los guerreros de un jugador se moven de acuerdo a un mismo tiro del dado en la dirección que se desee, pero sin pasar más de una vez por la misma casilla, excepto en la casilla meta.
- ❑ 2.3) No se puede dejar pasar un turno.
- ❑ 2.4) Se pueden colocar a lo más dos guerreros en una misma casilla. Al encontrarse dos guerreros de jugadores diferentes hay un enfrentamiento entre ellos. Este enfrentamiento consiste en que el guerrero invasor lanza del dado y reacciona de acuerdo a la tabla 4.4.
- ❑ 2.5) El jugador vencido en el enfrentamiento cede una señal al jugador vencedor, en caso de no tener señales sólo pierde al guerrero.
- ❑ 2.6) La entrada a una casilla de hechiceros no necesita ser con un número exacto en el tiro.
- ❑ 2.7) En las casillas de hechiceros se pueden intercambiar dos guerreros obtenidos en enfrentamientos por un tributo.
- ❑ 2.8) En las casillas de tributo, se perderá una ficha de tributo, en caso de no tenerlo el guerrero morirá.
- ❑ 2.9) Si se presenta un enfrentamiento en las casillas de hechiceros o de tributos, primero se deben cumplir con las reglas de estas casillas y posteriormente se lleva a cabo el enfrentamiento.
- ❑ 2.10) A los primeros cuatro guerreros que pasen la zona pantanosa, se les repone un guerrero; y todos sus guerreros no importando en que casillas se encuentren, se reunen con los que ya pasaron la zona pantanosa.
- ❑ 2.11) Llegados los primeros cuatro jugadores se realiza un conteo de acuerdo con la tabla 4.5.

- ❑ 1.12) Al jugador con mayor puntaje se le denomina MEXICA y se le entregan sus ocho guerreros.
- ❑ 1.13) Los tres jugadores restantes se unen formando una TRIPLE ALIANZA, contando ésta con los guerreros "vivos" de los tres jugadores.

Para continuar con el juego, ambos jugadores MEXICA y TRIPLE ALIANZA juegan con sus respectivas fichas de señales y tributos.

TABLA 4.5 *Valor de las fichas en TACHTLI.*

FICHA	VALOR
Tributo	1 punto.
Guerrero	2 puntos.
Señal	3 puntos.

Nota.

El hecho de que sean ocho jugadores y el dado tenga seis caras, aumenta la posiblidad de que se produzcan enfrentamientos.

Observaciones.

- ⇨ La 1ª etapa del juego tuvo una duración promedio de 2:20 hrs.
- ⇨ Resultó ser un juego muy interesante y divertido.
- ⇨ Es conveniente añadir más zonas de hechiceros, para disminuir la duración del juego.
- ⇨ Al revisar el diseño del tablero se decidió crear formas con mayor tendencia prehispánica.

Por lo anterior se diseño otro tablero (figura 4.5).

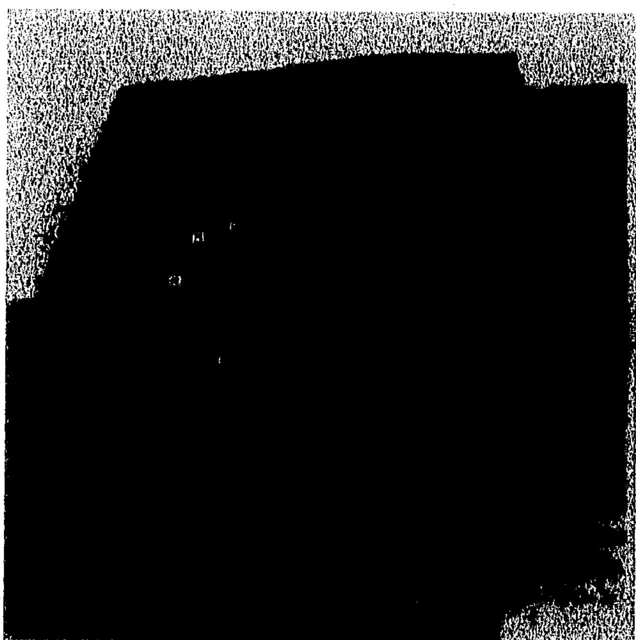


FIGURA 4.5 *Penacho (tablero).*

5° PROTOTIPO DEL JUEGO.

Se conservan las reglas 1.1), 1.2), 1.3), 2.1), 2.2), 2.3), 2.4), 2.5), 2.6), 2.7), 2.8), 2.9) y 2.11) del prototipo anterior, y se modifica la regla 2.10)

- ☐ 2.10) Los primeros cuatro guerreros de jugadores diferentes que lleguen a cualquiera de las casillas de inicio de la 2ª etapa reunen a todos sus guerreros, no importando en que casillas se encuentren situados, para realizar el conteo y poder dar inicio a la 2ª etapa del juego.

También se añaden las reglas siguientes:

- ☐ 2.14) La primer casilla de salida para cada inicio es la inmediata frontal (casilla inicio -ver figura 4.5-).

- ☐ 2.15) En caso de empate en el conteo para la denominación del MEXICA, se toma en cuenta el orden de entrada a las casillas de inicio de las 2ª etapa (casillas meta -ver figura 4.5-).

2a ETAPA.
1er. PROTOTIPO.

Para esta etapa se diseñó el tablero de la figura 4.6

El *objetivo* de esta etapa es llegar con al menos una ficha al otro extremo de la serpiente y regresar al lugar de partida.

- ☐ 3.1) Se colocan las fichas de guerreros de cada uno de los jugadores (MEXICA y TRIPLE ALIANZA) en cabezas opuestas.
- ☐ 3.2) Esta parte la inicia el jugador que al lanzar el dado obtenga mayor puntaje.
- ☐ 3.3) El recorrido se realiza de la forma siguiente:
    - ☐ 3.3.1) Se lanza el dado y se avanza el número de casillas de acuerdo al número indicado por el dado. (Cada jugador se desplaza sobre su misma serpiente).
    - ☐ 3.3.2) No se puede retroceder.
    - ☐ 3.3.3) El MEXICA puede repartir su tiro, es decir, puede elegir cuantos y cuales guerreros mover de manera que complete el número del dado.
    - ☐ 3.3.4) La TRIPLE ALIANZA sólo puede mover un guerrero por tiro.
    - ☐ 3.3.5) No puede haber más de dos guerreros en una misma casilla.

- ❑ 3.3.6) Al caer en las casillas de tributo se tiene que depositar un tributo, de no tenerlo, el guerrero perece.
- ❑ 3.3.7) Lo mismo sucede con las casillas de las señales.
- ❑ 3.3.8) El siguiente guerrero que caiga en la misma casilla, recoge el tributo y/o señal.

- ❑ 3.4) Al llegar una ficha al otro extremo de la serpiente, se colocan todos sus guerreros en dicho extremo, para poder comenzar el recorrido de regreso. La entrada es con un tiro exacto. Lo anterior se aplica a ambos jugadores.
- ❑ 3.5) *Regreso*. Se puede elegir el camino a seguir, esto es, se tiene la opción de decidir por cuál serpiente continuar el recorrido, de forma que se llegue al otro extremo de la serpiente.
- ❑ 3.6) Los enfrentamientos entre guerreros contrarios se efectúan de igual forma que en la 1er. etapa.
- ❑ 3.7) El MEXICA no pierde señales en los enfrentamientos.

FORMAS DE GANAR.

- ❶ El MEXICA puede ganar si logra obtener todas las señales antes de un tiempo determinado y/o obteniendo el mayor puntaje en un tiempo determinado. (Este tiempo se determinará después de jugar varias veces el juego con estas reglas y estimar un tiempo promedio).
- ❷ La TRIPLE ALIANZA gana si obtiene mayor puntaje al terminar el tiempo y/o llegar a su correspondiente serpiente con mayor puntaje.

PUNTAJE.

Aquí se cuentan los guerreros adquiridos en enfrentamientos, así como los tributos, con un valor de 2 puntos para los primeros y 1 para los segundos.

Nota.

La TRIPLE ALIANZA se pone de acuerdo para elegir quién tira del dado y que guerrero mueve. La elección de la serpiente de origen es libre.

Observación.

Con esta mecánica el juego resulta muy aburrido y tardado (30 minutos en promedio). Por lo que se concluye en buscar otra forma de jugar el juego, así como otro diseño de tablero, para esta etapa.

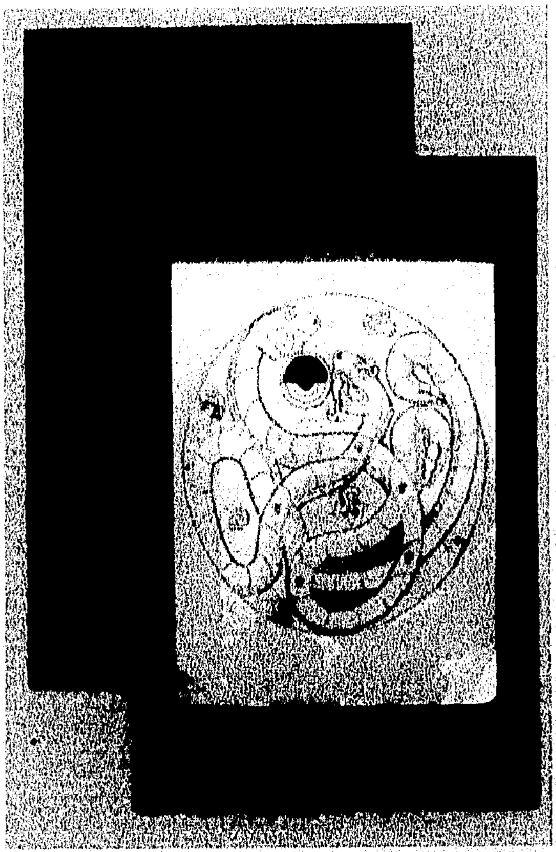


FIGURA 4.6 *Dos serpientes entrelazadas, un sólo carril (tablero).*

2° PROTOTIPO.

En este prototipo, el tablero es semejante al anterior, únicamente se aumenta el número de carriles a 3.

- 3.1) Se colocan las fichas de cada uno de los jugadores (MEXICA y TRIPLE ALIANZA) en cabezas opuestas.
- 3.2) Esta parte la inicia el jugador que al lanzar el dado obtiene el mayor puntaje.
- 3.3) El recorrido se realiza de la siguiente forma:
  - 3.3.1) Se lanza el dado y se avanza el número de casillas de acuerdo con el lanzamiento.
  - 3.3.2) No se puede retroceder.
  - 3.3.3) El MEXICA puede repartir su tiro, con hasta 2 guerreros.
  - 3.3.4) La TRIPLE ALIANZA sólo puede mover un guerrero por tiro.
  - 3.3.5) No puede haber más de dos guerreros en una misma casilla.
  - 3.3.6) Al caer en las casillas de hechiceros se tiene que depositar un tributo, de no tenerlo el guerrero perece.
  - 3.3.7) Lo mismo sucede con las casillas de señales.
  - 3.3.8) El siguiente guerrero que caiga en la misma casilla, recoge el tributo y/o señal.
- 3.4) Los enfrentamientos entre los guerreros contrarios ocurren con las mismas reglas de la primera etapa.
- 3.5) El MEXICA no pierde señales en los enfrentamientos.

FORMAS DE GANAR.

1. Se entra a la meta (cola de la serpiente) con un tiro exacto.
2. El MEXICA gana si entra a la meta obteniendo todas las señales y/o si obtiene el mayor número de puntos.
3. La TRIPLE ALIANZA gana si el MEXICA no llega a la cola en un tiempo determinado y/o la TRIPLE ALIANZA llega a la cola con el mayor puntaje.

PUNTAJE.

1. Al primer equipo que llegue con todos sus guerreros se le dan dos puntos más.
2. Los guerreros muertos en batalla tienen un valor de dos puntos, el tributo vale un punto.
3. Para el puntaje no cuentan las señales.

PRUEBAS.

Los ensayos realizados con este prototipo se muestran en la tabla 4.6.

TABLA 4.6 *Pruebas de la 2a etapa del juego TACHTLI.(2°prototipo).*

Casillas	Duración (min.)	Rango de pantanos.	Pantanos	Fichas inicio Triple Alianza.	Fichas inicio Mexica.	Resultado
32	25	15	5	5 morados 5 azules 3 verdes 13 guerreros 5 tributos 3 señales	3 tributos 3 señales	Ganó: Triple Alianza; con 13 puntos (3 guerreros, 5 tributos)
25	20	15	5	3 morados 3 azules 4 verdes 10 guerreros 4 tributos 3 señales	3 tributos 4 señales	Ganó: Mexica con 12 puntos (3 guerreros, 4 tributos)
25	20	15	5	4 morados 3 azules 3 verdes 10 guerreros 3 tributos 3 señales	4 tributos 3 señales	Ganó: Mexica con 11 puntos (3 guerreros, 3 tributos)
* En los sig. juegos se redujo el No. de carriles a 2, el Mexica podrá perder sus señales en enfrentamientos. El tablero está saturado de casillas pantano y hechicero.						
20	14	10	5	5 morados 4 azules 3 verdes 12 guerreros 2 tributos 2 señales	3 tributos 2 señales	Ganó: Triple Alianza con 10 puntos (3 guerreros, 2 tributos)
20	10	10	5	3 morados 4 azules 5 verdes 12 guerreros 1 tributos 2 señales	2 tributos 2 señales	Ganó: Triple Alianza con 7 puntos (2 guerreros, 1 tributos)

Observación.

Este tablero a diferencia del anterior, sólo tiene una meta común lo que ocasiona más enfrentamientos.

Observaciones.

❶ Al reducir el número de casillas se redujo el tiempo de juego.
❷ Algo muy importante es que aún no se logra desarrollar un juego que con base a una estrategia pueda existir la posibilidad de detener al MEXICA, por lo que el interés por jugar es casi nulo.
❸ Dado lo anterior es conveniente crear otra forma de jugar esta etapa y por tanto otro diseño de tablero, contemplando los aspectos siguientes:

⇨ **4 jugadores repartidos** como sigue :

- 3 TRIPLE ALIANZA y
- 1 MEXICA.

⇨ **Estrategia**: La TRIPLE ALIANZA impide el paso del Mexica por medio de bloqueos.
⇨ **Ventaja**: El MEXICA debe tener ventaja sobre la TRIPLE ALIANZA.
⇨ **Emoción**: Manejo de medidor de tiempo.
⇨ Pensar en **movimientos**.
⇨ Tomar **elementos de la etapa anterior**: Guerreros, tributos y señales.
⇨ **El azar.**
⇨ **El tiempo.**

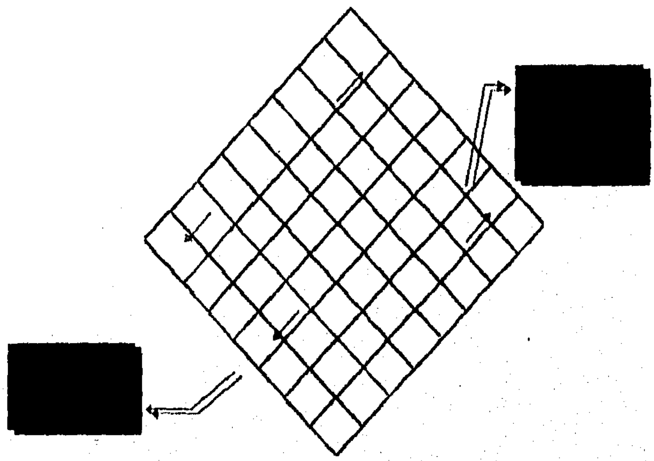


FIGURA 4.7 *Cuadro de8x7 (tablero).*

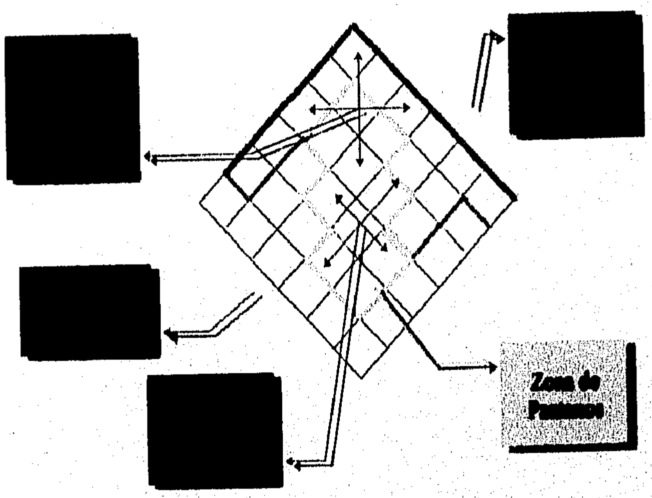


FIGURA 4.8 *Cuadro de6x6 (tablero).*

3er PROTOTIPO.

El *objetivo* es ganar todas las señales del jugador contrario.

El tablero utilizado en este prototipo es el de la figura 4.7.

Con este prototipo se da inicio a la 2a etapa del juego de la siguiente manera:

- ❑ 3.0.1) Se colocan los guerreros en las primeras filas y de frente a sus contrarios.
- ❑ 3.0.2) Las señales se colocan al azar a partir de las 2as filas (sobre sus guerreros).
- ❑ 3.0.3) Los primeros tiros consisten en poseer el mayor número de señales.

Para continuar con la enumeración de las reglas del juego, es necesario definir algunos términos que se emplean en el juego:

- **Hechizamiento.** El guerrero que llegue a una casilla donde ya hay un guerrero contrario hechiza a este último.

- **Encantamiento.** Consiste en que el guerrero hechizado no puede moverse hasta que el guerrero que lo hechizó deje esa casilla.

Ahora bien, las reglas para esta etapa son:

- ❑ 3.1) Los avances son de uno o dos cuadros en cruz y en una sola dirección, sólo se puede comer en diagonal habiendo hecho un movimiento de un cuadro.
- ❑ 3.2) La señal se obtiene al caer el MEXICA en una casilla después de hacer un movimiento vertical u horizontal donde haya un guerrero custodiando la señal, y se pelea haciendo uso del dado. Si cae un número par el MEXICA se queda con la señal, si cae un número non no. En caso de quedarse con la señal el guerrero rival muere, en caso contrario, permanece hechizado.
- ❑ 3.3) El guerrero que posea la señal sólo puede moverse en cruz y una casilla por movimiento; tampoco puede comer.
- ❑ 3.4) La TRIPLE ALIANZA para ganar debe comer a todos los guerreros contrarios.

De lo anterior se tienen tres formas distintas de obtener señales y de comer guerreros contrarios:

- ❑ **3.2.1)** Al llegar el MEXICA de frente hechiza al guerrero contrario. Si el MEXICA llega en diagonal se come al guerrero contrario, y se queda automáticamente con la señal.
- ❑ **3.2.2)** Al llegar el MEXICA de frente hechiza al guerrero contrario, y pelea por la señal; si el MEXICA gana la señal, entonces el guerrero contrario muere.
- ❑ **3.2.3)** Con un movimiento de frente el MEXICA hechiza al guerrero contrario; si es en diagonal se come al guerrero contrario. En ambos movimientos pelea el MEXICA la señal.

Observación.

Como con la regla **3.2.3)** puede suceder que la señal se quede desprotegida, se desecha ésta.

PRUEBAS.

La información de las pruebas que se hicieron con este prototipo está en la tabla 4.7.

TABLA 4.7 *Pruebas de la 2a etapa del juego TACHTLI (3er.prototipo).*

TIEMPO (MIN.) DE DURACIÓN (DEL JUEGO EN ESTA ETAPA)	JUGADOR GANADOR.
10	MEXICA.
15	MEXICA.
15	MEXICA.
35	MEXICA.
20	TRIPLE ALIANZA.

Observaciones.

Este juego a diferencia de el de las serpientes sí, se mantiene interés en los participantes al jugarlo.

Con este número de casillas el juego es un poco lento (en promedio 19: 05 min.), por lo que se reduce el número de casillas a un cuadrado de 6 x 6 (figura 4.8).

En su mayoría de los juegos jugados con este prototipo y diseño de tablero, ganó el MEXICA, sin que por ello la TRIPLE ALIANZA pierda el interés por jugar.

4° PROTOTIPO.

En esta etapa, el *objetivo* del MEXICA es obtener todas las señales con las que llegó la TRIPLE ALIANZA. El *objetivo* de la TRIPLE ALIANZA es matar a todos los guerreros mexicas, antes de un tiempo determinado.

Para tener una continuidad con la etapa anterior sería conveniente que el jugador que llegó primero o pasó primero a esta etapa le diera inicio.

La segunda etapa del juego teniendo el diseño del tablero que se muestra en la figura 4.8, se juega de la siguiente forma:

- 3.1) **Distribución de las fichas.** La distribución inicial de las fichas en el tablero se señala en la figura 4.8. Los participantes pueden elegir donde colocarlas.

- 3.2) **Colocación de las señales.** La TRIPLE ALIANZA coloca las señales con las que llegó a esta etapa de acuerdo a su criterio sobre algunos de sus guerreros de forma que estos puedan "custodiarlas".

- 3.3) **Hechizo.** Al llegar un guerrero a una casilla donde ya hay un guerrero contrario, se dice que el primero hechiza al segundo. El hechizo consiste en que el guerrero hechizado no puede moverse hasta que el guerrero que lo hechizó se mueva de esa casilla.

  - 3.3.1) El MEXICA puede mantener hechizados hasta dos guerreros simultáneamente, mientras que la TRIPLE ALIANZA en el caso de tener 8 o más guerreros hechiza solo a un guerrero MEXICA; si cuenta con 7 o menos guerreros hechiza hasta 2 guerreros MEXICAS.

❑ **3.4) Desplazamiento de las fichas.**

❑ 3.4.1) Tipos de movimientos, se pueden realizar dos tipos de movimientos:

❶ Movimiento diagonal, con este movimiento se puede hechizar.

❷ Movimiento horizontal o vertical, con este movimiento se puede comer.

Los guerreros que poseen una señal pueden realizar cualquiera de los dos movimientos anteriores.

❑ 3.4.2) Movimiento de las fichas.

❑ 3.4.2.1) Ambos jugadores (MEXICA y TRIPLE ALIANZA) se pueden desplazar de una a dos casillas.

❑ 3.4.2.2) El guerrero que posee la señal sólo puede moverse una casilla en cualquier dirección.

❑ 3.4.2.3) Dos o una ficha en una casilla impiden el paso, es decir, no se pueden efectuar saltos.

❑ **3.5) Obtención de señales.** Al caer un guerrero MEXICA sobre un guerrero contrario que custodie la señal se pueden presentar dos casos:

❶ Si el movimiento fue de hechizo se pelean la señal, esto es, se lanza el dado y si cae un número par, el MEXICA se queda con la señal y el guerrero contrario muere automáticamente.

❷ Si el movimiento fue por muerte se queda el MEXICA con la señal sin pelear con el dado.

❑ **3.6) Casillas de tributo.** Por medio de un mecanismo aleatorio se escogen casillas para que los jugadores pierdan tributos, es decir, en caso de caer en una casilla de este tipo y no tener tributos se pierde la ficha de guerrero.

Nota.

El MEXICA saca del tablero las señales que obtenga.

Los prototipos que son motivo de estudio en los siguientes capítulos son el 5° de inicio y 1er. etapa (pág.) y el 4° de la 2a. etapa (pág.), con el tablero que se muestra en las figuras 4.5 y 4.9 respectivamente. (En la figura 4.10 se tiene al tablero -completo- del juego *TACHTLI*).

Nota.

El tablero de la figura 4.8 es sustituido por el de la figura 4.9 para jugar la segunda etapa.

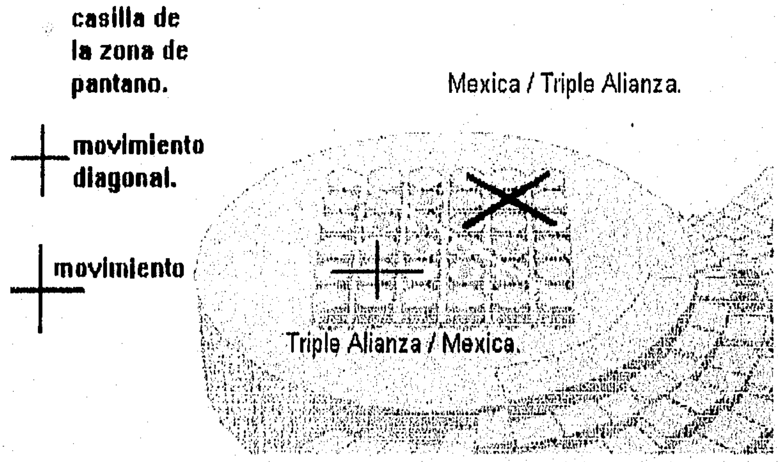


FIGURA 4.9 *Tablero de la segunda etapa.*

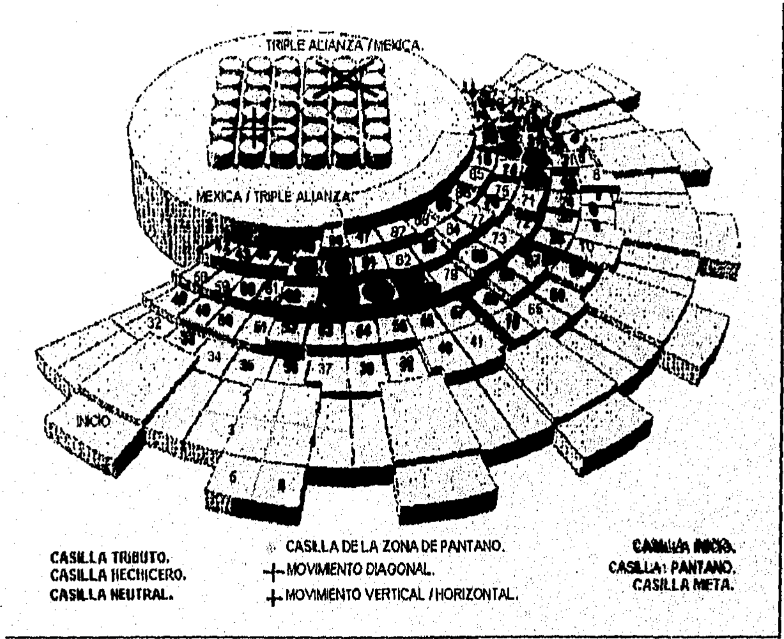


FIGURA 4.9 *Tablero del juego de mesa TACHTLI.*

CAPÍTULO 5.

MODELO MATEMÁTICO DE TÁCHIL

"Las matemáticas son como los franceses, cualquier cosa que se les diga,
la traducen a su propio idioma y como consecuencia de ello,
resulta algo totalmente distinto"

El objetivo de este capítulo es diseñar en forma simbólica al juego, de tal manera que se puedan percatar situaciones no contempladas en las reglas propuestas en el prototipo del juego, además de observar que sucede si se aplica decho prototipo. Se inicia con el planteamiento del problema para los jugadores, se continúa con la declaración y descripción de variables y constantes en forma matemática, se prosigue con la exposición de las ecuaciones que representan al juego, esto se hace con el inicio, la primer y segunda etapa.

5.1 EL INICIO DEL JUEGO TACHTLI.

5.1.1 EL TURNO DE LOS JUGADORES Y LA REPARTICIÓN DE SEÑALES.

En lo referente a la regla 1.1) que en el capítulo 4 quedó enunciada como sigue:

- ❑ **1.1)** Cada jugador tira del dado dos veces, dando inicio al juego aquel que obtenga la mayor suma en sus lanzamientos, el turno para los demás es en sentido contrario a las manecillas del reloj.

se puede decir que no presenta mayor relevancia en el juego. Sin embargo, una pregunta interesante es: ¿Qué sucedería si se presentan empates?, la respuesta a esta pregunta es muy simple, sólo aumentaría el tiempo total del juego. Cabe señalar que el turno de los jugadores no afecta al orden de llegada de éstos a las casillas meta, dado el diseño del mismo juego; debe recordarse que todos parten de los mismos inicios y todos están expuestos a los mismos "peligros", esto se va a verificar más detalladamente en secciones posteriores.

La siguiente regla del inicio es la concerniente a la distribución de las señales, en la que no hay nada que cuestionar.

- ❑ **1.2)** A cada jugador le corresponde de entrada una señal.

5.1.2 LA DISTRIBUCIÓN DE TRIBUTOS ENTRE LOS JUGADORES.

¿Cómo se llevará a cabo la distribución de los tributos entre los jugadores? La última regla del inicio es la relativa a la distribución de las fichas de tributo, que hasta este momento no está definida. En seguida se proponen y analizan alternativas a las preguntas siguientes:

- ¿Cuántos tributos esconder en cada inicio (división)?
- ¿Cuántos tributos esconder en cada compartimiento (casilla)?
- ¿Cuántos tiros del dado realizar para encontrar dichos tributos?

Observación.

Para la definición de esta regla, se tienen que tomar en cuenta varios factores como: El número de formas de distribuir los tributos en las casillas, la probabilidad de encontrar el mayor número de tributos, el número total de fichas en el juego, el tiempo total del inicio del juego en relación al número de tiros del dado a realizar, que la búsqueda de tributos no sea aburrida, el diseño industrial del tablero.

5.1.2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Estas preguntas dan origen al siguiente problema: ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un número n de tributos de un total de N tributos, escondiendo x_i tributos en la casilla i con $i = 1, 2, .., 6$, realizando para ello m lanzamientos de un dado no calado, en los que el número del dado corresponde al número de casilla en la que se hará la búsqueda de los tributos.

5.1.2.2 DESARROLLO DEL MODELO PROBABILÍSTICO.

De acuerdo con el problema y los tipos de modelos matemáticos vistos en la sección 1.3.3 del capítulo 1, es necesario desarrollar un modelo: Descriptivo, analítico, no lineal, discreto, estático, estocástico, hecho a la medida y múltiple.

Antes de desarrollar el modelo probabilístico para dar solución al problema planteado, se va a citar la frase siguiente:

> *"Dado que la teoría de probabilidades estudia modelos matemáticos de fenómenos aleatorios, no es su papel dar las reglas para construir espacios muestrales, y éstos son, de hecho, conceptos indefinidos de los que parte la teoría. La selección del espacio muestral apropiado en la descripción de un fenómeno aleatorio pertenece, por así decirlo, al arte de aplicar la teoría matemática de probabilidades al estudio del mundo real"*[1].

[1] Parzen, E. *Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones.* Ed. Limusa-Wiley, 1929, pag 27.

Se va a iniciar con la proposición conjunta de alternativas a las preguntas 1 y 2. Estas dos preguntas se pueden fusionar en una: ¿Cuántas formas diferentes existen de esconder N tributos en 6 casillas, con la restricción de que sólo se permita esconder a lo más x_j tributos en la casilla j?.

Para facilitar los cálculos, se suman $x_1 + \dots + x_6$, y se cuenta con este resultado para igualarlo con el "total de casillas".

Por ejemplo, si se esta considerando que en la casilla 1 se pueden esconder a lo más 2 tributos, mientras que en las casillas restantes sólo se permite esconder 1 tributo, y se va a esconder un total de 2 tributos, la expresión matemática que describe esto, haciendo uso de la definición de combinaciones (A.3.4), es:

$$C(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6, N) = x_T! \,/\, (x_T - N)!\, N!. \tag{5.1.1}$$

donde: x_T es el número "total de casillas" = $x_1 + \dots + x_6$.
N es el número total de tributos a distribuir en las casillas numeradas del 1 al 6.

para el ejemplo, se tendría que

$$x_T = (2)1 + 5 = 7 \text{ y } N = 2.$$

sustituyendo en (5.1.1) se tienen

$$C(7, 2) = 21 \text{ formas.}$$

De acuerdo con (5.1.1) se puede construir la tabla 5.1, como sigue:

TABLA 5.1 *Número de formas de esconder N tributos en x_T casillas.* ($C(x_T, N)$).

C(10, 2) = 45	C(9, 2) = 36	C(8, 2) = 28	C(7, 2) = 21	C(6, 2) = 15
C(10, 3) = 120	C(9, 3) = 84	C(8, 3) = 56	C(7, 3) = 35	C(6, 3) = 20
C(10, 4) = 210	C(9, 4) = 126	C(8, 4) = 70	C(7, 4) = 35	C(6, 4) = 15
C(10, 5) = 1260	C(9, 5) = 126	C(8, 5) = 56	C(7, 5) = 21	C(6, 5) = 6

Observación.

En la tabla 5.1., la combinación C(10, 5) podría significar, por ejemplo que:

- ⇨ En la casilla 1 se pueden esconder a lo más 5 tributos y en las restantes únicamente 1.
- ⇨ En las casillas 1, 2, 3 y 4 puedan esconderse un máximo de 2 tributos, mientras que en las 5 y 6 sólo 1.
- ⇨ etc.,

y en todos estos casos se distribuyen 5 tributos. Lo mismo se aplica a las combinaciones restantes.

Sin mayor análisis, se pueden descartar algunas de estas alternativas. De la tabla 5.1., se ve que las combinaciones C(10, 2), C(9, 2), C(9, 3), C(8, 2), C(8, 3), C(8, 4), C(8, 5), C(7, 2), C(7, 3), C(7, 4), C(7, 5), C(6, 2), C(6, 3), C(6, 4) y C(6, 5) proporcionan pocas formas de distribuir los tributos en comparación con las restantes, haciendo que exista muy poca variabilidad[2] en el juego, es por ello que se pueden descartar como alternativas a la regla 1.3). También se pueden eliminar las combinaciones C(10, 5) y C(9, 5), ya que al esconder 5 tributos, se está hablando de un total de 40 tributos en el juego (si se considera un máximo de 8 jugadores), además de que con la combinación C(9, 4) se obtiene el mismo número de formas de distribuir los tributos que con la combinación C(9, 5). Las combinaciones C(10, 3) y C(9, 4), parecen interesantes, sin embargo, con la segunda aumentaría el total de tributos de 24 a 32 y si se considera que faltan las fichas de guerrero y de señales, y no olvidando el diseño del tablero (con la segunda combinación se perdería simetría), entonces se puede descartar la segunda posibilidad. Por tanto, se piensa que el número idóneo de tributos a esconder por jugador es 3.

También se tiene que considerar el número de tiros del dado para encontrar los tributos, debe tenerse presente que a mayor número de tiros para localizarlos, el tiempo de duración del inicio es mayor y por consiguiente mayor es el tiempo total de duración del juego.

[2] Con el término variabilidad en el juego se deberá entender que un "juego" x es diferente a otro "juego" y -ver la nota de pie de página No. 3 del capítulo 3 en la sección 3.3.1.1.-

Se proponen las alternativas siguientes (tomando en cuenta también el diseño del tablero):

❶ Esconder 3 tributos, uno máximo por compartimiento, y encontrarlos en 3 tiros.
❷ Esconder 3 tributos, de manera que en 4 compartimientos se puedan esconder hasta 2 y en los 2 restantes nada más se permita esconder 1 tributo[3].

Entonces, ¿cuál de las dos alternativas es la que permite contar con el mayor número posible de tributos iniciales para cada jugador? Una información importante para dar respuesta a esta pregunta es conocer:

❶ ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 0 tributos?
❷ ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 1 tributo?
❸ ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 2 tributos?
❹ ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 3 tributos?

Para dar solución a estas preguntas, se observa que los tiros del dado y la distribución de los tributos en las casillas son dos eventos independientes, por tanto primero se va a analizar más detenidamente los tiros del dado, después la distribución de los tributos en la casillas con cada una de las alternativas, para finalmente conjuntar ambos eventos en las dos proposiciones.

DISTRIBUCIÓN DE 3 TIROS DE UN DADO NO CALADO CON 6 CARAS.

Sea el siguiente experimento: se lanza un dado no calado de seis caras numeradas del 1 al 6, 3 veces,

- ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 tiros iguales?,
- ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 números iguales en los 3 tiros? y
- ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 lanzamientos diferentes?

En este experimento a los elementos del espacio muestral se representan por medio de una muestra ordenada de tamaño 3 de la forma (Z_1, Z_2, Z_3), donde Z_j corresponde al número del dado obtenido en el j-ésimo lanzamiento, con $j = 1, 2, 3$.

[3] Apesar de que la combinación C(6, 3) se descartó por proporcionar poca variabilidad en el juego, se va a tomar como referencia de comparación para la segunda alternativa.

Por tratarse de muestras ordenadas con reemplazo (de la tabla A.1) se tiene un tamaño del espacio muestral de $6^3 = 216$, ahora bien, se busca la probabilidad de obtener muestras ordenadas de tamaño 3 (Z_1, Z_2, Z_3), de estos tipos:

(Z_1, Z_2, Z_3), donde $Z_1 <> Z_2 <> Z_3$,
(Z_1, Z_2, Z_3), donde $Z_1 = Z_2 \neq Z_3$ o $Z_1 \neq Z_2 = Z_3$ o $Z_1 = Z_3 \neq Z_2$,
(Z_1, Z_2, Z_3), donde $Z_1 = Z_2 = Z_3$.

A continuación se analiza el caso particular de obtener 3 "unos" en los 3 lanzamientos. Aplicando la definición de la distribución binomial (ver probabilidad binomial en la sección A.5.2 del anexo A), se tiene:

$$P_K(\mathrm{k}) = \begin{cases} C(n, k)(m / M)^k (1 - (m / M))^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad (5.1.2)$$

para este caso,

k: 0, 1, 2, 3.

Particularmente

$k = 3$,

y representa el número de unos a obtener en n tiros, donde

$n = 3$.

$M = 6$ representa a las 6 caras del dado numeradas del 1 al 6.
$m = 1$ ya que una y sólo una cara del dado corresponde al número 1.

sustituyendo estos valores en la fórmula (5.1.2), se obtiene

$$\begin{aligned} P\text{(de obtener 3 unos en tres lanzamientos)} &= C(3, 3)(1/6)^3 (1 - 1/6)^{3-3} \\ &= 1/216 \\ &= 0.004. \end{aligned}$$

Ahora bien, como son 6 los números de un dado, al resultado anterior basta con multiplicarlo por 6, para obtener la probabilidad de obtener 3 números iguales en 3 lanzamientos.

$$P\text{ (de obtener 3 números iguales en tres lanzamientos)} = 6\,(1/216) = 6/216. = 0.028.$$

De igual forma se procede a calcular la probabilidad de obtener 2 lanzamientos iguales.

$$P\text{ (de obtener 2 números iguales en tres lanzamientos)} = (6)\,C(3, 2)\,(1/6)^2\,(1 - 1/6)^{3-2} = (6)\,(15/216) = 90/216. = 0.417.$$

Para obtener la probabilidad de tener 3 tiros diferentes, haciendo una analogía con un problema de muestreo en urnas, se tiene una nuestra de tamaño 3 (tiros del dado) extraída con reemplazo de una uma que contiene 6 bolas numeradas del 1 al 6 (caras del dado). Sea p la probabilidad de que no haya repeticiones en la muestra (3 números diferentes). El número de formas en las que no hay números repetidos es (de muestras ordenadas sin reemplazo) $N^{(n)}$ donde $N = 6$ y $n = 3$, y dado que el tamaño del espacio muestral para este experimento es 6^3, la probabilidad pedida es

$$P\text{ (de obtener 3 números diferentes en tres lanzamientos)} = 6^{(3)} / 6^3 = 120/216 = 0.556.$$

En seguida se va a ver una nota muy importante, por lo que se va a numerar, para más tarde hacer referencia de ella.

Nota 5.1

El número de muestras de tamaño 3 (Z_1, Z_2, Z_3) donde $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3$ que pueden formarse de un conjunto $\boldsymbol{Z} = \{Z_1, Z_2, Z_3\}$es, (de muestras ordenadas sin reemplazo donde $N = n = 3$) es

$$C(3,1)\,C(2,1)\,C(1,1) = 3! = 6.$$

Ahora bien, para $Z_1 = Z_2 = Z_3$, existe una única muestra de tamaño 3 que lo representa.

Por otra parte, el número de muestras de tamaño 3 (Z_1, Z_2, Z_3) que se pueden obtener del conjunto $\boldsymbol{Z} = \{Z_1, Z_2, Z_3 \mid Z_1 = Z_2 \neq Z_3 \text{ o } Z_1 = Z_3 \neq Z_2 \text{ o } Z_2 = Z_3 \neq Z_1\}$es 3 dado que este experimento se puede representar por medio del concepto de combinaciones de N en n, donde $N = 3$ componentes de la muestra de tamaño 3 y $n = 1$ correspondiente a la componente diferente de las dos restantes, entonces se tiene

$$C(3,1) = 3.$$

ANÁLISIS DE LA PRIMER ALTERNATIVA.

Se va a continuar con el análisis de la primer alternativa que consiste en esconder 3 tributos en 6 casilla numeradas del 1 al 6, en las que sólo se permita esconder no más de 1 tributo por casilla.

Observación.

> Para esta alternativa el espacio muestral queda descrito como en la sección anterior y por tanto el tamaño del espacio muestral es igual a 216.

Se ilustra este experimento con un ejemplo, supóngase que se encuentran localizados 3 tributos en las casillas 1, 2 y 3.

Sea A el evento de encontrar 0 tributos dadas las condiciones anteriores. ¿Cuál es la probabilidad del evento A?

Solución.

Para conseguir encontrar cero tributos, los números del dado obtenidos en los lanzamientos deberán ser cualesquiera del conjunto $\boldsymbol{Z} = \{4, 5, 6\}$. Para facilidad en el análisis, se consideran por separado a los tres posibles tipos de muestras de tamaño 3 (Z_1, Z_2, Z_3) en donde cada una de sus componentes corresponde a un número del conjunto $\boldsymbol{Z}$.

En este ejemplo los tipos de muestras de tamaño 3, posibles son:

$$(4, 5, 6) \text{ ó } (4, 4, 5) \text{ ó } (4, 4, 4)$$

Téngase presente la nota 5.1.

El número de formas de obtener muestras de tamaño 3, con 2 números iguales es

$$(3)\,C(2, 1)\,(3) = (3)\,(2)\,(3) = 18.$$

La expresión anterior viene de multiplicar 3 posibles pares, dado que $|\boldsymbol{Z}| = 3$ por la combinación de los 2 números restantes en un lugar para a completar los 3 tiros, todo esto multiplicado por 3 de la nota 5.1.

De la nota 5.1, el número de maneras de obtener 3 números iguales es 1. Pero no debe olvidarse que se esta analizando el conjunto {4, 5, 6}, por lo que este 1 se debe multiplicar por 3.

Sumando los resultados obtenidos se tiene que son:

$$6 + 18 + 3 = 27,$$

las formas de encontrar cero tributos.

$$\begin{aligned} P(A) &= 27/216 \\ &= 0.125. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Observación.

En este evento se obtuvieron

- ⇨ 6 muestras de tamaño 3 con 3 tiros diferentes,
- ⇨ 18 con 2 tiros iguales y
- ⇨ 3 con 3 tiros iguales.

Sea ***B*** el evento de encontrar 1 tributo. Se procede a calcular la probabilidad del evento ***B*** de una forma similar a la anterior, si los tributos se localizan en las casillas {1, 2, 3}, sólo un número del dado deberá corresponder a este conjunto para encontrar un tributo.

Se estudian las siguientes muestras de tamaño 3 que representan a los tiros del dado.

$$(1, 1, 1), (1, 1, 4), (1, 4, 5), (1, 4, 4)$$

La primera sólo se puede obtener de una manera.

A la segunda al igual que a la cuarta, de

$$(3)\, C(3, 1) = 9$$

formas.

Lo anterior es resultado de multiplicar 3 de la nota 5.1 por la combinación de 3 en 1 (ya que si se obtienen dos unos en dos lanzamientos, sólo puede ser posible obtener el número restante de un conjunto $Z = \{4, 5, 6\}$, donde $|Z| = 3$).

A la tercera se le puede obtener de

$$(6)\,C(3, 2) = (6)\,(3) \\ = 18$$

formas.

Esto es, 6 de la nota 5.1 multiplicado por la combinación de 3 en 2 ya que del conjunto posible a obtener los dos lanzamientos faltantes es $\{4, 5, 6\}$.

Como son 3 los números para los cuales se tendría que hacer el mismo análisis ($\{1, 2, 3\}$), para calcular la probabilidad pedida se realiza la siguiente expresión:

$$(3)\,[1 + 9 + 18 + 9] = (3)\,(37) \\ = 111.$$

$$P(\boldsymbol{B}) = 111 / 216 \\ = 0.5138888. \tag{5.1.4}$$

Observación.

En este evento se obtuvieron:

- ⇨ 54 muestras de tamaño 3 con 3 tiros diferentes,
- ⇨ 54 con 2 tiros iguales y
- ⇨ 3 con 3 tiros iguales.

Sea $\boldsymbol{C}$ el evento de obtener 2 tributos. Los posibles lanzamientos de los dados para que se realice el evento $\boldsymbol{C}$ son:

$$(1, 2, 4) \text{ y } (1, 1, 2)$$

La primera se obtiene de

$$(6)\,C(3, 2)\,C(3, 1) = (6)\,(3)\,(3) \\ = 54$$

formas.

Véase de donde se obtiene esta expresión. Multiplicando 6 (de la nota 5.1) por la combinación de 3 en 2, ya que se tiene el conjunto {1, 2, 3} del que se tienen que encontrar 2 elementos, y como son 3 los tiros a realizar, se tiene que del conjunto {4, 5, 6} se sacará un elemento, por ésto, el resultado anterior se multiplica por la combinación de 3 en 1.

La segunda se obtiene de

$$(3)\, C(2, 1)\, (3) = 18$$

diferentes opciones.

Estas 18 formas son el resultado de multiplicar 3 (de la nota 5.1) por la combinación de 2 en 1, ya que se tienen 2 tiros realizados, en los que se encontró un tributo con el número del dado igual a 1, entonces sólo falta realizar un tiro y encontrar un segundo tributo, por lo tanto, el conjunto de números con los que se resuelve ésto es {2, 3}.

De lo anterior se desprende que son un total de 72 las posibles combinaciones de los tiros del dado para encontrar dos tributos. Así pues,

$$\begin{aligned} P(C) &= 72 / 216 \\ &= 0.33333. \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Observación.

En el evento ***C*** se tienen:

- ⇨ 54 muestras de tamaño 3, con 3 tiros diferentes,
- ⇨ 18 con 2 tiros iguales y
- ⇨ 0 con 3 tiros iguales.

El último evento al que se hará referencia en este experimento es: Sea ***D*** el evento de encontrar 3 tributos, ¿cuál es su probabilidad?

El análisis de este evento es realmente muy simple, la única manera de encontrar los 3 tributos en tres lanzamientos del dado es obteniendo un conjunto de números igual a {1, 2, 3}. De la nota 5.1 se sabe que esta opción se puede presentar en 6 formas distintas en cuanto al orden de aparición de sus componentes. Por tanto,

$$P(\mathbf{D}) = 6 / 216 = 0.0277777. \tag{5.1.6}$$

Observación.

En el evento D se tienen:

⇨ 6 muestras de tamaño 3 con 3 tiros diferentes,
⇨ 0 con 2 tiros iguales y
⇨ 0 con 3 tiros iguales.

Finalmente, se puede verificar que la suma de las probabilidades de los 4 eventos sea igual con 1, dado que se trata de eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

$$\begin{aligned} P(A)+P(B)+P(C)+P(D) &= (27/216)+(111/216)+(72/216)+(6/216) \\ &= 216/216 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

ANÁLISIS DE LA SEGUNDA ALTERNATIVA.

A continuación se va a estudiar la segunda alternativa.

Se tienen 6 casillas, numeradas del 1 al 6, en las primeras cuatro (1, 2, 3 y 4) se pueden esconder como máximo 2 tributos, mientras que en las 2 casillas restantes se permite esconder a lo más un tributo por casilla, de manera que haya un total de 3 tributos escondidos en forma aleatoria. El experimento consiste en lanzar un dado no calado 3 veces y de acuerdo con los números obtenidos en estos lanzamientos es como se encuentran los tributos, es decir, el número del dado corresponde a la casilla donde se verifica si hay o no tributos escondidos, si los hay, entonces, el jugador habrá obtenido tantos tributos como número de tributos se encuentren escondidos en esa casilla, y así en los 2 tiros restantes.

Observación.

Si al corresponder un número del dado con una casilla donde haya 2 tributos escondidos, se obtienen los 2 tributos, es decir, no es necesario realizar 2 lanzamientos iguales para obtener los 2 tributos.

Lo primero que se va a hacer, es definir el espacio muestral.

Sea $S = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6\}$.

Donde las tres primeras componentes corresponden al número de casillas donde se encuentran escondidos los tributos y las siguientes 3 componentes corresponden al número del dado obtenido en el primer tiro, en el segundo y en el tercero respectivamente.

Observación.

Las tres primeras componentes pueden considerarse como un conjunto $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ por tratarse de muestras desordenadas sin reemplazo (distribución de tributos en casillas), mientras las tres componentes restantes se pueden representar por medio de 3-adas de la forma (Z_4, Z_5, Z_6) ya que simbolizan muestras ordenadas con reemplazo (tiros del dado).

Lo segundo con lo que se sigue es con calcular el tamaño del espacio muestral.

Son 6 compartimientos pero 4 de ellos se comportan como si fuesen 2, entonces se puede considerar que son 10 casillas en las que se pueden esconder un total de 3 tributos, por consiguiente se tiene la siguiente expresión que representa a lo anterior:

$$C(10, 3).$$

Por otro lado, se sabe que son 6 los posibles números a obtener en un lanzamiento del dado y como son 3 los tiros a realizar, además de que dadas las condiciones del problema no importa el orden de los tiros para obtener los tributos escondidos, se tienen

$$6^3$$

formas posibles de realizar los tiros.

No se olvide, que la distribución de los tributos en las casillas y los lanzamientos de los dados son dos eventos independientes.

Por tanto, el tamaño del espacio muestral del problema es:

$$C(10, 3)\, 6^3 = 120\,(216) = 25\,920. \tag{5.1.8}$$

En un caso más general, se tiene que el tamaño del espacio muestral para esconder N número de tributos en c casillas, realizando m número de lanzamientos de un dado de 6 caras para localizarlos es:

$$C(c, N)\, 6^{n}.$$

DISTRIBUCIÓN DE LOS TRIBUTOS.

Para desarrollar el modelo simbólico que represente la distribución de los tributos, se va a aplicar el patrón 2 para la elaboración de modelos matemáticos (sección 1.3.4 del capítulo 1 -considerando que únicamente interesa calcular las probabilidades de un problema muy específico y no de resolver un problema de una organización-), por tratarse de un problema no tan claro a simple vista, se va a hacer primero un modelo real apoyado en una similitud con cartas de barajas y posteriormente se describirá el modelo simbólico. Cabe señalar que para calcular las probabilidades anteriores no fue necesario hacer un modelo real dada la simplicidad del problema, por lo que se aplicó el patrón 1.

Se tienen:

- ⇨ 2 opciones en la casilla No. 1,
- ⇨ 2 opciones en la casilla No. 2,
- ⇨ 2 opciones en la casilla No. 3,
- ⇨ 2 opciones en la casilla No. 4,
- ⇨ 1 opción en la casilla No. 5 y
- ⇨ 1 opción en la casilla No. 6.

Si se hace una similitud con unas cartas de baraja, se tendrían 10 cartas, con 3 palos -diamantes, corazones y tréboles- numerados del 1 al 4, del 1 al 4 y del 5 al 6 respectivamente.

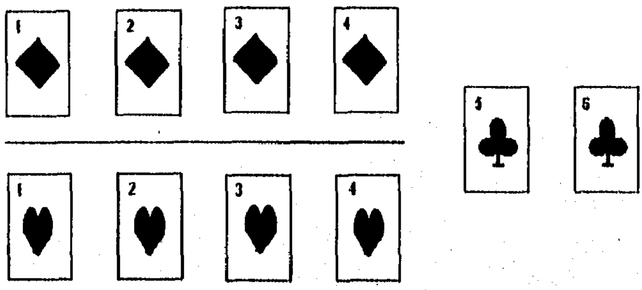


FIGURA 5.1 *Similitud de la distribución de tributos con cartas de baraja.*

Surgen las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas manos de 3 cartas hay, que tengan exactamente un par, es decir, que tengan 2 cartas y solamente 2 de un mismo número, considerando únicamente a los palos de corazones y diamantes?

Esta pregunta es equivalente a la siguiente:

- ¿De cuántas maneras se pueden esconder 3 tributos, si 2 de ellos se escondieron en la misma casilla y el tributo restante se sitúa en una casilla donde está permitido esconder a lo más 2 tributos?

Solución.

Se tiene un total de 8 cartas, considérense 4 números y nótese que son 2 palos. Entonces,

$$4\ C(2, 2)\ C(6, 1) = (4)\ (1)\ (6) = 24 \tag{5.1.9}$$

formas.

Otra pregunta es la siguiente:

⇨ ¿Cuántas manos de 3 cartas hay, que tengan exactamente un par considerando los 3 palos y que además, no aparezca una carta más de una vez del mismo palo, es decir, que cada mano esté formada por una carta de cada palo?

Esta pregunta se puede expresar como sigue:

⇨ ¿De cuántas maneras se pueden esconder 3 tributos si dos de ellos se localizan en la misma casilla y el otro se encuentra en una casilla donde a lo más se puede esconder un tributo?

Solución.

Se pueden formar 4 pares y como se tienen 2 cartas del palo restante, entonces, la solución es:

$$4\,C(2,2)\,C(2,1) = (4)(1)(2) = 8 \tag{5.1.10}$$

formas.

Nota.

El 2 indica el número de pares por cada número del 1 al 4.

Una pregunta que resume a las dos anteriores es,

⇨ ¿cuántas manos de 3 cartas hay que tengan exactamente un par considerando los 3 palos?

En otra forma,

⇨ ¿de cuántas maneras se pueden esconder 3 tributos de forma que 2 de ellos se encuentren en la misma casilla?

Solución.

De (5.1.9) y (5.1.10), la respuesta es:

$$8 + 24 = 32. \tag{5.1.11}$$

Otra pregunta es,

- ¿cuántas manos de 3 cartas hay que tengan 3 números diferentes considerando únicamente los palos de corazones y diamantes?

Esto es,

- ¿de cuántas formas se pueden esconder 3 tributos de tal manera que los 3 se encuentren distribuidos en 3 casillas distintas y que éstas tengan la característica de que se permita esconder a lo más 2 tributos en ellas?.

$$\frac{8}{3}\ \frac{6^{(1)}}{2}\ \frac{4^{(1)}}{1} = \frac{(8)(6)(4)}{3!} = 32,$$

número de elementos de la mano.

De otra forma, considérese primero que se tiene un palo con 4 cartas numeradas del 1 al 4, la pregunta sería: ¿Cuántas combinaciones de 3 números distintos se pueden formar?

$$C(4, 3) = 4,$$

ahora, si se sabe que cada número puede ocurrir 2 veces ya que se tienen 2 palos, entonces,

$$(4)(2)(2)(2) = 4(8) = 32, \tag{5.1.12}$$

ésto es, 2 veces el primer número, multiplicado por 2 veces el segundo y esto por 2 veces el tercer número.

Véase la siguiente pregunta:

- ¿Cuántas manos de 3 cartas hay que tengan 1 carta de cada palo -corazones, diamantes y tréboles- y ninguna sea igual?

Lo anterior se puede cuestionar así:

⇒ ¿De cuántas formas se pueden esconder 3 tributos, de manera que 2 de ellos se encuentren en 2 casillas distintas, en las que se puedan esconder a lo más 2 tributos y el tributo restante se localice en una casilla donde sólo se permita esconder uno?

Solución.

Primero se consideran las formas en las que se obtienen 2 cartas con números diferentes de los palos de corazones y diamantes y estas son:

$$\frac{(8)\,6^{(1)}}{2!} = 24.$$

Como se sabe que el palo de tréboles tiene 2 cartas y se necesita completar la mano anterior con una carta de este palo, para obtener finalmente una mano de 3 cartas se tiene:

$$C(2, 1) = 2.$$

Por lo que la respuesta a esta pregunta es:

$$\frac{(8)\,6^{(1)}}{2!}\,C(2, 1) = 24\,(2) = 48.$$

Otra manera de contestar es pregunta es la siguiente:

Sabiendo que se tienen $C(6, 2) = 6$ formas de obtener 2 números diferentes del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, y si también se incluye que cada número se puede obtener de 2 maneras diferentes -corazones y diamantes- se tiene $(6)\,(2)\,(2) = 24$ y si a este resultado se le multiplica por una tercer carta que se puede obtener con 2 números (5 y 6 de trébol); se obtiene la solución que es:

$$(6)\,(2)\,(2)\,C(2, 1) = (6)\,(2)\,(2)\,(2) = 48. \tag{5.1.13}$$

En seguida se va analizar la siguiente pregunta:

- ¿Cuántas manos de 3 cartas se pueden obtener, que tengan una carta de los palos de corazones o de diamantes y 2 sean del palo de los tréboles?

O bien,

- ¿de cuántas formas se pueden esconder 3 tributos si 2 de éstos se encuentran en las casillas numeradas del 1 al 4 y el otro se localiza en cualquiera de las casillas 5 o 6?

Solución.

Como las únicas formas de obtener 2 cartas del palo de tréboles es sacando el 5 y el 6, para contestar a esta pregunta sólo resta saber de cuántas formas se puede escoger la carta restante.

$$C(2, 2)\,C(8, 1) = 8. \tag{5.1.14}$$

Surge ahora la pregunta,

- ¿cuántas manos de 3 cartas se pueden obtener tales que, tengan 3 número diferentes?,

es decir,

- ¿de cuántas maneras se pueden esconder 3 tributos en 3 casillas diferentes?

Solución.

Para responder esta pregunta, basta con sumar los resultados (5.1.12), (5.1.13) y (5.1.14) para obtener la respuesta:

$$32 + 48 + 8 = 88. \tag{5.1.15}$$

Finalmente y para concluir con este análisis se cuestiona una pregunta a la que ya se había dado solución y es la siguiente:

⇒ ¿De cuántas formas se pueden esconder 3 tributos en 6 casillas numeradas del 1 al 6?, con las restricciones siguientes: Esconder a lo más 2 tributos en las primeras 4 casillas y no más de 1 en las dos restantes.

Solución.

De (5.1.11) y (5.1.15) se tiene:

$$32 + 88 = 120. \tag{5.1.16}$$

Nota.

Se tiene un espacio muestral de 120 eventos elementales. Si se toma a cada pregunta como un evento, y se quisiera saber su probabilidad de ocurrencia, bastaría con dividir su resultado entre 120.

A continuación se va a analizar que sucede si *dos tributos se localizan en la casilla No. 1 y el tercero en la casilla 2.*

Se debe tener presente la nota 5.1 de acuerdo con la cual, sólo existe una forma de obtener 3 tiros iguales en tres lanzamientos del dado, 3 de obtener dos tiros iguales y 6 de obtener 3 tiros diferentes.

Sea A el evento de encontrar cero tributos, ¿cuál es su probabilidad?

Para encontrar cero tributos, los tiros del dado deberán corresponder con los números 3, 4, 5, 6. Unas posibles opciones en los tiros para que el evento se realice son -en forma de 3-adas-

$$(3, 3, 3), (3, 3, 4), \{3, 4, 5\}$$

Analizando la segunda muestra. Como ya se tienen dos lanzamientos, en los que el dado cayó con el número 3, sólo se puede obtener un 4, un 5 ó un 6 en el siguiente lanzamiento. Esto se describe con una combinación de 3 en 1.

No se debe olvidar que este análisis se aplica con cada uno de los elementos del conjunto {3, 4, 5, 6}.

La tercer muestra, representa el hecho de que los tres números obtenidos en los tiros del dado corresponden a los números 3, 4, 5 ó 6 sin importar el orden de aparición. Esto se denota con una combinación de 4 en 3.

De las aclaraciones anteriores, se tiene que el número de formas posibles de no conseguir tributos es:

$$
\begin{aligned}
(4)[(1)(1)+3C(3,1)] + (6)C(4,3) &= (4)[(1)(1)+3(3)] + (4)(6) \\
&= 4\,(10) + 24 \\
&= 64.
\end{aligned}
\tag{5.1.17}
$$

En esta expresión, el primer 4 corresponde al número de elementos del conjunto $E = \{3, 4, 5, 6\}$.

Observación.

En este evento se tienen:

- ⇨ 24 opciones de 3 tiros con 3 números diferentes,
- ⇨ 36 con 2 tiros iguales, y
- ⇨ 4 con 3 lanzamientos iguales.

Sea ***B*** el evento de encontrar 1 tributo. Unos de los posibles arreglos de los tiros del dado que pertenecen a este evento, son:

(2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 4) y (2, 3 ,3).

De la primer muestra se dice que es la única forma de obtener 1 tributo con 3 números iguales en los tiros, ya que si se obtuvieran 3 unos, se encontrarían 2 tributos.

En el caso de la segunda muestra se tiene un conjunto formado por los números 3, 4, 5 y 6, del que se sacará una muestra de tamaño 1 sin reemplazo, ¿cuántas muestras diferentes se pueden extraer? la expresión que representa ésto es

$$C(4, 1) = 4.$$

Lo mismo sucede para la cuarta muestra si se considera que el número obtenido en el segundo lanzamiento deberá ser igual al tercero.

Para la tercer muestra se tiene un conjunto $E = \{3, 4, 5, 6\}$con $|E| = 4$, del que se extraerá una muestra de tamaño 2, la pregunta es ¿cuántas muestras diferentes se pueden obtener en este experimento?, la expresión que describe lo anterior es

$$C(4, 2) = 6.$$

Hechas las aclaraciones anteriores, se puede seguir con la expresión matemática que proporciona la probabilidad del evento ***B***.

$$P(B) = [(1) + (3)(4) + (6)(6) + (3)(4)] / 216 = 61 / 216. \tag{5.1.18}$$

Sea ***C*** el evento de encontrar 2 tributos. Este evento es casi igual al anterior en cuanto a los arreglos posibles en los tiros, es suficiente con hacer un cambio del número 2 por el 1 y se tendrían las 3-adas siguientes:

(1, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 3, 4) y (1, 3, 3),

por tanto la probabilidad del evento ***C*** es:

$$P(C) = [(1) + (3)(4) + (6)(6) + (3)(4)] / 216 = 61 / 216. \tag{5.1.19}$$

Sea ***D*** el evento de encontrar 3 tributos. Para este evento se tienen dos 3-adas que lo modelan:

(1, 1, 2) y (1, 2, 3).

La observación que se puede hacer con respecto a la primera es que en dos tiros deberán salir los números 1 y 2 y que en el tercer tiro existe la posibilidad de obtener un 1 ó un 2 que conlleva a la combinación de 2 en 1.

En lo referente a la segunda muestra se dice que se tiene un conjunto $E = \{3, 4, 5, 6\}$ formado por los posibles números a obtener en el tercer tiro dado que ya se obtuvieron los números 1 y 2 en los tiros anteriores. Esto es, se tiene una combinación de 4 en 1.

Entonces, la probabilidad del evento ***D*** es

$$P(D) = [(3)\,C(2, 1) + (6)\,C(4, 1)] / 216 = 30. \tag{5.1.20}$$

Para finalizar este experimento se verifica que efectivamente la suma de las probabilidades de los eventos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ den como resultado 1, por tratarse de eventos mutuamente exclusivos y colectivamente excluyentes.

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 64 / 216 + 61 / 216 + 61 / 216 + 30 / 216 = 216 / 216 = 1.$$

Hechos todos los cálculos anteriores se puede, sin ningún problema calcular las probabilidades planteadas inicialmente.

Nótese que este espacio muestral se puede seccionar más precisamente en dos eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, respecto al evento de encontrar n número de tributos.

Sea $\boldsymbol{E}$ el evento de esconder 3 tributos cada uno en casillas diferentes y encontrar n número de tributos.

Sea $\boldsymbol{F}$ el evento de esconder 3 tributos, 2 de ellos en la misma casilla y encontrar n número de tributos.

Ahora sí, se calculan las probabilidades de los siguientes eventos:
Sea $\boldsymbol{A}$ el evento de encontrar 0 tributos.

$P(\boldsymbol{A}) = P$(de esconder 3 tributos, los 3 en diferentes casillas y encontrar 0 tributos) + P(de esconder 3 tributos, 2 de los cuales se localicen en la misma casilla y encontrar 0 tributos).

Obsérvese que ambos sumandos se pueden descomponer en probabilidades de eventos más simples, para el primer sumando se tiene:

Sea $\boldsymbol{G}$ el evento de esconder 3 tributos en casillas diferentes, cuya probabilidad es 88 / 120 de (5.1.15).
Sea $\boldsymbol{H}$ el evento de encontrar cero tributos dado que se sólo está permitido esconder a lo más 1 tributo por casilla. La probabilidad de este evento es 27 / 216 de (5.1.3).

Para el segundo sumando se tiene:

Sea $\boldsymbol{I}$ el evento de esconder 3 tributos, 2 de ellos en la misma casilla, cuya probabilidad de (5.1.11) es 32 / 120. Sea $\boldsymbol{J}$ el evento de encontrar cero tributos, dado que sólo está permitido esconder a lo más 1 tributo en las dos casillas correspondientes a los números 5 y 6, y en las 4 restantes a lo más se pueden esconder 2 tributos por casilla. La probabilidad de este evento de (5.1.17) es 64 / 216.

Así pues, se tiene que la

$$P(A) = (88 / 120)\,(27 / 216) + (32 / 120)\,(64 / 216)$$
$$= 4424 / 25\,920$$
$$= 0.170\,679\,012.$$

Sea $\boldsymbol{B}$ el evento de encontrar 1 tributo.

De forma análoga al evento anterior, haciendo por supuesto la variación correspondiente al número de tributos a encontrar se tiene:

$$P(\boldsymbol{B}) = (88 / 120)\,(111 / 216) + (32 / 120)\,(61 / 216)$$
$$= 11\,720 / 25\,920$$
$$= 0.45\,216\,093.$$

Sea C el evento de encontrar 2 tributos.

$$P(C) = (88 / 120)\,(72 / 216) + (32 / 120)\,(61 / 216)$$
$$= 8\,288 / 25\,920$$
$$= 0.319\,753\,086.$$

Sea $\boldsymbol{D}$ el evento de encontrar 3 tributos.

$$P(\boldsymbol{D}) = (88 / 120)\,(6 / 216) + (32 / 120)\,(30 / 216)$$
$$= 1\,488 / 25\,920$$
$$= 0.057\,407\,407.$$

Verifíquese que la suma de las probabilidades de los eventos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ sea igual con 1. Ya que $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{U}$.

$$P(A) + P(\boldsymbol{B}) + P(C) + P(\boldsymbol{D}) = \frac{4\,424}{25\,920} + \frac{11\,720}{25\,920} + \frac{8\,288}{25\,920} + \frac{1\,488}{25\,920} = 1. \qquad (5.1.21)$$

5.1.3 SIMULACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE TRIBUTOS.

Para simular la distribución de los tributos de cualquiera de las dos alternativas propuestas para esta regla del juego, debe notarse que se trata de la simulación de distribuciones empíricas discretas y por consiguiente, basta asociar valores aleatorios enteros con las posibles variables, de modo que los números aleatorios asignados a cada variable sean proporcionales a la probabilidad de ocurrencia.

Así pues, para simular la primer alternativa, que consiste en esconder 3 tributos de manera que únicamente se permita esconder un tributo por casilla y la forma de localizarlos sea lanzando un dado 3 veces, de manera que sus tiros determinen los número de casillas donde se verifique si se encuentra un tributo o no; bastará con generar un número aleatorio *rr* entre 0 y 1, y obtener la variable aleatoria de acuerdo al siguiente algoritmo (recuérdese que las probabilidades de encontrar 0, 1, 2 y 3 tributos con este experimento aleatorio se resumieron en la ecuación (5.1.7)):

Si $0.00000 \le rr \le 0.12500$ entonces $x = 0$

$0.12500 < rr \le 0.63888$ $x = 1$

$0.63888 < rr \le 0.97221$ $x = 2$

$0.97221 < rr \le 1.00000$ $x = 3$

donde x: es el número de tributos encontrados.

Estos límites para la variable *rr* se obtienen de la tabla 5.2.

TABLA 5.2 *Frecuencias de tributos encontrados con la primer alternativa.*

Tributos Encontrados	Frec. Rel.(probabilidad)	Frec. Acum. Rel.
0	0.12500	0.12500
1	0.51388	0.63888
2	0.33333	0.97221
3	0.02777	0.99998

TABLA 5.3 *Frecuencias de tributos encontrados con la segunda alternativa.*

Tributos Encontrados	Frec. Rel.(probabilidad)	Frec. Acum. Rel.
0	0.1706790	0.1706790
1	0.4521604	0.6228394
2	0.3197530	0.9425924
3	0.0574074	0.9999998

De igual forma para la segunda alternativa, de la ecuación (5.1.21) y de la tabla 5.3 se tiene el siguiente algoritmo para su simulación:

$$\text{Si} \quad \begin{array}{lll} 0.00000 \le rr \le 0.17068 & \text{entonces} & x = 0 \\ 0.17068 < rr \le 0.62284 & & x = 1 \\ 0.62284 < rr \le 0.94259 & & x = 2 \\ 0.94259 < rr \le 1.00000 & & x = 3 \end{array} \tag{5.1.22}$$

FIGURA 5.2 *Simulación de tributos encontrados con la primer opción.*

FIGURA 5.3 *Simulación de tributos encontrados con la segunda opción.*

5.1.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS.

De los resultados obtenidos se concluye que:

- ⇨ La probabilidad de obtener 0 tributos con la primer alternativa es menor que con la segunda con una diferencia de 0.045679.
- ⇨ La probabilidad de encontrar 1 tributo en la primer alternativa es mayor que en la segunda con 0.0617279 de diferencia.
- ⇨ La probabilidad de localizar 2 tributos dadas las condiciones de la primer alternativa es mayor que con la segunda con una diferencia de 1,35803 por ciento.
- ⇨ La probabilidad de localizar 3 tributos es menor con la primera opción que con la segunda con una diferencia del 2.96297 por ciento.

Se observa que estas probabilidades varían muy poco de una alternativa a otra, entonces para poder tomar la decisión de cual es la alternativa más adecuada para el juego, se debe tomar en cuenta que lo que se quiere con esta regla, es que se obtenga el mayor número de tributos posibles y que la probabilidad de iniciar el juego con cero tributos sea casi nula, además de que el juego tenga una gran variedad de formas para jugarse. Se recomienda la primer alternativa en cuanto que es menos probable iniciar con cero tributos, pero en cuanto al número de formas de distribuir los tributos se recomienda la segunda.

Observación.

El número de formas de distribuir los tributos en las casillas es mayor con la segunda opción, sin embargo, esto no hace mayor el número de formas con las que se da inicio al juego, es decir, independientemente de las formas de distribución de tributos, sólo se tienen 4 posibilidades por jugador, estas son, iniciar el juego con:

- ⇨ 0 tributos,
- ⇨ 1 tributo,
- ⇨ 2 tributos o
- ⇨ 3 tributos.

Entonces el número posible de formas de iniciar el juego en cuanto al número de tributos por jugador es:

⇨ 4^8 = 65 536, si juegan 8 jugadores,
⇨ 4^7 = 16 384, si juegan 7 jugadores,
⇨ 4^6 = 4 096, si juegan 6 jugadores,
⇨ 4^5 = 1 024, si juegan 5 jugadores,
⇨ 4^4 = 256, si juegan 4 jugadores,
⇨ 4^3 = 84, si juegan 3 jugadores, y
⇨ 4^2 = 16, si juegan 2 jugadores,

considerando que en el juego participan máximo 8 jugadores y mínimo de 2.

Como la diferencia en las probabilidades con una y otra opción de esta regla del juego es muy pequeña, además de que con ambas se obtiene el mismo número de formas de distribuir los tributos entre los jugadores, la opción que se va a quedar como la regla del juego para la asignación inicial de tributos es la segunda aleternativa, porque con ésta se causa más emoción en el inicio del juego por ser mayor el número de formas de esconder los tributos y además dar un efecto más estético en el diseño del tablero. Por consiguiente, la regla del juego para la distribución inicial de los tributos queda así:

❑ **1.3)** Cada jugador distrubuirá sus tributos en forma aleatoria en cualquiera de los seis compartimientos indicados en la figura 4.8., de la siguiente forma:

En las casillas 1, 2, 3 y 4 pueden esconderse un máximo de 2 tributos, mientras que en las 5 y 6 sólo 1.

Después los jugadores tirarán del dado para localizar los tributos escondidos, en su correspondiente división. Los tributos encontrados se emplearán posteriormente en el juego.

5.2 LA PRIMER ETAPA DEL JUEGO TACHTLI.

5.2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA PARA LOS PARTICIPANTES DEL JUEGO DE MESA TACHTLI, EN LA PRIMER ETAPA DEL JUEGO.

Antes de hacer el planteamiento del problema, y para seguir la metodología científica en la toma de decisiones vista en la sección 2.5 del capítulo 2, es conveniente recordar las reglas de la primer etapa del juego, que en el capítulo anterior quedaron enunciadas así:

- ❑ 2.1) Se coloca un guerrero de cada pueblo o jugador en los diferentes inicios (divisiones -ver figura 4.2-).
- ❑ 2.2) Todos los guerreros de un jugador se mueven de acuerdo a un mismo tiro del dado en la dirección que se desee, pero sin pasar más de una vez por la misma casilla, excepto en la casilla meta.
- ❑ 2.3) No se puede dejar pasar un turno.
- ❑ 2.4) Se pueden colocar a lo más dos guerreros en una misma casilla. Al encontrarse dos guerreros de jugadores diferentes se produce un enfrentamiento entre ellos. Este enfrentamiento consiste en que el guerrero invasor lanza el dado y reacciona de acuerdo a la tabla 4.3.
- ❑ 2.5) El jugador vencido en el enfrentamiento cede una señal al jugador vencedor, en caso de no tener señales sólo perdierde al guerrero.
- ❑ 2.6) La entrada a una casilla de hechiceros no necesita ser con un número exacto en el tiro.
- ❑ 2.7) En las casillas de hechiceros, se pueden intercambiar dos guerreros obtenidos en enfrentamientos por un tributo.
- ❑ 2.8) En las casillas de tributo, se pierde una ficha de tributo, en caso de no tenerlo el guerrero muere.
- ❑ 2.9) Si se presenta un enfrentamiento en las casillas de hechiceros o de tributos, primero se deben cumplir con las reglas de estas casillas y posteriormente se lleva a cabo el enfrentamiento.
- ❑ 2.10) Los primeros cuatro guerreros de jugadores diferentes que lleguen a cualquiera de las casillas de inicio de la 2ª etapa, reunen a todos sus guerreros, no importando en que casillas se encuentren situados, para realizar el conteo y poder dar Inicio a la 2ª etapa del juego.
- ❑ 2.11) Llegados los primeros cuatro jugadores, se realiza un conteo de acuerdo con la tabla 4.4.
- ❑ 1.12) Al jugador con mayor puntaje, se le denomina el MEXICA y se le entregan sus ocho guerreros.
- ❑ 1.13) Los tres jugadores restantes, se unen formando una TRIPLE ALIANZA, contando ésta con los guerreros "vivos" de los tres jugadores.
- ❑ 2.14) La primer casilla de salida para cada inicio, es la inmediata frontal.

- 2.15) En caso de empate en el conteo, para la denominación del MEXICA, se toma en cuenta el orden de entrada a las casillas de inicio de las 2ª etapa.

Ahora bien, (en referencia con la sección 2.6 del capítulo 2, la naturaleza de un problema), se tiene que, el problema lo afrontan los participantes del juego y particularmente el jugador en turno al mover un guerrero. El medio ambiente esta conformado por el tablero, el número de jugadores, el número de fichas, la repartición de ellas entre los jugadores, la distribución de las fichas en el tablero y la aplicación de las reglas del juego, en las que también interviene el azar.

El objetivo que persiguen los jugadores es llegar a ser el MEXICA o en su defecto formar parte de la TRIPLE ALIANZA, para conseguir lo primero, se debe ser el jugador con el mayor puntaje al llegar a la meta y para lo segundo, es necesario ser alguno de los tres jugadores en llegar a la meta con un puntaje menor que el MEXICA, pero mayor a los jugadores restantes. Esto es, pasar a la segunda etapa del juego perteneciendo al grupo de los cuatro jugadores con el mayor puntaje obtenido en la primer etapa.

Observación.

El tablero está diseñado de tal suerte que, para no hacer aburrido el juego, existe una distancia a la meta igual a 9 casillas desde las casillas inicio, con el fin de que por lo menos cada jugador realice dos lanzamientos del dado antes de llegar a la meta. Entonces, la posición con la que se llegue a la meta está también en función de que tan lejos se encuentre la casilla elegida de la meta; sin olvidar que con una distancia menor o igual a 6 de la casilla elegida a la meta, el hecho de que el jugador llegue a la meta en su próximo lanzamiento, depende de su suerte al lanzar el dado.

Por consiguiente, el objetivo es obtener el mayor puntaje, sin perder de vista la posibilidad de llegar a la meta antes de que llegue un quinto jugador.

Para que los jugadores logren su objetivo, tienen que decidir en cada jugada que casilla elegir de entre un conjunto de casillas alternativas, para poder llegar a la meta con el mayor número de puntos.

De acuerdo con la elección puede suceder que:

❶ Se produzca un enfrentamiento con otro jugador, teniendo las posibilidades siguientes:
  ⇒ Moverse una casilla con una probabilidad igual a 1/3.
  ⇒ Quedarse en esa casilla, cuya probabilidad es 1/3.
  ⇒ Que el jugador contrincante pierda su ficha de guerrero y su señal con una probabilidad de 1/6.
  ⇒ Que el jugador en turno pierda a su guerrero y por consiguiente su señal (en caso de poseer alguna) con una probabilidad de 1/6.

❷ El jugador en turno pierda su ficha de guerrero en movimiento, por caer en una casilla de pantano.

❸ Pierda una ficha de tributo al situarse en una casilla de tributo (si tiene tributos).

❹ Pierda un guerrero al elegir una casilla de tributo y no poseer ninguna de estas fichas.

❺ Cambie dos fichas de guerrero obtenidas en enfrentamientos por un tributo.

❻ Únicamente se mueva un cierto número de casillas.

Además, se sabe que cada ficha tiene un valor:

- Señales 3 puntos.
- Guerreros del jugador (no los obtenidos en enfrentamientos) 2 puntos.
- Tributos 1 punto.

Finalmente, debe notarse, que se tiene una situación de competencia[4]. Por lo anterior, se presentan todas las condiciones que se requieren para la existencia de una situación problemática según Ackoff.

En suma, el problema para los jugadores es analizar y comparar una casilla alternativa con otra(s), que en determinada jugada se tenga(n) como opción al guerrero en movimiento, para seleccionar aquella con la que se obtenga un puntaje óptimo. (Suponiendo que el jugador quiere ganar el juego). El proceso que el jugador realizaría para

[4] En el sentido de que el logro del objetivo de un jugador implica (más específicamente en el caso de enfrentamientos) la disminución del alcance del objetivo de los otros jugadores -esto es el conflicto-, y a su vez, en el caso de perder un enfrentamiento coopera quiera o no con el juegador contrincante para que éste último logre su objetivo, además de que existe un objetivo común que es el de entretenimiento. Evidentemente el conflicto se presenta bajo un modelo de un juego; (para mayor referencia a las situaciones competitivas ver la sección 3.2 del capítulo 3).

dar solución a este problema se puede representar por medio de un modelo matemático de toma de decisiones bajo riesgo[5].

Si se observa más detenidamente, es claro que, se tiene un juego diferencial. Ya que, se tiene una situación competitiva, donde los jugadores eligen estrategias en el tiempo. En este juego, el problema para los jugadores consiste en elegir cursos temporales (es decir, elegir una casilla alternativa) para las variables de control (guerreros en movimiento -uno a la vez-) dentro de un conjunto de control (conjunto de casillas alternativas para dicho guerrero en movimiento). Estas elecciones forman el conjunto de ecuaciones de movimiento, el conjunto de casillas elegidas que describen al "juego", son las variables de estado. En cada elección, el jugador desea optimizar su puntaje y distancia a la meta, esto es, se tiene un funcional objetivo. De tal forma que los pagos de cada jugador dependen de las trayectorias de control empleadas por todos los jugadores, en otras palabras, el resultado de la elección de una casilla alternativa para un guerrero en movimiento, depende de la situación que guarde el juego en el momento de esa elección. Por otra parte, los jugadores hacen sus movimientos sobre un intervalo de tiempo, de modo que el número de movimientos, y por tanto, el número de estrategias, son infinitos.

Ahora bien, el planteamiento del funcional objetivo para determinar las estrategias de los jugadores en un movimiento personal determinado, se puede resolver, como anteriormente se ha dicho, por medio de un modelo de toma de decisiones bajo riesgo.

[5] A pesar de tratarse de una situación competitiva, específicamente un juego, para el análisis de la toma de decisiones de los jugadores al mover un guerrero específico, es más sencillo y más claro resolver este problema con un modelo de toma de decisiones bajo riesgo.

5.2.2 FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO DE TOMA DE DECISIONES BAJO RIESGO, PARA EL JUGADOR EN TURNO Y EL GUERRERO EN MOVIMIENTO CON EL NÚMERO DEL DADO OBTENIDO EN SU LANZAMIENTO.

El modelo matemático que representa esta situación es muy sencillo, y es el siguiente:

Matriz de decisiones, puntaje (MDP).

ALTERNATIVAS.		ESTADOS DE LA NATURALEZA.								
NO. DE CAS.	*TIPO DE CAS.*	*ENFRENTAMIENTO.*						*NO ENFRENTAMIENTO.*		
		G. SEÑ.	P. SEÑ.	G. GUER.	P. GUER.	G. TRIB.	P. TRIB.	P. GUER.	G. TRIB.	P. TRIB.
		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
A_1 mdp_{11}	mdp_{12}	mdp_{13}	mdp_{14}	mdp_{15}	mdp_{16}	mdp_{17}	mdp_{18}	mdp_{19}	mdp_{110}	mdp_{111}

(5.2.1)

Matriz de decisiones, distancia a la meta (MDD).

ALTERNATIVAS.		ESTADOS DE LA NATURALEZA.				
NO. DE CAS.	*TIPO DE CAS.*	*ENFRENTAMIENTO.*			*NO ENFRENTAMIENTO.*	
		G. DISTANCIA.	P. DISTANCIA.	NI G. NI P. DISTANCIA.	P. DSITANCIA.	NI G. NI P. DISTANCIA
		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
A_1 mdp_{11}	mdp_{12}	mdd_{13}	mdd_{14}	mdd_{15}	mdd_{16}	mdd_{17}

(5.2.2)

Donde Cas. : Casilla.
Señ. : Señales.
Guer. : Guerreros.
Trib. : Tributos.
G. : Gana.
P. : Pierde.

Una vez identificados y definidos los tomadores de decisiones, su objetivo, los cursos de acción y las variables no controlables, esto es, una vez desarrollada la matriz de decisión, es necesario construir una medida de eficiencia, que se pueda usar para determinar cuál es la mejor alternativa y qué función de esta medida deberá usarse como criterio de "la mejor" solución.

Por tratarse de un problema bajo riesgo, se va a aplicar un criterio de decisión de situaciones decisorias bajo riesgo, como se recordará (capítulo 2, sección 2.8.2., Toma de decisiones bajo riesgo), los criterios aplicables en estas son:

- El criterio de decisión del valor monetario esperado.
- El criterio de decisión bayesiano.
- Utilidad esperada.

El criterio de decisión bayesiano, se descarta porque en este problema existe la oportunidad de contar con toda la información necesaria antes de tomar la decisión, además de que dadas las reglas del juego, no es aplicable la determinación de probabilidades subjetivas (más específicamente en los casos de enfrentamientos las probabilidades están dadas por las reglas del juego).

El criterio de la utilidad esperada, no es apropiado en este caso porque si bien es cierto que se toman en cuenta muchos factores subjetivos del decisor, y en cierto momento podría pensarse en él como una buena alternativa de criterio de decisión, ya que el problema a simple vista puede ser representado como una lotería de una etapa -en el caso de enfrentamientos- (en la que la *Naturaleza* -el número del dado obtenido en el lanzamiento- es quien toma la decisión, puesto que determina el número para la aplicación de la regla correspondiente a él, donde hay 4 cursos de acción posibles que corresponden a los 4 números del dado -recuérdese que con el 1 y 3 se aplica la misma regla, al igual que con los números 2 y 4-), también es cierto que si observa más detenidamente, para calcular la función de utilidad no se cumple con el segundo supuesto referente a que los premios reflejen una cierta cantidad de dinero que el jugador tuvo que pagar por jugar, y por tanto no es posible que el jugador defina los coeficientes de utilidad.

Por lo anterior, el criterio que se va a aplicar en este problema es el criterio de decisión del valor monetario esperado; proporcionando además, al jugador toda la información necesaria para que él, de acuerdo a sus *preferencias personales*[6] elija la casilla que más le convenga. Este valor esperado se va a calcular de la siguiente manera (de la sección 2.8.2):

- ❶ Se calcula el beneficio neto condicional de cada curso de acción factible,
- ❷ se calcula el beneficio neto esperado de cada curso de acción, tal como el promedio ponderado de los beneficios netos condicionales de todas las acciones consideradas; ponderándose cada beneficio condicional con su respectiva probabilidad de ocurrencia;
- ❸ se selecciona el curso de acción que proporcionará el beneficio neto esperado más elevado.

Simbólicamente, el criterio se puede establecer en forma general como sigue:

$$\text{máx}_i\,[mdp_{i12}], \tag{5.2.3}$$

donde mdp_{i12} : Valor esperado del puntaje de la casilla de la posición actual a la casilla alternativa (mdp_{i1}).

$$mdp_{i12} = mdp_{i3} + mdp_{i4} + mdp_{i5} + mdp_{i6} + mdp_{i7} + mdp_{i8} + mdp_{i9} + mdp_{i10} + mdp_{i11}.$$

En caso de que se obtuviera más de una casilla con el mismo valor máximo, se adiciona el siguiente criterio:

$$\text{mín}_i\,[mdd_{i8}]. \tag{5.2.4}$$

donde mdd_{i8} : Valor esperado de la distancia de la casilla de la posición actual a la meta[7] .

$$mdd_{i8} = mdd_{i3} + mdd_{i4} + mdd_{i5} + mdd_{i6} + mdd_{i7}.$$

$$(mdd_{i5} = mdd_{i7})^{8}$$

[6] Permitiendo así que el jugador refleje su personalidad en el juego.

[7] mdd_{i8}, no puede tomar valores negativos, si la ficha se pierde, su distancia a la meta es un número muy grande, aquí se va a denotar con 15. Con "gana distancia" se entenderá que aumenta su distancia a la meta.

5.2.3 MODELO QUE REPRESENTA EL DESARROLLO DEL JUEGO.

En resumen, el juego *TACHTLI* en su primer etapa consiste en la secuencia de los siguientes movimientos (se asume que ya se realizó la asignación de tributos y se determinó el turno de los jugadores):

m_1 (movimiento 1): El jugador 1 lanza un dado no calado, para determinar el número de casillas que avanzarán todos sus guerreros (movimiento aleatorio).

m_2 : El jugador 1 elige una casilla a donde moverá a su primer guerrero (movimiento personal).

m_3 : En este movimiento se aplican las reglas del juego referentes a las casillas pantano y tributo. Esto es, si el jugador elige una casilla de pantano el "tablero" determina si se traga o no la ficha (movimiento aleatorio) y si se trata de una casilla tributo y el jugador no tiene tributos el jugador pierde su ficha de guerrero.

m_4 : El jugador 1 elige una casilla a donde moverá a su segundo guerrero.

m_5: Se repite el movimiento 3 para el segundo guerrero.

m_k: Los movimientos 2 y 3 se repiten para el guerrero en movimiento correspondiente del jugador 1.

m_{18}: Se realiza el movimiento 1, pero ahora para el jugador 2.

m_{19}: El jugador 2 elige una casilla a donde moverá a su primer guerrero.

m_{20}: Se aplican las reglas del juego de acuerdo con el tipo de casilla elegido en el movimiento 19.

m_{21}: En caso de elegir un enfrentamiento y aún conservar su ficha, se efectúa dicho enfrentamiento de acuerdo con las reglas del juego (movimiento aleatorio).

m_j: Se continúa con todos los guerreros de este jugador efectuando los movimientos m_{19}, m_{20} y m_{21}.

m_i: Se sigue con todos los jugadores llevando a cabo los movimientos m_{18}, m_{19} y m_{20} para el jugador correspondiente.

m_v: El juego se termina cuando llegan 4 jugadores a la casilla meta (si juegan más de tres jugadores).

Como se puede observar, el juego tiene un número muy grande de movimientos, además de que se trata de un juego con infinidad de "juegos", por tanto resultaría muy complicado enumerarlos. Sin embargo, es posible *proponer* una *estrategia* para los jugadores al realizar un movimiento personal, la cual consiste en lo siguiente:

[**] Son iguales en cuanto al concepto, pero no en valor. Ambas representan el mínimo número de casillas de la casilla posición actual a la meta, sin embargo, mientras una tiene un valor diferente de 0, la otra lo tiene igual con 0. Se asume que cuando un jugador llega a la meta no se llenan las matrices (5.2.1) y (5.2.2).

Supóngase, que está jugando un determinado jugador con un guerrero específico. Si existe la posibilidad de llegar a la meta y este guerrero tiene también la alternativa de canjear dos o más guerreros obtenidos en enfrentamiento(s) por un o más tributos, y además otro guerrero del jugador en turno en ese mismo tiro también puede llegar a la meta, entonces la casilla alternativa que se recomienda al jugador es la de hechicero. En caso de ser nula esta posibilidad, primero se va a buscar la casilla alternativa óptima referente a su puntaje esperado y en caso de que existan dos o más casillas alternativas óptimas, se buscará la casilla de este conjunto que optimice la distancia a la meta.

También debe notarse que se trata de un problema de decisiones sucesivas[9] , en donde la decisión tomada por un jugador respecto al movimiento de una de sus fichas afecta a todo el ambiente del juego, por lo tanto, las matrices *MDP* y *MDD* se deben llenar para cada movimiento personal de un jugador en turno.

Para saber la situación del juego en el t-ésimo movimiento y poder calcular los valores de las matrices anteriores, se debe conocer la información siguiente:

a) El número de jugadores. (Variable estocástica para cada "juego", exógena, no controlable, pero sí restringida. 2 ≤ número de jugadores ≤ 8).
b) El jugador en turno. (Constante).
c) El guerrero en movimiento. (Constante).
d) El número del dado. (Variable estocástica, exógena, no controlable).
e) El número de fichas de cada tipo, con las que cuentan los jugadores. (Variable endógena con retraso, estocástica, no controlable cuando se presenta un enfrentamiento y controlable en caso contrario si no se elige una casilla pantano).
f) Las casillas donde se encuentran localizados cada uno de los guerreros. (Igual a la anterior, en cuanto al tipo de variable)
g) El tipo de casilla de cada una de las casillas del tablero. (Variable exógena, estocástica en el caso de casillas pantano y determinística en otros casos -constante-).
h) El número de casillas mínimo de cada casilla a la meta. (Constante).
i) La probabilidad con la que el tablero se traga la ficha (en el caso de las casillas pertenecientes a una zona de pantano). (Variable exógena, al inicio del juego tiene un valor determinístico dado por las mismas reglas del juego y es una variable endógena con retraso para cada movimiento en el desarrollo del juego).

[9] En este juego resultaría demaciado engorroso e impráctico el diseño y análisis de un árbol de decisiones.

j) El número de jugadores ganadores hasta el t-ésimo movimiento. (Variable endógena con retraso).
k) Jugadores descalificados por no tener fichas de guerrero. (Variable endógena con retraso).
l) Guerreros descalificados. (Variable endógena con retraso).

Es necesario especificar que, un participante va a jugar mientras tenga por lo menos un guerrero en el tablero y aún no haya llegado a la casilla meta. Además podrá mover un guerrero sí y sólo sí, éste no ha sido descalificado del juego, por tanto, los incisos: a), i), k) y l) son importantes para saber cuando se deben llenar las matrices *MDP* y *MDD* y cuando carece de sentido hacerlo.

Como se vió en el capítulo 3, un elemento muy importante en un juego es la información con la que cuenta cada jugador para tomar la decisión de qué elección realizar. Con respecto a este factor, en este juego debe notarse que se tiene *información perfecta*, ya que los jugadores al hacer un movimiento, ya sea personal o aleatorio están informados acerca del resultado de las posibilidades de todos los movimientos anteriores. Cabe señalar que *este juego es de carácter racional* a pesar de, que en él intervengan tanto movimientos aleatorios como personales, es decir, mientras el conjunto de casillas alternativas es determinado por un movimiento aleatorio (el tiro del dado), y a pesar de que el resultado de un enfrentamiento depende de la suerte del jugador, además de que el resultado obtenido en las casillas pantano es definitivamente dependiente del azar; todos estos resultados están también influenciados fuertemente por las habilidades estratégicas de los jugadores, al tener ellos el poder de decidir qué casilla elegir. También debe notarse que a un jugador en turno, le basta con conocer la información correspondiente a los cambios que se dieron con el movimiento anterior al movimiento que éste vaya a realizar, para poder tomar la decisión de qué casilla elegir.

En cuanto al término preliminaridad, se pude ver que en este juego no es transitivo, por ejemplo, sea m_μ el primer movimiento del juego en la primer etapa que consiste en el lanzamiento de un dado, con este movimiento inicia el jugador 1 -un movimiento aleatorio-; m_λ la primera elección de una casilla hecha por el jugador 1 para su guerrero 1 -un movimiento personal del jugador 1-; m_k la primer elección del jugador 2 para su guerrero 1 -un movimiento personal del jugador 2-. Entonces m_μ es preliminar a m_λ y m_λ a m_k pero m_μ no es preliminar a m_k. Así se tiene intransitividad pero involucrando a ambos jugadores.

Hechas las anotaciones anteriores, se va a continuar con la descripción de la notación que se va a emplear para desarrollar el modelo matemático que represente el desarrollo del juego.

5.2.3.1 NOTACIÓN EMPLEADA EN EL MODELO MATEMÁTICO DEL JUEGO.

Para tener el control de esta información se va a hacer uso de la nomenclatura siguiente:

JUG	Número de participantes en el juego,	$JUG \in \{2, \ldots, 8\}$.
JT	Jugador en turno,	$JT = 0, \ldots JUG - 1$.
NG	Guerrero en movimiento,	$NG = 0, \ldots 7$.
D	Número del dado,	$D \in \{1, \ldots, 6\}$.

$MP(t)_{JUG \times 4}$ Matriz de puntos en el t-ésimo movimiento,

donde $mp(t)_{ij}$: No. de fichas del i-ésimo jugador, con $i = 0, \ldots, JUG-1$, y $j = 0, \ldots, 3$.

$mp(t)_{i0}$ Señales del i-ésimo jugador, $mp(t)_{i0} \in \{0, \ldots, JUG\}$.

$mp(t)_{i1}$ Guerreros del i-ésimo jugador, $mp(t)_{i1} \in \{0, \ldots, 3 * JUG\}$.

$mp(t)_{i2}$ Tributos del i-ésimo jugador, $mp(t)_{i2} \in \{0, \ldots, 8\}$.

$mp(t)_{i3}$ Guerr. obtenidos en enfrentamientos por el i-ésimo jugador, $mp(t)_{i3} \in \{0, \ldots, 7 * JUG\}$.

$MDG1(t)_{8 \times JUG}$ Matriz 1 de distribución de guerreros en el t-ésimo movimiento,

donde $mdg1(t)_{ij}$: No. de casilla donde se encuentra el i-ésimo guerrero del j-ésimo jugador, con $i = 0, \ldots, 7$ y $j = 0, \ldots, JUG - 1$,

$mdg1(t)_{ij} \in \{0, \ldots, 89\}$,

$mdg1(t)_{ij} = 0$, significa que el guerrero i ya no participa en el juego.

$MDG(t)_{9 \times 10 \times 2}$ Matriz de distribución de guerreros en el t-ésimo movimiento, donde $(mdg(t)_{ijk} / 10)$: No. del jugador que se encuentra en la casilla ij, con $i = 0, ..., 8.$, $j = 0, ..., 9.$ y k[10 *] $= 0, 1.$

$(mdg(t)_{ijk} / 10) \in \{0, ..., JUG - 1\}.$

$(mdg(t)_{ijk} \bmod 10)$: No. del guerrero del jugador $(mdg(t)_{ijk} / 10)$ que se localiza en la casilla ij.

$(mdg(t)_{ijk} \bmod 10) \in \{0, ..., 7\}.$

$mdg(t)_{ijk} = 99$: casilla ij sin ficha.

$MC_{9 \times 10}$ Matriz de clasificación de casillas,

donde

$mc_{ij} = 0$: casilla ij neutral.
$mc_{ij} = 1$: casilla ij pantano.
$mc_{ij} = 2$: casilla ij zona de pantano.
$mc_{ij} = 3$: casilla ij tributo.
$mc_{ij} = 4$: casilla ij hechicero.
$mc_{00} = 5$: casilla meta.

con $i = 0, ..., 8.$, y $j = 0, ..., 9.$

$MDM_{9 \times 10}$ Matriz de distancia mínima,

donde mdm_{ij} : Mínimo número de casillas de la casilla ij a la meta.

con $i = 0, ..., 8.$, y $j = 0, ..., 9.$

$mdm_{ij} \in \{0, ..., 9\},$

$mdm_{00} = 0.$

Observación.

La notación (t) se emplea para denotar que una variable determinada está en función de la situación que guarda el juego después de realizarse el t-ésimo movimiento (en el capítulo 3 se utilizó la variable k para denotar al k-ésimo movimiento), recuérdese que el juego está en función del tiempo y por tanto es un juego diferencial.

[10 *] Por reglas del juego, se pueden localizar a lo más dos fichas en una misma casilla, por tanto, k denota la ficha $k + 1$ localizada en la casilla ij.

5.2.3.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TABLERO.

Para poder saber cuál es el conjunto de casillas alternativas en un movimiento personal de un jugador en turno para el guerrero en movimiento, el tablero de la figura 4.4 se va a representar en forma gráfica, para que así posteriormente pueda ser representado en forma matricial.

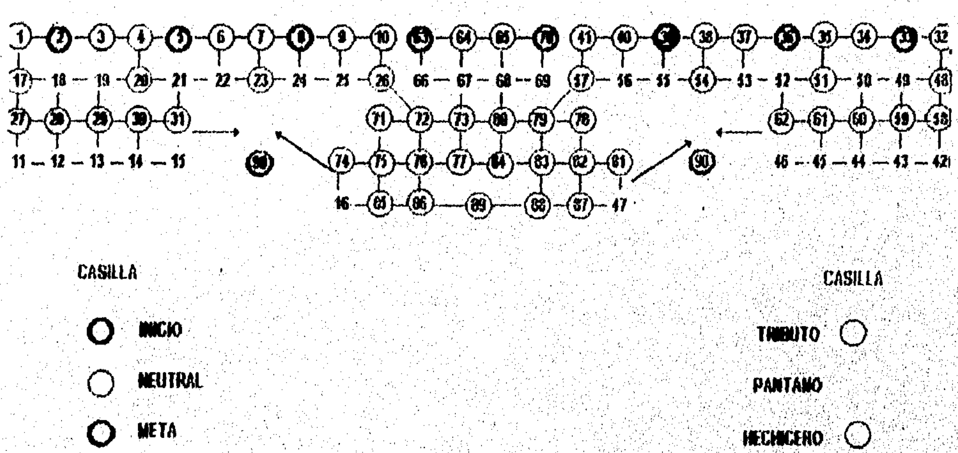


FIGURA 5.4 *Representación gráfica del tablero.*

Observación.

De la figura 5.4 y de las reglas del juego, se tiene que hacer notar que todas las líneas (arcos) son simétricas, entonces, la gráfica es una digráfica simétrica, pero no transitiva[8] y por tanto no es una digráfica de equivalencia.

[8] Para no causar confusión entre la relación de simetría que existe en los nodos: 15 y 90, 16 y 90, 46 y 90, 47 y 90, y la relación transitiva que pudiera pensarse que existe entre los nodos: 15, 16, 46 y 47, no se expresaron dichas relaciones simétricas en la figura 5.4, que resultan de aplicar la regla 2.2 del juego. Para mayor referencia sobre las relaciones digráficas, se puede ver el glosario.

5.2.3.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TABLERO.

Para poder saber cuál es el conjunto de casillas alternativas en un movimiento personal de un jugador en turno para el guerrero en movimiento, el tablero de la figura 4.4 se va a representar en forma gráfica, para que así posteriormente pueda ser representado en forma matricial.

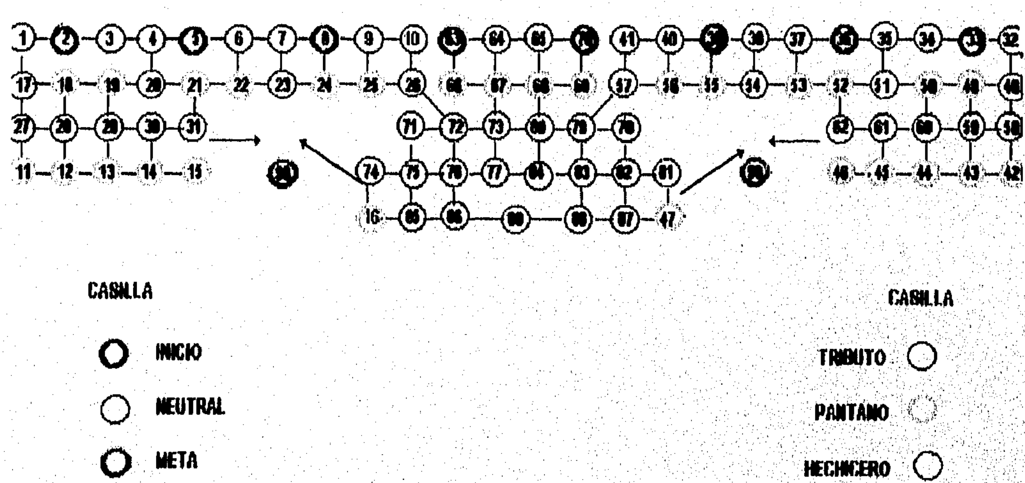


FIGURA 5.4 *Representación gráfica del tablero.*

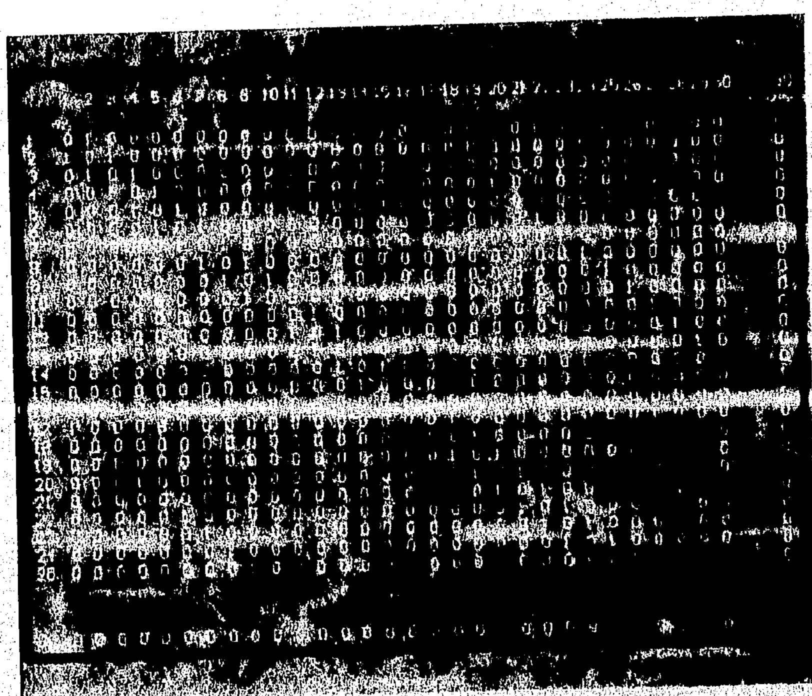
Observación.

De la figura 5.4 y de las reglas del juego, se tiene que hacer notar que todas las líneas (arcos) son simétricas, entonces, la gráfica es una digráfica simétrica, pero no transitiva[8] y por tanto no es una digráfica de equivalencia.

[8] Para no causar confusión entre la relación de simetría que existe en los nodos: 15 y 90, 16 y 90, 46 y 90, 47 y 90, y la relación transitiva que pudiera pensarse que existe entre los nodos: 15, 16, 46 y 47, no se expresaron dichas relaciones simétricas en la figura 5.4, que resultan de aplicar la regla 2.2 del juego. Para mayor referencia sobre las relaciones digráficas, se puede ver el glosario.

5.2.3.3 REPRESENTACIÓN MATRICIAL DEL TABLERO.

De la gráfica de la figura 5.4 se obtiene la matriz de adyacencia que representa al tablero y es:



(5.2.5)

Para efectuar la determinación del conjunto de casillas alternativas es necesario que se recuerde el siguiente teorema:

Teorema.

Sea G una gráfica con matriz de adyacencia $A(G)$. Entonces el elemento a_{ij} de la matriz potencia A^n con $n \geq 1$ es el número de caminos diferentes de longitud n del vértice v_i al vértice v_j, con $i \neq j$.

Sea $MA_{90 \times 90}$ la matriz de adyacencia que representa a la gráfica del tablero, entonces los elementos ma_{ij} (con $i \neq j$., $i = 1, \ldots, 90$ y $j = 1, \ldots, 90$) de la matriz $MA^D{}_{90 \times 90}$ es el número de caminos de longitud D de la casilla i a la casilla j. Por tanto, las **casillas opción** que tiene el jugador jj al mover el guerrero ii que se encuentra situado en la casilla $mdg1_{ii\,jj}$ y cuyo lanzamiento del dado es D son todos los números j donde los elementos $ma_{mdg1_{ii,jj}j} \neq 0$ (con $mdg1_{ii\,jj} \neq j$).

(5.2.6)

Evidentemente, si $j = 90$, entonces la casilla opción en caso de serlo es igual a 0 (casilla meta).

Observación.

Se va a emplear distintamente el término *casilla opción* y *casilla alternativa*, el primero quedó explicado en (5.2.6) . Con el término **casilla alternativa** se deberá entender a la casilla opción que además cumple con la regla del juego referente al máximo número de fichas permitido en una misma casilla, y a las casillas que por el tiro del dado y la posición actual del guerrero en movimiento pueden pasar más de una vez por la casilla meta y a las casillas que cumplen con la regla **2.6** (el tiro no deberá ser exacto para poder elegir una casilla hechicero, sí y solo si, el número de casillas desde la posición actual es menor o igual al tiro del dado).

Para que una casilla cumpla con la regla **2.6** del juego, basta con que $ma_{mdg1_{ii,jj}j} \neq 0$ (con $mdg1_{ii\,jj} \neq j$) y $j \in \{20, 51, 89\}$ donde $ma_{mdg1_{ii,jj}j}$ es un elemento de la matriz $MA^{D'}$ para algún $D' \leq D$ y para que sea alternativa, además debe cumplir con la regla **2.4**.

(5.2.7)

Se agrega la siguiente notación:

$MD_{cont1 \times 5}$ Matriz de "decisión", con $cont1 = 0, \dots, cont1 - 1$.: Número total de casillas alternativas para el guerrero en movimiento.

donde
$md_{cont\ 0}$: Número de casilla alternativa, $md_{cont\ 0} \in \{0, \dots, 89\}$.
$md_{cont\ 1}$: Enfrentamiento.
$md_{cont\ 2}$: Jugador contrincante.
$md_{cont\ 3}$: Tipo de casilla, $md_{cont\ 3} \in \{0, \dots, 5\}$.
$md_{cont\ 4}$: Puntaje esperado, $md_{cont\ 4} = mdp_{cont\ 12} \in \cdot$.
$md_{cont\ 5}$: Distancia esperada a la meta, $md_{cont\ 5} = mdd_{cont\ 8} \in \cdot^{+}$.

$$md_{cont1} = \begin{cases} 0 \text{ si no hay enfrentamiento.} \\ 1 \text{ si hay enfrentamiento.} \end{cases}$$

$$md_{cont\ 2} = \begin{cases} 99 \text{ para } md_{i\ 1} = 0. \\ \in (0, \dots, JUG - 1) \text{ para } md_{i1} = 1. \end{cases}$$

Para determinar si una casilla cumple con la regla del juego 2.4, se deben verificar los siguientes casos:

Sea ij la casilla en estudio.

- ⇒ Si $mdg(t)_{i\,j\,1} = mdg(t)_{i\,j\,2} = 99$, entonces la casilla ij es una casilla alternativa, esto es, $md_{cont\ 0} = ij$.
- ⇒ Si $mdg(t)_{i\,j\,1} = 99$ y $mdg(t)_{i\,j\,2} \neq 99$, entonces $md_{cont\ 0} = ij$ y se puede presentar un enfrentamiento con el jugador $(mdg(t)_{i\,j\,2} / 10)$ si $(mdg(t)_{i\,j\,2} / 10) \neq JT$ esto implica que $md_{cont\ 1} = 1$ y $md_{cont\ 2} = (mdg(t)_{i\,j\,2} / 10)$. Y $md_{cont\ 1} = 0$ si $(mdg(t)_{i\,j\,2} / 10) = JT$.
- ⇒ Si $mdg(t)_{i\,j\,1} \neq 99$ y $mdg(t)_{i\,j\,2} = 99$, entonces $md_{cont\ 0} = ij$ y puede presentarse un enfrentamiento con el jugador $(mdg(t)_{i\,j\,1} / 10)$ si $(mdg(t)_{i\,j\,1} / 10) \neq JT$ esto implica que $md_{cont\ 1} = 1$ y $md_{cont\ 2} = (mdg(t)_{i\,j\,1} / 10)$. Y $md_{cont\ 1} = 0$ si $(mdg(t)_{i\,j\,1} / 10) = JT$.
- ⇒ Si $mdg_{i\,j\,1} = mdg(t)_{i\,j\,2} \neq 99$, entonces la casilla ij no es una casilla alternativa.

(5.2.8)

Hecha la observación anterior, se tienen que considerar los siguientes casos para el cumplimiento de la regla **2.2** en lo referente a que se puede pasar más de una vez por la casilla meta:

> ⇒ Si $mdm_{ij} = k$ y $D = k + 1$, con $k = 2, \dots, 5$ y $mdg1(t)_{ij} \leq 31$, entonces la casilla 15 es una casilla opción y si además cumple con la regla **2.4**, entonces es una casilla alternativa $md_{\text{cont}\ 0} = 15$, o si $31 \leq mdg1(t)_{ij} \leq 62$, entonces $md_{\text{cont}\ 0} = 46$.

En lo siguiente se supone que se cumple con la regla **2.4**.

$$md_{\text{cont}\ 0} =$$

⇒ 14, si $mdm_{ij} = k$ y $D = k + 2$, con $k = 1, \dots, 4$, para $mdg1(t)_{ij} \leq 31$.
⇒ 45, si " , para $31 \leq mdg1(t)_{ij} \leq 62$.
⇒ 13, 15 y 30, si $mdm_{ij} = k$ y $D = k + 3$, con $k = 1, \dots, 3$, para $mdg1(t)_{ij} \leq 31$.
⇒ 44, 46 y 61, si " , para $31 \leq mdg1(t)_{ij} \leq 62$.
⇒ 16, si ($mdm_{ij} = 5$ y $D = 6$ y ($mdg1(t)_{ij} = 72$ o $mdg1(t)_{ij} = 77$)) o
($mdm_{ij} = 4$ y $D = 5$ y ($mdg1(t)_{ij} = 71$ o $mdg1(t)_{ij} = 76$)) o
($mdm_{ij} = 3$ y $D = 4$ y ($mdg1(t)_{ij} = 75$ o $mdg1(t)_{ij} = 86$)) o
($mdm_{ij} = 2$ y $D = 3$ y ($mdg1(t)_{ij} = 74$ o $mdg1(t)_{ij} = 85$)) o
($mdm_{ij} = 1$ y $D = 2$ y $mdg1(t)_{ij} = 16$).
⇒ 47, si ($mdm_{ij} = 5$ y $D = 6$ y ($mdg1(t)_{ij} = 79$ o $mdg1(t)_{ij} = 84$)) o
($mdm_{ij} = 4$ y $D = 5$ y ($mdg1(t)_{ij} = 78$ o $mdg1(t)_{ij} = 83$)) o
($mdm_{ij} = 3$ y $D = 4$ y ($mdg1(t)_{ij} = 82$ o $mdg1(t)_{ij} = 88$)) o
($mdm_{ij} = 2$ y $D = 3$ y ($mdg1(t)_{ij} = 81$ o $mdg1(t)_{ij} = 87$)) o
($mdm_{ij} = 1$ y $D = 2$ y $mdg1(t)_{ij} = 47$).
⇒ 74 y 85, si ($mdm_{ij} = 4$ y $D = 6$ y ($mdg1(t)_{ij} = 71$ o $mdg1(t)_{ij} = 76$)) o
($mdm_{ij} = 3$ y $D = 5$ y ($mdg1(t)_{ij} = 75$ o $mdg1(t)_{ij} = 86$)) o
($mdm_{ij} = 2$ y $D = 4$ y ($mdg1(t)_{ij} = 74$ o $mdg1(t)_{ij} = 85$)) o
($mdm_{ij} = 1$ y $D = 3$ y ($mdg1(t)_{ij} = 16$).
⇒ 81 y 87, si ($mdm_{ij} = 4$ y $D = 6$ y ($mdg1(t)_{ij} = 78$ o $mdg1(t)_{ij} = 83$)) o
($mdm_{ij} = 3$ y $D = 5$ y ($mdg1(t)_{ij} = 82$ o $mdg1(t)_{ij} = 88$)) o
($mdm_{ij} = 2$ y $D = 4$ y ($mdg1(t)_{ij} = 81$ o $mdg1(t)_{ij} = 87$)) o
($mdm_{ij} = 1$ y $D = 3$ y ($mdg1(t)_{ij} = 47$).
⇒ 75 y 86, si ($mdm_{ij} = 3$ y $D = 6$ y ($mdg1(t)_{ij} = 75$ o $mdg1(t)_{ij} = 86$)) o
($mdm_{ij} = 2$ y $D = 5$ y ($mdg1(t)_{ij} = 74$ o $mdg1(t)_{ij} = 85$)) o
($mdm_{ij} = 1$ y $D = 4$ y ($mdg1(t)_{ij} = 16$).
⇒ 82 y 88, si ($mdm_{ij} = 3$ y $D = 6$ y ($mdg1(t)_{ij} = 82$ o $mdg1(t)_{ij} = 88$)) o
($mdm_{ij} = 2$ y $D = 5$ y ($mdg1(t)_{ij} = 81$ o $mdg1(t)_{ij} = 87$)) o
($mdm_{ij} = 1$ y $D = 4$ y ($mdg1(t)_{ij} = 47$).

$\Rightarrow$ 12 , 29 y 31, si $mdm_{ij} = k$ y $D = k + 4$ con $k = 1, 2$, para $mdg1(t)_{ij} \leq 31$.
$\Rightarrow$ 43, 60 y 62, si " , para $31 \leq mdg1(t)_{ij} \leq 62$.
$\Rightarrow$ 71 , 74 , 76, 85 y 89, si $mdm_{ij} = 2$ y $D = 6$, para $mdg1(t)_{ij} = 74$ o $mdg1(t)_{ij} = 85$.
$\Rightarrow$ 78 , 81 , 83, 87 y 89, si " , para $mdg1(t)_{ij} = 81$ o $mdg1(t)_{ij} = 87$.
$\Rightarrow$ 72 , 75 , 77, 86 y 88, si $mdm_{ij} = 1$ y $D = 6$, para $mdg1(t)_{ij} = 16$.
$\Rightarrow$ 79 , 82 , 84 , 86 y 88, si " , para $mdg1(t)_{ij} = 47$.
$\Rightarrow$ 11 , 13 , 19, 21, 28 y 30, si $mdm_{ij} = 1$ y $D = 6$, para $mdg1(t)_{ij} \leq 31$.
$\Rightarrow$ 42 , 44 , 50 , 52 , 59 y 61, si " , para $31 \leq mdg1(t)_{ij} \leq 62$.

(5.2.9)

Observación.

Cuando sean más de una las casillas $md_{cont\ 0}$, evidentemente se incrementará la variable *cont* en uno.

A la comprobación de las reglas **2.2, 2.4** y **2.6** del juego, en lo referente a la determinación de las casillas alternativas mediante las ecuaciones (5.2.6), (5.2.7), (5.2.8) y (5.2.9), se le denotará como (5.2.a1).

Antes de explicar el cálculo de los elementos $md_{i\,4}$ y $md_{i\,5}$ de la matriz *MD*, es conveniente tener presente la regla que se aplica en las casillas de las zonas pantanosas, ya que en el juego se deberá ejercitar la **memoria**.

Se tienen 6 zonas pantanosas ($z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$) con un rango de 2 casillas en el que sólo una se traga la ficha (casilla tipo 1) y la restante no se traga la ficha (casilla tipo 2). Hay una zona (z_7) en la que el rango es de 4 y únicamente una es casilla tipo 1. Por último, el tablero consta de 2 zonas pantanosas (z_8, z_9) con 4 casillas tipo 2 y 2 del tipo 1. Estas zonas son el conjunto de casillas:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \{18, 19\},\\
z_2 &= \{21, 22\},\\
z_3 &= \{24, 25\},\\
z_4 &= \{49, 50\},\\
z_5 &= \{52, 53\},\\
z_6 &= \{55, 56\},\\
z_7 &= \{66, 67, 68, 69\},\\
z_8 &= \{11, 12, 13, 14, 15, 16\} \text{ y}\\
z_9 &= \{42, 43, 44, 45, 46, 47\}.
\end{aligned} \tag{5.2.10}
$$

Es necesario conocer la probabilidad con la que la casilla alternativa perteneciendo a una zona pantanosa, se tragará la ficha (recuérdese que el jugador de entrada sabe que casillas pertenecen a las diferentes zonas pantanosas, pero no sabe en cuales casillas el tablero se tragará a su ficha).

Por ejemplo, si algún jugador cayó en una casilla de la zona pantanosa número 7 y perdió su ficha, en jugadas posteriores, los jugadores *sabrán con certeza* que en las casillas restantes de esa zona se tiene *un riesgo nulo* de perder su ficha, obviamente si no se presentan enfrentamientos en esas casillas.

Para tener el control de cuales casillas de las diferentes zonas pantanosas ya se eligieron en movimientos anteriores al t-ésimo movimiento, se hará uso de la siguiente notación:

$MCP(t)_{4 \times 24}$ Matriz de casillas pantano en el t-ésimo movimiento.

donde

$mcp(t)_{1j}$: Casilla de alguna de las 9 zonas pantanosas.

$mcp(t)_{2j} \in \{1, 2\} = mc_{i\,k}$ con $i = (mcp_{1j} / 10)$ y $k = (mcp_{1j} \bmod 6)$.

$mcp(t)_{3j}$ $= 0$ si en hasta el t-ésimo movimiento no se ha elegido la casilla mcp_{1j}.

$= 1$ si en hasta el t-ésimo movimiento ya se ha elegido la casilla mcp_{1j}.

$mcp(t)_{4j}$ $= i$, donde i es el subíndice de la zona pantanosa z_i a la que pertenece mcp_{1j}; con $j = 1, 2, 3, \ldots, 24$.

$$ml_{zona\,i} = mcp(t)_{4j}$$

En forma matricial:

$$MCP(t) = \begin{bmatrix} mcp(t)_{1} & 18 & 19 & 21 & 22 & 24 & 25 & 49 & 50 & 52 & 53 & 55 & 56 & 58 & 57 & 58 & 69 & 71 & 72 & 73 & 74 & 75 & 76 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 & 67 \\ mcp(t)_{2} & [illegible] \\ mcp(t)_{3} & [illegible] \\ mcp(t)_{4} & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}_{4 \times 24}$$

Sea este el evento de que el tablero se trague la ficha.

Es necesario conocer la probabilidad con la que la casilla alternativa perteneciendo a una zona pantanosa, se tragará la ficha (recuérdese que el jugador de entrada sabe que casillas pertenecen a las diferentes zonas pantanosas, pero no sabe en cuales casillas el tablero se tragará a su ficha).

Por ejemplo, si algún jugador cayó en una casilla de la zona pantanosa número 7 y perdió su ficha, en jugadas posteriores, los jugadores *sabrán con certeza* que en las casillas restantes de esa zona se tiene *un riesgo nulo* de perder su ficha, obviamente si no se presentan enfrentamientos en esas casillas.

Para tener el control de cuales casillas de las diferentes zonas pantanosas ya se eligieron en movimientos anteriores al t-ésimo movimiento, se hará uso de la siguiente notación:

$MCP(t)_{4\times 28}$ Matriz de casillas pantano en el t-ésimo movimiento.

donde

$mcp(t)_{1j}$: Casilla de alguna de las 9 zonas pantanosas.

$mcp(t)_{2j} \in \{1, 2\} = mc_{l\,k}$ con $l = (mcp_{1j} / 10)$ y $k = (mcp_{1j} \bmod 0)$.

$mcp(t)_{3j}$ = 0 si en hasta el t-ésimo movimiento no se ha elegido la casilla mcp_{1j}.

= 1 si en hasta el t-ésimo movimiento ya se ha elegido la casilla mcp_{1j}.

$mcp(t)_{4j}$ = i, donde i es el subíndice de la zona pantanosa z_i a la que pertenece mcp_{1j}

con j = 1, 2, 3, ... , 28.

$$md_{\text{cont}\,0} = mcp(t)_{4j}$$

En forma matricial,

$$MCP(t)=\begin{pmatrix} 18\ 19\ 21\ 22\ 24\ 25\ 49\ 50\ 52\ 53\ 55\ 56\ 66\ 67\ 68\ 69\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 42\ 43\ 44\ 45\ 46\ 47 \\ mcp(t)_{21} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad mcp(t)_{2\,28} \\ mcp(t)_{3\,1} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad mcp(t)_{3\,28} \\ 1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 4\ 4\ 5\ 5\ 6\ 6\ 7\ 7\ 7\ 7\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9 \end{pmatrix} \qquad (5.2.11)$$

Sea éxito el evento de que el tablero se trague la ficha.

Si $mcp(t)_{4j} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se tiene que

$$P(\text{éxito}) = \begin{cases} 0, \text{ si } (i \bmod 2) = 0 \text{ y } mcp(t)_{3\,j-1} \neq mcp(t)_{3j} = 0 \text{ y } mcp(t)_{2\,j-1} = 1, \\ \quad \text{o} \\ \quad \text{si } (i \bmod 2) \neq 0 \text{ y } mcp(t)_{3\,j+1} \neq mcp(t)_{3j} = 0 \text{ y } mcp(t)_{2\,j+1} = 1, \\ \quad \text{o} \\ \quad \text{si } (i \bmod 2) = 0 \text{ y } mcp(t)_{3\,j-1} \neq mcp(t)_{3j} = 1 \text{ y } mcp(t)_{2\,j} = 2, \text{ o} \\ \quad \text{si } (i \bmod 2) \neq 0 \text{ y } mcp(t)_{3\,j+1} \neq mcp(t)_{3j} = 1 \text{ y } mcp(t)_{2\,j} = 2. \\ \\ 1/2, \text{ si } (i \bmod 2) = 0 \text{ y } mcp(t)_{3j} = mcp(t)_{3\,j-1} = 0, \text{ o} \\ \quad \text{si } (i \bmod 2) \neq 0 \text{ y } mcp(t)_{3j} = mcp(t)_{3\,j+1} = 0. \\ \\ 1, \text{ si } (i \bmod 2) = 0 \text{ y } mcp(t)_{3\,j-1} \neq mcp(t)_{3j} = 0 \text{ y } mcp(t)_{2\,j-1} = 2, \\ \quad \text{o} \\ \quad \text{si } (i \bmod 2) = 0 \text{ y } mcp(t)_{3\,j-1} \neq mcp(t)_{3j} = 1 \text{ y } mcp(t)_{2\,j} = 1, \text{ o} \\ \quad \text{si } (i \bmod 2) \neq 0 \text{ y } mcp(t)_{3\,j+1} \neq mcp(t)_{3j} = 0 \text{ y } mcp(t)_{2\,j+1} = 2, \\ \quad \text{o} \\ \quad \text{si } (i \bmod 2) \neq 0 \text{ y } mcp(t)_{3\,j+1} \neq mcp(t)_{3j} = 1 \text{ y } mcp(t)_{2\,j} = 1. \end{cases}$$

(5.2.12)

Este experimento se puede representar por medio de una urna que contiene 2 bolas, 1 negra (casilla tipo 1) y 1 blanca (casilla tipo 2). Sea A el evento de extraer una bola negra en la primer extracción, su probabilidad es igual a 1/2, esto es equivalente a decir, la probabilidad de que el tablero se trague la ficha, dado que se eligió una casilla de la zona pantanosa donde el rango de casillas pantano es 2 y se sabe que una de ellas es pantano, es igual a 1/2 si ningún jugador anteriormente a esa jugada había elegido una casilla de esa zona.

Si por el contrario, ya se había seleccionado una casilla perteneciente a esa zona, se tienen dos casos:

- Que la casilla alternativa sea aquella donde se tiene la certeza de no perder la ficha. Entonces, P (éxito) = 0.

- Que se tenga la certeza de que se va a tragar la ficha. Para este caso se tiene que P (éxito) = 1.

(5.2.13)

De manera similar sucede en lo referente a la zona pantanosa 7. Para este caso las probabilidades relevantes son:

Si $mcp(t)_{4\,j} = 7$

y ($mcp(t)_{2\,k} = 1$ para alguna k con k=13, ..., 16. y $mcp(t)_{3\,k} = 0$)[11*]

sea
$$x^{12*} = \sum_{\substack{kk \neq k \\ kk = 13}}^{16} mcp(t)_{3\,kk}$$

donde $mcp(t)_{3\,kk} = 1.$

y $(j \neq kk)^{13*}$,

entonces P(éxito | en movimientos anteriores no se haya elegido la casilla tipo 1 y hasta el t-ésimo movimiento se hayan elegido x número de casillas tipo 2 en esa zona) = 1 / (4 - x).

Si $mcp(t)_{4\,j} = 7$

y $mcp(t)_{2\,j} = 1$

además de que $mcp(t)_{3\,j} = 1$,

entonces P(éxito | en movimientos anteriores se haya elejido una casilla tipo 1 y en el t-ésimo mov se elija la casilla tipo 1) = 1.

Si $mcp(t)_{4\,j} = 7$

y $mcp(t)_{2\,k} = 1$, para alguna k con k = 13, ..., 16. y $mcp(t)_{3\,k} = 1$,

---

[11*] Con esto se aseguara que en movimientos anteriores al t-ésimo movimiento no se haya elegido una casilla tipo 1 dentro de esta zona.

[12*] X es un contador de las casillas tipo 2 de esa zona que en jugdas anteriores a la t-ésima jugada ya se han elegido. x puede tomar cualquier valor del conjunto {0, 1, 2, 3}

[13*] Se supone que la casilla en ánalisis es diferente de las casillas que ya se han elegido.

y

$$(j \neq k),$$

entonces

P(éxito | en movimientos anteriores se haya elejido una casilla tipo 1 y en el t-ésimo movimiento se elija una casilla diferente a esa) = 0.

(5.2.14)

A continuación se verá lo concerniente a las zonas pantanosas z_8 y z_9

Si

$$mcp(t)_{4\,j} = 8,$$

sea

$$i = \sum_{k=17}^{22} mcp(t)_{2\,k}$$

donde

$$mcp(t)_{2\,k} = 1$$

y

$$mcp(t)_{3\,k} = 0.$$

(k puede tomar 2 valores denotados por k_1 , k_2)

Sea

$$x = \sum_{\substack{kk \neq k_1, k_2 \\ kk = 17}}^{22} mcp(t)_{3\,kk}$$

donde

$$mcp(t)_{3\,kk} = 1.$$

donde

$$x = 0, 1, 2, 3, 4;$$

e

$$i = 0, 1, 2., \text{ y } j \neq kk.$$

Entonces

P(éxito | en movimientos anteriores no se han elejido i número de casillas pantano y hasta el t-ésimo movimietno se han elejido x casillas tipo 2) = i / (6 - x).

Si

$$mcp(t)_{1\,j} = 8$$

y

$$mcp(t)_{2\,j} = 1$$

y además

$$mcp(t)_{3\,j} = 1,$$

entonces

P(éxito | en el t-ésimo movimiento se elije una casilla tipo 1 y en movimientos anteriores ya se había elejidoi esa casilla) = 1.

(5.2.15)

Lo anterior se aplica para $mcp(t)_{4\,j} = 9$, haciendo un cambio en los límites de las sumatorias de k por $k = 23, \ldots, 28$ y los de kk por $kk = 23, \ldots, 28$.

(5.2.16)

A estas probabilidades se les va a denotar con la variable r. Nótese que $r \sim$ **Be (p).** Al cálculo de r (ecuaciones (5.2.12), ..., (5.2.16)) se denotará con (5.2.a2).

Ahora sí, se tienen todos los elementos necesarios para obtener el valor de $mdp_{cont\,12}$ y el de $mdd_{1\,8}$.

Por ejemplo, sea la casilla alternativa en estudio una casilla tipo 0, donde el estado de la naturaleza es *enfrentamiento*.

Si

$$mp(t)_{JT\,0} \geq 1$$

y

$$mp(t)_{mdl\,cont\,0} \geq 1,$$

entonces

$$mdp_{cont\,3} = 1.0/6 * (3).$$
$$mdp_{cont\,4} = 1.0/6 * (-3).$$
$$mdp_{cont\,5} = 1.0/6 * 0.5.$$
$$mdp_{cont\,6} = 1.0/6 * (-2).$$
$$mdp_{cont\,7} = 1.0/6 * 0.$$
$$mdp_{cont\,8} = 1.0/6 * 0.$$
$$mdp_{cont\,9} = 0.$$
$$mdp_{cont\,10} = 0.$$
$$mdp_{cont\,11} = 0.$$

$$mdp_{cont\,12} = -0.25.$$

De igual manera se calcula

$$
\begin{aligned}
mdd_{cont\,3} &= 1.0/6 * (15).\\
mdd_{cont\,4} &= 1.0/3 * (mdm_{ij} - 1).\\
mdd_{cont\,5} &= 1/2 * mdm_{ij}.\\
mdd_{cont\,6} &= 0.\\
mdd_{cont\,7} &= 0.
\end{aligned}
$$

$$mdd_{cont\,8} = 1.0/6 * 15 + 1.0/3 * (mdm_{ij} - 1) + 1.0/2 * mdm_{ij}.$$

Para simplificar el cálculo de los valores de $mdp_{cont\,12}$ y de $mdd_{cont\,8}$ se puede observar que las variantes posibles que se presentan en las casillas alternativas son:

CASILLA ALTERNATIVA	ENFRENTAMIENTO.				NO ENFRENTAMIENTO.					
	NEUTRAL	ZPANANO	TRIBUTO	HECHICERO	NEUTRAL	PANTANO	ZPANTANO	TRIBUTO	HECHICERO	META

esto es, que

$$md_{cont\,1} = 0 \text{ ó } 1$$

y

mc_{ij} tome cualquiera de sus valores definidos anteriormente,

donde

$$i = (md_{cont\,0} / 10)$$

y

$$j = (md_{cont\,0} \bmod 10),$$

$$md_{cont\,3} = mc_{ij}.$$

Defínanse las variables siguientes:

$mdv_{cont\,1}$ Puntaje esperado de una casilla neutral o zona de pantano con enfrentamiento.
$mdv_{cont\,2}$ Puntaje esperado de una casilla tributo con enfrentamiento.
$mdv_{cont\,3}$ Puntaje esperado de una casilla hechicero con enfrentamiento.
$mdv_{cont\,4}$ Puntaje esperado de una casilla neutral sin enfrentamiento.
$mdv_{cont\,5}$ Puntaje esperado de una casilla pantano o zona de pantano sin enfrentamiento.
$mdv_{cont\,6}$ Puntaje esperado de una casilla tributo sin enfrentamiento.

$mdv_{cont\ 7}$ Puntaje esperado de una casilla hechicero sin enfrentamiento.

$mdv_{cont\ 8}$ Puntaje en la casilla meta.

$mdv_{cont\ 11}$ Distancia esperada de una casilla neutral, zona de pantano o hechicero con enfrentamiento.

$mdv_{cont\ 12}$ Distancia esperada de una casilla tributo con enfrentamiento.

$mdv_{cont\ 13}$ Distancia esperada de una casilla neutral o hechicero sin enfrentamiento.

$mdv_{cont\ 14}$ Distancia esperada de una casilla pantano o zona de pantano sin enfrentamiento.

$mdv_{cont\ 15}$ Distancia esperada de una casilla tributo sin enfrentamiento.

$mdv_{cont\ 16}$ Distancia esperada de la casilla meta.

donde *cont* : es el número de la casilla alternativa en análisis.

Hechas las definiciones anteriores se puede continuar con el cálculo de los elementos $md_{cont\ 4}$ y $md_{cont\ 5}$ de la matriz *MD*. A este cálculo se va a denotar con (5.2.a3), debe notarse que estos valores se deberán calcular únicamente en los movimientos personales de los jugadores.

$$mdv_{cont\ 1} = \begin{cases} 1/6 * (-2-3) + 1/6 * (0.5+3) + 2/3 * 0 = -0.25, \\ \text{para } (mp(t)_{JT\ 0} \geq 1 \text{ y } mp(t)_{mdcont\ 2\ 0} \geq 1). \\ \\ 1/6 * (-2-3) + 1/6 * (0.5) + 2/3 * 0 = -0.75, \\ \text{para } (mp(t)_{JT\ 0} \geq 1 \text{ y } mp(t)_{mdcont\ 2\ 0} = 0). \\ \\ 1/6 * (-2) + 1/6 * (0.5+3) + 2/3 * 0 = 0.25, \\ \text{para } (mp(t)_{JT\ 0} = 0 \text{ y } mp(t)_{mdcont\ 2\ 0} \geq 1). \\ \\ 1/6 * (-2) + 1/6 * (0.5) + 2/3 * 0 = -0.25, \\ \text{para } (mp(t)_{JT\ 0} = 0 \text{ y } mp(t)_{mdcont\ 2\ 0} = 0). \end{cases}$$

o bien, sea

$$
mdv1 = \begin{cases} 0.0, \text{ Si } mp(t)_{JT\ 0} \geq 1 \text{ y } mp(t)_{mdcont\,2\ \ 0} \geq 1 \text{ o} \\ \text{si } mp(t)_{JT\ 0} = 0 \text{ y } mp(t)_{mdcont\,2\ \ 0} = 0. \\ -0.5, \text{ Si } mp(t)_{JT\ 0} \geq 1 \text{ y } mp(t)_{mdcont\,2\ \ 0} = 0. \\ 0.5, \text{ Si } mp(t)_{JT\ 0} = 0 \text{ y } mp(t)_{mdcont\,2\ \ 0} \geq 1. \end{cases}
$$

se tiene entonces,

$$mdv_{cont\ 1} = mdv1 - 0.25.$$

$_2 = 0.$

$$
mdv_{cont\ 2} = \begin{cases} -2, & \text{para } mp(t)_{JT} \\ mdv1 - 1.25, & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

$$
mdv_{cont\ 3} = \begin{cases} mp(t)_{JT\ 3}/2 + mdv1 - 0.25, & \text{para } mp(t)_{JT\ 3}/2 \geq 2. \\ mdv1 - 0.25 & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

$$mdv_{cont\ 4} = 0.$$

$$mdv_{cont\ 5} = r * (-2).$$

$$
mdv_{cont\ 6} = \begin{cases} -1, & \text{para } mp(t)_{JT\,2} \geq 1. \\ -2, & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

$$
mdv_{cont\ 7} = \begin{cases} mp(t)_{JT\,3}/2, & \text{para } mp(t)_{JT\,3} \geq 2. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

$$mdv_{cont\ 8} = 3 * mp(t)_{JT\,0} + 2 * mp(t)_{JT\,1} + mp(t)_{JT\,2}.$$

$$mdv_{cont\ 11} = 1/6 * 15 + 1/3 * (mdm_{ij} - 1) + 1/2 * mdm_{ij}.$$

$$mdv_{cont\ 12} = \begin{cases} 15, & \text{para } mp_{JT\ 2} = 0. \\ mdv_{cont\ 11}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$mdv_{cont\ 13} = mdm_{ij}.$$

$$mdv_{cont\ 14} = r * 15 + (1 - r) * mdm_{ij}.$$

$$mdv_{cont\ 15} = \begin{cases} 15, & \text{para } mp(t)_{JT\ 2} = 0. \\ mdm_{ij}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$mdv_{cont\ 16} = 0.$$

Dadas las variables anteriores, se obtiene que,

si $md_{cont\,1} = 0$,

entonces

$$md_{cont\,4} = \begin{cases} mdv_{cont\ 4}, & \text{para } md_{cont\,3} = 0. \\ mdv_{cont\ 5}, & \text{para } md_{cont\,3} \in \{1, 2\}. \\ mdv_{cont\ 6}, & \text{para } md_{cont\,3} = 3. \\ mdv_{cont\ 7}, & \text{para } md_{cont\,3} = 4. \\ mdv_{cont\ 8}, & \text{para } md_{cont\,3} = 5. \end{cases}$$

$$md_{cont\,5} = \begin{cases} mdv_{cont\ 13}, & \text{para } md_{cont\,3} \in \{0, 4\}. \\ mdv_{cont\ 14}, & \text{para } md_{cont\,3} \in \{1, 2\}. \\ mdv_{cont\ 15}, & \text{para } md_{cont\,3} = 3. \\ mdv_{cont\ 16}, & \text{para } md_{cont\,3} = 5. \end{cases}$$

Si

$$md_{cont\,1} = 1,$$

entonces

$$md_{cont\,4} = \begin{cases} mdv_{cont\,1}, & \text{para } md_{cont\,3} \in \{0, 2\}. \\ mdv_{cont\,2}, & \text{para } md_{cont\,3} = 3. \\ mdv_{cont\,3}, & \text{para } md_{cont\,3} = 4. \end{cases}$$

$$md_{cont\,5} = \begin{cases} mdv_{cont\,11}, & \text{para } md_{cont\,3} \in \{0, 2, 4\}. \\ mdv_{cont\,12}, & \text{para } md_{cont\,3} \in \{3\}. \end{cases}$$

Hasta aquí se termina la ecc. (5.2.a3).

Teniendo estos valores, se aplica la ecuación (5.2.a4) para determinar la casilla alternativa óptima en el j-ésimo movimiento para el jugador en turno y un guerrero en movimiento específico.

caop: Casilla alternativa óptima.
capp: Máximo puntaje esperado.

$$caop = md_{cont\,0},$$

donde

$$capp = \text{máx}\ \{ md_{cont\,4}, \text{ con } cont = 0, \dots, cont1 \}.$$

Si para algún

$$capp_1 = capp_2 = \dots = capp_n.$$ [14*]

Entonces se aplicará el criterio (5.2.4) para determinar el valor único de *capp*.

Si sucede lo anterior, se puede construir un vector v_n
donde

$$v_n = cont, \quad \text{si } md_{cont\,0} = capp.$$
$$caop = md_{v_n\,0},$$

donde

$$capd = \text{mín}\ \{md_{v_n\,5}\}.$$

A la aplicación de los criterios para obtener la casilla óptima, es decir a la aplicación de las ecuaciones (5.2.3) y (5.2.4) se le denota como ecc. (5.2.a4).

[14*] Es decir, si más de una casilla alternativa tiene el mismo puntaje esperado y éste es el óptimo, se deberá aplicar un criterio adicional, el cual deberá contemplar la distancia a la meta esperada para poder calcular la casilla alternativa óptima, esto quedó descrito al inicio de la sección 5.2.3.

A la realización sucesiva de las ecuaciones (5.2.a1), (5.2.a2), (5.2.a3) y (5.a.4) se le conocerá como (5.2.a).

Nota.

Si no se tienen casillas alternativas, entonces el guerrero permanece en la casilla de su posición actual y se continúa con otro guerrero (en caso de ser el primer tiro para un guerrero en movimiento, éste se descalificará del juego). Esta nota se agregará a la lista de reglas del juego.

Finalmente, el tomador de decisiones, en este caso el jugador en turno es quien elige la casilla a la cual moverá su ficha. Para mayor comodidad, llámese (5.2.b) al hecho de elegir una casilla alternativa. Como la decisión del jugador afecta a todo el ambiente del juego la situación del juego después de tomada la decisión, será la siguiente (5.2.c):

Sean

cae: Casilla alternativa elegida,
ral : Renglón de la matriz *MD* donde $md_{ral\,0} = cae$.

Por otro lado (aquí inicia (5.2.c1)), sean

$$md_{cont\,1} = 0 \text{ ó } 1$$

y

$mc_{i\,j}$ tome cualquiera de sus valores definidos anteriormente,

donde

$$i = (cae\ /\ 10)$$

y

$$j = (cae \bmod 10).$$

Si *no* se presenta *enfrentamiento* y la casilla *cae* es del tipo 0 o 2, entonces, basta con hacer el cambio del guerrero de la casilla posición actual a la *cae*, en forma simbólica,

si

$$md_{ral\,1} = 0$$

y

$$md_{ral\,3} \in \{0, 2\},$$

entonces,

$$JT' = mdg1(t)_{NG\ JT}\ /\ 10,$$
$$NG' = mdg1(t)_{NG\ JT} \bmod 10.$$
$$mdg\,(t+1)_{JT'\ NG'\ k} = 99, \qquad \text{para alguna } k \in \{0, 1\}$$

donde

$$mdg(t)_{JT'\ NG'\ k} = JT' * 10 + NG.$$

$$mdg1(t+1)_{NG\ JT} = md_{ral\ 0}\ .$$

$$JT' = mdg1(t+1)_{NG\ JT} \ / \ 10,$$
$$NG' = mdg1(t+1)_{NG\ JT} \bmod 10.$$

$$mdg\ (t+1)_{JT'\ NG'\ k} = JT * 10 + NG, \quad \text{para alguna } k \in \{0,1\}$$

donde

$$mdg_{\ JT'\ NG'\ k} = 99.$$

(5.2.c1)

además, si es del tipo 2, se "marca" la casilla correspondiente en la matriz $MCP(t+1)$, para "saber" que dicha casilla ya se eligió, esto es, si

$$md_{ral\ 3} = 2,$$

entonces para alguna k donde

$$mcp(t)_{\ 1\ k} = cae, \qquad \text{con } k \in \{1, \ldots, 28\}$$

se tiene que

$$mcp(t+1)_{\ 3\ k} = 1.$$

(5.2.c1.1)

Si se eligió una *casilla pantano*, se elimina al guerrero en movimiento, tanto de la matriz de puntos como de las matrices de distribución de guerreros y se marca en la matriz de casillas pantano como sigue:

Si

$$md_{ral\ 3} = 1,$$

se efectúa la ecc (5.2.c1.1) y además,

$$JT' = mdg1(t)_{NG\ JT} \ / \ 10,$$
$$NG' = mdg1(t)_{NG\ JT} \bmod 10.$$

$$mdg\ (t+1)_{JT'\ NG'\ k} = 99, \qquad \text{para alguna } k \in \{0, 1\}$$

donde

$$mdg(t)_{\ JT'\ NG'\ k} = JT * 10 + NG.$$

$$mdg1(t+1)_{NG\ JT} = 0.$$
$$mp(t+1)_{\ JT\ 1} = mp(t)_{\ JT\ 1} - 1.$$

(5.2.c2)

Si la *casilla* elegida fue una de *tributo*, se verifica que el jugador en turno tenga tributos, de no tener, el jugador en turno pierde su ficha, pero si sí tiene se efectúa el cambio de casilla y pierde un punto, es decir,

si

$$md_{ral\,3} = 3,$$

y, si

$$mp(t)_{JT\,2} = 0,$$

entonces, se realiza la ecc. (5.2.c2).

En otro caso ($mp(t)_{JT\,2} > 0$), se realiza la ecc. (5.2.c1) y

$$mp(t+1)_{JT\,2} = mp(t)_{JT\,2} - 1. \qquad (5.2.c3)$$

Si se tiene la posibilidad de cambiar dos guerreros obtenidos en enfrentamientos por un tributo, se aplica la regla correspondiente a las *casillas* de *hechicero* y evidentemente se hace el cambio de casilla del guerrero en movimiento. Lo anterior es igual a:

si

$$md_{ral\,3} = 4,$$

entonces

Si $mp(t)_{JT\,3} \geq 2$,

$$mp(t+1)_{JT\,2} = mp(t)_{JT\,2} + mp(t)_{JT\,3} / 2,$$

(parte entera de la división)

$$mp(t+1)_{JT\,3} = mp(t)_{JT\,3} - (mp(t)_{JT\,3} / 2) * 2. \qquad (5.2.c4)$$

Se prosigue a realizar la ecc. (5.2.c1).

Si se prefirió una casilla *con enfrentamiento*, se tiene

$$md_{ral\,1} = 1$$

y si

$$md_{ral\,3} \in \{0, 2\},$$

y si específicamente

$$md_{ral\,3} = 2,$$

se aplica la ecc. (5.2.c1.1).

Sea DD el número del dado obtenido en un enfrentamiento (movimiento aleatorio y por consiguiente t aumenta en 1). Nótese que $DD \sim$ Uniforme con $p = 1/6$.

(5.2.c5)

$$band = \begin{cases} 1 \text{ y } t \text{ incrementa en 1 si } DD \in \{1, 3\}. \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

(5.2.c6)

donde *band*: es una variable que indica si se puede seguir jugando con ese mismo guerrero en movimiento.

Si $DD = 5$, se efectúa el cambio de casilla del guerrero en movimiento y dependiendo de si el jugador contrincante tiene señales, le entregará una al jugador en turno, además de perder a su guerrero. En forma simbólica se tiene:

$mp(t+1)_{JT\,0} = mp(t)_{JT\,0} + 1.$ Si $mp(t)_{md\,ral\,2\;0}$

$\geq 1.$

$$mp(t+1)_{md\,ral\,2\;0} = mp(t)_{md\,ral\,2\;0} - 1.$$
$$JT' = mdg1(t)_{NG\;JT} / 10,$$
$$NG' = mdg1(t)_{NG\;JT} \bmod 10.$$

Sean

$$nn = (mdg(t)_{JT'\;NG'\;k} \bmod 10) \text{ y } mdg(t+1)_{JT'\;NG'\;k} = 99,$$
para alguna $k \in \{0, 1\}$

donde

$$mdg(t)_{JT'\;NG'\;k} \neq JT * 10 + NG,$$

entonces,

$$mdg1(t+1)_{md\,ral\,2\;nn} = 0.$$
$$mp(t+1)_{md\,ral\,2\;1} = mp(t)_{md\,ral\,2\;1} - 1.$$
$$mp(t+1)_{JT\,3} = mp(t)_{JT\,3} + 1.$$

(5.2.c7)

Si $DD = 6$,

Realizar la ecç. (5.2.c7)

Si

$$mp^{(t-1)}_{JT\,0} \geq 1,$$

entonces,

$$mp(t+1)_{md\,ral\,2\;3} = mp(t)_{md\,ral\,2\;3} + 1$$

y

$$mp(t+1)_{JT\,0} = mp(t)_{JT\,0} - 1.$$

$$mp(t+1)_{md\,ral\,2\;0} = mp(t)_{md\,ral\,2\;0} + 1.$$

(5.2.c8)

Al conjunto de ecuaciones (5.2.c5), (5.2.c6), (5.2.c7) y (5.2.c8) se les conocerá como (5.2.cc).

Si se eligió una *casilla tributo*, se aplica primero la ecc (5.2.c3) y si como resultado de esta aún se cuenta con el guerrero, se lleva a cabo el enfrentamiento con el jugador correspondiente. En otra forma,

si

$$md_{ral\,3} = 3,$$

entonces, se realiza la ecc. (5.2.c3) y si

$$mp_{JT\,2} \neq 0,$$

entonces, se efectúa la ecc. (5.2.cc).

Si la *casilla* elegida fue una *hechicero*, se verifica que se puedan cambiar guerreros contrarios por tributos y posteriormente se efectúa el enfrentamiento, como sigue:

si

$$md_{ral\,3} = 4,$$

entonces, se realizan las ecuaciones (5.2.c4) y (5.2.cc) en ese orden.

A la aplicación de las reglas del juego se va a denominar (5.2.c).

Nota.

El símbolo "/" representa al cociente de la respectiva división, no así en el cálculo de las variable r, $md_{cont\,4}$ y $md_{cont\,5}$ para los que es el resultado de esa división (cociente y residuo).

Una regla muy importante es la de las casillas iniciales, para que cuando un jugador haga su primer jugada la casilla de salida sea la inmediata frontal de cada inicio (regla 2.14), se requiere de valores iniciales en los elementos $mdg(t)_{i\,j\,k}$ y $mdg1(t)_{i'\,j'}$, además de que el número del dado se decremente en uno ($D' = D - 1$). Por lo que se tiene:

$$mdg(ijud)_{0\,2\,0} = JT * 10 + 0 \;\; \text{y} \;\; mdg1(ijud)_{0\,JT} = 2.$$
$$mdg(ijud)_{0\,5\,0} = JT * 10 + 1 \;\; \text{y} \;\; mdg1(ijud)_{1\,JT} = 5.$$
$$mdg(ijud)_{0\,8\,0} = JT * 10 + 2 \;\; \text{y} \;\; mdg1(ijud)_{2\,JT} = 8.$$
$$mdg(ijud)_{6\,3\,0} = JT * 10 + 3 \;\; \text{y} \;\; mdg1(ijud)_{3\,JT} = 63.$$
$$mdg(ijud)_{7\,0\,0} = JT * 10 + 4 \;\; \text{y} \;\; mdg1(ijud)_{4\,JT} = 70.$$
$$mdg(ijud)_{3\,9\,0} = JT * 10 + 5 \;\; \text{y} \;\; mdg1(ijud)_{5\,JT} = 39.$$
$$mdg(ijud)_{3\,6\,0} = JT * 10 + 6 \;\; \text{y} \;\; mdg1(ijud)_{6\,JT} = 36.$$
$$mdg(ijud)_{3\,3\,0} = JT * 10 + 7 \;\; \text{y} \;\; mdg1(ijud)_{7\,JT} = 33.$$

donde

$$\text{ijug} = 0, 1, \ldots, JUG - 1.$$

Lo anterior se puede representar fácilmente así:

$$mdg(ijud)_{k_{1\,i}\,k_{2\,i}\,0} = JT * 10 + kk_i$$

y

$$mdg1(ijud)_{kk\,i\,JT} = k_{1\,i} * 10 + k_{2\,i}.$$

con $i = 0, \ldots, 8.$

Donde,

$$kk = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),$$
$$K = (2, 5, 8, 63, 70, 39, 36, 33),$$
$$k_{1\,i} = K_i / 10,$$
$$k_{2\,i} = K_i \bmod 10.$$

(5.2.d)

Nota.

Si el elemento $mdg(ijud)_{k_{1\,i}\,k_{2\,i}\,0}$ correspondiente ya está ocupado por otra ficha se utiliza al elemento $mdg(ijud)_{k_{1\,i}\,k_{2\,i}\,1}$, más aún si ambos están ocupados, sólo se determina el valor para $mdg1(ijud)_{kk\,i\,JT}$.

Finalmente, las reglas para la terminación del juego son de vital importancia. Recuérdese que el juego termina cuando cuatro jugadores llegan a la meta, pero ¿qué sucede si participan 2 o 3 jugadores? o cuando son descalificados 5, 6, 7, ... jugadores por el hecho de que ya no cuentan con guerreros para avanzar y los jugadores restantes no sean los suficientes para formar la TRIPLE ALIANZA y denominar al MEXICA, o cuando se hayan realizado un gran número de jugadas y aún no se pueda realizar el conteo.

Por lo tanto, es necesario adicionar la nomenclatura siguiente al modelo:

ww: Número de jugadores con los que se realiza el conteo.
w : Número de jugadores que hasta el t-ésimo movimiento han llegado a la meta.
$contww$: Número de jugadores descalificados.
t : t-ésimo movimiento realizado.

Sea la matriz

$MT(t)_{wj}$ Matriz total en el t-ésimo movimiento, con $j = 0, 1$.

donde

$mt(t)_{w0}$ es el jugador que fue el número w en llegar a la meta con un puntaje igual a $mt(t)_{w1}$.

$$mt(t)_{w0} = 0, \ldots, 7.$$
$$mt(t)_{w1} = 0, 1, \ldots, 6 * JUG + 16.$$

Con las ecuaciones que a continuación se muestran, se hace lo correspondiente a cuando un jugador llega a la meta en el t-ésimo movimiento y se va a conocer como (5.2.e).

$$mt(t+1)_{w0} = JT.$$
$$mt(t+1)_{w1} = mp(t)_{JT\,0} * 3 + mp(t)_{JT\,1} * 2 + mp(t)_{JT\,2}.$$
$$w = w + 1.$$

$\forall\, i$ con $i = 0, \ldots, 8$. donde

$$mdg1(t)_{i\,JT} \neq 0, \qquad \text{para alguna } k \text{ con } k = 0, 1;$$

donde

$$mdg(t)_{(mdg1_{i\,JT})/10 \;\; (mdg1_{i\,JT}) \bmod 10 \;\; k} = JT * 10 + i,$$

se tiene que

$$mdg(t+1)_{(mdg1_{i\,JT})/10 \;\; (mdg1_{i\,JT}) \bmod 10 \;\; k} = 99,$$

y

$$mdg1(t+1)_{i\,JT} = 0.$$

Además,

$$mp(t+1)_{JT\,0} = 0,$$
$$mp(t+1)_{JT\,1} = 0,$$
$$mp(t+1)_{JT\,2} = 0,$$

$$mp(t+1)_{JT3} = 0.$$

(5.2.e)

Con la ecuaciones (5.2.e), se enlista al jugador que llegó a la meta y se calcula su correspondiente puntaje, además de eliminarse del juego a todos sus guerreros.

El MEXICA se determina de la siguiente manera:

$$\text{máx}_i\ [mt(t)_{i1}],$$

donde t es el último valor que obtuvo.

El MEXICA es

$$mt(t)_{i0}.$$

(5.2.e1)

Esto es, el MEXICA es el jugador que obtuvo el máximo puntaje.

Sea "JUEGO" la evaluación de las ecuaciones (5.2.a1), (5.2.b) y adicionalmente al resultado obtenido en (5.2.b), para

$$cae = 0 \text{ (casilla meta)},$$

se lleva a cabo la ecuación (5.2.e).

Y para

$$cae \neq 0,$$

se realiza la ecc. (5.2.c).

A continuación se muestra el algoritmo del desarrollo de un juego completo (este algoritmo se va a ver más a detalle en el siguiente capítulo).

Los valores iniciales para comenzar el juego son:

$$ww = \begin{cases} 4, & \text{para } JUG \geq 4. \\ JUG, & \text{para } JUG < 4. \end{cases}$$

(5.2.17)

Cabe señalar que (5.2.17) deberá agregarse a las reglas del juego.

Primeramente, se iniciarán las matrices y variables necesarias.

$contjug = 0.$
$w = 0.$
$ijud = 0.$
$band = 0.$

$\forall\ i$, con $i = 0, \ldots, ww.$

$mt(0)_{i\,0} = 99,$
$mt(0)_{i\,1} = 0.$

$\forall\ i$, con $i = 0, \ldots, JUG - 1.$

$mp(0)_{i\,0} = 1.$
$mp(0)_{i\,1} = 8.$
$mp(0)_{i\,2}$ Este número se genera aleatoriamente de acuerdo con los resultados obtenidos en la sección 5.1.2 de este capítulo, específicamente con el algoritmo de la sección 5.1.3 denotado por (5.1.22).
$mp(0)_{i\,3} = 0.$

$\forall\ i$ y j, con $i = 0, \ldots, 7.$, y $j = 0, \ldots, JUG - 1.$

$mdg1(0)_{i\,j} = 0.$

$\forall\ i, j$ y k, con $i = 0, \ldots, 8.$, $j = 0, \ldots, 9.$, y $k = 0, 1.$

$mdg(0)_{i\,j\,k} = 99.$

$\forall\ j$, con $j = 1, \ldots, 28.$

$mcp(0)_{3\,j} = 0.$

A continuación se inicia propiamente el juego.

$t = 0.$
$\forall\ w < ww$ y $contjug < 10.$
$contww = 0.$
$\forall\ JT$
$\forall\ mt(t)_{1\,0} \neq JT.$ Esto es, el jugador en turno deberá ser un jugador diferente a los que ya han llegado a meta.
$D = d \sim$ Uniforme ($p = 1/6$).
$\forall\ ijug = 0, 1, \ldots, JUG - 1.$ Aplicar la ecuación (5.2.d) y $ijug = ijug + 1.$

Un participante va a jugar mientras tenga por lo menos un guerrero en el tablero, esto es, $mp(t)_{JT\ 1} \geq 1$, y podrá mover a los guerreros que tenga disponibles, es decir, el jugador *JT podrá mover al guerrero i* con $i = 0, 1, 2, \ldots, 8$; si y sólo sí $mdg1(t)_{i\ JT} \neq 0$. También se tendrá en cuenta la estrategia propuesta al inicio de esta sección.

Lo anterior se denota así:

Sea *cont* un número entero positivo que denote el número de guerreros del jugador *JT* que de acuerdo con el tiro del dado *D* tenga la meta como una casilla alternativa.

$cont = 0$.
$cont = cont + 1.\ \forall\ mdm_{(mdg1(t)_{k\ JT})/10\quad (mdg1(t)_{k\ JT})\bmod 10} = D$, con $k = 0, \ldots, 8$.
$NG = 0$.
mientras $NG \leq 7$.
Para ($mdg1(t)_{NG\ JT} \neq 0$ y $cont \neq 0$ y $mp(t)_{JT\ 3} \geq 2$ y se cumple la regla 2.4 para $mdg1(t)_{NG\ JT}$)
Aplicar las ecuaciones ("JUEGO").
Mientras $band = 1$. Aplicar las ecuaciones ("JUEGO") con $D = 1$.
para alguna k con $k = 0, 1$.
donde $mdg(t)_{(mdg1(t)_{i\ JT})/10\quad (mdg1(t)_{i\ JT})\bmod 10\quad k} = JT * 10 + i$,
$mdg(t+1)_{mdg1(t)_{i\ JT})/10\quad (mdg1(t)_{i\ JT})\bmod 10\quad k} = 99$.
$mdg1(t+1)_{NG\ JT} = 0$.
$NG = NG + 1$. y $t = t + 1$.
$NG = 0$.
si es el primer tiro para *NG* de *JT* entonces, decrementar *D* en uno ($D' = D - 1$), en caso contrario $D' = D$.
mientras $NG \leq 7$.
Para $mdg1(t)_{NG\ JT} \neq 0$
Aplicar ecc. ("JUEGO") para *D'*
Mientras $band = 1$. Aplicar las ecuaciones ("JUEGO").
$NG = NG + 1$. y $t = t + 1$.
Fin del juego, realizar (5.2.e1) para $w = ww$ y por consiguiente $JT = JUG$.
Si $mp(t)_{JT\ 1} = 0$, entonces $contww = contww + 1$.
En otro caso, $JT = JT + 1$.
$contador = contador + 1$.
$w = ww$ para $contador = 5$.
$contador = 5$, $w = ww$, fin del juego, realizar (5.2.e1) para $contww = jug$.

Para simular un juego completo se tiene el siguiente algoritmo de decisiones sucesivas:

❶ inicia un jugador
❷ se estima la casilla alternativa óptima
   ① se recolecta información para la construcción de la matriz de decisiones,
   ② se aplica el criterio del valor monetario esperado para sugerir una casilla
❸ se toma la decisión
❹ se aplican las reglas del juego para la decisión tomada
❺ si aún no se llega a la meta,
   ① si el jugador en turno no ha movido todas sus fichas,
      se realizan los pasos 2, 3 y 4 para la siguiente ficha del jugador en turno,
   ② en caso contrario, si no se ha terminado el juego,
      se sigue con otro jugador y se hacen los pasos 2, 3 y 4.
❻ se denomina al MEXICA y a la TRIPLE ALIANZA.

Para terminar este capítulo, se observa que el modelo construido para sugerir una casilla alternativa es un modelo matemático de optimización.

La información juega un papel fundamental en la toma de decisiones y en este caso sí es posible tener acceso a toda la información, sin embargo, en un juego real de *TACHTLI*, es posible que los jugadores no tengan presente toda esta información o que la olviden (quizá por parecer mucha, o simplemente por distracción). En el modelo afortunadamente es posible hacer una abstracción para tener el control de esta información y proporcionar al jugador un panorama completo de la situación que guarda el juego antes de que elija una casilla.

El modelo que representa el desarrollo del juego, es un modelo matemático descriptivo, pero de gran ayuda para afinar las reglas del juego que finalmente es lo que se pretende con él.

5.3 SEGUNDA ETAPA DEL JUEGO.

5.3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA PARA LOS PARTICIPANTES DEL JUEGO DE MESA TACHTLI EN LA SEGUNDA ETAPA DEL JUEGO.

Antes de iniciar el análisis de la segunda etapa del juego, se van a recordar las reglas del juego en esta etapa.

En esta etapa, el *objetivo* del MEXICA es obtener todas las señales con las que llegó la TRIPLE ALIANZA. El *objetivo* de la TRIPLE ALIANZA es matar a todos los guerreros MEXICAS, antes de un tiempo determinado. Para ganar, ambos jugadores deben lograr su objetivo antes de que lo haga su oponente.

La segunda etapa del juego teniendo el diseño del tablero que se muestra en la figura 4.9 se juega de la siguiente forma:

- **3.0) Turno de los jugadores.** A esta etapa le dará inicio el jugador (MEXICA o TRIPLE ALIANZA) que haya sido el primero en llegar a la meta en la etapa anterior.

- **3.1) Distribución de las fichas.** La distribución inicial de las fichas en el tablero se señala en la figura 4.9. Los participantes pueden elegir donde colocarlas.

- **3.2) Colocación de las señales.** La TRIPLE ALIANZA coloca las señales con las que llegó a esta etapa de acuerdo a su criterio sobre algunos de sus guerreros de forma que estos puedan "custodiarlas".

- **3.3) Hechizo.** Al llegar un guerrero a una casilla donde ya hay un guerrero contrario, se dice que el primero hechiza al segundo. El hechizo consiste en que el guerrero hechizado no puede moverse hasta que el guerrero que lo hechizó se mueva de esa casilla.

    - 3.3.1) El MEXICA puede mantener hechizados hasta dos guerreros simultáneamente, mientras que la TRIPLE ALIANZA en el caso de tener 8 o más guerreros hechiza solo a un guerrero MEXICA; si cuenta con 7 o menos guerreros hechiza hasta 2 guerreros MEXICAS.

❑ 3.4) **Desplazamiento de las fichas.**

❑ 3.4.1) Tipos de movimientos, se pueden realizar dos tipos de movimientos:

➊ Movimiento diagonal, con este movimiento se puede hechizar.

➋ Movimiento horizontal o vertical, con este movimiento se puede comer.

Los guerreros que poseen una señal pueden realizar cualquiera de los dos movimientos anteriores.

❑ 3.4.2) Movimiento de las fichas.

❑ 3.4.2.1) Ambos jugadores (MEXICA y TRIPLE ALIANZA) se pueden desplazar de una a dos casillas.
❑ 3.4.2.2) El guerrero que posee la señal sólo puede moverse una casilla en cualquier dirección.
❑ 3.4.2.3) Dos o una ficha en una casilla impiden el paso, es decir, no se pueden efectuar saltos.

❑ 3.5) **Obtención de señales.** Al caer un guerrero MEXICA sobre un guerrero contrario que custodie la señal se pueden presentar dos casos:

➊ Si el movimiento fue de hechizo se pelean la señal, esto es, se lanza el dado y si cae un número par, el MEXICA se queda con la señal y el guerrero contrario muere automáticamente.

➋ Si el movimiento fue por muerte se queda el MEXICA con la señal sin pelear con el dado.

❑ 3.6) **Casillas de tributo.** Por medio de un mecanismo aleatorio se escogen casillas para que los jugadores pierdan tributos, es decir, en caso de caer en una casilla de este tipo y no tener tributos se pierde la ficha de guerrero (y señal en su caso).

En esta etapa, el problema lo tienen ambos jugadores MEXICA y TRIPLE ALIANZA cada uno en su correspondiente turno. El medio ambiente lo forman las condiciones mismas del juego, es decir, la distribución inicial de las fichas, la distribución de las señales, las casillas pantano, e.t.c.. Cada jugador tiene su propio objetivo: el *objetivo* del MEXICA es obtener todas las señales con las que llegó la TRIPLE ALIANZA, mientras que el *objetivo* de la TRIPLE ALIANZA es matar a todos los guerreros mexicas, antes de un tiempo determinado.

Las decisiones que los jugadores tienen que tomar para alcanzar sus objetivos son:

1. Decidir qué ficha mover.
2. Decidir qué movimiento realizar con dicha ficha de guerrero. Estos movimientos pueden ser:
   - Diagonal (hechizo).
   - Horizontal (muerte).
   - Vertical (muerte).

   Estos movimientos están sujetos a las siguientes restricciones:

   - El MEXICA puede mantener hechizados hasta dos guerreros simultáneamente.
   - La TRIPLE ALIANZA en el caso de tener 8 o más guerreros puede hechizar sólo a un guerrero MEXICA; si cuenta con 7 o menos guerreros puede hechizar hasta a 2 guerreros MEXICAS simultáneamente.
   - Ambos jugadores (MEXICA y TRIPLE ALIANZA) se pueden desplazar de una a dos casillas.
   - El guerrero que posee la señal sólo puede moverse una casilla en cualquier dirección.
   - Dos o una ficha en una casilla impiden el paso, es decir, no se pueden efectuar saltos.

Los resultados de estas elecciones pueden ser:

- El jugador contrincante pierde movilidad en su ficha.
- El jugador en turno gana un guerrero.
- El jugador en turno gana una señal y un guerrero.
- El jugador en turno únicamente se mueva a otra casilla.

Adicionalmente, existen otros factores que afectan a los resultados de las selecciones disponibles (variables no controlables) y éstos son:

❶ El número del dado obtenido por el MEXICA al realizar un movimiento diagonal con el que hechiza a la TRIPLE ALIANZA para pelear la señal. Si el dado es un número par, el MEXICA se queda con la señal y el guerrero contrario muere automáticamente. Si el número del dado es non, únicamente mantiene hechizado al guerrero de la TRIPLE ALIANZA.

❷ Las casillas tributo, donde los jugadores pierden un tributo, o bien, de no poseer alguno, pierden a su guerrero, ya que éstas son determinadas por medio de un mecanismo aleatorio.

Algunas observaciones acerca de este problema son las siguientes:

Primero, se puede decir que el problema para los jugadores en la segunda etapa del juego, es un poco más estratégico que el que tienen los jugdores en la primer etapa, ya que revisando sus características, se tiene que:

- En cuanto al *rango* de este problema, es decir, el efecto de su solución no puede anularse o modificarse fácilmente, esto es, una vez que el MEXICA obtinen una señal, se aproxima más a ser el vencedor (esta señal no la puede reponer posteriormente la TRIPLE ALIANZA), asu vez, si un MEXICA pierde un guerrero, la TRIPLE ALIANZA está más cerca de lograr su objetivo (cuando un guerrero muere, posteriormente no se puede reponer esa ficha). Ahora bien, en la primer etapa, cuando un jugador pierde puntos, tiene la posibilidad de que después gane igual o incluso más puntos de los que perdió; por ejemplo, cuando un jugador pierde un guerrero en una casilla pantano y posteriormente con otro guerrero efectúa un enfrentamiento y como resultado de éste obtiene la señal de su contrincante, entonces, por un lado perdió 2 puntos, que posteriormente recuperó con una señal (3 puntos).

- *Alcance*. En la segunda etapa, ambos jugadores son afectados por la decisión tomada por alguno de éllos; por ejemplo, cuando un jugador decide hechizar al otro, este último pierde movilidad en su ficha. Esto es, la decisión tomada por un jugador afecta directamente a todo la situación del juego. En la primer etapa, a simple vista, el resultado de la elección de un jugador afecta únicamente la situación de ese jugador, o más aún, cuando se presentan enfrentamientos, su elección afecta a dos jugadores, pero en realidad, la decisión de algún jugador afecta a todo el juego, ya que todos se ven afectados con el puntaje de un jugador en la denominación del MEXICA, además de que la llegada a la meta de un jugador repercute en todos los jugadores, también, por ejemplo, cuando un jugador pierde a un guerrero en una casilla de pantano afecta a todos los jugadores por que cambia el análisis que pueden hacer posteriormente respecto al puntaje esperado en esa casilla.

- *Orientación a fines.* En la segunda etapa, si bien es cierto que, al elegir una casilla tributo, el azar es el que determina si el jugador debe rendir tributo o no, también es cieto, que en gran medida las elecciones de un jugador permiten que logre o no su objetivo. En la primer etapa, aunque las elecciones de las casillas las hagan los jugadores, el resultado se su elección depende en gran medida del azar para determinar si logran o no su objetivo; por ejemplo, en la elección de una casilla de alguna zona de pantano, en la elección de una casilla con enfrentamiento, e incluso en el número de casillas por avanzar.

En consecuencia del análisis de estas tres características de los problemas en la primer y segunda etapa del juego, se concluye que *la segunda etapa es más estratégica* que la primera.

Segundo, el problema que tienen los jugadores cada uno en su turno correspondiente, es un problema en condiciones de *incertidumbre completa* porque el jugador en turno no sabe con qué probabilidad va a realizar el siguente movimiento el jugador contrincante.

Tercero, este problema al igual que el de la primer etapa, es *un problema competitivo* porque por un lado, el logro del objetivo de un jugador implica la disminución del alcance del objetivo del otro jugador, esto a simple vista no se nota porque ambos jugadores tienen objetivos "diferentes"[14], pero si se observa más detenidamente, se tiene que, si el MEXICA obtiene una señal de la TRIPLE ALIANZA, entonces el MEXICA se acerca más a su objetivo y la TRIPLE ALIANZA disminuye la posibilidad de lograr el suyo, en el sentido de que el objetivo de la Tripla Alianza es ganar el juego, ahora bien, si la TRIPLE ALIANZA, hace que el MEXICA pierda un guerrero, se aproxima más a ganar el juego y el MEXICA está más próximo a perderlo. Y por otro lado, puede existrir cierta cooperación entre los jugadores involuntariamente, esto se logra gracias a las casillas tributo, por ejemplo, si el MEXICA cae en una casilla de tributo y no tienen tributos, pierde a su guerrero, con lo cual, la TRIPLE ALIANZA se aproxima a lograr su objetivo, y por tanto, el MEXICA coopera con la TRIPLE ALIANZA; de manera similar ocurre cuando la TRIPLE ALIANZA pierde a un guerrero en una casilla tributo, porque pierde elementos para defender a sus señales y evitar que el MEXICA las obtenga, por tanto coopera con el MEXICA en el

[14] El objetivo de ambos jugadores es ganar el juego, aunque para lograrlo cada uno lo tenga que hacer de diferente manera.

logro de su objetivo. Entonces, en la segunda etapa del juego se tiene una situación competitiva que involucra tanto al conflicto como a la cooperación.

Para la ubicación de este problema en el tabla 3.1 del capítulo 3, es decir, para determinar si este problema es estático o dinámico en el que dos o más "personas"[15] toman una decisión, se observa que el tratamiento del tiempo en este problema es estático a simple vista, porque de acuerdo con las condiciones que aumentan la dificultad para quien toma las decisiones (sección 2.6 del capítulo 2), se tiene que el medio ambiente no cambia en forma dinámica, de modo que no afecta la efectividad de los cursos de acción o los valores sus resultados, es decir, con un movimiento horizontal o vertical, siempre se va a perder una ficha de guerrero y una señal cuando en la casilla elegida se encuentre un guerrero contrario sólo o custodiando una señal, con un movimiento diagonal, siempre se va a lograr que el jugador contrincante pierda movilidad en su ficha (si en la casilla elegida se situa un guerrero contrario), pero en las casillas de tributo no siempre se va a perder un tributo, esto es, el resultado a obtener al elegir una casilla donde ésta es una casilla tributo, no es constante en todo el juego, ya que varía de acuerdo con las condiciones que en el momento de la elección guarde el juego, por tanto se pueden obtener resultados distintos: perder un tributo, perder un guerrero o perder un guerrero y una señal; por lo anterior, se concluye que el juego en la segunda etapa es un problema *dinámico*.

Apesar de tratarse de un problema dinámico, se tiene un juego y por tanto debe cumplir con los axiomas de los juegos (expuestos en la sección 3.3.1.4 del capítulo 3).

La segunda etapa del juego *TACHTLI* es la secuencia de los siguientes movimientos (se asume que ambos jugadores ya han distribuido sus fichas en el tablero y que el tablero por medio de un mecanismo aleatorio ya determinó cuáles casillas son casillas tributo, además de que el turno de los jugadores corresponde al orden de llegada a la meta en la primer etapa):

- m_1: El jugador J_1 elige qué ficha de guerrero mover y el movimiento de esa ficha (horizontal, vertical u horizontal de una o dos casillas -teniendo en cuenta las restricciones de estos 'movimientos'-).
- m_2: El tablero determina si se paga tributo o no.
- m_3: El jugador J_1 paga tributo o pierde a su guerrero o no hace nada, de acuerdo al resultado del movimiento m_2.
- m_4: El jugador J_2 pierde a su ficha de guerrero o pierde a su ficha de guerrero y de señal o pierde movilidad en su ficha o no le afectan los movimientos m_1, m_2 y m_3.
- m_5: Se realiza el movimiento m_1 pero ahora para el jugador J_2.

[15] Dos jugadores son los que toman la decisión (Mexica y Triple Alianza), pero en determinado momento, el tablero decide qué casilla es una casilla tributo, por tanto, se tienen más de dos tomadores de decisiones.

. Se realizan los movimientos m_2, m_3 y m_4 para el jugador J_2.

.

m_9: Si la TRIPLE ALIANZA obtiene los ocho guerreros del MEXICA o el MEXICA obtiene todas las señales de la TRIPLE ALIANZA o el MEXICA ya no tiene guerreros o la TRIPLE ALIANZA no tiene señales o se termina el tiempo, entonces se da por terminado el juego, en caso contrario se continúa con los movimientos m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7 y m_8 hasta que sea el fin del juego.

Ahora bien, los axiomas son:

❶ Un número v (la longitud del juego *TACHTLI* en la segunda etapa), apesar de que podría pensarse que se trata de un juego con un número infinito de movimientos, el hecho de la intervención del tiempo para determinar la terminación del juego hace que v tome un cierto valor.

❷ Un conjunto finito Ω (conjunto de todos los "juegos" de *TACHTLI*), nuevamente puede pensarse en un conjunto infinito de "juegos", pero si se considera a un "juego" con una distribución de fichas de entrada para ambos jugadores y una selección inicial de las casillas tributo, entonces de ese "juego" se puende tener un conjunto de "juegos" (π).

❸ Por cada $k = 1, 2$: Una función

$$F_k = F_k(\pi), \quad \pi \text{ en } \Omega.$$

Donde $F_k(\pi)$ es el resultado de los "juegos" π para el jugador k, es decir, el MEXICA y la TRIPLE ALIANZA al terminar un "juego" obtinen un resultado que consiste en ganar, perder o empatar.

❹ Por cada $k = 1, \ldots, v, v+1$: Una partición A_k en Ω. Donde A_k es el patrón del árbitro de información, un $\mathbf{A}_k$ de A_k es la información real del árbitro en el movimiento m_k. (Para $k = v+1$: Al cabo del juego). Es decir, para cada movimiento, se cuenta con la información que refleja la situación que guarda el juego $\mathbf{A}_k$, que a su vez es una parte de la información que reprensenta toda la evolución del juego hasta el k-ésimo movimiento.

❺ Por cada $k = 1, \ldots, v$: Una partición B_k en Ω. B_k consisten de 3 conjuntos $\mathbf{B}_k(k)$, $k = 0, 1, 2$, enumerados en esta forma. B_k es el patrón de asignación, un $\mathbf{B}_k(k)$ de B_k, es la asignación real del movimiento m_k. Por ejemplo, el primer movimiento lo hace el jugador J_1, el segundo lo lleva a cabo el tablero, mientras que el quinto corresponde al jugador J_2, esta asignación de movimientos se describe en B_k, mientras que $\mathbf{B}_2$ (0) indica específicamente que el movimiento 2 corresponde al tablero, entonces através de los movimientos se va formando el conjunto de movimientos para el tablero, lo mismo sucede para J_1 ($\mathbf{B}_k$ (1)) y para J_2 ($\mathbf{B}_k$ (2)).

- Por cada k = 1, ... , v y cada k = 0, 1, 2: Una partición $C_k(k)$ en $\mathbf{B}_k$ (k). C_k es el patrón de opción, un $\mathbf{C}_k$ de $C_k(k)$ es la opción real, del jugador k en el movimiento m_k. (para k = 0: de aleatoriedad en la distribución de fichas tributo en el tablero). Es decir, el MEXICA tienen un conjunto de posibles alternativas al realizar su k-ésimo movimiento $C_k(1)$ y cuando por ejemplo, el MEXICA elige una opción (movimiento diagonal, horizontal o vertical con una ficha determinada), va formando el conjunto $\mathbf{C}_k$, esto es, el conjunto de sus jugadas; de igual forma lo hace la TRIPLE ALIANZA y el tablero también forma su propio conjunto $\mathbf{C}_k$ de $C_k(0)$ que consiste en la determinación de la casilla tributo en cada uno de sus movimientos.

- Por cada k = 1 , ... , v y cada k = 1, 2: Una partición $D_k(k)$ en $\mathbf{B}_k(k)$. D_k es el patrón de información del jugador k, un $\mathbf{D}_k$ de $D_k(k)$ es la información real del jugador k, en el movimiento m_k. Esto es, cuando un jugador va a realizar su elección, cuenta con la información que señala la situación del juego. Esto es, en cada movimiento, los jugadores cuentan con determinada información (con cuántas fichas de tributos, señales y guerreros cuentan ambos jugadores y en qué casillas se sitúan éstas dos últimas).

- Por cada k = 1 , ... , v y cada $\mathbf{C}_k$ de $C_k(0)$: Un número $p_k(\mathbf{C}_k)$; donde $p_k(\mathbf{C}_k)$ es la probabilidad de la opción real $\mathbf{C}_k$ en el movimiento aleatorio m_k; es decir, siempre se tiene una probabilidad bien definida para determinar aleatoriamente si la casilla que elge un jugador es una casilla tributo o no lo es. Recuérdese que al inicio del juego el tablero determina las casillas que en el desarrollo de ese "juego" pueden ser casillas tributo y cuales no (para esta etapa), entonces, si la casilla elegida por el jugador pertenece al primer conjunto de casilla, tiene una probabilidad de ¼ de que el tablero "pida" un tributo y si pertenece al segundo conjunto de casillas, entonces tiene una probabilidad nula de pedir un tributo.

Evidentemente, los puntos anteriores satisfacen los siguientes requisitos:

- A_k es una subpartición de B_k. Es decir, el patrón de arbitraje de información en el movimiento m_k incluye la asignación de ese de movimiento, en otras palabras, la información que se tiene en el k-ésimo movimiento también dice quién es el que va a realizar el k-ésimo movimiento.
- $C_k(0)$ es una subpartición de A_k. Esto es, el patrón de opción en un movimiento aleatorio m_k, incluye al patrón de arbitraje de información en ese movimiento, es decir, el conjunto de posibles resultados de un movimiento aleatorio (la elección que puede hacer el tablero para la determinación de las casillas tributo) también está incluido en la información que se tiene para ese movimiento.

- Para cada $k = 1, 2$: $C_k(k)$ es una subpartición de $D_k(k)$. El patrón de opción en un movimiento personal m_k del jugador k incluye al patrón de información del jugador k en ese movimiento, más explícitamente, el hecho de que el MEXICA o la TRIPLE ALIANZA conozcan las casillas a las cuales pueden mover a sus fichas de guerreros, implica que los jugadores conozcan la situación del juego al realizar su movimiento.

- Para cada $k = 1, 2$: Con $\mathbf{B}_k(k)$, A_k es una subpartición de $D_k(k)$. El patrón de arbitraje de información en el movimiento m_k incluye -la extensión a la cual este es un movimiento personal del jugador k- el patrón de información del jugador k en ese movimiento, o sea, la información con la que se cuenta para realizar el k-ésimo movimiento, implica que el jugador que lo va a llevar a cabo conozca la situación del juego.

- Para cada $k = 1, \ldots, \nu$ y para cada $\mathbf{A}_k$ de A_k, que es un subconjunto de $\mathbf{B}_k(0)$: Para todos los $\mathbf{C}_k$ de $C_k(0)$ que sean subconjuntos de este $\mathbf{A}_k$, $p_k(\mathbf{C}_k) \geq 0$, y para la suma extendida sobre ellos $\sum p_k(\mathbf{C}_k) = 1$. Las probabilidades de las diversas alternativas posibles para un movimiento aleatorio m_k se comportan como probabilidades pertenecientes a alternativas disjuntas y exhaustivas. La determinación de las casillas tributo se hace en forma aleatoria de modo que en cada uno de los movimientos aleatorios tienen todas ellas una probabilidad de ¼ de pedir al jugador un tributo ya que son cuatro casillas destinadas para tal fin, de las cuales sólo una lo hace en un movimiento aleatorio determinado.

- El patrón de arbitraje de información en el primer movimiento es nulo, si este primer movimiento es aquel donde la TRIPLE ALIANZA o el MEXICA colocan su primer ficha en el tablero.

- $A_{\nu+1}$ consiste de un elemento del conjunto. El patrón de arbitraje de información al cabo del juego determina completamente el "juego", esto es, cuando se termina el juego se tiene la información que determina quién gana el juego. Recuérdese que se tienen tres posibles finales: gana el MEXICA, gana la TRIPLE ALIANZA o se tiene un empate.

- Para cada $k = 1, \dots, \nu$: A_{k+1} se obtiene de A_k sobreponiéndola con todas las $C_k(k)$, $k = 0, 1, 2$. El patrón de arbitraje de información en el movimiento m_{k+1} (para $k = \nu$: Al final del juego) obtenido desde el movimiento m_k, sobreponiéndolo con el patrón de opción en el movimiento m_k. La información para el siguiente movimiento se obtiene de la información del movimiento presente y del resultado de ese movimiento.

- Para cada $k = 1, \dots, \nu$: Si $\mathbf{A}_k$ de A_k y $\mathbf{C}_k$ de $C_k(k)$, $k = 1, 2$ son subconjuntos del mismo $\mathbf{D}_k$ de $D_k(k)$, entonces la intersección $\mathbf{A}_k \cap \mathbf{C}_k$ no tiene que ser vacía. Sea m_k un movimiento dado, el cual es un movimiento personal del jugador k, y cualquier información real del jugador k en ese movimiento también dado. Entonces cualquier información real del arbitraje en ese movimiento y cualquier opción real del jugador k en ese movimiento, que están ambas dentro de esta información real (del jugador), son también compatibles una con otra. Es decir, que ocurren en el "juego" real.

- Para cada $k = 1, \dots, \nu$ y cada $k = 1, 2$ y para cada $\mathbf{D}_k$ de $D_k(k)$: Algún $\mathbf{C}_k(k)$ el cual es un subconjunto de $\mathbf{D}_k$, tiene que existir. Sea m_k un movimiento realizado, el cual es un movimiento personal del jugador k, y alguna información real del jugador k para ese movimiento. Entonces, el número de alternativas reales escogidas, también está dado al jugador k, y no es cero.

Ahora bien, como se trata de un juego diferencial, se va haber su clasificación en esta clase de juegos. *TACHTLI* en su segunda etapa, es un juego diferencial estocástico, de dos personas y es un juego diferencial discreto. Recuérdese que la definición de un juego diferencial es: Un **juego diferencial** es una situación de conflicto en la cual los jugadores eligen estrategias en el tiempo. En un juego diferencial hay más de un jugador y los pagos de cada jugador dependen de las trayectorias de control empleadas por todos los jugadores. Por otra parte, en un juego diferencial los jugadores hacen sus movimientos sobre un intervalo de tiempo, de modo que el número de movimientos y por tanto, el número de estrategias, son infinitos. Esta definición aplica a *TACHTLI* en su segunda etapa porque se tiene una situación de conflicto en la que el MEXICA y la TRIPLE ALIANZA eligen sus estrategias en el momento de hacer su elección y los pagos de los jugadores dependen de la situación que guarde el juego en ese momento, es decir, dependen de las jugadas hechas por todos los jugadores.

TACHTLI se desarrolla durante un intervalo de tiempo

$$t_0 \leq t \leq t_1, \tag{5.3.1}$$

en que t_0, el tiempo inicial y t_1, el tiempo terminal, está o bien dado o bien determinado por el propio juego.

TACHTLI se efectúa dentro de un sistema descrito por un conjunto de n variables de estado (cursos temporales para ciertas variables que describen al sistema, es decir, distribución de fichas temporales que describen la situación del juego) agrupadas por el *vector de estado* $\boldsymbol{x}$, un vector columna de orden n, cuyas componentes pueden variar con el tiempo

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))', \tag{5.3.2}$$

partiendo de los valores iniciales dados (la distribución inicial de las fichas en el tablero)

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{5.3.3}$$

y finalizando en los valores terminales (el estado del juego al ganar algún jugador o quedar empatados)

$$\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1. \tag{5.3.4}$$

El tiempo terminal, t_1, está determinado por la *superficie terminal*, una superficie en E^{n+1} descrita por las ecuaciones

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_1, t_1) = 0, \tag{5.3.5}$$

es decir, el estado del juego al término de éste: gana el MEXICA, gana laTriple Alianza, o quedan empatados.

TACHTLI es un juego de información perfecta, porque ambos jugadores conocen los valores de las variables de estado presentes. Cada jugador elige cursos temporales para su vector de variables de control (esto es, cada jugador elige la ficha a mover y el movimiento a realizar con ella), reunidas en una trayectoria de control (es decir, con cada movimiento, los jugadores van formando su jugada). Así, el jugador 1 elige la primera trayectoria de control $\{u^1(t)\}$

$$\{u^1(t)\} = \{(u_1^1(t), u_2^1(t), \ldots, u_{r_1}^1(t))' | t_0 \le t \le t_1\}$$

(5.3.6)

y el jugador 2 elige la segunda trayectoria de control $\{u^2(t)\}$

$$\{u^2(t)\} = \{(u_1^2(t), u_2^2(t), \ldots, u_{r_1}^2(t))' | t_0 < t < t_1\}.$$

(5.3.7)

Estas trayectorias de control pertenecen a *conjuntos de control* dados:

$$\{u^1(t)\} \in U^1$$
$$\{u^2(t)\} \in U^2, \qquad (5.3.8)$$

que requieren que los controles sean funciones del tiempo discreto, cuyos valores deben pertenecer a ciertos conjuntos compactos no vacíos en todos los tiempos del intervalo pertinente, en otras palabras, siempre que se va a realizar una elección de casilla, debe existir un conjunto finito de casillas alternativas para algún guerrero, en el que existe al menos una alternativa para elegir, de otra manera, el juego llegaría a su fin.

$$u^1(t) \in \Omega^1 \quad \text{para todo } t, \quad t_0 \le t \le t_1, \quad \Omega^1 \subset E^{r_1}$$
$$u^2(t) \in \Omega^2 \quad \text{para todo } t, \quad t_0 \le t \le t_1, \quad \Omega^2 \subset E^{r_2}.$$

(5.3.9)

Las *ecuaciones del movimiento* (elección de los cursos temporales para las variables de control) junto con el estado inicial (5.3.3) y las trayectorias de control elegidas por los jugadores (5.3.6) y (5.3.7), determinan la trayectoria de estado $\{x(t)\}$

$$\{x(t)\} = \{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))' | t_0 \le t \le t_1\}. \qquad (5.3.10)$$

El *pago* de cada jugador depende de las trayectorias de control elegidas por ambos jugadores, de decir, el pago para los jugadores depende de la ficha que hayan movido y de la casilla elegida, siendo el pago del jugador 1

$$J^1 = J^1[\{u^1(t)\}, \{u^2(t)\}] = \sum_{t_0}^{t_1} I^1(x, u^1, u^2, t) + F^1(x_1, t_1),$$

(5.3.11)

y el pago del jugador 2

$$J^2 = J^2[\{u^1(t)\}, \{u^2(t)\}] = \sum_{t_0}^{t_1} I^2(x, u^1, u^2, t) + F^2(x_1, t_1),$$

(5.3.12)

Cada jugador trata de maximizar su propio pago mediante la elección de su propia trayectoria de control.

Una *estrategia* para un jugador es una regla para determinar su vector de control en cualquier tiempo como una función de las variables de estado en ese tiempo

$$u^1(t) = S^1(x(t)) \qquad \text{para todo } t,\ t_0 \leq t \leq t_1,$$
$$u^2(t) = S^2(x(t))$$

(5.3.13)

en que las estrategias *mixtas* no están incluidas. Como una estrategia indica las elecciones hechas por un jugador para cualquier situación contemporánea posible, tal como viene representado por el vector de estado, el concepto de estrategia utilizado aquí concuerda con el definido para juegos estáticos. Puesto que cada jugador conoce solamente su propia estrategia y adquiere información acerca del otro jugador únicamente observando la evolución del juego, debe elegir su vector de control en respuesta a las variables de estado presentes. Así, de acuerdo por su propia naturaleza, un juego diferencial requiere controles (estrategias) de circuito cerrado y no de circuito abierto.

Cada jugador selecciona su estrategia de modo que maximice su propio pago, lo que lleva a estrategias optimales $S^{1*}(x)$, $S^{2*}(x)$ y, dadas estas estrategias, las ecuaciones del movimiento se convierten en

$$x = f(x, S^{1*}(x), S^{2*}(x), t).$$

(5.3.14)

Estas ecuaciones pueden sumarse hacia adelante partiendo del estado inicial para determinar la trayectoria de control $\{x(t)\}$ y, por tanto, los pagos de cada jugador

$$J^{1*} = J^1[\{S^{1*}(x)\}, \{S^{2*}(x)\}]$$
$$J^{2*} = J^2[\{S^{1*}(x)\}, \{S^{2*}(x)\}].$$

(5.3.15)

Con esto se ve que efectivamente se trata de un juego diferencial de información perfecta.

Para determinar una estrategia en el juego, se debe observar que el valor de las fichas no es como en la etapa anterior donde está dado, aquí, este valor es subjetivo. Sin embargo, se tiene lo siguiente:

Primero, el objetivo del MEXICA es ganar el juego obteniendo para ello todas las señales de la TRIPLE ALIANZA sin que antes ésta termine con sus guerreros. Los movimientos que puede hacer son: comer y hechizar. Si come fichas guerrero de la TRIPLE ALIANZA no obtiene mayor beneficio que el de disminuir los guerreros con los que puede ser atacado, sin quedar exento de que en jugadas posteriores la TRIPLE ALIANZA obtenga a su guerrero. Pero si hechiza a los guerreros, hace que pierdan movilidad y además puede acercarse a las fichas de guerrero que custodian señales y en cierto momento poder comerlas sin exponer a su guerrero. Por tanto, la estrategia sugerida para el MEXICA es acorralar a las fichas de guerrero que custodian señales haciendo movimientos de hechizo y en un momento dado obtener las señales del jugador contrincante.

Segundo, la TRIPLE ALIANZA para ganar el juego, debe obtener todas las fichas de guerrero del MEXICA, al igual que este último tiene dos movimientos a elegir: comer o hechizar. Definitivamente, tiene que buscar la forma de generar jugadas con las que pueda comer. No debe olvidarse que otro objetivo de la TRIPLE ALIANZA es no perder a sus señales, entonces, la estrategia sugerida para este jugador es custodiar sus señales con dos fichas de guerrero en la misma casilla ya que así, el MEXICA no tiene la oportunidad de obtener sus señales y él tiene la posobilidad de obtener guerreros MEXICAS con sus otros guerreros.

Acontinuación de va a desarrollar un modelo descriptivo que permita simular el desarrollo del juego en la segunda etapa.

5.3.2 FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO QUE REPRESENTA LA REALIZACIÓN DE LA SEGUNDA ETAPA.

REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA DEL TABLERO.

El manejo de las casillas por medio de números facilita la simulación del juego[1]. Para apreciar mejor las alternativas que tiene un jugador, el tablero se va a presentar de la siguiente manera para después representarlo en forma matricial:

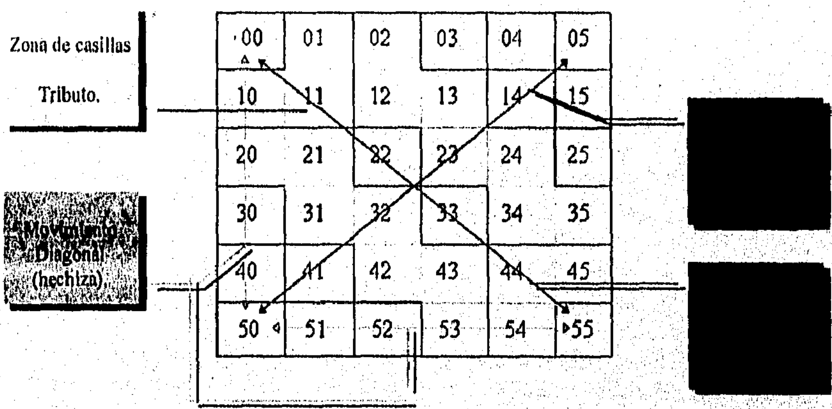


FIGURA 5.5 *Tablero de la 2a etapa (casillas enumeradas).*

Evidentemente, a la figura 5.5 se le aplica un giro de 45° para que realmente represente al tablero.

De la figura 5.5 se tiene que de cualquier casilla se pueden realizar los siguientes movimientos, es decir dada una casilla posición (*cp*2), los jugadores se pueden mover el siguiente número de casillas (*nc*):

- Movimientos diagonales: -20, -10, -2, -1, 1, 2, 10 y 20.
- Movimientos verticales: -18, -9, 9 y 18.
- Movimientos horizontales: -22, -11, 11 y 22.

O bien, de otra forma:

- Movimientos para hechizar: -20, -10, -2, -1, 1, 2, 10 y 20.
- Movimientos para comer: -22, -18, -11, -9, 9, 11, 18 y 22.

[1] Si se representara el tablero con una gráfica como se hizo en la primer etapa, para obtener las casillas alternativas, obteniendo para ello su correspondiente matriz de adyacencia, y su matriz potencia, se obtendrían casillas que no corresponderían a los movimientos establecidos por las reglas del juego; o bien, se tendrían que obtener una serie de gráficas para cada casilla tipo de movimiento.

De manera que la casilla elegida es

$$ceg = cp2 + nc.$$

Sujeta a:

$$\begin{gathered} 0 \leq ceg \leq 5, \\ 10 \leq ceg \leq 15, \\ 20 \leq ceg \leq 25, \\ 30 \leq ceg \leq 35, \\ 40 \leq ceg \leq 45 \text{ y} \\ 50 \leq ceg \leq 55, \end{gathered} \tag{5.3.16}$$

donde ceg: es la casilla elegida.
$cp2$: es el número de la casilla posición de la ficha en estudio,
$cp2 \in \{0, \dots, 5, 10, \dots, 15, 20, \dots, 25, 30, \dots, 35, 40, \dots, 45, \dots, 50, \dots, 55\}$.
nc: número de casillas por avanzar,
$nc \in \{\pm 22, \pm 20, \pm 18, \pm 11, \pm 10, \pm 9, \pm 2, \pm 1\}$.

Además de que deben cumplir con las restricciones del juego (un guerrero custodiando una señal sólo se puede mover una casilla hacia cualquier dirección, e.t.c.).

Ahora bien, la matriz que representa al tablero es

$$MTB(t)_{6 \times 6}$$

es decir, $[mtb(t)]_{i,j}$, con $i = 0, \dots, 5$ y $j = 0, \dots, 5$,

donde ij: es la casilla número ij del tablero en el t-ésimo movimiento.

Por ejemplo $mtb(0)_{5,0}$ significa que se está hablando de la casilla 50 al inicio del juego.

Los elementos $mtb(t)_{i,j}$ de esta matriz contienen la información relacionada con el jugador y/o jugadores que se encuentren localizados en la casilla ij en el t-ésimo movimiento, así como también las fichas que estén situadas en ella. Esta información se va a presentar de la siguiente manera:

$$mtb(t)_{i,j} = 999999,$$

donde $mtb(t)_{i,j} / 100000$: denota al jugador $\in \{0, 1, 9\}$. Si es 9, significa que no está ocupada por un jugador.

$(mtb(t)_{i,j} / 1000) \bmod 100$: denota al número de guerrero del jugador $mtb(t)_{i,j} / 100000$.

$(mtb(t)_{i,j} \bmod 1000) / 100$: denota al segundo[16] jugador $\in \{0, 1, 9\}$. Si es 9, significa que no está ocupada por un jugador.

$(mtb(t)_{i,j} \bmod 1000) \bmod 100$: denota al número de guerrero del jugador $(mtb(t)_{i,j} \bmod 1000) / 100$.

Para llevar a cabo la simulación de un juego en la segunda etapa, es necesario tener el control de la información referente a las fichas con las que cuenta cada jugador, así como el estado que guarda cada una de éllas en el juego, además de su posición en el tablero, todo esta información se debe tener presente en el momento de realizar la elección de la ficha de guerrero a mover y su casilla destino.

Por lo anterior, se va a introducir la siguiente notación:

ji: jugador inicial (0: MEXICA y 1: Triple Alianza).
jt2: jugador en turno.
ngt: número de guerreros iniciales de la TRIPLE ALIANZA $\in \{5, \ldots, 15\}$.
ns: número de señales iniciales de la TRIPLE ALIANZA (mínimo una).
ntm: número de tributos iniciales de la Triple Alianza[17].
ntta: número de tributos iniciales del MEXICA.
ng: número de guerrero en movimiento.
nga: número de guerrero analizado.
cp2: casilla posición de *ng* o de *nga*, según el caso.

donde *ji, ngt, ns, ntm* y *ntta* son constantes para un mismo "juego".

$MP2(t)_{2,4}$: Matriz de puntos 2 en el t-ésimo movimiento.

donde $mp2(t)_{i,j}$ con $i = 0, 1$ y $j = 0, \ldots, 3$.
$mp2(t)_{0,0}$: número de señales del MEXICA = 0.
$mp2(t)_{1,0}$: número de señales de la TRIPLE ALIANZA $\in \{0, 1, \ldots, ns\}$.
$mp2(t)_{0,1}$: número de guerreros del MEXICA $\in \{0, 1, \ldots, 8\}$.
$mp2(t)_{1,1}$: número de guerreros de la TRIPLE ALIANZA $\in \{0, \ldots, ngt\}$.
$mp2(t)_{0,2}$: número de tributos del MEXICA $\in \{0, 1, \ldots\}$[18].

[16] Recuérdese que se pueden tener a lo más dos fichas de guerrero por casilla.

[17] El número máximo de tributos con los que puede llegar un jugador a esta etapa, se va a calcular en el capítulo 7, este resultado no afecta al modelo.

$mp2(t)_{1,2}$: número de tributos de la TRIPLE ALIANZA $\in \{0, 1, ...\}$.
$mp2(t)_{0,3}$: número de guerreros hechizadores del MEXICA $\in \{0, 1, 2\}$.
$mp2(t)_{1,3}$: número de guerreros hechizadores de la TRIPLE ALIANZA = 0 o 1, si $ngt = 8$ o más y 0, 1 o 2 si $ngt = 7$ o menos.

$VDFM(t)_{8,2}$: Matriz de distribución de fichas del MEXICA en el t-ésimo movimiento.

donde

$vdfm(t)_{i,j}$ con $i = 0, .., 7$ y $j = 0, 1$.
$vdfm(t)_{i,0}$: casilla donde se encuentra el guerrero i del MEXICA.
$vdfm(t)_{i,1}$: estado del guerrero i.
$vdfm(t)_{i,1} = 0$: estado neutral.
$vdfm(t)_{i,1} = 1$: guerrero i inmovilizado.
$vdfm(t)_{i,1} = 2$: guerrero i inmoviliza a otro guerrero.
$vdfm(t)_{i,0} = 99$ guerrero i descalificado del juego.

$VDFTA(t)_{15,4}$: Matriz de distribución de fichas de la TRIPLE ALIANZA en el t-ésimo movimiento.

donde

$vdfta(t)_{i,j}$ con $i = 0, .., ngt\text{-}1$ y $j = 0, 1$.
$vdfta(t)_{i,0}$: casilla donde se encuentra el guerrero i de la Triple Alianza.
$vdfta(t)_{i,1}$: estado del guerrero i, igual que para $vdfm_{i,1}$.
$vdfta(t)_{i,2} = 0$: el guerrero i no custodia señal.
$vdfta(t)_{i,2} = 1$: el guerrero i custodia a una señal.
$vdfta(t)_{i,3}$: número de señal custodiada por el guerrero i.
$vdfta(t)_{i,3} = 99$: el guerrero i no custodia ninguna señal.

$VECS(t)_{i,1}$: Vector de señales en el t-ésimo movimiento.

donde

$vecs(t)_{i,j}$ con $i = 0, .., ns\text{-}1$ y $j = 0$.
$vecs(t)_{i,0}$: casilla donde se encuentra la i-ésima señal.
$vecs(t)_{i,0} = 99$: la señal i pertence al MEXICA.

$VECT_{4,1}$: Vector de casillas tributo.

[18] El límite máximo de tributos de los jugadores se determinará en el capítulo 7, por el momento este número no es relevante.

donde $vect_{i,j}$ con $i = 0, .., 3$ y $j = 0$.
$vect_{i,0}$: número de casilla tributo.

$VECT1(t)_{4,1}$: Vector de casillas tributo 1 en el t-ésimo movimiento.

donde $vect1(t)_{i,j}$ con $i = 0, .., 3$ y $j = 0$.
$vect1(t)_{i,0} = 99$: casilla tributo $vect_{i,0}$ que ha sido indicada por el mecanismo alcatorio.

$VECAL(t)_{16,45}$: Matriz de casillas alternativas para el t-ésimo movimiento.

donde $vecal(t)_{i,j}$ con $i = 0, .., 15$ y $j = 0, ..., 44$.
$vecal(t)_{i,nga*3}$: casilla alternativa para el nga del $j/2$.
$vecal(t)_{i,(nga*3)+1}$: movimiento del nga para llegar a la casilla $vecal_{i,nga*3}$.
$vecal(t)_{i,(nga*3)+1} = 0$ hechiza a un guerrero.
$vecal(t)_{i,(nga*3)+1} = 1$ mata a un guerrero.
$vecal(t)_{i,(nga*3)+1} = 2$ pelea una señal.
$vecal(t)_{i,(nga*3)+1} = 99$ simplemente se mueve hacia la casilla $vecal_{i,nga*3}$.
$vecal(t)_{i,(nga*3)+2}$: número del guerrero contrario.
$vecal(t)_{i,(nga*3)+1} = 99$ ningún guerrero contrario.

Una vez especificadas las variables y constantes anteriores, se puede proceder a desarrollar una serie de ecuaciones que representen la aplicación de las reglas del juego en esta etapa. Para mayor claridad, a continuación se va a elaborar un algoritmo que simula el desarrollo de un "juego" en la segunda etapa:

1. Es necesario saber:

- ¿con cuántos guerreros inicia la TRIPLE ALIANZA ($ngt = mp2(0)_{1,1}$)?
- ¿cuántas fichas de señales posee al inicio la TRIPLE ALIANZA ($ns = mp2(0)_{1,0}$)?
- ¿cuántos tributos corresponden al MEXICA y cuántos a la Triple Alianza al comienzo del juego en esta etapa ($ntm = mp2(0)_{0,2}$ y $ntta = mp2(0)_{1,2}$ respectivamente)?
- ¿cuál es la distribución inicial de las fichas de guerrero en el tablero para ambos jugadores ($mtb(0)_{i,j}$)?, con las siguientes restricciones:

❶ $mtb_{i,j}$, con $i = j$, no puede ser ocupada por ninguna ficha en la distribución inicial de éstas.
❷ los elementos $mtb_{i,j}$ de la triangular inferior son las casillas para la distribución inicial de los guerreros del MEXICA y los de la triangular superior son para los de la Triple Alianza.

- ¿qué guerreros (i) de la TRIPLE ALIANZA custodian las señales $vdfta(0)_{i,2} = 1$, $vdfta(0)_{i,3}$ = número de señal y $vecs(0)_{vdfta(0)_{i,3},0} = vdfta(0)_{i,0}$?
- ¿qué casillas son casillas tributo $VECT$?
- ¿qué jugador da inicio al juego (jt)?

Con esta información se obtienen las matrices $MP2(0)$, $MTB(0)$, $VDFM(0)$, $VDFTA(0)$, $VECS(0)$, $VECT$ y $VECT1(0)$.

Los valores de los elementos de estas matrices que no son espesificados al responder estas preguntas son:

$mp2(0)_{i,3} = 0$, con i = 0, 1;
$mtb(0)_{i,3} = 999999$, con ij ≠ ∀ ceg;
$vdfm(0)_{i,1} = 0$, con i = 0, 1, ... , 7;
$vdfta(0)_{i,1} = 0$, con i = 0, 1, ... , ngt-1;
$vdfta(0)_{i,2} = 0$, con i = 0, 1, ... , ngt-1, donde $vdfta(0)_{i,2} \neq 1$;
$vdfta(0)_{i,3} = 99$, con i = 0, 1, ... , ngt-1, donde $vdfta(0)_{i,2} \neq 99$;
$vect1(0)_{i,0} = 99$, con i = 0, 1, 2, 3.

2. Conocer el movimiento que hace el jugador en turno ($jt2$) y la ficha con la que lo lleva a cabo, es decir, conocer al guerrero en movimiento y la casilla elegida, sujeta a las siguientes restricciones:

⇨ Si $jt2 = 0$ y si $mp2(t-1)_{0,3} < 2$ (si el jugador en turno es el MEXICA y aún no tienen hechizados a dos guerreros contrarios), entonces sí puede hacer un movimiento de hechizo, esto es, puede elegir una casilla $mtb(t)_{i,j}$ con ij = -20, -10, -2, -1, 1, 2, 10 o 20.

⇨ Si $jt2 = 1$ y $mp2(t-1)_{1,3} < 1$ y $ngt > 7$ y $mp2(t-1)_{0,1} = 1$[19*] (si el jugador en turno es la TRIPLE ALIANZA e inició con más de 7 guerreros y aún no ha hechizado a algún guerrero contrario, además de que el MEXICA no cuenta con tan sólo un guerrero), o

[19*] Después de haber jugado algunos juegos se concluyó que el último guerrero MEXICA no podrá ser hechizado por la TRIPLA ALIANZA. Esto se agrega a la lista de reglas.

bien, si $jt2 = 1$ y $mp2(t-1)_{1,3} < 2$ y $ngt < 8$ $mp2(t-1)_{0,1} = 1$ (si el jugador en turno es la TRIPLE ALIANZA e inició con menos de 8 guerreros y aún no tiene hechizados a dos guerreros contrarios, además de que el MEXICA no cuenta con tan sólo un guerrero), entonces si puede hacer un movimiento de hechizo.

⇨ Si $jt2 = 1$ y $vdfta(t-1)_{ng\ o\ nga,\ 2} = 1$, entonces, únicamente se puede realizar un movimiento cualquiera de los siguientes: -11, -10, -9, -1, 1, 9, 10 u 11, dado que se trata de mover a un guerrero custodiando una señal.

⇨ Si $mtb(t-1)_{i,j} / 100000 \neq 9$ o si $(mtb(t-1)_{i,j} \bmod 1000) / 100 \neq 9$, donde $ij = cp2 \pm 1$ o $cp2 \pm 9$ o $cp2 \pm 10$ o $cp2 \pm 11$, entonces, no se pueden realizar los movimientos: -22, -20, -18, -2, 2, 18, 20 y 22, ya que no está permitido hacer saltos.

⇨ Si $(mtb(t-1)_{i,j} / 1000) \bmod 100 \neq 99$ y $(mtb(t-1)_{i,j} \bmod 1000) \bmod 100 \neq 99$, entonces, no se puede mover la ficha de guerero a la casilla ij porque se trata de una casilla ocupada por dos fichas de guerreros.

(5.x.0)

Además de las restricciones anteriores, cabe indicar las restricciones de las casillas para cada movimiento y éstas son:

Para los movimientos horizontales: -22, -11, 11 y 22, se tiene que los números de las casillas que pertenecen al tablero son aquellas que cumplen con:

$$ceg / 10 = ceg \bmod 10 + (cp2 / 10 - cp2 \bmod 10). \tag{5.x.1}$$

Para los movimientos verticales: -18, -9, 9 y 18, se tiene que los números de las casillas que pertenecen al tablero son aquellas que cumplen con:

$$ceg / 10 + ceg \bmod 10 = cp2 / 10 + cp2 \bmod 10. \tag{5.x.2}$$

Para los movimientos diagonales: -2, -1, 1 y 2, se tiene que los números de las casillas que pertenecen al tablero son aquellas que cumplen con:

$$ceg / 10 = cp2 / 10. \tag{5.x.3}$$

Para los movimientos diagonales: -20, -10, 10 y 20, se tiene que los números de las casillas que pertenecen al tablero son aquellas que cumplen con:

$$ceg \bmod 10 = cp2 \bmod 10. \tag{5.x.4}$$

Evidentemente, todas las *ceg* deben cumplir con las retricciones de (5.3.16). Se puede llenar la matriz *VECAL(t)* con la información correspondiente a cada una de las casillas alternativas. A continuación se describe como se llena esta matiz una vez verificadas todas las restricciones anteriores:

Sea

$$vecal(t)_{i,\,3*ng} = ca.$$

donde ca: es la casilla analizada.

Si

$$(mtb(t-1)_{ca/10,\,ca \bmod 10} / 100000) = 9$$

y

$$(mtb(t-1)_{ca/10,\,ca \bmod 10} \bmod 1000) / 100 = 9,$$

entonces

$$vecal(t)_{i,\,(3*ng)+1} = 99$$

y

$$vecal(t)_{i,\,(3*ng)+2} = 99.$$

si se llega a la casilla *ca* con un movimiento de hechizo y se encuentra en ella una ficha y ésta no es del jugador en turno, entonces se denota como hechizo y se señala a la ficha contraria, es decir, si

$$(mtb(t-1)_{ca/10,\,ca \bmod 10} / 100000) \neq 9$$

y

$$(mtb(t-1)_{ca/10,\,ca \bmod 10} / 100000) \neq j/2$$

y

$$(mtb(t-1)_{ca/10,\,ca \bmod 10} \bmod 1000) / 100 = 9, \tag{5.3.17}$$

entonces

$$vecal(t)_{i,\,(3*ng)+1} = 0;$$

o si:

$$(mtb(t-1)_{ca/10,\,ca \bmod 10} / 100000) = 9$$

y

$$(mtb(t-1)_{ca/10,\,ca \bmod 10} \bmod 1000) / 100 \neq 9,$$

y

$$(mtb(t-1)_{ca/10,\, ca \bmod 10} \bmod 1000) / 100 \neq jt2, \tag{5.3.18}$$

por consiguiente,

para (5.3.17) se tiene que la ficha contraria es:

$$vecal(t)_{i,\,(3*ng)+2} = (mtb(t-1)_{ca/10,\, ca \bmod 10} / 1000) \bmod 100, \tag{5.3.19}$$

y para (5.3.52)

$$vecal(t)_{i,\,(3*ng)+2} = (mtb(t-1)_{ca/10,\, ca \bmod 10} \bmod 1000) \bmod 100. \tag{5.3.20}$$

Si se llega a la casilla *ca* con un movimiento horizontal o vertical, entonces la ficha en movimiento come a la ficha (si existe) situada en la casilla alternativa, esto es

$$vecal(t)_{i,\,(3*ng)+1} = 1$$

y aquí también aplican las ecuaciones (5.3.17), (5.3.18), (5.3.19) y (5.3.20).

Si se llega a la casilla *ca* con un movimiento horizontal o vertical y si sí proceden las ecuaciones (5.3.17), (5.3.18), (5.3.19) y (5.3.20) y si además se tiene que:

$$jt2 = 0,$$

para (5.3.17) sea

$$vaux = (mtb(t-1)_{ca/10,\, ca \bmod 10} / 1000) \bmod 100$$

y para (5.3.18) sea

$$vaux = (mtb(t-1)_{ca/10,\, ca \bmod 10} \bmod 1000) \bmod 100,$$

y se tiene que

$$vdfta_{vaux,\,2} = 1,$$

entonces

$$vecal(t)_{i,\,(3*ng)+1} = 2,$$

esto es, si se realiza un movimiento verical u horizontal y el jugador en turno es el MEXICA, además de que existe una ficha contrincante en la casilla analizada con la que se custodia una señal, entonces se marca un movimiento con el que se pelea la señal y la ficha contrincante obviamente es aquella que se encuantra situada en la casilla analizada.

3. Una vez que se conoce el guerrero en movimiento y la casilla a la cual se mueve, se aplican las reglas del juego para las fichas afectadas por esa decisión.

Lo primero que aplica al elegir una casilla, es saber si ésta no es una casilla de tributo. De las reglas mismas del juego, se tiene que, se genera un número aleatorio que determina si la casilla elegida es o no una casilla tributo (ct). De serlo, se efectúan las siguientes funciones:

Si

$$ceg = ct,$$

entonces,

$$vect1(t)_{i,0} = 99,$$

donde $$vect_{i,0} = ct.$$

Y si

$$mp2(t)_{jt2,2} = 0,$$

entonces,

$$mp2(t)_{jt2,1} = mp2(t\text{-}1)_{jt2,1} - 1,$$

es decir, el jugador pierde su ficha, esta ficha perdida se debe denotar en el tablero, por consiguiente se tiene que:

si

$$jt2 = 0,$$

entonces, si el guerrero inmoviliza a otro, entonces, se indica que la ficha inmovilizada ahora se puede mover, esto se hace de la siguiente manera:

$$mp2(t)_{jt2,3} = mp2(t-1)_{jt2,3} - 1,$$

$$vdfm(t)_{ng,1} = 0,$$

sea

$$vaux = vdfm(t-1)_{ug,0},$$

por otro lado, sea

$$vaux1 = (mtb(t-1)_{vaux/10,\, veaux \bmod 10} \bmod 1000) \bmod 100,$$

entonces, para

$$(mtb(t-1)_{vaux/10,\ veaux \bmod 10} / 100000) = jt2,$$

se tiene que:

$$vdfta(t)_{vaux1,\ 1} = 0,$$

o bien, sea

$$vaux1 = (mtb(t-1)_{vaux/10,\ veaux \bmod 10} / 1000) \bmod 100,$$

entonces, para

$$(mtb(t-1)_{vaux/10,\ veaux \bmod 10} / 100000) \neq jt2,$$

se tiene que:

$$vdfta(t)_{vaux1,\ 1} = 0.$$

Ahora bien, para indicar en el tablero que se perdió la ficha, se tiene que:

si

$$mtb(t\text{-}1)_{vdfm(t-1)_{ng,\,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,\,0} \bmod 10} / 100000 = jt2,$$

entonces,

$$mtb(t)_{vdfm(t-1)_{ng,\,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,\,0} \bmod 10} = 999000 + mtb(t\text{-}1)_{vdfm(t-1)_{ng,\,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,\,0} \bmod 10} \bmod 100,$$

o bien, si

$$mtb(t\text{-}1)_{vdfm(t-1)_{ng,\,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,\,0} \bmod 10} / 100000 \neq jt2,$$

entonces,

$$mtb(t)_{vdfm(t-1)_{ng,\,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,\,0} \bmod 10} = (mtb(t\text{-}1)_{vdfm(t-1)_{ng,\,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,\,0} \bmod 10} / 100) * 1000 + 999.$$

Finalmente, la ficha se borra de la matriz *VDFM* así:

$$vdfm(t)_{ng,\,0} = 99,$$
$$vdfm(t)_{ng,\,1} = 0.$$

De igual manera ocurre cuando se trata de la TRIPLE ALIANZA, haciendo un cambio de variables de *vdfm* por *vdfta* y vice versa. Y además se contempla la posibilidad de que el guerrero custodie una señal, de tal forma que se tiene:

si

$$vdfta(t\text{-}1)_{ng,\,2} = 1,$$

entonces,

$$mp2(t)_{jt2,\,0} = mp2(t\text{-}1)_{jt2,\,0} - 1,$$
$$vecs(t)_{vdfta(t\text{-}1)_{ng,\,3}\,,\,0} = 99,$$
$$vdfta(t)_{ng,\,3} = 99,$$
$$vdfta(t)_{ng,\,2} = 0.$$

En caso de que el jugador sí cuente con tributos, únicamente se decrementará el número de éste en uno, quedando:

$$mp2(t)_{jt2,\,2} = mp2(t\text{-}1)_{jt2,\,2} - 1.$$

Si después de aplicar las reglas del juego en casillas de tributo, aún se cuenta con la ficha de guerrero, se procede a plicar las reglas del juego para las fichas involucradas en la elección. Esta aplicación de las reglas del juego resulta más sencilla con la ayuda de la matriz $VECAL(t)$. Primero se va a ver lo que sucede si se trata del MEXICA.

Si el jugador no afecta a ninguna ficha de su contrincante (denotado por (5.3.21)), es decir, si

$$vecal(t)_{indice,\,3\,*\,ng\,+\,1} = 99,$$

donde indice: indica el renglón de la matriz $vecal(t)$ en el que

$$vecal(t)_{indice,\,3\,*\,ng} = ceg,$$

Primero se contempla la posibilidad de que la ficha esté hechizando a otra ($vdfm(t\text{-}1)_{ng,\,1} = 2$), realizando para ello las siguientes funciones:

se indica este deshizamiento en la matriz de puntos, así:

$$mp2(t)_{jt2,\,3} = mp2(t\text{-}1)_{jt2,\,3} - 1,$$

el estado del guerrero en movimiento se marca como neutral

$$vdfm(t)_{ng,\,0} = 0,$$

así como también el estado del guerrero que estaba hechizado, efectuando:

para

$$(mtb(t-1)_{vdfm(t-1)_{ng,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,0} \bmod 10} / 100000) = jt2$$

sea

$$vaux = (mtb(t-1)_{vdfm(t-1)_{ng,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,0} \bmod 10} \bmod 1000) \bmod 100,$$

y para

$$(mtb(t-1)_{vdfm(t-1)_{ng,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,0} \bmod 10} / 100000) \neq jt2,$$

sea

$$vaux = (mtb(t-1)_{vdfm(t-1)_{ng,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,0} \bmod 10} / 1000) \bmod 100,$$

entonces,

$$vdfla(t)_{vaux,\ 1} = 0.$$

Posteriormente, se elimina de la casilla de su posición actual para que después se pueda marcar en la casilla elegida.

para

$$(mtb(t-1)_{vdfm(t-1)_{ng,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,0} \bmod 10} / 100000) = jt2,$$

sea

$$vaux = mtb(t-1)_{vdfm(t-1)_{ng,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,0} \bmod 10} \bmod 100,$$

entonces,

$$mtb(t)_{vdfm(t-1)_{ng,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,0} \bmod 10} \bmod 10 = 999000 + vaux;$$

y para

$$(mtb(t-1)_{vdfm(t-1)_{ng,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,0} \bmod 10} / 100000) \neq jt2,$$

sea

$$vaux = mtb(t-1)_{vdfm(t-1)_{ng,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,0} \bmod 10} / 100,$$

entonces,

$$mtb(t)_{vdfm(t-1)_{ng,0}/10,\ vdfm(t-1)_{ng,0} \bmod 10} \bmod 10 = (vaux * 1000) + 999. \tag{5.3.22}$$

Para colocar la ficha en la casilla elegida se hace:

$$vdfm(t)_{ng,0} = ceg,$$

para

$$mtb(t-1)_{ceg/10,\ ceg \bmod 10} / 100000 = 9;$$

se tiene

$$mtb(t)_{ceg/10,\ ceg \bmod 10} = (jt2 * 100000) + (ng * 1000) + (mtb(t\text{-}1)_{ceg/10,\ ceg \bmod 10} \bmod 1000),$$

y para

$$mtb(t-1)_{ceg/10,\ ceg \bmod 10} / 100000 \neq 9;$$

se tiene

$$mtb(t)_{ceg/10,\ ceg \bmod 10} = (mtb(t\text{-}1)_{ceg/10,\ ceg \bmod 10} / 1000) + (jt2 * 100) + ng. \tag{5.3.23}$$

Ahora bien, si se eligió una casilla en la que se hechiza a un guerrero contrario (evento que se va a denotar con (5.3.24)), se procede de la siguiente manera:

Primero, se marca este hechizo en la matriz de puntos, así:

$$mp2(t)_{jt2,\,3} = mp2(t\text{-}1)_{jt2,\,3} + 1,$$

también se denota en la matriz de fichas del jugador en turno:

$$vdfm(t)_{ng,\,1} = 2,$$

además de que se hace notar en el estado del guerrero contrario:

$$vdfla(t)_{vecol(t)_{indice,\,(ng*3)+2},\,1} = 1;$$

una vez hechas las ecuaciones anteriores, se efectúa (5.3.22) y después la (5.3.23), para eliminar la ficha de la casilla de su posición actual y ponerla en la casilla elegida.

Si se eligió una casilla en la cual se adquiere un guerrero contrario (a todo este evento se le va a denotar con (5.3.25)); en el caso del MEXICA, se verifica que el guerrero obtenido tenga una señal, por tanto se tiene:

el estado del guerrero que comió es neutral:

$$vdfm(t)_{ng,\,1} = 0,$$

se elimina de la matriz de puntos a un guerrero del jugador contrario:

$$mp2(t)_{1,1} = mp2(t-1)_{1,1} - 1,$$

se elimina del tablero a la ficha del jugador contrario y se coloca a la ficha en movimiento en su nueva casilla:

$$mtb(t)_{ceg/10,\ ceg \bmod 10} = (jt2 * 100000) + (\mathrm{ng} * 1000) + 999;$$

ahora bien, si el contrincante posee una señal, esto es,

si

$$vdfla(t-1)_{vecal(t)_{\mathrm{indice},\ (\mathrm{ng} * 3)+2},\ 2} = 1,$$

entonces, se elimina una señal del contrincante de la matriz de puntos, del vector de señales y de la matriz de distribución de fichas de la TRIPLE ALIANZA:

$$mp2(t)_{1,0} = mp2(t-1)_{1,0} - 1,$$

sea

$$vaux = vecal(t)_{\mathrm{indice},\ (\mathrm{ng} * 3)+2},$$

$$vecs(t)_{vdfla(t-1)_{vaux,\ 3},\ 0} = 99,$$
$$vdfla(t)_{vaux,\ 3} = 99,$$
$$vdfla(t)_{vaux,\ 2} = 0.$$

(5.3.26)

Independientemente de que tenga o no señal, se procede a realizar:

$$vdfla(t)_{vaux,\ 0} = 99,$$
$$vdfla(t)_{vaux,\ 1} = 0,$$

donde

$$vaux = vecal(t)_{\mathrm{indice},\ (\mathrm{ng} * 3)+2};$$

posteriormente, se elimina la ficha del tablero con las ecuaciones (5.3.22) y finalmente, se le asigna su nueva casilla:

$$vdfm(t)_{\mathrm{ng},\ 0} = ceg.$$

Otro caso es cuando el jugador pelea una señal, de las reglas del juego, se presentan dos eventos con igual probabilidad (1/2), el primero de éllos es cuando el MEXICA se queda con la señal y el guerrero contrario muere, para efectuar este evento, se realizan las ecuaciones (5.3.25). La otra situación es cuando el MEXICA únicamente hechiza al guerrero contrario, en cuyo caso se efectúan las ecuaciones (5.3.24).

Ahora bien, si se trata de la TRIPLE ALIANZA y se presenta el evento en el que este jugador no afecta a ninguna ficha de su oponente (obviamente, después de aplicar las reglas de las casillas tributo para este jugador), entonces, basta efectuar las ecuaciones (5.3.21) haciendo para ello un cambio de variables de *vdfta* por *vdfm* y vice versa. De igual manera sucede cuando la TRIPLE ALIANZA hechiza a un guerrero MEXICA aplicando las ecuaciones (5.3.24) con *vdfta* por *vdfm* y vice versa respectivamente. Si se tiene que el guerrero de la TRIPLE ALIANZA come a un guerrero contrario, se efectúa (5.3.25) con el respectivo cambio de variables de *vdfta* por el de *vdfm* y viceversa, pero sin realizar las ecuaciones (5.3.26).

CAPÍTULO 6.

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL MODELO

"Un programa se vuelve obsoleto desde el momento en que se termina su programación"

Para comprobar la validez del capítulo anterior es que surge el presente capítulo, en el que, con la implementación computacional del modelo propuesto, es mucho más sencillo observar el desarrollo del juego, además de poder jugarlo con la computadora. Este capítulo sirve como ducumentación para el programador que se interese en la programación del juego, y para el usuario, es un apoyo para la ejecución del sistema. Así pues, este capítulo consta de dos partes principalmente, que son: el manual del usuario y el manual del programador.

Quisiera iniciar este capítulo, no sin antes comentar que, una vez que se termina un programa, sugen nuevas ideas sobre su programación, es por ello, que existen tantas versiones de los diversos paquetes computacionales, y bueno, este programa no es la esepción. Este sistema es una excelente base para posteriores trabajos más sofisticados, quizá en muy poco tiempo se estará jugando *TACHTLI*, como un juego de realidad virtual.

6.1 MANUAL DEL USUARIO.

6.1.1 ACERCA DEL FUNCIONAMIENTO DE TACHTLI.

TACHTLI es un programa sumamente fácil de utilizar. Tiene dos objetivos:

- Analizar el desarrollo del juego de mesa *TACHTLI* y
- Jugar en la computadora *TACHTLI*.

Este capítulo instruye al usuario en el manejo de *TACHTLI*. Le explica cómo instalar y ejecutar *TACHTLI* y cómo desplazarse a través de los menús para jugar a *TACHTLI* en las diferentes opciones que se presentan. Por convención, la alusión a teclas se hará como **<NOM_TECLA>** donde nom_tecla es el nombre de la tecla a usar.

6.1.2 PUESTA EN MARCHA.

TACHTLI consta de un sólo diskette de 3 1/2 pulgadas, incluye los archivos necesarios para su ejecución y queda instalado con sólo copiar el contenido de dicho diskette en cualquier otra unidad.

Para asegurar el buen funcionamiento de *TACHTLI* es recomendable que los valores de los FILES Y BUFFERS del fichero CONFIG.SYS sean 20 o superiores.

Para arrancar *TACHTLI* teclee *TACHTLI* desde el prompt de DOS y pulse <ENTER>.

Después de unos momentos *TACHTLI* desplegará la siguiente pantalla de presentación:

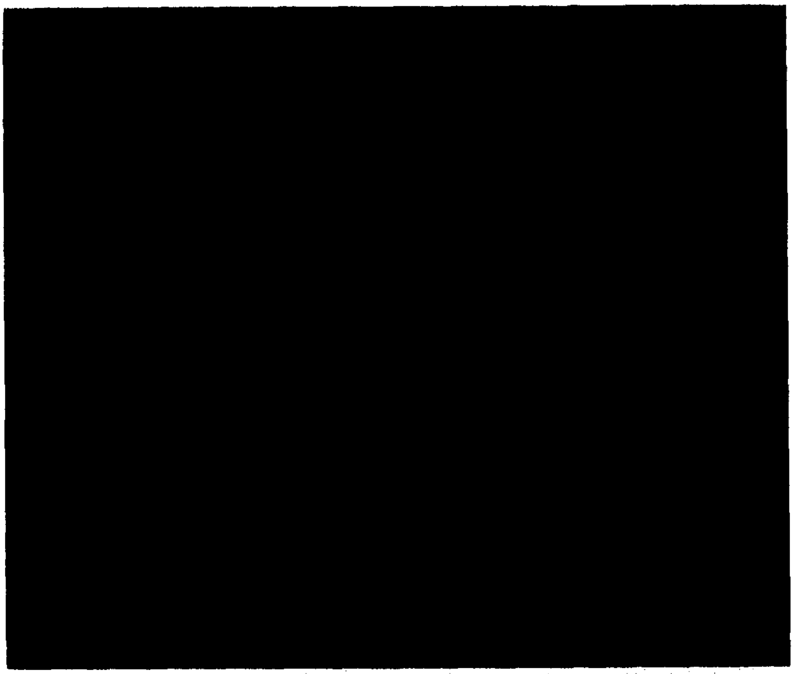


FIGURA 6.1 *Pantalla de presentación.*

Se puede observar que se presenta un menú principal cuyas opciones son las siguientes:

- F1 = Help,
- F2 = Menú,
- F3 = Exit.

La elección de cualquiera de estas opciones se realiza pulsando únicamente la tecla de función correspondiente.

6.1.3 DESCRIPCIÓN DEL MENÚ PRINCIPAL.

6.1.3.1 HELP.

Esta opción despliega información al usuario acerca de:

❶ Las reglas del juego,
❷ Descripción del menú de la primer etapa del juego.

LAS REGLAS DEL JUEGO.

En esta sección del HELP se describe el contenido del juego, su objetivo, el turno de los jugadores, los tipos de fichas, su distribución, las clases de casillas en el tablero y el avance de los guerreros en ambas etapas del juego; así como los datos que el usuario deberá proporcionar al sistema.

DESCRIPCIÓN DEL MENÚ DE LA PRIMER ETAPA DEL JUEGO.

Se dan la definiciones de los términos fijo y aleatorio para la elección de una opción del menú para jugar *TACHTLI* en su primer etapa.

Para pasar de una pantalla a otra del HELP se pulsa **<ENTER>** (< ↵ >).

6.1.3.2 MENÚ.

MENÚ. Presenta las opciones:

- Primera etapa.
- Segunda etapa.
- Exit.

desplegando la pantalla de la figura 6.2.

Basta con posicionarse en la opción elejida con las teclas **<FLECHA HACIA ARRIBA>** (< ↑ >) o **<FLECHA HACIA ABAJO>** (< ↓ >) y teclear < ↵ > para que el usuario pueda jugar la etapa del juego que prefiera. Si se elije la opción exit, el sistema regresa a la primer pantalla de la figura 6.1.

FIGURA 6.2 *Menú del juego.*

6.1.3.2 EXIT.
6.1.3.3

EXIT. Despliega su pantalla de despedida al sistema:

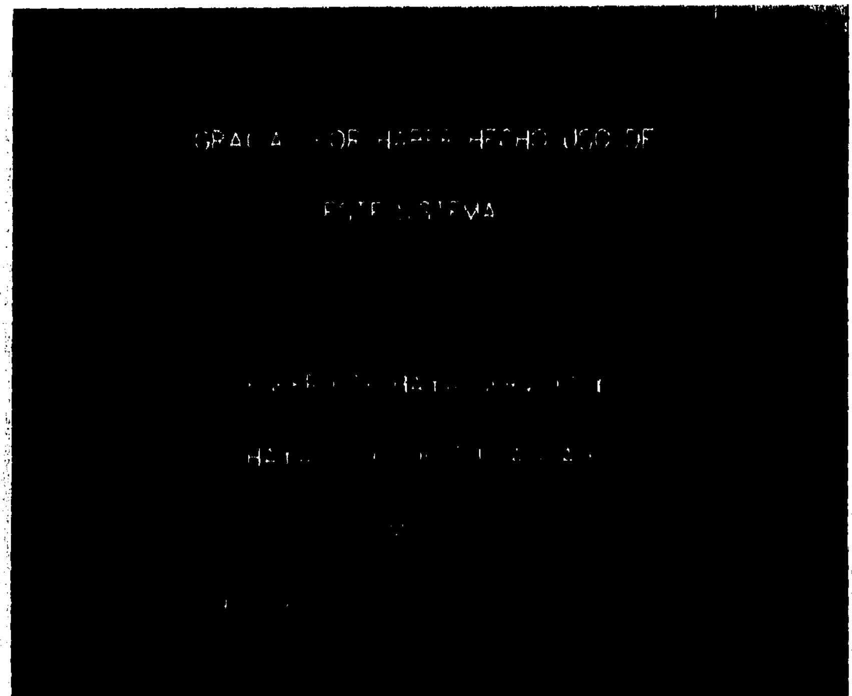


FIGURA 6.3 *Pantalla de despedida.*

Como se indica en la figura anterior, para regresar a DOS, basta con pulsar cualquier tecla.

Una vez que se explicó a grandes rasgos la operación y organización de *TACHILI* se va a proceder a describir cada una de las diferentes etapas de *TACHILI*.

6.1.4 PRIMERA ETAPA.

Si se elijió la primer etapa, el sistema despliega un menú de opciones para jugarla.

6.1.4.1 MENÚ DE LA PRIMERA ETAPA.

Presenta las opciones:

- Juego con fichas y tablero fijo,
- Juego con tablero fijo,
- Juego con fichas fijas,
- Juego con fichas y tablero aleatorio y
- Exit.

desplegando para ello la pantalla:

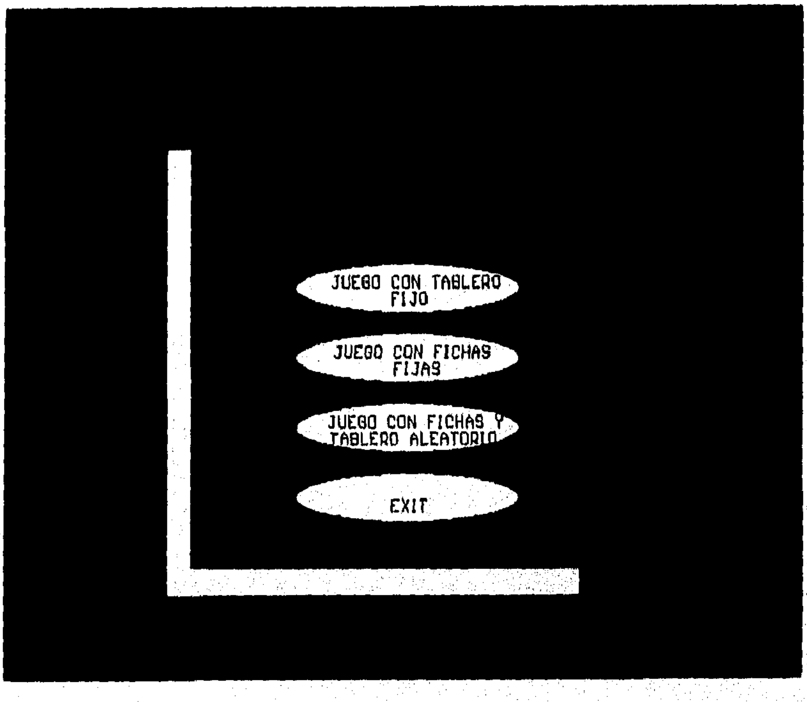


FIGURA 6.4 *Menú de la primer etapa.*

La elección de una opción se hace desplazándose con la < ↑ > o < ↓ > según el caso y pulsando después < ↵ >.

Estas opciones permiten al usuario jugar *TACHTLI* con diferentes "grados de dificultad". Si el usuario elige una opción con tablero fijo, de antemano conoce las casillas en las cuales el tablero se traga a las fichas reduciendo el riesgo de perder sus fichas. Por el contrario, si se elige la opción de **Juego con fichas y tablero aleatorio**, es como si realmente se jugara el juego de mesa *TACHTLI*, donde no se conoce de entrada cuales son las casillas pantano y por consiguiente los jugadores deberán ejercitar la memoria para no caer y/o determinar el riesgo de caer en una casilla pantano, además de que la distribución inicial de los tributos se realiza en forma aleatoria. Finalmente, si se elige el **Juego con fichas y tablero fijo**, se podrá analizar más fácilmente el desarrollo del juego.

Con la opción

- Exit,

el usuario regresará a la pantalla de la figura 6.2.

A continuación se van a explicar cada una de estas opciones.

Con las opciones:

- Juego con fichas y tablero fijo y
- Juego con fichas fijas,

por defaul se tendrán 8 jugadores numerados del 1 al 8; y 0, 1, 2, 2, 1, 1, 2 y 1 tributo(s) para el jugador 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 respectivamente. Esta asignación inicial de tributos en los jugadores, se realizó previo estudio de la función de distribución de probabilidad del experimento de encontrar x número de tributos escondiendo 3 tributos en total, en seis casillas numeradas del 1 al 6, permitiéndose esconder en las primeras 4 un máximo de 2 tributos y en las 2 restantes a lo más 1 y lanzando un dado no calado para encontrarlos.

En las opciones:

- Juego con fichas y tablero fijo y
- Juego con tablero fijo,

se tienen como casillas pantano a las casillas: 12, 16, 18, 22, 24, 43, 45, 50, 52, 55 y 68.

En las opciones:

- Juego con tablero fijo y
- Juego con fichas y tablero aleatorio,

se pide al usuario el número de jugadores participantes en el juego. Este deberá ser cualquier número entero positivo mayor o igual a 2 y menor o igual a 8. La asignación inicial de los tributos la lleva a cabo el sistema en forma aleatoria. Con la opción donde se tiene el tablero aleatorio, la determinación de las casillas pantano se realiza aleatoriamente.

En todas las opciones,

⇨ lo único que debe hacer el usuario es teclear el número de la casilla alternativa que haya elegido,

- para salir al menú del juego (pantalla de la figura) sin terminar de jugar un juego completo, bastará con pulsar la tecla < Esc > antes de jugar con algún guerrero de cuaquier jugador en turno.
- si el usuario desea continuar jugando, se tendrá que pulsar cualquier tecla exepto < Esc > antes de que *TACHTLI* sugiera una casilla aternativa para el siguiente guerrero en movimiento.
- *TACHTLI* presenta la pantalla de la figura.

FIGURA 6.5 *Pantalla de la primer etapa.*

Como se observa, esta pantalla a su vez está dividida en secciones:

❶ Puntaje.
❷ Puntaje final.
❸ Distribución de guerreros.
❹ Posición del guerrero en movimiento y tiro del dado.
❺ Casillas alternativas.
❻ Elección de la casillas alternativa.

- Casillas alternativas.
- Elección de la casillas alternativa.

PUNTAJE.

La información que se despliega aquí, es:

- Número del j-ésimo jugador.
- Número de señales del j-ésimo jugador.
- Número de tributos del j-ésimo jugador.
- Número de guerreros obtenidos en enfrentamientos (guerreros contrarios) del j-ésimo jugador.
- Número de tiros realizados por el j-ésimo jugador.
- Número de enfrentamientos realizados por el j-ésimo jugador, donde en su momento fue el *jugador en turno.*
- El total de puntos del j-ésimo jugador.

El jugador en turno se despliega con color rojo, así como su puntaje.

PUNTAJE FINAL.

TACHTLI proporciona al usuario los jugadores que van llegando a la casilla meta en el orden de su llegada y su puntaje obtenido. Adicionalmente, cuando se termina el juego, se hace la denominación del MEXICA y es en esta sección donde se despliega ese último dato del juego.

DISTRIBUCIÓN DE GUERREROS.

Los guerreros por comodidad están numerados del 1 al 8. En esta sección de la pantalla, *TACHTLI* da la información referente al número de casilla donde se encuentran todos los guerreros de cada uno de los jugadores. Esta información se despliega por medio de una matriz donde el i-ésimo renglón corresponde al i-ésimo guerrero, la j-ésima columna al j-ésimo jugador y el elemento *ij* al número de casilla donde se sitúa el guerrero *i* del jugador *j*. Se indica con rojo la casilla donde se sitúa el *guerrero en movimiento* del jugador en turno. Cuando es la primer tirada de cada jugador, las casillas de la posición inicial de los guerreros son: 2, 5, 8, 63, 70, 39, 36 y 33 para el guerrero: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, y 8 respectivamente. Para denotar que un guerrero está fuera del juego el número de casilla es el 0, así también para indicar que un jugador ya llegó a la meta, todos sus guerreros estan localizados en la casilla 0.

POSICIÓN DEL GUERRERO EN MOVIMIENTO Y TIRO DEL DADO.

Para mayor visibilidad del jugador en turno y del guerrero en movimiento, esta "ventana" indica esa información específica, además del número de casilla donde se localiza, el tipo de casilla y el tiro del dado. Para abreviar el tipo de casilla se tiene la siguiente notación:

Casilla neutral	NEU.
Casilla meta	MET.
Casilla tributo	TRI.
Casilla hechicero	HEC.
Casilla pantano o zona pantanosa	PAN.

CASILLAS ALTERNATIVAS.

Aquí se presentan las casillas alternativas de acuerdo con el tiro del dado, la posición actual del guerrero en movimiento y las reglas del juego. *TACHTLI* da al usuario información adicional para que tenga un mejor criterio al elegir su opción. Esta información consta de:

- ⇨ Tipo de casilla.
- ⇨ Puntaje esperado.
- ⇨ Distancia esperada de la casilla de la posición actual a la casilla meta.
- ⇨ En caso de haber otro jugador en la casilla alternativa se tiene una columna para enfrentamiento (si/no) y una para el número del jugador contrincante.

Recuérdese que se tiene un problema de decisión bajo riesgo al elegir una casilla alternativa óptima. *TACHTLI* en base a la información anterior sugiere al usuario la elección de una casilla.

Cuando no sea posible desplegar todas las casillas alternativas al mismo tiempo en esta sección de la pantalla, se indica con una flecha hacia abajo, y el usuario debe oprimir < ↓ > para continuar viendo alternativas.

ELECCIÓN DE UNA CASILLA ALTERNATIVA.

Como ya se ha mencionado, la tarea del usuario al jugar *TACHTLI* se reduce a elegir una casilla alternativa. Si el usuario teclea una casilla diferente a las casillas alternativas, el sistema manda un *bip* para hacérselo notar.

ENFRENTAMIENTO.

Se manda el letrero correspondiente y se despliega el número del dado en la sección de POSICIÓN DEL GUERRERO EN MOVIMIENTO Y TIRO DEL DADO esta información sólo se despliega unos segundos y se continúa con el juego.

6.1.4.3 TERMINACIÓN DE LA PRIMER ETAPA.

Cuando se termina un juego, como ya se había mencionado se despliega el número del jugador ganador en la sección de PUNTAJE FINAL, se borra toda la demás información y se pide al usuario pulse cualquier tecla para regresar al menú de la figura 6.4.

6.1.5 SEGUNDA ETAPA.

Esta parte del programa se puede jugar en forma independiente a la anterior. Para comenzar a jugar esta segunda etapa del juego, el usuario deberá proporcionar los siguientes datos: la posición de los ocho guerreros mexicas (no olvidando que no se puede colocar inicialmente más de una ficha guerrero en una misma casilla y que tampoco es válido colocar fichas al inicio del juego en las casillas: 11, 22, 33, 44 y 55, además de que las casilla iniciales para el MEXICA son las que se encuaentran por debajo de estas casillas), el número de tributos para el MEXICA, la posición inicial de los guerrreros y señales de la TRIPLE ALIANZA (además de las restricciones anteriores -para este jugador, la zona del tablero válida para distribuir sus fichas es la parte superior del mismo- debe tenerse presente que las señales no podrán ocupar una misma casilla y que las señales se colocan sobre un guerrero -obviamente un guerrero TRIPLE ALIANZA-, además de que el número mínimo de señales es de 1 y el máximo es de 8), así como el número de tributos para este jugador (como máximo se permiten tener 30 tributos repartidos entre ambos jugadores); finalmente, se pide el jugador inicial.

Para mayor claridad, a continuación se presentan las pantallas que despliega el sistema:

FIGURA 6.6.a *Distribución inicial de las fichas (segunda etapa).*

275

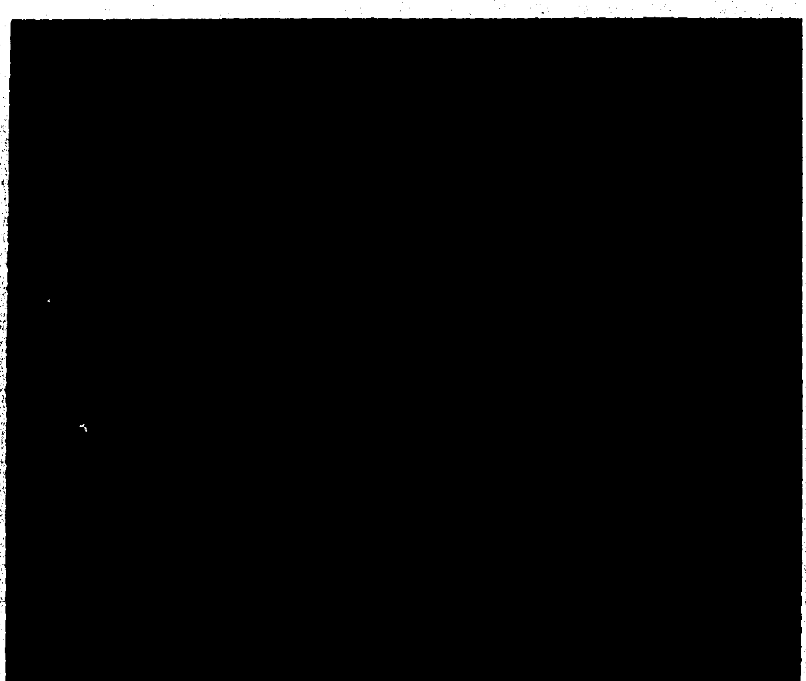


FIGURA 6.6.b *Distribución inicial de las fichas (segunda etapa). (Continuación).*

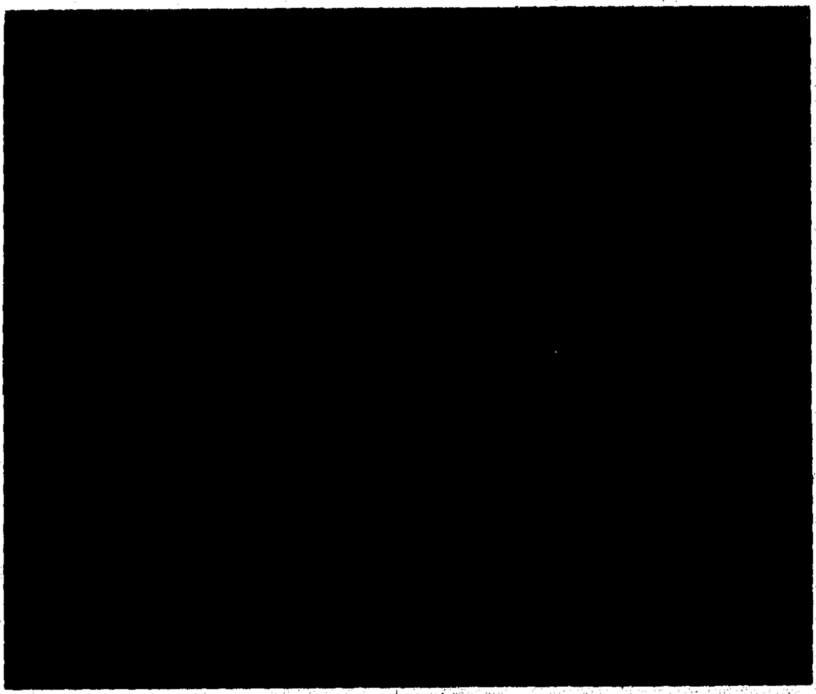


FIGURA 6.6.c *Distribución inicial de las fichas (segunda etapa). (Continuación).*

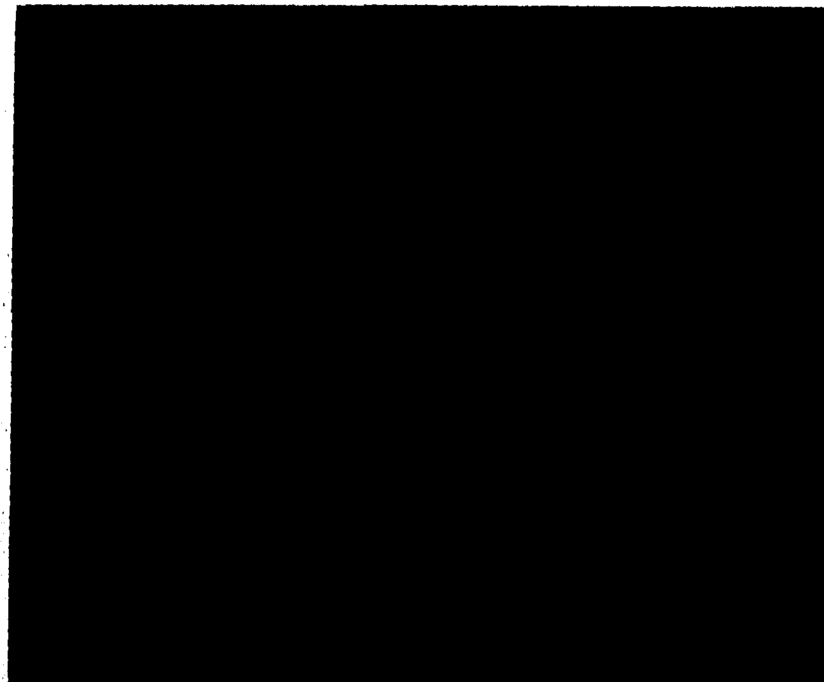


FIGURA 6.6.4 *Distribución inicial de las fichas (segunda etapa). (Continuación).*

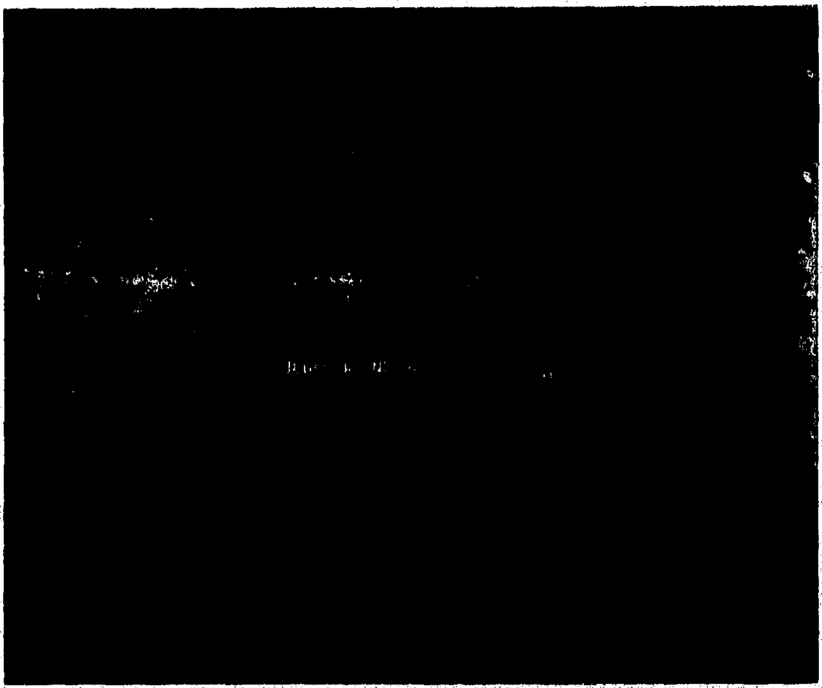


FIGURA 6.6.e *Distribución inicial de las fichas (segunda etapa). (Continuación).*

Estos datos el usuario los teclea seguidos de un < ↵ > (cada uno) para asumir que son válidos, en caso de no cumplir con las restricciones anteriores, el sistema no acepta los datos y manda un < **bip** > indicando al usuario un error, por tanto el usuario deberá de proporcionar nuevamente el dato erróneo en forma correcta.

En seguida, se despliega el tablero con la distribución inicial de las fichas proporcionada por el usuario. El sistema lista las casillas alternativa para cada una de las fichas del jugador en turno, así como también un comentario correspondiente a las fichas del jugador contrario afectadas por ese movimiento; cabe señalar que cuando el número de casillas alternativas por ser demaciado grande no se pueden desplegar en una misma pantalla dichas casillas, el usuario deberá de dar un < ↵ > o cualquier otra tecla para continuar con la visualización del resto de estas casillas. Una vez que se desplegó la información de las casillas alternativas para el jugador en turno, el usuario deberá teclear el número del guerrero a mover seguido de un < ↵ > y posteriormente el número de casilla a la cual desea mover su ficha, también seguida de un < ↵ >. Después de ésto, el sistema realiza las actualizaciones pertinentees al estado del juego en forma automática. Posteriormente, el turno pertenece al otro jugador. El resto del juego se desarrolla de igual manera.

Si por algún motivo el usuario desea dar por terminado un juego, basta con teclear la tecla < **Esc** > en el momento de pedir la ficha a mover, para salir al menú de la figura 6.1.

La figura 6.7, muestra la pantalla que presenta *TACHTLI* para jugar la segunda etapa.

El sistema da por terminado un juego cuando el MEXICA no cuenta con ninguna ficha de guerrero, o cuando la TRIPLE ALIANZA ya no posee señal alguna, o cuando se han efectuado más de 20 iteraciones de las jugadas entre ambos jugadores. Para regresar a la pantalla de la figura 6.1, el usuario deberá teclear cualquier tecla.

Las figuras 6.8.a y 6.8.b, ejemplifican la situación anterior. Supóngase que la distribución inicial de las fichas se realiza como se muestra en la figura 6.8.a, y el MEXICA (jugador inicial en este ejemplo), mueve al guerrero 1 a la casilla No. 2, entonces en ese momento, se da por teminado el juego de esta etapa (figura 6.8.b).

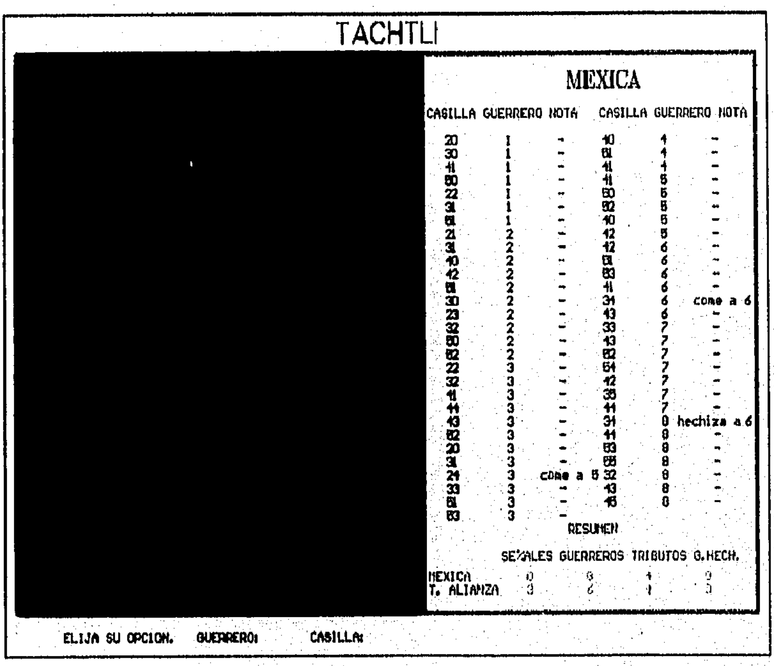


FIGURA 6.7 *Pantalla de la segunda etapa del juego.*

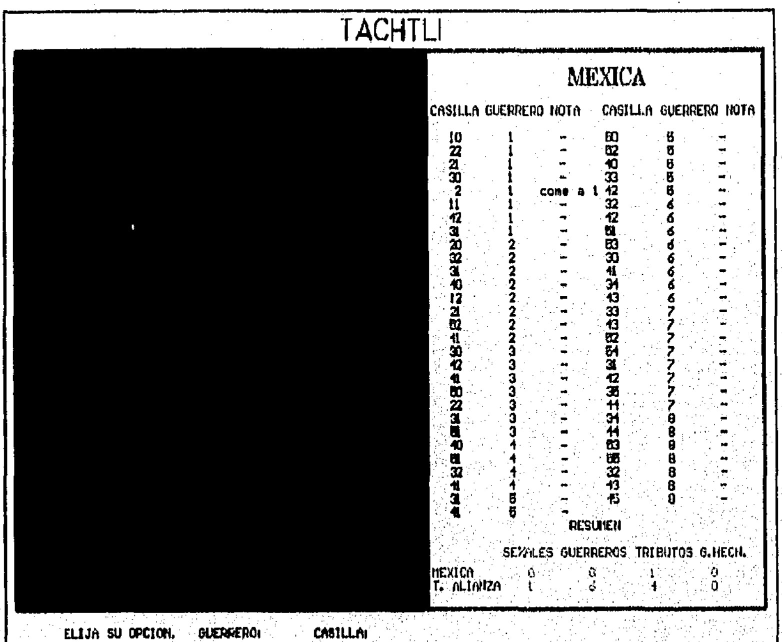


FIGURA 6.8.a *Ejemplo de un juego de la segunda etapa.*

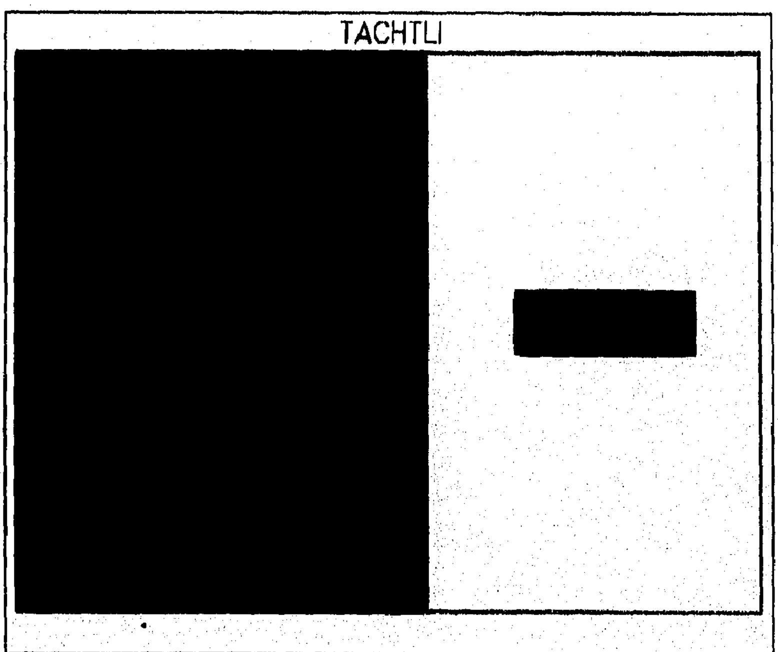


FIGURA 6.8.b *Ejemplo de un juego de la segunda etapa (continuación).*

6.2 MANUAL PARA EL PROGRAMADOR.

Esta parte del capítulo está dedicada a los programadores que en su momento deseen hacer cambios en los programas de *TACHTLI*. Asumiendo que previamente se estudió el capitulo 5 de esta investigación para familiarizarse con él.

TACHTLI es un sistema programado en C++ para hacer la simulación del juego de mesa *TACHTLI* (si posteriormente se desea hacerlo un juego computacional de vanguardia, únicamente se le tendría que dar animación). *TACHTLI* está compilado en turbo-C y está pensado para utilizarse en PC en el ambiente de Microsoft DOS.

La presente sección presenta el funcionamiento de *TACHTLI*, describiendo la organización y la estructura de sus programas, especificando sus parámetros, entradas, salidas y algoritmos.

6.2.1 FILOSOFÍA DE TACHTLI.

Para tener el control de la información requerida en la construcción de la matriz de decisión en cada movimiento personal, en el diseño del modelo del capítulo 5 se pensó en la optimización de variables y ésto se refleja en su programación ya que a su vez, se optimiza la memoria RAM y el tiempo de procesamiento. Así como también se busca la optimización de líneas de código del sistema. Además de lo anterior, en *TACHTLI*, se buscó la generación de series de números mediante funciones matemáticas en los casos posibles, como lo son: la determinación de los tipos de casillas, el llenado de la matriz de adyacencia, entre otros. En *TACHTLI* se tiene la filosofía de optimizar el tiempo de procesamiento, para lo cual en su mayoría se realiza una búsqueda directa de la información requerida para resolver el modelo matemático de toma de decisiones bajo riesgo (para la primer etapa del juego) propuesto en el capítulo anterior, así como para la aplicación de las reglas del juego, dicha búsqueda se hace por medio del uso de índices de matrices.

6.2.2 ORGANIZACIÓN DE LOS PROGRAMAS.

El sistema está dividido esencialmente en tres módulos:

- El módulo AYUDA.C
- El módulo TACHTLI1.C
- El módulo TACHTLI2.C

EL MÓDULO *AYUDA.C*

Este módulo consta de un sólo programa que despliega la ayuda al usuario.

EL MÓDULO *TACHTLI1*.C

En este módulo se hace la presentación y la despedida de *TACHTLI*. Se presenta el menú del juego, menú de la primer etapa y se desarrolla todo el juego en su primer etapa.

EL MÓDULO *TACHTLI2*.C

En este módulo se hace la simulación de la segunda etapa de *TACHTLI*, pidiendole al usuario proporcione el número inicial de fichas para esta etapa, su distribución en el tablero, así como el jugador que va a dar inicio a esta etapa, se dibuja el tablero y las fichas se representan por medio de cuadrados, se listan las casillas alternativas para cada ficha del jugador en turno indicando las reglas del juego que se aplican a las fichas localizadas en esas casillas, se pide al usuario elija la ficha a mover y su casilla elegida y se aplican las reglas correspondientes.

6.2.3 TACHTLI1.C

Por comodidad se distinguen 5 tipos de funciones en este módulo:

- ❶ Función principal.
- ❷ Funciones menú.
- ❸ Funciones de inicialización.
- ❹ Funciones de visualización en pantalla.
- ❺ Funciones del juego.

La *función principal* **main( )** distribuye las tareas del programa de acuerdo con la opción elegida por el usuario en el menú principal y en el menú del juego.

Funciones menú. Presentan al usuario los menús del sistema, están realcionadas con main( ) y son:

- ⇒ menu(int *op)
- ⇒ menuprincipal( )

Funciones de inicialización. Inicializan las matrices requeridas en el juego para evitar que se traslape información. Estas son las siguientes:

- ⇨ aa(short int x)
- ⇨ ini( )
- ⇨ inima1(unsigned short int l)
- ⇨ inima2(unsigned chort int l)
- ⇨ inimc( )
- ⇨ inimc1( )
- ⇨ inimcp( )
- ⇨ inimd( )
- ⇨ inimdm1( )
- ⇨ inimdm2( )
- ⇨ inimh( )
- ⇨ inimpg( )
- ⇨ inipp( )
- ⇨ tributo( )
- ⇨ zonapant( )

Funciones de visualización en pantalla. Despliegan en pantalla la situación del juego al usuario o letreros en pantalla, éstas son:

- ⇨ despedida( )
- ⇨ flecha( )
- ⇨ impri( )
- ⇨ impri1( )
- ⇨ impri2( )
- ⇨ pres( )

Funciones del juego. Son las que llevan a cabo el desarrollo del juego y son:

- ⇨ anadec( )
- ⇨ cambio( )
- ⇨ caminos( )
- ⇨ casalt( )
- ⇨ casalt1( )
- ⇨ casop( )
- ⇨ checar( )
- ⇨ decision( )
- ⇨ enfrentamiento( )
- ⇨ fin( )
- ⇨ hechizo( )
- ⇨ juego( )

- jugan( )
- llemd( )
- perdido( )
- perdido1( )
- rango( )
- senal( )
- senal1( )
- trib( )

6.2.3.1 ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS EN EL DISCO.

Las variables globales en el módulo *tachfil1* son:

VARIABLE. TIPO DE DATO.	SIGNIFICADO. VALORES QUE TOMA. FUNCIONES DONDE SE UTILIZA.
al unsigned short int	Es el número del renglón de la matriz *md* donde el elemento md[*al*][0] es igual a la casilla elegida por el usuario. $al \in \{0, \dots, 14\}$. **decision( ) y anadec( )**.
alt unsigned short int	Indica cuado una casilla opción es casilla alternativa y cuando no lo es. Es una variable de tipo booleano, toma el valor de 0 si la casilla opción analizada no es una casilla alternativa y el valor de 1 en caso contrario. **checar( ) y casalt( )**.
band unsigned short int	Indica si el número del dado es 1 o 3 en un enfrentamiento, para seguir jugando con el mismo guerrero en movimiento, donde las casillas opción se obtienen de la matriz de adyacencia. Variable booleana, *band* es igual a 1 si se cumple lo anterior y 0 en caso contrario. **anadec( ), casop( ), enfrentamiento( ) y jugan( )**.
*band*5 unsigned short int	Indica si ya se eligió la casilla correspondiente al elemento *vec*2[i], con $i \in \{0, \dots, 16\}$. Variable booleana, *band*5 es igual a 1 si *vec*2[i] = 0 y 0 en otro caso. **llemd( ) y rango( )**.

ch unsigned short int	Casilla hechicero. Vale 100 si ninguna casilla hechicero es una casilla alternativa, 88, 19 o 50 si es posible pasar por una casilla hechicero sin ser necesariamente un tiro exacto. **caminos( ) y casop( ).**
cini unsigned short int	Contador de jugadores en turno. Si es el primer tiro del jugador en turno, decrementa en número del dado. $cini \in \cdot^{+}$. **anadec( ), casop( ), juego( ) y jugan( ).**
co unsigned short int	Casilla opción en estudio para determinar si es una casilla alternativa. $co \in \{0, 1, \dots, 90\}$. **casalt( ) y llemd( ).**
coi unsigned short int	Contador de las casillas opción. $coi = 0, \dots,$ número total de casillas opción - 1. **anadec( ), casop( ) y casalt( ).**
*coi*1 unsigned short int	Contador de casillas alternativas. $coi1 = 0, \dots, coi$ - el número de casillas opción que no son casilla alternativas. **casalt( ), decision( ), juego( ) y llemd( ).**
contador unsigned short int	Contador de iteraciones del juego. $contador = 0, \dots, 5$. **jugan( ) e impri( ).**
cp unsigned short int	Número de casilla donde se localiza el guerrero en movimiento. $cp \in \{1, \dots, 89\}$. **caminos( ), casop( ), decision( ) y jugan( ).**
d unsigned short int	Número del dado con el que avanzan todos los guerreros del jugador en turno. $d \in \{1, \dots, 6\}$. **casop( ), decision( ) y jugan( ).**
dt unsigned short int	Indica si el jugador en turno ya llegó a la meta. Variable booleana igual a 0 si el jugador en turno aún no llega a la meta y 1 en otro caso. **casalt( ), casalt1( ) y juego( ).**

dtn unsigned short int	Inidica el jugador va a tomar la estrategia 1. Variable booleana con el valor de 0 si no es conveniente aplicar la estrategia 1 y 1 en otro caso. **casalt( ), decision( ) y jugan( ).**
ef unsigned short int	Indica cuando se presenta un enfrentameinto en las casillas alternativas y por consiguiente en la casilla elegida. Variable booleana, vale 0 si no hay enfrentamiento y 1 en caso contrario. **casalt( ), checar( ) y llemd( ).**
gm short int	Indica si un guerrero se descarta del juego por no tener tributos. Variable booleana, toma el valor de 1 si se pierde la ficha y 0 en otro caso. **anadec( ) y trib( ).**
jug unsigned short int	Total de jugadores participantes en el juego. $jug \in \{1, ..., 8\}$. **anadec( ), casop( ), impri( ), inimpg( ), juego( ) y jugan( ).**
jt unsigned short int	Número del jugador en turno. $jt \in \{0, ..., jug - 1\}$. **anadec( ), cambio( ), casalt1( ), checar( ), decision( ), hechizo( ), impri( ), jugan( ), perdido( ), perdido1( ), senal( ), senal1( ) y trib( ).**
ll unsigned short int	Número de la potencia a elevar la matriz de adyacencia. $ll \in \{1, ..., 6\}$. **caminos( ), casop( ), decision( ) y jugan( ).**
ma[90][90] short int	Matriz de adyacencia Variable booleana, *ma*[i][j] =1 si $\exists$ un arco de la casilla *i* a la casilla *j* y 0 en otro caso. **caminos( ) y casop( ).**
map[90][90] short int	Matriz potencia auxiliar *map*[i][j] $\neq$ 0 si $\exists$ un camino de longitud *ll* de la casilla (i + 1) a la casilla (j + 1), donde i $\neq$ j, con i = j = 0, ... , 89. **caminos( ), casop( ), ini( ), inima1( ) e inima2( ).**

mc[9][10] unsigned short int Matriz de clasificación de casillas.
mc[i][j] ∈ {0, ... , 5}, con i = 0, ... , 8., y j = 0, ... , 9.
decision( ), inimc( ), inimc1( ), inimcp( ), llemd( ) y **zonapant( ).**

md[15][4] unsigned short int Matriz de decisión.
md[i][0] = número de la casilla alternativa,
md[i][1] = tipo de casilla de *md*[i][0],
md[i][2] = valor de *ef*.
anadec( ), decision( ), inimd( ), llemd( ) y **rango( ).**

*md*1[15] float Vector de puntaje esperado.
*md*1[i] ∈ ·, con i = 0, ... , 14.
decision( ), inimd( ) y **llemd( ),**

*md*2[15] float Vector de distancia esperada.
*md*2[i] ∈ ·$^+$, con i = 0, ... , 14.
decision( ), inimd( ) y **llemd( ),**

mdg[9][10][2] unsigned short int Matriz de distribución de guerreros.
mdg[i][j][k]∈{00, 01, ... , 07, 10, 11, ... , 17, 70, ... , 77} si hay algún guerrero en la casilla *ij*, no olvidando que puede haber máximo 2 guerreros en una misma casilla. *mdg*[i][j][k] = 99, si no hay guerreros en la (*k* + 1)-ésima oportunidad, donde (*mdg*[i][j][k]/10) = al número de guerrero y (*mdg*[i][j][k] mod 10) = jugador, con *i* = 0, ... , 8., *j* = 0, ... , 9., y *k* = 0, 1.
anadec( ), cambio( ), casalt1( ), checar( ), ini( ), jugan( ), perdido( ), perdido1( ) y **senal( ).**

***mdg*1[8][8]unsigned short int**Matriz de distribución de guerreros 1.
***mdg*1[i][j]**∈{0, ... , 89}, donde I representa al i-ésimo guerrero del jugador *j*, con i = 0, ... , 7., y j = 0, ... , *jug* - 1. Si ***mdg*1[i][j]** = 0, indica que el guerrero *I* está fuera del juego (porque se perdió esta ficha o porque el jugador *j* ya llegó a la meta, o si es el jugador aún no realiza su primer tiro del dado).
cambio( ), casalt1( ), impri( ), ini( ), perdido( ), perdido1( ), senal( ) y **jugan( ).**

mdm[9][10] unsigned short int Matriz de distancia mínima
mdm[i][j]∈{0, ... , 9}, donde *mdm*[i][j] es el mínimo número de casillas de la casilla *ij* a la meta, con *i* = 0, ... , 8., y *j* = 0, ... , 9.
casop( ), ini( ), inimdm1( ). inimdm2( ) y **llemd( ).**

mh[9][10][5] unsigned short int — Matriz de casillas con opción de pasar a una casilla de hechicero.
Constante booleana, *mh*[i][j][k] = 0 si no existe algún camino de longitud (k + 2) de la casilla ij a alguna casilla hechicero, *mh*[i][j][k] = 1 en otro caso $\forall\ i = 0, \dots, 8., j = 0, \dots, 9.,$ y $k = 0, \dots, 4.$
inimh( ) y jugan( ).

mjr short int — Número del jugador analizado.
$mjr \in \{0, \dots, 7\}$.
cambio( ), casalt1( ), casop( ), checar( ), hechizo( ), llemd( ), perdido( ), perdido1( ) y senal( ).

mmb short int — Indica el número del jugador contra el cual se presenta un enfrentamiento.
$mmb \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$. Si $mmb = 9$, indica que no hay enfrentamiento.
checar( ) y senal1( ).

mp[8][6] unsigned short int — Matriz de puntos.
mp[i][0] = número de señales del jugador i.
mp[i][1] = número de guerreros del jugador i.
mp[i][2] = número de tributos del i-ésimo jugador.
mp[i][3] = número de guerreros contrarios obtenidos en enfrentamientos por el i-ésimo jugador.
mp[i][4] = número de tiros del dado realizados por el i-ésimo jugador.
mp[i][5] = número de enfrentamientos donde el i-ésimo jugador ha sido el jugador en turno, con $i = 0, \dots, jug - 1$.
casalt1( ), enfrentamiento( ), hechizo( ), impri( ), inimpg( ), inipp( ), jugan( ), llemd( ), perdido( ), perdido1( ), trib( ), senal( ) y senal1( ).

mpp[8][3] unsigned short int — Matriz de puntos auxiliar.
mpp[i][0] = número de señales del jugador i al llegar a la meta.
mpp[i][1] = número de guerreros del jugador i al llegar a la meta.
mpp[i][2] = número de tributos del i-ésimo jugador al llegar a la meta, con $i = 0, \dots, jug - 1$.
casalt1( ) y fin( ).

mt[4][2] unsigned short int	Matriz total. *mp*[i][0] = número del jugador que llegó a la meta, *mp*[i][1] = puntaje obtenido por el jugador *mp*[i][0], *i* = orden de llegada a la meta, con $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. **casalt1( ), impri( ), impri2( ), ini( ) y jugan( ).**
ng short int	Número del guerrero en movimiento. $ng \in \{0, ..., 7\}$. **anadec( ), cambio( ), decision( ), impri( ), jugan( ), perdido( ), perdido1( ) y senal( ).**
nog short int	Número del guerrero analizado. $mjr \in \{0, ..., 7\}$. **cambio( ), casalt1( ), casop( ), checar( ), llemd( ), perdido( ), perdido1( ) y senal( ).**
vec[11] unsigned short int	Vector de casillas pantano. *vec*[*i*] = número de una casilla tipo 1, con *i* = 0, ... , 10. **inimc( ), inimcp( ), jugan( ) y llemd( ).**
*vec*1[11] unsigned short int	Vector de casillas pantano (verificador). *vec*1[*i*] = número de una casilla tipo 1, con *i* = 0, ... , 10. Si *vec*1[*i*] = 0, significa que ya se eligió la casilla *vec*[*i*]. **decision( ), jugan( ), llemd( ) y rango( ).**
*vec*2[17] unsigned short int	Vector de casillas de tipo 2. *vec*2[*i*] = número de una casilla tipo 2, con *i* = 0, ... , 16. Si *vec*2[*i*] = 0, entonces, ya se eligió la casilla correspondiente a ese elemento *vec*2[i]. **decision( ), inimc( ), inimcp( ) y rango( ).**
vecop[15] unsigned short int	Vector de casillas opción *vecop*[*i*] = $\in \{0, ..., 90\}$, con *i* = 0, ... , número de casillas opción - 1. **casalt( ) y casop( ).**
w short int	Contador de jugadores ganadores. *w* = *i*, con *i* = 0, ... , *ww*. **casalt1( ), impri( ) y jugan( ).**
ww short int	Total de jugadores a ganar en el juego. *ww* = 4 si $jug \geq 4$ o *ww* = *jug* en otro caso. **impri( ) y jugan( ).**

x short int	Indica el número entero positivo que se puede generar aleatoriamente como máximo, es el parámetro de entrada en la función aa( ). $x \in \cdot^{+}$. **aa( ), enfrentamiento( ), inime( ), jugan( ) y tributo( ).**

6.2.3.2 ESTRUCTURA DE LOS PROGRAMAS DE *TACHTLI1. C*

Para la manipulación de la salida de textos en pantalla, la utilización de gráficos y efectos de sonido, las directivas al compilador que se establecen en *TACHTLI1*.C son:

DIRECTIVA	FUNCIONES A USAR
#include "conio.h"	getch( ), gotoxy( ), texcolor( ), etc.
#include "dos.h"	delay( ), nosound( ), sound( ), etc.
#include "graphics.h"	ellipse( ), circle( ), clearwiewport( ), fillellipse( ), floodfill( ), getcolor( ), line( ), outtextxy( ).
#include "stdio.h"	printf( ), scanf( ).
#include "stdlib.h"	atof( ), atoi( ), itoa( ).

además de las anteriores, las directivas requeridas por **menuprincipal( )** son:

- ⇨ #define F1 59 Número asignado a la tecla de función <F1>.
- ⇨ #define F2 60 Número asignado a la tecla de función <F2>.
- ⇨ #define F3 61 Número asignado a la tecla de función <F3>.

Por último, la directiva para dar por terminado un juego empleada en **jugan( )**, es:

⇨ #define ESC 61 Número asignado a la tecla <ESC>.

Las funciones se van a presentar en orden de acuerdo al tipo de función a la que pertenezcan. Para cada función se van a dar los parámetros de entrada y salida así como una breve explicación de su función.

FUNCIÓN PRINCIPAL

void main( ).

Inicializa el módo gráfico. Llama a la función **menuprincipal( )** y de acuerdo a la opción elegida por el usuario en esta función llama a las funciones correspondientes:

OPCIÓN ELEGIDA	FUNCIONES O PROGRAMAS LLAMADOS
F1	**Ayuda.c**
F2	**menu( )**
F3	**despedida( )**

a su vez según la elección en **menu( )**, si ésta es diferente a exit, llama a **inimh( )** y se tiene:

OPCIÓN ELEGIDA	FUNCIONES O PROGRAMAS LLAMADOS
1	**inipp( ), inimcp( ),** *jug* = 8.
2	**inimcp( ), inimpg( ).**
3	**inipp( ), inimc( ),** *jug* = 8.
4	**inimpg( ), inimc( ).**

además llama a **ini( )**, limpia la pantalla, llama a **pres( )** y a **jugan( )**. Finalmente termina el módo gráfico.

FUNCIONES MENÚ

void menu(int *op)

Despliega el menú del juego y regresa la variable *op a la función **main( )**.

void menuprincipal( )

Despliega la pantalla de bienvenida a *TACHILI*, el menú principal del sistema y regrèsa a la función **main( )** el valor de op.

FUNCIONES INICILIZADORAS

void aa( )

Genera un número aleatorio entero positivo entre el cero y el número $x + 1$.

void ini( )

Inicializa la matriz de adyacencia, usando unas funciones para que el proceso sea más rápido y se optimice las líneas de código en el programa, éstas son:

void inima1(unsigned short int l)

$$
\begin{aligned}
ma[l+\mathrm{i}][l+\mathrm{i}+1] &= ma[l+\mathrm{i}+16][l+\mathrm{I}+17]\\
&= 1, \text{ con } l = 0, 31 \text{ y } \forall\, \mathrm{i} = 0, \dots, 8.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ma[l+\mathrm{i}+13][89] &= ma[l+16+2*(\mathrm{i}-1)][l+26+2*(\mathrm{i}-1)]\\
&= ma[l+17+3*(\mathrm{i}-1)][l+27+3*(\mathrm{i}-1)]\\
&= 1, \text{ con } l = 0, 31 \text{ y } \forall\, \mathrm{i} = 1, 2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ma[l+\mathrm{i}+10][l+\mathrm{i}+11] &= ma[l+\mathrm{i}+10][l+\mathrm{i}+26]\\
&= ma[l+\mathrm{i}+26][l+\mathrm{i}+27]\\
&= ma[l+\mathrm{i}+5][l+\mathrm{i}+21]\\
&= 1, \text{ con } l = 0, 31 \text{ y } \forall\, \mathrm{i} = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

$$
ma[l+9][l+25] = ma[l][l+16] = 1, \text{ con } l = 0, 31.
$$

void inima2(unsigned sort int l)

$$
\begin{aligned}
ma[l+70][l+71] &= ma[l+70][l+74] = ma[l+71][l+72]\\
&= ma[l+71][l+75] = ma[l+72][l+76]\\
&= ma[l+73][l+74] = ma[l+75][l+76]\\
&= ma[l+74][l+75] = 1, \text{ con } l = 0, 7.
\end{aligned}
$$

En esta función se inicializa la matriz de distancia mínima. Siguiendo la filosofía de optimizar tiempo de proceso y líneas de código, utiliza las siguientes funciones:

void inimdm1(unsigned short int l, unsigned short int l1)

$$mdm[l][l1 + 1 + i * 2] = 8, \quad \text{con } l = 0, l1 = 0, \text{ y } l = 3, l1 = 1 \ \forall\, i = 0,\dots,4,$$

$$mdm[l+1][l1+5] = mdm[l+1][l1+6] = 1,$$

$$mdm[l+1][l1+4] = 2,$$

$$mdm[l+3][l1] = mdm[l+1][l1+3] = 3,$$

$$mdm[l+2][l1+9] = mdm[l+1][l1+2] = mdm[l+3][l1+1] = 4,$$

$$mdm[l+1][l1+9] = mdm[l+2][l1+1] = mdm[l+2][l1+8] = mdm[l+1][l1+1] = 5,$$

$$mdm[l+1][l1+8] = mdm[l+2][l1] = mdm[l+2][l1+2] = mdm[l+2][l1+6] = mdm[l+2][l1+7] = 6,$$

$$mdm[l][l1+4] = mdm[l][l1+6] = mdm[l+1][l1] = mdm[l+2][l1+5] = mdm[l+1][l1+7] = mdm[l+2][l1+3] = 7,$$

$$mdm[l+2][l1+4] = 8,$$

$$mdm[l][l1+2] = mdm[l][l1+8] = 9, \quad \text{con } l = 0, l1 = 0 \text{ y } l = 3, l1 = 1.$$

void inimdm2( )

$$mdm[6][i] = 8, \qquad \forall\, i = 4, 5, 6.$$

y termina de inicializar la matriz *mdm*.

También inicializa a las matrices:

$$
\begin{aligned}
&mt[i][j] = 9, && \forall\, i = 0, \ldots, 3 \text{ y } j = 0, 1.\\
&mdg1[i][j][k] = 99, && \forall\, i = 0, \ldots, 8., j = 0, \ldots, 9 \text{ y } k = 0, 1.\\
&mdg[i][j] = 0, && \forall\, i = 0, \ldots, 3 \text{ y } j = 0, 1.\\
&mpp[i][j] = 9, && \forall\, i = 0, \ldots, 8 \text{ y } j = 0, 1, 2.
\end{aligned}
$$

void inimc( )

Lleva a cabo la clasificación de casillas donde las casillas pantano son determinadas en forma aleatoria. Llama a la función

zonapant( ).

Determina a las casillas que pertenecen a las zonas de pantano y a las que son neutrales (tipo 0).

Mediante funciones aleatorias determina a las casillas tipo 1. Finalmente llama a la función

inimc1( ).

Aquí se clasifican a las casillas tipo 3, 4 y 5; aplicando la función

$$
\begin{aligned}
mc[0][i * 4 + 1 * (i - 1)] &= mc[2][i * 3]\\
&= mc[3][i * i + (i - 1)]\\
&= mc[4][4 * i * (i - 1)]\\
&= mc[5][i * 4 - 1 * (i - 1)]\\
&= mc[6][i * 2]\\
&= mc[7][i * 4 - 2 * (i - 1)]\\
&= mc[8][i - 1]\\
&= mc[i][7 + 2 * (i - 1)]\\
&= 3, \qquad \forall\, i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

void inimcp( )

Inicializa la matriz de clasificación de casillas y a las casillas-pantano las determina en forma determinística. Al igual que en la función **inimc( )** se llama a las funciones **zonapant( )** y **inimc1( )**. También inicializa al vector $vec2[i]$ $\forall$ $i = 0, \ldots, 16.$, cuyos elementos $vec2[i]$ son iguales a las casillas tipo 2.

void inimd( )

Inicializa a la matriz *MD* y a los vectores *md*1 y *md*2.

$$\begin{aligned} md[i][j] &= md1[i] \\ &= md2[i] \\ &= 0, & \forall\, i = 0, \ldots, 14 \text{ y } j = 0, 1, 2. \\ md[i][3] &= 9, & \forall\, i = 0, \ldots, 14. \end{aligned}$$

void inimh( )

Inicializa a la matriz *mh* para el número del dado $d = 2, \ldots, 6$.

void inimpg( )

Despliega una pantalla donde se pide al usuario el número de jugadores a participar en el juego (*jug*) e inicializa la matriz de puntos para las opciones de:

- ⇨ Juego con tablero fijo.
- ⇨ Juego con fichas y tablero aleatorio.

donde

$$\begin{aligned} mp[i][0] &= 1, \\ mp[i][1] &= 8, \\ mp[i][3] &= mp[i][4] \\ &= mp[i][5] \\ &= 0, \\ mp[i][2] &= \textbf{tributo( )}, \\ & & \forall\, i = 0, \ldots, jug - 1. \end{aligned}$$

void inipp( )

Inicializa la matriz de puntos para las opciones:

- ⇒ Juego con fichas y tablero fijo.
- ⇒ Juego con fichas fijas.

void tributo( )

Genera aleatoriamente el número de tributos con los que inicia cada jugador deacuerdo con las reglas del juego y regresa el valor *tribt*.

FUNCIONES DEL VISUALIZACIÓN EN PANTALLA.

void despedida( )

Despliega una pantalla de fin del sistema.

void flecha( )

Pinta una flecha hacia abajo para indicar al usuario que existen más casillas alternativas y que para poder saber cuales son, basta con teclear < ↓ >.

void impri( )

Despliega en pantalla las matrices *mp*, *mt* y *mdg*1, indicando al jugador en turno, su puntaje y la casilla donde se encuentra situado el guerrero en movimiento. Si es el fin del juego, determina al jugador ganador y manda el letrero correspondiente.

void impri1( )

Borra de la pantalla a las matrices *mp* y *mdg*1.

void impri2( )

Borra de la pantalla a la matriz *mt*.

void pres( )

Despliega la pantalla del desarrollo del juego.

FUNCIONES DEL JUEGO.

Se va a iniciar con la función **juego( )** para que a grandes rasgos se identifique el procedimiento a seguir en este sistema y se va a continuar con la descripción de las demás funciones del juego, para terminar con el algoritmo de un juego completo expresado en la función **jugan( )**.

void juego( )

Administra el orden de ejecución de las funciones para realizar el juego. Su algoritmo es:

1. Ver que casillas son casillas opción llamando para éllo a la función **casalt( )**.
2. Si no existe la posibilidad de que se tenga a la casilla meta como alternativa o se está aplicando la estrategia de cambiar dos guerreros contrarios por tributos, entonces,
   2.1. Si no se tiene ninguna casilla alternativa y no es el primer tiro del jugador en turno para el guerrero en movimiento, entonces,
      2.1.1. la ficha no se mueve de la casilla *cp*.
   de lo contrario,
      2.1.1. se despliegan las casillas alternativas y se pide al usuario eliga su opción, llamando a **decision( )**.
      2.1.2 si el jugador no llega a la meta, entonces,
         2.1.2.1. se aplican las reglas del juego con la función **anadec( )**.
         2.1.2.2. se despliega en pantalla la nueva posición del guerrero en movimiento, ejecutando las funciones **impri1( )** e **impri( )**.
3. Fin de la función.

Como se aprecia en la función **juego( )**, primero se determinan las casillas opción (**caminos( )** y **casop( )**), descartando las que no cumplen con las reglas del juego para saber cuáles son casillas alternativas (**checar( )**) y poder calcular su puntaje y distancia esperada a la meta (**rango( )**, **senal( )** y **llemd( )**). Concentrando esta información en la matriz *md* (**casalt( )**). Además de contemplar la posibilidad de llegar a la meta (**casalt1( )**).

void caminos( )

Eleva a la matriz *ma* a la potencia (*ll*- 1) para determinar las casilla opción.

void casop( )

Determina las casillas opción para un determinado tiro del dado y una casilla posición dada. Si el número del dado es diferente a 1, entonces, aplica las ecc. ( ), almacenado estas casillas opción en el vector *vecop* y llama a **caminos( )** para continuar llenando al vector *vecop*, en otro caso, si el jugador en turno ya ha jugado más de una vez con el guerrero en movimiento y si el número del dado es diferente a 1 y no se está efectuando un enfrentamiento, llena *vecop* con las casillas opción de acuerdo a la matriz de adyacencia, de no ser así, el elemento *vecop*[0] (único) es igual a la casilla *cp*. (La casilla meta se denota con 0).

void checar( )

Verifica que la casilla opción sea una casilla alternativa, su algoritmo es:

1. Asigna el valor de 0 a la variable *ef*.
2. *mmb* toma el valor de 9, es decir, de entrada se supone que no hay enfrentamiento.
3. Si en la casilla opción *co* hay dos guerreros,
   entonces,
   3.1. Si la casilla *co* es igual a la casilla *cp*, es decir, si se tiene como opción la misma casilla posición,
      3.1.1. y si además existe un jugador contrario en esa casilla, entonces,
         co se toma como casilla alternativa (*alt* = 1 y *ef* = 1),
      3.1.2. si en esa casilla se encuentran 2 fichas del jugador en turno, entonces,
         alt = 1 y *ef* = 0;
   3.2. Si $co \neq cp$, la variable *alt* toma el valor de 0.
   de lo contrario,
   3.1. si únicamente hay un guerrero en la casilla *op*,
      entonces,
      3.1.1. *alt* = 1.
      3.1.2. *ef* = 1.
      3.1.3. *mmb* es igual al número del jugador contrincante.
   3.2. si en la casilla *op* no hay ningún guerrero,
      entonces,
      3.2.1. *alt* = 1.
4. Fin de la función.

void rango( )

Determina el grado de incertidumbre (probabilidad) de que un guerrero sea tragado por el tablero en la casilla alternativa en análisis, lo asigna a la variable *valor* y la toma como variable de salida.

void senal1( )

Lleva a cabo el cálculo de la variable *mdv1* de la ecuación (5.2.a3) del capítulo anterior, calculando éste de acuerdo con el número de señales del jugador en turno y del jugador contrincante.

void llemd( )

Llena la matriz *md*, así como los vectores *md1* y *md2*. Su algoritmo es el siguiente:

1. Declara a las variables *r* y *ss1* de tipo real (float) y las iguala con cero.
2. Al elemento *md*[*coi1*][0] lo iguala con el número de casilla opción.
3. Al elemento *md*[*coi1*][1] le asigna el elemento *mc* correspondiente a la casilla opción (tipo de casilla opción).
4. Al elemento *md*[*coi1*][2] lo iguala al valor de la variable *ef* (0 si no hay enfrentamiento, 1 en caso contrario).
5. Si *mc* de la casilla opción es diferente de tipo 5 (casilla meta) y el valor de *ef* = 0, entonces,
   5.1. la distancia esperada a la meta (*md1*[*coi1*]) es igual al elemento *mdm* de la casilla opción correspondiente.
6. Si *mc* de la casilla opción es diferente a 5 y *ef* = 1, entonces,
   6.1. *md2*[*coi1*] es igual a (1.0/6) * 15 + (1.0/3) * (*mdm* de la casilla opción - 1) + (1.0/2) * *mdm* de la casilla opción.
7. Si el valor de *ef* es igual a 0 y el tipo de casilla de la casilla opción es
   7.1. 6, entonces, el puntaje esperado en esa casilla opción (*md3*[*coi1*]) es igual a 0
   7.2. 1 o 2, entonces,
      7.2.1. *r* toma el valor que retorna la función *rango*( ).
      7.2.2. *md3*[*coi1*] = *r* * (-2), esto es, el puntaje esperado es igual a la probabilidad de perder la ficha por el valor que tienen las fichas de guerrero.
      7.2.3. *md2*[*coi1*] = *r* * 15 + (1 - *r*) * *mdm* de la casilla opción, es decir, el valor esperado a la meta es igual a la probabilidad de que el tablero se trague la ficha

void rango( )

Determina el grado de incertidumbre (probabilidad) de que un guerrero sea tragado por el tablero en la casilla alternativa en análisis, lo asigna a la variable *valor* y la toma como variable de salida.

void senal1( )

Lleva a cabo el cálculo de la variable *mdv*1 de la ecuación (5.2.a3) del capítulo anterior, calculando éste de acuerdo con el número de señales del jugador en turno y del jugador contrincante.

void llemd( )

Llena la matriz *md*, así como los vectores *md*1 y *md*2. Su algoritmo es el siguiente:

1. Declara a las variables *r* y *ss*1 de tipo real (float) y las iguala con cero.
2. Al elemento *md*[*coi*1][0] lo iguala con el número de casilla opción.
3. Al elemento *md*[*coi*1][1] le asigna el elemento *mc* correspondiente a la casilla opción (tipo de casilla opción).
4. Al elemento *md*[*coi*1][2] lo iguala al valor de la varible *ef* (0 si no hay enfrentamiento, 1 en caso contrario).
5. Si *mc* de la casilla opción es diferente de tipo 5 (casilla meta) y el valor de *ef* = 0, entonces,
    5.1. la distancia esperada a la meta (*md*2[coi1]) es igual al elemento *mdm* de la casilla opción correspondiente.
6. Si *mc* de la casilla opción es diferente a 5 y *ef* = 1, entonces,
    6.1. *md*2[coi1] es igual a (1.0/6) * 15 + (1.0/3) / (*mdm* de la casilla opción - 1) + (1.0/2) * *mdm* de la casilla opción.
7. Si el valor de *ef* es igual a 0 y el tipo de casilla de la casilla opción es
    7.1. 0, entonces, el puntaje esperado en esa casilla opción (*md*1[coi1]) es igual a 0.
    7.2. 1 o 2, entonces,
        7.2.1. *r* toma el valor que retorna la función **rango( )**,
        7.2.2. *md*1[coi1] = *r* * (-2), esto es, el puntaje esperado es igual a la probabilidad de perder la ficha por el valor que tienen las fichas de guerrero.
        7.2.3. *md*2[coi1] = *r* * 15 + (1 - *r*) * *mdm* de la casilla opción, es decir, el valor esperado a la meta es igual a la probabilidad de que el tablero se trague la ficha

multiplicada por un número muy grande (15) más la probabilidad de fracaso (no perder la ficha) por la mínima distancia de la casilla opción a la meta.

7.2.4. Si la casilla opción en caso de ser casilla tipo 1 ya fué elegida en jugadas anteriores, entonces *md*1[*coi*1] = -2, es decir, con certeza se pierde la ficha y *md2*[*coi*1] = 15.

7.3. 3, entonces,

7.3.1. si el número de tributos del jugador en turno es cero, con certeza pierde a su guerrero, por lo que, *md*1 = -2 y *md2* = 15.

7.3.2. de lo contrario, únicamente pierde un tributo y *md*1[*coi*1] = -1.

7.4. 4, entonces,

7.4.1. si el número de guerreros contrarios del jugador en turno es mayor o igual a 2, entonces,

7.4.1.1. el puntaje esperado es igual al número de tributos que se puedan conseguir,

de lo contrario,

7.4.1.1. *md*1[*coi*1] es igual a 0.

8. Si *ef* es igual a 1,

8.1. *ss*1 toma el valor que regresa la función **senal1( )**

8.2. dependiendo del tipo de casilla que sea la casilla opción se tiene que para el tipo

8.2.1. 0 o 2, *md*1[*coi*1] es igual al valor de *ss*1 - (0.25), es decir, *md*1[*coi*1] es igual a al valor esperado de perder una señal más (1.0/6) por el valor de perder un guerrero más el valor de un guerrero contrario (0.5) por la probabilidad de que el jugador contrincante pierda (1.0/6).

8.2.2. 3, entonces, Si el jugador en turno no tiene tributos, entonces,

8.2.2.1. el puntaje esperado es el valor de perder un guerrero (-2) y la distancia esperada a la meta es 15.

de lo contrario,

8.2.2.1. *md*1[*coi*1] toma el valor que para los casos tipo 0 o 2 más el valor de un tributo.

8.2.3. 4, entonces,

8.2.3.1. se verifica que se puedan cambiar guerreros contrarios por tributos, de ser así, *md*1[*coi*1] es igual al número de tributos a cambiar más es valor de $md1[col1]$ para los casos 0 o 2; si no se puede, $md1[col1]$ es igual a $md1[col1]$ para los tipos 1 o 2.

9. Fin de la función.

Este algoritmo resulta de las ecuaciones (5.2.a3).

void casalt1( )

Realiza lo correspondiente con el jugador que llega a la casilla meta, es decir,

1. $dt = 1$.
2. Iguala a los elementos de la matriz *mpp* con sus correspondientes en *mp*.
3. Efectúa la ecuación (5.2.c1).
4. Llama a **impri2( )**, **impri1( )** y **impri( )**.
5. Fin de la función.

void casalt( )

Verifica que una casilla opción sea una casilla alternativa. A continuación se describe su algoritmo;

1. A la variable *dt* la iguala a 0.
2. Limpia la matriz *md* y a los vectores *md*1 y *md*2 con la función **inimd( )**.
3. Checa que casillas son casillas opción llamando a **casop( )**.
4. Si la última casilla opción es una casilla meta ($vecop[col - 1] = 0$) y la variable *dtn* es igual a 0, entonces,
   4.1. hace llegar al jugador en turno a la meta con la función **casalt1( )** donde *dt* toma el valor de 1.

   de lo contrario,
   4.1. inicializa al *contador col*1 con 0.
   4.2. $\forall$ i con $i = 0, \ldots, col - 1$.
      4.2.1. Si $dt = 0$,
         entonces,
         4.2.1.1. se asigna el valor de 0 a la variable *ef*,
         4.2.1.2. a la variable *alt* se le da el valor de 1,
         4.2.1.3. se llama a la función checar( ) con el parámetro *vecop*[i], esto es, **checar(*vecop*[i])** para verificar que la casilla opción pueda se considerada casilla

alternativa, en esta función se altera el valor de *alt* si la casilla opción no es casilla alternativa tomando *alt* el valor de 0,

4.2.1.4. si *alt* es igual a 1,
entonces,

4.2.1.4.1. la variable *co* que representa a la casilla opción toma el valor de *vecop*[*i*],

4.2.1.4.2. se llena la *md* y los vectores *md*1 y *md*2 llamando a **llemd( )**

4.2.1.4.3. se incrementa el contador *coi*1 en uno.

4. Fin de la función.

Una vez que se tienen las casillas alternativas, se pide al usuario elija una de ellas, además de sugerirle una. Esto se efectúa con la función **decision( )**.

void decision( )

Su algoritmo es:

1. Despliega en pantalla los datos referentes al jugador en turno, el número de guerrero en movimiento, la casilla de su posición actual, el tipo de casilla, las casillas alternativas, su tipo, el puntaje esperado, la distancia esperada a la meta, si se presenta un enfrentamiento dice el número del jugador contrincante. (Para realizar ésto, hace una conversión de los datos y los trata como tipo string).
2. Calcula la casilla alternativa óptima y la sugiere al usuario.
3. Pide al usuario elija una casilla alternativa. Si el usuario no tiene más que una casilla alternativa, se toma ésta por defaul.
4. De tratarse de una casilla tipo 1 o 2, la marca en el vector correpondiente.
5. Iguala a la variable *al* con el renglón de la martriz *md* que contiene la información de la casilla elegida.
6. Limpia la pantalla en la sección de casillas alternativas y del jugador en turno.
7. Si se elige la casilla meta asigna a *dm* el valor de 0 y llama a **casalt1( )**.
8. Fin de la función.

Después de elegida una casilla se aplican las reglas del juego para esa casilla con las funciones **cambio( )**, **enfrentamiento( )**, **hechizo( )**, **perdido( )**, **perdido1( )**, **senal( )**, **trib( )** y **anadec( )** donde se llama a la función correspondiente.

void cambio( )

Realiza el cambio de casilla del guerrero en movimeinto de acuerdo con la casilla elegida. Es decir efectúa las funciones (5.2.c1).

void enfrentamiento( )

Realiza el enfrentamiento entre jugadores adversarios. Imprime el letrero correspondiente, incrementa el número de enfrentamientos del jugador en turno, genera un número aleatorio entre 0 y 7 llamando a la función **aa(6)** y de acuerdo con este número se tiene que para un:

- 1 o 3, la variable *band* = 1.
- 5, se llama a la función **senal(-1, 1)** y **perdido1( )**.
- 6, llama a **senal(1, -1)** y **perdido( )**.

void hechizo( )

Aplica la regla de las casillas hechicero, esto es, aplica las funciones (5.2.c4).

void perdido( )

Elimina al guerrero en movimento. Raliza las ecuaciones (5.2.c2) (en caso de una casilla pantano la efectúa completa, sino, únicamente elimina a *ng*).

void perdido1( )

Saca del juego al guerrero del jugador contrincante del jugador en turno en un enfrentamiento, es decir, lleva a cabo las ecc. (5.2.c7).

void trib( )

Aplica la regla de las casillas tributo, realizando las ecuaciones ( ). *gm* toma el valor de 1 si se pierde el guerrero al aplicar dicha regla, de lo contrario no altera su valor.

void senal(short int y, short int z)

Aplica la regla de las señales, los parámetros *y* y *z* son para saber qué jugador es el que pierde una señal en caso de poseer alguna. Si $y = -1$ y $z = 1$, se indica que el jugador contrincante fue el perdedor en un enfrentamiento, de lo contrario $y = 1$ y $z = -1$.

void anadec( )

Aplica las reglas del juego. Su algoritmo es el siguiente:

1. Si el contador de jugadores en turno *cini* es mayor o igual a *jug*, es decir, si es el primer tiro del jugador en turno y si únicamente se tiene una casilla altemativa y ésta no se puede elegir porque ya está ocupada por otras fichas,
   entonces,
   1.1. la ficha se pierde llamando a **perdi2( )**.

   De lo contrario,
   1.1. Guerrero muerto = 0 (*gm* = 0).
   1.2. Si no se presenta enfrentamiento entonces *band* = 0.
   1.3. Si se presenta un enfrentamiento y la casilla elegida no es una casilla meta,
   entonces,
   1.3.1. llamar a la función **cambio( )**.
   1.4. Si no hay enfrentamiento y el tipo de casilla elegida es del tipo:
   1.4.1. 0 o 2, llamar a la función **cambio( )**.
   1.4.2. 1, ejecutar la función **perdido( )**.
   1.4.3. 3, llamar a la función **trib( )**.
   1.4.4. 4, llevar a cabo la función **hechizo( )** y **cambio( )**.
   1.5. Si hay enfrentamiento y el tipo de casilla elegida es tipo:
   1.5.1. 0 o 2, efectuar **enfrentamiento( )**.
   1.5.2. 3, realizar **trib( )**
   1.5.2.1. si después de aplicar la regla de las casillas tributo no se perdió el guerrero (*gm* = 0), llamar a **enfrentamiento( )**.
   1.5.3. 4, ejecutar **hechizo()** y **enfrentamiento()**.
2. Fin de la función.

A continuación se da el algoritmo de un juego completo con la función **jugan( )**.

void fin( )

Asigna el número de fichas con las que cuentan los jugadores al llegar a la meta, a la matriz *mt* ($mp[i][j] = mpp[i][j]$, $\forall\ i = 0, \ldots, jug\text{-}1$ y $j = 0, 1, 2$), despliega en pantalla las matrices *mp*, *mdg*1 y *mt*, y determina al MEXICA, para lo cual llama a **impri2( )**, **impri1( )** e **impri( )**, limpia la pantalla en la sección de casillas alternativas y despliega un letrero al usuario pidiéndole que presione cualquier letra para salir al menú del juego.

void jugan( )

Realiza la simulación de un juego completo. Su algoritmo es:

1. Declara las variables *k*, *i*, *cont*, *contww* de tipo entero corto sin signo y *sali* tipo entero.
2. Inicializa a las variables *cini*, *contador*, *band* y *w* con 0.
3. Si el número de participantes en el juego es mayor o igual a 4,
   entonces,
   3.1. *ww* toma el valor de 4.
   de lo contrario,
   3.1. *ww* es igual a *jug*.
4. Mientras *w* sea menor a *ww* y *contador* sea menor a 5,
   4.1. cont*ww* = 0.
   4.2. $\forall$ *jt* con $jt = 0, \ldots, jug - 1$.
      4.2.1. Si el jugador en turno no ha llegado a la meta,
      entonces,
         4.2.1.1. genera un número aleatorio entre 0 y 7 y se lo asigna a la variable *d*.
         4.2.1.2. Se incrementan en uno el número de tiros del jugador en turno (sólo si el jugador no está descalificado) y la variable *cini*.
         4.2.1.3. Si es la primera vez que el jugador en turno va a participar en el juego,
         entonces,
            4.2.1.3.1. se considera que las casillas donde se localizan sus guerreros son: la 2, 5, 8, 63, 70, 39, 36 y 33 respectivamente.
         4.2.1.4. Llama a **impri( )**.
         4.2.1.5. Inicializa *cont* con 0.
         4.2.1.6. Si algún guerrero se encuentra en una casilla donde la distancia mínima a la meta es igual a *d*,
         entonces,

4.2.1.6.1. se incrementa *cont* en uno para cada guerrero que cumpla con esta condición.

4.2.1.7. Se inicia el *ng* con 0.

4.2.1.8. Mientras *ng* sea menor a 8,

4.2.1.8.1. si el guerrero *ng* no está fuera del juego y *cont* es diferente de 0 y el número de guerreros contrarios es mayor o igual a 2 y ese guerrero puede pasar por una casilla de hechicero,

entonces,

4.2.1.8.1.1. ejecutar **impril( )** e **impri( )**,

4.2.1.8.1.2. *cp* = *mdg*1[*ng*][jt],

4.2.1.8.1.3. *ll*= *d*.

4.2.1.8.1.4. *dtn* = 1. Para indicar que se va a seguir esta estrategia[1].

4.2.1.8.1.5. Se llama a **juego( )**.

4.2.1.8.1.6. Mientras se pueda avanzar una casilla, esto es, meintras *band* sea igual a 1, se sigue jugando con ese guerrero, es decir,

4.2.1.8.1.6.1. *ll*= 1,

4.2.1.8.1.6.2.se realiza el punto 4.2.1.8.1.1.

4. 2. 1. 8. 1. 6. 3. *cp* = *mdg*1[*ng*][jt].

4.2.1.8.1.6.4. **juego( ).**

4.2.1.8.1.7. Se elimina al guerrero en movimiento para no causar confusión.

4.2.1.8.1.8. se realiza el punto 4.2.1.8.1.1.

4.2.1.8.2. Se incrementa *ng* en uno.

4.2.1.8.3. Si el usuario desea dar por terminado el juego, se pone fin a este ciclo.

4.2.1.9. *dtn* = 0 y *ng* = 0.

4.2.1.10. Si es el primer movimiento personal que hace *jt* con *ng* y *d* > 1, entonces *ll* = *d* - 1; sino *ll* = *d*.

4.2.1.11. Mientras *ng* sea menor a 8,

4.2.1.11.1. si el guerrero *ng* no está fuera del juego,

entonces, se realizan los puntos:
4.2.1.8.1.1.
4.2.1.8.1.2.
4.2.1.8.1.3.
4.2.1.8.1.5.
4.2.1.8.1.6. con todos sus incisos.
4.2.1.11.2. Se realizan los punto 4.2.1.8.2. y 4.2.1.8.3.
4.2.1.12. Si *w* = *ww*, significa que ya se terminó el juego, entonces,
4.2.1.12.1. *jt* = jug,
4.2.1.12.2. llamar a **fin( )**,
de lo contrario,
4.2.1.12.1. si el jugador en turno es descalificado por que ya no tener guerreros, entonces,
4.2.1.12.1.1. cont*ww* incrementa en uno.
4.2.1.12.2. El jugador en turno se incrementa uno.
4.2.1.13. Si se desea terminar el juego para salir al menú del juego, se da por terminada esta función.
de lo contrario,
4.2.1.1 *jt* incrementa en uno.
4.3. Se incrementa *contador* en uno.
4.4. Si *contador* = 5,
entonces,
4.4.1. *w* toma el valor de *ww*.
4.5. Si el número de jugadores descalificados es igual al número de participantes en el juego,
entonces,
4.5.1. *contador* es igual a 5,
4.5.2. *w* es igual a *ww*,
4.5.3. llama a la función **fin( )**.
4.6. Igual a 4.2.1.13.
5. Fin de la función.

6.2.4 TACHTLI2.C

Por facilidad, se distinguen también 5 tipos de funciones en este módulo:

❶ Función principal.
❷ Funciones auxiliares.
❸ Funciones de inicialización.
❹ Funciones de visualización en pantalla.
❺ Funciones del juego.

La *función principal* **main( )** distribuye las tareas del programa para realizar una simulación completa de la segunda etapa del juego, inicializa el modo gráfico, así como también finaliza su uso.

Funciones auxiliares. La mayoría son funciones de tipo gráfico. Una genera números aleatorios, otra borra una pantalla, otra imprimen un bip, otra dibuja líneas y otra rectángulos. Estas funciones son:

- aa(short int x)
- borra( )
- error(unsigned int g1, unsigned int g2)
- linea(unsigned int l1, unsigned int l2, unsigned int l3, unsigned int l4, unsigned int l5, unsigned int l6, unsigned int l7, unsigned int l8)
- rectangulo(unsigned int r1, unsigned int r2, unsigned int r3, unsigned int r4, unsigned short int r5, unsigned short int r6, unsigned int r7, unsigned int r8, unsigned int r9)

Funciones de inicialización. Son dos funciones, una inicializa las variables globales requeridas en el módulo para evitar que se traslape información y la otra pide al usuario el número de fichas iniciales para esta etapa, su distribución en el tablero y el jugador que da inicio, aplica la regla correspondiente a las casillas tributo en la colocación inicial de las fichas; cabe señalar que en esta función se validan las variables iniciales que proporciona el usuario. Estas funciones son las siguientes:

- inicia( )
- fichasini( )

Funciones de visualización en pantalla. Son cinco las funciones de este tipo. La primera imprime el letrero de las casillas alternativas, el nombre del jugador en turno y el estado que guarda el juego en la t-ésima tirada, es decir, el total de fichas de cada jugador hasta el momento en que el jugador en turno va a seleccionar su ficha a mover. La segunda imprime las casillas alternativas para el jugador en turno, la tercera despliega en pantalla las fichas en el tablero, la cuarta imprime el tablero y llama a la tercera de estas funciones y finalmente la quinta limpia una parte de la pantalla para poder desplegar las casillas alternativas que no caben en una misma pantalla. Éstas son:

- alternativ( )
- imprialt(short int icoa2, int iy, int iyy, unsigned short int ii, unsigned short int ifaux2, unsigned short int ih, short int imov, unsigned short int icont)
- imprificha(unsigned short int jugador, unsigned short int guerrero)
- pantalla( )
- verific(int vy, int vyy)

Es de señalar el empleo de funciones matemáticas en la realización de estas funciones. Más adelante se detallarán éstas.

Funciones del juego. Son las que llevan a cabo el desarrollo del juego en esta segunda etapa y son:

- bcoce(unsigned short int guer, unsigned int casilla)
- borraficha(unsigned short int guerrb)
- borraficha1(unsigned short int gueb)
- hechizo(unsigned short int guerr1, unsigned int cassilla1, unsigned short int ind1)
- juego2( )
- secomu(unsigned short int gue, unsigned int cassilla, unsigned short int ind)
- veri1(unsigned short int vind, short int vcoa2, unsigned short int vcp2)
- veri2(unsigned short int vind1, short int vvcoa2, unsigned short int vvcp2)
- verifica( )
- verifica1( )

6.2.4.1 ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS EN EL DISCO.

Las variables globales en el módulo *tacfitli2* son:

VARIABLE. TIPO DE DATO. SIGNIFICADO. VALORES QUE TOMA. FUNCIONES DONDE SE UTILIZA.

colum int	Es el número de la columna de la pantalla donde se imprime el número de la casilla alternativa. *colum* ∈ {370, ... , 500}. **imprialt( ), verifica1( ) y verific( ).**
ji unsigned short int	Es el número del jugador inicial. *ji* = 0 MEXICA. *ji* = 1 TRIPLE ALIANZA. **fichasini( ), y main( ).**
*jt*2 unsigned short int	Es el número del jugador en turno para esta etapa. *jt*2 = 0 MEXICA. *jt*2 = 1 TRIPLE ALIANZA. **alternativ( ), borraficha( ), borraficha1( ), bcoce( ), hechizo( ), imprialt( ), main( ), secomu( ), verifica( ) y verifica1( ).**
*mp*2[2][4] unsigned int	Matriz de puntos para esta etapa. *mp*2[*i*][0] = número de señales del jugador *i*. *mp*2[*i*][1] = número de guerreros del jugador *i*. *mp*2[*i*][2] = número de tributos del jugador *i*. *mp*2[*i*][3] = número de guerreros hechizados por el jugador *i*. *mp*2[0][0] = *mp*2[*i*][3] = 0 para *i* = 0, 1, al inicio del juego. *mp*2[0][1] = 8, al inicio del juego. *mp*2[1][0] ≤ *mp*2[1][1] (No. de señales ≤ No. de guerreros -TRIPLE ALIANZA-). *i* = 0 (MEXICA). *i* = 1 (TRIPLE ALIANZA). **alternativ( ), borraficha( ), borraficha1( ), fichasini( ), hechizo( ), inicia( ), main( ), secomu( ), verifica( ) y verifica1( ).**

mtb[6][6] long unsigned int — Matriz tablero.
mtb[*i*][*j*] div 100000 = número del jugador que se localiza en la casilla *ij*.
(*mp*[*i*][*j*] div 1000) mod 100 = número de guerrero del jugador (*mtb*[*i*][*j*] div 100000).
(*mp*[*i*][*j*] mod 1000) div 100 = número del segundo jugador que se localiza en la casilla *ij*.
(*mp*[*i*][*j*] mod 1000) div 100 = número número de guerrero del jugador ((*mp*[*i*][*j*] mod 1000) div 100).
mp[*i*][*j*] = 999999 antes de pedir al usuario la distribución inicial de las fichas.
$i, j = \{0, \dots, 5\}$.
borraficha( ), borraficha1( ), bcoce( ), fichasini( ), imprificha( ), inicia( ), secomu( ) y **verifica1( )**.

ngt unsigned short int — Número de guerreros iniciales de la TRIPLE ALIANZA.
$ngt \in \{3, \dots, 15\}$
fichasini( ), pantalla( ) y **verifica1( )**.

ns unsigned short int — Número de señales iniciales de la TRIPLE ALIANZA.
$ns \in \{1, \dots, 8\}$
fichasini( ).

vdfm[8][2] unsigned int — Matriz de distribución de fichas del MEXICA.
vdfm[*i*][0] = número de casilla donde se localiza el guerrero *i*.
vdfm[*i*][1] = estado del guerrero *i*.
vdfm[*i*][1] = 0 no pasa nada.
vdfm[*i*][1] = 1 guerrero *i* inmovilizado.
vdfm[*i*][1] = 2 guerrero *i* inmoviliza a otro guerrero.
vdfm[*i*][0] = 99 y *vdfm*[*i*][1] = 0 al inicio del juego.
$i = 0, \dots, 7$.
borraficha( ), borraficha1( ), bcoce( ), fichasini( ), hechizo( ), imprificha( ), inicia( ), pantalla( ), secomu( ), y **verifica1( )**.

vdfta[15][4] unsigned int — Matriz de distribución de fichas de la TRIPLE ALIANZA.
vdfta[*i*][0] = número de casilla donde se localiza el guerrero *i*.
vdfta[*i*][1] = estado del guerrero *i*.
vdfta[*i*][1] = 0 no pasa nada.
vdfta[*i*][1] = 1 guerrero *i* inmovilizado.
vdfta[*i*][1] = 2 guerrero *i* inmoviliza a otro guerrero.
vdfta[*i*][2] = 0 si el guerrero *i* no custodia una señal.
vdfta[*i*][2] = 1 si el guerrero *i* custodia una señal.
vdfta[*i*][3] = número de la señal que custodia el guerrero *i*.

vdfta[*i*][3] = 99 el gerrero *i* no custodia una señal.
*vdfta*2[*i*][0] = 99 y *vdfta*[*i*][1] = 0 al inicio del juego.
i = 0, ... , 14.
borraficha( ), borraficha1( ), bcoce( ), fichasini( ), hechizo( ), imprialt( ), imprificha( ), inicia( ), pantalla( ), secomu( ), y **verifica1( ).**

vecal[16][45] unsigned int	Matriz de casillas alternativas. *vecal*[*i*][0 + *i**3] = número de casilla alternativa para el guerrero *i*. *vecal*[*i*][1 + *i**3] = estado del guerrero *i*. *vecal*[*i*][1 + *i**3] = 0 hechiza un guerrero. *vecal*[*i*][1 + *i**3] = 1 come a otro guerrero. *vecal*[*i*][1 + *i**3] = 2 pelea una señal contra otro guerrero. *vecal*[*i*][1 + *i**3] = 99 no pasa nada. *vecal*[*i*][2 + *i**3] = número del guerrero contrario. *vecal*[*i*][2 + *i**3] = 99 si no existe guerrero contrario. *vecal*[*i*][0 + *i**3] = *vecal*[*i*][1 + *i**3] = *vecal*[*i*][2 + *i**3] = 99 al inicio de cada tirada. *i* = 0, ... , 15. **hechizo( ), imprialt( ), secomu( ), verifica( )** y **verifica1( ).**
vecs[8][1] unsigned int	Vector de señales. *vecs*[*i*][0] = número de casilla donde se localiza la señal *i*. *vecs*[*i*][0] = 99 no existe la señal *i*. *vecs*[*i*][0] = 99 al inicio del juego. *i* = 0, ... , 7. **borraficha( ), fichasini( ), inicia( )** y **secomu( ).**
vect[4][1] unsigned int	Vector de casillas tributo. *vect*[*i*][0] = número de casilla tributo. *vect*[*i*][0] = 99 al inicio del juego. *i* = 0, ... , 3. **imprialt( ), inicia( )** y **verifica( ).**
*vect*1[4][1] unsigned int	Vector de casillas tributo 1. *vect*1[*i*][0] = 99 número de casilla tributo *i* que ya se sabe que es casilla tributo. *vect*1[*i*][0] = *vect*[*i*][0] al inicio del juego. *i* = 0, ... , 3. **imprialt( ), inicia( )** y **verifica( ).**

6.2.4.2 ESTRUCTURA DE LOS PROGRAMAS DE *TACHTLI2.C*

Al igual que en el módulo *TACHTLI1*, para la manipulación de la salida de textos en pantalla, la utilización de gráficos y efectos de sonido, las directivas al compilador que se establecen son:

- ⇨ #include "alloc.h"
- ⇨ #include "conio.h"
- ⇨ #include "dos.h"
- ⇨ #include "graphics.h"
- ⇨ #include "stdio.h"
- ⇨ #include "stdlib.h"
- ⇨ #include "string.h"

Por último, la directiva para dar por terminado un juego empleada en **verifica( )**, es:

⇨ #define ESC 61 Número asignado a la tecla <ESC>.

Siguiendo con el mismo esquema que en el módulo *TACHTLI1.C*, las funciones se van a presentar en orden de acuerdo al tipo de función a la que pertenezcan. Para cada función se van a dar los parámetros de entrada y salida así como una breve explicación de su función.

FUNCIÓN PRINCIPAL

void main( ).

Inicializa el módo gráfico. Llama a la función **inicia( )**, **fichasini( )** y realiza una simulación completa de la segunda etapa del juego, tomando como criterios de terminación del juego el hecho de que el MEXICA no tenga guerreros o que la TRIPLE ALIANZA no posea señales o bien, que se hayan realizado 20 iteraciones de la función **juego2( )**. Finalemente, pone fin al modo gráfico.

FUNCIONES AUXILIARES, FUNCIONES DE INICIALIZACIÓN Y FUNCIONES DE VISUALIZACIÓN EN PANTALLA.

La función de estos tipos de funciones ya se explicó al inicio del módulo *TACHTLI2*. Sin embargo es de hacer notar las funciones que se desarrollaron para la realización de las funciones **imprificha( )** y **pantalla( )**.

void imprificha(unsigned short int jugador, unsgned short int guerrero).

De acuerdo con el estado que la ficha a imprimir guerde en el juego, serán las coordenadas de la pantalla donde se despliege, así como el color de dicha ficha, dependiendo éste también del jugador al que pertenezca la ficha. Así se tienen las siguientes variables:

color = 4 (rojo obscuro) si es una ficha MEXICA.
color = 12 (rojo claro) si es una ficha MEXICA inmovilizada.
color = 1 (azul obscuro) si es una ficha TRIPLE ALIANZA.
color = 9 (azul claro) si es TRIPLE ALIANZA inmovilizada.
color = 15 (blanco) si es una señal de la TRIPLE ALIANZA.

Evidentemente el estado de la ficha se obtiene de *vdfta*[*i*][1] o de *vdfm*[*i*][1] respectivamente, donde ***i*** es el número de ficha a desplegar en pantalla.

Por reglas del juego, es válido colocar máximo dos fichas de guerrero y una de señal en una misma casilla. Supóngase entonces que en casilla existen tres posiciones en donde colocar las fichas.

Si se trata de una ficha MEXICA y
si

$$(\mathrm{mtb}_{vdfm_{i,0}\ \mathrm{div}\ 10,\ vdfm_{i,0}\ \mathrm{mod}\ 10})\ \mathrm{div}\ 100000 = ((\mathrm{mtb}_{vdfm_{i,0}\ \mathrm{div}\ 10,\ vdfm_{j,0}\ \mathrm{mod}\ 10})\ \mathrm{mod}\ 1000)\ \mathrm{div}\ 100$$

es decir, si en la casilla donde se localiza la ficha a desplegar hay dos fichas de guerreros y ambas son del mismo jugador, se determina si el número de ficha a desplegar es mayor o menor que la otra ficha, dependiendo de ésto se determinan las coordenadas en pantalla a desplegar la ficha. Esto es:

si

$$((\mathrm{mtb}_{vdfm_{i,0}\ \mathrm{div}\ 10,\ vdfm_{i,0}\ \mathrm{mod}\ 10})\ \mathrm{div}\ 1000)\ \mathrm{mod}\ 100 >$$
$$((\mathrm{mtb}_{vdfm_{j,0}\ \mathrm{div}\ 10,\ vdfm_{j,0}\ \mathrm{mod}\ 10})\ \mathrm{mod}\ 1000)\ \mathrm{mod}\ 100$$

entonces la variable

ngmax: ficha mayor en esa casilla.

toma el valor de

$$ngmax = ((mtb_{vdfm_{i,0}\ div\ 10,\ vdfm_{i,0}\ mod\ 10})\ div\ 1000)\ mod\ 100,$$

de lo contrario,

$$ngmax = ((mtb_{vdfm_{i,0}\ div\ 10,\ vdfm_{i,0}\ mod\ 10})\ mod\ 1000)\ mod\ 100,$$

y si el número de la ficha a desplegar es igual a *ngmax*, la ficha en estudio se despliega en la primera posición de la casilla, de no ser así, se imprime en la segunda posición de la casilla.

En caso contrario (se tienen dos fichas de guerreros de jugadores diferentes o bien, únicamente existe una ficha a desplegar en esa casilla), la ficha del MEXICA siempre se despliega en la primera posición de la casilla donde se encuentra situada.

Lo mismo se aplica para las fichas de la TRIPLE ALIANZA (obviamente se hace el cambio de variable de *vdfm* por *vdfla*, teniendo en cuenta que la segunda posición de una casilla pertenece a una ficha TRIPLE ALIANZA). Las señales se colocan siempre en la tercer posición de la casilla que la contiene.

void pantalla( ).

Esta función despliega en pantalla el tablero del juego para esta segunda etapa y llama a la función **imprificha( )** para desplegar a cada una de las fichas de guerrero de ambos jugadores, al igual que cada una de las señales de la TRIPLE ALIANZA.

Para llevar a cabo tal fin, se emplean las siguientes funciones:

Para el tablero:

para i = 0, 1, 2.

linea(252+*i**25, 124+*i**25, 104+*i**25, 272+*i**25, 252-*i**25, 124-*i**25, 104-*i**25, 272-*i**25)
linea(104-*i**25, 124+*i**25, 252-*i**25, 272+*i**25, 104+*i**25, 124-*i**25, 252+*i**25, 272-*i**25)

linea(178, 50, 30, 198, 30, 198, 178, 346)
linea(178, 346, 326, 198, 326, 198, 178, 50)

Para la numeración de las casillas:

para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

outtextxy(54 +*i**25, 175-*i**24, *i*)
outtextxy(74 +*i**25, 200-*i**24, *i*+10)
outtextxy(96 +*i**25, 228-*i**24, *i*+20)
outtextxy(122+*i**25, 251-*i**24, *i*+30)
outtextxy(147+*i**25, 276-*i**24, *i*+40)
outtextxy(172 +*i**25, 301-*i**24, *i*+50)

Nota.
No debe olvidarse la prioridad de los operandos en programación.
evidentemente, primero el valor a imprimir se pasa a modo gráfico.

FUNCIONES DEL JUEGO.

void juego2( ).

Simula una jugada. Llamando para ello a las funciones **pantalla( )**, **alternativ( )**, **verifica1( )** y **verifica( )**, en ese orden.

unsigned short int veri1(unsigned short int vind, short int vcoa2, unsigned short int vcp2).

Lleva a cabo las ecuaciones (5.x.1), (5.x.2), (5.x.3), (5.x.4) y (5.3.16) desarrolladas en el capítulo 5 para el caso de avanzar una casilla. Toma el valor de 0 si existe la posibilidad que la casilla analizada sea una casilla alternativa.

unsigned short int veri2(unsigned short int vind1, short int vvcoa2, unsigned short int vvcp2().

Aplica las ecuaciones (5.x.1), (5.x.2), (5.x.3), (5.x.4) y (5.3.16) del capítulo 5 para avanzar específicamente dos casillas. Esta función es igual a cero si la casilla analizada cumple con las ecuaciones antes mencionadas.

void verifica1( ).

Esta función determina cuales son las casillas alternativas para cada una de las fichas del jugador en turno (obviamente cumpliendo con las reglas del juego), así como las reglas que se pueden aplicar a las fichas del jugador contrario en su caso. Es decir se llevan a cabo las ecuaciones desarrolladas en el capítulo 5. Llama a las funciones: **veri1( )**, **veri2( )** para determinar si es posible seguir analizando la casilla opción (es decir, el número de casilla que resulta de sumar -22, -20, -18, -11, -10, -9, -1, -2, 1, 2, 9, 10, 11, 18, 20 o 22 a la casilla posición donde se localiza la ficha analizada), si además de cumplir con esta estas condiciones, ésta casilla cumple con las ecuaciones mencionadas arriba, se verifica que la casilla alternativa analizada aún se pueda desplegar en la pantalla actual, llamando para tal fin a la función **verific( )** y posteriormente llama a la función **Imprialt( )** para desplegar la información obtenida de este análisis.

void verifica( ).

En esta función se pide al usuario elija la ficha a mover, así como también el número de la casilla a la cual va a mover a su guerrero y de acuerdo con su elección se aplican las reglas del juego al jugador en turno (incluyendo la regla que trata de las casillas tributo) llamando a las funciones correspondientes, estas funciones son:

void borraficha1(unsigned short int gueb).

Si el guerrero elejido por el usuario se encontraba hechizando a un guerrero contrario, al realizar el movimiento es necesario actualizar el estado de ambos guerreros, así como la matriz de puntos en lo correspondiente a fichas hechizadas, esta función es la que lleva a cabo esta actualización.

void borraficha(unsigned short int guerrb).

Elimina a una ficha del juego. Llama a la función **borraficha1( ).**

void bcoce(unsigned short int guer, unsigned int casilla).

Hace el cambio de casilla de una ficha en movimiento, borrando ésta de la casilla de su posición original para colocarla después el casilla elegida por el usuario.

void hechizo(unsigned short int guerr1, unsigned int casilla1, unsigned short int ind1).

Se actualiza el estado de los guerreros involucrados en el hechizamiento, modificando también la información en la matriz de puntos para esta etapa en lo referente al número de guerreros hechizados y se aplica la regla de hechizo, esta función llama a **bcocc(** **)** para hacer el cambio de casilla.

void secomu(unsigned short int guc, unsigned int cassilla, unsigned short int ind).

Si el jugador en turno es el MEXICA y se elijió una casilla donde se localiza una señal de la TRIPLE ALIANZA, además de que el movimiento fué horizontal o vertical, el Mexica se queda con la señal y el guerrero contrario muere. O bien, si se trata de un movimiento horizontal o vertical con el que la TRIPLE ALIANZA obtiene un guerrero MEXICA, este último guerrero se descalifica del juego.

Finalmente debe señalarse que esta función (**verifica( )**) llama a la función **aa**(3) para determinar el número del dado en un movimiento diagonal del MEXICA cuando se enfrenta a un guerrero TRIPLE ALIANZA para conseguir su señal.

CAPÍTULO V.

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y LAS REGLAS FINALES DEL JUEGO TACHILI

"Empieza por hacer lo que es necesario, luego lo que es posible, y de pronto, te encontrarás haciendo lo imposible"

San Francisco de Asis.

Los capítulos antes expuestos, dan origen a este último capítulo, en el que en base a los aspectos teóricos, y a los resultados obtenidos del sistema que se deriva del modelo propuesto, se obtienen una serie de estrategias para jugar *TACHILI* y finalmente como resultado de toda la investigación, se enuncian las reglas del juego.

7.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS.

EL TABLERO.

LAS ZONAS PANTANOSAS.

Para poder ver en forma cuantitativa la variabilidad del juego, es importante saber el número de formas que el tablero mismo puede "tomar" para jugar *TACHTLI*. Si se observa con un poco de detenimiento, son diferentes las combinaciones de "tableros" que se pueden generar de acuerdo a las casillas que en un "juego" sean tipo 1. En seguida se va a ver el número de éstas.

De la definición de combinaciones, se tiene:

$$C(2, 1) * 6 + C(4, 1) + C(6, 2) * 2 = 57\,600. \tag{7.1.1}$$

Donde C(2, 1) * 6 corresponde a las zonas pantanosas: 1, 2, 3, 4, 5 y 6, (definidas en la sección 5.2.3 del capítulo 5),
C(4, 1) viene de las combinaciones posibles en la zona pantanosa 7.
C(6, 2) * 2 pertenece a las posibles formas de distribución de dos casillas tipo 1 en un rango de 6 casillas de las zonas pantanosas 8 y 9.

De (7.1.1) se observa que el número de "tableros" es muy grande, esto significa que se necesitarían jugar 57 601 "juegos" de *TACHTLI* para que en ese "juego" se repitiera la "forma del tablero" con el que se jugó en otro anterior, es decir, se necesitan jugar 57 601 "juegos" para que se repita la forma en que se distribuyen las casillas que se van a tragar a las fichas de guerrero en ese "juego". (Nótese que este resultado únicamente pertenece a la primer etapa del juego).

Por otra parte, si se cambiaran las reglas del juego sobre las zonas pantanosas, podrían obtenerse más o menos "formas de tablero", sin embargo, la manera en que se definieron dichas zonas resulta ser atractiva para jugar *TACHTLI*, ya que se mantiene en el jugador la espectación, la emoción, el peligro, el ejercicio de la memoria, y los jugadores logran poner de manifiesto su personalidad con su reacción ante el riesgo, además de ser un obstáculo a vencer para lograr su objetivo, etc., estos factores son fundamentales en el juego. Nótese también que son 11 casillas donde el tablero se traga la ficha de un total de 90 casillas, número que resulta ser razonable para que los jugadores no pierdan muchas fichas de guerrero y puedan continuar jugando -considerando que los jugadores ejercitan la memoria-.

LAS CASILLAS HECHICERO.

A pesar de ser pequeño el número de casillas de este tipo (3 casillas en todo el tablero), se logra tener funcionalidad en el juego. En seguida se hacen notar aspectos importantes sobre este tipo de casillas.

Con la regla que se aplica para estas casillas (recuérdese que para elegir una casilla de este tipo, basta que el número del dado obtenido en un lanzamiento sea mayor o igual al número de casillas, de la casilla posición a la casilla hechicero en elección) y el diseño del tablero (nótese que el tablero está diseñado de tal manera que todas las casillas tienen una longitud menor o igual a 6 de ellas a alguna casilla hechicero -excepto las casillas 63 y 70, cuya longitud mínima de éstas a alguna casilla hechicero, específicamente a la casilla 89 es de 7.-), en cualquier momento del juego se tiene una probabilidad igual a 1/6 de poder entrar de cualquier casilla a una casilla hechicero para cangear dos o más guerreros contrarios (múltiplos de dos) por uno o más tributos y así aumentar el puntaje. (Nótese que con esta regla se pretende, utilizar el mayor número de fichas en el juego - a pesar de que un jugador pierde su ficha en un enfrentamiento, otro jugador puede utilizar esta misma ficha para aumentar su puntaje; lo que provoca en los jugadores interés en efectuar enfrentamientos ya que, además de que existe la posibilidad de que el jugador contrincante pierda su ficha y por lo tanto, puntaje, se puede utilizar esta ficha para aumentar el suyo).

LAS CASILLAS TRIBUTO.

En lo referente a las casillas tributo se aprecia que son 20 el número de éstas en el tablero, esto es, son un 21.978 % del total de casillas, este porcentaje se debe a que es de suma relevancia el simbolismo del tributo históricamente hablando.

Si bien es cierto que se tiene gran posibilidad de que en un movimiento dado se tenga la opción de elegir una casilla tributo, también es cierto que puede existir la posibilidad de no elegirla. En este tipo de casillas se puede apreciar la personalidad del jugador, el cual puede dar mayor valor a disminuir su distancia a la meta perdiendo un punto (si tiene tributos) o alejarse más de la meta pero no perder puntaje, entre otros casos.

Este tipo de casilla son un obstáculo más para los jugadores, dando así una mayor tensión en el juego.

LAS CASILLAS NEUTRALES.

Con respecto a las casillas neutrales, se hace notar que ocupan el mayor porcentaje en el tablero (41.758 %). En este tipo de casillas no pasa nada a menos que se presente un enfrentamiento. Después de haber jugado varios "juegos" con en el sistema *TACHTLI*, se puede concluir que es más conveniente elegir una casilla de este tipo ante una casilla de alguna zona pantanosa si antes no se ha elegido niguna casilla perteneciente a ella, y también es mejor escoger una casilla neutral en lugar de una casilla tributo si no se cuenta con este tipo de fichas.

Con este tipo de casillas se pretende que haya más enfrentamientos, ya que de entrada el jugador que quiera perder el menor número de puntos posible, le será óptimo elegir una casilla neutral en vez de una casilla tributo y por tanto, preferirá un enfrentamiento en casillas neutrales que en casillas tributo.

LAS CASILLAS INICIO.

A pesar de estar contempladas dentro del porcentaje de las casillas neutrales, se va a hablar separadamente de éstas.

Una característica importante de estas casillas es la siguiente:

Con la aplicación de la regla referente al número cero de casillas alternativas, relacionada con el avance de las fichas de guerrero (todas las fichas se moverán de acuerdo a un mismo tiro del dado) surgió la pregunta de qué hacer en caso de no existir ni una sóla casilla alternativa para una ficha de guerrero determinada. Si se observa detenidamente, se pueden presentar dos casos:

- que la ficha en movimiento no se encuentre situada en ninguna casilla, dado que es el primer movimiento que se realiza con esa ficha y
- que la ficha se encuentre en una casilla x al realizarse el movimiento respectivo.

Y se llegó a una solución la cual consiste en:

Si sucede lo primero, el guerrero en movimiento, será eliminado; y si ocurre lo segundo, el guerrero en movimiento no cambiará su posición actual.

De ahí que cuando son más de dos jugadores y todos los jugadores obtienen el mismo tiro del dado en el primer movimiento aleatorio de éstos (en la primer etapa), más específicamente cuando el tiro del dado para cada jugador es igual a 1 (con una probabilidad igual a $1/6^n$, donde n es igual al número de jugadores) los jugadores siguientes al segundo, saldrían del juego, reduciéndose notablemente el número de participantes en el juego.

LAS CASILLAS META.

Por último se va a hablar de las casillas meta. Para hacer de *TACHTLI* un juego diferente, se pensó en un diseño de tablero con caminos entrelazados y dada la forma misma de dicho tablero, se pensó conveniente, tener dos casillas meta. Teniendo así un porcentaje del 2.198 % de estas casillas.

Otro aspecto relevante de estas casillas es lo referente a la regla del juego que indica que se puede pasar más de una vez por estas casillas; esta regla junto con la que se refiere a la llegada de un jugador a la meta, la cual deberá ser con un número exacto en el tiro, provocan a simple vista un alargamiento de esta etapa y por ende del tiempo total del juego, pero no debe olvidarse que para que un jugador llegue a la meta, basta con que una de sus fichas de guerrero lo haga (en el mejor de los casos se tienen 8 oportunidades de llegar a la meta -por jugador-).

Finalmente es de hacer notar que, el diseño del tablero está pensado de tal suerte que la máxima distancia de una casilla inicial a la meta es de 9, es decir, son 9 casillas que forman el camino más corto para que algún guerrero llegue a la meta, con el objetivo de que mínimo cada jugador realice 2 tiros del dado para poder llegar a la meta. Esta característica del tablero, hace de la primer etapa del juego una etapa considerablemente rápida, además de influir en que los jugadores no se aburran.

PORCENTAJE DE LOS TIPOS DE CASILLAS EN EL TABLERO.

En suma el porcentaje de los tipos de casillas en el tablero es el siguiente:

TABLA 7.1 *Porcentaje de los tipos de casillas en el tablero.*

TIPO DE CASILLA	PORCENTAJE
HECHICERO	3.267 %
META	2.198 %
NEUTRAL	41.758 %
PANTANO	12.088 %
TRIBUTO	21.978 %
ZONA DE PANTANO	18.681 %

Por último, un comentario importante a cerca de esta etapa del juego es el siguiente: A pesar de que el éxito de un jugador (llegar a la meta antes del quinto jugador -en caso de ser 4 o más jugadores-) depende en gran medida de su suerte (específicamente, del tiro del dado para avanzar y para determinar el premio o castigo en un enfrentamiento, así como del azar en las casillas de la zona pantanosa), el jugador impregna su personalidad al efectuar su elección (puede tratarse de un jugador ariesgado, conservador, planificador, analista, inteligente, etc., e incluso *se puede hacer una elección óptima dado que se cuenta con toda la información necesaria para éllo*). Cabe señalar también, que en esta estapa se logra una gran interacción entre los jugadores, derivada también del tiro del dado, provocando este hecho gran espectación en todos los jugadores porque éste puede afectar o beneficiar tanto al jugador en turno como a los que no se encuentran en turno en ese momento.

LAS FICHAS.

Otro elemento importante del juego son las fichas. Saber con cuántas fichas se cuenta para continuar con la segunda etapa del juego es muy importante en la definición misma de las reglas del juego para dicha etapa, por consiguiente en seguida se va a estudiar esta cuestión.

El número de fichas con las que los jugadores terminen esta primer etapa, está en función del número de fichas con las que se inicie, así como del desarrolo del "juego". Además, el número de señales, guerreros y tributos, finales en esta etapa, *no son independientes entre sí*, ya que están en función de los enfrentamientos que se realicen, del número del dado de dicho enfrentamiento, además del tiro del dado para avanzar, así como de la casilla elegida por el jugador.

Si se observa más detenidamente, se tiene que, por las reglas mismas del juego, los tributos se obtienen (fuera de los encontrados en el inicio) ganando guerreros a un jugador contrincante y cambiando múltiplos de dos de éstos por tributos, de manera que, *a mayor número de tributos cangeados, menor número de guerreros finales*; otro aspecto importante en los tributos, es el hecho de que al caer un guerrero en una casilla de tributo, el jugador pierde una ficha de tributo y de no tenerla pierde a su guerrero, de aquí que, *el número de tributos está también en función de la casilla elegida, el número de guerreros depende de la casilla elegida y del número de tributos si ésta última es una casilla tributo*. En cuanto a las señales, se tiene que, *el número de señales iniciales es igual al número de señales finales*, con igual o diferente distribución entre los jugadores. En lo que respecta a los guerreros, se ve que, *el número de guerreros finales es menor o igual al número de guerreros iniciales* (ocho por jugador). Cabe señalar que, estas dependencias fueron repreentadas en las funciones del modelo propuesto en el capítulo 5.

De manera general, se distinguen tres formas de terminar la primer etapa y éstas son:

- ❶ Ambos jugadores son descalificados del juego.
- ❷ Ambos jugadores llegan a la meta.
- ❸ Uno llega a la meta, mientras que el otro es descalificado.

Aún más general, se tiene que:

- ❶ Ningún jugador gana.
- ❷ Ambos jugadores ganan (MEXICA y TRIPLE ALIANZA).
- ❸ Se tiene un ganador absoluto.

A continuación se va a estudiar por separado el número de señales, de tributos y de guerreros.

Denótese al MEXICA con J_1 y a la TRIPLE ALIANZA como J_2.

SEÑALES.

Se va a iniciar con las fichas de señales. Para 8 jugadores se tiene que el número de casos que se pueden presentar es

$$\sum_{x=1}^{9} x = 45. \tag{7.2.1}$$

Esta suma se obtiene de lo siguiente:

Si por ejemplo, J_1 tiene 8 señales, el jugador J_2 tiene 0 señales, ahora bien, si J_1 tiene 7 señales, el jugador J_2 puede tener 0 o 1 señal, etc., de este análisis se concluye (7.2.1).

Para 7 jugadores se tiene que el número de maneras de terminar el juego en la primer etapa respecto a las señales es

$$\sum_{x=1}^{8} x = 36.$$

En general, para n número de jugadores se tiene que el número de formas en la distribución final de las señales en la primer etapa es

$$\sum_{x=1}^{n+1} x, \qquad \text{con } n = 2, 3, \ldots, 8.$$

(7.2.2)

TRIBUTOS.

El número máximo de tributos con los que un jugador puede llegar a la meta (T) está dado por

$$(T) = x + 4\,(n - 1),$$

(7.2.3)

donde x: es el número inicial de tributos del jugador ($x \in \{0, 1, 2, 3\}$) y
n: es el número de jugadores iniciales en el juego.

Esta fórmula resulta de la regla del juego que indica que la única manera de obtener tributos es cangeando 2 guerreros obtenidos en enfrentamiento por 1 tributo, esto hace que, en el mejor de los casos donde un jugador se enfrenta con todos los demás jugadores ganándoles todas sus fichas de guerrero, cambie éstas por tributos y además no pierda sus tributos iniciales. La igualdad (7.2.3) representa el caso en el que se tiene un ganador absoluto, ya que los jugadores restantes son descalificados. Ahora bien, si son dos jugadores que llegan a la meta, el máximo número de tributos con los que pueden llegar es

$$(T) = x + 4\,(n - 1) - 1.$$

(7.2.4)

Y el número mínimo de tributos con el que un jugador llega a la meta es 0.

Otro dato importante respecto a las fichas de tributo, es saber ¿cuál es el número máximo de tributos en un juego (NMT)?, de (7.2.3), se tiene

$$(NMT) = 3n + 4\,(n - 1).$$

(7.2.5)

Ya que de entrada, cada jugador puede tener como máximo 3 tributos iniciales.

GUERREROS.

Para los guerreros, se tiene que el MEXICA siempre termina con 8 guerreros y la TRIPLE ALIANZA, dependiendo de el número de jugadores iniciales, puede terminar con 24 o menos (pero mayor a 0) guerreros si son 4 o más jugadores iniciales (menos de 9), y 8 o menos (mayor a 0) guerreros en caso de ser 2 o 3 jugadores iniciales. Si además se considera la posibilidad de que el MEXICA sea el único jugador ganador y la posibilidad de que ningún jugador llegue a la meta, entonces se tienen 24 + 2 formas de distribución de guerreros al terminar la primer etapa para 4, 5, 6, 7, o 8 jugadores iniciales y 8 + 2 para 2 o 3 jugadores iniciales. En forma simbólica

$$\begin{aligned} \text{mín}(NGTA) &= 1, && \text{para } NGM = 8. \\ \text{máx}(NGTA) &= 24, && \text{para } NGM = 8 \text{ y } J \in \{4, 5, 6, 7, 8\}. \\ \text{máx}(NGTA) &= 8, && \text{para } NGM = 8 \text{ y } J \in \{2, 3\}. \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

donde $NGTA$: número de guerreros de la TRIPLE ALIANZA,
NGM: número de guerreros del MEXICA,
J: número de jugadores iniciales.

De (7.2.5) se tiene

$$\begin{aligned} DG &= 26, && \text{para } J \in \{4, 5, 6, 7, 8\} \\ DG &= 10, && \text{para } J \in \{2,3\} \end{aligned}$$

donde DG: Número de formas de distribución de guerreros al terminar la primer etapa, donde quedan contemplados los casos en que se tiene un único ganador y también en el que ningún jugador llega a la meta.

(7.2.7)

Entonces, el número máximo de señales de un jugador que llega a la meta es n, el máximo de tributos es $x + 4\,(n - 1)$ y el de guerreros es 8, en este caso se tiene un único ganador. En seguida se ilustra este caso para cuando son 8 jugadores iniciales.

La figura 7.1.a muestra el primer tiro del dado para el jugador 1. Siendo éste uno y no teniendo opción para elegir, por defaul su ficha se mueve a la casilla 2.

FIGURA 7.1.a *Ejemplo I. Un único ganador.*

Las siguientes figuras muestran el desarrollo de este "juego", donde todos los jugadores obtienen un 1 en su primer lanzamiento y se enfrentan contra el primer jugador quien gana todos estos enfrentamientos. La figura 7.1.e, representa el estado del juego después de que únicamente queda el primer jugador. La figura 7.1.f, da las casillas alternativas posteriormente de haber realizado un tiro del dado y obtener un 3, además sugiere la casilla 20, en la cual el jugador podría ganar 28 puntos correspondientes a los 56 guerreros contrarios cangeados. Con la figura 7.2.g, se ve el puntaje del jugador 1 una vez que ha cangeado sus fichas. En la figura 7.1.h, se aprecian las casillas donde se encuentran los guerreros del jugador 1 posterior a la finalización del segundo turno para cada uno de sus guerreros y simula el lanzamiento del dado cuyo resultado es 6. Finalmente, el hecho de que el jugador 1 llega a la meta se ve en la figura 7.2.i. Como resultado de este "juego", el jugador 1 es el único en llegar a la meta con 8 señales, 8 guerreros y 28 tributos (ya que tenía 0 tributos inicialmente). Es decir, logra ser el Mexica con todas las fichas posibles.

Si bien es cierto que este es un caso extremo, también es cierto que es posible lograrlo con un poco de suerte.

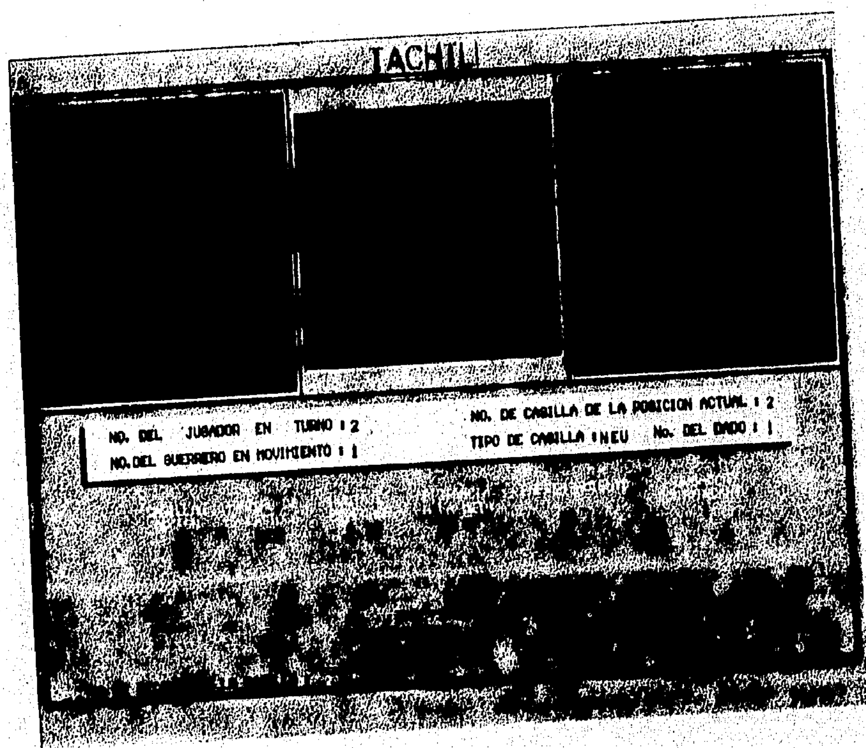


FIGURA 7.1.b *Ejemplo 1. Un único ganador.*

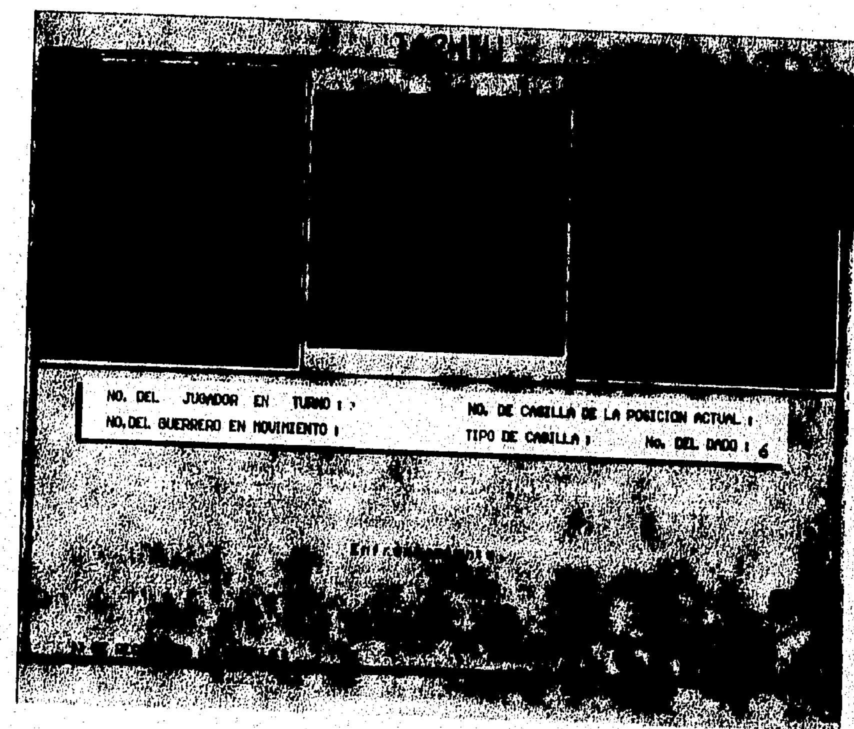


FIGURA 7.1.c *Ejemplo I. Un único ganador.*

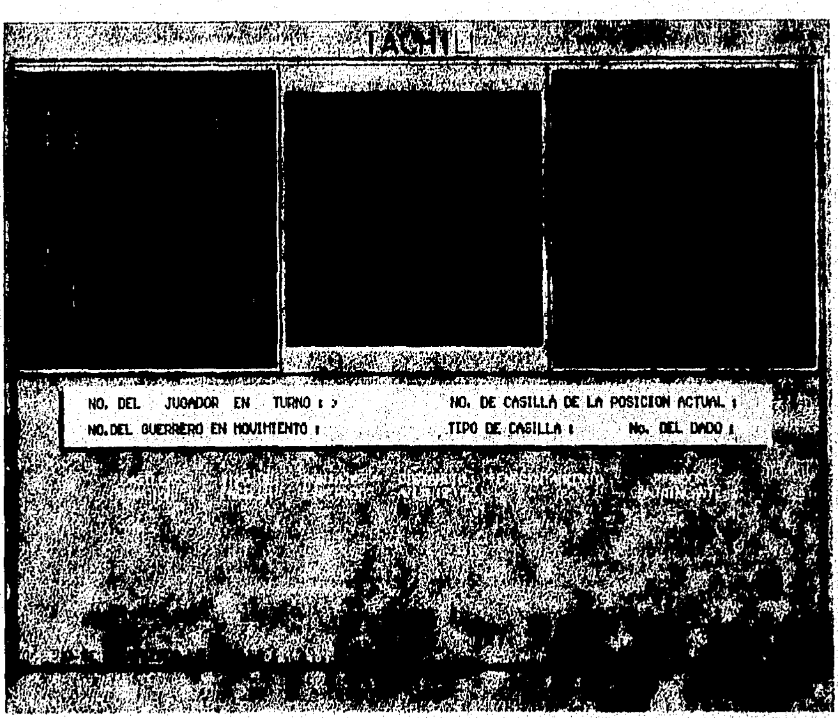


FIGURA 7.1.d *Ejemplo 1. Un único ganador.*

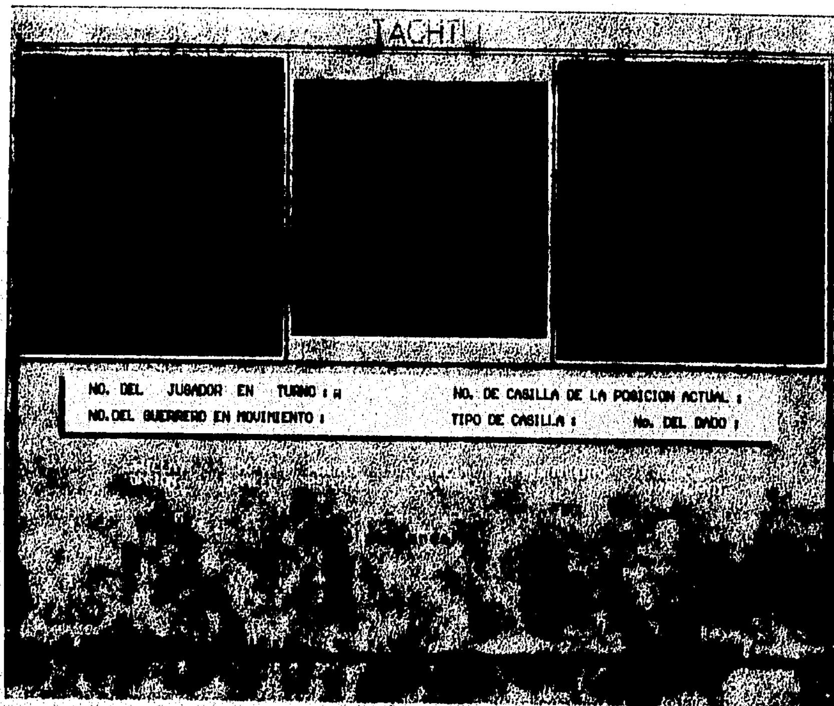


FIGURA 7.1.e *Ejemplo 1. Un único ganador.*

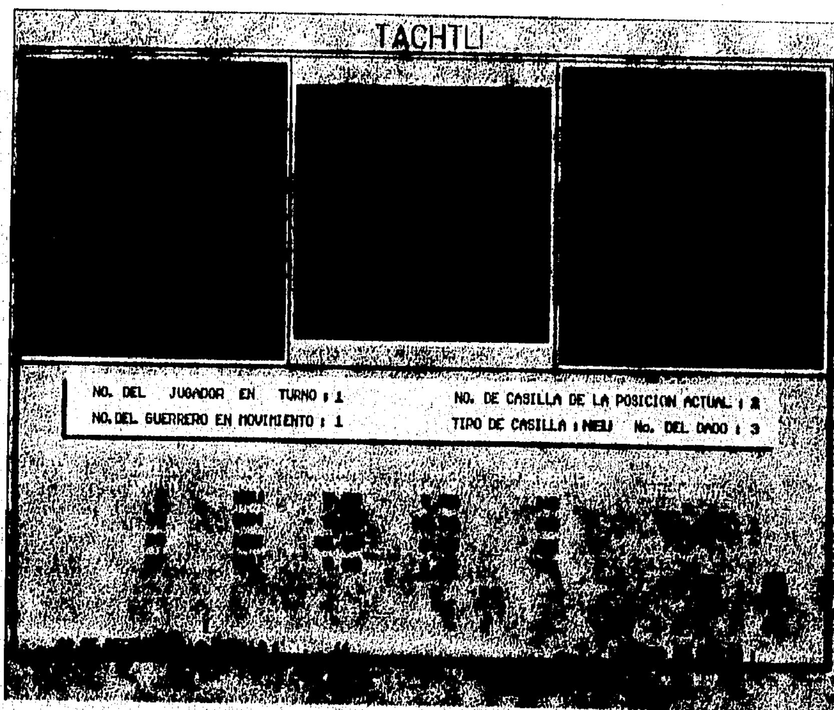


FIGURA 7.1.f *Ejemplo 1. Un único ganador.*

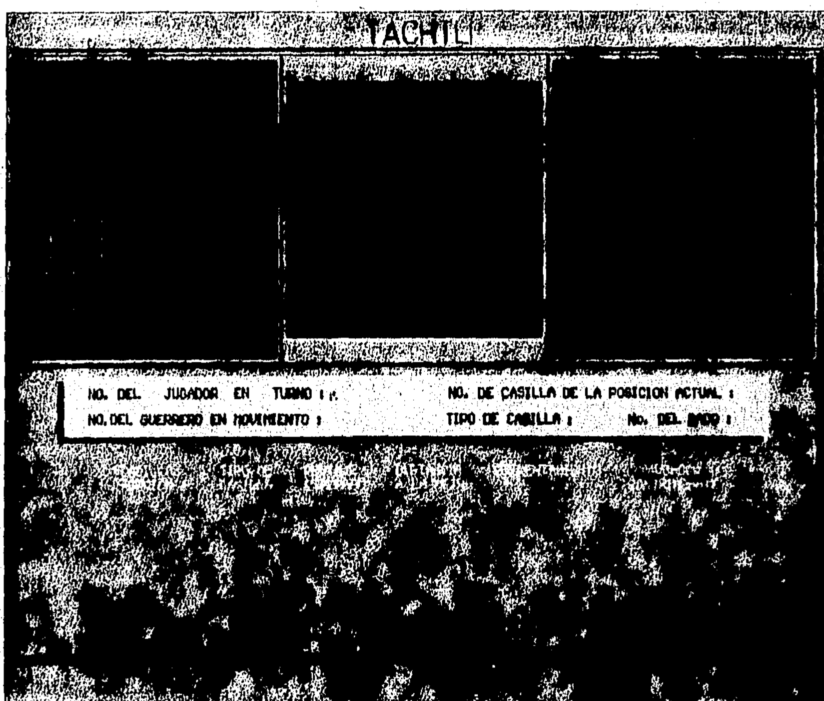
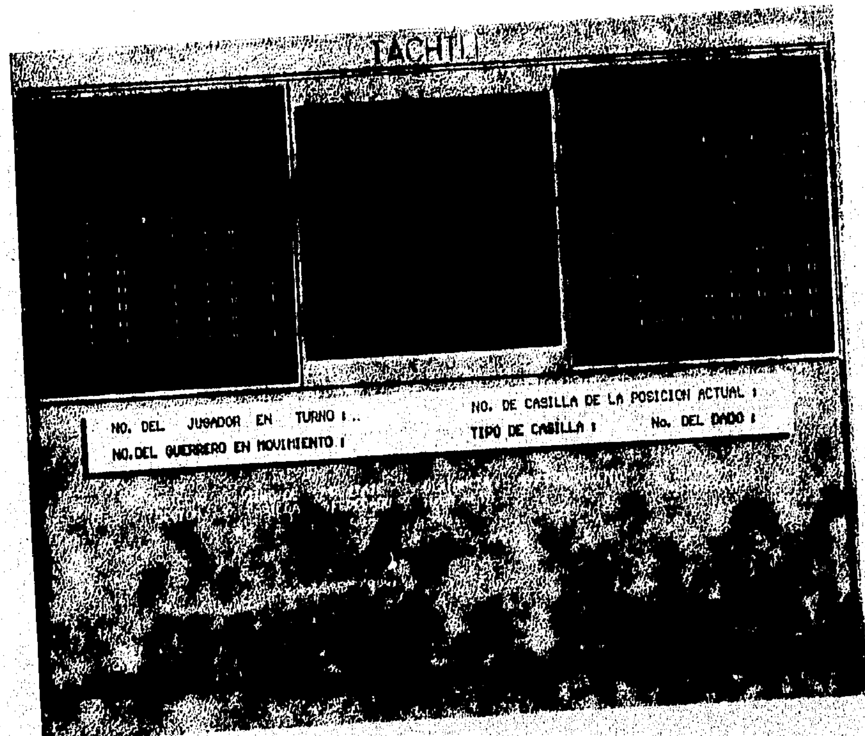


FIGURA 7.1.g *Ejemplo 1. Un único ganador.*


TACHTLI
NO. DEL JUGADOR EN TURNO :
NO. DEL GUERRERO EN MOVIMIENTO :
NO. DE CASILLA DE LA POSICION ACTUAL :
TIPO DE CASILLA :
No. DEL DADO :

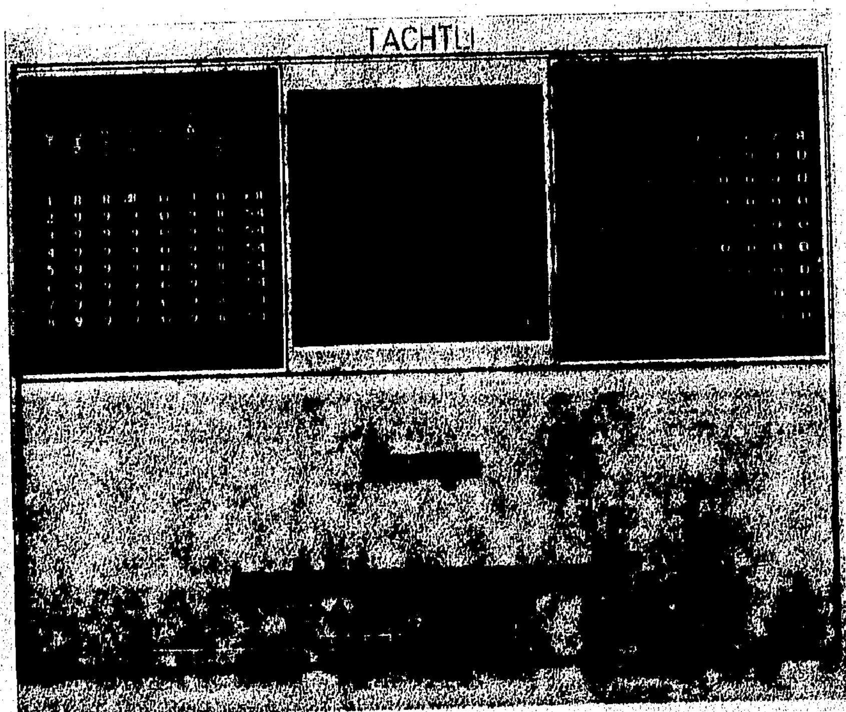


FIGURA 7.1.1 *Ejemplo 1. Un único ganador.*

Es de señalar que el tablero para la segunda etapa únicamente consta de 36 casillas, además de que de acuerdo con la figura 4.9 el número de casillas para colocar las fichas inicialmente es de 15, lo que conyeva a delimitar el número máximo de fichas para dar inicio a esta etapa. Obviamente, si no se logra formar la TRIPLE ALIANZA o bien, si ésta no posee ninguna señal, el ganador absoluto es el MEXICA.

A continuación de dan algunos resultados obtenidos del sistema TACHTLI.

EJEMPLOS.

El "juego" que se va a analizar es el siguiente: Este "juego" se realizó con el tablero fijo donde las casillas pantano son: la 12, 16, 18, 22, 24, 45, 43, 50, 52, 55 y 68 (pero no sabiéndolo de antemano el sistema) y con dos jugadores. La cantidad de fichas fue obtenida aleatoriamente del sistema y se muestra en la figura 7.2. Con el mismo tablero y la distribución inicial de las fichas se jugaron cinco "juegos" diferentes, con el fin de verificar que es posible obtener los tres resultados anteriormente expuestos.

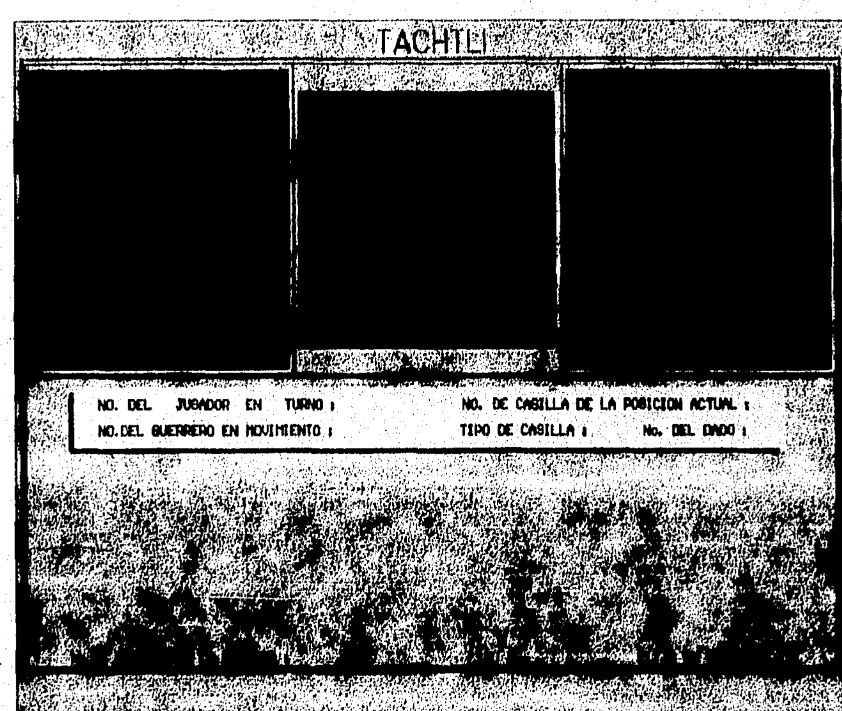


FIGURA 7.2 *Ditribución inicial de fichas, para los ejemplos: 2, 3, 4, 5, 6, 7,.*

El primer "juego", consistió en elegir las casillas alternativas de a cuerdo con las casillas óptimas sugeridas por *TACHTLI*, el número del dado en cada lanzamiento fue determinado por el sistema en forma aleatoria. Las jugadas son las siguientes: (por cuestión de espacio no se incluye la corrida completa del sistema, sin embargo, se dan a continuación todas las jugadas realizadas)

JUGADOR	J_1	J_2	J_1	J_2	J_1	J_2	J_2	J_2
TIRO	1°	1°	2°	2°	3°	3°	4°	5°
NO. DEL DADO	4	1	4	2	6	4	1	5
NO. DE CASILLA GUERRERO	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA
1	4	2	30	4	15	30	14	30
2	20	5	27	20	llega	27	28	llega
3	6	8	30	6	a	30	14	a
4	65	63	78	67	la	75	85	la
5	68 *	70	0	64 *	meta	0	0	meta
6	37	39	61	37		61	45	
7	51	36	58	51		58	59	
8	35 *	33	0	35 *		0	0	

* Muere ese guerrero al aplicar las reglas del juego en la casilla elegida.

Nótese que no se llevó a cabo ningún enfrentamiento.

Los resultados finales de este "juego" se muestran a continuación:

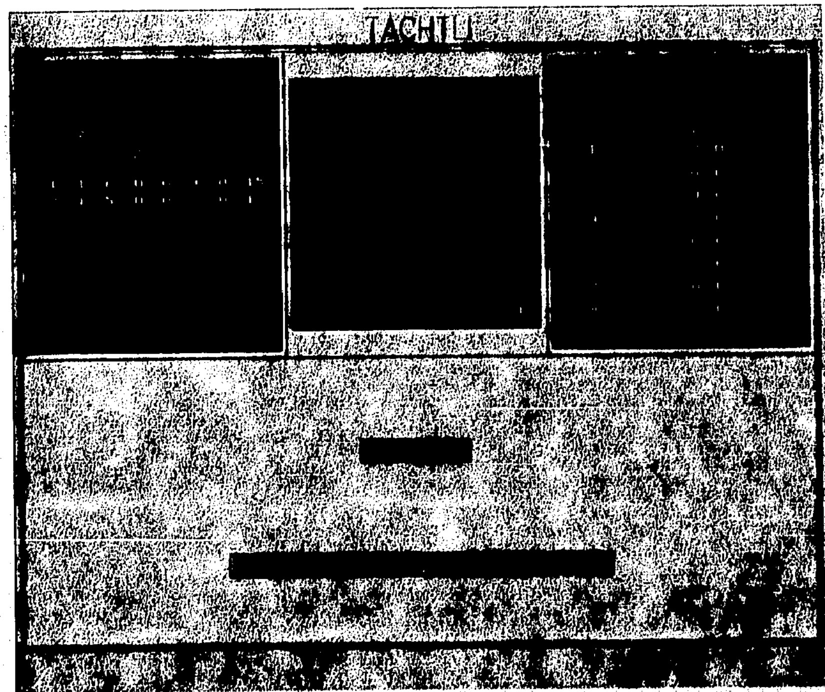


FIGURA 7.3 *Ejemplo 2. Elección de casillas óptimas. Ambos jugadores ganan.*

Como se aprecia en la pantalla anterior (figura 7.3), se obtiene un buen resultado para continuar con la siguiente etapa. En este "juego", se perdieron todos los tributos iniciales y algunos guerreros, pero aún así, la TRIPLE ALIANZA (jugador 2) cuenta con una señal para ser obtenida por el MEXICA (jugador 1) y con un buen número de guerreros para tratar de vencer a su contrincante.

Sin embargo, no siempre los jugadores elegirán la casilla óptima, e incluso puede tratarse de jugadores arriesgados y aventureros, quienes preferirán casillas de las zonas pantanosas y enfrentamientos. En el "juego" que se presenta a continuación se trata de ilustrar ésto. Al igual que en el "juego" anterior, se inicia con la misma distribución de fichas. En la siguiente página, se dan las jugadas de los participantes, así como el resultado final se muestra en la figura 7.4. Y se observa que ambos jugadores ganan, pero el número de fichas es muy pequeño para iniciar la siguiente etapa, además de que la TRIPLE ALIANZA no cuenta con señales para que el MEXICA logre su objetivo. Con este ejemplo se ve claro que aún cuando dos jugadores llegan a la meta, se tiene un ganador absoluto. En este ejemplo se tomaron los tiros del dado para mover las fichas del ejemplo 2 y sin embargo los resultados son muy distintos.

JUGADOR	J_1	J_2	J_1	J_2	J_1	J_2	J_2
TIRO	1°	1°	2°	2°	3°	3°	4°
NO. DEL DADO	4	1	4	2	6	4	5
NO. DE GUERRERO	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA
1	5	2	20	4	20 (4)	30	llega
2	20	5 (1)	1	21	20	13	a
3	24 *	8	0	6	llega	19	la
4	66	63	68 *	0	a	0	meta
5	69	70	63 (2)	68 *	la	0	
6	55 *	39	0	37	meta	52 *	
7	50 *	36	0	0		0	
8	49	33	36 (3)	35 *		0	

(1) Enfrentamiento contra el guerrero 1 (dado igual a 1), J_2 avanza a la casilla 6.

(2) Enfrentamiento contra el guerrero 2 y muere éste (dado igual a 5).

(3) Enfrentamiento contra el guerrero 7 y muere éste (dado igual a 5).

(4) Se lleva a cabo la estrategia, que consiste en primero cambiar guerreros contrarios por tributos y después entrar a la meta.

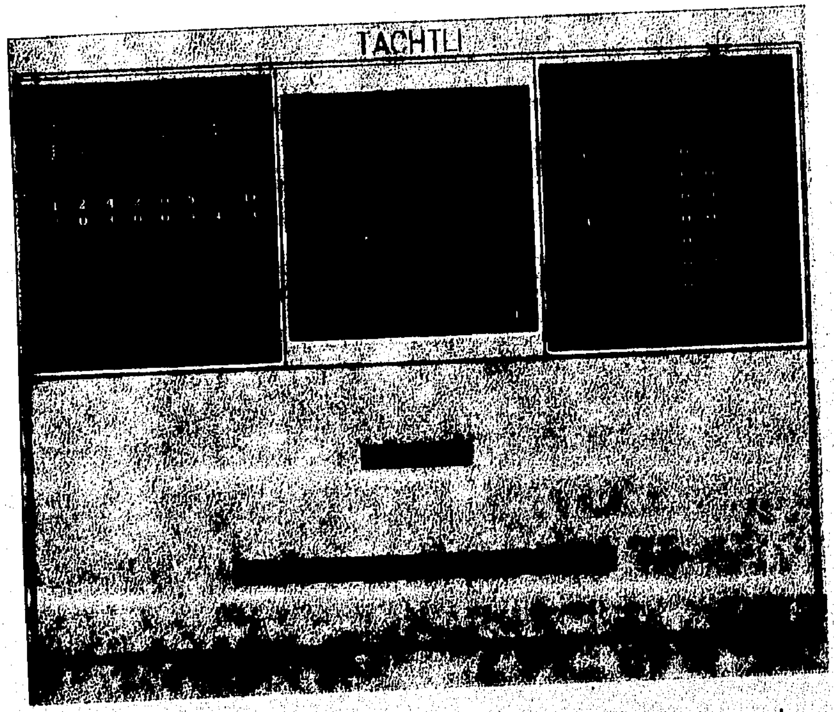


FIGURA 7.4 *Ejemplo 3. Ambos jugadores llegan a la meta. Un ganador absoluto.*

Otro caso interesante es cuando ambos jugadores llegan a la meta con el mismo número de fichas con las que inició, Teniendo ambos la posibilidad de jugar la siguiente etapa, en el ejemplo que a continuación se describe, ambos jugadores poseen igual número de fichas incluso coinciden en el tipo, por tanto, la denominación del Mexica dependió del lugar con el que se llegó a la meta. Cabe señalar que para este "juego", los participantes evitan los enfrentamientos así como arriesgar sus fichas.

JUGADOR	J_1	J_2	J_1	J_2
TIRO	1º	1º	2º	2º
NO. DEL DADO	4	5	6	3
NO. DE GUERRERO	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA
1	27	28	llega	llega
2	8	20	a	a
3	7	72	la	la
4	70	72	meta	meta
5	65	79		
6	38	79		
7	51	32		
8	51	59		

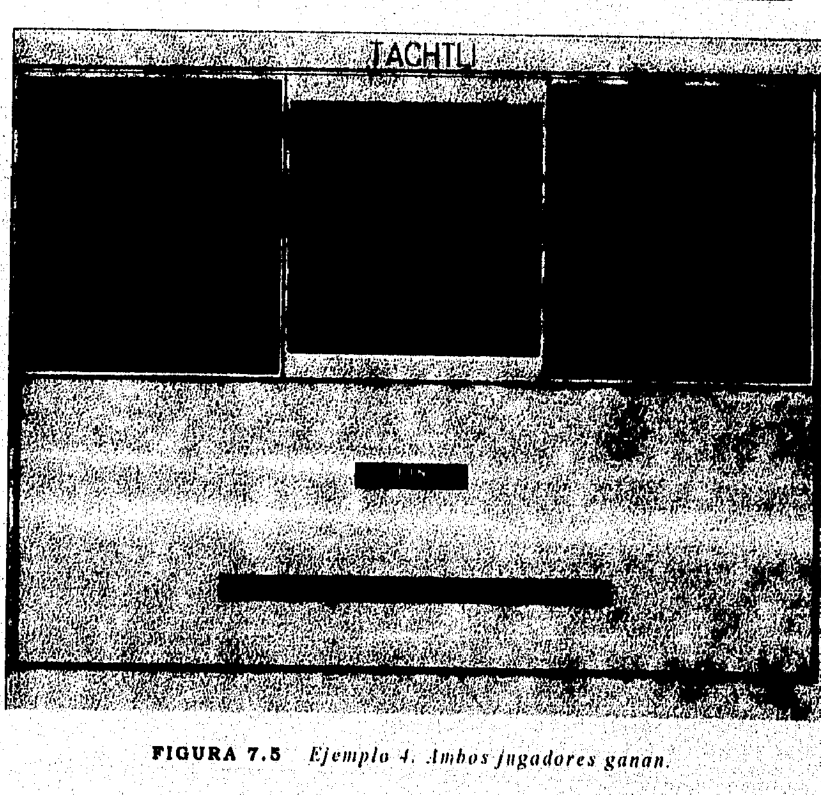


FIGURA 7.5 *Ejemplo 4. Ambos jugadores ganan.*

En los siguientes dos "juegos" se muestra como en algunos "juegos" ningún jugador gana como consecuencia de que ambos son descalificados, debido a que pierden todos sus guerreros, dando como resultado un empate. Este hecho puede deberse a que por algún motivo los jugadores eligen las casillas donde saben que van a perder el mayor número de puntos.

Una nota importante con repecto a estos "juegos" es que para estos casos finalmente siendo cero el número de guerreros de un jugador (en este caso de ambos), no importa si se termina el juego con x número de señales o y número de tributos.

El primer ejemplo de este tipo se desarrolló con los mismos números del dado que para el ejemplo 2 y es el siguiente:

JUGADOR	J_1	J_2	J_1	J_2	J_1
TIRO	1°	1°	2°	2°	3°
NO. DEL DADO	4	1	4	2	4
NO. DE GUERRERO	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA
1	18 *	2	0	4	17 *
2	21	5	23 *	22 *	0
3	22 *	8	0	23 *	0
4	64	63	26 *	67	57 *
5	80 *	70	0	64 *	0
6	40 *	39	0	54 *	0
7	54 *	36	0	53	0
8	49	33	60 *	35 *	40 *

* **Recuérdese que en la jugada marcada con el *, se pierde al guerrero.**

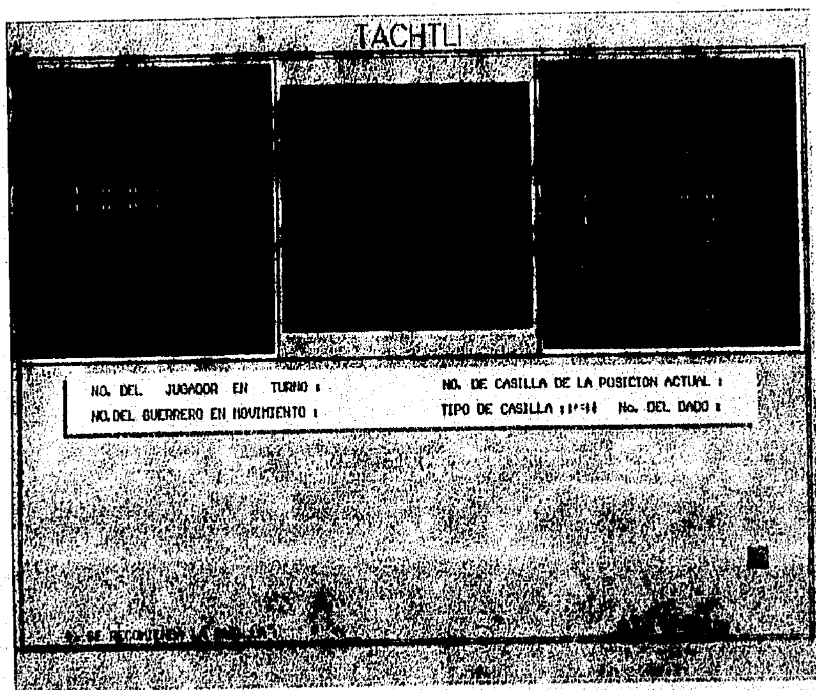


FIGURA 7.6.a *Ejemplo 5. Ambos jugadores pierden.*

La figura 7.6.a, contiene la información a cerca del número de fichas con las que se terminó el juego y la figura 7.6.b tiene el resultado final del juego, en el que no importa el número de señales, ni de tributos, ya que finalmente ambos jugadores son descalificados. Como se mencionó arriba, este ejemplo se realizó con los mismos números del dado en los tiros de los jugadores para mover sus fichas que en el ejemplo 2, y sin embargo, se tiene un resultado totalmente distinto al de dicho ejemplo, incluso "opuesto", esto ilustra que el resultado final del juego depende en gran medida de las decisiones hechas por los jugadores.

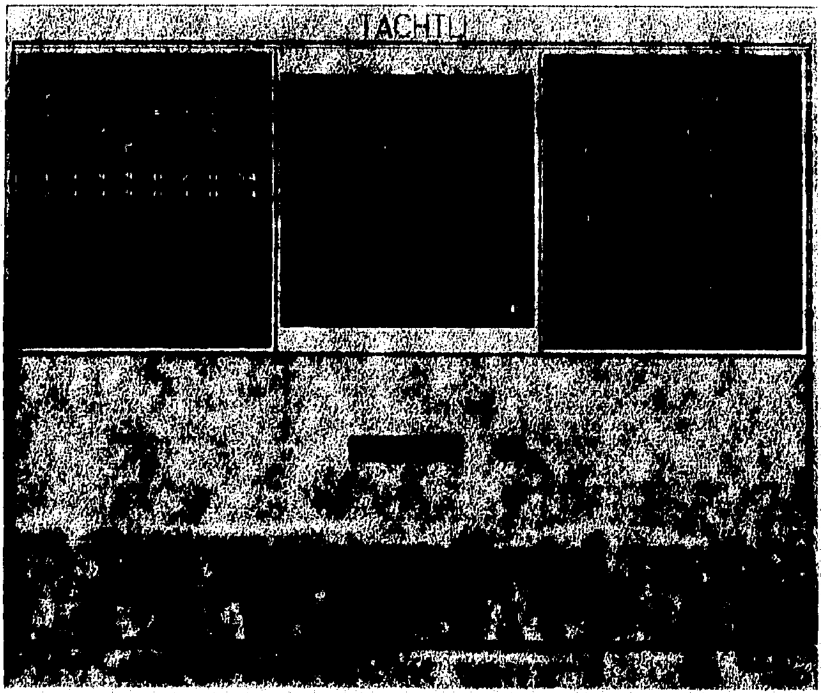


FIGURA 7.6.b *Ejemplo 5. Ambos jugadores pierden.*

Un segundo ejemplo es el que a continuación se muestra.

JUGADOR	J_1	J_2	J_1	J_2	J_1	J_2
TIRO	1°	1°	2°	2°	3°	3°
NO. DEL DADO	4	5	1	1	2	4
NO. DE GUERRERO	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA
1	18 *	21 [1]	0	22 *	0	0
2	21	29	22 *	13	0	4 *
3	22 *	4 *	0	0	0	0
4	64	80 *	67	0	80 *	0
5	80 *	64 *	0	0	0	0
6	40 *	35 *	0	0	0	0
7	54 *	40 *	0	0	0	0
8	49	50 *	48 *	0	0	0

[1] se efectúa un enfrentamiento, entre J_2 y J_1 con los guerreros 1 y 2 respectivamente, donde el resultado del lanzamiento del dado es 4, y por tanto J_2 permanece en la casilla 21.

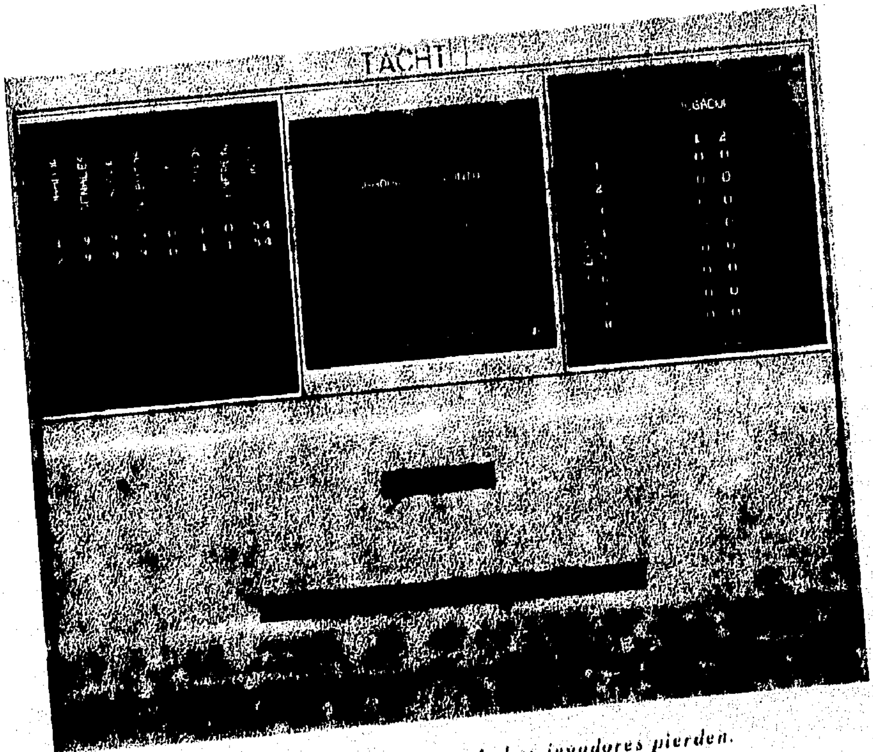


FIGURA 7.7 *Ejemplo 6. Ambos jugadores pierden.*

El tercer caso es cuando sólo un jugador llega a la meta, en la siguiente tabla se ve un ejemplo en el que un jugador elige casillas óptimas y el otro casillas donde se pierden más puntos.

JUGADOR	J_1	J_2	J_1	J_2	J_1	J_2
TIRO	1°	1°	2°	2°	3°	3°
NO. DEL DADO	4	1	4	2	6	4
NO. DE GUERRERO	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA	CASILLA ELEGIDA
1	20	2	27	4	llega	17 *
2	20	5	27	22 *	a	0
3	7	8	20	23 *	la	0
4	70	63	79	67	meta	57 *
5	65	70 [1]	78	0		0
6	38	39	34	54 *		0
7	51	36	58	53		40 *
8	51	33	58	35 *		0

[1] Enfrentamiento entre J_1 y J_2, como resultado del dado muere el guerrero 5 de J_2.

Como se aprecia en la pantalla de la figura 7.8, no importa el número de señales y tributos con las que se quedó el jugador descalificado, ni tampoco las de el MEXICA, por ser éste en este caso, el ganador absoluto del juego. Al igual que en ejemplo 5, se tienen los mismos números del dado para mover a las fichas que en el ejemplo 2.

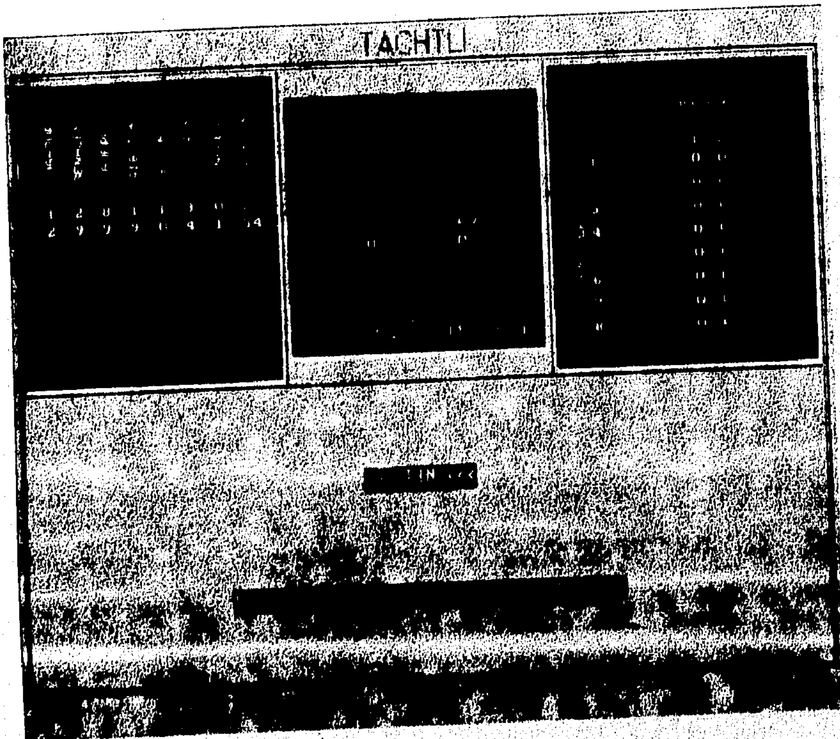


FIGURA 7.8 *Ejemplo 7. Un jugador llega a la meta, siendo el ganador absoluto*

Se inició este análisis con dos jugadores, por se el límite inferior de jugadores participantes en el juego. Este análisis ('simular "juegos"') se puede continuar indefinidamente, sin embargo, es conveniente recalcar que se pueden tener cualquiera de los tres finales siguientes para cualquier número de jugadores (8 a 2):

1. Ningún jugador gana.
2. Ambos jugadores ganan (MEXICA y TRIPLE ALIANZA).
3. Se tiene un ganador absoluto.

De lo anterior se nota que no importa el número de jugadores iniciales, realmente son dos o menos jugadores con los que se termina la primer etapa.

La conclusión de estos ejemplos es que, la decisión de los jugadores es un factor fundamental en el resultado final de un "juego". Además de que, como ya ha mencionado, basta delimitar el número de guerreros de la TRIPLE ALIANZA, así como sus señales, con las que se puede dar inicio a la segunda etapa del juego, para que se continúe con esta última.

A continuación se presenta un "juego" con ocho jugadores (por ser el caso límite superior en cuanto al número de jugadores), en el que los participantes eligen casillas óptimas sugeridas por *TACHTLI*. Con este ejemplo, se va a analizar más detenidamente los enfrentamientos, las casillas pantano, e.t.c..

LOS ENFRENTAMIENTOS.

Para conseguir más señales, los jugadores se tendrán que arriesgar en los enfrentamientos a perder la suya e incluso también su guerrero, ya que los enfrentamientos son la única manera de conseguir señales, e incluso tributos. Recuérdese que las fichas de señales son muy importantes para La Triple Alianza y el Mexica en la siguiente etapa, ya que a mayor número de éstas para el primer jugador mayor ventaja tiene ante su oponente por que éste tendrá que conseguir más señales.

En la figura 7.9, se tienen el número inicial de fichas para cada jugador del ejemplo 8. Este "juego", se realizó con la primera opción de *TACHTLI*, donde la distribución inicial de las fichas es determinística y las casillas pantano son fijas (pero el valor esperado para ellas se calcula como si se tratase de un "juego" donde el jugador no sabe de antemano cuales son). Realmente, es indistinto jugarlo con cualquier otra opción.

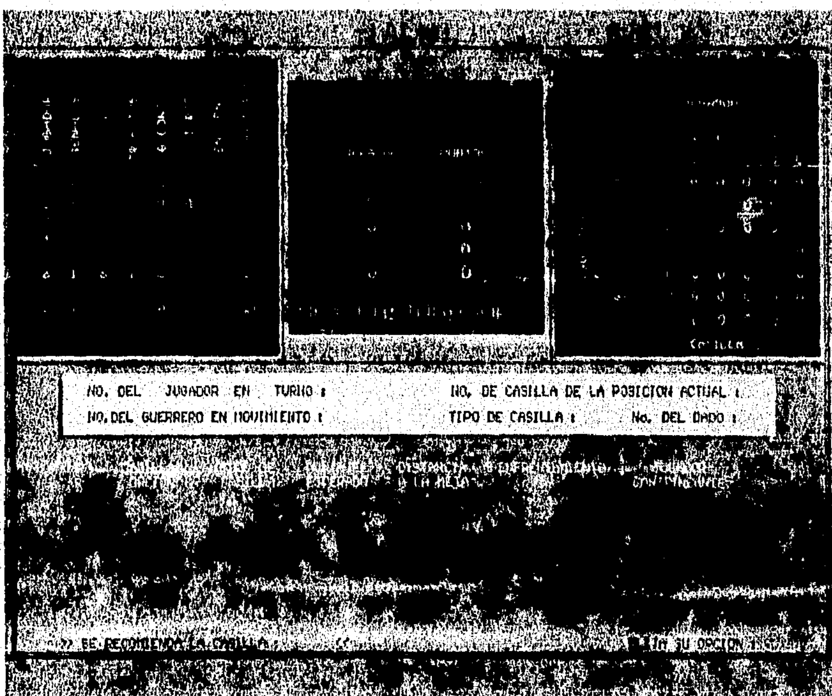


FIGURA 7.9 *Ejemplo 8. Distribución inicial de fichas.*

Un primer "juego" de este "juego", es donde el número del dado para el primer jugador es 3 y dado que no tiene tributos pierde su primer ficha de guerrero, sin poder hacer nada para impedirlo, ya que las únicas casillas alternativas que tiene son casillas tributo. En este primer ejemplo, se ve que la suerte de un jugador es un factor decisivo para determinar su puntaje. La figura 7.10 muestra el estado del juego después de que el jugador 1 pierde su ficha.

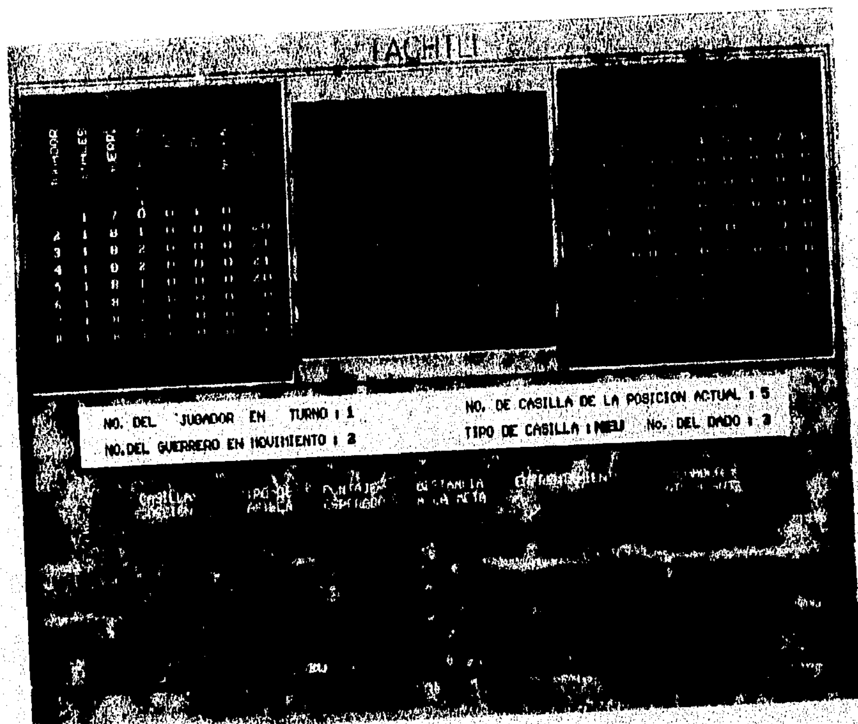


FIGURA 7.10 *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 1 y los guerreros 1 y 2, con el dado igual a 3.*

Con la figura 7.10, también se aprecia que, es más recomendable no arriesgar puntos en casillas pantano cuando ningún otro jugador las haya elegido previamente. En este caso se tiene que realmente el jugador perdería un puntaje igual a 2 o bien no perdería nada si eligiera la casilla pantano, sin embargo, el valor esperado en esa casilla es de -1 (aquí se cumple una característica del Valor Esperado); y la distancia a la meta es realmente de 6 en caso de no perder al guerrero; a pesar de que la distancia real a la meta de la casilla pantano es igual al de la casilla hechicero, en la casilla hechicero se tiene la certeza de no perder puntos y de tener una distancia de 6, es por ésto que se recomienda la casilla hechicero ante la alternativa de la casilla pantano. Con lo que respecta a las otras alternativas, en las que se tiene igual puntaje esperado al de la casilla hechicero, se ve que es mejor elegir una casilla donde se acorta la distancia a la meta. Si se tienen casilla con una distancia mayor a 6 y casillas con un longitud menor o igual a 6 y todas tienen el mismo puntaje, es mejor elegir una casilla con distancia menor o igual a 6, esto viene de que, el 6 es el número máximo de un dado y por consiguiente, si la distancia es mayor a 6 se tienen que realizar cuando menos dos tiros, es decir, tener dos turnos para poder llegar a la meta, mientras que en las casillas con distancia menor o igual a 6 se puede realizar cuando menos un tiro para llegar a la meta.

Otro "juego" para el jugador 1 es cuando el número del dado es diferente a 3. Las figuras 7.11.a y 7.11.b simulan el primer tiro del jugador 1 para su primer guerrero, con el número del dado igual a 6.

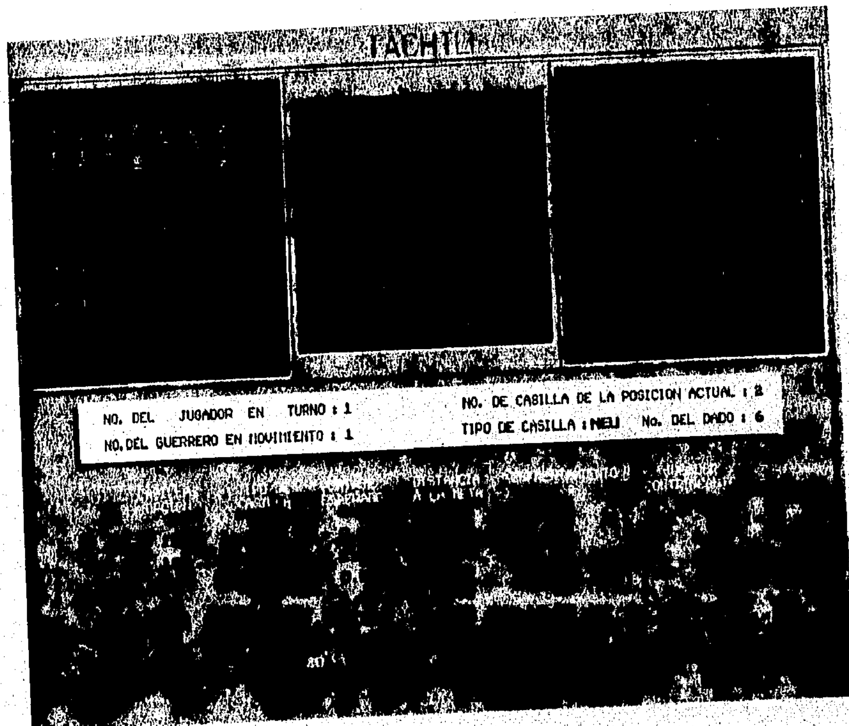


FIGURA 7.11.a *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 1 y el guerrero 1 con el dado igual a 6.*

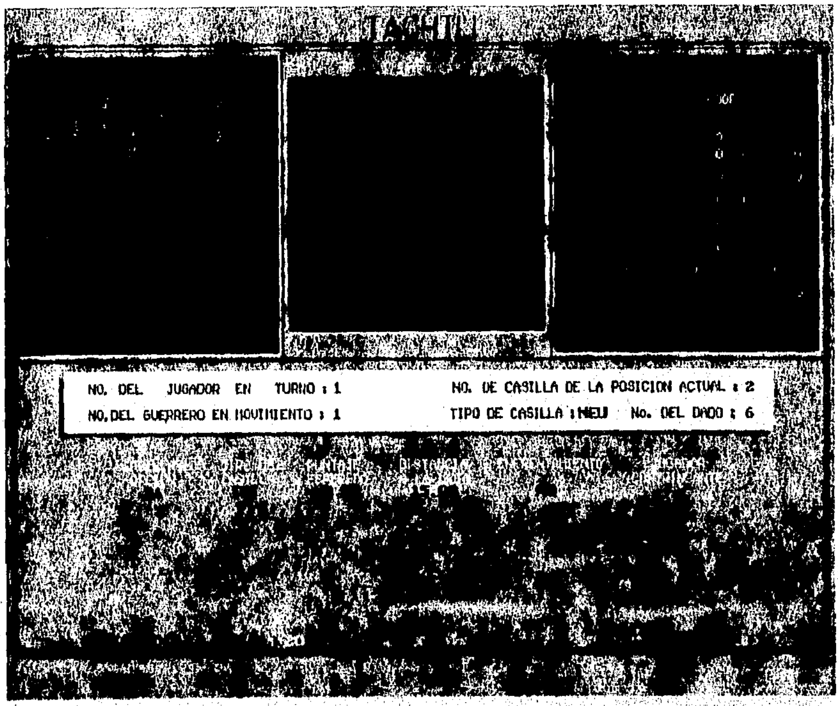


FIGURA 7.11.b *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 1 y el guerrero 1 con el dado igual a 6 (continuación).*

Respecto a las casillas alternativas que se tienen para este guerrero, se puede generalizar diciendo que, es mejor elegir una casilla de la séptima zona pantanosa ante la opción de elegir una casilla perteneciente a alguna de las dos últimas zonas pantanosas y a su vez es mejor elegir una de éstas ante la alternativa de elegir una de la seis primeras zonas pantanosas, siempre y cuando ningún jugador haya elegido antes alguna casilla de estas zonas. Este resultado se tiene de la probabilidad de perder una ficha en cada una de las diferentes zonas pantanosas.

Obviamente, si no se tienen tributos y existe la posibilidad de elegir cualquier otra casilla no se recomienda elegir una casilla tributo, ya que el jugador pierde a su guerrero y por consiguiente 2 puntos.

En este caso particular, es indistinto elegir la casilla hechicero o la casilla neutral número 20 ya que en ambas no se pierde ni gana ningún puntaje, esto se debe a que por una parte no se presentan enfrentamientos en ninguna de ellas y por otra, a que el jugador no cuenta con más de dos guerreros contrarios.

Las casillas alternativas del jugador 1 para su guerrero 2 con el dado igual a 6, después de que este jugador movió su guerrero 1, se ilustran en las figuras 7.12.a y 7.12.b.

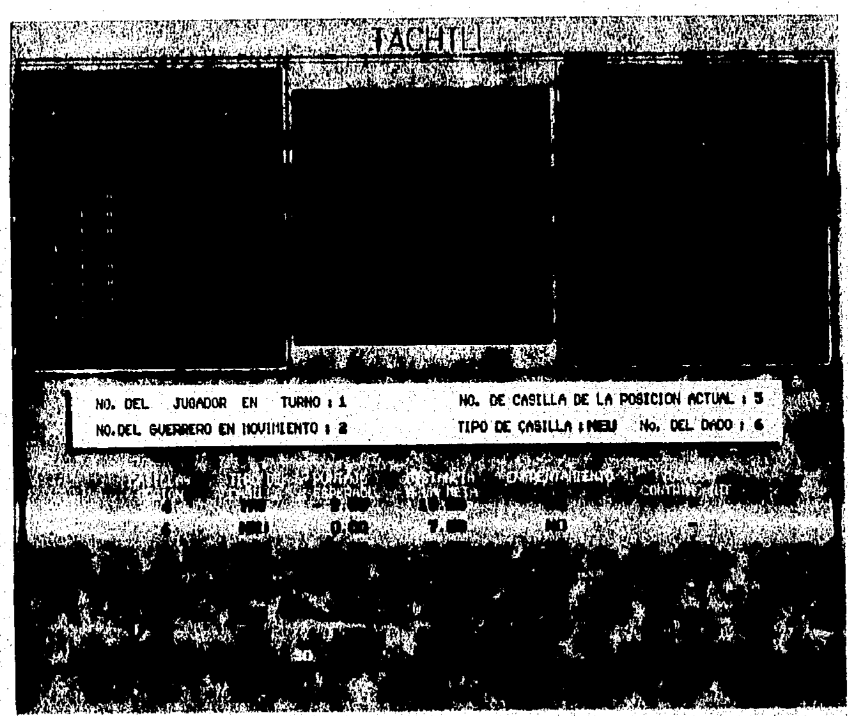


FIGURA 7.12.a *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 1 y el guerrero 2 con el dado igual a 6.*

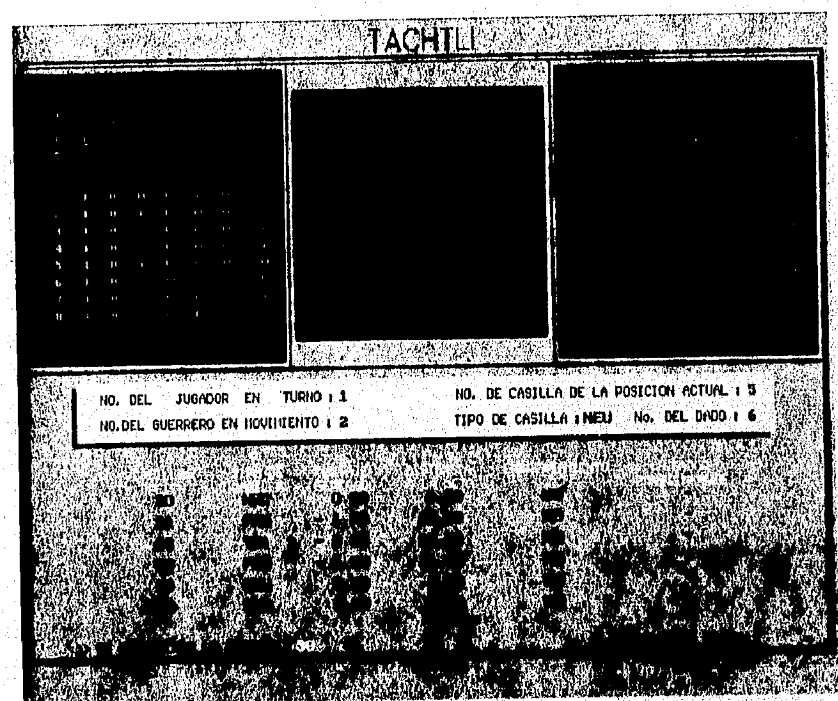


FIGURA 7.12.b *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 1 y el guerrero 2 con el dado igual a 6 (continuación).*

Para este guerrero, se tienen las mismas observaciones que para las figuras 7.11.a, 7.11.b, y 7.10. Por tanto se recomienda la casilla 30, en la que el jugador no gana ni pierde puntos y es la casilla más cercana a la meta.

Una vez que el guerrero 2 se movió, se continúa jugando con los guerreros 4 y 5, las casillas alternativas para estos guerreros se ven en las figuras 7.13.a, 7.13.b, 7.14.a y 7.14.b respectivamente, dos comentarios adicionales a los antes expuestos en las figuras 7.10, 7.11.a y 7.11.b, son los siguientes:

Primero, existe una gran variedad de casillas alternativas para un mismo tiro del dado. Para que el jugador se de cuenta de todas ellas necesita usar su ingenio y descubrir los caminos de longitud *n* (número del dado) para llegar a alguna casilla desde su posición actual.

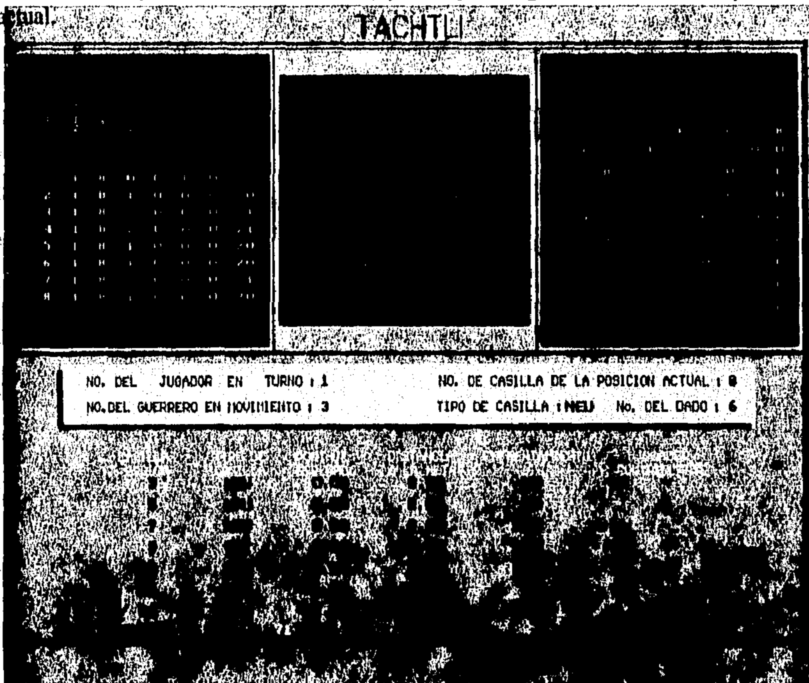


FIGURA 7.13.a *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 1 y el guerrero 3 con el dado igual a 6.*

Segundo, es más conveniente de entrada, elegir una casilla donde se encuentra una ficha del mismo jugador.

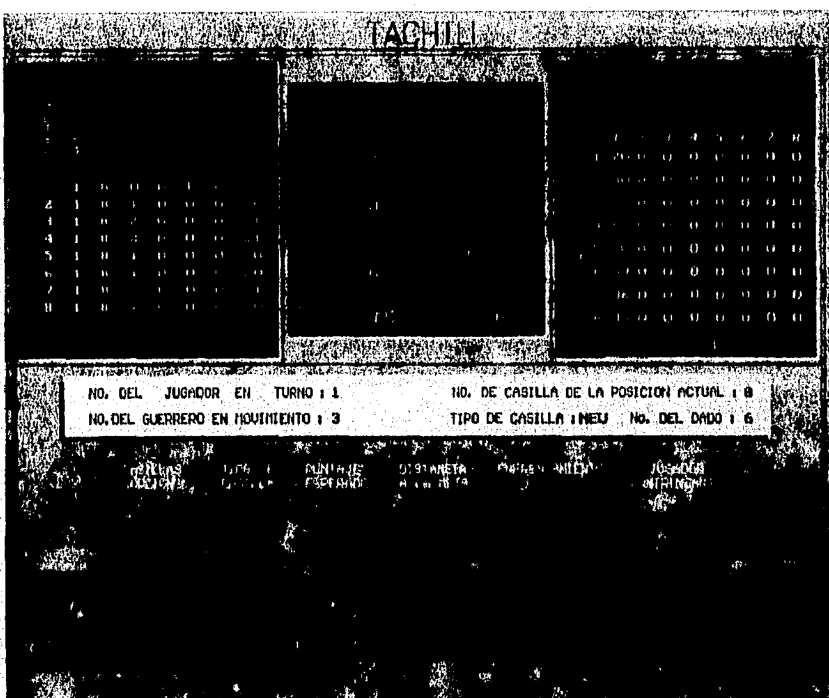


FIGURA 7.13.b *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 1 y el guerrero 3 con el dado igual a 6 (continuación).*

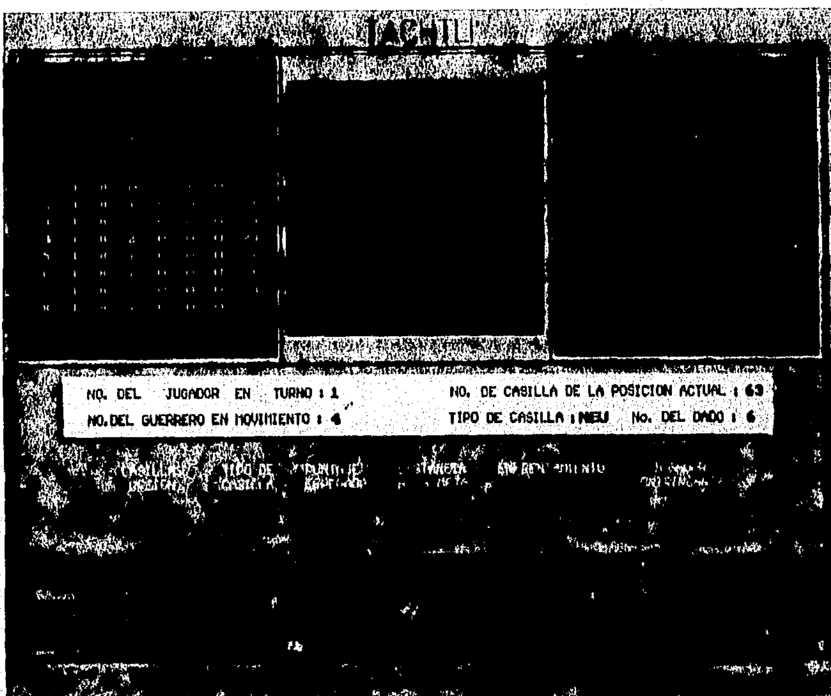


FIGURA 7.14.a *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 1 y el guerrero 4 con el dado igual a 6.*

Una vez, que el jugador 1 ya movió todas sus fichas el turno es para el jugador 2, el tiro del dado se simula en la figura 7.15. Cabe señalar que el primer jugador no perdió puntaje en su primer turno y esto se debe a que "supo" elegir las casillas más convenientes. Generalmente, de entrada, es decir, cuando es el primer turno, se recomienda elegir casillas neutrales.

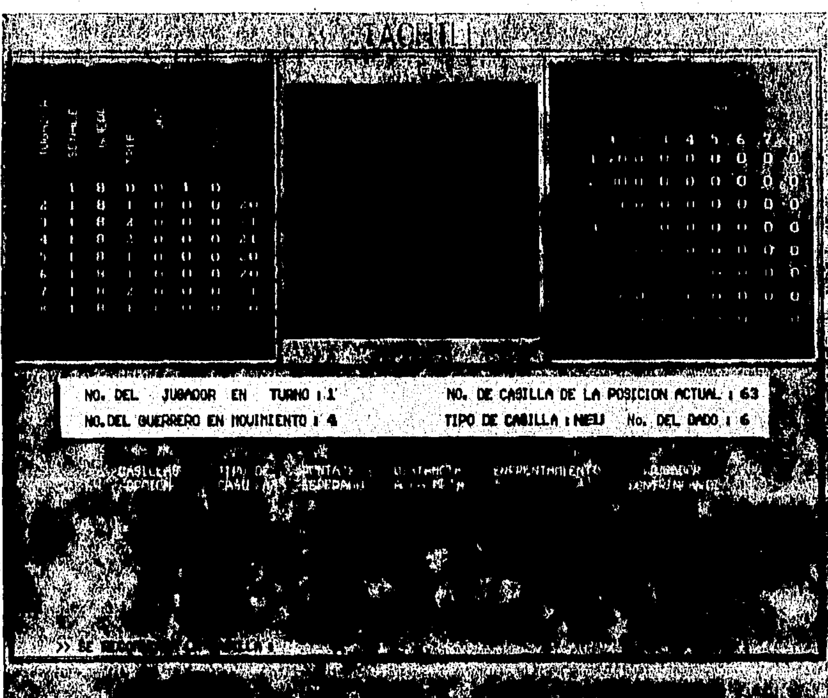


FIGURA 7.14.b *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 1 y el guerrero 4 con el dado igual a 6 (continuación).*

Generalmente, de entrada, es decir, cuando es el primer turno, se recomienda elegir casillas neutrales.

Siguiendo con los criterios de decisión antes expuestos, para este guerrero se recomienda la casilla 28, en donde no pierde ni gana puntos, además de ser la casilla más cercana a la meta.

Adicionamante, se tiene que el puntaje esperado en una casilla con enfrentamiento, depende del tipo de casilla y de las fichas tanto del jugador en turno como del jugador contrincante. Por ejemplo, en este caso, la casilla con enfrentamiento es una casilla hachicero pero podría tratársele como a una casilla neutral, ya que el jugador en turno no tiene dos o más guerreros contrarios para poderlos cambiar por tributos que pudieran aumentar su puntaje y cumplir así primero con la regla de esta casilla y después con el enfrentamiento.

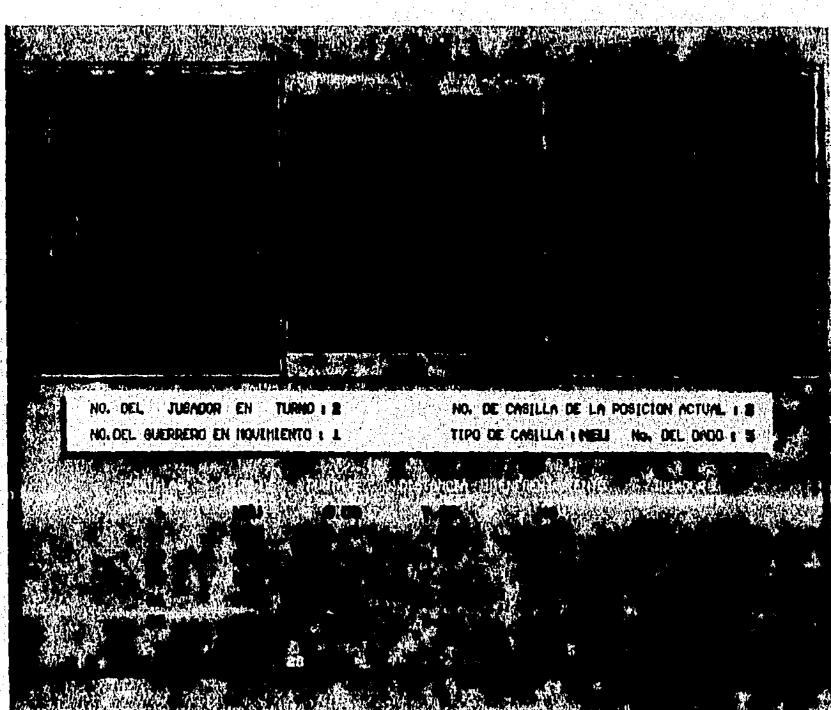


FIGURA 7.15 *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 2 y el guerrero 1 con el dado igual a 5.*

En general, cuando se trata de casillas neutrales, y ambos jugadores tienen señales, el jugador en turno tiene un puntaje esperado de -0.25. Este resulta de las probabilidades de un enfrentamiento. Sin embargo, debe notarse que el jugador en turno en caso de enfrentarse en una casilla neutral, perderá 5 puntos si tiene señal o ganará 3 puntos si el jugador contrario posee alguna, adicionalmente aumentará su posibilidad de cambiar dos guerreros contrarios por un tributo.

Generalmente, cuando se tenga la opción de elegir entre una casilla neutral sin enfrentamiento y una casillas neutral con enfrentamiento es más recomendable elegir la casilla neutral sin enfrentamiento.

Debe notarse que para conseguir más señales, los jugadores se tendrán que arriesgar en los enfrentamientos a perder la suya e incluso también su guerrero, ya que los enfrentamientos son la única manera de conseguir señales, e incluso tributos. Recuérdese que las fichas de señales son muy importantes para la TRIPLE ALIANZA y el MEXICA en la siguiente etapa, ya que a mayor número de éstas para el primer jugador mayor ventaja tiene ante su oponenente porque éste tendrá que conseguir más señales.

Posteriormente se va a hacer más observaciones a cerca de los enfrentamientos.

Una vez que el jugador 2 y el jugador 3 realizan sus movimientos, el turno es para el jugador 4, las casillas alternativas del jugador 4 para su guerrero 3 se describen en la figura 7.16.a.

En esta jugada se concluye que, el valor esperado en una casilla neutral con enfrentamiento, cuando ambos jugadores tienen señales, es mayor al que se espera en una casilla de pantano de alguna de las nueve zonas si en movimientos anteriores no se ha elegido ninguna casilla de estas zonas. Aunque, en realidad, se puedan perder más puntos, es decir, mientras que en una casilla de las zonas pantanosas que se trague la ficha se pierde únicamente al guerrero (2 puntos), en un enfrentamiento, se perdería su señal y su guerrero (5 puntos), pero esta probabilidad es menor.

Y si además se tiene la opción de perder 1 punto con una probabilidad igual a 1 (con certeza) por tratarse de una casilla tributo, ante la alternativa de perder 5 puntos en un enfrentamiento con una probabilidad de 1/6, se recomienda realizar el enfrentamiento, por que además y a diferencia de las casillas de pantano sin enfrentamiento o de las de tributo, en un enfrentamiento se tiene la probabilidad de 1/6 de ganar 3 puntos si el jugador contrario tiene alguna señal y aún más, de ganar un guerrero contrario con la misma probabilidad. Evidentemente, la elección depende de la personalidad del jugador . Y el resultado de un enfrentamietno depende de la suerte del jugador.

La figura 7.16.b ilustra la terminación del movimiento que realiza el cuarto jugador con su tercer guerrero después de elegir una casilla con enfrentamiento cuyo resultado es el número 2 y por consiguiente este guerrero permanece en la casilla elegida.

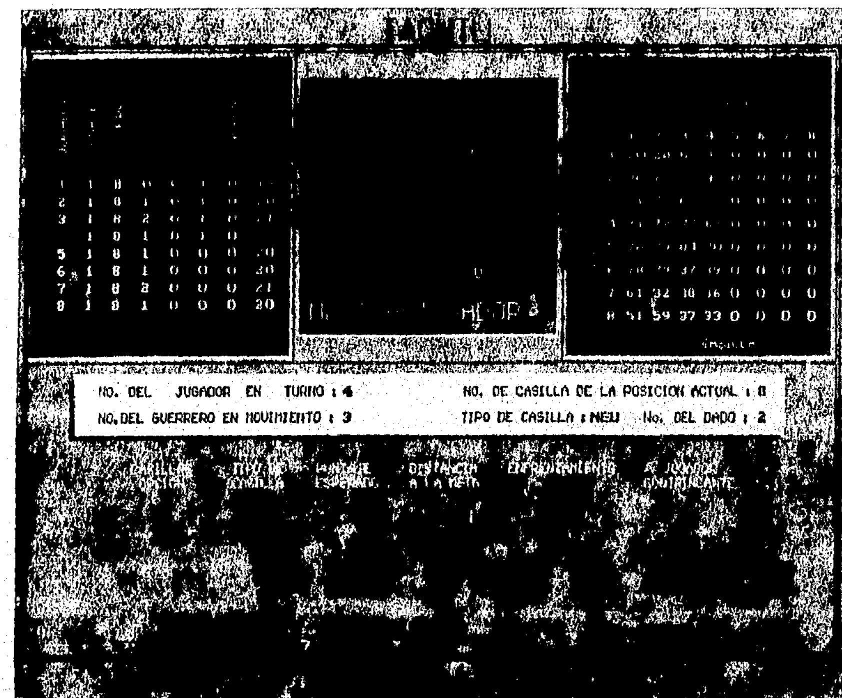
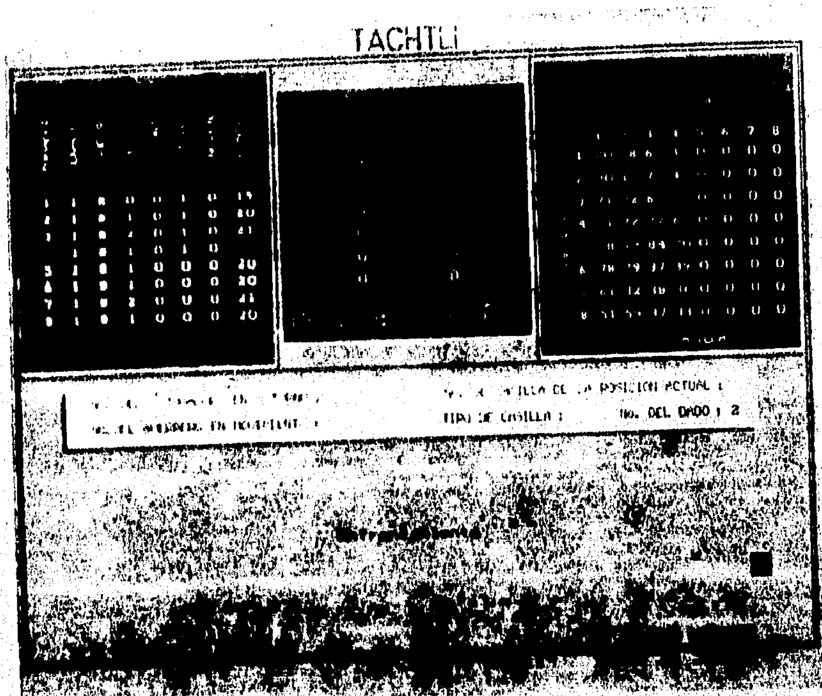


FIGURA 7.16.a *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 4 y el guerrero 3 con el dado igual a 2.*


TACHTLI
TIPO DE CASILLA :
NO. DEL DADO : 2

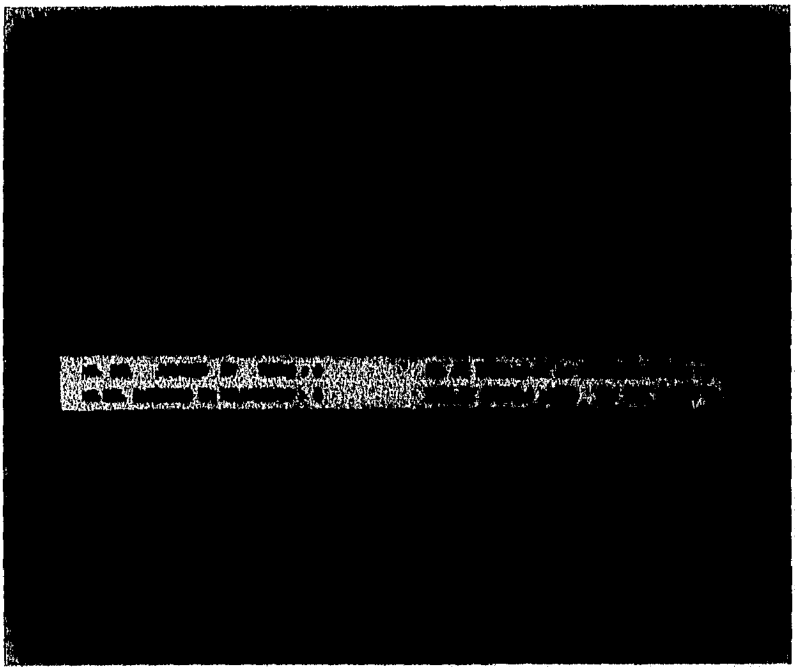


FIGURA 7.17 *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 4 y el guerrero 4 con el dado igual a 2.*

Después de que el jugador 4 mueve al guerrero 4, prosigue a analizar las casillas alternativas para su guerrero 4. En la figura 7.17 se dan las casillas alternativas para este guerrero y se concluye que cuando se sabe con certeza que se va a perder un punto ante el riesgo de perder dos puntos con una probabilidad de 1/4, se recomienda esta última alternativa. Pero evidentemente depende de si el jugador es arriesgado o es conservador.

En este ejemplo, afortunadamente para el jugador no pasó nada al elegir la casilla pantano.

La figura 7.18.a, representa al estado del juego después de que el cuarto jugador mueve a su quinto guerrero y muestra las casillas alternativas para su sexto guerrero.

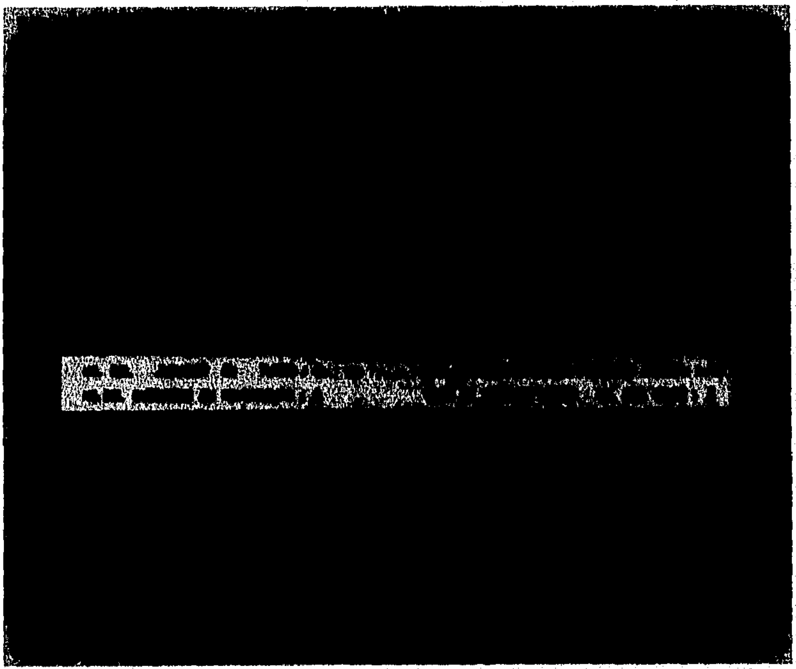


FIGURA 7.18.a *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 4 y el guerrero 6 con el dado igual a 2.*

Las observaciones con respecto a las casillas alternativas para este guerrero son iguales a las que se hicieron en base a la figura 7.17.a.

En la figura 7.18.b se simula el enfrentamiento de este guerrero contra el guerrero 7 del jugador 3, en el que desafortunadamente para el jugador en turno, el jugador contrario es quien ganó dicho enfrentamiento y por tanto, éste último gana 3 puntos más un guerrero contrario y el jugador en turno pierde 5 puntos. Aquí, una vez más se resalta la importancia de la suerte del jugador para obtener el mayor puntaje.

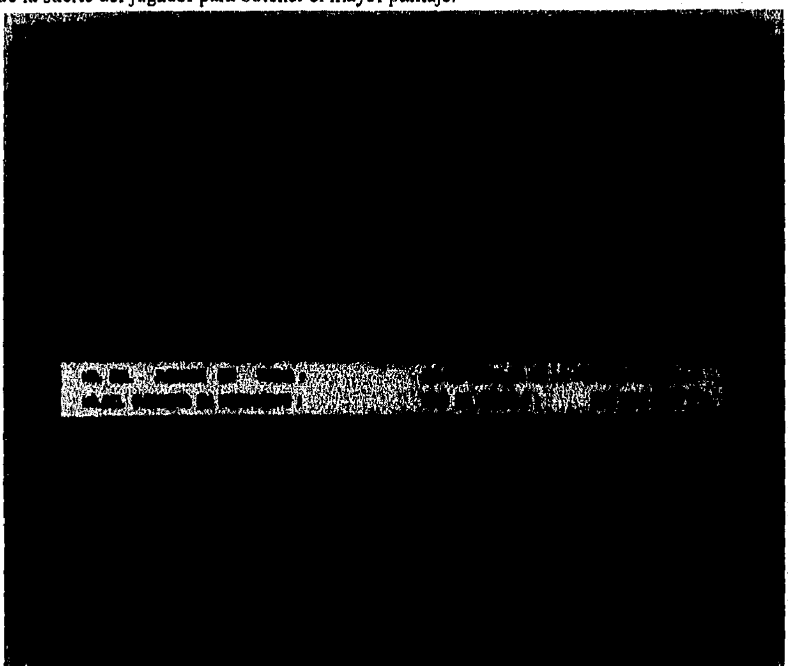


FIGURA 7.18.b *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 4 y el guerrero 6 con el dado igual a 2 (continuación).*

En estos casos se ve claro como el jugador en turno *coopera* (aunque no quiera) para que el jugador contrincante logre su objetivo (si el dado es 6) o bien, el jugador contrario coopera con el jugador en turno (si el dado es 5). Esta cooperación está dada por las mismas reglas del juego.

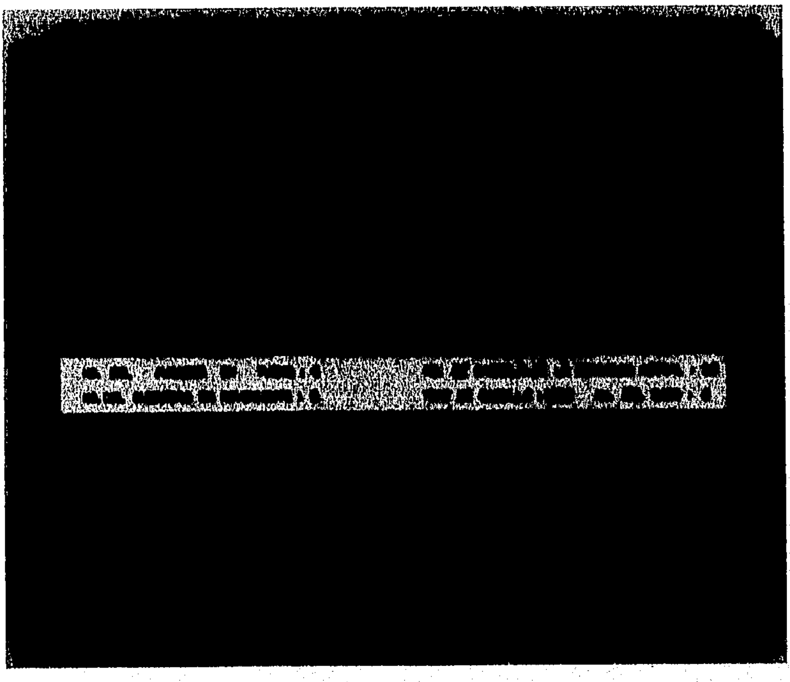


FIGURA 7.19.a *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 4 y el guerrero 8 con el dado igual a 2.*

Otro caso importante de mencionar es cuando existe la posibilidad de efectuar un enfrentamietno contra un jugador que sí tiene al menos una señal y el jugador en turno no posee ninguna. Este ejemplo se ve claro en la figura 7.19.a, que resulta de la situación que guarda el juego después de que el jugador 4 mueve a su guerrero 7.

En la situación particular donde la casilla alternativa es neutral, el jugador en turno tiene un puntaje esperado de 0.25, resultado obtenido del hecho de que existe la posibilidad de ganar 3.5 con una probabilidad de 1/6 (3 puntos de la señal del contrincante más 0.5 si se contempla la posibilidad de que el guerrero contrario posteriormente se cangee por un tributo) y también la de perder 2 con una probabilidad de 1/6 (perder al guerrero).

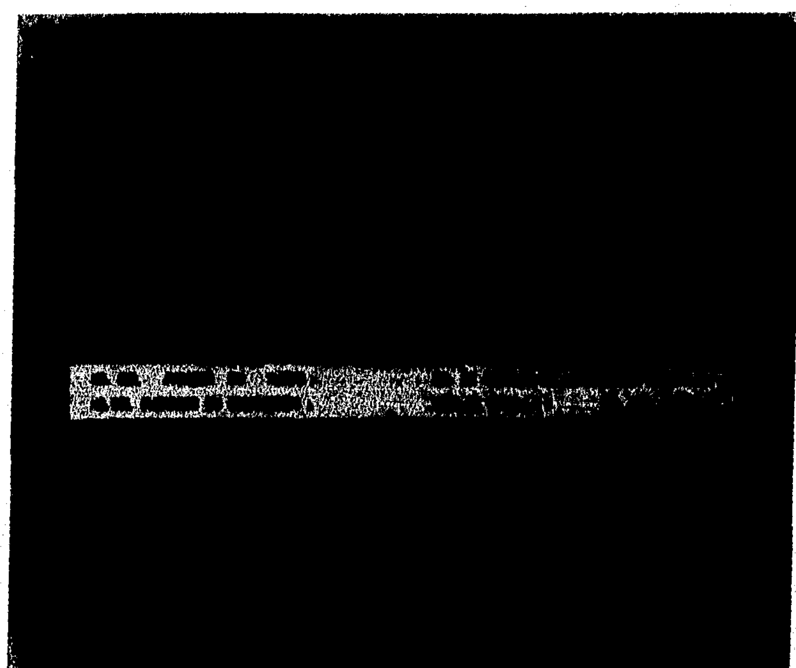


FIGURA 7.19.b *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 4 y el guerrera 8 con el dado igual a 2 (continuación).*

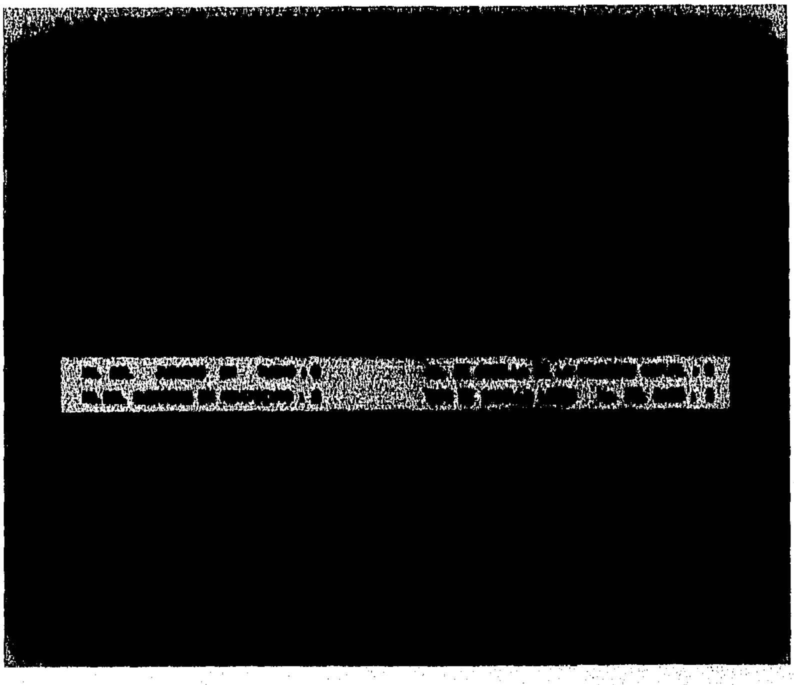


FIGURA 7.20.a *Ejemplo 8 Primer tiro para el jugador 5 y el guerrero 2 con el dado igual a 3.*

Para este guerrero en particular se recomienda la casilla 32 en la que se produce un enfrentamiento contra el jugador 2.

El resultado de este enfrentamiento se ve en la figura 7.19.b y es la obtención de un uno en el tiro del dado, por tanto el guerrero analizado se mueve de la casilla 32 una casilla.

Después de que el jugador 4 jugó con todas sus fichas de guerrero, el turno es para el jugador 5. Las figuras 7.20.a y 7.20.b muestran el primer turno para el jugador 5 con su guerrero 2.

Con este guerrero se reafirma lo anteriormente dicho a cerca de la relación del puntaje esperado en casillas con enfrentamientos y el número de señales que posee cada jugador.

A pesar de que en la casilla 3 y 20 se puede llevar a cabo un enfrentamiento y ambas pueden analizarse como casillas neutrales, ya que el jugador no tiene guerreros contrarios que cambiar en la casilla hechicero, la diferencia en el valor del puntaje esperado lo marca el número de señales que posee cada jugador contrincante. Siempre que se presente una situación semejante a ésta, se aconseja elegir aquella casilla en la que el jugador contrincante posea al menos una señal. En caso de que todos los jugadores contrincantes tengan señales, se recomienda elegir aquella que esté más cercana a la meta.

También debe notarse que es más recomendable elegir una casilla neutral con enfrentamiento si el jugador en turno no posee señales y el jugador contrincante sí.

En la figura 7.20.b se ve el resultado del enfrentamiento efectuado contra el jugador 1, siendo éste un 2 y por consiguiente el guerrero en movimiento permace en la casilla elegida.

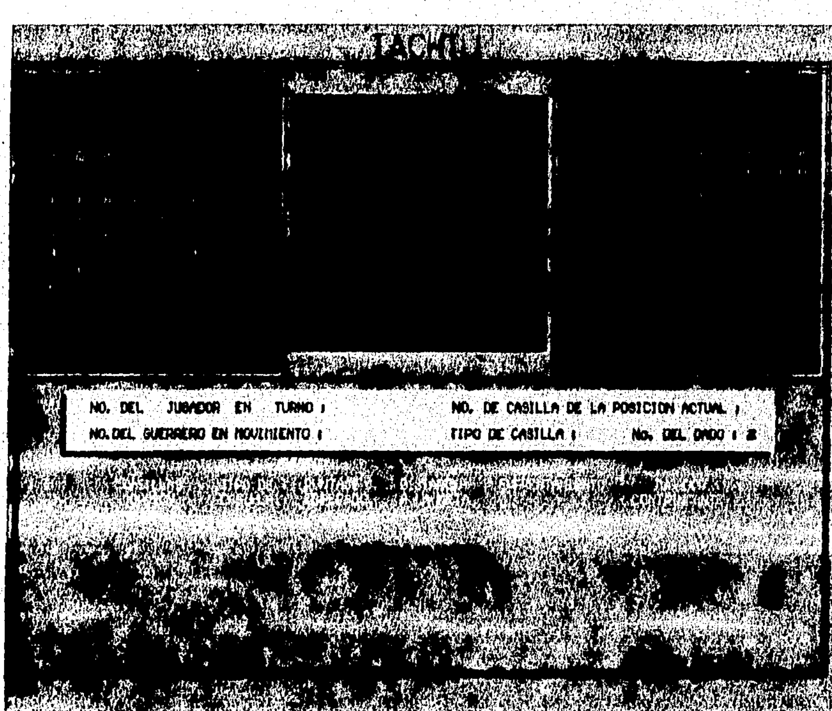


FIGURA 7.20.b *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 5 y el guerrero 2 con el dado igual a 3 (continuación).*

Después de que el jugador en turno realizó los movimientos del los guerreros 1, 2, 3, y 4, se tiene que para el guerrero 5 las casillas alternativas son (figura 21.a):

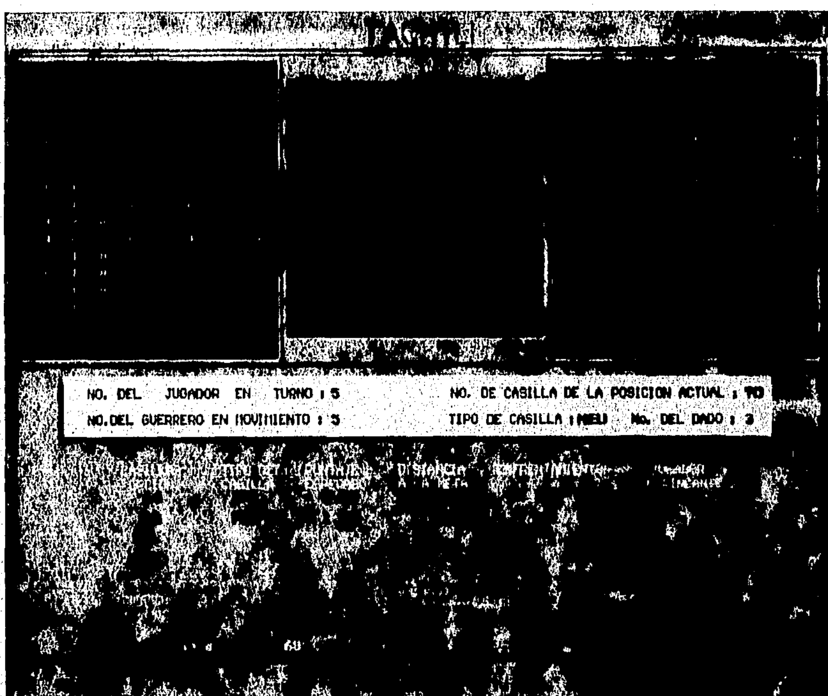


FIGURA 7.21.a *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 5 y el guerrero 5 con el dado igual a 3.*

De la figura 7.21.a, se ve que cuando se tiene la certeza de perder 2 puntos contra el riesgo de perder 2 puntos es mejor arriesgarse. Aunque como resultado de ese riego se pierdan los dos puntos como sucedió para este guerrero (figura 7.21.b).

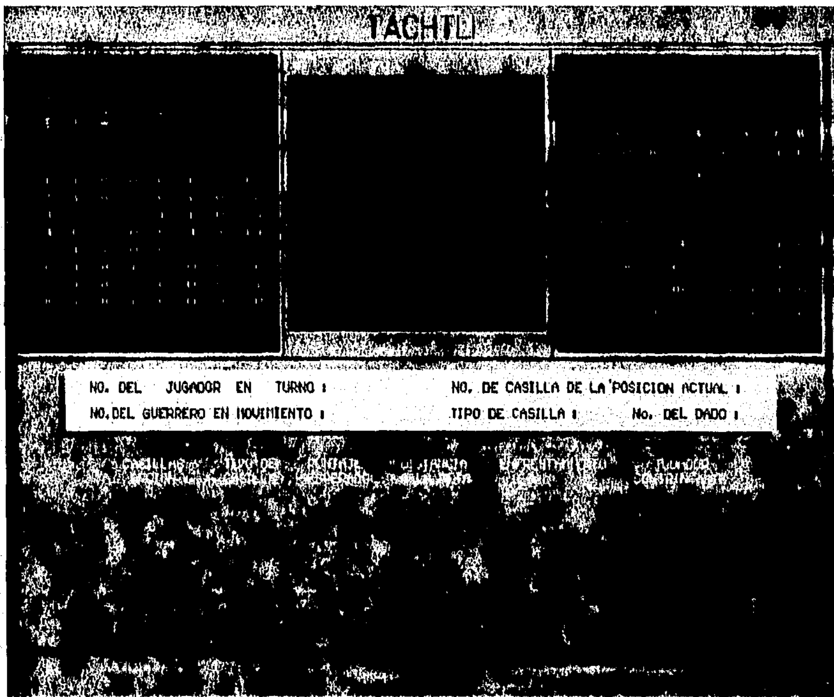


FIGURA 7.21.b *Ejemplo 8. Primer tiro para el jugador 5 y el guerrero 5 con el dado igual a 3 (continuación).*

Siguiendo con el juego, se tiene que después de realizar todos los jugadores su primer turno (siendo el dado para el jugador 6 igual a 1, para el 7 un 2 y para el 8 un 2), el estado del juego es el siguiente (figura 7.22):

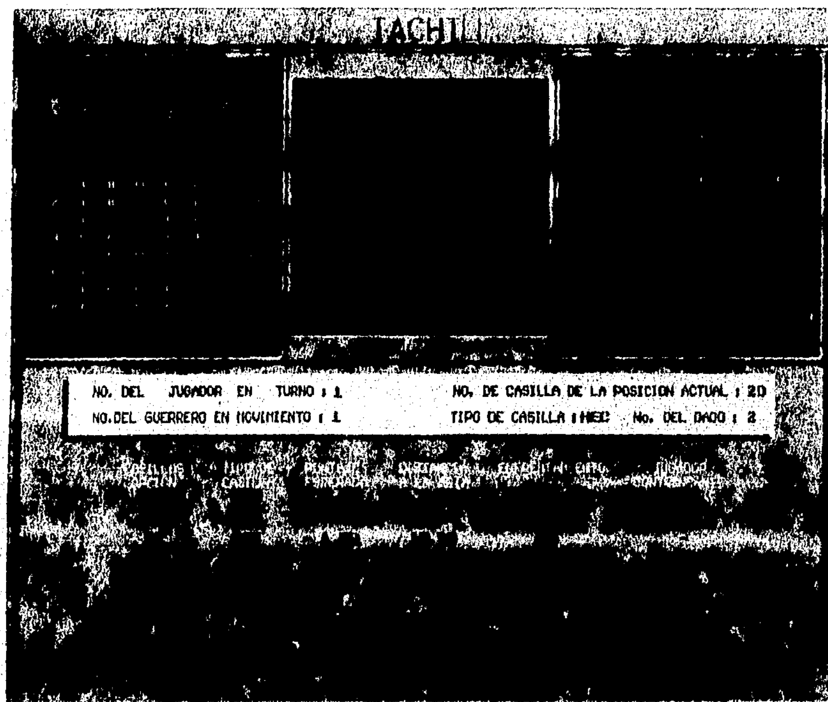


FIGURA 7.22 *Ejemplo 8. Estado del juego después del primer turno de todos los jugadores.*

El estado del juego después de que todos los jugadores realizaron su segundo turno, se ve en la figura 7.23. Los números del dado con los que avanzaron los guerreros los jugadores es: 2, 2, 5, 3, 5, 3, 1 y 2 respectivamente. Donde el jugador 3 llega a la meta con su cuarto guerrero. Hasta este momento, el jugador con mayor puntaje es el 6.

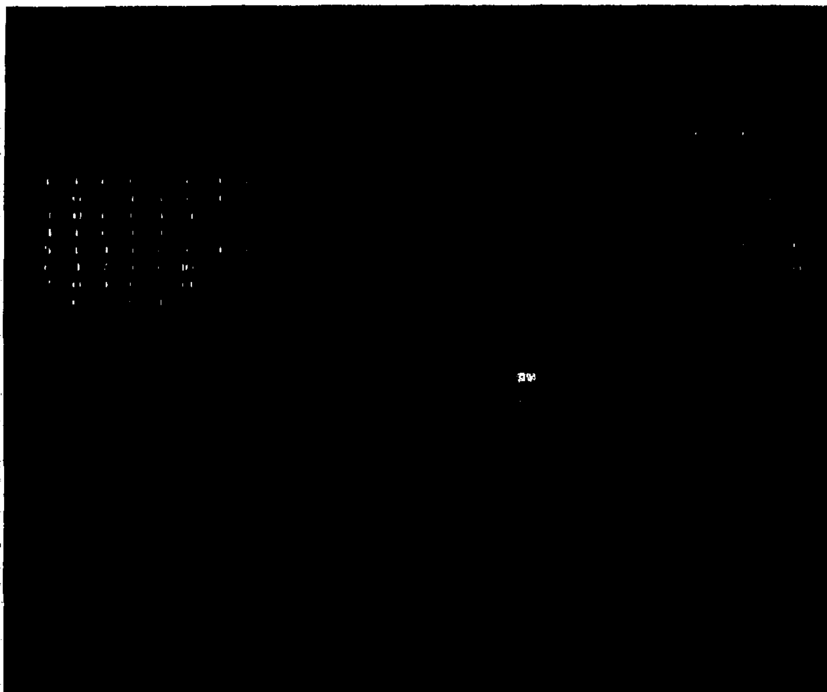


FIGURA 7.23 *Ejemplo 8. Segundo turno para todos los jugadores.*

En el tercer turno del jugador 1, este llega a la meta con su guerrero 7 y con un tiro del dado igual a 3. La figura 7.24, describe el estado del juego después de que el jugador 1 llega a la meta.

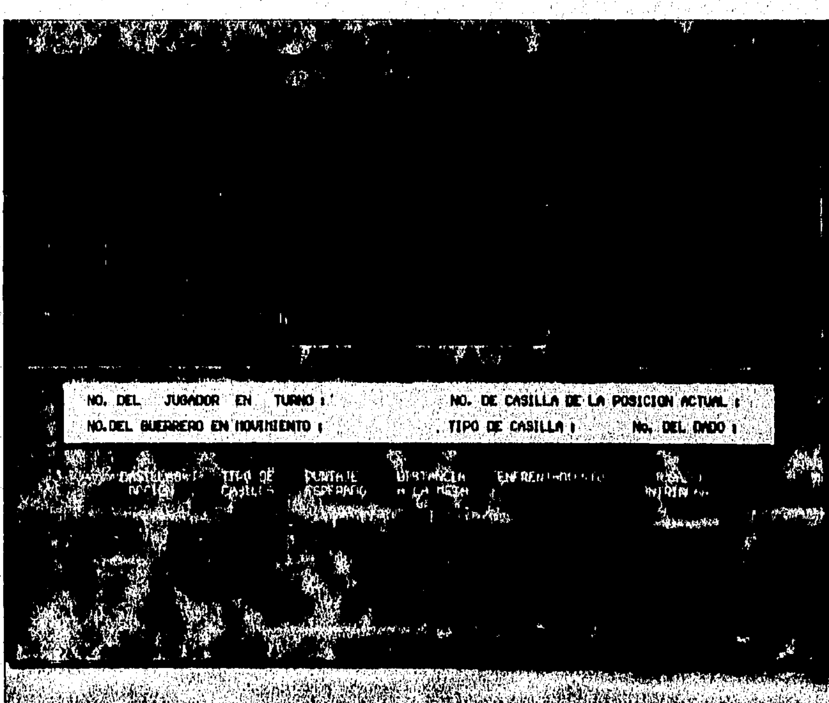


FIGURA 7.24 *Ejemplo 8. Llegada del jugador 1 a la meta.*

A continuación se van a ver las casillas alternativas para el jugador 2 en su tercer turno, de acuerdo con el número del dado obtenido

Las figuras 7.25.a y 7.25.b describen las casillas altenativas para el guerrero 2 y 4 respectivamente, cuando el dado es uno

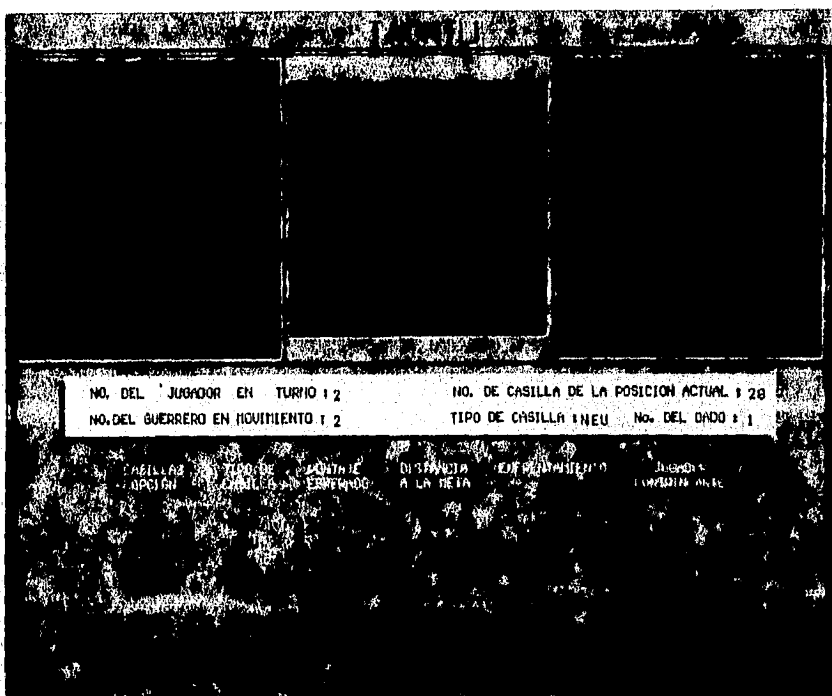


FIGURA 7.25.a *Ejemplo 8. Casillas alternativas para el jugador 2 y su guerrero 2 en su tercer turno con el dado igual a 1.*

En la figura 7.25.a, se ilustra la importancia de ejercitar la memoria, ya que si no se recuerdan las jugadas anteriores, se podría pensar que en la casilla 18, por ser una casilla pantano, se tendría un valor esperado de -1 bajo condiciones de riesgo (perder -2 con una probabilidad de 0.5), pero esto cambia si se recuerda que en alguna otra jugada ya se ha elegido esa casilla y el tablero se tragó la ficha, teniendo entonces, la certeza de que al elegir esa casilla se pierden 2 puntos

Otra observación relevante en esta elección es que, si bien es cierto que en la casilla 29 se tiene una distancia a la meta menor que en la casilla 27, también es cierto que en ambas se tiene una distancia menor a 7 y por tanto, el llegar a la meta en el siguiente turno de este jugador (con este guerrero), depende de su suerte al realizar su tiro, por consiguiente, se recomienda la casilla 27 porque en la 29 se tiene la certeza de perder 1 punto, mientras que en la 27 no se altera el puntaje para este jugador.

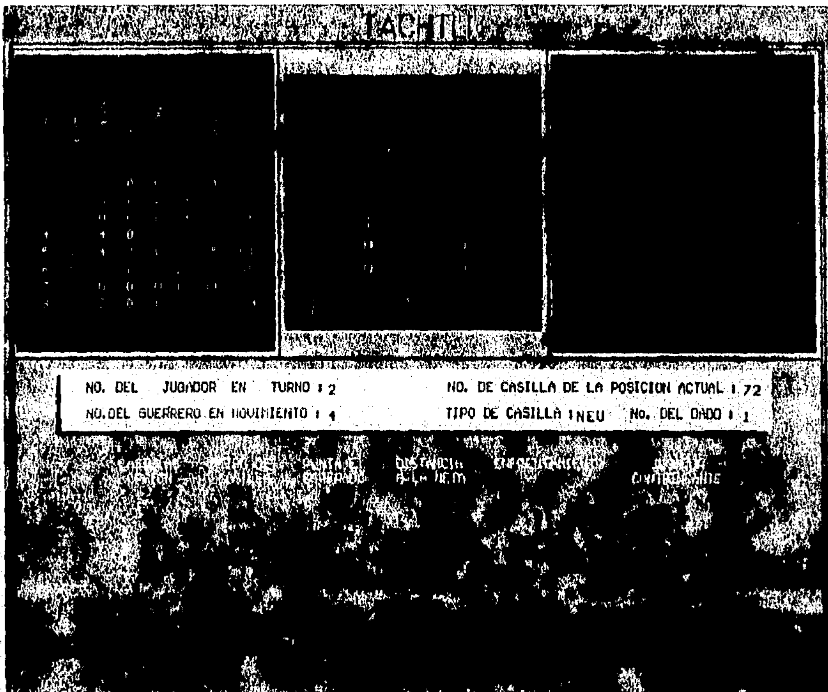


FIGURA 7.25.b *Ejemplo 8. Casillas alternativas para el jugador 2 y su guerrero 4 en su tercer turno con el dado igual a 1.*

En la figura 7.25.b, se aprecia nuevamente lo mencionado en la figura 7.20.a en lo referente a los enfrentamientos con contrincates que no poseen señales y los que sí. En esta figura se ve claramente que es mejor enfrentarse con un jugador con señales que con uno sin ellas. Además de que mejor arriesgarse a conseguir más puntos que decidirse a perder con certeza un punto.

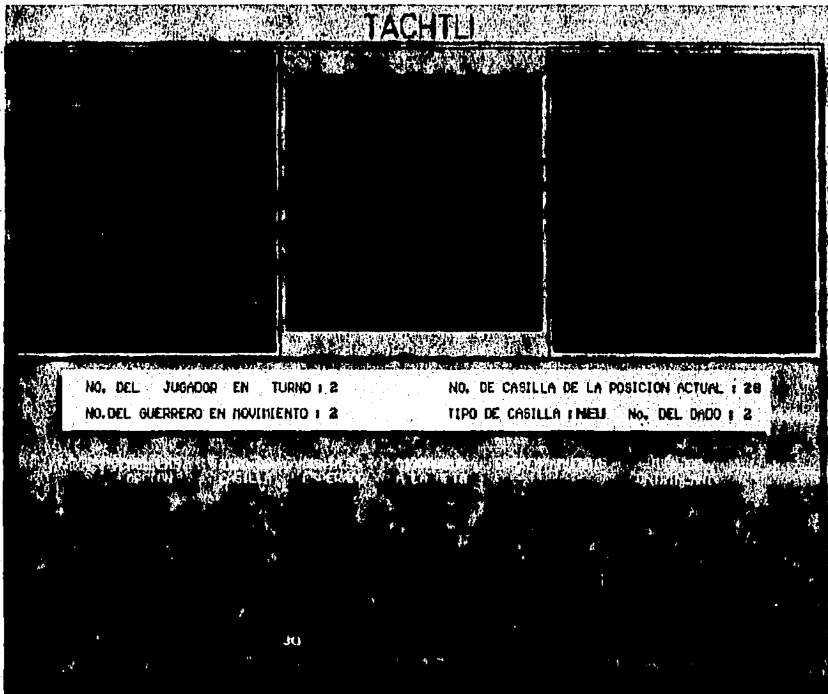


FIGURA 7.26 *Ejemplo 8. Casillas alternativas para el jugador 2 y su guerrero 2 en su tercer turno con el dado igual a 2.*

En esta casilla se ve evidente que una vez elegida casilla pantano sin que el tablero se haya tragado la ficha, se puede tratar a esta como una casilla neutral.

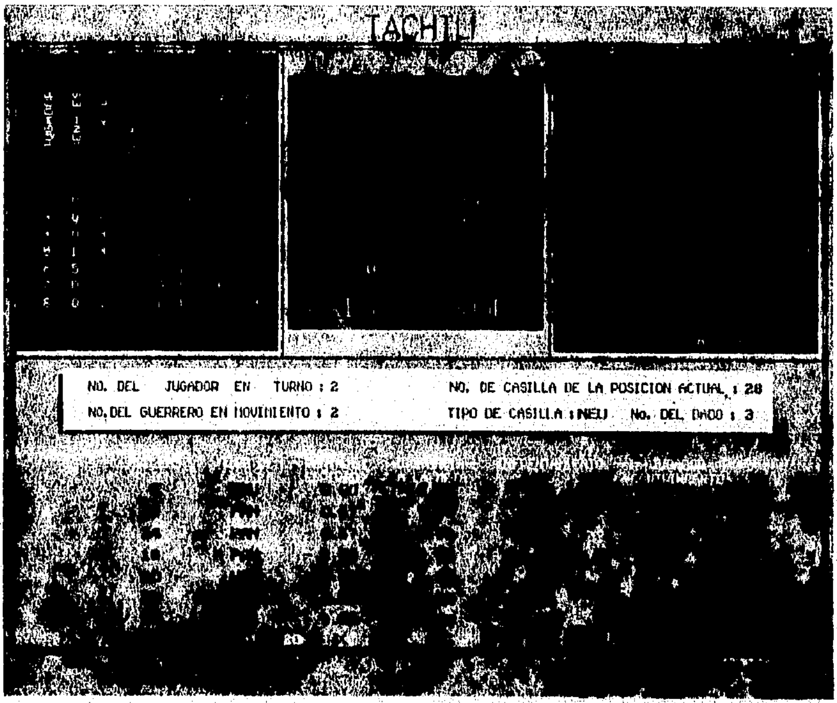


FIGURA 7.27.a *Ejemplo 8. Casillas alterativas para el jugador 2 y su guerrero 2 en su tercer turno con el dado igual a 3.*

De la figura 7.27.a, se puede concluir que es mejor sacrificar un poco de distancia si se tiene la opción de elegir entre una casilla con menor distancia pero con la certeza de perder puntos ante la alternativa de no perder ni ganar puntos, aunque se tenga mayor distancia a la meta; además de que está distancia es menor a 7.

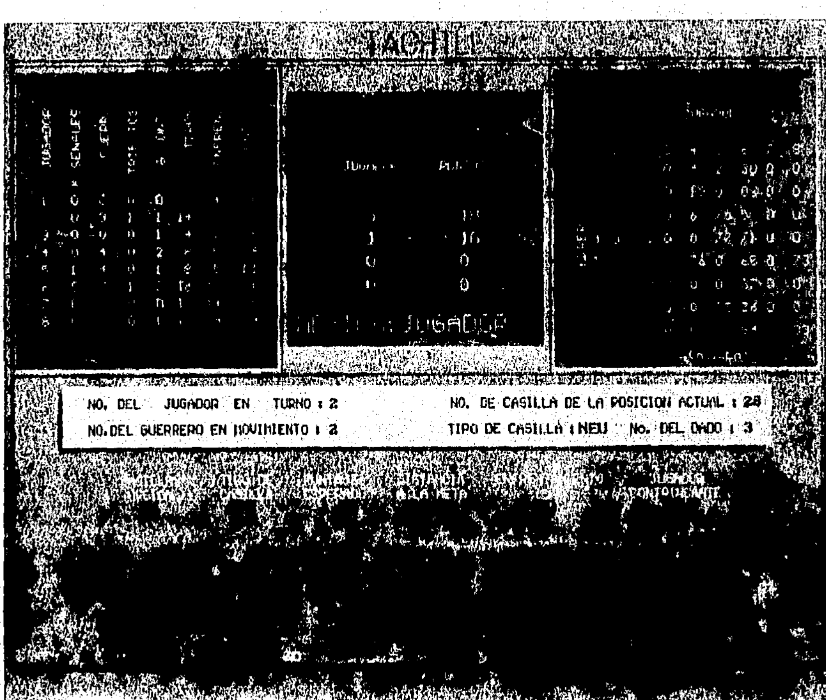


FIGURA 7.27.b *Ejemplo 8. Casillas alterativas para el jugador 2 y su guerrero 2 en su tercer turno con el dado igual a 3 (continuación).*

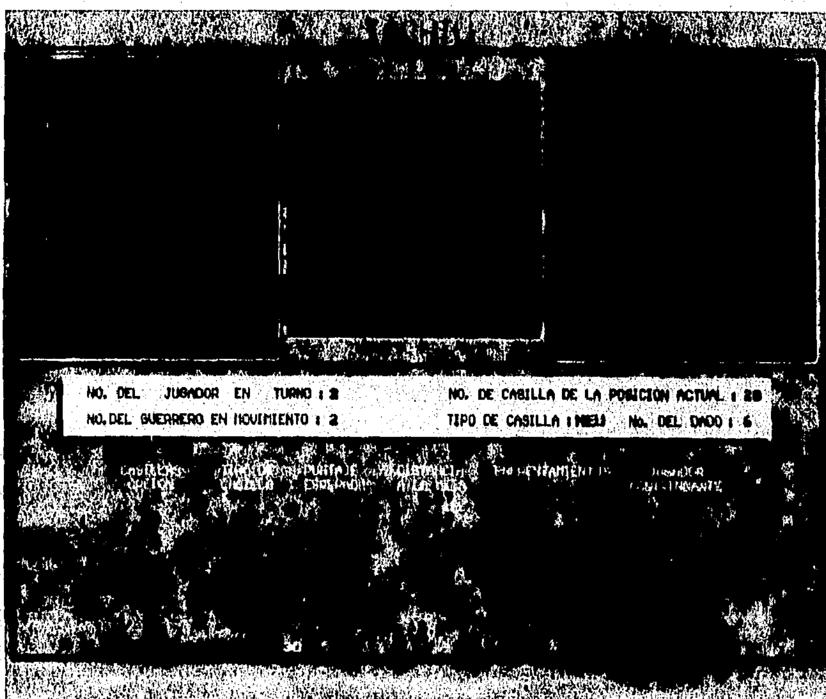


FIGURA 7.28.a *Ejemplo 8. Casillas alternativas para el jugador 2 y su guerrero 2 en su tercer turno con el dado igual a 6.*

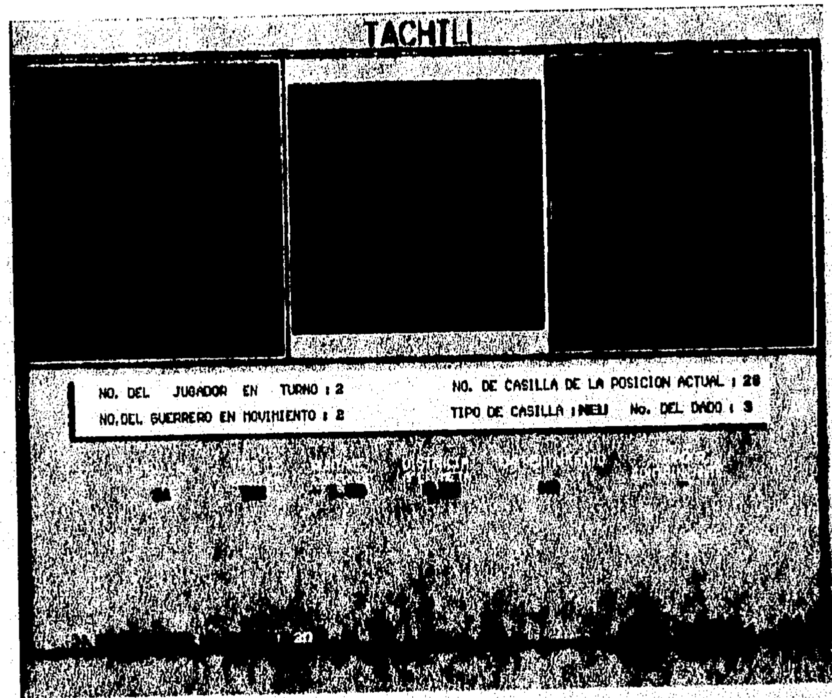


FIGURA 7.28.b *Ejemplo 8. Casillas alternativas para el jugador 2 y su guerrero 2 en su tercer turno con el dado igual a 6 (continuación).*

En general, cuando el jugador contrincante no tenga señales y el jugador en turno sí, al jugador en turno no le conviene el enfrentamiento, si es por el contrario, entonces al jugador en turno le conviene arriesgarse, si ninguno de los dos tiene señales, el valor esperado para el jugdor en turno de ese enfrentamiento es -0.25 puntos.

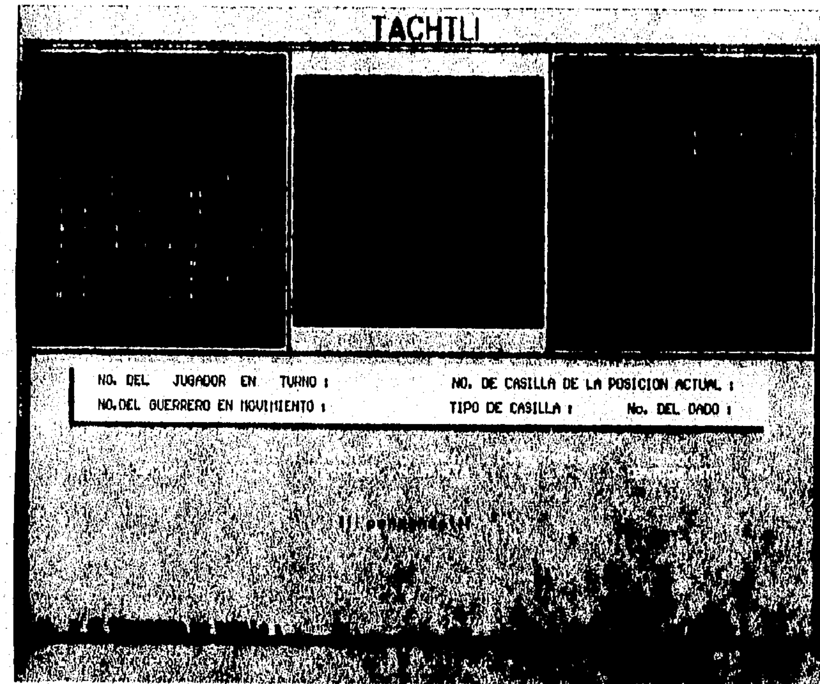


FIGURA 7.29 *Ejemplo 8. Casillas alterativas para el jugador 2 y su guerrero 2 en su tercer turno con el dado igual a 5, el jugador 2 llega a la meta.*

Con el número del dado igual a 5, el jugador 2 con su guerrero 2 llega a la meta. Supóngase que el número del dado para este jugador es 5, entonces hasta este momento son 3 los jugadores que han llegado a la meta.

Obsérvese que el jugador con mayor puntaje es el 6 con 30 puntos. A continuación se van a ver dos "juegos" diferentes para el jugador 4. En el primero, el jugador tiene la suerte de que el dado es 6 y llega a la meta con su quinto guerrero (figuras 7.30.a, 7.30.b, 7.30.c, 7.31.a, 7.31.b, 7.31.c, 7.32.a, y 7.32.b). En el segundo, el dado es igual a y por tanto, se continúa jugando con el jugador a 5 y éste obtiene un haciendo que se continúe jugando con el jugador 6 quien tiene la suerte de que el dado sea un ganando el juego con su guerrero, y como es el jugador con el mayor puntaje al llegar a la meta, gana el juego (figura 7.33). Este ejemplo sirve para ilustrar y comprobar una vez más que la suerte es tan importante como la decisión de los jugadores para ser el MEXICA.

Las figuras 7.30.a, 7.30.b y 7.30.c describen las casillas altrernativas para el jugador 4 con su primer guerrero.

Siempre que se tengan la oportunidad de cambiar guerreros contrarios por tributos, es aconsejable efectuar el cambio. Además, se debe tener muy presente la estrategia que consiste en verificar si con algún guerrero se puede llegar a la meta pero antes es posible aumentar el puntaje obteniendo tributos.

Otra observación interesante, que ya antes se había mencionado es que, el jugador puede usar su ingenio para formar el conjunto de casillas alternativas, por ejemplo, en este caso, la distancia de la casilla 4 a la casilla 2 es de 2, sin embargo si el jugador se detiene un poco más en el análisis de las distancia notará que también existe una distancia de 6 desde la casilla 4 a la 2 (este camino es: de la casilla 4 a la 20, de la 20 a la 19, de la 19 a la 18, de la 18 a la 17, de la 17 a la 1 y finalmente de la 1 a la 2). Evidentemente mientras más casillas alternativas se tengan el jugador puede formarse un mejor criterio para su elección.

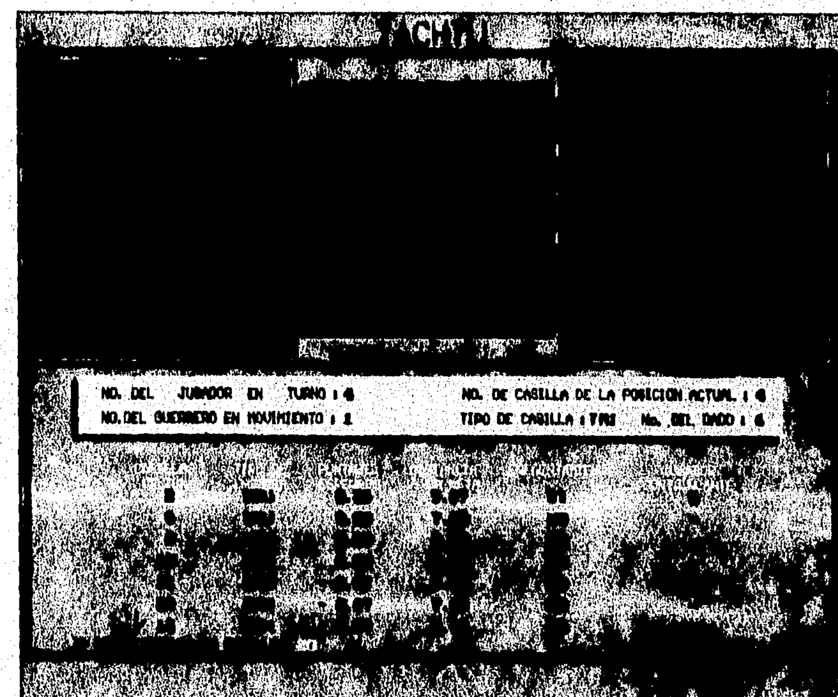


FIGURA 7.30.a *Ejemplo 8. Casillas alterativas para el jugador 4 y su guerrero 1 en su tercer turno con el dado igual a 6.*

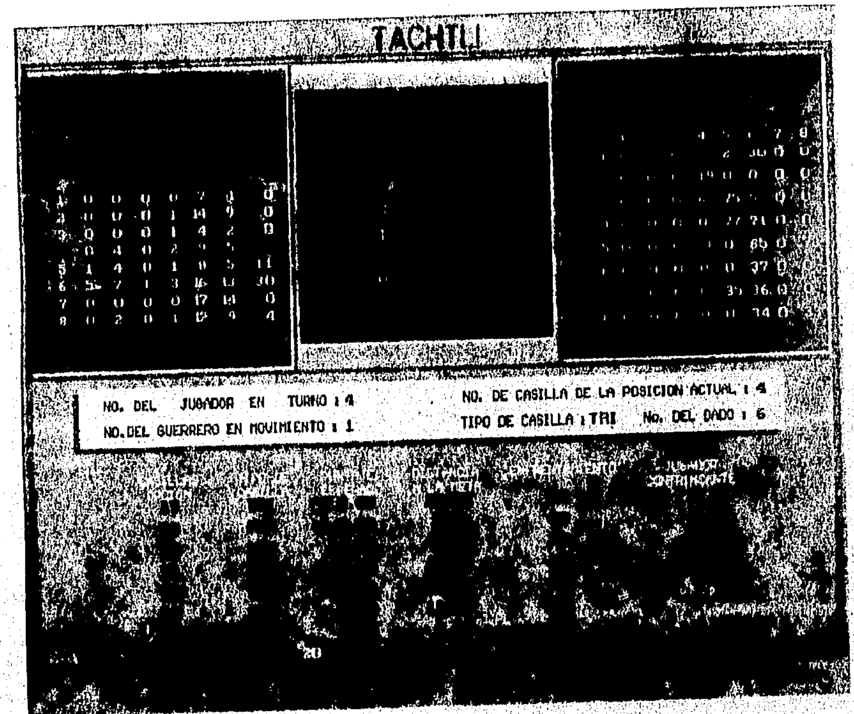


FIGURA 7.30.b *Ejemplo 8. Casillas alterativas para el jugador 4 y su guerrero 1 en su tercer turno con el dado igual a 6 (continuación).*

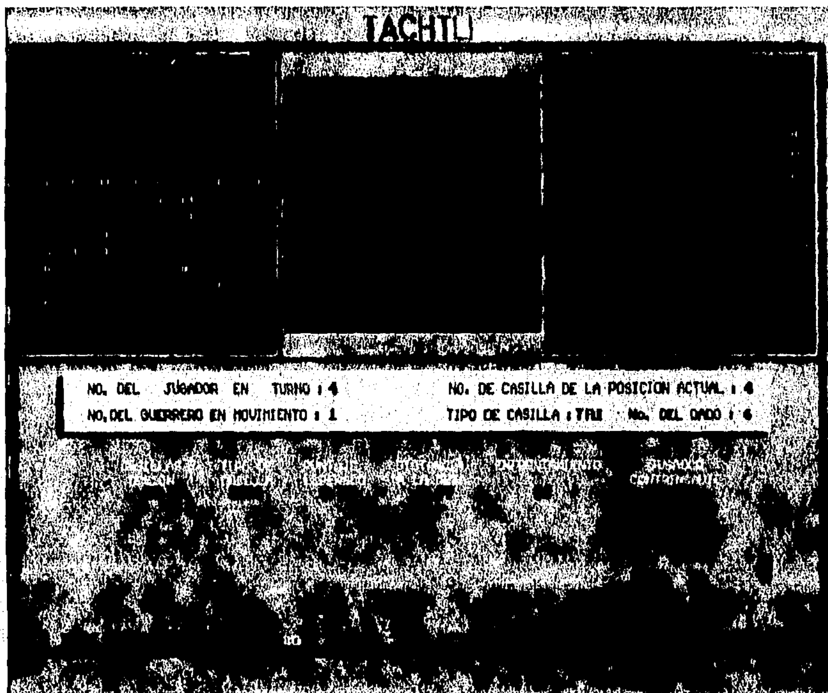


FIGURA 7.30.c *Ejemplo 8. Casillas alterativas para el jugador 4 y su guerrero 1 en su tercer turno con el dado igual a 6 (continuación).*

Las figuras 7.31.a, 7.31.b y 7.31.c reafirman la observación anterior además de que también enfatizan que es más recomendable arriesgarse a obtener más puntos que decidirse a perder puntos con certeza.

Sin embargo, el resultado de la decisión al elegir una casilla alternativa con enfrentamiento, no siempre es el más favorarable par el jugador en turno, pero ese es el riesgo que se corre. Para este ejemplo, el jugador en turno tuvo la mala suerte de perder su ficha contra el jugador 6, pero bueno, el juego sigue y hay que seguir observando qué es lo que sucede.

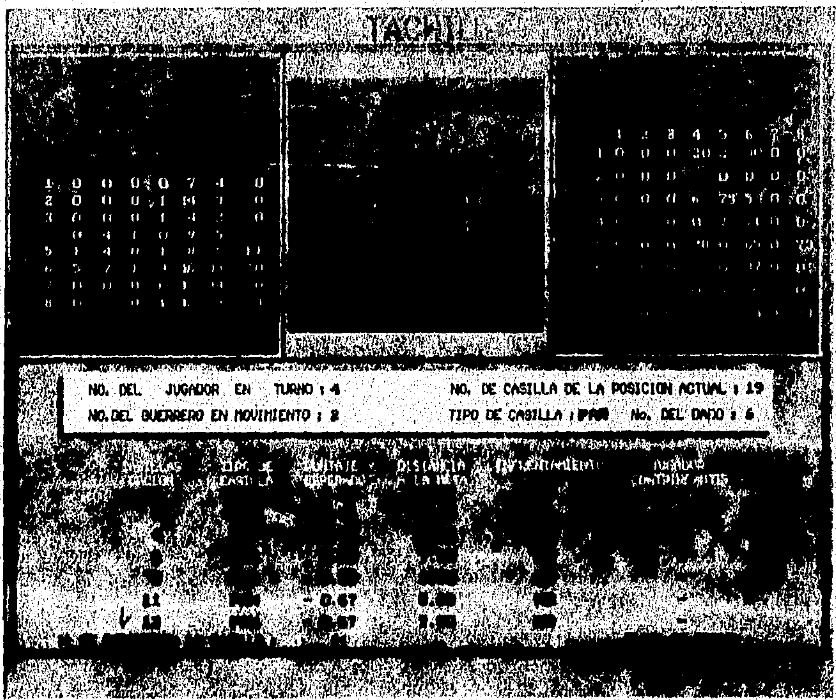


FIGURA 7.31.a *Ejemplo 8. Casillas alterativas para el jugador 4 y su guerrero 2 en su tercer turno con el dado igual a 6.*

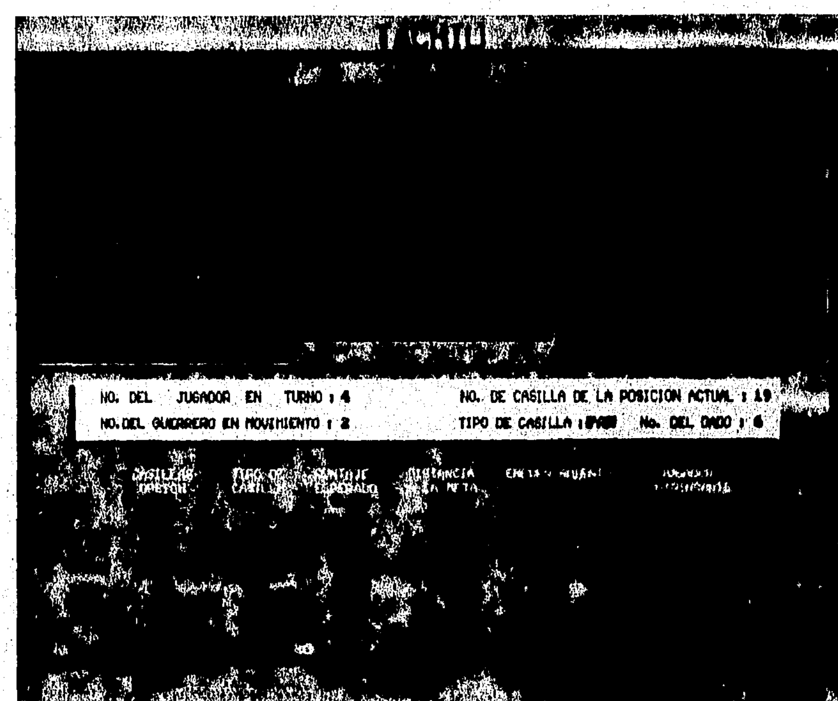


FIGURA 7.31.b *Ejemplo 8. Casillas alterativas para el jugador 4 y su guerrero 2 en su tercer turno con el dado igual a 6 (continuación).*

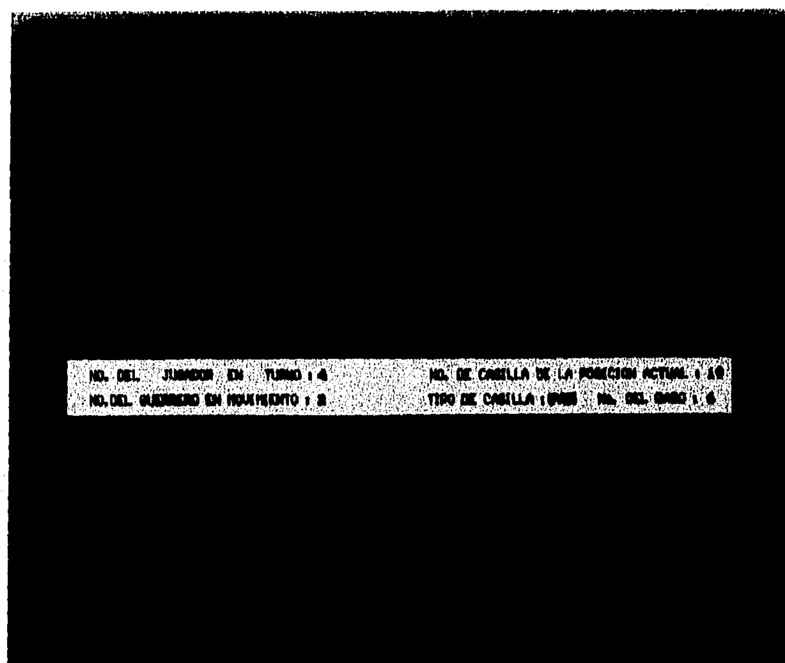


FIGURA 7.31.c *Ejemplo 8. Casillas alternativas para el jugador 4 y su guerrero 2 en su tercer turno con el dado igual a 6 (continuación).*

Al continuar con el juego, el jugador 4 con su guerrero 5 llega a la meta. La situación del juego antes de que acabe el juego es la que se ve en la figura 7.32.a, aquí se observa que el jugador 6 es el que tiene el mayor puntaje, sin embargo, la suerte no le favoreció y quedó fuera del grupo de los cuatro jugadores que pueden pasar a la siguiente etapa.

La figura 7.32.b, expresa la situación de los jugadores al finalizar el juego (en la primer etapa), situación para la cual sólo importan las fichas con las que llegaron los primeros cuatro jugadores a la meta.

En este "juego", el resultado final es: Mexica con 1 señal, "7"guerreros (realmente 8) y 1 tributo, con un total de 18 puntos; Triple Alianza (jugadores 1, 2 y 4) con 2 señales, 12 guerreros y 3 tributos. Este es un buen resultado para continuar con la siguiente etapa del juego.

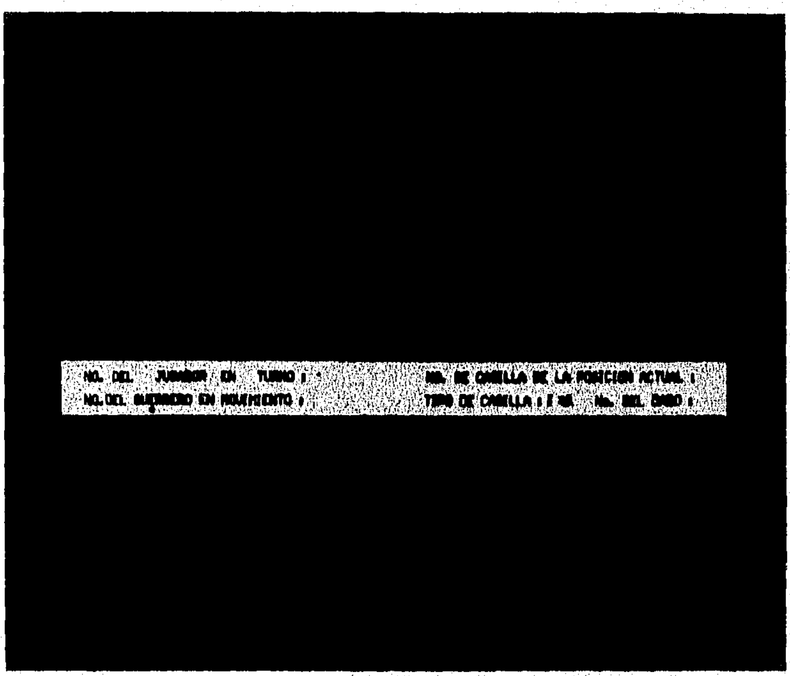


FIGURA 7.32.a *Ejemplo 8. Situación del juego antes de que lleguen los 4 jugdores ganadores a la meta.*

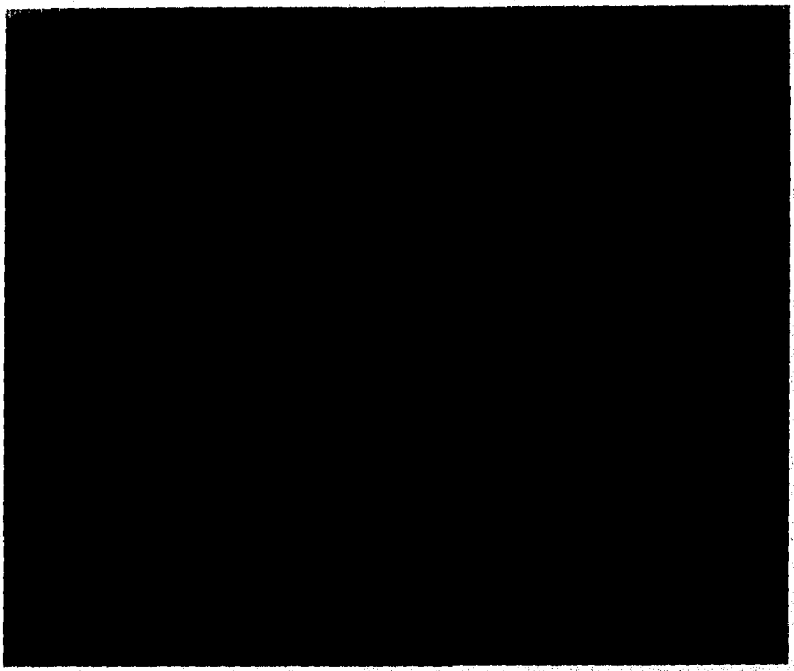


FIGURA 7.32.b *Ejemplo 8. Fin del juego, el jugador 4 es el cuarto en llegar a la meta.*

Otro "juego" es donde el jugador 4 obtiene un 3 y por consiguiente no logra llegar a la meta en este turno. Si el jugador 5 tiene un 1 para mover a sus guerreros, y el jugador 6 tiene la suerte de obtener un 4 en su tiro, entonces si de la casilla 30 se mueve a la 20 y cangea sus guerreros contrarios por tributos aumentando su puntaje a 31 puntos y posteriormente llega a la meta con su cuarto guerrero, este jugador gana el juego con 5 señales, 7 guerreros y 2 tributos y la Triple Alianza queda formada por los jugadores 1, 2, y 3 obteniendo finalmente un puntaje de 41 puntos, con 2 señales, 16 guerreros y 3 tributos.

Una última conclusión importante que se generaliza para todos los "juegos" es que no importa el orden de salida de los jugadores para que puedan llegar a la meta y ser el MEXICA, más bien, esto depende de las decisiones de los jugadores así como de su suerte.

FIGURA 7.33 *Ejemplo 8. Fin del juego, el jugador 6 es el cuarto en llegar a la meta.*

ANÁLISIS DE DECISIONES.

En resumen, no importa el orden de salida de los jugadores, para que puedan llegar a ser el MEXICA, ya que ésto está en función de las decisiones de los jugadores y de su suerte. Con lo que respecta a las decisiones que los jugadores realizan a través del juego, es decir, a la elección de una casilla alternativa para mover a un determinado guerrero, se debe recalcar que si bien es cierto que el resultado de esta decisión depende un tanto de la suerte del jugador, también es cierto que el jugador puede elegir su mejor opción.

La eleción de una casilla no se puede determinar en forma aislada, se tiene que observar la situación que guarda el juego en el momento de la elección. Es por ello que la información a la que tiene acceso un jugador juega un papel muy importante. Este juego, como anteriormente se ha mencionado es un juego de información perfecta.

Con base al medelo planteado en el capítulo 5, se distinguen ocho posibles situaciones diferentes de las casillas alternativas y estas son:

- Casillas neutrales, casillas de zonas de pantano y casillas de hechicero con enfrentamiento. Con la restricción en las casillas hechicero, de que el jugador en turno no posea los guerreros suficientes para poder cambiarlos por tributos.
- Casillas tributo con enfrentamiento.
- Casillas hechicero con enfrentamiento. Con la restricción de que el jugador sí pueda cambiar guerreros contrarios por tributos.
- Casillas neutrales sin enfrentamiento.
- Casillas pantano o zona de pantano sin enfrentamiento.
- Casillas tributo sin enfrentamiento.
- Casillas hechicero sin enfrentamiento.
- Casillas meta.

En forma general, se tiene que en el primer caso, es recomendable elegir una casilla de algunos de estos tipos siempre y cuando el jugador en turno no posea señales mientras que su contrincante sí; de otro modo, si ambos poseen señales, el jugador en turno perdería 5 puntos con una probabilidad de 1/6 o ganaría 3 puntos y un guerrero contrario con igual probabilidad, además de que si ninguno de los dos posee señales, el jugador en turno puede perder 2 puntos con una probabilidad de 1/6 o bien ganar un guerrero contrario con esa misma probabilidad, otro caso específico es cuando el jugador contrincante no tiene señales y el jugador en turno sí, en esta situación al jugador en turno no le conviene enfrentarse, ya que podría perder 5 puntos con una probabilidad de 1/6 o bien ganar un guerrero contrario con probabilidad de 1/6.

En lo que respecta a las casillas de tributo con enfrentamiento, se tiene que además de las posibilidades expuestas en el párrafo anterior, en todos esos casos se perdería con certeza un punto, entonces, si se presentara la situación de elegir una casilla de tributo con enfrentamiento ante la alternativa de elegir alguna casilla del caso 1, se preferirá elegir alguna de éstas últimas. Pero debe tenerse en cuanta que si el jugador en turno no tiene tributos con certeza pierde dos puntos, mientras que en las casillas del caso uno puede perder más de dos.

En las casillas tributo siempre se perderá por lo menos un punto, de manera que si el jugador tiene la oportunidad de no elegirlas, es recomendable evitar su elección.

Siempre será mejor elegir una casilla hechicero sin enfrentamiento cuando el jugador pueda cambiar guerreros contrarios por tributos, ante las alternativas de elegir una casilla tributo con o sin enfrentamiento, elegir una casilla de cualquier zona de pantano con o sin enfrentamiento, elegir una casilla neutral con o sin enfrentamiento, e incluso elegir la casilla meta cuando existe la posibilidad de llegar a ella con otro guerrero.

Cuando se tiene la opción de elegir una casilla hechicero con enfrentamiento y el jugador en turno puede cambiar guerreros contrarios por tributos, el puntaje esperado es igual al del caso 1 más la cantidad de tributos que se puedan cambiar. Por consiguiente, cuando se presente la oportunidad de elegir entre una casilla de este caso y una del caso 1, es mejor opción elegir una casilla hechicero con enfrentamiento.

Las casillas hechicero sin enfrentamiento cuando el jugador no pueda cangear guerreros contrarios por tributos, se comportan como las casillas neutrales sin enfrentamiento, estas casillas son recomendables para un jugador al inicio del juego, porque aún no se pueden presentar enfrentamientos, y no han sido elegidas las casillas de las zonas de pantano para saber cuales son las que se tragan la fichas y cuales no, además de que el jugador no cuenta con guerreros contrarios que cangear. Estas casillas también se recomiendan a jugadores conservadores, ya que no se corre peligro de perder puntaje.

Al principio del juego, los jugadores no saben cuales casillas de las zonas pantanosas se tragan las fichas. Si este fuera el caso y se tuviera que elegir entre alguna casilla de la séptima zona pantanosa y alguna de las zonas 8 o 9, se recomienda elegir alguna de la zona 7; y si esta elección se tuviera que realizar con alguna casilla de las zonas 8 o 9 ante una de las seis primeras, se deberá elegir una de las zonas 8 o 9. A medida que avanza el curso del juego, es posible que el jugador se de cuenta de cuales casillas son las que se tragan las fichas, entonces el jugador debe evitarlas; y a las casillas que no se traguen fichas las podrá analizar como si se tratase de casillas neutrales con o sin enfrentamiento según sea el caso.

Antes de elegir la casilla meta, el jugador debe verificar que ninguna de sus fichas puedan entrar a una casilla hechicero.

También debe tenerse en cuenta la distancia a la meta de cada una de las casillas alternativas. Aquí se tienen 6 casos:

❶ Casillas neutrales, de zonas de pantano o hechicero con enfrentamiento.
❷ Casillas tributo con enfrentamiento.
❸ Casillas neutrales o hechicero sin enfrentamiento.
❹ Casillas pantano o zona de pantano sin enfrentamiento.
❺ Casillas tributo sin enfrentamiento.
❻ Casilla meta.

Para el caso 1, el valor esperado de la distancia es de 1/6 de perder la ficha (en el sistema se denota a esta posibilidad con 15), más 1/3 de poder mover al guerrero un casilla (ganar una casilla), más ½ de la distancia de la casilla alternativa a la meta.

Las casillas tributo con enfrentamiento se comportan igual que las de el caso 1 si el jugador en turno sí tiene tributos, de lo contrario con certeza el guerrero se eliminará del juego, esto también ocurre para las casillas tributo sin enfrentamiento.

En el caso de las casillas del caso 3, y 5 con más de cero tributos, la distancia esperada a la meta es igual a la distancia real a la meta de esa casilla alternativa.

La distancia esperada de una casilla de alguna de las zonas pantanosas, depende de la probabilidad que hasta ese momento del juego tenga esa casilla de tragarse la ficha, más la probabilidad de permanecer en dicha casilla (multiplicada por supuesto por esa distancia).

Obviamente, la distancia a la meta de la casilla meta es cero.

La distancia a la meta es importante porque en determinado momento un jugador puede saber cuantos turnos mínimos necesita para llegar a la meta. Esto es, si una casilla tiene una distancia mayor a 6, el jugador necesita realizar como mínimo más de dos turnos para llegar a la meta, porque como máximo puede obtener un 6 en el dado y moverse 6 casillas. Pero si la casilla alternativa se encuentra a una distancia a la meta menor a 7, sólo necesitará realizar como mínimo un turno más para llegar a la meta con el guerrero en movimento. Es por esto que, el saber la distancia a la meta de una casilla alternativa ayuda a decidir al jugador hacia qué casilla moverse. En el sistema, cuando se tienen más de una casilla con igual puntaje óptimo, se recomienda aquella que minimiza la distancia a la meta.

Una observación importante, es que el jugador, si observa detenidamente el tablero, puede darse cuenta de que pueden existen un gran número de casillas alternativas para el número del dado obtenido en su lanzamiento, es decir, existen varias casillas con un camino de longitud *n* (número del dado) que en ocasiones pueden pasar desapercibidas por el jugador haciendo que realmente no analice correctamente las casillas alternativas para hacer su elección. En muchas situaciones existen casillas en donde se pierde menos puntaje que en otra teniendo la misma distancia a la meta, pero que el jugador no las toma en cuenta porque no se percata de su existencia.

Es de recalcar que la única manera de incrementar el número de señales y de tributos de un jugador es enfrentándose con otro.

Un comentario final es el siguiente: todas las fichas juegan un papel muy importante dentro del desarrollo de todo el juego y su función no es independiente, por ejemplo, para obtener tributos en la primer etapa, se necesitan obtener guerreros contrarios; los tributos en la segunda etapa pueden salvar a un guerrero de la "muerte". Entre más señales tenga un jugador en la primer etapa mayor posibilidad tendrá de ser el Mexica, y la única forma de obtener señales es arriesgando un guerrero e incluso su misma señal; las señales en la segunda etapa son importantes para el MEXICA y para la TRIPLE ALIANZA, ya que el MEXICA deberá ganar todas las señales de la TRIPLE ALIANZA. Los guerreros son las fichas con las que los jugadores llegan a la meta en la primer etapa y a mayor número de éstos para un jugador, mayor el número de posibilidades de llegar a la meta (si no llega con un guerrero, lo puede hacer con otro); en la segunda etapa los guerreros del MEXICA son 8 de entrada, pero en el momento que la TRIPLE ALIANZA logre eliminar a todos ellos, ganará el juego.

Un comentario adicional, es el referente a las probabilidades en la aplicación de las reglas para los enfrentamientos, con 1/6 se puede perder a un guerrero, con igual probabilidad el contrincante pierde a su guerrero, con 1/3 no pasa nada y con 1/3 se puede mover la ficha, si la probabilidad de perder a las fichas de guerrero aumentara, aumentaría también la probabilidad de llegar con menos guerreros a la meta y como se quiere que el número de guerreros que pasen a la siguiente etapa no sea tan pequeño (porque de ser así, en el caso de la Tripla Alianza, ésta ya no tendría la posibilidad de participar en la siguiente etapa y se daría por terminado el juego), entonces se concluye que estas probabilidades en los enfrentamientos son las adecuadas.

7.2 REGLAS FINALES DEL JUEGO.

El presente juego está inspirado en la cultura azteca, sin intentar representar la historia tal cual.

OBJETIVO:

El objetivo del juego es llegar a ser el jugador denominado el MEXICA y ganar la batalla contra la TRIPLE ALIANZA (formada por 1 o 3 jugadores).

NÚMERO DE JUGADORES.

En este juego pueden participar de 2 a 8 jugadores. Cada jugador representa una de las tribus peregrinas de Aztlán.

ELEMENTOS DEL JUEGO.

El juego consta de un tablero, un dado y 124 fichas.

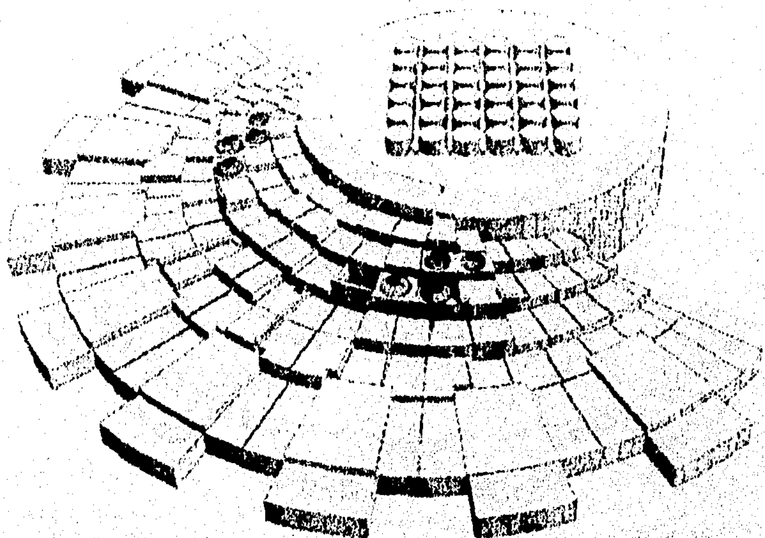
TIPO DE FICHAS.

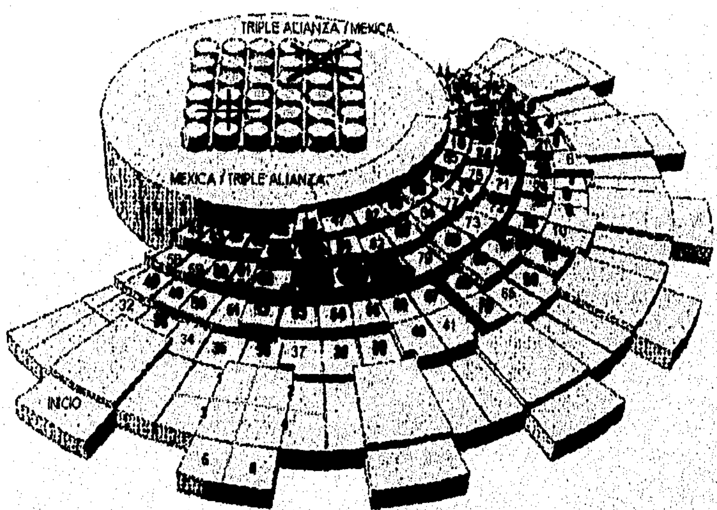
Se tienen 3 tipos de fichas, cada una con diferente valor, estas son:

FICHA	VALOR
Tributo	1 punto.
Guerrero	2 puntos.
Señal	3 puntos.

EL TABLERO.

El tablero del juego es el siguiente:





CASILLA TRIBUTO.
CASILLA HECHICERO.
CASILLA NEUTRAL.

CASILLA DE LA ZONA DE PANTANO
MOVIMIENTO DIAGONAL.
MOVIMIENTO VERTICAL / HORIZONTAL.

CASILLA INICIO.
CASILLA PANTANO.
CASILLA META.

ETAPAS DEL JUEGO.

El juego consta de 2 etapas y un inicio. El Objetivo del inicio es determinar al jugador que dará inicio al juego y llevar a cabo la distribución inicial de las fichas. El objetivo de la primer etapa es hacer un filtro de jugadores para denominar al MEXICA y formar la TRIPLE ALIANZA. El objetivo de la segunda etapa es determinar al ganador del juego.

INICIO DEL JUEGO.

Antes de dar inicio al juego, el tablero se agita.

TURNO DE LOS JUGADORES.

El tablero tiene 8 inicios, de menera que a cada jugador le corresponde uno. La elección de los inicios es libre.

Cada jugador tira del dado dos veces, el que obtenga el mayor puntaje es el jugador que dará inicio al juego. (En caso de empate se repite esta regla). El turno de los jugadores es en sentido contrario a las manecillas del reloj.

DISTRIBUCIÓN INICIAL DE LAS FICHAS EN LOS JUGADORES.

A cada jugador le corresponde de entrada una señal y 8 guerreros del mismo color. La distribución de los tributos se lleva a cabo de la siguiente forma:

Cada jugador esconde 3 tributos en su correspondiente inicio. La forma de esconderlos es libre, pero teniendo presente que en las casillas del 1 al 4 se pueden esconder máximo 2 tributos por casilla, mientras que en las 2 restantes sólo se puede esconder a lo más un tributo por casilla. Una vez escondidos los tributos, cada jugador (de acuerdo a su turno) lanza el dado 3 veces, de manera que se verifica si el número del dado corresponde a una casilla que contenga tributos, de ser así, el jugador habrá obtenido tantos tributos como tributos se localicen en esa casilla.

DISTRIBUCIÓN INICIAL DE LAS FICHAS EN EL TABLERO.

Todos los jugadores colocan una ficha de guerrero en cada uno de los inicios.

PRIMER ETAPA DEL JUEGO.

AVANCE DE LAS FICHAS DE GUERRERO.

Para avanzar las fichas de guerrero, el jugador en turno lanza el dado y mueve a todos sus guerreros el número de casillas indicado por el dado. La primer casilla por avanzar es la casilla inicio correspondiente a cada inicio (ver figura 7.2). Los guerreros se pueden mover en cualquier dirección pero sin pasar más de una vez por la misma casilla (escepto en la casilla meta).

No puede haber más de dos guerreros en una misma casilla. Si por algún motivo no se tiene ninguna casilla por elegir y además es el primer movimiento del guerrero, entonces el jugador en turno pierde a ese guerrero. Otro caso que se puede presentar, es cuando un guerrero no tenga casillas alternativas y no sea su primer movimiento, en este caso, el guerrero perderá su turno únicamente.

ENFRENTAMIENTO.

Cuando el jugador en turno desee mover a su guerrero hacia una casilla donde se encuentra situado un gurrero de un jugador distinto a él, entonces se dice que se produce un enfrentamiento. Dicho enfrentamiento consiste en lo siguiente: El jugador en turno lanza el dado, y de acuerdo con el número obtenido se procede a:

No. Del Dado	Acción
1 o 3	Moverse una casilla.
2 o 4	Se queda ahí el guerrero del jugador en turno.
5	Muere el guerrero del jugador contrario.
6	Muere el guerrero del jugador en turno.

Por el término "muere", se debe entender que el guerrero se entrega al jugador contrincante, además de una señal -si posee alguna-.

TIPO DE CASILLAS.

En el tablero se distinguen 7 tipos de casillas:

1. Casillas inicio.
2. Casillas neutrales.
3. Casillas meta.
4. Casillas hechicero.
5. Casillas tributo.
6. Casillas zona de pantano.
7. Casillas pantano.

En las casillas hechicero, el jugador en turno cambia (si tiene) dos guerreros obtenidos en enfrentamiento por un tributo.

En las casillas tributo, el jugador en turno pierde una ficha de tributo, de no poseer alguna, pierde a su ficha de guerrero.

Si un enfrentamiento se produce en una casilla de hechicero o de tributo, el jugador en turno, primero debe cumplir con las reglas de estas casillas y posteriormente procede a realizar el enfrentamiento.

El las casillas zona de pantano, existe el riesgo de que el jugador pierda su ficha de guerrero. Mientras que en las casillas pantano es seguro que el tablero se trage al guerrero. No se sabe cuales de las casillas de alguna zona de pantano son realmente casillas pantano hasta el momento que el tablero se traga la ficha.

Las casillas inicio son las casillas que son la primer casilla por avanzar.

Las casillas neutrales son las que no son ni casillas hechicero, ni tributo, ni zona de pantano, ni pantano, ni meta. En este tipo de casillas, lo que puede suceder es que se efectúen enfrentamientos, o únicamente se avance o retroceda cierto número de casillas para llegar a alguna de las casillas meta.

Al llegar un guerrero a alguna de las casillas meta, el jugador en turno termina la primer etapa del juego.

LLEGADA A LA META Y FIN DE LA PRIMER ETAPA.

Cuando un guerrero del jugador en turno llaga a alguna de las casillas meta, pasa a formar parte de los jugadores que pasan a la siguiente etapa.

La primer etapa termina con la llegada a la meta de los primeros cuatro jugadores, si son cuatro o más jugadores iniciales y el número de jugadores no *descalificados* del juego (un jugador participa en el juego si al menos puede mover a un guerrero), es mayor o igual a cuatro. Si son más de cuatro los jugadores iniciales, pero menos de cuatro los jugadores no descalificados, entonces esta etapa termina cuando todos los jugdores lleguen a la meta.

Si son dos o tres jugadores iniciales y son dos o tres los jugdores no descalificados, la primer etapa termina con la llegada de todos los jugadores a la meta. Si únicamente existe un jugador no descalificado, entonces éste es el ganador absoluto del juego.

Una vez llegados los jugadores pertinentes a la meta, se procede a realizar un conteo de las fichas de los jugadores ganadores. Dicho conteo se lleba a cabo con los valores de las fichas indicados anteriormente. Cabe señalar, que para este conteo cuentan los guerreros "vivos" de cada jugador y no los guerreros obtenidos en enfrentamientos.

Al jugador con mayor puntaje, se le denomina el MEXICA, y el resto de los jugadores forman la TRIPLE ALIANZA. En caso de empate en la denominación del MEXICA, se toma en cuenta el orden de llegada de los jugadores empatados con el mayor puntaje y el MEXICA resulta ser el primero en haber llegado a la meta.

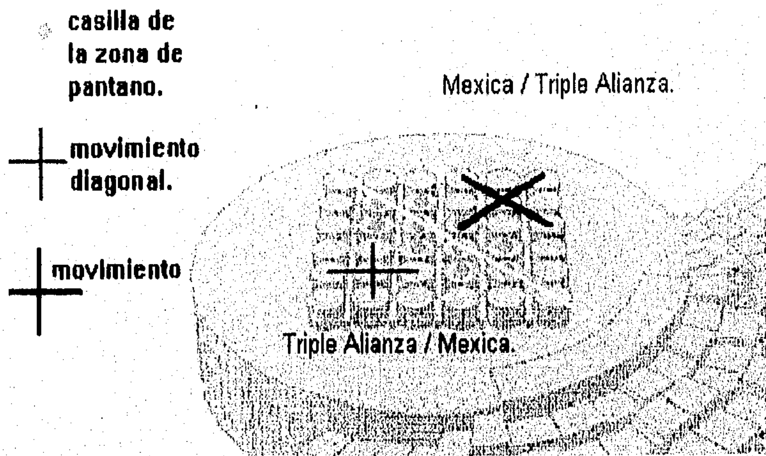
Al MEXICA, se le entregan sus ocho guerreros para poder dar inicio a la siguiente etapa. Las fichas de la Triple Alianza, son los guerreros "vivos" de cada jugador que la forma, así como sus tributos y señales.

SEGUNDA ETAPA DEL JUEGO.

OBJETIVOS PARA LOS PARTICIPANTES DE LA SEGUNDA ETAPA.

En esta etapa, ambos jugadores (MEXICA y TRIPLE ALIANZA), tienen objetivos diferentes. El objetivo del MEXICA es obtener todas las señales con las que llegó a esta etapa la TRIPLE ALIANZA. El objetivo de la TRIPLE ALIANZA es obtener todos los guerreros del MEXICA. Y a su vez, cada jugador desea impedir que el contrincante logre su objetivo.

EL TABLERO DE LA SEGUNDA ETAPA.



LA DISTRIBUCIÓN INICIAL DE LAS FICHAS EN EL TABLERO.

La elección de las zonas para la distribución inicial de las fichas es libre.

Ambos jugadores distribuye sus fichas de guerrero en forma libre sobre la zona elegida, de manera que haya a lo más un guerrero por casilla.

La TRIPLE ALIANZA coloca sus señales sobre los guerreros, de tal forma que en una casilla haya a lo más una ficha de guerrero y una ficha de señal.

Si la Triple Alianza llega a esta etapa con más de quince guerreros, por cada dos guerreros más, se le da una señal -si existen-; si ya no hubiese señales, se le da un tributo por cada guerrero.

TURNO DE LOS JUGADORES.

Para jugador que da inicio a esta etapa, es el jugador que fué el primero en llegar a la meta en la etapa anterior.

AVANCE DE LAS FICHAS.

Antes de describir los movimientos que pueden efectuarse, se va a definir el término siguente:

Hechizo. El hechizo consiste en que al elegir el jugador en turno una casilla donde se encuentra un guerrero contrario, este último no puede moverse hasta que el jugador decida quitarse de esa casilla.

Ahora bien, son 2 tipos de movimientos que pueden realizar con las fichas y son:

- *Movimiento diagonal.* Con este movimiento, se puede hechizar.
- *Movimiento horizontal/vertical.* Con este movimiento, se puede **comer**, es decir, el jugador en turno al elegir una casilla donde se encuentra situado un guerrero contrario, adquiere a éste último.

Todos los guerreros pueden moverse de una a dos casillas con cualquiera de los movimientos anteriores. Pero los Guerreros que custodien señales, sólo se pueden mover una casilla. No puede haber más de dos fichas de guerreros en una misma casilla.

Si la TRIPLE ALIANZA llegó a esta etapa con menos de 8 guerreros, entonces puede mantener hechizados a dos guerreros simultáneamente, en caso contrario, sólo puede mantener hechizado a un guerrero.

Si el MEXICA cuanta con tan sólo un guerrero, éste no puede ser hechizado por la TRIPLE ALIANZA.

OBTENCIÓN DE SEÑALES.

La forma en que el MEXICA puede obtener señales es la siguiente:

Si el MEXICA efectúa un *movimiento horizontal/vertical* y obtiene un guerrero contrario que custodie una señal, ésta pertenece al MEXICA.

Si el MEXICA realiza un *movimiento diagonal* y hechiza a un guerrero contrario, entonces se pelea la señal. Lo anterior se realiza así: El MEXICA lanza un dado y si obtiene un número par, la señal le pertenece; en caso contrario, sólo hechiza a su contrincante.

CASILLAS TRIBUTO.

En la zona de casillas tributo, existen 3 casillas que en forma aleatoria piden al jugador que las elige rindan tributo, si el jugador en turno no tiene ninguna ficha de este tipo, entonces, pierde a su guerrero.

FIN DEL JUEGO.

El juego llega a su final cuando cualquiera de los dos jugadores logre su objetivo.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los modelos son representaciones de la realidad, su construcción es una actividad un tanto subjetiva. Los modelos matemáticos representan a dicha realidad en forma simbólica. Esta manera de representar a la realidad no es una tarea fácil, pero tampoco imposible y lograrlo permite una mayor manipulación del fenómeno real en estudio sin exponerlo, por medio de las matemáticas, es por esto que son los más usados en la investigación.

No existen reglas para su construcción, pero se puede decir que los pasos en su elaboración son observar cuales son los elementos del sistema, definir sus constantes, las variables y que tipo de variables, representar las características relevantes del sistema en forma simbólica y representar finalmente su interrelación en el sistema por medio de ecuaciones e inecuaciones que reflejen la relación de causa y efecto. El modelo antes de ponerlo en marcha se debe de probar y a veces es necesario construir otro de manera que se tenga una mejor aproximación de la representación del fenómeno real en estudio. En ocasiones el sistema es sencillo y por ende la construcción del modelo simbólico de este también lo es, pero en algunos problemas donde aparentemente es imposible representar la realidad en forma simbólica, se puede iniciar con la construcción de otra realidad muy aproximada a ella y construir su modelo matemático y continuar con este proceso hasta lograr la representación simbólica de una realidad muy aproximada a la real.

Para el estudio de las reglas del juego, era necesario preveer situaciones que dichas reglas no contemplaban e incluso saber que ocurría si se aplicaban, para lograr este objetivo, el lenguaje de las matemáticas fue de gran ayuda y finalmente se obtuvieron resultados satisfactorios, permitiendo adicionar reglas para que los jugadores siempre supieran que hacer y no dejar situaciones ambiguas que podrían causar una pérdida en la calidad del juego.

Además, la implementación de modelos matemáticos en la computadora hace de una investigación una tarea más sencilla. En este caso, después de tener el modelo del juego, resultó fácil su implementación computacional para ver y analizar el desarrollo del juego, sin necesidad de jugarlo *n* veces con personas reales.

Es de hacer notar que cada vez son más los juegos tradicionales, de mesa principalmente, los que se están informatizando. En este trabajo se dan las bases para que posteriormente, aplicando la tecnología de punta se obtenga de *TACHTLI* un juego computacional de vanguardia. Ya que si bien es cierto, que en esta investigación se elaboró un juego computacional, también es cierto que, se puede mejorar y hacer más atractivo su uso por medio de una mejor animación. Recuérdese que el objetivo principal de esta tesis no es inventar un nuevo juego computacional, sino representar en forma simbólica al nuevo juego de mesa, y que mejor manera de comprobar la validez del modelo matemático que con su implementación computacional.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los modelos son representaciones de la realidad, su construcción es una actividad un tanto subjetiva. Los modelos matemáticos representan a dicha realidad en forma simbólica. Esta manera de representar a la realidad no es una tarea fácil, pero tampoco imposible y lograrlo permite una mayor manipulación del fenómeno real en estudio sin exponerlo, por medio de las matemáticas, es por esto que son los más usados en la investigación.

No existen reglas para su construcción, pero se puede decir que los pasos en su elaboración son observar cuales son los elementos del sistema, definir sus constantes, las variables y que tipo de variables, representar las características relevantes del sistema en forma simbólica y representar finalmente su interrelación en el sistema por medio de ecuaciones e inecuaciones que reflejen la relación de causa y efecto. El modelo antes de ponerlo en marcha se debe de probar y a veces es necesario construir otro de manera que se tenga una mejor aproximación de la representación del fenómeno real en estudio. En ocasiones el sistema es sencillo y por ende la construcción del modelo simbólico de este también lo es, pero en algunos problemas donde aparentemente es imposible representar la realidad en forma simbólica, se puede iniciar con la construcción de otra realidad muy aproximada a ella y construir su modelo matemático y continuar con este proceso hasta lograr la representación simbólica de una realidad muy aproximada a la real.

Para el estudio de las reglas del juego, era necesario preveer situaciones que dichas reglas no contemplaban e incluso saber que ocurría si se aplicaban, para lograr este objetivo, el lenguaje de las matemáticas fue de gran ayuda y finalmente se obtuvieron resultados satisfactorios, permitiendo adicionar reglas para que los jugadores siempre supieran que hacer y no dejar situaciones ambiguas que podrían causar una pérdida en la calidad del juego.

Además, la implementación de modelos matemáticos en la computadora hace de una investigación una tarea más sencilla. En este caso, después de tener el modelo del juego, resultó fácil su implementación computacional para ver y analizar el desarrollo del juego, sin necesidad de jugarlo *n* veces con personas reales.

Es de hacer notar que cada vez son más los juegos tradicionales, de mesa principalmente, los que se están informatizando. En este trabajo se dan las bases para que posteriormente, aplicando la tecnología de punta se obtenga de *TACHTLI* un juego computacional de vanguardia. Ya que si bien es cierto, que en esta investigación se elaboró un juego computacional, también es cierto que, se puede mejorar y hacer más atractivo su uso por medio de una mejor animación. Recuérdese que el objetivo principal de esta tesis no es inventar un nuevo juego computacional, sino representar en forma simbólica al nuevo juego de mesa, y que mejor manera de comprobar la validez del modelo matemático que con su implementación computacional.

Por otro lado, se tiene que una decisión es el fin de un proceso y el principio de otro; es la ruptura de una situación para crear otra nueva, significa corte entre el pasado y el futuro para cambiar una situación o crear una nueva. La información con la que cuenta un tomador de decisiones es de vital trascendencia para los resultados de esa decisión, por lo que el decisor debe estar bien informado de todo el contexto en torno a la decisión a tomar, evidentemente, debe estar acompañada del sentido común.

El enfoque de la teoría de decisiones es un modelo de las matemáticas aplicadas, pues emplea un modelo matemático para representar una situación real de interés. El decisor debe establecer, para su problema de decisiones particular, la Naturaleza de la correspondencia entre la realidad y el modelo utilizado, es decir, debe percatarse del papel trascendental que juega el grado de certidumbre en su problema de toma de decisiones, para así, poder elegir la mejor forma de representar el problema y darle solución. Debe de tener presentes todas las alternativas que se tienen y las variables no controlables que influyen en el problema, así como los resultados de aplicar una decisión bajo ciertas circunstancias.

Una observación importante es la siguiente: Si bien es cierto que el azar depara situaciones inesperadas, también es cierto que se puede elegir la mejor opción para lograr el o los objetivos planteados.

Cuando un individuo u organización persigue objetivos múltiples, surge la necesidad de jerarquizar los objetivos y establecer prioridades. De lo contrario se enfrenta un problema de suboptimización de los recursos limitados. Se debe pues de diferenciar los objetivos fundamentales de los instrumentales para poder tomar decisiones apropiadas al problema en cuestión.

Por otra parte, la teoría de juegos y los juegos diferenciales, son parte de las matemáticas aplicadas, que permiten dar solución a los problemas competitivos, abarcando no sólo los juegos, sino también las situaciones competitivas de mercado, etc.

Este juego es un buen ejemplo de la teoría de decisiones puesta en práctica, ya que en él, los jugadores se encuentran en situaciones en la que tiene que tomar decisiones para lograr sus objetivos. Por tratarse de un juego, tiene cabida la aplicación de la teoría de juegos y los juegos diferenciales.

Resultó muy emocionante observar como a un problema social como lo es el estres generado en las grandes ciudades, las relaciones humanas, el aprendizaje, el ejercicio físico y/o mental se les puede encontrar una solución o se pueden llevar a cabo (en su caso) por medio de los juegos, y a su vez, de como están estos íntimamente relacionados con las matemáticas que es una ciencia exacta y abstracta.

Para la elaboración del modelo matemático que representa al juego fue necesario recurrir a varios conceptos de diversas teorías, tales como: Teoría de decisiones, teoría de juegos, teoría de las probabilidades, teoría de gráficas, etc. y usar éstos de una manera adecuada en el momento preciso.

Por otro lado, el trabajar con diversas disciplinas, fué de gran importancia en la elaboración del proyecto de inventar un nuevo juego, ya que permitió un mayor enriquecimiento del mismo.

Por todo lo anterior, concluyo que: No existen problemas físicos, económicos, matemáticos, industriales, computacionales, etc., sino que sólo existen problemas y las diferentes disciplinas científicas proporcionan diferentes formas de observarlos. Entonces, la función de *un Licenciado en Matemáticas Aplicadas y Computación* es pues, resolver problemas, haciendo una abstracción adecuada de ellos, representándolos en forma simbólica para darles solución, aplicando eficazmente la amplia gama de teorías y técnicas que brinda esta carrera. No olvidando que lo importante no es aplicar técnicas, si no resolver problemas, es decir, lo único que se tiene que hacer es utilizar los medios de que se dispone de una manera inteligente para dar solución al problema planteado.

María del Rosario Santander Rosas.

Libros

Historia

CAMPOS, R. M., (1988), "*Chapultepec su leyenda y su historia*", México: D.D.F. Comité interno de ediciones gubernamentales. Colección Distrito Federal, Tomo 15.

CASTAÑEDA, I. J., (1987), "*Gobernantes del Imperio Azteca*", México: D.D.F. Comité interno de ediciones gubernamentales. Colección Distrito Federal, Tomo 6.

MORALES, G. A., (1944), "*El Tlilamatl o Libro de los Dioses*", México: Inter-Continental.

SOUSTELE, J., (1969), "*Los cuatro Soles. Origen y Ocaso de las Culturas*", México: Ediciones Guaderrama S. A.

VON HAGEN, V.W., (1977), "*Los Aztecas*", México: Culturas Básicas del Mundo.

Investigación de Operaciones

ACROFF, R. L., y MAURICE W. SASIENI., (1987), "*Fundamentos de Investigación de Operaciones*", México: Ed. Limusa.

HILLIER, F. S., y GERALD J. LIEBERMAN., (1990), "*Introduction of Operations Research*", U. S. A: Mc. Graw-Hill.

PRAWDA, J., (1989), "*Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones*", México: Ed. Limusa.

RIVETT, P., (1971), "*La Investigación Operacional*", España: Nueva Colección Labor.

TAHA, H. A., (1982), "*Operations Research an Introduction*", U. S. A: Macmillan Publishing.

TIERAUF, R. J., y RICHARD A. GROSSE (1991), "*Toma de decisiones por medio de I de O*", México: Ed. Limusa.

WARNER, H. M., (1975), "*Principles of Operations Research*", U. S. A: Ed. Prentice-Hall.

Juegos

GRAWFORD, C., (1986), "*El Arte del Diseño de Juegos con Microcomputadora*", México: Aosborne- Mc Graw Hill.

HARTNELL, T., (1985), "*El libro Gigante de los Juegos para Computadora*", México: Publicaciones Cultural-Anaya Multimedia.

POSPIELOV, D. A., (1969), "*Teoría de Juegos y Autómatas*", México: Siglo XXI Editores, S. A.

VON NEUMANN, J. y OSKAR MORGENSTERN, (1903), "*Theory of Games and Economic Behavior*", New York: J.Wiley, Serie Science editions.

Probabilidad

BORRAS, G. H. E., RAFAEL I. BALDERRAMA., y BERNARDO FONTANA DE LA CRUZ., (1969), "*Apuntes de Probabilidad y Estadística*", México: Facultad de Ingeniería-U.N. A. M.

FELLER, W., (1988), "*Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*", México: Ed. Limusa-Wiley.

FREUND, J. E., RICHARD MANNING SITH., (1989), "*Estadística*", México: Prentice Hall.

GARZA, T., (1983), "*Elementos de Cálculo de Probabilidades*", México: Textos Universitarios-U.N.A.M.

KAUFMANN, M., (1977), "*Curso de Matemáticas Superiores*", Tomo VI, España: URMO.

LIPPMAN, S. A., (1976), "*Elementos de Probabilidad y Estadística*", España: Ed. Marcombo, S.A., Boixareu Editores.

MENDENHALL, W., RICHARD L. SHEAFFER., y DENNIS D. WACKERLY., (1986), "*Estadística Matemática con Aplicaciones*", México: Grupo Editorial Iberoamericana.

MILLER, I., y JOHN E. FREUD (1928), "*Probabilidad y Estadística para Ingenieros*", México: Ed. Riverte.

PARZEN, E., (1929), "*Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones*", México: Ed. Limusa-Wiley.

SEYMOUR, L., (1987), "*Teoría y Problemas de Probabilidad*", Serie de compendios Shaum. México: Ed. Mc. Graw-Hill.

WALPOLE, R. E. y R. H. MYERS., (1989), "*Probabilidad y Estadística para ingenieros*", México: Ed. Interamericana., 3a. edición.

Progamación

BEN EZZELL., (1993), "*Programación de Gráficos en Turbo C++. Un enfoque orientado a Objetos*", U. S. A.: Addison-Wesley/Díaz de Santos.

HERNÁDEZ, O. E. y JOSÉ HERNÁNDEZ ORALLO., (1993), "*Programación en C++*", España: Ed. Paraninfo S. A.

Psicología

RAPPOPORT, L., (1967), "*Psicología de los intereses y las vocaciones*", Buenos Aires: Ed. Paidos.

RAPPOPORT, L., (1977), "*La personalidad de los 13 a los 26 años*", Buenos Aires: Ed. Paidos.

Simulación

GONZALEZ, V. M., (1993), "*Modelos y Simulación. Un Enfoque Computacional con Aplicaciones Acuariales y de Optimización*", México: Vertiente Editorial S. A. de C. V.

Teoría de Decisiones

MORGAN, J. J., (1977), "*Introducción a la Teoría de las Decisiones*", México: Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A.

RAIFFA, H., (1968), "*Decision Analisys Introductory*", U. S. A.: Random House.

RHEAUT, J. P., (1986), "*Introducción a la Teoría de las Decisiones con Aplicaciones a la Administración*", México: Ed. Limusa.

RIGGS, J. L., (1973), "*Modelos de Decisión Económica para Ingenieros y gerentes de Empresa*", España: Ed. Alianza.

Teoría de Gráficas

CHARTRAND, GARY., (1978), "*Graphs as Mathematical Models*", United States of America: Prindle, Weber & Schmedt, Incorporated.

HARARY, F., (1972), "*Graph Theory*", U. S. A.: Addison-Wesley Series in Mathematics.

KAUFMANN, A., (1976), "*Teoría de los Grafos*", España: Marcombo, S. A.. Boixareu Editores.

Otros

INTRILIGATOR, M. D., (1973), "*Optimización Matemática y Teoría Económica*", Bogotá: Prentice-Hall.

THOMPSON, J. R., (1938), "*Empirical Model Builder*", U. S. A.: Ed. Wiley.

Tesis

CAMACHO, F. M. y MA. DEL SOCORRO PEÑA M., (1985), "*Las decisiones financieras y la Actuaría*", México, D. F., Actuaría.

MEDINA, G. R. y GUADALUPE RANGEL L., (1993), "*Análisis del Riesgo en la Evaluación de Proyectos*", Acatlán Edo. de México, Actuaría.

MESA, M. E., (1974), "*Elementos Básicos para el Estudio de la Teoría de la Toma de Decisiones*", México, D. F., Actuaría.

ROBLES, R. M., (1994), "*Métodos de evaluación en la administración de riesgo en inversiones*", México, D. F., Actuaría.

RODRÍGUEZ, G. M. G., (1986), "*Fundamentos del Riesgo*", Acatlán Edo. de México, Actuaría.

Revistas

DE ARAMBURO, J. y ALMYR GARJARDONI., (1991), "*Muy Interesante, la revista para saber más de todo. Edición Especial Juegos*"., México: Editora Cinco S. A. y Provenemex S. A. de C. V.

GARCÍA, P., (1993), "*Próximo Milienio. Ajedrez. El juego de la vida y de la muerte*", España: Linero S. A. Diciembre, No. 6.

WALTER, O. R., y FEDERICK W. WINTER., (19), "*Evaluación de un nuevo producto usando Programación Dinámica Bayesiana*".

Enciclopedias

MÉXICO A TRAVÉS DE LOS SIGLOS., (1979) Tomo I. "*Historia Antigua y de la Conquista*", México: Ed. Cumbre, S. A.

MICROSOFT ENCARTA CD, KIDSOFT CD, (1994), incluyendo Dream Team, Basic, U. S. A.

ANEXO A.

ANÁLISIS COMBINATORIO Y ALGUNOS CONCEPTOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES.

A.1 DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD.

DEFINICIÓN LAPLACIANA DE "EQUIPROBABILIDAD" PARA LA PROBABILIDAD DE UN EVENTO ALEATORIO O CONCEPTO CLÁSICO DE PROBABILIDAD (FINALES DEL SIGLO XVII).

Históricamente, la manera más antigua de medir la incertidumbre es el concepto clásico de la probabilidad. Este uso data de los días en que las probabilidades sólo se citaban con respecto a juegos de azar.

Para calcular la probabilidad de un evento se enumeran todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, si estos son igualmente factibles la probabilidad de un evento se define como el cociente del número de eventos favorables entre el número total de resultados posibles cuando nada conduce a pensar que uno de estos resultados posibles debería ocurrir en vez de los otros. Subyacente a una probabilidad debe haber un evento aleatorio.

Si el número total de resultados posibles de un experimento aleatorio es N, se realiza el experimento N veces y si en n de esos resultados se observa el atributo A, entonces la probabilidad del atributo se define como:

$$P\{A\} = \frac{n}{N} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} \qquad 0 \leq P\{A\} \leq 1. \tag{A.1.1}$$

En la aplicación de la definición clásica de probabilidad se requiere que todos los resultados posibles del experimento sean igualmente factibles y también mutuamente excluyentes.

LIMITACIONES DE LA INTERPRETACIÓN CLÁSICA.

Una desventaja importante del concepto clásico de probabilidad es su aplicabilidad limitada, ya que existen muchas situaciones en las que las diversas posibilidades no se pueden considerar como igualmente probables.

Otra desventaja es que en algunos experimentos el número total de resultados es demasiado grande o muy difícil de determinar.

INTERPRETACIÓN FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD O DE VON MISES (1957).

Entre los diversos conceptos de probabilidad, el que se sostiene más ampliamente es el de interpretación de la frecuencia según la cual la probabilidad de un evento es la proporción del momento en que ocurrirán eventos del mismo tipo a la larga.

De acuerdo con la interpretación de frecuencia de la probabilidad, se estima la probabilidad de un evento al observar en que fracción del tiempo han ocurrido sucesos similares en el pasado.

En la interpretación de la frecuencia, la probabilidad de un evento se define en términos de lo que sucede en eventos similares a la larga; de manera que se va a examinar brevemente si es del todo significativo hablar de la probabilidad de un evento que puede ocurrir sólo una vez. Por ejemplo, ¡se puede asignar una probabilidad al evento de que la señorita Berta Cuevas podrá salir del hospital dentro de cuatro días, después de practicársele una apendicesectomía. Si se situara en la posición del médico de la señorita Cuevas, se podrían revisar los registros médicos, descubrir que los pacientes salieron del hospital después de cuatro días de habérseles practicado la apendicectomía es por ejemplo 34 % de casos y aplicar este número a la señorita Cuevas. Que quizá esto no sea de mucho agrado para la señorita Cuevas, pero da un significado de enunciación de probabilidad a cerca de que ella dejará el hospital dentro de cuatro días con una probabilidad de 0,34 (esto es, se realizó el experimento un número grande de veces y se contaron los casos favorables y los casos totales).

Esto ilustra que cuando se hace un enunciado de probabilidad a cerca de un evento específico (no repetible), la interpretación frecuencial de probabilidad no deja más alternativa que la de referirse a una serie de eventos semejantes. Sin embargo, como bien se puede imaginar, esto puede llevar fácilmente a tener complicaciones, ya que la elección de eventos "similares" generalmente no es ni clara ni directa.

LIMITACIONES DE LA INTERPRETACIÓN FRECUENCISTA.

No se puede aplicar cuando el experimento aleatorio no es repetible o bien cuando es repetible pero cambian las condiciones del experimento.

INTERPRETACIÓN DE LA PROBABILIDAD COMO EVALUACIONES PERSONALES O SUBJETIVAS (1969).

De acuerdo con este punto de vista, las probabilidades se interpretan como *evaluaciones personales o subjetivas*; miden la creencia de uno en relación con las incertidumbres que están implicadas. Estas probabilidades se aplican especialmente cuando existe poco o nada de evidencia directa, ya que en realidad no hay alternativa más de la de considerar información indirecta, "estimaciones educadas" y quizá intuición y otros factores subjetivos.

LIMITACIONES DE LA INTERPRETACIÓN SUBJETIVISTA.

Esta interpretación tiene el inconveniente de que la probabilidad asignada cambie de una persona a otra y en ocasiones puede presentar inconsistencias en una misma persona cuando ésta aumente sus conocimientos sobre el fenómeno en cuestión.

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD COMO FUNCIÓN DE LOS EVENTOS CONTENIDOS EN EL ESPACIO MUESTRAL DE UN FENÓMENO ALEATORIO. DEFINICIÓN MODERNA DE PROBABILIDAD. (AXIOMAS DE KOLMOGOROV (1933)).

Dada una situación aleatoria, que queda descrita por un espacio muestral $\boldsymbol{S}$, la probabilidad es una función[1] P[•] que asigna a cada evento $\boldsymbol{E}$ un número real no negativo, denotado $P[\boldsymbol{E}]$, que se llama probabilidad del evento $\boldsymbol{E}$. Dicha función de probabilidades debe satisfacer los tres axiomas siguientes:

Axioma 1. $P[E] \geq 0$ para todo evento $\boldsymbol{E}$.
Axioma 2. $P[S] = 1$ donde S es el evento seguro.
Axioma 3. $P[E \cup F] = P[E] + P[F]$, en el caso en el que $E \cap F = \varnothing$ es decir, la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes es la suma de sus probabilidades.

(A.1.2)

[1] DEFINICIÓN: Una función es una regla que asigna un número real a cada elemento de un conjunto de objetos (llamado dominio de la función). Aquí el dominio de la función de probabilidades P[•] es el conjunto de todos los eventos de $\boldsymbol{S}$.

PROBABILIDADES Y POSIBILIDADES.

Si un evento tiene dos veces más probabilidad de ocurrir que de no ocurrir, se dice que las **posibilidades** son dos a uno de que ocurrirá; si un evento tiene 3 veces más probabilidad de ocurrir que de no ocurrir, se dice que las posibilidades son 3 a 1; etc. En términos generales, las posibilidades de que un evento ocurrirá están dadas por la razón de la probabilidad que ocurrirá a la probabilidad de que no ocurrirá.

En forma simbólica, si la probabilidad de un evento es p, las posibilidades de su incidencia son a a b, donde a y b son valores positivos tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{1-p} \qquad \text{(A.1.3)}$$

Se acostumbra expresar las posibilidades en términos de enteros positivos que no tengan factores en común.

Si un evento tiene mayor probabilidad de ocurrir que de no ocurrir, se acostumbra entrecomillar las posibilidades de que no ocurrirá en vez de las posibilidades de que ocurrirá.

En las apuestas, la palabra "posibilidades" se utiliza también para denotar la razón de la apuesta de una parte con relación a la otra parte. Por ejemplo, si un apostador dice que dará 3 a 1 posibilidades sobre la incidencia de un evento, se refiere a que está dispuesto a apostar \$3 contra \$1 (quizá \$30 contra \$10 o \$1500 contra \$500) de que ocurrirá el evento. Si estas posibilidades de respuesta son en realidad iguales a las posibilidades de que ocurrirá el evento, se dice que las posibilidades de la apuesta son razonables.

Este análisis de las posibilidades y probabilidades de apuesta proporciona las bases de una manera de medir probabilidades subjetivas. Si un hombre de negocios "siente" que las posibilidades de acierto de una nueva tienda de ropa son 3 a 2, esto quiere decir que él está dispuesto a apostar (o considera razonable apostar) \$300 contra \$200 o quizá \$3000 contra \$2000 de que la nueva tienda de ropa será un éxito (acierto). En esta forma él está expresando su creencia en relación con las incertidumbres conectadas con el éxito de la tienda y para convertirla en probabilidad se toma la ecuación $a / b = p / 1 - p$, y se resuelve para obtener p.

Si las posibilidades son a a b de que ocurrirá un evento, la probabilidad de su incidencia es (fórmula que relaciona las probabilidades con las posibilidades):

$$p = \frac{a}{a+b} \qquad \text{(A.1.4)}$$

A.2 FÓRMULAS PARA CALCULAR PROBABILIDADES DE EVENTOS

Fórmula para calcular la probabilidad del evento imposible $\varnothing$.

$$P[\varnothing] = 0.$$

Fórmula para la probabilidad de la diferencia EF' de dos eventos E y F. Para cualquier par de eventos, E y F, de un espacio de probabilidades,

$$P[FE'] = P[F] - P[EF].$$

Fórmula para la probabilidad del complemento de un evento. Para cualquier evento E de un espacio de probabilidades,

$$P[E'] = 1 - P[E].$$

Regla de adición general. Fórmula para la probabilidad la unión $E \cup F$, de dos eventos E y F. Para cualquier par de eventos E y F de un espacio de probabilidades,

$$P[E \cup F] = P[E] + P[F] - P[EF].$$

Desigualdad para la probabilidad de un subevento. Sean E y F eventos de un espacio muestral S, tales que $F \subset E$. Entonces

$$P[EF'] = P[E] - P[F], F \subset E., P[F] \leq P[E], \text{si } F \subset E.$$

Fórmula para la probabilidad de la unión de un número finito de eventos mutuamente excluyentes. Para cualquier entero positivo n la probabilidad de la unión de n eventos mutuamente excluyentes $E_1, E_2, \ldots, E_n$ es igual a la suma de las probabilidades de los eventos; en símbolos,

$$P[E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n] = P[E_1] + P[E_2] + \ldots + P[E_n],$$

si para todo par de enteros (i, j) que están entre 1 y n, inclusive, y son distintos entre sí.

Los axiomas (A.1.2) son totalmente adecuados para el estudio de fenómenos aleatorios cuyos espacios muestrales son finitos. Sin embargo, para el estudio de espacios muestrales infinitos es necesario modificar el axioma 3. Si se quiere considerar una sucesión infinita de eventos mutuamente excluyentes, $E_1, E_2, \ldots, E_n$, entonces no se puede demostrar con base en el axioma 3, que la unión de un número infinito de eventos mutuamente excluyentes es igual a la suma de las probabilidades de los eventos, por lo cual deberá postularse por separado. Consecuentemente, en lugar del axioma 3 se adopta el siguiente axioma.

Axioma 3. En cualquier sucesión infinita de eventos mutuamente excluyentes $E_1, E_2, \ldots, E_n$ se tiene que

$$P[E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \cup] = P[E_1] + P[E_2] + \ldots + P[E_n] + \ldots$$

En los axiomas anteriores, hay que hacer una modificación un poco más refinada si se considera un fenómeno aleatorio cuyo espacio muestral S es infinito no numerable. En este caso puede resultar que existan subconjuntos de S que no sean probabilizables, en el sentido de que no sea posible asignar probabilidades a estos conjuntos de manera consistente con los axiomas. Si ése es el caso, entonces los subconjuntos probabilizables de S son los únicos que se definen como eventos. Puesto que se puede demostrar que la unión, la intersección y el complemento de eventos, son a su vez, eventos, esta restricción de concepto de evento no causa ninguna dificultad en la aplicación, y hace más rigurosa la teoría matemática.

ESPACIOS MUESTRALES FINITOS .

El espacio muestral S de una observación o experimento aleatorio es finito si su tamaño es finito, lo que equivale a decir que la observación o experimento aleatorio en cuestión posee únicamente un número finito de resultados posibles.

Se pueden definir 2 eventos en un espacio muestral finito de tamaño N. Para definir una función de probabilidades $P[\bullet]$ en los subconjuntos de S, se necesita especificar los 2^N valores que toma $P[A]$, con forme A coincide con cada uno de los eventos de S. Sin embargo, los valores de la función de probabilidades no se puede especificar arbitrariamente, sino que deben cumplir con los axiomas 1, 2 y 3.

Fórmula para calcular las probabilidades de eventos cuando el espacio muestral es finito. Sea E cualquier evento de un espacio muestral finito $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$. Entonces, la probabilidad $P[E]$ del evento E es la suma, sobre todos los puntos muestrales D_i que sean miembros de E, de las probabilidades $P[\{D_i\}]$; esto lo se expresa simbólicamente al escribir que si $E = \{D_{i1}, D_{i2}, \ldots, D_{iN}\}$ entonces

$$P[E] = P[\{D_{i1}\}] + P[\{D_{i2}\}] + \ldots + P[\{D_{iN}\}].$$

A.3 ANÁLISIS COMBINATORIO.

TÉCNICAS PARA LA ENUMERACIÓN DE PUNTOS MUESTRALES.

Un problema que dificulta la aplicación de las reglas del cálculo de probabilidades estriba en que a veces la simple enumeración de los resultados elementales de un experimento aleatorio es sumamente complicada, debido a que muchas veces este número es muy grande y la descripción de cada punto muestral puede resultar tardada o prácticamente imposible. Se hace entonces necesario desarrollar algunas técnicas para su enumeración.

Lo siguiente representa algunos principios de la teoría del análisis combinatorio que son particularmente útiles cuando se aplica el método de los puntos muestrales para calcular la probabilidad de un evento, ya que permite contar el total de puntos muestrales en un espacio muestral S y en un evento de estudio, para verificar el listado de los eventos simples.

Es importante señalar que en esta sección sólo se van a considerar espacios muestrales finitos; además, de agregar la restricción de considerar únicamente espacios muestrales con puntos muestrales equiprobables.

MUESTRAS Y ARREGLOS MÚLTIPLES N-ADAS.

En el estudio de los juegos sencillos de azar, de los procedimientos de muestreo, de los problemas de ocupación y de orden, etc., se examinan en general espacios muestrales finitos en los cuales se atribuye la misma probabilidad en todos los puntos. Entonces, para calcular la probabilidad de un evento A, se tiene que dividir el número de puntos muestrales en A ("casos favorables") entre el número total de puntos muestrales ("casos posibles").

Se va a iniciar con la noción de distinguibilidad, que puede ilustrarse con referencia a un sencillo ejemplo. Tómense dos cubos de madera. Estos serán indistinguibles si sus características físicas: color, dimensiones, peso, etc., son esencialmente idénticas en ambos, de modo que, si se escoge uno de los dos, no puede decidirse de cual de ellos se trata. Por el contrario, se dice que son distinguibles si hay algún elemento como el color, alguna marca o cualquier otra cosa que permita discernir si se ha escogido uno o el otro.

Entonces, si se realiza un experimento consistente en seleccionar al azar uno de los dos cubos, resulta que el número de resultados depende de que los dos cubos sean distinguibles o no:

- Si **no son distinguibles**, hay un sólo resultado elemental, a saber, "salió uno de los dos cubos".
- Si son **distinguibles**, entonces los cubos pueden llamarse *A* y *B*, respectivamente, y hay dos resultados elementales: "salió el cubo *A*" y "salió el cubo *B*".

De la misma manera, si se intenta determinar en cuantas formas pueden arreglarse los dos cubos uno tras otro, resulta que:

⇨ si los dos cubos no son distinguibles, entonces cualquier forma de ordenarlos produce el mismo resultado, o sea que hay un sólo arreglo posible. Por otra parte,

⇨ si los cubos son distinguibles, puede discernirse entre los dos arreglos *AB* y *BA*, que difieren sólo en el orden de sus elementos.

Una herramienta básica para la formulación de espacios muestrales de fenómenos aleatorios, es el concepto de **n-ada**. Una n-ada $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ es un arreglo de *n* símbolos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ que son llamados respectivamente, primera componente, segunda componente, y así sucesivamente hasta llegar a la *n*-ésima componente.

La utilidad de las *n*-adas se deriva del hecho de que son instrumentos convenientes para reportar el resultado de la extracción de un muestra de tamaño *n*.

Un fenómeno aleatorio básico que es de interés analizar en la teoría de probabilidades es el de muestreo. Supóngase que se tiene una urna que contiene *N* bolas, numeradas del 1 hasta el *N*. Supóngase también que se extraen bolas de la urna, de una en una, hasta tener *n* bolas fuera; por brevedad se dice que se ha extraído una **muestra** (o una muestra ordenada o distinguible) de tamaño *n*. Por supuesto, se debe especificar también si al extraer la muestra se devolvían o no las bolas a la urna.

Se dice que la *extracción* se hizo *con reemplazo* y que la **muestra se extrae con reemplazo**, si después de cada extracción se registra el número de la bola y después se devuelve a la urna; por el contrario, se dice que la *extracción* se hizo *sin reemplazo*, y que la **muestra se extrae sin reemplazo**, si la bola extraída no se devuelve a la urna después de cada extracción, de manera que el número de bolas disponibles en la urna para la *k*-ésima extracción es $N - k + 1$. Consecuentemente, si la extracción se efectúa sin reemplazo, entonces el tamaño *n* de la muestra extraída deberá ser menor o igual a *N*, el número original de bolas en la urna. Por otra parte, si la extracción se efectúa con reemplazo, entonces *n* puede ser cualquier número.

Para anotar el resultado de la extracción de una muestra de tamaño n, se usa una n-ada $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, donde z_1 representa el número de la primera bola extraída, z_2 representa el número de la segunda bola extraída, y así sucesivamente hasta z_n que representa el número de la n-ésima bola extraída.

PRINCIPIO BÁSICO DEL ANÁLISIS COMBINATORIO.

El principio básico para contar es el siguiente:

> *"Si un evento A ocurre de* r *maneras y un evento B ocurre de* s *formas, se tiene que el evento "A o B" ocurre de* r + s *maneras siempre que A y B no puedan ocurrir simultáneamente. El evento m "A y B" puede suceder de* r x s *maneras".*

Se va a exponer ahora una fórmula que es básica en la teoría del conteo de conjuntos de n-adas, a la que se llama principio básico del análisis combinatorio.

Supóngase que se tiene un conjunto A cuyos elementos son n-adas ordenadas de objetos de cierta clase. Para calcular el tamaño de A, en primer lugar se determina el número N_1 de objetos que se pueden usar como primera componente de una n-ada de A. Después, se determina (si existe[2]) el número N_2 de objetos que pueden ser la segunda componente de una n-ada, en la que se conocen la primera componente. A continuación se determina (si existe) el número N_3 de objetos que pueden ser la tercer componente de una n-ada en la que se conocen las dos primeras componentes. Se continúa de esta manera hasta determinar el número N_n (si existe) de objetos que pueden ser la n-ésima componente de una n-ada, en la que se conocen las primeras $(n-1)$ componentes. ***El tamaño del conjunto A de n-adas se determina, entonces, mediante el producto de los números $N_1, N_2, \ldots, N_n$***; al expresarlo en símbolos, se tiene

$$N[A] = N_1 \; N_2 \; \ldots \; N_n . \tag{A.3.1}$$

El número de maneras en que se puede extraer una muestra de n bolas de una urna que contiene N bolas ordenadas es $N(N-1) \ldots (N-n+1)$, si el muestreo se efectúa sin reemplazo y N^n si el muestreo se realiza con reemplazo.

Para denotar el producto $N(N-1) \ldots (N-n+1)$, se utiliza la siguiente notación:

$$N^{(n)} = N(N-1) \ldots (N-n+1), \tag{A.3.2}$$

para cualquier entero positivo $N = 1, 2, \ldots$, y para cualquier entero $n = 1, 2, \ldots, N$.

[2] El número N_2 existe si el número posible de la segunda componente que puede ocurrir en una n-ada, en la que se conoce la primera componente, no depende de cuál sea la primera componente que ha ocurrido.

Teorema A.1.

En una población de N elementos y una muestra determinada de tamaño n, existen N^n muestras diferentes con reemplazo y $N^{(n)}$ muestras sin reemplazo.

Nota.

$$N^{(n)} = N(N-1)\ldots(N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!} = P_{N,n} \tag{A.3.3}$$

donde $P_{N,\,n}$ se conoce como **Permutación** de N elementos tomados de n en n.

$$N! = N(N-1)\ldots(2)(1).$$

Si

$$N = n,$$

entonces

$$0! = 1.$$

Ejemplo.

Número de muestras ordenadas sin repetición.

Sea $\boldsymbol{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$; donde $N = 5$, $n = 3$, entonces, pueden formarse

$$5!\,/\,(5\text{-}3)! = (5)(4)(3) = 60$$

muestras diferentes ordenadas y sin reemplazo de tamaño 3. Que son:

$$(S_1, S_2, S_3),\ (S_1, S_2, S_4),\ (S_1, S_2, S_5),\ (S_1, S_3, S_4),\ (S_1, S_3, S_5),$$
$$(S_1, S_4, S_5),\ (S_2, S_1, S_3),\ (S_2, S_1, S_4),\ \ldots\ ,(S_5, S_4, S_3).$$

Número de muestras ordenadas con repetición.

Sea $\boldsymbol{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$; donde $N = 5$, $n = 3$, entonces, se pueden formar

$$5^3 = 125$$

muestras ordenadas diferentes de tamaño 3 con reemplazo y son:

$$(S_1, S_1, S_1),\ (S_1, S_1, S_2),\ (S_1, S_1, S_3),\ (S_1, S_1, S_4),\ (S_1, S_1, S_5),$$
$$(S_1, S_2, S_1),\ (S_1, S_2, S_2),\ (S_1, S_2, S_3),\ \ldots\ ,(S_5, S_5, S_5).$$

El espacio muestral $\boldsymbol{S}$ del experimento aleatorio de extraer (con o sin reemplazo) una muestra desordenada de tamaño n de una urna que contiene N bolas numeradas del 1 al N, consiste en los conjuntos $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ de tamaño n, en donde cada elemento Z_n es un número del 1 al N.

NÚMERO DE MUESTRAS DESORDENADAS SIN REPETICIÓN.

Una aplicación importante de las relaciones anteriores radica en el problema de encontrar el *número de subconjuntos de un conjunto*. Considérese el conjunto $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots, N\}$ que consiste de los enteros del 1 al N. ¿Cuántos subconjuntos se pueden formar a partir de $\boldsymbol{S}$? Para resolver este problema, se tiene en primer lugar para $n = 1, 2, \ldots, N$ el número de subconjuntos de $\boldsymbol{S}$ de tamaño n. Sea x_n el número de subconjuntos de $\boldsymbol{S}$ de tamaño $\boldsymbol{n}$. Entonces,

$$(x_n)(n!) = N^{(n)},$$

i.e., x_n por el número de muestras que pueden extraerse, sin reemplazo de un conjunto de tamaño n que puede extraerse sin reemplazo de S, entonces

$$x_n = \frac{N^{(n)}}{n!} = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \tag{A.3.4}$$

para denotar a $\binom{N}{n}$ se usa $C_{N,n}$

entonces ***el número de subconjuntos de tamaño n que se pueden formar con los elementos de un conjunto de tamaño N es*** $C_{N,n}$ **(se conoce como coeficiente binomial y se lee "N en n" combinaciones de N elementos tomados de n en n).**

Cuando n es mayor que N, entonces el coeficiente binomial es cero.

Ejemplo.

Sea $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, en el que $N = 5$ y $n = 3$, pueden formarse

$$C_{N,n} = C_{5,3} = 10$$

subconjuntos de tamaño 3, a saber:

$$\{S_1, S_2, S_3\},\ \{S_1, S_2, S_4\},\ \{S_1, S_2, S_5\},\ \{S_1, S_3, S_4\},\ \{S_1, S_3, S_5\},$$
$$\{S_1, S_4, S_5\};\ \{S_1, S_3, S_4\},\ \{S_2, S_3, S_5\},\ \ldots\ ,\ \{S_2, S_4, S_5\}.$$

NÚMERO DE MUESTRAS DESORDENADAS CON REPETICIÓN.

El número de n-adas no ordenadas y con repetición[3] , tomadas de S, con $|S| = N$, es:

$$C_{N+n-1,\,n}\,. \tag{A.3.5}$$

Ejemplo.

Sea $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, con $N = 5$ y $n = 3$, pueden formarse

$$C_{5+3-1,\,3} = 35$$

subconjuntos de tamaño 3 con repetición, que son:

$\{S_1, S_1, S_1\}$, $\{S_1, S_1, S_2\}$, $\{S_1, S_1, S_3\}$, $\{S_1, S_1, S_4\}$, $\{S_1, S_1, S_5\}$,
$\{S_1, S_2, S_2\}$, $\{S_1, S_2, S_3\}$, $\{S_1, S_3, S_4\}$, ... , $\{S_5, S_5, S_5\}$.

Numerosas situaciones pueden representarse adecuadamente con un modelo constituido por la colección de n bolas en N urnas, en la que, según los casos una urna puede tener:

- cero, uno o varias bolas; se dice entonces que se realiza una "distribución o colocación no exclusiva" o también una **"distribución sin exclusión"**. En este caso n puede ser mayor, igual o mayor que N;

- cero o una bola; entonces se dice que se realiza una "distribución exclusiva" o una **"distribución con exclusión"**. En este caso, evidentemente, $n \leq N$.

[3] Su demostración se puede verificar en: Kaufman, M. *Curso de Matemáticas Superiores* Tomo VI. *Curso Moderno de Cálculo de probabilidades*. Ed. Urmo, 1977, pág. 57.

Número de maneras de distribuir n bolas en N urnas distinguibles.			
Bolas distribuidas	Bolas distinguibles	Bolas indistinguibles	
Sin exclusión	N^n Estadísticas de Maxwell-Boltzmann	$\binom{N+n-1}{n}$ Estadísticas de Bose-Einstein	Con reemplazo
Con exclusión	$N^{(n)}$	$\binom{N}{n}$ Estadísticas de Fermi-Dirac	Sin reemplazo
	Muestras ordenadas	Muestras desordenadas	Muestras extraídas
	Número de maneras de extraer muestras de tamaño n de una urna que contiene N bolas distinguibles.		

TABLA A.1 *Análisis Combinatorio.*

TEOREMA DEL BINOMIO.

Las cantidades $C_{N,n}$ para cualquier entero $N = 1, 2, \ldots$, y el entero $n = 0, 1, \ldots N$, se denominan generalmente coeficientes binomiales, dado el papel que desempeñan en el teorema del binomio, que dice que para cualquier par de números reales *a* y *b*, y para cualquier entero positivo
N

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^{N-n} b^n$$

$$= \binom{N}{0} a^N + \binom{N}{1} a^{N-1} b + \binom{N}{2} a^{N-2} b^2 + \ldots + \binom{N}{n} a^{N-n} b^n + \binom{N}{N-2} a^2 b^{N-2} + \binom{N}{N-1} a b^{N-1} + \binom{N}{N} b^N.$$

(A.3.6)

Es conveniente extender las definiciones de $C_{N,n}$ y $N^{(n)}$ a cualquier entero n positivo o negativo. Se definen para $N = 1, 2, \ldots$,

$$N^{(0)} = C_{N,0} = 1, \qquad N^{(n)} = C_{N,n} = 0,$$

(A.3.7)

ya sea que $n < 0$ o $n > N$.

En seguida se nota una relación útil que es válida cuando $N = 1, 2, \ldots$, y $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$C_{N,n-1} + C_{N,n} = C_{N+1,n}.$$

(A.3.8)

Esta relación puede verificarse directamente a partir de la definición de los coeficientes binomiales. También se puede obtener una justificación intuitiva de (A.3.8). Dado un conjunto de S con $N + 1$ elementos, escójase un elemento t de S. El número de subconjuntos de S de tamaño n a los cuales no pertenece t es igual a $C_{N,n}$, mientras el número de subconjuntos de S de tamaño n en los cuales se encuentra t es $C_{N,n-1}$; la suma de estas dos cantidades es igual a $C_{N+1,n}$, es decir, al número total de subconjuntos de S de tamaño n.

Las ecuación (A.3.8) es la expresión algebraica de un hecho que se representa en forma tabular mediante el *triángulo de Pascal*:

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$
$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$
$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$
$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

....

y así sucesivamente. La ecuación (A.3.8) expresa el hecho de que cada término del triángulo de Pascal es la suma de los términos que están arriba de él.

También se observa que en el triángulo de Pascal, los términos de cada línea son simétricos con respecto al término (o términos) central. De una manera más precisa, los coeficientes binomiales tienen la propiedad de que, para cualquier entero positivo N y $k = 0, 1, 2, \ldots, N$,

$$C_{N,N-n} = C_{N,n}\,. \tag{A.3.9}$$

Para demostrar (A.3.9), se necesita observar únicamente que cada miembro de la ecuación es igual a

$$N! \,/\, n!\,(N-n)!.$$

Debe notarse que con la fórmula (A.3.8) y la ayuda del principio de inducción matemática se puede demostrar el teorema del binomio.

EXTENSIÓN DEL TEOREMA DEL BINOMIO.

En forma más general, el Teorema del binomio afirma lo siguiente: si t es un número real cualquiera y b es un número tal que $-1 < b < 1$., entonces

$$(1+b)^t = \sum_{k=0}^{\infty} C_{t,k}\; b^k\,. \tag{A.3.10}$$

Cuando n es un entero positivo, entonces

$$C_{-n,k} = (-1)^k\, C_{n+j-1,k}\,. \tag{A.3.11}$$

Este resultado es una consecuencia inmediata del teorema de Taylor.

NÚMERO TOTAL DE SUBCONJUNTOS DE UN CONJUNTO DE TAMAÑO N.

A partir del teorema del binomio (A.4.1), se tiene que con $a = b = 1$,

$$C_{N,1} + C_{N,2} + \dots + C_{N,N-1} + C_{N,N} = 2^N - 1. \tag{A.3.12}$$

Este es, por consiguiente, el número de subconjuntos distintos que se pueden formar a partir de un conjunto de tamaño N, menos 1; este 1 se refiere al conjunto vacío.

Ejemplo.

Si $|\,S\,| = 5$: entonces el número total de subconjuntos distintos que se puede formar de S es $2^5 - 1 = 31$.

IGUALDAD ASINTÓTICA Y FÓRMULA DE STIRLING.

Frecuentemente se encuentran expresiones donde aparecen factoriales, cuyo manejo es muy engorroso. Existe una fórmula para aproximar el valor de $n!$ que da una buena idea de su comportamiento cuando n es grande. Se va a definir antes el concepto de *igualdad asintótica.*

Definición.

Se dice que dos cantidades A(n) y B(n) son asintóticamente iguales y se escribe $A(n) \sim B(n)$, si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A(n)}{B(n)} = 1.$$

Debe notarse que dos cantidades pueden ser asintóticamente iguales aún cuando su diferencia crezca sin límite. Por ejemplo, si se considera $A(n) = n^2 + n$ y $B(n) = n^2$, se ve que $A(n) \sim B(n)$, puesto que

$$\lim \frac{n^2 + n}{n^2} = \lim (1 + 1/n) = 1,$$

y sin embargo $A(n) - B(n) = n$, crece indefinidamente.

La fórmula de *stirling* para la aproximación de factoriales es la siguiente:

$$n! \sim n^n e^{-n} \cdot 2\pi n.$$

NÚMERO DE PARTICIONES DE UN CONJUNTO EN *K N*-ADAS NO ORDENADAS SIN REPETICIÓN.

Sea ***S*** un conjunto finito de orden n; fórmese una partición en k subconjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_k$, tales que

$$|S_2| = n_2, \ldots, |S_k| = n_k.$$

Puesto que los k subconjuntos forman una partición de ***S*** habrá de verificarse $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Cada uno de estos subconjuntos puede considerarse como una muestra no ordenada sin repetición. ¿Cuántas particiones distintas pueden realizarse con los elementos de ***S***? El número de ellas es N:

$$N = C_{n,n1}\, C_{n-n1,n2}\, C_{n-n1-n2,n3} \cdots C_{n-n1-n2-\ldots-n(k-1),nk}. \tag{A.3.13}$$

Para la primer muestra de n_1 elementos existen disponibles n elementos de ***S***, por lo tanto, habrá $C_{n,n1}$ muestras de dimensión n_1 .Para la segunda muestra de n_2 elementos, quedan $n - n_1$ elementos de ***S*** disponibles, luego ha de haber $C_{n\ n1,n2}$ muestras de dimensión n_2 , y así sucesivamente. Multiplicando estas expresiones se obtiene el número de particiones.

Simplificando el producto (A.3.13), se tiene:

$$N = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}. \tag{A.3.14}$$

Ejemplo.

Sea ***S*** = $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. Se va a hallar el número de particiones con $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 1$. Se tiene:

$$N = \frac{4!}{1!\ 2!\ 1!} = 12.$$

Estas son:

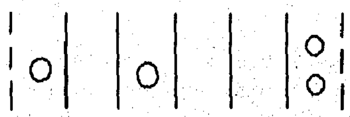
$[(S_1), (S_2, S_3), (S_4)]$, $[(S_2), (S_1, S_3), (S_4)]$, $[(S_1), (S_2, S_4), (S_3)]$,
$[(S_2), (S_1, S_2), (S_3)]$, $[(S_1), (S_3, S_4), (S_2)]$, $[(S_2), (S_3, S_4), (S_1)]$,
$[(S_3), (S_1, S_2), (S_4)]$, $[(S_4), (S_1, S_2), (S_3)]$, $[(S_3), (S_1, S_4), (S_2)]$,
$[(S_4), (S_1, S_3), (S_2)]$, $[(S_3), (S_2, S_4), (S_1)]$, $[(S_4), (S_2, S_3), (S_1)]$.

A.4 COLOCACIÓN DE *n* BOLAS EN *N* CASILLAS.

Numerosas situaciones pueden representarse adecuadamente con un modelo constituido por la colección de n bolas en N casillas, en la que, según los casos una casilla puede tener:

- cero, uno o varias bolas; se dice entonces que se realiza una "colocación no exclusiva" o también una "**colocación sin exclusión**". En este caso n puede ser mayor, igual o mayor que N;
- cero o una bola; entonces se dice que se realiza una "colección exclusiva" o una " **colección con exclusión**". En este caso, evidentemente, $n \leq N$.

POSICIÓN "SIN EXCLUSIÓN" DE *n* BOLAS NO ORDENADAS EN *N* CASILLAS.



4 BOLAS, 6 CASILLAS, 7 DIVISIONES, 5 DIVISIONES INTERIORES.

FIGURA A.1 *Colocación de 4 bolas en 6 casillas.*

Para determinar el número de casos posibles con el sistema de hipótesis: "no hay exclusión"- "las bolas son idénticas", basta con colocar una junto a otra, en fila, las n bolas, con (N-1) separaciones interiores correspondientes a las N cajas (ver figura A.1) y luego se consideran las n bolas y las (N - 1) separaciones interiores como objetos. El número de disposiciones de n bolas no ordenadas en N casillas es entonces igual al de disposiciones de ($N + n$ - 1) objetos colocados en una línea, es decir, el número de (N - n - 1)-muestras ordenadas sin repetición; se tiene por tanto, (N - 1)! n! veces menos disposiciones, o sea:

$$\frac{(N+n-1)!}{(N-1)!\,n!} = C_{N+n-1,\,n}$$

disposiciones de n bolas idénticas en N casillas. Así pues, con la hipótesis "no hay exclusión", "las bolas son idénticas"el número de casos disponible es

$$C_{N+n-1,\,n}$$

¿cuál es la probabilidad de encontrar k_1 bolas en la casilla 1, k_2 en la casilla 2, ... , k_N en la casilla N, de modo que

$$k_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, N \text{ y } \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_N = n?$$

El número de casos favorables es igual a 1; por tanto:

$$Pr = \frac{1}{C_{N+n-1,\, n}} \tag{A.4.1}$$

COLOCACIÓN "SIN EXCLUSIÓN" DE *n* BOLAS ORDENADAS EN *N* CASILLAS.

Para determinar el número de casos posibles se opera de la siguiente manera. Sean n bolas numeradas de 1a n. Hay N maneras de colocar la bola 1 en N casillas, ... , $(N)(N)$ maneras de colocar 1 y 2 en N casillas, ... , N^n maneras de colocar las n bolas en N casillas. Los casos posibles son, por consiguiente, N^n.

- ¿ Cuál es la probabilidad P_k de que k bolas ($k \leq n$) no determinadas ocupen una casilla preseñalada? El número de casos favorables es $C_{n,k}(N-1)^{(n-k)}$ puesto que, entre las n bolas ordenadas disponibles, k bolas han de situarse en la casilla prefijada y, para cada grupo de éstas, las $(n - k)$ bolas restantes pueden colocarse en las $(N - 1)$ casillas restantes de $(N - 1)^{(n-k)}$ maneras diferentes. De donde:

$$P_k = \frac{C_{n,k}\,(N-1)^{(n-k)}}{N^n} \tag{A.4.2}$$

Si $k = n$, se deduce:

$$Pn = \frac{1}{N^n}, \qquad \sum_{k=0}^{n} P_k = 1. \tag{A.4.3}$$

- Si las k bolas se designan de antemano, sólo existe una colocación favorable y la probabilidad pedida es:

$$\frac{(N-1)^{(n-k)}}{N^n}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de colocar k_1 bolas en la casilla 1, k_2 en la casilla 2, ... , k_N en la casilla N, de modo que $k_i \geq 0$, i = 1, 2, ... , N y $k_1 + k_2 + ... + k_N = n$?

El número de casos favorables es igual a $C_{n,\, k_1 k_2 \dots k_N}$; por tanto:

$$Pn : _{k_1 k_2 \dots k_N} = \frac{C_{n,\, k_1 k_2 \dots k_N}}{N^n} \qquad \text{(A.4.4)}$$

COLOCACIÓN CON EXCLUSIÓN DE *n* BOLAS NO ORDENADAS EN *N* CASILLAS ($n \leq N$).

El número de casos posibles es el número de muestras no ordenadas sin repetición que se pueden formar con N elementos, o sea,

$$C_{N,\,n}$$

- **¿Cuál es la probabilidad de que una casilla elegida contenga k bolas ($0 \leq k \leq 1$, y $k \leq n$)? El número de casos favorables es $C_{N-1,\,n-k}$ número de maneras en que las ($n - k$) bolas restantes N - 1 pueden colocarse en las (N - 1) casillas disponibles. Por tanto:**

$$P_k = \frac{C_{N-1,\,n-k}}{C_{N,\,n}}, \qquad k = 0, 1, \dots \qquad \text{(A.4.5)}$$

- **¿Cuál es la probabilidad de que la casilla 1 contenga k_1 bolas, la casilla 2 contenga k_2 bolas, ... , la casilla N contenga k_N bolas?**

$$1 \geq k_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, N \ \text{ y } \ k_1 + k_2 + \dots + k_N = n.$$

Existe sólo un caso favorable; por lo tanto:

$$\pi_k = \frac{1}{C_{N,n}} \tag{A.4.6}$$

COLOCACIÓN CON EXCLUSIÓN DE *n* BOLAS ORDENADAS EN *N* CASILLAS ($n \leq N$).

El número de casos posibles es el de muestras sin repetición que pueden formarse con N elementos, es decir,

$$N^{(n)}.$$

A cada muestra corresponden, en efecto, n casillas ordenadas por el orden de colocación de las n bolas distintas *a b c d*..., etc.

- ¿Cuál es la probabilidad de que una casilla prefijada contenga k bolas, siendo necesariamente k igual a 0 o a 1 (con n inferior o igual a $N = 1$ si $k = 0$?

  - Si $k = 0$, quedan por colocar n bolas en $N - 1$ casillas.

  - Si $k = 1$, lo que puede ocurrir de n maneras diferentes, puesto que no se especifica qué bola debe ocupar la casilla señalada, quedan por colocar n -1 bolas en $N - 1$ casillas.

  Finalmente:

$$P_k = \frac{(N-1)^{(n)}}{N^{(n)}} \qquad \text{si } k = 0$$

$$P_k = \frac{n\,(N-1)^{(n-1)}}{N^{(n)}} \qquad \text{si } k = 1. \tag{A.4.7}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que la casilla 1 contenga k_1 bolas, la casilla 2 contenga k_2 bolas, ..., la casilla N contenga k_N bolas?

$$1 \geq k_i \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, N \;\text{ y }\; k_1 + k_2 + \ldots + k_N = n.$$

Hay un sólo caso posible y; por lo tanto:

$$\pi_k = \frac{1}{N^{(n)}} \qquad \text{(A.4.8)}$$

Nota.

Si las bolas $b_1, b_2, \ldots, b_N$ no se especifican, existen tantos casos favorables como permutaciones, es decir, $n!$ y la probabilidad pedida es entonces:

$$\frac{(N-n)!}{N!}\, n! = \frac{1}{C_{N,\, n}} \qquad \text{(A.4.9)}$$

A.5 MUESTREO CON REEMPLAZO Y SIN REEMPLAZO.

Considérese el siguiente problema. Una urna contiene N canicas, de las cuales m son blancas y negras las restantes $N - m$. Se extrae, con reemplazo, una muestra de tamaño n de la urna. Desígnese con A_k al evento "salen k canicas blancas en la muestra, o bien, se obtiene exactamente k-éxitos ", donde k puede ser 0, 1, ... , n. ¿Cuál es la probabilidad de A_k, suponiendo que la muestra se extrae al azar (con la misma probabilidad para todas las muestras)?

Los resultados elementales en este caso son la totalidad de las muestras diferentes de tamaño n que pueden extraerse con reemplazo de una población de tamaño N, o sea N^n. Por la simetría de la situación, cada una de tales muestras tiene la misma probabilidad.

Las muestras que constituyen A_k son aquellas que contienen k canicas blancas y $n - k$ negras. Las k blancas pueden seleccionarse de m^k maneras, y las $n - k$ negras, de $(N-m)^{n-k}$ maneras, de modo que hay $m^k (N - m)^{n-k}$ posibles maneras de hacer la selección. (supóngase aquí que las canicas son distinguibles, pero podría usarse un argumento semejante para el caso contrario). Una vez seleccionadas, ellas pueden arreglarse de $C_{n,k}$ maneras, así que existen

$$C_{n,k}\, m^k (N-m)^{n-k}. \qquad \text{(A.5.1)}$$

muestras ordenadas que contienen k canicas blancas. Entonces

$$P(A_k) = \frac{C_{n,k}\, m^k (N-m)^{n-k}}{N^n}$$

$$= C_{n,k}\ (m/N)^k \quad ((N-m)/N)^{n-k} \ . \tag{A.5.2}$$

Los eventos A_k, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, forman una partición del espacio muestral, y se ve que

$$\sum_{k=0}^{n} P(A_k) = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\ (m/N)^k \quad ((N-m)/N)^{n-k}$$

$$= (m/N + (N-m)/N)^n$$
$$= 1.$$

Por esta razón, las probabilidades $P(A_k)$ dadas por (A.5.2) reciben el nombre de **probabilidades binomiales.**

Supóngase ahora que el muestreo se realiza sin reemplazo. El espacio muestral consiste en la totalidad de las muestras ordenadas, de tamaño n, obtenidas sin reemplazo de una población de tamaño N, o sea que hay $N^{(n)}$ eventos elementales, equiprobables.

Desígnese con B_k al evento de "sacar k canicas blancas en la muestra". Un argumento análogo al utilizado en el caso anterior, conduce a que el evento B_k contiene

$$C_{n,k}\, m^{(k)}\, (N-m)^{(n-k)}$$

(A.5.3)
resultados elementales. Puede notarse la analogía entre esta expresión y su correspondiente en (A.5.1). Entonces se concluye que

$$P(B_k) = C_{n,k}\ \frac{m^{(k)}\,(N-m)^{(n-k)}}{N^{(n)}}. \tag{A.5.4}$$

donde $k \leq n$ y $k \leq m$, es decir, k mín(m, n).

(A.5.4) puede escribirse como

$$P(B_k) = \frac{C_{m,k}\, C_{N-m,\,n-k}}{C_{N,n}}. \tag{A.5.5}$$

En este caso, los eventos B_k, $k = 0, 1, \dots, \text{mín}(m, n)$, forman también una partición del espacio de eventos y

$$\sum_{k=0}^{\text{mín}(m,n)} P(B_k) = 1.$$

ya que

$$\sum_{k=0}^{\text{mín}(m,n)} P(B_k)\, C_{m,k}\, C_{N-m,\, n-k} = C_{N,n}.$$

Las propiedades (A.5.5) reciben el nombre de **probabilidades hipergeométricas**.

A continuación se va a examinar la relación entre $P(A_k)$ y $P(B_k)$, según (A.5.2) y (A.5.4), respectivamente. Si se forma el cociente $P(A_k) / P(B_k)$ se obtiene,

$$\frac{m^k (N-m)^{n-k} N^{(n)}}{m^{(k)} (N-m)^{(n-k)} N^n},$$

y, examinando por separado cada factor,

$$\frac{m^k}{m^{(k)}} = \frac{1}{(1-1/m)(1-2/m)\dots(1-(k-1)/m)} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k-1} (1-j/m)}; \quad \text{(A.5.6)}$$

$$\frac{N^{(n)}}{N^n} = (1-1/N)(1-2/N)\dots(1-(n-1)/N) = \prod_{j=1}^{k-1} (1-j/m); \quad \text{(A.5.7)}$$

$$\frac{(N-m)^{n-k}}{(N-m)^{(n-k)}} = \frac{1}{(1-1/(N-m))} \; \frac{1}{(1-2/(N-m))} \dots \frac{1}{(1-(n-k-1)/(N-m))}, \quad \text{(A.5.8)}$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^{k-1} 1-(j/(N-m))}. \quad \text{(A.5.9)}$$

Si se hace que m y N crezcan indefinidamente, de manera que la relación m / N permanezca constante, resulta que cada una de las expresiones (A.5.7), (A.5.8) y (A.5.9) tienden a 1.

En esas condiciones,

$$P(B_k) \sim P(A_k),$$

o sea que, asintóticamente, resulta claro que el efecto de extraer la muestra sin reemplazo va siendo cada vez menor, pues si el número de canicas en la urna es muy grande, prácticamente da igual reponer cada canica extraída que no hacerlo (si el tamaño n de la muestra es pequeño comparado con N).

De hecho, el resultado es más fuerte puesto que si m / N = constante, se ve que $P(A_k)$ es independiente de m y N, de suerte que se puede escribir

$$P(B_k) \rightarrow P(A_k),$$

En otras palabras, en este caso, las probabilidades hipergeométrica efectivamente convergen a las binomiales en el sentido ordinario.

MUESTREO CON REEMPLAZO. TAMAÑO DE MUESTRAS ALEATORIO.

Dado un número entero n, se extrae al azar, con reemplazo, una muestra de manera que contenga precisamente n canicas blancas. Es decir, el proceso de muestreo se detiene en el momento en que se extrae la n-ésima canica blanca. En este caso, el tamaño k de la muestra es una cantidad aleatoria. Desígnese con B_k al evento "el tamaño de la muestra es k". ¿Cuál es la probabilidad de B_k?

El espacio muestral correspondiente a este experimento es la totalidad de las muestras de tamaño $n + j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Para un valor dado j, existen N^{n+j} muestras ordenadas con reemplazo y, por la simetría de la situación, son equiprobables. De ellas, hay $C_{n+j-1,\, j}\, m^n (N - m)^j$ que satisfacen la condición de contener n canicas blancas y de que, además la última sea blanca, entonces,

$$P(B_{n+j}) = \frac{C_{n+j-1,\, j}\, m^n (N-m)^j}{N^{n+j}}$$

$$= C_{n+j-1,\, j} (m / N)^n (1 - m / N)^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

(A.5.10)

Se ve que

$$P(B_{n+j}) = C_{-n,\,j}\,(m/N)^n\,(1 - m/N)^j\,(-1)^j\,.$$

y entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(B_{n+j}) = (m/N)^n \sum_{j=0}^{\infty} C_{-n,\,j}\,(-1)^j\,(1 - m/N)^j$$

$$= (m/N)^n\,(1 - m/N)^{-n}$$

$$= 1.$$

Este último resultado presenta las probabilidades $P(B_{n+j})$ como términos del desarrollo del binomio cuyo exponente es negativo. Por esta razón, a las $P(B_{n+j})$ se les conoce como **probabilidades binomiales negativas**.

En el caso particular en que $n = 1$ (es decir, al proceso de muestreo con reemplazo que se detiene al momento de encontrar la primer canica blanca) lleva a

$$P(B_{n+j}) = (m/N)\,(1 - m/N)^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

a estas probabilidades se les llama **probabilidades geométricas** debido a que corresponden a los términos de una serie geométrica.

A.6 DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Si la $P(\boldsymbol{B})$ no es igual a cero, entonces la probabilidad condicional de $\boldsymbol{A}$ en relación con $\boldsymbol{B}$, es decir, la probabilidad de $\boldsymbol{A}$ dado $\boldsymbol{B}$, es

$$P(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) = \frac{P(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})}{P(\boldsymbol{B})} \tag{A.6.1}$$

A.7 EVENTOS INDEPENDIENTES.

En general, si $P(A|B) = P(A)$, se dice que el evento A es independiente del evento B, o sea, el evento A es independiente del evento B si la probabilidad del evento A, no se ve afectada por la incidencia o no incidencia de B.

El evento B es independiente del evento A, siempre que el evento A sea independiente del evento B, se acostumbra a decir simplemente que A y B son independientes siempre que uno es independiente del otro. Si los eventos A y B no son independientes, se dice que son dependientes.

A.8 REGLA DE MULTIPLICACIÓN.

Si se multiplican ambos lados de la ecuación (A.6.1) por $P(B)$, se obtiene la fórmula siguiente, que permite calcular la probabilidad de que ocurrirán dos eventos:

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B) \tag{A.8.1}$$

Esto es, la probabilidad de que ocurran dos eventos es el resultado de la probabilidad de que uno de los eventos ocurrirá dado que ha ocurrido el primer evento. Como no importa qué evento esté representado por A y cuál por B, la fórmula anterior también se puede escribir como:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A). \tag{A.8.2}$$

Cuando A y B son independientes, se puede sustituir $P(A)$ por $P(A|B)$ en (A.8.1) o en (A.8.2) y se obtiene:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B). \tag{A.8.3}$$

Es decir, la probabilidad de que ocurrirán dos eventos independientes es simplemente el producto de sus probabilidades respectivas.

Lo anterior se puede generalizar fácilmente, de manera que se aplique a tres o más eventos independientes.

ANEXO B.

LISTADO DEL SISTEMA

TACHTLI.

```
#include "alloc.h"
#include "conio.h"
#include "dos.h"
#include "graphics.h"
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "string.h"

#define F1 59
#define F2 60
#define F3 61
#define F4 62
#define MAX 5
#define SALIR 5

int aa(short int x);
void ayuda();
void anadec();
void cambio();
void caminos();
void caminos1(unsigned short int l);
void casop();
void casalt();
void casalt1();
void checar(unsigned short int co);
void decision();
void despedida();
void entrentamiento();
void fin();
void flecha();
void hechizo();
void impri();
void impri1();
void ini();
void inimc();
void inimc1();
void inimcp();
void inimd();
void inimh();
void inimdm1(short int l, short int l1);
void inimdm2();
void inima1(unsigned short int l);
void inima2(unsigned short int l);
void inimpg();
void inipp();
void juego();
```

```
void jugan();
void llemd();
int menu(int *op);
int menuprincipal();
void perdido1();
void perdido();
void pres();
float rango();
void senal(short int y, short int z);
float senal1();
void trib();
unsigned short int tributo();
void zonapant();

float md1[15], md2[15];
short int map[90][90], ma[90][90], gm, mjr, mmb, nog, ng, w, ww, x;
unsigned short int mc[9][10], md[15][4], mdg[9][10][2], mdg1[8][8], mdm[9][10],
 mh[5][9][10], mp[8][6], mpp[8][3], mt[4][2], vec[11], vec1[11], vec2[17], vecop[15],
  al, alt, band, ban5, cini, ch, co, col, col1, contador, cp, d, dt, dtn, ef, jug,
  jt, ll;

void main() {
 int elij, elije = 0, gd, gmm, opcion, opciones;
 unsigned short int i, ind, j, l, ll;

 randomize();
 gd = DETECT;
 initgraph(&gd,&gmm,"c:\\TC\\BGI");        /* Inicializa el modo gr fico */
 setbkcolor(1);
 clearviewport();
 while(opciones!=F3) {
  opciones = menuprincipal();
  switch(opciones) {
   case F1: ayuda(); break;
   case F2:
         opcion = 1;
         elije = 0;
         while(elije!=5) {
          elije = menu(&opcion);
          if(elije!=5) {
           inimh();                    /* Inicializa las matrices correspondientes */
           switch(elije) {             /*        a la opcion elegida           */
            case 1: opcion=1; inipp(); inimcp(); jug=8; break;
            case 2: opcion=1; inimcp(); inimpg(); break;
            case 3: opcion=1; inipp();  inimc(); jug=8; break;
            case 4: opcion=1; inimpg(); inimc();  break;
           }
           ini();
           clearviewport();
           pres();
           jugan();
```

```
            elije = 0;
            closegraph();
        initgraph(&gd,&gmm,"c:\\TC\\BGI");
           }
           opcion = 1;
          }
           break;
    case F3: despedida(); break;
  }
 }
 closegraph();
}

int menu(int *op)  {                      /* Despliega el men£ del juego */
 int aux, c, i, color;

 clearviewport();
 setbkcolor(1);
 setcolor(15);
 rectangle(130, 100, 460, 420);
 setfillstyle(1, 15);
 floodfill(136, 400, 15);
 setcolor(3);
 rectangle(150, 80, 480, 400);
 setfillstyle(1, 3);
 floodfill(152, 82, 3);
 aux=*op;
 for(;;) {
  for(i=1; i<6; i++) {
   if(i==aux) color = 12;
   else color=15;
   setcolor(1);
   settextstyle(SANS_SERIF_FONT, HORIZ_DIR, 4);
   outtextxy(270, 85, " MENU");
   settextstyle(2, HORIZ_DIR, 5);
   setcolor(0);
   switch(i) {
        case 1:
          ellipse(322, 150, 0, 360, 90, 18);
          setfillstyle(1, color);
          floodfill(323, 151, 0);
          outtextxy(265, 140, "JUEGO CON FICHAS");
          outtextxy(267, 152, " Y TABLERO FIJO");
          break;
        case 2:
          ellipse(322, 200, 0, 360, 90, 18);
          setfillstyle(1, color);
          floodfill(323, 202, 0);
          outtextxy(262, 190, "JUEGO CON TABLERO");
          outtextxy(262, 202, "     FIJO");
          break;
```

```
            case 3:
             ellipse(322, 250, 0, 360, 90, 18);
             setfillstyle(1, color);
             floodfill(323, 253, 0);
             outtextxy(264, 240, "JUEGO CON FICHAS");
             outtextxy(264, 252, "     FIJAS");
             break;
            case 4:
             ellipse(322, 300, 0, 360, 90, 18);
             setfillstyle(1, color);
             floodfill(323, 303, 0);
             outtextxy(259, 290, "JUEGO CON FICHAS Y");
             outtextxy(261, 302, "TABLERO ALEATORIO");
             break;
            case 5:
             ellipse(322, 350, 0, 360, 90, 18);
             setfillstyle(1, color);
             floodfill(323, 353, 0);
             outtextxy(310, 350, "EXIT");
             break;
      }
    }
   c = getch();
   if(!c) {
    c = getch();
    switch(c) {
          case 80:
           if(aux==5) aux = 1;
           else aux++;
           break;
          case 72:
           if(aux== 1) aux = 5;
           else aux--;
           break;
    }
   }
   else
    switch(c) {
          case 13:
           *op = aux;
           return *op;
           default: printf("%c",7);
          }
    }
}

int menuprincipal()  {                /* Despliega las opciones del sistema */
 unsigned short int i;
 int c, *op;

 clearviewport();
```

```
sethkcolor(1);
*op = 0;
for(;;) {
 settextstyle(4, 0, 6);
 setcolor(9);
 outtextxy(130, 180, "      A");
 for(i=0; i<60; i++) {
  setcolor(9);
  if(i>27) outtextxy(135, 80, " BIENVENIDO");
  if(i<28) outtextxy(5+i*5, 80, " BIENVENIDO");
  if(i==59) outtextxy(126, 280, "  TACHTLI");
  if(i<59) outtextxy(465-i*5, 280, "  TACHTLI");
  setcolor(0);
  if(i<33) outtextxy(5+i*5, 80, " BIENVENIDO");
  if(i<59) outtextxy(465-i*5, 280, "  TACHTLI");
  sound(i*5+10);
  delay(100);
  nosound();
 }
 settextstyle(0, 0, 2);
 setcolor(12);
 setlinestyle(0, 0, 1);
 rectangle(2, 425, 637, 477);
 outtextxy(50, 450, "F1 = HELP");
 outtextxy(250, 450, "F2 = MENU");
 outtextxy(450, 450, "F3 = EXIT");
 c = getch();
 If(!c) {
  c = getch();
  switch(c) {
       case 59: *op=59; break;
       case 60: *op=60; break;
       case 61: *op=61; break;
       default: printf("%c",7);
  }
  return *op;
 }
}
}

void ini()  {                          /* Inicializa la matriz de incidencia mi, la  */
 unsigned short int i, j, k;           /* de distancia m¡nima a la meta mdm, y la  */
                                       /*     matriz mt (jugadores ganadores)        */

 for(i=0; i<9; i++)
  for(j=0; j<10; j++)
   for(k=0; k<2; k++, mdg[i][j][k] = 99)
 for(i=0; i<8; i++)
  for(j=0; j<8; j++, mdg1[i][j]=0)
 for(i=0; i<90; i++)
  for(j=0; j<90; j++, ma[i][j] = 0)
```

```
 inima1(0);
 inima1(31);
 inima2(0);
 inima2(7);
 ma[25][71] = ma[56][78] = ma[62][63] = ma[62][65] = ma[63][64] = 1;
 ma[63][66] = ma[64][69] = ma[64][67] = ma[68][69] = ma[65][66] = 1;
 ma[67][68] = ma[66][72] = ma[67][79] = ma[15][73] = ma[46][80] = ma[66][67] = 1;
 ma[74][84] = ma[75][85] = ma[82][87] = ma[81][86] = ma[76][83] = ma[15][84] = 1;
 ma[84][85] = ma[85][88] = ma[87][88] = ma[86][87] = ma[46][86] = ma[72][79] = 1;
 ma[71][25] = ma[78][56] = ma[63][62] = ma[65][62] = ma[64][63] = 1;
 ma[66][63] = ma[69][64] = ma[67][64] = ma[69][68] = ma[66][65] = 1;
 ma[68][67] = ma[72][66] = ma[79][67] = ma[73][15] = ma[80][46] = ma[67][66] = 1;
 ma[84][74] = ma[85][75] = ma[87][82] = ma[86][81] = ma[83][76] = ma[84][15] = 1;
 ma[85][84] = ma[88][85] = ma[88][87] = ma[87][86] = ma[86][46] = ma[79][72] = 1;
 for(i=0; i<9; i++)
   for(j=0; j<10; j++) {
     if((i<4)&&(j<2)) mt[i][j] = 9;
     if((i<8)&&(j<3)) mpp[i][j] = 9;
     mdm[i][j] = 0;
   }
 inimdm1(0,0);
 inimdm1(3,1);
 inimdm2();
}

void inima1(unsigned short int l) {          /* Inicializa  la matriz de  incidencia mi */
 unsigned short int i;                       /*               (continuación)             */

 for(i=0; i<=8; i++) ma[l+i][l+i+1] = ma[l+i+16][l+i+17] = ma[l+i+1][l+i] = ma[l+i+17][l+i+16] = 1;
 for(i=1; i<3; i++) {
   ma[l+i+13][89] = ma[l+16+2*(i-1)][l+26+2*(i-1)] = ma[l+17+3*(i-1)][l+27+3*(i-1)] = 1;
   ma[l+26+2*(i-1)][l+16+2*(i-1)] = ma[l+27+3*(i-1)][l+17+3*(i-1)] = 1;
 }
 for(i=0; i<=3; i++) {
   ma[l+i+10][l+i+11] = ma[l+i+10][l+i+26] = ma[l+i+26][l+i+27] = ma[l+i+5][l+i+21] = 1;
   ma[l+i+11][l+i+10] = ma[l+i+26][l+i+10] = ma[l+i+27][l+i+26] = ma[l+i+21][l+i+5] = 1;
 }
 ma[l+9][l+25] = ma[l+0][l+16] = ma[l+3][l+19] = 1;
 ma[l+25][l+9] = ma[l+16][l+0] = ma[l+19][l+3] = 1;
}

void inima2(unsigned short int l)  {      /* Inicializa la matriz ma (continuación) */
 ma[l+70][l+71] = ma[l+70][l+74] = ma[l+71][l+72] = ma[l+71][l+75] = 1;
 ma[l+72][l+76] = ma[l+73][l+74] = ma[l+75][l+76] = ma[l+74][l+75] = 1;
 ma[l+71][l+70] = ma[l+74][l+70] = ma[l+72][l+71] = ma[l+75][l+71] = 1;
 ma[l+76][l+72] = ma[l+74][l+73] = ma[l+76][l+75] = ma[l+75][l+74] = 1;
}

void inimc() {                                          /* Inicializa la matriz de clasificación de */
 unsigned short int i, j ,k, nd, vecpan[6], vecpan1[6];      /*        casillas  (continuación)         */
   randomize();
```

```
  zonapant();
  nd = aa(2); mc[1][7+nd] = 1; vec[0] = 17+nd; if(vec[0]==18) vec2[0] = 19; else vec2[0] = 18;
  nd = aa(2); mc[2][nd] = 1; vec[1] = 20+nd;  if(vec[1]==21) vec2[1] = 22; else vec2[1] = 21;
  nd = aa(2); mc[2][3+nd] = 1; vec[2] = 23+nd; if(vec[2]==24) vec2[2] = 25; else vec2[2] = 24;
  nd = aa(2); mc[5][4+nd] = 1; vec[3] = 54+nd; if(vec[3]==56) vec2[3] = 55; else vec2[3] = 56;
  nd = aa(2); mc[5][1+nd] = 1; vec[4] = 51+nd; if(vec[4]==53) vec2[4] = 52; else vec2[4] = 53;
  nd = aa(2); mc[3+nd][(8+nd) % 10] = 1;vec[5] = (3+nd)*10+(8+nd)%10; if(vec[5]==50) vec2[5] = 49; else
vec2[4] = 50;
  nd = aa(4);
  mc[6][5+nd] = 1;
  vec[6] = 65+nd;
  for(i=1; i<=2; i++) {
    nd = aa(6);
    switch(i) {
      case 1:
            mc[1][nd]=1; vec[7]=10+nd;
            do
              nd = aa(6);
            while(vec[7]==10+nd);
            mc[1][nd] = 1; vec[8] = 10+nd;
            break;
      case 2:
            mc[4][1+nd]=1; vec[9]=41+nd;
            do
              nd = aa(6);
            while(vec[9]==41+nd);
            mc[4][1+nd]=1; vec[10]=41+nd;
            break;
    }
  }
  switch (vec[6]) {
    case 66: for(i=0; i<3; i++, vec2[6+i]=60+7+i) break;
    case 67: vec2[6] = 66; vec2[7] = 68; vec2[8] = 69; break;
    case 68: vec2[6] = 66; vec2[7] = 67; vec2[8] = 69; break;
    case 69: for(i=0; i<3; i++, vec2[6+i] = 60+6+i) break;
  }
  for(i=1; i<=6; i++) {
    vecpan[i-1] = 10+i;
    vecpan1[i-1] = 40+i+1;
  }
  for(i=0; i<6; i++) {
    if((vec[7]==vecpan[i]) || (vec[8]==vecpan[i])) vecpan[i] = 0;
    if((vec[9]==vecpan1[i]) || (vec[10]==vecpan1[i])) vecpan1[i] = 0;
  }
  j = k = 0;
  for(i=0; i<6; i++) {
    if(vecpan[i]!=0) {
      vec2[9+j] = vecpan[i];
      j++;
    }
    if(vecpan1[i]!=0) {
```

```
    vec2[13+k] = vecpan1[i];
    k++;
   }
  }
  inimc1();
}

void inimc1()  {                      /* Inicializa la matriz de clasificaci¢n de */
unsigned short int i;                 /*                casillas                 */

  for(i=1; i<=2; i++) {
    mc[0][i*4+1*(i-1)] = mc[2][i*3] = mc[3][i*i+(i-1)] = mc[4][4*i*(i-1)] = 3;
    mc[5][i*4-1*(i-1)] = mc[6][i*2] = mc[7][i*4-2*(i-1)] = mc[8][i-1] = mc[i][7+2*(i-1)] = 3;
  }
  mc[6][0] = mc[8][3] = 3;
  mc[2][0] = mc[5][1] = mc[8][9] = 4;
  mc[0][0] = 5;
}

void inimcp()  {                 /* Inicializa la matriz de clasificaci¢n de  */
                                 /* casillas donde las casillas pantano son */
  zonapant();                    /*              determin¡sticas              */
  vec[0] = 18; vec[1] = 22; vec[2] = 24; vec[3] = 55; vec[4] = 52; vec[5] = 50;
  vec[6] = 68; vec[7] = 12; vec[8] = 16; vec[9] = 45; vec[10] = 43;
  mc[6][8] = mc[1][2] = mc[1][6] = mc[4][5] = mc[4][3] = mc[1][8] = mc[2][2] = mc[2][4] = 1;
  mc[5][5] = mc[5][2] = mc[5][0] = 1;
  inimc1();
  vec2[0] = 19; vec2[1] = 21; vec2[2] = 25; vec2[3] = 56; vec2[4] = 53; vec2[5] = 49;
  vec2[6] = 66; vec2[7] = 67; vec2[8] = 69; vec2[9] = 11; vec2[10] = 13; vec2[11] = 14;
  vec2[12] = 15; vec2[13] = 47; vec2[14] = 46; vec2[15] = 44; vec2[16] = 42;
}

void inimd()  {                  /* Inicializa la matriz de casillas opci¢n md */
 unsigned short int i,j;

 for(i=0; i<15; i++) {
  for(j=0; j<=3; j++)
   if(j==3) md[i][j] = 9;
   else md[i][j] = 0;
  md1[i] = md2[i] = 0;
 }
}

void inimdm1(short int l, short int l1)  {   /* Inicializa la matriz mdm (continuaci¢n) */
 unsigned short int i;

 for(i=0; i<5; i++, mdm[l+0][l1+i+i*2] = 8)
  mdm[l+2][l1+4] = 8;
  mdm[l+0][l1+2] = mdm[l+0][l1+8] = 9;
  mdm[l+0][l1+4] = mdm[l+0][l1+6] = mdm[l+1][l1+0] = mdm[l+1][l1+7] = mdm[l+2][l1+3] =
mdm[l+2][l1+5] = 7;
```

```
 mdm[l+1][l1+8] = mdm[l+2][l1+0] = mdm[l+2][l1+2] = mdm[l+2][l1+6] = mdm[l+2][l1+7] = 6;
 mdm[l+1][l1+9] = mdm[l+2][l1+1] = mdm[l+2][l1+8] = mdm[l+1][l1+1] = 5;
 mdm[l+2][l1+9] = mdm[l+1][l1+2] = mdm[l+3][l1+1] = 4;
 mdm[l+3][l1+0] = mdm[l+1][l1+3] = 3;
 mdm[l+1][l1+4] = 2;
 mdm[l+1][l1+5] = mdm[l+1][l1+6]=1;
}

void inimdm2() {                        /* Inicializa la matriz mdm (continuación) */
 unsigned short int i;

 mdm[6][3] = mdm[7][0] = 9;
 for (i=4; i<7; i++, mdm[6][i] = 8)
 mdm[6][9] = 8;
 mdm[7][2] = mdm[7][7] = mdm[7][9] = mdm[8][4] = 5;
 mdm[7][1] = mdm]7][6] = mdm[7][8] = mdm[8][9] = mdm[8][3] = 4;
 mdm[7][5] = mdm[8][6] = mdm[8][2] = mdm[8][8] = 3;
 mdm[8][5] = mdm[8][1] = mdm[8][7] = mdm[7][4] = 2;
 mdm[6][7] = mdm[6][8] = 7;
 mdm[7][3] = mdm[8][0] = 6;
 mdm[0][0] = 0;
}

void inimh() {                              /* Inicializa la matriz mh para el control de */
 unsigned short int l, j, k;                /*   de las casillas que pueden entrar a las   */
                                            /*            casillas de hechiceros           */

 for(i=0; i<9; i++)
  for(j=0; j<10; j++)
   for(k=1; k<6; k++, mh[k][i][j] = 0)
 for(j=1; j<10; j++) {
  if(j<9) mh[2][8][j] = 88;
  for(k=3; k<6; k++) {
   mh[k][7][j] = mh[k][8][0] = mh[k][7][9] = 88;
   if(j!=9) {
        mh[k][0][j] = 19;
        mh[k][8][j] = 88;
   }
   mh[k][1][j] = 19;
   mh[k][3][j+1] = mh[k][4][j+1] = 50;
  }
 }
 mh[2][8][1] = mh[3][0][8] = mh[3][1][1] = mh[3][1][5] = mh[3][3][9] = mh[3][4][2] = mh[3][4][6] = 0;
 for(j=1; j<4; j++) {
  mh[5][2][j] = 19;
  mh[5][5][j+1] = 50;
  for(k=2; k<5; k++) {
   mh[2][7][k+3] = mh[4][k+2][7] = mh[5][2][k+2] = mh[5][5][k+3] = mh[5][6][k+2] = mh[5][6][k+5] =
mh[1][8][3+(k-2)*2] = 88;
   mh[2][0][k+2] = mh[2][1][k+4] = mh[k][2][j] = 19;
   mh[2][3][k+3] = mh[2][4][k+5] = mh[k][5][j+1] = mh[k][5][9] = 50;
```

```
    for(i=2; i<5; i++) mh[k][6][i-2] = 50;
    if(j<2) mh[k][2][j+7] = mh[k][2][j+8] = 19;
    else mh[k][3][j-2] = 19;
  }
 }
 mh[3][2][4] = mh[4][2][4] = mh[0][0][4]= mh[0][2][1]= mh[1][2][9]= 19;
 mh[2][5][0] = mh[0][5][2]= mh[0][5][0]=mh[0][3][5]= mh[1][6][0]=50;
 for(k=0; k<2; k++) {
    mh[4][2+k*3][7+k*1] = mh[3][2+k*3][7+k*1] = mh[2][k*3][2+k*1] = mh[2][k*3][3+k*1] =
mh[2][1+k*3][3+k*1] = 19+k*31;
    mh[1][k*3][3+k*1] = mh[1][k*3][5+k*1] = mh[1][1+k*3][8+k*1] = mh[1][2+k*3][2+k*1] =
mh[1][3+k*3][1+k*1] = 19+k*31;
    mh[k+4][1][0] = mh[5][4][k] = mh[k+4][1][6] = mh[4][2][k+5] = mh[3][k+1][6] = mh[3][k+4][7] =
mh[2][7][2+k*7] = mh[2+k*3][4][7] = mh[4][k+5][6+k*2] = 88;
    mh[k+k*1][1][9] = 19;
    mh[3+k*1][5][5] = 50;
 }
 for(k=2; k<6; k++, mh[k][2][0] = 0)
 mh[4][4][1] = mh[5][0][9] = mh[0][8][6]= mh[0][8][8] = mh[1][7][6] = 88;
}

void inimpg() {                             /* Inicializa la matriz de puntos para la */
 unsigned short int i , j, jug1;            /* opción del juego con fichas aleatorias */

  jug = jug1 = 0;
  clearviewport();
  setbkcolor(0);
  setcolor(1);
  rectangle(2, 2, 638, 478);
  setfillstyle(1,1);
  floodfill(3, 3, 1);
  setcolor(11);
  settextstyle(SANS_SERIF_FONT, HORIZ_DIR, 3);
  outtextxy(280, 1, "TACHTLI");
  setcolor(0);
  setlinestyle(0, 3, 2);
  line(10, 30, 629, 30);
  line(629, 30, 629, 447);
  setcolor(9);
  setlinestyle(0, 3, 2);
  line(10, 30, 10, 447);
  line(10, 447, 629, 447);
  setcolor(13);
  settextstyle(2, HORIZ_DIR, 6);
  outtextxy(65, 242, "   ¿Cuantos jugadores van a participar? (2-8)");
  setcolor(0);
  setlinestyle(0, 3, 2);
  line(45, 232, 45, 274);
  line(45, 274, 592, 274);
  setcolor(9);
  setlinestyle(0, 3, 2);
```

```
   line(45, 232, 592, 232);
   line(592, 232, 592, 274);
   while (jug1==0) {
    gotoxy(63, 16);
    scanf("%d", &jug);
    gotoxy(63, 16);
    printf("  ");
   if((jug==2) || (jug==3) || (jug==4) || (jug==5) || (jug==6) || (jug==7) || (jug==8))
    jug1 = 1;
   else printf("%c",7);
  }
  for(i=0; i<jug; i++) {
   mp[i][0] = 1;
   mp[i][1] = 8;
   mp[i][3] = mp[i][4] = mp[i][5] = 0;
   mp[i][2] = tributo();
  }
}

void inipp() {                          /* Inicializa la  matriz de puntos  para el */
unsigned short int i;                   /*         juego con fichas fijas          */

  for (i=0; i<=7; i++) {
    mp[i][0] = 1; mp[i][1] = 8;
    mp[i][3] = mp[i][4] = mp[i][5]=0;
  }
  mp[0][2] = 0;
  mp[1][2] = mp[4][2] = mp[5][2] = mp[7][2] = 1;
  mp[2][2] = mp[3][2] = mp[6][2] = 2;
}

unsigned short int tributo() {          /* Genera aleatoriamente el n£mero de tributos */
 unsigned short int tribt, te, cas;     /*        con los que inicia cada jugador      */

  cas = aa(101) - 1;
  if(((cas<17) || (cas==17)) && ((cas>0) || (cas==0))) te = 0;
  if(((cas<62) || (cas==62)) && (cas>17))  te = 1;
  if(((cas<94) || (cas==94)) && (cas>62))  te = 2;
  if(((cas<100) || (cas==100)) && (cas>94)) te = 3;
  tribt = te;
  return tribt;
}

void zonapant()  {                      /* Determina las casillas que pertenecen a */
 unsigned short int i, j;               /*           las zonas de pantano          */
  for(i=0; i<9; i++)
   for(j=0; i<10; i++, mc[i][i] = 0)
  for(i=0; i<=1; i++)
   for(j=0;j<=1;j++)
    mc[1][j*1+8] = mc[2][j*1+((i*3)+1)] = mc[5][j*1+((i*3)+2)] = 2;
  mc[5][0] = mc[4][9] = 2;
```

```
  for(i=6; i<10; i++, mc[6][i] = 2)
  for (i=1; i<=6; i++) mc[1][i] = mc[4][i+1] = 2;
}

void flecha(unsigned short int l1,unsigned short int l2) {
                              /* Despliega una  flecha  en pantalla para */
  setcolor(l1);               /*   indicar que existen m s alternativas    */
  settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
  outtextxy(87, 418, "|");
  outtextxy(87, 421, "|");
  outtextxy(87, 422, "|");
  outtextxy(87, 423, "|");
  outtextxy(87, 420, "|");
  outtextxy(87, 419, "|");
  outtextxy(91, 424, "/");
  setcolor(l2);
  outtextxy(89, 418,"|");
  outtextxy(89, 420,"|");
  outtextxy(89, 419,"|");
  outtextxy(93, 424,"/");
}
                              /* Imprime en pantalla la matriz de puntos, */
void impri() {                /*   la  de la  distribuci n de  fichas en el    */
                              /* tablero y la de los jugadores  ganadores  */
  char vc[1]="", vc1[3]="", vc2[3]="", vc3[1]="", vc4[1]="", vc5[3]="";
  unsigned short int aux, i , j, n, m, mex, mex1;

  setcolor(15);
  settextstyle(2,HORIZ_DIR,4);
  for(i=0; i<jug; i++)  {
   if(i==jt) setcolor(12);
   itoa(i+1, vc1, 10);
   outtextxy(30, 118+i*12, vc1);
   if((mp[i][0]*3+mp[i][1]*2+mp[i][2]*1)>9) {
    itoa((mp[i][0]*3+mp[i][1]*2+mp[i][2]*1)/10, vc5, 10);
    outtextxy(184, 118+i*12, vc5);
    itoa((mp[i][0]*3+mp[i][1]*2+mp[i][2]*1)%10, vc5, 10);
    outtextxy(192, 118+i*12, vc5);
   }
   else {
    itoa((mp[i][0]*3+mp[i][1]*2+mp[i][2]*1)%10, vc5, 10);
    outtextxy(192, 118+i*12, vc5);
   }
   if(i==jt) setcolor(15);
   for(j=0; j<6; j++) {
     itoa(mp[i][j], vc1, 10);
     outtextxy(52+j*22, 118+i*12, vc1);
   }
  }
  if(jug>=4) aux = 4;
  else aux = jug;
```

```
for(i=0; i<aux; i++)
 for(j=0; j<2; j++) {
  gotoxy(36+j*9, 9+i);
  if(mt[i][j]==9)
        printf("%d", mt[i][j]-9);
  if((mt[i][j]!=9) && (j==0))
        printf("%d", mt[i][j]+1);
  if((mt[i][j]!=9) && (j==1))
        printf("%d", mt[i][j]);
 }
if(w==ww) {
 mex = mt[0][0];
 mex1 = mt[0][1];
 for(i=0; i<4; i++)
  if(mex1<mt[i][1]) {
        mex1 = mt[i][1];
        mex = mt[i][0];
  }
 itoa(mex+1, vc, 10);
 setcolor(12);
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 7);
 outtextxy(395, 202, vc);
 setcolor(14);
 outtextxy(397, 202, vc);
 contador = 5;
}
switch(jug) {
 case 2: aux = 535; break;
 case 3: aux = 523; break;
 case 4: aux = 510; break;
 case 5: aux = 503; break;
 case 6: aux = 490; break;
 case 7: aux = 483; break;
 case 8: aux = 470; break;
}
for(i=0; i<8; i++) {
 itoa(i+1, vc1, 10);
 outtextxy(455, 98+i*16, vc1);
 for(j=0; j<jug; j++) {
  if(i==0) {
        itoa(j+1, vc2, 10);
        outtextxy(aux+j*20, 85, vc2);
  }
  if((i==ng) && (j==jt)) setcolor(12);
  if(mdg1[i][j]>9) {
        m = mdg1[i][j]/10;
        n = mdg1[i][j]%10;
        itoa(m, vc3, 10);
        itoa(n, vc4, 10);
        outtextxy(aux+j*20, 98+i*16, vc3);
        outtextxy(aux+j*20, 98+i*16, vc4);
```

```
      }
      else {
            itoa(mdg1[i][j], vc3, 10);
            outtextxy(aux+j*20, 98+i*16, vc3);
      }
      if((i==ng) && (j==jt)) setcolor(15);
    }
  }
}

void impri1() {                      /* Borra de pantalla la matriz de puntos */
 unsigned short int i, j, rec;       /* y la de la distribución de fichas en  */
                                     /*          el tablero                   */
  setcolor(0);
  for(rec=0; rec<32; rec++){
   if(rec<25) {
    rectangle(27+rec*2, 117+rec*2, 198-rec*2, 214-rec*2);
    setfillstyle(3,0);
    floodfill(28,118,0);
   }
   rectangle(453+rec*2, 84+rec*2, 622-rec*2, 225-rec*2);
   setfillstyle(3,0);
   floodfill(454,85,0);
  }
}

void impri2() {                      /* Borra de pantalla la matriz mt */
 unsigned short int aux, i, j;

 if(jug>=4) aux = 4;
 else aux = jug;
 for(i=0; i<aux; i++)
   for(j=0; j<2; j++) {
     gotoxy(36+j*9, 9+i);
     if(mt[i][j]==9)
           printf("%d", mt[i][j]-9);
     if((mt[i][j]!=9) && (j==0))
           printf("%d", mt[i][j]+1);
     if((mt[i][j]!=9) && (j==1))
           printf("%d", mt[i][j]);
   }
}
void pres() {                        /* Despliega la pantalla del juego */
 setbkcolor(0);
 setcolor(3);
 rectangle(1, 1, 639, 479);
 setfillstyle(1, 3);
 floodfill(3, 3, 3);
 setcolor(0);
 settextstyle(SANS_SERIF_FONT, HORIZ_DIR, 3);
 outtextxy(280, 1, "TACHTLI");
```

```
rectangle(5, 26, 635, 450);
rectangle(6, 27, 634, 449);
rectangle(7, 30, 632, 447);
setlinestyle(0, 3, 2);
line(7, 245, 630, 245);
line(7, 246, 630, 246);
line(214, 30, 214, 245);
line(421, 30, 421, 245);
setcolor(11);
setlinestyle(0, 3, 2);
line(10, 241, 210, 241);
line(10, 242, 210, 242);
line(211, 35, 211, 241);
line(219, 226, 415, 226);
line(219, 227, 415, 227);
line(416, 50, 416, 226);
line(425, 241, 628, 241);
line(425, 242, 628, 242);
line(628, 35, 628, 241);
setcolor(0);
rectangle(10, 35, 210, 240);
setfillstyle(1, 0);
floodfill(12, 36, 0);
setcolor(12);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 6);
outtextxy(23, 40, "     PUNTAJE");
setcolor(14);
settextstyle(2, 1, 4);
outtextxy(28, 58, "JUGADOR");
outtextxy(50, 58, "SENALES");
outtextxy(72, 58, "GUERR.");
outtextxy(94, 58, "TRIBUTOS");
outtextxy(116, 58, "G.CONT.");
outtextxy(138, 58, "TIROS" );
outtextxy(160, 58, "ENFREN.");
outtextxy(182, 58, "PUNTOS");
setcolor(0);
rectangle(219, 50, 415, 225);
setfillstyle(1, 0);
floodfill(222, 57, 0);
setcolor(12);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 6);
outtextxy(259, 60, "PUNTAJE FINAL");
setcolor(14);
settextstyle(2, 0, 4);
outtextxy(263, 95, "JUGADOR");
outtextxy(337, 95, "PUNTOS");
setcolor(12);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 7);
outtextxy(225, 200, "MEXICA:JUGADOR ");
setcolor(14);
```

```
 outtextxy(227, 200, "MEXICA:JUGADOR ");
 setcolor(0);
 rectangle(425, 35, 627, 240);
 setfillstyle(1, 0);
 floodfill(451, 36, 0);
 setcolor(12);
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 5);
 outtextxy(430, 40, "DISTRIBUCION DE GUERREROS");
 setcolor(14);
 settextstyle(2, 0, 4);
 outtextxy(525, 60, "JUGADOR");
 outtextxy(529, 227, "CASILLA");
 settextstyle(2, 1, 4);
 outtextxy(440, 134, "GUERRERO");
 setcolor(11);
 rectangle(45, 253, 592, 295);
 setfillstyle(1, 11);
 floodfill(46, 254, 11);
 setcolor(0);
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
 outtextxy(65,260,"NO. DEL   JUGADOR  EN   TURNO :            NO. DE CASILLA DE LA POSICION
ACTUAL : ");
 outtextxy(65,278,"NO.DEL GUERRERO EN MOVIMIENTO :            TIPO DE CASILLA :      No.
DEL DADO : ");
 setlinestyle(0, 3, 3);
 line(43, 258, 43, 297);
 line(43, 297, 588, 297);
 setcolor(11);
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
 outtextxy(90, 313, "CASILLAS    TIPO DE   PUNTAJE    DISTANCIA   ENFRENTAMIENTO
JUGADOR ");
 outtextxy(90, 323, " OPCION     CASILLA   ESPERADO    A LA META             CONTRINCANTE
");
 setcolor(0);
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
 outtextxy(43, 435, ">> SE RECOMIENDA LA CASILLA :      << ");
 outtextxy(480, 435, "ELIJA SU OPCION :");
}

int aa(short int x)  {              /* Genera un n£mero aleatorio entero entre */
                                    /*        el cero y el n£mero x+1          */
  int a;
  a = 0;
  a = random(x)+1;
  return a;
}

void anadec()  {                    /* Aplica las reglas del juego */
 unsigned short int an1, an2;

 an1 = md[al][0] / 10;
```

```
an2 = md[al][0] % 10;
if((cini<=jug) && (coi==1) &&
  (mdg[an1][an2][0]!=99) && (mdg[an1][an2][1]!=99) &&
  (mdg[an1][an2][0]!=jt*10+ng) && (mdg[an1][an2][1]!=jt*10+ng))  {
  perdido();
}
else {
  gm = 0;
  if(md[al][2]==0) band = 0;
  if((md[al][2]==1) && (md[al][1]!=5)) cambio();
  switch (md[al][2]) {
   case 0: switch (md[al][1]) {
           case 0: case 2: cambio();  break;
           case 1: perdido(); break;
           case 3: trib(); break;
           case 4: hechizo(); cambio(); break;
          }
          break;
   case 1: switch(md[al][1]) {
           case 0: case 2: entrentamiento(); break;
           case 3: trib();
                   if(gm==0)
                   entrentamiento();
                   break;
           case 4: hechizo(); entrentamiento(); break;
          }
          break;
  }
 }
}

                                              /* Realiza el cambio de casilla del jugador */
void cambio()  {                              /* en turno de acuerdo con la casilla elegida*/
  mjr = mdg1[ng][jt]/10;
  nog = mdg1[ng][jt]%10;
  if(mdg[mjr][nog][0]==jt*10+ng) mdg[mjr][nog][0] = 99;
  else mdg[mjr][nog][1] = 99;
  mdg1[ng][jt] = md[al][0];
  mjr = mdg1[ng][jt]/10;
  nog = mdg1[ng][jt]%10;
  if(mdg[mjr][nog][0]==99) mdg[mjr][nog][0] = jt*10+ng;
  else mdg[mjr][nog][1] = jt*10+ng;
}

void caminos()  {                 /* Eleva la matriz de incidencia a la potencia*/
                                  /*      n igual con el "n£mero del dado"      */
 short int  mpc[90][90];
 unsigned short int i, j, K, t;

 ch = 100;
 for(i=0; i<90; i++)
```

```
  for (j=0; j<90; j++) {
    map[i][j] = 0;
    map[i][j] = ma[i][j];
  }
 for(t=1; t<=ll-1; t++) {
  for(i=0; i<90; i++)
   for(j=0; j<90; j++) {
        mpc[i][j] = 0;
        for(K=0; K<90; K++)
         mpc[i][j] = mpc[i][j] + map[i][K] * ma[K][j];
   }
   for(i=0; i<90; i++) {
        for(j=0; j<90; j++) {
         map[i][j] = 0;
         map[i][j] = mpc[i][j];
         if(cp-1==i)
          if(((j==88) || (j==19) || (j==50)) && (map[i][j]!=0)) ch = j;
        }
   }
 }
}

void casalt() {                    /* Verifica que la casilla opción v lida para */
 unsigned short int i;             /*     tomarse como casilla altemativa        */

  dt = 0;
  inimd();
  casop();
  if((vecop[coi-1]==0) && (dtn==0)) casalt1();
  else {
   co1 = 0;
   for(i=0; i<coi; i++)
    if(dt==0) {
        ef = 0;
        alt = 1;
        checar(vecop[i]);
        if(alt==1) {
         co = vecop[i];
         llemd();
         co1++;
        }
   }
  }
}

void casalt1() {                   /* Realiza lo correspondiente con el jugador */
 unsigned short int i;             /*        que llega a la casilla meta        */

  dt = 1;
  mt[w][0] = jt;
  mt[w][1] = mp[jt][0]*3+mp[jt][1]*2+mp[jt][2];
```

```
    mpp[jt][0] = mp[jt][0];
    mpp[jt][1] = mp[jt][1];
    mpp[jt][2] = mp[jt][2];
    w++;
    for(i=0; i<8; i++)
     if(mdg1[i][jt]!=0) {
       mjr = mdg1[i][jt] / 10;
       nog = mdg1[i][jt] % 10;
       if(mdg[mjr][nog][0]==jt*10+i) mdg[mjr][nog][0] = 99;
       else mdg[mjr][nog][1] = 99;
       mdg1[i][jt] = 0;
     }
   mp[jt][0] = 0;
   mp[jt][1] = 0;
   mp[jt][2] = 0;
   impri2();
   impri1();
   impri();
 }

void casop()   {                    /* Determina cu les son las casillas opcign */
  unsigned short int j;

  coi = 0;
  if(ll!=1) {
   mjr = cp/10;
   nog = cp%10;
   if((((mdm[mjr][nog]==5) && (ll==6)) || ((mdm[mjr][nog]==4) && (ll==5)) || ((mdm[mjr][nog]==3) &&
(ll==4)) ||
     ((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==3)) || ((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==2))) && (cp<=31)) {
     vecop[coi] = 15;
     coi++;
   }
   if((((mdm[mjr][nog]==5) && (ll==6)) || ((mdm[mjr][nog]==4) && (ll==5)) || ((mdm[mjr][nog]==3) &&
(ll==4)) ||
     ((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==3)) || ((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==2))) && ((cp>31)&&(cp<=62))) {
     vecop[coi] = 46;
     coi++;
   }
   if((((mdm[mjr][nog]==4) && (ll==6)) || ((mdm[mjr][nog]==3) && (ll==5)) || ((mdm[mjr][nog]==2) &&
(ll==4)) ||
     ((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==3))) && (cp<=31)) {
     vecop[coi] = 14;
     coi++;
   }
   if((((mdm[mjr][nog]==4) && (ll==6)) || ((mdm[mjr][nog]==3) && (ll==5)) || ((mdm[mjr][nog]==2) &&
(ll==4)) ||
     ((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==3))) && ((cp>31) && (cp<=62))) {
     vecop[coi] = 45;
     coi++;
   }
```

```
if((((mdm[mjr][nog]==3) && (ll==6)) || ((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==5)) || ((mdm[mjr][nog]==1) &&
(ll==4))) && (cp<=31)) {
    vecop[coi] = 13;
    coi++;
    vecop[coi] = 15;
    coi++;
    vecop[coi] = 30;
    coi++;
  }
  if((((mdm[mjr][nog]==3) && (ll==6)) || ((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==5)) || ((mdm[mjr][nog]==1) &&
(ll==4)))
     && ((cp>31) && (cp<=62))) {
    vecop[coi] = 44;
    coi++;
    vecop[coi] = 46;
    coi++;
    vecop[coi] = 61;
    coi++;
  }
  if((((mdm[mjr][nog]==5) && (ll==6)) && ((cp==72) || (cp==77))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==4) && (ll==5)) && ((cp==71) || (cp==76))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==3) && (ll==4)) && ((cp==75) || (cp==86))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==3)) && ((cp==74) || (cp==85))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==2)) && (cp==16))) {
    vecop[coi] = 16;
    coi++;
  }
  if((((mdm[mjr][nog]==5) && (ll==6)) && ((cp==79) || (cp==84))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==4) && (ll==5)) && ((cp==78) || (cp==83))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==3) && (ll==4)) && ((cp==82) || (cp==88))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==3)) && ((cp==81) || (cp==87))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==2)) && (cp==47))) {
    vecop[coi] = 47;
    coi++;
  }
  if((((mdm[mjr][nog]==4) && (ll==6)) && ((cp==71) || (cp==76))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==3) && (ll==5)) && ((cp==75) || (cp==86))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==4)) && ((cp==74) || (cp==85))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==3)) && (cp==16))) {
    vecop[coi] = 74;
    coi++;
    vecop[coi] = 85;
    coi++;
  }
  if((((mdm[mjr][nog]==4) && (ll==6)) && ((cp==78) || (cp==83))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==3) && (ll==5)) && ((cp==82) || (cp==88))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==4)) && ((cp==81) || (cp==87))) ||
    (((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==3)) && (cp==47))) {
    vecop[coi] = 81;
    coi++;
    vecop[coi] = 87;
```

```
  coi++;
 }
 if((((mdm[mjr][nog]==3) && (ll==6)) && ((cp==75) || (cp==86))) ||
   (((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==5)) && ((cp==74) || (cp==85))) ||
   (((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==4)) && (cp==16))) {
  vecop[coi] = 75;
  coi++;
  vecop[coi] = 86;
  coi++;
 }
 if((((mdm[mjr][nog]==3) && (ll==6)) && ((cp==82) || (cp==88))) ||
   (((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==5)) && ((cp==81) || (cp==87))) ||
   (((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==4)) && (cp==47))) {
  vecop[coi] = 82;
  coi++;
  vecop[coi] = 88;
  coi++;
 }
 if((((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==6)) || ((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==5))) && (cp<=31)) {
  vecop[coi] = 12;
  coi++;
  vecop[coi] = 29;
  coi++;
  vecop[coi] = 31;
  coi++;
 }
 if((((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==6)) || ((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==5))) && ((cp>31) && (cp<=62)))
{
  vecop[coi] = 43;
  coi++;
  vecop[coi] = 60;
  coi++;
  vecop[coi] = 62;
  coi++;
 }
 if((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==6) && ((cp==74) || (cp==85))) {
  vecop[coi] = 71;
  coi++;
  vecop[coi] = 74;
  coi++;
  vecop[coi] = 76;
  coi++;
  vecop[coi] = 85;
  coi++;
  vecop[coi] = 89;
  coi++;
 }
 if((mdm[mjr][nog]==2) && (ll==6) && ((cp==81) || (cp==87))) {
  vecop[coi] = 78;
  coi++;
  vecop[coi] = 81;
```

```
 coi++;
 vecop[coi] = 83;
 coi++;
 vecop[coi] = 87;
 coi++;
 vecop[coi] = 89;
 coi++;
}
if((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==6) && (cp==16)) {
 vecop[coi] = 72;
 coi++;
 vecop[coi] = 75;
 coi++;
 vecop[coi] = 77;
 coi++;
 vecop[coi] = 86;
 coi++;
 vecop[coi] = 88;
 coi++;
}
if((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==6) && (cp==47)) {
 vecop[coi] = 79;
 coi++;
 vecop[coi] = 82;
 coi++;
 vecop[coi] = 84;
 coi++;
 vecop[coi] = 86;
 coi++;
 vecop[coi] = 88;
 coi++;
}
if((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==6) && (cp<=31)) {
 vecop[coi] = 11;
 coi++;
 vecop[coi] = 13;
 coi++;
 vecop[coi] = 19;
 coi++;
 vecop[coi] = 21;
 coi++;
 vecop[coi] = 28;
 coi++;
 vecop[coi] = 30;
 coi++;
}
if((mdm[mjr][nog]==1) && (ll==6) && ((cp>31) || (cp<=62))) {
 vecop[coi] = 42;
 coi++;
 vecop[coi] = 44;
 coi++;
```

```
    vecop[coi] = 50;
    coi++;
    vecop[coi] = 52;
    coi++;
    vecop[coi] = 59;
    coi++;
    vecop[coi] = 61;
    coi++;
   }
   if(ll>2) {
    setcolor(9);
    settextstyle(2,HORIZ_DIR,4);
    outtextxy(258,360,"!");outtextxy(264,360,"!");outtextxy(270,360,"!");
    outtextxy(279,360,"p");outtextxy(287,360,"e");outtextxy(295,360,"n"); outtextxy(303,360,"s");
    outtextxy(311,360,"a");outtextxy(319,360,"n");outtextxy(327,360,"d");outtextxy(335,360,"o");
    outtextxy(345,360,"!");outtextxy(351,360,"!");outtextxy(357,360,"!");

   }
   caminos();
   for(j=0; j<90; j++)
    if(((map[cp-1][j]!=0) && (cp-1!=j)) || ((ch!=100) && (j==ch) && (cp-1!=ch))) {
          vecop[coi] = j+1;
          coi++;
    }
  }
  else {
   if((cini<=jug) && (d==1) && (band!=1)) {
    vecop[coi] = cp;
    coi++;
   }
   else
    for(j=0; j<90; j++)
          if((ma[cp-1][j]!=0) && (cp-1!=j)) {
           vecop[coi] = j+1;
           coi++;
          }
  }
  if(vecop[coi-1]==90)
   vecop[coi-1] = 0;
}

void checar(unsigned short int co)  {         /* Checa que la  casilla opción  pueda ser */
  ef = 0; mmb = 9; mjr = co/10; nog = co%10;    /*       alternativa para elegirla        */
  if((mdg[mjr][nog][0]!=99) && (mdg[mjr][nog][1]!=99)) {
   if(co==cp) {
          if(((mdg[mjr][nog][0]/10!=jt) && (mdg[mjr][nog][0]!=99) && (mdg[mjr][nog][1]!=99)) ||
((mdg[mjr][nog][1]/10!=jt) && (mdg[mjr][nog][1]!=99) && (mdg[mjr][nog][0]!=99))) {
            alt=1;
            ef=1;
            if(mdg[mjr][nog][0]/10!=jt) mmb=mdg[mjr][nog][0]/10;
            else mmb=mdg[mjr][nog][1]/10;
```

```
        }
        if((mdg[mjr][nog][0]/10==jt) && (mdg[mjr][nog][1]/10==jt)) {
         alt=1;
         ef=0;
        }
    }
    else  alt=0;
  }
  else {
    if(((mdg[mjr][nog][0]/10==jt) && (mdg[mjr][nog][1]==99)) || ((mdg[mjr][nog][1]/10==jt) &&
(mdg[mjr][nog][0]==99))) alt = 1;
    if(((mdg[mjr][nog][0]/10!=jt) && (mdg[mjr][nog][0]!=99) && (mdg[mjr][nog][1]==99)) ||
((mdg[mjr][nog][1]/10!=jt) &&
        (mdg[mjr][nog][0]==99)&&(mdg[mjr][nog][1]!=99))) {
      alt = 1;
      ef = 1;
      if(mdg[mjr][nog][0]/10!=jt) mmb = mdg[mjr][nog][0]/10;
      else mmb = mdg[mjr][nog][1]/10;
    }
    if((mdg[mjr][nog][0]==99) && (mdg[mjr][nog][1]==99)) alt = 1;
  }
}
                                      /* Despliega las casillas alternativas,   */
void decision() {                     /* calcula una casilla ¢ptima y pide al  */
                                      /*     al usuario eliga su opci¢n         */
 char *string, *string1, c1[1], vc1[1], vc11[1], vc112[1], vc12[1], vc13[1], vc3[1], vc4[1], vc5[1];
 int dec, ndig = 4, ndig1, opcion1, sing, var1, var2, var3, valor1;
 float mayor = 0, menor = 0, valor;
 unsigned short int i, io, jk, k, kk, ki, kj, kjb, lim, m, mm, my=0, n, nn, opcn1, rec, vecaux[5];

 if(l>2) [
  setcolor(3);
  for(rec=0; rec<10; rec++){
    rectangle(260+rec*2, 360+rec*2, 350-rec*2, 373-rec*2);
    setfillstyle(3, 3);
    floodfill(261, 361, 3);
  }
 }
 for(i=0; i<5; i++) vecaux[i] = 100;
 setcolor(0);
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
 m = cp / 10;
 n = cp % 10;
 itoa(jt+1, vc1, 10);
 outtextxy(252, 262, vc1);
 if(cp>9) {
  itoa(m, vc11, 10);
  itoa(n, vc112, 10);
  outtextxy(572, 262, vc11);
  outtextxy(579, 262, vc112);
 }
```

```
else {
 itoa(cp, vc11, 10);
 outtextxy(572, 262, vc11);
}
itoa(ng+1, vc12, 10);
outtextxy(252, 280, vc12);
itoa(d, vc13, 10);
outtextxy(572, 280, vc13);
setcolor(0);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
switch(mc[m][n]) {
 case 0:
  outtextxy(443, 280, "N");
  outtextxy(451, 280, "E");
  outtextxy(458, 280, "U");
  break;
 case 1: case 2:
  outtextxy(443, 280, "P");
  outtextxy(451, 280, "A");
  outtextxy(458, 280, "N");
  break;
 case 3:
  outtextxy(443, 280, "T");
  outtextxy(451, 280, "R");
  outtextxy(458, 280, "I");
  break;
 case 4:
  outtextxy(443, 280, "H");
  outtextxy(451, 280, "E");
  outtextxy(458, 280, "C");
  break;
 case 5:
  outtextxy(443, 280, "M");
  outtextxy(451, 280, "E");
  outtextxy(458, 280, "T");
  break;
}
mayor = md1[0];
my = k = 0;
for(i=0; i<col1; i++) {
 if(mayor<md1[i]) {
  mayor = md1[i];
  my = i;
  for(kk=0; kk<k+1; kk++)
  vecaux[kk] = 100;
  k = 0;
 }
 if(mayor==md1[i]) {
  vecaux[k] = i;
  k++;
 }
```

```
}
if(k!=0) {
  menor = md2[vecaux[0]];
  my = vecaux[0];
  for(kk=0; kk<k; kk++)
    if(md2[vecaux[kk]]<menor) {
          menor = md2[vecaux[kk]];
          my = vecaux[kk];
    }
}
setcolor(14);
if(md[my][0]>9) {
  itoa(md[my][0]/10, vc5, 10);
  outtextxy(215, 437, vc5);
  itoa(md[my][0]%10, vc5, 10);
  outtextxy(222, 437, vc5);
}
else {
  itoa(md[my][0]%10, vc5, 10);
  outtextxy(222, 437, vc5);
}
lim = 7;
kjb = 0;
kj = coi1 / 7;
if(coi1%7!=0) {
 kj++;
 kjb = 1;
}
for(ki=1; ki<=kj; ki++) {
 if((kjb==1) && (ki==kj)) lim = coi1 % 7;
 setcolor(0);
 for(i=0; i<lim; i++) {
  for(jk=0; jk<2; jk++) {
        outtextxy(252+jk*75, 334+i*15, ".");
        if(jk==0) valor = md1[i+(ki-1)*7];
        else valor = md2[i+(ki-1)*7];
        string = ecvt(valor, ndig, &dec, &sing);
        if(sing==1) outtextxy(231+jk*75, 334+i*15, "-");
        ndig1 = dec;
        switch(ndig1) {
         case 1: case 2:
          if(ndig1==1) {
           string = ecvt(atoi(string)/1000, 1, &dec, &sing); outtextxy(245+jk*75, 334+i*15, string);
           valor = valor-atoi(string);
          }
          else {
           string1 = ecvt(atoi(string)/1000, 1, &dec, &sing); outtextxy(238+jk*75, 334+i*15, string1);
           string = ecvt(valor, 4, &dec, &sing);
           string1 = ecvt(atoi(string)/100, 2, &dec, &sing);
           var2 = atoi(string1);
           string1 = ecvt(var2%10, 1, &dec, &sing);
```

```
  outtextxy(245+jk*75, 334+i*15, string1);
  valor = valor-var2;
 }
 string = ecvt(valor, ndig, &dec, &sing);
 ndig1 = dec;
 switch(ndig1) {
  case 1:
        outtextxy(259+jk*75, 334+i*15, "0");
        outtextxy(266+jk*75, 334+i*15, "0");
        break;
  case -1:
        outtextxy(259+jk*75, 334+i*15, "0");
        string = ecvt(valor, 1, &dec, &sing);
        outtextxy(266, 334+i*15, string);
        break;
  case 0:
        string = ecvt(valor, 2, &dec, &sing);
        if(atoi(string)>9) {
         itoa(atoi(string)/10, vc5, 10);
         outtextxy(259+jk*75, 334+i*15, vc5);
         itoa(atoi(string)%10, vc5, 10);
         outtextxy(266+jk*75, 334+i*15, vc5);
        }
        else {
         itoa(atoi(string), vc5, 10);
         outtextxy(259+jk*75, 334+i*15, vc5
        }
        break;
 }
 break;
case -1:
 outtextxy(245+jk*75, 334+i*15, "0");
 outtextxy(259+jk*75, 334+i*15, "0");
 string = ecvt(valor, 1, &dec, &sing);
 outtextxy(266, 334+i*15, string);
 break;
case 0:
 outtextxy(245+jk*75, 334+i*15 ,"0");
 string = ecvt(valor, 2, &dec, &sing);
 if(atoi(string)>9) {
  itoa(atoi(string)/10, vc5, 10);
  outtextxy(259+jk*75, 334+i*15, vc5);
  itoa(atoi(string)%10, vc5, 10);
  outtextxy(266+jk*75, 334+i*15, vc5);
 }
 else {
  itoa(atoi(string), vc5, 10);
  outtextxy(259+jk*75, 334+i*15, vc5);
 }
 break;
}
```

```
}
m = md[i+(ki-1)*7][0] / 10;
n = md[i+(ki-1)*7][0] % 10;
if(md[i+(ki-1)*7][0]>9) {
      itoa(m, vc3, 10);
      itoa(n, vc4, 10);
      outtextxy(107, 334+i*15, vc3);
      outtextxy(114, 334+i*15, vc4);
}
else {
      itoa(md[i+(ki-1)*7][0], vc1, 10);
      outtextxy(114, 334+i*15, vc1);
}
switch(mc[m][n]) {
      case 0:
        outtextxy(175, 334+i*15, "N");
        outtextxy(182, 334+i*15, "E");
        outtextxy(189, 334+i*15, "U");
        break;
      case 1: case 2:
        outtextxy(175, 334+i*15, "P");
        outtextxy(182, 334+i*15, "A");
        outtextxy(189, 334+i*15, "N");
        break;
      case 3:
        outtextxy(175, 334+i*15, "T");
        outtextxy(182, 334+i*15, "R");
        outtextxy(189, 334+i*15, "I");
        break;
      case 4:
        outtextxy(175, 334+i*15, "H");
        outtextxy(182, 334+i*15, "E");
        outtextxy(189, 334+i*15, "C");
        break;
      case 5:
        outtextxy(175, 334+i*15, "M");
        outtextxy(182, 334+i*15, "E");
        outtextxy(189, 334+i*15, "T");
        break;
}
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
switch(md[i+(ki-1)*7][2]) {
      case 0:
        outtextxy(520, 334+i*15, "-");
        outtextxy(410, 334+i*15, "N");
        outtextxy(418, 334+i*15, "O");
        break;
      case 1:
        if(mdg[m][n][0]!=99) itoa(mdg[m][n][0]/10+1, vc1, 10);
        else itoa(mdg[m][n][1]/10+1, vc1, 10);
        outtextxy(520, 334+i*15, vc1);
```

```
        outtextxy(410, 334+i*15, "S");
        outtextxy(418, 334+i*15, "I");
        break;
  }
}
if(kj!=1) {
 flecha(0, 11);
 getch();
 flecha(3, 3);
}
if(ki==kj) {
 if(coi1==1) {
      setcolor(12);
      outtextxy(575, 435, "x");
      delay(1000);
      setcolor(3);
      outtextxy(575, 435, "x");
      opcion1 = md[0][0];
 }
 else {
      opcn1 = 0;
      while(opcn1==0) {
       gotoxy(74, 25);
       scanf("%i", &opcion1);
       for(io=0; io<coi1; io++)
       if(opcion1!=md[io][0]) opcn1 = opcn1+1;
       if(opcn1==coi1) {
        opcn1=0;
        gotoxy(74, 25);
        printf("  ");
        printf("%c",7);
       }
      }
 }
 gotoxy(74, 25);
 printf("  ");
 mm = opcion1 / 10;
 nn = opcion1 % 10;
 if(mc[mm][nn]==2)
      for(i=0; i<16; i++)
 if(opcion1==vec2[i]) vec2[i] = 0;
 if(mc[mm][nn]==1)
      for(i=0; i<11; i++)
 if(opcion1==vec1[i]) vec1[i] = 0;
 for(al=0; md[al][0]!=opcion1; al++);
 setcolor(11);
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
 outtextxy(252, 262, vc1);
 outtextxy(254, 262, vc1);
 if(cp>9) {
      outtextxy(572, 262, vc11);
```

```
        outtextxy(579, 262, vc112);
    }
    else outtextxy(572,262,vc11);
    outtextxy(252,280,vc12);
    outtextxy(572,280,vc13);
    switch(mc[m][n]) {
        case 0:
         outtextxy(443, 280, "N");
         outtextxy(451, 280, "E");
         outtextxy(458, 280, "U");
         break;
        case 1: case 2:
         outtextxy(443, 280, "P");
         outtextxy(451, 280, "A");
         outtextxy(458, 280, "N");
         break;
        case 3:
         outtextxy(443, 280, "T");
         outtextxy(451, 280, "R");
         outtextxy(458, 280, "I");
         break;
        case 4:
         outtextxy(443, 280, "H");
         outtextxy(451, 280, "E");
         outtextxy(458, 280, "C");
         break;
        case 5:
         outtextxy(443, 280, "M");
         outtextxy(451, 280, "E");
         outtextxy(458, 280, "T");
         break;
    }
    setcolor(3);
    if(md[my][0]>9) {
        itoa(md[my][0]/10, vc5, 10);
        outtextxy(215, 437, vc5);
        itoa(md[my][0]%10, vc5, 10);
        outtextxy(222, 437, vc5);
    }
    else {
        itoa(md[my][0]%10, vc5, 10);
        outtextxy(222, 437, vc5);
    }
   }
   setcolor(3);
   for(rec=0; rec<17; rec++){
    rectangle(86+rec*3, 334+rec*3, 530-rec*3, 430-rec*3);
    setfillstyle(3, 3);
    floodfill(88, 335, 3);
   }
  }
```

```
 if(opcion1==0) {
  dtn = 0;
  casalt1();
 }
}

void entrentamiento() {                /* Realiza el enfrentamiento entre jugadores */
 unsigned short int dd = 0;           /*              adversarios              */
 char vc1[1];

 setcolor(9);
 settextstyle(2,HORIZ_DIR,4);
 outtextxy(258, 360, "E"); outtextxy(266, 360, "n"); outtextxy(274, 360, "f");
 outtextxy(282, 360, "r"); outtextxy(290, 360, "e"); outtextxy(298, 360, "n"); outtextxy(306, 360, "t");
 outtextxy(314, 360, "a"); outtextxy(322, 360, "m"); outtextxy(330, 360, "i"); outtextxy(338, 360, "e");
 outtextxy(346, 360, "n"); outtextxy(354, 360, "t"); outtextxy(362, 360, "o");
 band = 0;
 mp[jt][4]++;
 mp[jt][5]++;
 setcolor(0);
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 5);
 dd = aa(6);
 itoa(dd, vc1, 10);
 outtextxy(572, 280, vc1);
 sound(440);
 delay(500);
 nosound();
 setcolor(11);
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 5);
 outtextxy(572, 280, vc1);
 switch (dd) {
  case 1: case 3: band = 1;break;
  case 5: senal(-1,1); perdido1(); break;
  case 6: senal(1,-1); perdido(); break;
 }
 setcolor(3);
 for(x=0; x<10; x++){
  rectangle(258+x*2, 360+x*2, 367-x*2, 373-x*2);
  setfillstyle(3, 3);
  floodfill(259, 361, 3);
 }
}

void fin() {                     /* Despliega la pantalla de fin de un juego */
 unsigned short int i, j, rec;

 for(i=0; i<jug; i++)
  for(j=0; j<3; j++) mp[i][j] = mpp[i][j];
 impri2();
 impri1();
 impri();
```

```
 setcolor(3);
 for(rec=0; rec<35; rec++) {
  rectangle(40+rec*3, 252+rec*3, 627-rec*3, 442-rec*3);
  setfillstyle(3, 3);
  floodfill(88, 335, 3);
 }
 gotoxy(35, 20);
 printf(">>> FIN <<<");
 gotoxy(22, 25);
 printf("Presiona una tecla para salir al menu.");
 getch();
}

void hechizo()  {                         /* Aplica la regla del hechizamiento */
  if (mp[jt][3]>=2) {
    mjr = mp[jt][3] / 2;
    mp[jt][2] = mp[jt][2] + mjr;
    mp[jt][3] = mp[jt][3] - mjr*2;
  }
}

void juego()  {                          /* Lleva a cabo la realizaci¢n del juego */
 casalt();
 if(dt==0) {
  decision();
  if((coil==0) && (cini>jug)) { }
  else {
   if(dt==0) {
         anadec();
         impri1();
         impri();
   }
  }
 }
}

void jugan()  {                          /* Realiza la simulaci¢n del juego */
 unsigned short int b, cont, contww, e, l, k;
 int sali;

 for(k=0; k<11; k++) {
  vec1[k] = 0;
  vec1[k] = vec[k];
 }
 contador = 0;
 band = 0;
 cini = 0;
 w = 0;
 if(jug>4) ww = 4;
 else  ww = jug;
 while((w<ww) && (contador<5)) {
```

```
contww = 0;
for(jt=0; jt<jug; i++)
 if((mt[0][0]!=jt) && (mt[1][0]!=jt) && (mt[2][0]!=jt) && (mt[3][0]!=jt)) {
      d = aa(6);
      if(mp[jt][1]!=0) mp[jt][4] = mp[jt][4]+1;
      cini++;
      if(cini<=jug) {
        for(i=0; i<3; i++) {
          b = i*3 + 2;
          if(mdg[0][b][0]==99) mdg[0][b][0] = jt*10+i;
          else
      if(mdg[0][b][1]==99) mdg[0][b][1] = jt*10+i;
          switch(i) {
            case 0: e = 7; break;
            case 1: e = 6; break;
            case 2: e = 5; break;
          }
          if(mdg[3][b+1][0]==99) mdg[3][b+1][0] = jt*10+e;
          else if(mdg[3][b+1][1]==99) mdg[3][b+1][1] = jt*10+e;
          mdg1[e][jt] = b+31;
          mdg1[i][jt] = b;
        }
    if(mdg[6][3][0]==99) mdg[6][3][0] = jt*10+3;
        else if(mdg[6][3][1]==99) mdg[6][3][1] = jt*10+3;
        mdg1[3][jt] = 63;
        if(mdg[7][0][0]==99) mdg[7][0][0] = jt*10+4;
        else if(mdg[7][0][1]==99) mdg[7][0][1] = jt*10+4;
        mdg1[4][jt] = 70;
      }
      impri();
      cont = 0;
      for(k=0;k<8;k++)
        if(mdm[(mdg1[k][jt])/10][(mdg1[k][jt])%10]==d) cont++;
      ng = 0;
   while(ng<=7) {
        if((mdg1[ng][jt]!=0) && (contl=0) && (mp[jt][3]>=2) &&
         (mh[d-1][(mdg1[ng][jt])/10][(mdg1[ng][jt])%10]!=0)) {
          impri1();
          impri();
          cp = mdg1[ng][jt];
          ll = d;
          dm = 1;
          juego();
          while(band==1) {
            ll = 1;
            impri1();
            impri();
            cp = mdg1[ng][jt];
            juego();
          }
          if(mdg[mdg1[ng][jt]/10][mdg1[ng][jt]%10][0]==jt*10+i)
```

```
      mdg[mdg1[ng][jt]/10][mdg1[ng][jt]%10][0]=99;
     else mdg[mdg1[ng][jt]/10][mdg1[ng][jt]%10][1]=99;
     mdg1[ng][jt] = 0;
     impri1();
     impri();
    }
    ng++;
    sali = getch();
    if(!sali) {
     sali = getch();
     if(sali==62) break;
    }
   }
   dtn = 0;
   ng = 0;
   ll = 0;
   if((cini<=jug) && (d>1)) ll = d - 1;
   else ll = d;
   while(ng<=7) {
    if(mdg1[ng][jt]!=0) {
     impri1();
     impri();
     cp = mdg1[ng][jt];
     juego();
     while(band==1) {
      ll = 1;
      impri1();
      impri();
      cp = mdg1[ng][jt];
      juego();
     }
    }
    ng++;
    sali = getch();
    if(!sali) {
     sali = getch();
     if(sali==62) break;
    }
   }
   if(w==ww) {
    jt = jug;
    fin();
   }
   else {
    if(mp[jt][1]==0) contww++;
    jt++;
   }
  if(sali==62) break;
 }
 else jt++;
 contador++;
```

```
    if(contador==5) w = ww;
    if(contww==jug) {
          contador = 5;
          w = ww;
          impri2();
          impri1();
          impri();
          fin();
    }
    if(sali==62) break;
  }
}

void llemd()  {                         /* Llena la md */
  float r = 0, ss1 = 0;
  unsigned short int k;

  md[coi1][0] = co;
  md[coi1][1] = mc[mjr][nog];
  md[coi1][2] = ef;
  if((mc[mjr][nog]!=5) && (ef==0)) md2[coi1] = mdm[mjr][nog];
  if((mc[mjr][nog]!=5) && (ef==1)) md2[coi1] = (1.0/6)*15 + (1.0/3)*(mdm[mjr][nog]-1) +
(1.0/2)*(mdm[mjr][nog]);
  switch(ef) {
   case 0:
    switch(mc[mjr][nog]) {
         case 0:
          md1[coi1]=0;
          break;
         case 1: case 2:
          r = rango();
          md1[coi1] = r * (-2);
          md2[coi1] = r*15 + (1-r)*mdm[mjr][nog];
          for(k=0;k<11;k++)
           if(((co==vec[k])&&(vec1[k]==0)) || ((ban5==1)&&(mc[mjr][nog]==1))) {
            md1[coi1] = -2;
            md2[coi1] = 15;
           }
          break;
         case 3:
          if(mp[jt][2]==0) {
           md1[coi1] = -2;
           md2[coi1] = 15;
          }
          else md1[coi1] = -1;
          break;
         case 4:
          if(mp[jt][4]>=2) md1[coi1] = mp[jt][3]/2;
          else md1[coi1] = 0;
          break;
    }
```

```
    break;
   case 1:
    ss1 = senal1();
    switch(mc[mjr][nog]) {
         case 0: case 2: md1[coi1] = ss1 - 0.25; break;
         case 3:
          if(mp[jt][2]==0) {
           md1[coi1] = -2;
           md2[coi1] = 15;
          }
          else md1[coi1] = ss1 - 1.25;
          break;
         case 4:
          if(mp[jt][3]>=2) md1[coi1] = mp[jt][3]/2 + ss1 - 0.25;
          else md1[coi1] = ss1 - 0.25;
          break;
    }
    break;
  }
}

void perdido()  {                          /* Elimina al guerrero en movimiento */
  unsigned short int mn;

  mjr = mdg1[ng][jt]/10;
  nog = mdg1[ng][jt]%10;
  if((mdg[mjr][nog][0]!=jt*10+ng) && (mdg[mjr][nog][1]!=jt*10+ng)) {
   mdg1[ng][jt] = 0;
   mp[jt][1] = mp[jt][1] - 1;
  }
  else {
   if(mdg[mjr][nog][0]==jt*10+ng) {
        mn = mdg[mjr][nog][1]/10;
        mdg[mjr][nog][0] = 99;
   }
   else {
        mn = mdg[mjr][nog][0]/10;
        mdg[mjr][nog][1] = 99;
   }
   mdg1[ng][jt] = 0;
   mp[jt][1] = mp[jt][1] - 1;
   mp[mn][3] = mp[mn][3] + 1;
  }
}

void perdido1()  {                  /* Elimina al guerrero del jugador contrincante*/
  unsigned short int  mn,nn;

  mjr = mdg1[ng][jt] / 10;
  nog = mdg1[ng][jt] % 10;
  if (mdg[mjr][nog][0]!=jt*10+ng) {
```

```
    mn = mdg[mjr][nog][0] / 10;
    nn = mdg[mjr][nog][0] % 10;
    mdg[mjr][nog][0] = 99;
  }
  else {
    mn = mdg[mjr][nog][1] / 10;
    nn = mdg[mjr][nog][1] % 10;
    mdg[mjr][nog][1] = 99;
  }
  mdg1[nn][mn] = 0;
  mp[mn][1] = mp[mn][1] - 1;
  mp[jt][3] = mp[jt][3] + 1;
}

float rango() {                    /* Calcula la probabilidad de que la casilla */
 float valor = 0;                  /*     opci¢n sea casilla pantano       */

  ban5 = 0;
  switch(md[col1][0]) {
   case 18: case 19:
    if(vec1[0]==0) valor = 0.0;
    else {
         if(vec2[0]!=0) valor = 0.5;
         else ban5 = 1;
    }
    break;
   case 21: case 22:
    if(vec1[1]==0) valor = 0.0;
    else {
         if(vec2[1]!=0) valor = 0.5;
         else ban5 = 1;
    }
    break;
   case 24: case 25:
    if(vec1[2]==0) valor = 0.0;
    else {
         If(vec2[2]!=0) valor =  0.5;
         else ban5 = 1;
    }
    break;
   case 56: case 55:
    if(vec1[3]==0) valor = 0.0;
    else {
         If(vec2[3]!=0) valor = 0.5;
         else ban5 = 1;
    }
    break;
   case 53: case 52:
    if(vec1[4]==0) valor = 0.0;
    else {
         If(vec2[4]!=0) valor = 0.5;
```

```
        else ban5 = 1;
    }
    break;
case 50: case 49:
    if(vec1[5]==0) valor = 0.0;
    else {
        if(vec2[5]!=0) valor = 0.5;
        else ban5 = 1;
    }
    break;
case 66: case 67: case 68: case 69:
    if(vec1[6]==0) valor = 0.0;
    else {
        if((vec2[6]!=0) && (vec2[7]!=0) && (vec2[8]!=0)) valor = 0.25;
        if((vec2[6]!=0) && (vec2[7]==0) && (vec2[8]==0) ||
           (vec2[6]==0) && (vec2[7]!=0) && (vec2[8]==0) ||
           (vec2[6]==0) && (vec2[7]==0) && (vec2[8]!=0)) valor = 1.0/3;
        if((vec2[6]!=0) && (vec2[7]!=0) && (vec2[8]==0) ||
           (vec2[6]!=0) && (vec2[7]==0) && (vec2[8]!=0) ||
           (vec2[6]==0) && (vec2[7]!=0) && (vec2[8]!=0)) valor = 1.0/2;
        if((vec2[6]==0) && (vec2[7]==0) && (vec2[8]==0)) {
           valor = 0;
           ban5 = 1;
        }
    }
    break;
case 11: case 12: case 13: case 14: case 15: case 16:
    if((vec1[7]==0) && (vec1[8]==0)) valor=0.0;
    if(((vec1[7]!=0) && (vec1[8]==0)) || ((vec1[7]==0) && (vec1[8]!=0))) {
        if((vec2[9]!=0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]!=0))
          valor = 0.2; /* 1/5 */
        if((vec2[9]==0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]!=0) ||
           (vec2[9]!=0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]!=0) ||
           (vec2[9]!=0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]!=0) ||
           (vec2[9]!=0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]==0))
          valor = 1.0/4;
        if((vec2[9]==0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]!=0) ||
           (vec2[9]==0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]!=0) ||
           (vec2[9]==0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]==0) ||
           (vec2[9]!=0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]!=0) ||
           (vec2[9]==0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]==0) ||
           (vec2[9]!=0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]==0))
          valor = 1.0/3;
        if((vec2[9]==0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]!=0) ||
           (vec2[9]==0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]==0) ||
           (vec2[9]==0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]==0) ||
           (vec2[9]!=0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]==0))
          valor = 1.0/2;
        if((vec2[9]==0)&&(vec2[10]==0)&&(vec2[11]==0)&&(vec2[12]==0)) {
          ban5 = 1;
          valor = 0;
```

```
        }
    }
    if((vec1[7]!=0) && (vec1[8]!=0)) {
        if((vec2[9]!=0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]!=0))
         valor = 1.0/3;
        if((vec2[9]==0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]!=0) ||
          (vec2[9]!=0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]!=0) ||
          (vec2[9]!=0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]!=0) ||
          (vec2[9]!=0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]==0))
         valor = 2.0/5;
        if((vec2[9]==0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]!=0) ||
          (vec2[9]==0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]!=0) ||
          (vec2[9]==0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]==0) ||
          (vec2[9]!=0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]!=0) ||
          (vec2[9]==0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]==0) ||
          (vec2[9]!=0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]==0))
         valor = 2.0/4;
        if((vec2[9]==0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]!=0) ||
          (vec2[9]==0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]!=0) && (vec2[12]==0) ||
          (vec2[9]==0) && (vec2[10]!=0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]==0) ||
          (vec2[9]!=0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]==0))
         valor = 2.0/3;
        if((vec2[9]==0) && (vec2[10]==0) && (vec2[11]==0) && (vec2[12]==0))
         valor = 0;
    }
    break;
   case 42: case 43: case 44: case 45: case 46: case 47:
    if((vec1[9]==0) && (vec1[10]==0)) valor=0.0;
    if(((vec1[9]!=0) && (vec1[10]==0)) || ((vec1[9]==0) && (vec1[10]!=0))) {
        if((vec2[13]!=0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]!=0))
         valor = 0.2; /* 1/5 */
        if((vec2[13]==0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]!=0) ||
          (vec2[13]!=0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]!=0) ||
          (vec2[13]!=0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]!=0) ||
          (vec2[13]!=0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]==0))
         valor = 1.0/4;
        if((vec2[13]==0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]!=0) ||
          (vec2[13]==0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]!=0) ||
          (vec2[13]==0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]==0) ||
          (vec2[13]!=0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]!=0) ||
          (vec2[13]==0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]==0) ||
          (vec2[13]!=0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]==0))
         valor = 1.0/3;
        if((vec2[13]==0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]!=0) ||
          (vec2[13]==0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]==0) ||
          (vec2[13]==0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]==0) ||
          (vec2[13]!=0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]==0))
         valor = 1.0/2;
        if((vec2[13]==0)&&(vec2[14]==0)&&(vec2[15]==0)&&(vec2[16]==0)) {
         ban5 = 1;
         valor = 0;
```

```
        }
    }
    if((vec1[9]!=0) && (vec1[10]!=0)) {
        if((vec2[13]!=0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]!=0))
          valor = 1.0/3;
        if((vec2[13]==0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]!=0) ||
           (vec2[13]!=0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]!=0) ||
           (vec2[13]!=0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]!=0) ||
           (vec2[13]!=0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]==0))
          valor = 2.0/5;
        if((vec2[13]==0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]!=0) ||
           (vec2[13]==0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]!=0) ||
           (vec2[13]==0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]==0) ||
           (vec2[13]!=0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]!=0) ||
           (vec2[13]==0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]==0) ||
           (vec2[13]!=0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]==0))
          valor = 2.0/4;
        if((vec2[13]==0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]!=0) ||
           (vec2[13]==0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]!=0) && (vec2[16]==0) ||
           (vec2[13]==0) && (vec2[14]!=0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]==0) ||
           (vec2[13]!=0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]==0))
          valor = 2.0/3;
        if((vec2[13]==0) && (vec2[14]==0) && (vec2[15]==0) && (vec2[16]==0))
          valor = 0;
    }
    break;
  }
  return valor;
}

void senal(short int y, short int z)  {   /* Aplica la regla de las se□ales */
  unsigned short int va = 1;

  mjr = mdg1[ng][jt] / 10;
  nog = mdg1[ng][jt] % 10;
  if(mdg[mjr][nog][0]!=jt*10+ng) va = 0;
  if(((y==1) && (mp[jt][0])) || ((y==-1) && (mp[mdg[mjr][nog][va]/10][0]>0))) {
    mp[mdg[mjr][nog][va]/10][0] = mp[mdg[mjr][nog][va]/10][0] + y;
    mp[jt][0] = mp[jt][0] + z;
  }
}

float senal1() {                    /* Calcula el valor esperado de perder una */
  float s1 = 0;                     /*                 se□al                    */

  if(((mp[jt][0]>=1) && (mp[mmb][0]>=1)) || ((mp[jt][0]==0) && (mp[mmb][0]==0))) s1 = 0.0;
  if((mp[jt][0]==0) && (mp[mmb][0]>=1)) s1 = 0.5;
  if((mp[jt][0]>=1) && (mp[mmb][0]==0)) s1 = -0.5;
  return s1;
}
```

```
void trib() {                          /* Aplica la regla del tributo */
  if (mp[jt][2]!=0) {
    cambio();
    mp[jt][2] = mp[jt][2] - 1;
  }
  else {
    perdido();
    gm = 1;
  }
}

void despedida() {                     /* Despliega unas palabras de  despedida al */
 unsigned short int i;                 /*                   usuario                */

 clearviewport();
 setbkcolor(0);
 settextstyle(SANS_SERIF_FONT, HORIZ_DIR, 2);
 setcolor(15);
 for(i=0; i<11; i++) {
   outtextxy(120, 400-i*30, "  GRACIAS POR HABER HECHO USO DE ");
   setcolor(0);
   outtextxy(120, 400-i*30, "  GRACIAS POR HABER HECHO USO DE ");
   setcolor(15);
 }
 outtextxy(120, 80, "  GRACIAS POR HABER HECHO USO DE ");
 outtextxy(220, 130, "  ESTE SISTEMA");
 outtextxy(150, 250, "   ESPERO TE HAYA SERVIDO Y");
 outtextxy(150, 300, "   HAYA  SIDO DE TU  AGRADO.");
 outtextxy(250, 350, "   M.R.S.R.");
 sound(425);
 delay(200);
 nosound();
 outtextxy(70, 400, "  PRESIONA UNA TECLA PARA REGRESAR A MS-DOS");
 getch();
 clearviewport();
}
```

TACTLI2.C

```
#include "alloc.h"
#include "conio.h"
#include "dos.h"
#include "graphics.h"
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "string.h"

int aa(short int x);
void alternativ();
void borra();
void borraficha(unsigned short int guerrb);
void borraficha1(unsigned short int gueb);
void bcoce(unsigned short int guer, unsigned int casilla);
void error(unsigned int g1, unsigned int g2);
void fichasini();
void hechizo(unsigned short int guerr1, unsigned int cassilla1, unsigned short int ind1);
void imprialt(short int icoa2, int iy, int iyy, unsigned short int ii, unsigned short int ifaux2, unsigned short int
ih, short int imov, unsigned short int icont);
void imprificha(unsigned short int jugador, unsigned short int guerrero);
void inicia();
void juego2();
void linea(unsigned int l1, unsigned int l2, unsigned int l3, unsigned int l4, unsigned int l5, unsigned int l6,
unsigned int l7, unsigned int l8);
void pantalla();
void rectangulo(unsigned int r1, unsigned int r2, unsigned int r3, unsigned int r4, unsigned short int r5,
unsigned short int r6, unsigned int r7, unsigned int r8, unsigned int r9);
void secomu(unsigned short int gue, unsigned int cassilla, unsigned short int ind);
void verifica();
void verifica1();
unsigned short int veri1(unsigned short int vind, short int vcoa2, unsigned short int vcp2);
unsigned short int veri2(unsigned short int vind1, short int vvcoa2, unsigned short int vvcp2);
unsigned short int verific(int vy, int vyy);

int colum;
long unsigned int mtb[6][6];
unsigned int mp2[2][4], vdfm[8][2], vdfla[15][4], vecal[16][45], vecs[8][1], vcct[4][1], vect1[4][1];
unsigned short int ji, jt2, ngt, ns;

void main() {                    /* lleva a cabo la simulación de un juego completo */
  int gd, gm;
  unsigned short int contador;

  randomize();
  gd = DETECT;
  initgraph(&gd, &gm, "c:\\TC\\BGI");  /* inicializa el modo gr fico */
```

```
 setbkcolor(1);
 clearviewport();
 inicia();
 fichasini();
 contador = 0;
 jt2 = ji;
 while((mp2[0][1]!=0) && (mp2[1][0]!=0) && (contador<20)) {
   contador++;
   juego2();
   if(jt2==0) jt2 = 1;
   else jt2 = 0;
 }
 pantalla();
 gotoxy(54, 14); printf("          .         ");
 gotoxy(54, 15); printf(" >>>>>  FIN  <<<<< ");
 gotoxy(54, 16); printf("                    ");
 printf("%c",7);
 getch();
 clearviewport();
 closegraph();                    /* cierra el modo gr fico */
}

int aa(short int x)  {                         /* genera un n£mero aleatorio entero positivo entre -1 y x */
  int a;

  a = 0;
  a = random(x);
  return a;
}

void borra() {                                  /* borra una pantalla */
 unsigned short int i;

 setcolor(1);
 for(i=0; i<127; i++) rectangulo(180+i, 160+i, 590-i, 392-i, 1, 1, 185, 165, 1);
}

void error(unsigned int g1, unsigned int g2)  {
 gotoxy(g1, g2);                   /* manda un bip indicando al usuario que existe un error */
 printf("%c",7);
 printf("  ");
}

void linea(unsigned int l1, unsigned int l2, unsigned int l3, unsigned int l4, unsigned int l5, unsigned int l6,
unsigned int l7, unsigned int l8)  {
 line(l1, l2, l3, l4);                          /* imprime dos l¡neas de acuerdo con los par metros indicados */
 line(l5, l6, l7, l8);
}

void rectangulo(unsigned int r1, unsigned int r2, unsigned int r3, unsigned int r4, unsigned short int r5,
unsigned short int r6, unsigned int r7, unsigned int r8, unsigned int r9)  {
```

```
 rectangle(r1, r2, r3, r4);          /* imprime un rect ngulo de acuerdo con los par metros se?alados */
 setfillstyle(r5, r6);
 floodfill(r7, r8, r9);
}

void inicia() {                           /* inicializa las variables globales del programa */
 unsigned int contt, i, j, vectax[10][1], tr;

 randomize();
 for(i=0; i<15; i++) {
  vdfta[i][0] = vdfta[i][3] = 99;
  vdfta[i][1] = vdfta[i][2] = 0;
  if(i<5) vect[i][0] = 99;
  if(i<8) {
   vdfin[i][0] = vecs[i][0] = 99;
   vdfm[i][1] = 0;
  }
  for(j=0; j<6; j++) {
   if((i<6) && (j<6)) mtb[i][j] = 999999;
   if((i<4) && (j<4)) mp2[i][j] = 0;
  }
 }
 vectax[0][0] = 11; vectax[1][0] = 12; vectax[2][0] = 21; vectax[3][0] = 22; vectax[4][0] = 23;
 vectax[5][0] = 32; vectax[6][0] = 33; vectax[7][0] = 34; vectax[8][0] = 43; vectax[9][0] = 44;
 contt = 0;
 while(contt<4) {
  tr = aa(10);
  if(vectax[tr][0]!=0) {
   vect1[contt][0] = vect[contt][0] = vectax[tr][0];
   contt++;
   vectax[tr][0] = 0;
  }
 }
}

void fichasini()  {                /* pide al usuario proporcione el n£mero de fichas iniciales as¡ como su
ubicaci¢n en el tablero */
 unsigned short int aux, c, i, j, k, posi, vaux, vaxm[15][1], vaxm1[15][1], vaxta[15][1], vaxta1[15][1];
 char vc[1]="";

 vaxm[0][0] = 10;  vaxm[1][0] = 20;  vaxm[2][0] = 21;  vaxm[3][0] = 30;  vaxm[4][0] = 31;
 vaxm[5][0] = 32;  vaxm[6][0] = 40;  vaxm[7][0] = 41;  vaxm[8][0] = 42;  vaxm[9][0] = 43;
 vaxm[10][0] = 50; vaxm[11][0] = 51; vaxm[12][0] = 52; vaxm[13][0] = 53; vaxm[14][0] = 54;
 vaxta[0][0] = 1;  vaxta[1][0] = 2;  vaxta[2][0] = 3;  vaxta[3][0] = 4;  vaxta[4][0] = 5;
 vaxta[5][0] = 12; vaxta[6][0] = 13; vaxta[7][0] = 14; vaxta[8][0] = 15; vaxta[9][0] = 23;
 vaxta[10][0] = 24; vaxta[11][0] = 25; vaxta[12][0] = 34; vaxta[13][0] = 35; vaxta[14][0] = 45;
 for(i=0; i<15; i++)  {
  vaxm1[i][0] = vaxm[i][0];
  vaxta1[i][0] = vaxta[i][0];
 }
 clearviewport();
```

```
setbkcolor(0);
setcolor(1);
rectangulo(2, 2, 638, 478, 1, 1, 3, 3, 1);
setcolor(0);
settextstyle(SANS_SERIF_FONT, HORIZ_DIR, 3);
outtextxy(280, 1, "TACHTLI");
setcolor(0);
setlinestyle(0, 3, 2);
linea(10, 30, 629, 30, 629, 30, 629, 447);
setcolor(9);
setlinestyle(0, 3, 2);
linea(10, 30, 10, 447, 10, 447, 629, 447);
setcolor(11);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 6);
outtextxy(65, 92, "        DISTRIBUCION INICIAL DE LAS FICHAS ");
setcolor(0);
setlinestyle(0, 3, 2);
linea(45, 80, 45, 122, 45, 122, 592, 122);
linea(45, 150, 45, 395, 45, 395, 592, 395);
setcolor(9);
setlinestyle(0, 3, 2);
linea(45, 80, 592, 80, 592, 80, 592, 122);
linea(45, 150, 592, 150, 592, 150, 592, 395);
setcolor(13);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 6);
outtextxy(300, 160, "MEXICA");
setcolor(15);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 5);
for(i=0; i<8; i++) {
 vaux = 0;
 itoa(i+1, vc, 10);
 outtextxy(220, 215 + i*15, "POSICION DEL GUERRERO   :");
 outtextxy(395, 215 + i*15,  vc);
 while(vaux==0) {
  gotoxy(53, 14+i);
  scanf("%d", &vdfm[i][0]);
  k = 0;
  while((vdfm[i][0]!=vaxm[k][0]) && (k<15))  k++;
  if((k<15) && (vaxm1[k][0]!=0)) {
        vaux = 1;
        vaxm1[k][0] = 0;
        mtb[vdfm[i][0]/10][vdfm[i][0]%10] = i*1000+999;
  }
  else error(53, 14+i);
 }
}
mp2[0][1] = 8;
setcolor(13);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 6);
outtextxy(220, 335, "Numero de tributos : ");
mp2[0][2] = 31;
```

```
while(mp2[0][2]>30) {
  gotoxy(53, 22);
  scanf("%d", &mp2[0][2]);
  if(mp2[0][2]>30) error(53, 22);
}
borra();
setcolor(13);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 6);
outtextxy(265, 160, "TRIPLE ALIANZA");
outtextxy(220, 250, "Numero de guerreros : ");
mp2[1][1]=16;
while(mp2[1][1]>15) {
  gotoxy(54, 17);
  scanf("%d", &mp2[1][1]);
  if(mp2[1][1]>15) error(54, 17);
}
ngt = mp2[1][1];
outtextxy(220, 270, "Numero de se%ales : ");
mp2[1][0] = 9;
while((mp2[1][0]>8) || (mp2[1][0]>mp2[1][1]) || (mp2[1][0]<1)) {
  gotoxy(54, 18);
  scanf("%d", &mp2[1][0]);
  if((mp2[1][0]>8) || (mp2[1][0]>mp2[1][1]) || (mp2[1][0]<1)) error(54, 18);
}
ns = mp2[1][0];
outtextxy(220, 290, "Numero de tributos : ");
if(mp2[0][2]!=30) mp2[1][2] = 31 - mp2[0][2];
else mp2[1][2] = 30 - mp2[0][2];
while(mp2[1][2]>(30-mp2[0][2])) {
  gotoxy(54, 19);
  scanf("%d", &mp2[1][2]);
  if(mp2[1][2]>(30-mp2[0][2])) error(54, 19);
}
borra();
posi = 170;
setcolor(13);
outtextxy(440, 160, "TRIPLE ALIANZA");
setcolor(15);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 5);
for(i=0; i<mp2[1][1]; i++) {
  vaux = 0;
  itoa(i+1, vc, 10);
  outtextxy(220, posi + i*15, "POSICION DEL GUERRERO   :");
  outtextxy(395, posi + i*15,  vc);
  while(vaux==0) {
    gotoxy(54, 11+i);
    scanf("%d", &vdfta[i][0]);
    k = 0;
    while((vdfta[i][0]!=vaxta[k][0]) && (k<15)) k++;
    if((k<15) && (vaxta1[k][0]!=0)) {
        vaux = 1;
```

```
        vaxta1[k][0] = 0;
        mtb[vdfta[i][0]/10][vdfta[i][0]%10] = 1*100000+i*1000+999;
    }
    else error(54, 11+i);
  }
}
borra();
setcolor(13);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 5);
outtextxy(180, 335, "Indique el No del guerrero que la custodia");
setcolor(15);
for(i=0; i<mp2[1][0]; i++) {
  itoa(i+1, vc, 10);
  outtextxy(220, 215 + i*15, "POSICION DE LA SE%AL    :");
  outtextxy(395, 215 + i*15, vc);
  c = ngt + 1;
  while((c>ngt) || (vdfta[c-1][3]!=99)) {
    gotoxy(54, 14+i);
    scanf("%d", &c);
    if((c>ngt) || (vdfta[c-1][3]!=99)) error(54, 14+i);
  }
  vdfta[c-1][2] = 1;
  vdfta[c-1][3] = i;
  vecs[i][0] = vdfta[c-1][0];
}
borra();
setcolor(15);
outtextxy(220, 250, "JUGADOR INICIAL :  ");
setcolor(13);
outtextxy(220, 270, "MEXICA (0), TRIPLE ALIANZA (1)");
ji = 2;
while(ji>1) {
  gotoxy(54, 17);
  scanf("%d", &ji);
  if(ji>1) error(54, 17);
}
borra();

/*   aplica casilla tributo */

}

void juego2()  {                    /* simula una tirada del jugador en turno */
 pantalla();
 alternativ();
 verifica1();
 verifica();
}

void pantalla() {                   /* imprime el tablero y llama a la funci¢n que imprime las fichas */
 unsigned short int i, j, lim;
```

```
char vc[1]="";

clearviewport();
setbkcolor(0);
setcolor(15);
rectangulo(2, 2, 638, 478, 1, 15, 3, 3, 15);
rectangulo(350, 33, 626, 445, 1, 15, 353, 36, 15);
setcolor(4);
rectangulo(11, 31, 349, 445, 1, 4, 35, 36, 4);
setcolor(0);
settextstyle(SANS_SERIF_FONT, HORIZ_DIR, 3);
outtextxy(280, 1, "TACHTLI");
setlinestyle(0, 1, 3);
setcolor(4);
linea(10, 30, 630, 30, 350, 447, 629, 447);
setcolor(12);
linea(10, 30, 10, 447, 10, 447, 348, 447);
linea(350, 33, 350, 446, 629, 33, 629, 446);
setlinestyle(0, 3, 2);
for(i=0; i<3; i++) {
 setcolor(7);
 linea(253+i*25, 125+i*25, 105+i*25, 273+i*25, 253-i*25, 125-i*25, 105-i*25, 273-i*25);
 linea(105-i*25, 123+i*25, 253-i*25, 271+i*25, 105+i*25, 123-i*25, 253+i*25, 271-i*25);
 setcolor(8);
 linea(252+i*25, 124+i*25, 104+i*25, 272+i*25, 252-i*25, 124-i*25, 104-i*25, 272-i*25);
 linea(104-i*25, 124+i*25, 252-i*25, 272+i*25, 104+i*25, 124-i*25, 252+i*25, 272-i*25);
}
setcolor(8);
linea(178, 346, 326, 198, 327, 197, 179, 49);
linea(177, 49, 29, 197, 31, 197, 179, 345);
setcolor(7);
linea(177, 345, 325, 197, 326, 198, 178, 50);
linea(178, 50, 30, 198, 30, 198, 178, 346);
setcolor(12);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
for(i=0; i<6; i++) {
 itoa(i, vc, 10);
 outtextxy(54+i*25, 175-i*24, vc);
 itoa(10+i, vc, 10);
 outtextxy(74+i*25, 200-i*24, vc);
 itoa(20+i, vc, 10);
 outtextxy(96+i*25, 228-i*24, vc);
 itoa(30+i, vc, 10);
 outtextxy(122+i*25, 251-i*24, vc);
 itoa(40+i, vc, 10);
 outtextxy(147+i*25, 276-i*24, vc);
 itoa(50+i, vc, 10);
 outtextxy(172+i*25, 301-i*24, vc);
}
setcolor(14);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
```

```
outtextxy(50, 370, "GUERRERO MEXICA");
setcolor(13);
outtextxy(50, 380, "GUERRERO MEXICA INMIVILIZADO");
setcolor(1);
outtextxy(50, 390, "GUERRERO TRIPLE ALIANZA");
setcolor(9);
outtextxy(50, 400, "GUERRERO TRIPLE ALIANZA INMOVILIZADO");
setcolor(15);
outtextxy(50, 410, "SE%AL DE LA TRIPLE ALIANZA");
if(8<ngt) lim = ngt;
else lim = 8;
for(i=0; i<lim; i++) {
  if(i<ngt) {
    if(vdfta[i][0]!=99) imprificha(1,i);
    if(vdfta[i][2]!=0) imprificha(2,i);
  }
  if(i<8)
    if(vdfm[i][0]!=99) imprificha(0,i);
 }
}

void imprificha(unsigned short int jugador, unsigned short int guerrero) {
 char vc[1]="", vc1[2]="";
 int x1, x2, x3, x1i, x2i, y1, y2, y3;
 long unsigned int jgaux2, jgaux1, njax1, njax3;
 unsigned short int color, j, jgaux3, ngmax, njax2, njax4;
                                        /* imprime las fichas de acuerdo al estado que guarden en el
juego */
 switch (jugador) {
  case 0: switch (vdfm[guerrero][1]) {
            case 0: case 2: color = 14; break;
            case 1: color = 12; break;
           }
           x1i = vdfm[guerrero][0] % 10;
           x2i = vdfm[guerrero][0] / 10;
           njax1 = mtb[x2i][x1i] / 1000;
           njax2 = njax1 % 100;
           njax3 = mtb[x2i][x1i] % 1000;
           njax4 = njax3 % 100;
           jgaux1 = mtb[x2i][x1i] / 100000;
           jgaux2 = mtb[x2i][x1i] % 1000;
           jgaux3 = jgaux2 / 100;
           if(jgaux1==jgaux3) {
            if(njax2>njax4) ngmax = njax2;
            else ngmax = njax4;
            if(ngmax!=guerrero) jgaux1 = jgaux1+1;
            else {
                 x1 = 56 + x1i*25 + 24*x2i;
                 y1 = 191 - x1i*25 + 26*x2i - (x2i-2);
                 x2 = 67 + x1i*25 + 24*x2i;
                 y2 = 202 - x1i*25 + 26*x2i - (x2i-2);
```

```
                x3 = x1 + 4;
                y3 = y1 + 3;
            }
        }
        if(jgaux1!=jgaux3) {
          x1 = 42 + x1i*25 + 24*x2i;
          y1 = 191 - x1i*25 + 26*x2i - (x2i-2);
          x2 = 53 + x1i*25 + 24*x2i;
          y2 = 202 - x1i*25 + 26*x2i - (x2i-2);
          x3 = x1 + 4;
          y3 = y1 + 3;
        }
        break;
case 1: switch (vdfta[guerrero][1]) {
          case 0: case 2: color = 1; break;
          case 1: color = 9; break;
        }
        x1i = vdfta[guerrero][0] % 10;
        x2i = vdfta[guerrero][0] / 10;
        njax1 = mtb[x2i][x1i] / 1000;
        njax2 = njax1 % 100;
        njax3 = mtb[x2i][x1i] % 1000;
        njax4 = njax3 % 100;
        jgaux1 = mtb[x2i][x1i] / 100000;
        jgaux2 = mtb[x2i][x1i] % 1000;
        jgaux3 = jgaux2 / 100;
        if(jgaux1==jgaux3) {
          if(njax2>njax4) ngmax = njax2;
          else ngmax = njax4;
          if(ngmax!=guerrero) jgaux1 = jgaux1+1;
          else {
                x1 = 42 + x1i*25 + 24*x2i;
                y1 = 191 - x1i*25 + 26*x2i - (x2i-2);
                x2 = 53 + x1i*25 + 24*x2i;
                y2 = 202 - x1i*25 + 26*x2i - (x2i-2);
                x3 = x1 + 4;
                y3 = y1 + 3;
          }
        }
        if(jgaux1!=jgaux3) {
          x1 = 56 + x1i*25 + 24*x2i;
          y1 = 191 - x1i*25 + 26*x2i - (x2i-2);
          x2 = 67 + x1i*25 + 24*x2i;
          y2 = 202 - x1i*25 + 26*x2i - (x2i-2);
          x3 = x1 + 4;
          y3 = y1 + 3;
        }
        break;
case 2: color = 15;
        x1i = vdfta[guerrero][0] % 10;
        x2i = vdfta[guerrero][0] / 10;
```

```
            x1 = 51 + x1i*25 + 24*x2i;
            y1 = 206 - x1i*25 + 26*x2i - (x2i-2);
            x2 = 59 + x1i*25 + 24*x2i;
            y2 = 213 - x1i*25 + 26*x2i - (x2i-2);
            x3 = x1 + 3;
            y3 = y1 + 1;
            guerrero = vdfta[guerrero][3];
            break;
  }
  setcolor(color);
  rectangulo(x1, y1, x2, y2, 1, color, x1+2, y1+2, color);
  setcolor(0);
  settextstyle(2, HORIZ_DIR, 2);
  if(guerrero<10) {
   itoa(guerrero+1, vc, 10);
   outtextxy(x3, y3, vc);
  }
  else {
    itoa(guerrero+1, vc1, 10);
    outtextxy(x3-1, y3, vc1);
  }
}

void alternativ() {                              /* imprime el letrero de las casillas opci¢n, */
 unsigned short int i, j;          /* imprime el nombre del jugador en turno e */
 char vc[1]="";                   /* imprime el estado que guarda el juego en la */
                                              /*           t-,sima tirada           */
 setcolor(1);
 settextstyle(1, HORIZ_DIR, 1);
 if(jt2==0) outtextxy(470, 40, "MEXICA");
 else outtextxy(435, 40, "TRIPLE ALIANZA");
 setcolor(1);
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
 outtextxy(355, 70, "CASILLA GUERRERO NOTA   CASILLA GUERRERO NOTA");
 setcolor(4);
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
 outtextxy(470, 380, "RESUMEN");
 setcolor(12);
 outtextxy(355, 400, "         SE%ALES GUERREROS TRIBUTOS G.HECH.");
 outtextxy(355, 415, "MEXICA");
 outtextxy(355, 425, "T. ALIANZA");
 setcolor(6);
 for(i=0; i<2; i++)
  for(j=0; j<4; j++)
   if(mp2[i][j]>9) {
        itoa(mp2[i][j]/10, vc, 10);
        outtextxy(430+j*50, 415+i*10, vc);
        itoa(mp2[i][j]%10, vc, 10);
        outtextxy(435+j*50, 415+i*10, vc);
   }
   else {
```

```
            itoa(mp2[i][j], vc, 10);
            outtextxy(435+j*50, 415+i*10, vc);
    }
}

unsigned short int veri1(unsigned short int vind, short int vcoa2, unsigned short int vcp2) {
  unsigned short int vcoab2;
                                                  /* verifica que la casilla analizada (mov. de una casilla) se pueda
tomar como alternativa */

  if(((vcoa2>=0) && (vcoa2<6)) || ((vcoa2>9) && (vcoa2<16)) || ((vcoa2>19) && (vcoa2<26)) ||
((vcoa2>29) && (vcoa2<36)) ||
    ((vcoa2>39) && (vcoa2<46)) || ((vcoa2>49) && (vcoa2<56))) vcoab2 = 0;
  else  vcoab2 = 1;
  if(vcoab2==0)
    switch(vind) {
      case 0: case 3: if((vcoa2%10)==(vcp2%10)) vcoab2 = 0;
                      else vcoab2 = 1;
                      break;
      case 1: case 2: if((vcoa2/10)==(vcp2/10)) vcoab2 = 0;
                      else vcoab2 = 1;
                      break;
    }
  return vcoab2;
}


unsigned short int veri2(unsigned short int vind1, short int vvcoa2, unsigned short int vvcp2) {
  unsigned short int vcoab2;
                                                  /* verifica que la casilla analizada (mov. de dos casillas) se
pueda tomar como alternativa */

  if(((vvcoa2>=0) && (vvcoa2<6)) || ((vvcoa2>9) && (vvcoa2<16)) || ((vvcoa2>19) && (vvcoa2<26)) ||
((vvcoa2>29) && (vvcoa2<36)) ||
    ((vvcoa2>39) && (vvcoa2<46)) || ((vvcoa2>49) && (vvcoa2<56))) vcoab2 = 0;
  else  vcoab2 = 1;
  if(vcoab2==0)
    switch(vind1) {
      case 0: case 3: if((vvcoa2/10)==(vvcoa2%10)+((vvcp2/10)-(vvcp2%10))) vcoab2 = 0;
                      else vcoab2 = 1;
                      break;
      case 1: case 2: if(((vvcoa2/10)+(vvcoa2%10))==((vvcp2/10)+(vvcp2%10))) vcoab2 = 0;
                      else vcoab2 = 1;
                      break;
    }
  return vcoab2;
}

void imprialt(short int icoa2, int iy, int iyy, unsigned short int ii, unsigned short int ifaux2, unsigned short int
ih, short int imov, unsigned short int icont) {
  char vc[1]="";
```

```
                                          /* imprime las casillas alternativas */
  if((vect[0][0]==icoa2) && (vect1[0][0] == 99) || (vect[1][0]==icoa2) && (vect1[1][0] == 99) ||
    (vect[2][0]==icoa2) && (vect1[2][0] == 99) || (vect[3][0]==icoa2) && (vect1[3][0] == 99)) setcolor(3);
  vecal[icont][ii*3] = icoa2;
  if(icoa2>9) {
   itoa(icoa2/10, vc, 10);
   outtextxy(colum, iy+iyy*10, vc);
   itoa(icoa2%10, vc, 10);
   outtextxy(colum+5, iy+iyy*10, vc);
  }
  else {
   itoa(icoa2, vc, 10);
   outtextxy(colum+5, iy+iyy*10, vc);
  }
  itoa(ii+1, vc, 10);
  outtextxy(colum+50, iy+iyy*10, vc);
  if(ih==1) {
   if((imov==-20) || (imov==-10) || (imov==-2) || (imov==-1) || (imov==1) || (imov==2) || (imov==10) ||
(imov==20)) {
     if(((imov==-1) || (imov==1) || (imov==-10) || (imov==10)) && (jt2==0) && (vdfta[ifaux2][2]==1)) {
          outtextxy(colum+56, iy+iyy*10, "pelea senal");
          vecal[icont][ii*3+1] = 2;
     }
     else {
          outtextxy(colum+63, iy+iyy*10, "hechiza a");
          vecal[icont][ii*3+1] = 0;
     }
   }
   if((imov==-22) || (imov==-18) || (imov==-11) || (imov==-9) || (imov==9) || (imov==11) || (imov==18) ||
(imov==22)) {
     outtextxy(colum+77, iy+iyy*10, "come a");
     vecal[icont][ii*3+1] = 1;
   }
   itoa(ifaux2+1, vc, 10);
   outtextxy(colum+120, iy+iyy*10, vc);
   vecal[icont][ii*3+2] = ifaux2;
  }
  else outtextxy(colum+75, iy+iyy*10, "   -");
  setcolor(0);
}

unsigned short int verific(int vy, int vyy) {
  unsigned short int i,limp;
                                          /* inicia los limites de impresión para las casillas alternativas */
  limp = 0;
  if(vy+vyy*10>379) {
   if(colum==500) {
     setcolor(3);
     outtextxy(colum+5, vy+vyy*10, "    mas alternativas");
     outtextxy(colum+5, 10+vy+vyy*10, "    pulse una tecla");
     getch();
```

```
    setcolor(15);
    outtextxy(colum+5, vy+vyy*10, "    mas alternativas");
    outtextxy(colum+5, 10+vy+vyy*10, "    pulse una tecla");
    for(i=0; i<32; i++) rectangulo(500+i, 90+i,620-i, 370-i, 1, 15, 505+i*2, 95+i*2, 15);
         rectangulo(550, 90, 560, 370, 1, 15, 555, 95, 15);
/*    rectangle(560, 90, 560, 370, 1, 15, 565, 95, 15);  */
         setcolor(0);
    }
    limp = 1;
    colum = 500;
   }
   return limp;
}

void verifica1() {                        /* determina que casillas de acuerdo a los movimientos permitidos */
 int ctrib, cctrib, y, yy;           /* para  cada una  de las fichas del  jugador en turno  se pueden */
 short int coa2, coaa2, mov;         /* analizar   para   ser   consideradas   casillas   alternativas */
 unsigned int casilla, c1, c2, k;
 long unsigned int faux1, faaux1, jaux3, jaaux3, vaux, vaux2;
 unsigned short int cassi, co2,  coa21, coa22, coaa21, coaa22, coab2, coaab2, cont, cp2, faaux2, faux2, fich,
                      guer, h, i, ij, j, jaaux1, jaaux2, jaux1, jaux2, lim, sigue, vver;

 if(jt2==0) lim = 8;
 else lim = ngt;
 for(i=0; i<16; i++) {
  for(k=0; k<45; k++) vecal[i][k] = 99;
 }
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
 setcolor(0);
 y = 90;
 colum = 370;
 for(i=0; i<lim; i++) {
  getch();
  cont = 0;
  yy = 0;
  if(jt2==0) {
   c1 = vdfm[i][0];
   c2 = vdfm[i][1];
  }
  else {
   c1 = vdfta[i][0];
   c2 = vdfta[i][1];
  }
  if((c1!=99)&&(c2!=1)) {
   for(j=0; j<4; j++) {
        switch(j) {
         case 1: mov = -1;  break;
         case 2: mov = 1;   break;
         case 3: mov = 10;  break;
         case 0: mov = -10; break;
        }
```

```
if(jt2==0) cp2 = vdfm[i][0];
else cp2 = vdfta[i][0];
coab2 = 0;
coa2 = cp2 + mov;
coab2 = veri1(j, coa2, cp2);
if(coab2==0) {
 coa21 = coa2 / 10;
 coa22 = coa2 % 10;
 jaux1 = mtb[coa21][coa22] / 100000;
 jaux3 = mtb[coa21][coa22] % 1000;
 jaux2 = jaux3 / 100;
 sigue = 0;
 if((vdfta[i][2]==1)&&(jt2==1)) sigue = 1;
 if(sigue!=1) {
  switch(j) {
   case 1: mov = -2;  break;
   case 2: mov = 2;   break;
   case 3: mov = 20;  break;
   case 0: mov = -20; break;
  }
  coaab2 = 0;
  coaa2 = cp2 + mov;
  coaab2 = veri1(j, coaa2, cp2);
  if((coaab2==0) && (jaux1==9) && (jaux2==9)) {
   coaa21 = coaa2 / 10;
   coaa22 = coaa2 % 10;
   jaaux1 = mtb[coaa21][coaa22] / 100000;
   jaaux3 = mtb[coaa21][coaa22] % 1000;
   jaaux2 = jaaux3 / 100;
   if((jaaux1!=9) && (jaaux2!=9)) coaab2 = 1;
   else coaab2 = 0;
   if(coaab2==0) {
        if(jt2==0) {
         if(mp2[0][3]<2) coaab2 = 0;
         else coaab2 = 1;
        }
        else {
         if((((mp2[1][3]<2) && (ngt<8)) || ((mp2[1][3]<1) && (ngt>7))) && (mp2[0][1]>1))
coaab2 = 0;
         else coaab2 = 1;
        }
        if(coaab2==0) {
         if(((jaaux1==9) && (jaaux2!=9)) || ((jaaux1!=9) && (jaaux2==9))) {
          h = 0;
          if((jaaux1!=9) && (jaaux1!=jt2)) {
           faaux1 = mtb[coaa21][coaa22] / 1000;
           faaux2 = faaux1 % 100;
           h = 1;
          }
          if((jaaux2!=9) && (jaaux2!=jt2)) {
           faaux1 = mtb[coaa21][coaa22] % 1000;
```

```
        faaux2 = faux1 % 100;
        h = 1;
       }
       vver = verific(y, yy);
       if(vver==1){
        y = 90;
        yy = 0;
       }
       imprialt(coaa2, y, yy, i, faaux2, h, mov, cont);    /* ojo */
      }
      else {
       vver = verific(y, yy);
       if(vver==1){
        y = 90;
        yy = 0;
       }
       imprialt(coaa2, y, yy, i, 0, 0, 0, cont);
      }
      yy = yy + 1;
      cont++;
     }
   }
  }
 }
 if((jaux1!=9) && (jaux2!=9)) coab2 = 1;
 else coab2 = 0;
 if(coab2==0) {
  if(jt2==0)
   if(mp2[0][3]<2) coaab2 = 0;
   else coaab2 = 1;
  else
   if((((mp2[1][3]<2) && (ngt<8)) || ((mp2[1][3]<1) && (ngt>7))) && (mp2[0][1]>1)) coaab2 =
0;
   else coaab2 = 1;
  if(coab2==0) {
   if(((jaux1==9) && (jaux2!=9)) || ((jaux1!=9) && (jaux2==9))) {
       h = 0;
       if((jaux1!=9) && (jaux1!=jt2)) {
        faux1 = mtb[coa21][coa22] / 1000;
        faux2 = faux1 % 100;
        h = 1;
       }
       if((jaux2!=9) && (jaux2!=jt2)) {
        faux1 = mtb[coa21][coa22] % 1000;
        faux2 = faux1 % 100;
        h = 1;
       }
       vver = verific(y, yy);
       if(vver==1) {
        y = 90;
        yy = 0;
```

```
                }
                imprialt(coa2, y, yy, i, faux2, h, mov, cont);
            }
            else {
                vver = verific(y, yy);
                if(vver==1) {
                 y = 90;
                 yy = 0;
                }
                imprialt(coa2, y, yy, i, 0, 0, 0, cont);
            }
            yy = yy + 1;
            cont++;
          }
        }
      }
}
for(j=0; j<4; j++) {
      switch(j) {
        case 1: mov = -9;  break;
        case 2: mov = 9;   break;
        case 3: mov = 11;  break;
        case 0: mov = -11; break;
      }
      if(jt2==0) cp2 = vdfm[i][0];
      else cp2 = vdfta[i][0];
      coab2 = 0;
      coa2 = cp2 + mov;
      coab2 = veri2(j, coa2, cp2);
      if(coab2==0) {
        coa21 = coa2 / 10;
        coa22 = coa2 % 10;
        jaux1 = mtb[coa21][coa22] / 100000;
        jaux3 = mtb[coa21][coa22] % 1000;
        jaux2 = jaux3 / 100;
        sigue = 0;
        if((vdfta[i][2]==1) && (jt2==1)) sigue = 1;
        if(sigue!=1) {
          switch(j) {
            case 1: mov = -18; break;
            case 2: mov = 18;  break;
            case 3: mov = 22;  break;
            case 0: mov = -22; break;
          }
          coaab2 = 0;
          coaa2 = cp2 + mov;
          coab2 = veri2(j, coaa2, cp2);
          if((coaab2==0) && (jaux1==9) && (jaux2==9)) {
            coaa21 = coaa2 / 10;
            coaa22 = coaa2 % 10;
            jaaux1 = mtb[coaa21][coaa22] / 100000;
```

```
jaaux3 = mtb[coaa21][coaa22] % 1000;
jaaux2 = jaaux3 / 100;
if((jaaux1!=9) && (jaaux2!=9)) coaab2 = 1;
else coaab2 = 0;
if(coaab2==0) {
      if(((jaaux1==9) && (jaaux2!=9)) || ((jaaux1!=9) && (jaaux2==9))) {
        h = 0;
        if((jaaux1!=9) && (jaaux1!=jt2)) {
          faaux1 = mtb[coaa21][coaa22] / 1000;
          faaux2 = faaux1 % 100;
          h = 1;
        }
        if((jaaux2!=9) && (jaaux2!=jt2)) {
          faaux1 = mtb[coaa21][coaa22] % 1000;
          faaux2 = faaux1 % 100;
          h = 1;
        }
        vver = verific(y, yy);
        if(vver==1) {
          y = 90;
          yy = 0;
        }
        imprialt(coaa2, y, yy, i, faaux2, h, mov, cont);
      }
      else {
        vver = verific(y, yy);
        if(vver==1){
          y = 90;
          yy = 0;
        }
        imprialt(coaa2, y, yy, i, 0, 0, 0, cont);
      }
      yy = yy + 1;
      cont++;
  }
 }
}
if((jaux1!=9) && (jaux2!=9)) coab2 = 1;
else coab2 = 0;
if(coab2==0) {
 if(((jaux1==9) && (jaux2!=9)) || ((jaux1!=9) && (jaux2==9))) {
  h = 0;
  if((jaux1!=9) && (jaux1!=jt2)) {
      faux1 = mtb[coa21][coa22] / 1000;
      faux2 = faux1 % 100;
      h = 1;
  }
  if((jaux2!=9) && (jaux2!=jt2)) {
      faux1 = mtb[coa21][coa22] % 1000;
      faux2 = faux1 % 100;
      h = 1;
```

```
            }
            vver = verific(y, yy);
            if(vver==1) {
                  y = 90;
                  yy = 0;
            }
            imprialt(coa2, y, yy, i, faux2, h, mov, cont);
          }
          else {
            vver = verific(y, yy);
            if(vver==1){
                  y = 90;
                  yy = 0;
            }
            imprialt(coa2, y, yy, i, 0, 0, mov, cont);
          }
          yy = yy + 1;
          cont++;
        }
      }
    }
  }
  y = y + yy * 10;
/* if(y>379) {
    if(colum==500) {
          setcolor(15);
          for(ij=0; ij<32; ij++) rectangulo(500+ij, 90+ij, 620-ij, 370-ij, 1, 15, 505+ij*2, 95+ij*2, 15);
          rectangulo(550, 90, 560, 370, 1, 15, 555, 95, 15);
  --- rectangulo(560, 90, 560, 370, 1, 15, 565, 95, 15); ---
          setcolor(0);
    }
    y = 90;
    yy = 0;
    colum = 500;
   } */
 }
}

void borraficha1(unsigned short int gueb) {
 unsigned int vauxc, vauxff;          /* borra una ficha del tablero */

 if(jt2==0)
  if(vdfm[gueb-1][1]==2) {
    mp2[jt2][3] = mp2[jt2][3] - 1;
    vdfm[gueb-1][1] = 0;
    vauxc = vdfm[gueb-1][0];
    if(mtb[vauxc/10][vauxc%10]/100000==jt2) {
          vauxff = (mtb[vauxc/10][vauxc%10]%1000) % 100;
          vdfta[vauxff][1] = 0;
    }
    else {
```

```
        vauxff = (mtb[vauxc/10][vauxc%10]/1000) % 100;
        vdfta[vauxff][1] = 0;
    }
  }
else
  if(vdfta[gueb-1][1] == 2) {
   mp2[jt2][3] = mp2[jt2][3] - 1;
   vdfta[gueb-1][1] = 0;
   vauxc = vdfta[gueb-1][0];
   if(mtb[vauxc/10][vauxc%10]/100000==jt2) {
        vauxff = (mtb[vauxc/10][vauxc%10]%1000) % 100;
        vdfm[vauxff][1] = 0;
   }
   else {
        vauxff = (mtb[vauxc/10][vauxc%10]/1000) % 100;
        vdfm[vauxff][1] = 0;
   }
  }
}

void borraficha(unsigned short int guerrb) {           /* elimina una ficha del juego */
 long unsigned int vaux, vaux2;
 unsigned int vauxc, vauxff;

 mp2[jt2][1] = mp2[jt2][1] - 1;
 if(jt2==0) {
  borraficha1(guerrb);
  vaux = mtb[vdfm[(guerrb-1)][0]/10][vdfm[(guerrb-1)][0]%10];
  if(vaux/100000==jt2) {
   vaux2 = vaux % 100;
   mtb[vdfm[(guerrb-1)][0]/10][vdfm[(guerrb-1)][0]%10] = 999000 + vaux2;
  }
  else {
   vaux2 = vaux / 100;
   mtb[vdfm[(guerrb-1)][0]/10][vdfm[(guerrb-1)][0]%10] = vaux2*1000 + 999;
  }
  vdfm[guerrb-1][0] = 99;
  vdfm[guerrb-1][1] = 0;
 }
 else {
  borraficha1(guerrb);
  vaux = mtb[vdfta[(guerrb-1)][0]/10][vdfta[(guerrb-1)][0]%10];
  if(vaux/100000==jt2) {
   vaux2 = vaux % 100;
   mtb[vdfta[guerrb-1][0]/10][vdfta[guerrb-1][0]%10] = 999000 + vaux2;
  }
  else {
   vaux2 = vaux / 100;
   mtb[vdfta[guerrb-1][0]/10][vdfta[guerrb-1][0]%10] = vaux2*1000 + 999;
  }
  if(vdfta[guerrb-1][2]==1) {
```

```
      mp2[jt2][0] = mp2[jt2][0] - 1;
      vecs[vdfta[guerrb-1][3]][0] = 99;
      vdfta[guerrb-1][3] = 99;
      vdfta[guerrb-1][2] = 0;
    }
    vdfta[guerrb-1][0] = 99;
    vdfta[guerrb-1][1] = 0;
  }
}

void bcoce(unsigned short int guer, unsigned int casilla) {          /* borra la ficha de la casilla origen  y la
coloca en la casilla elegida */
  long unsigned int vaux, vaux2;

  if(jt2==0)  {
    vaux = mtb[vdfm[(guer-1)][0]/10][vdfm[(guer-1)][0]%10]; /* borra la ficha de la casilla origen */
    if(vaux/100000==jt2) {
      vaux2 = vaux % 100;
      mtb[vdfm[(guer-1)][0]/10][vdfm[(guer-1)][0]%10] = 999000 + vaux2;
    }
    else {
      vaux2 = vaux / 100;
      mtb[vdfm[(guer-1)][0]/10][vdfm[(guer-1)][0]%10] = vaux2*1000 + 999;
    }
    vdfm[guer-1][0] = casilla;                              /* colocación de la ficha en la casilla elegida */
    if(mtb[casilla/10][casilla%10]/100000 == 9) {
      vaux = mtb[casilla/10][casilla%10] % 1000;
      mtb[casilla/10][casilla%10] = jt2*100000 + (guer-1)*1000 + vaux;
    }
    else {
      vaux = mtb[casilla/10][casilla%10] / 1000;
      mtb[casilla/10][casilla%10] = vaux*1000 + jt2*100 + (guer-1);
    }
  }
  else {
    vaux = mtb[vdfta[(guer-1)][0]/10][vdfta[(guer-1)][0]%10];
    if(vaux/100000==jt2) {
      vaux2 = vaux % 100;
      mtb[vdfta[(guer-1)][0]/10][vdfta[(guer-1)][0]%10] = 999000 + vaux2;
    }
    else {
      vaux2 = vaux / 100;
      mtb[vdfta[(guer-1)][0]/10][vdfta[(guer-1)][0]%10] = vaux2*1000 + 999;
    }
    vdfta[guer-1][0] = casilla;                  /* ponerlo en la nueva casilla  */
    if(mtb[casilla/10][casilla%10]/100000 == 9) {
      vaux = mtb[casilla/10][casilla%10] % 1000;
      mtb[casilla/10][casilla%10] = jt2*100000 + (guer-1)*1000 + vaux;
    }
    else {
      vaux = mtb[casilla/10][casilla%10] / 1000;
```

```
    mtb[casilla/10][casilla%10] = vaux*1000 + jt2*100 + (guer-1);
   }
  }
}


void secomu(unsigned short int gue, unsigned int cassilla, unsigned short int ind) {
 long unsigned int vaux, vaux2;
                                        /* el jugador en turno se queda con la seral y el contrario
muere */
 if(jt2==0) {
  vdfm[gue-1][1] = 0;
  mp2[1][1] = mp2[1][1] - 1;
  vaux = mtb[cassilla/10][cassilla%10];
  mtb[cassilla/10][cassilla%10] = jt2*100000 + (gue-1)*1000 + 999;
  if(vdfta[vecal[ind][(gue-1)*3+2]][2]==1) {
   mp2[1][0] = mp2[1][0] - 1;
   vecs[vdfta[vecal[ind][(gue-1)*3+2]][3]][0] = 99;
   vdfta[vecal[ind][(gue-1)*3+2]][3] = 99;
   vdfta[vecal[ind][(gue-1)*3+2]][2] = 0;
  }
  vdfta[vecal[ind][(gue-1)*3+2]][0] = 99;
  vdfta[vecal[ind][(gue-1)*3+2]][1] = 0;
  vaux = mtb[vdfm[(gue-1)][0]/10][vdfm[(gue-1)][0]%10];
  if(vaux/100000==jt2) {
   vaux2 = vaux % 100;
   mtb[vdfm[(gue-1)][0]/10][vdfm[(gue-1)][0]%10] = 999000 + vaux2;
  }
  else {
   vaux2 = vaux / 100;
   mtb[vdfm[(gue-1)][0]/10][vdfm[(gue-1)][0]%10] = vaux2*1000 + 999;
  }
  vdfm[gue-1][0] = cassilla;
 }
 else {
  vdfta[gue-1][0] = 0;
  mp2[0][1] = mp2[0][1] - 1;
  vaux = mtb[cassilla/10][cassilla%10];
  mtb[cassilla/10][cassilla%10] = jt2*100000+(gue-1)*1000 + 999;
  vdfm[vecal[ind][(gue-1)*3+2]][0] = 99;
  vdfm[vecal[ind][(gue-1)*3+2]][1] = 0;
  vaux = mtb[vdfta[(gue-1)][0]/10][vdfta[(gue-1)][0]%10];
  if(vaux/100000==jt2) {
   vaux2 = vaux % 100;
   mtb[vdfta[(gue-1)][0]/10][vdfta[(gue-1)][0]%10] = 999000 + vaux2;
  }
  else {
   vaux2 = vaux / 100;
   mtb[vdfta[(gue-1)][0]/10][vdfta[(gue-1)][0]%10] = vaux2*1000 + 999;
  }
  vdfta[gue-1][0] = cassilla;
```

```
 }
}

void hechizo(unsigned short int guerr1, unsigned int cassilla1, unsigned short int ind1) {
                                         /* se aplica la regla del hechizo al jugador contrario */
 mp2[jt2][3] = mp2[jt2][3] + 1;
 if(jt2==0) {
   vdfm[guerr1-1][1] = 2;
   vdfta[vecal[ind1][(guerr1-1)*3+2]][1] = 1;
 }
 else {
   vdfta[guerr1-1][1] = 2;
   vdfm[vecal[ind1][(guerr1-1)*3+2]][1] = 1;
 }
 bcoce(guerr1, cassilla1);
}

void verifica() {                    /* pide al usuario la ficha a mover, asi como la casilla elegida y aplica las
reglas del juego */
  unsigned short int dado, fich, guerr, i, indice, j;
  long unsigned int vaux, vaux2;
  unsigned int cassi, vauxc, vauxf, vauxff;
  int ctrib, cctrib;

/* ------------------------------          validar     guerrero con i, casilla con vecal[hasta 16][i*3]  */

  setcolor(0);
  settextstyle(2, HORIZ_DIR, 4);
  outtextxy(50, 460,"ELIJA SU OPCION,  GUERRERO:     CASILLA:");
  gotoxy(12, 23);
  scanf("%d", &guerr);
  gotoxy(20, 23);
  scanf("%d", &cassi);
  for(indice=0; vecal[indice][(guerr-1)*3]!=cassi; indice++);
                                          /* genera la casilla  tributo*/
  fich = 0;
  ctrib = aa(3);
  cctrib = vect[ctrib][0];
  if(cassi==cctrib) {
    vect1[ctrib][0] = 99;
    if(mp2[jt2][2]==0) {
      fich = 1;
      borraficha(guerr);
    }
    else  mp2[jt2][2] = mp2[jt2][2] - 1;
  }
  if(fich==0) {
    if(vecal[indice][(guerr-1)*3+1]==99) {
      borraficha1(guerr);
      bcoce(guerr, cassi);
    }
```

```
  if(vecal[indice][(guerr-1)*3+1]==0) hechizo(guerr, cassi, indice);
  if(vecal[indice][(guerr-1)*3+1]==1) secomu(guerr, cassi, indice);
  if(vecal[indice][(guerr-1)*3+1]==2) {
   dado = aa(1);
   dado = 1;
   if(dado==0) secomu(guerr, cassi, indice);
   else  hechizo(guerr, cassi, indice);
  }
 }
}
```

AYUDA.C

```
void ayuda() {                    /* Presenta una ayuda sobre uso del sistema */
 int x,y;
 clearviewport();
 x=180;
 y=5;
 settextstyle(SANS_SERIF_FONT, HORIZ_DIR, 2);
 outtextxy(x,y,"==");
 outtextxy(x+=50,y,"H");
 outtextxy(x+=50,y,"E");
 outtextxy(x+=50,y,"L");
 outtextxy(x+=50,y,"P");
 outtextxy(x+=50,y,"==");
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 5);
 outtextxy(60,y+=50, "Este sistema simula el desarrollo de la etapa 1 del juego de mesa TACHTLI.");
 outtextxy(60,y+=30, "El HELP consiste en dos secciones:");
 outtextxy(90,y+=25, "1) Reglas del juego.");
 outtextxy(90,y+=17, "2) Descripcion del menu.");
 outtextxy(230,y+=50, "    REGLAS DEL JUEGO");
 outtextxy(60,y+=30, "TACHTLI esta inspirado en la fundacion de la ciudad de Mexico-Tenochtitlan.");
 outtextxy(60,y+=30, "En el juego pueden participar de 2 a 8 jugadores.");
 outtextxy(60,y+=30, "El juego consta de:");
 outtextxy(90,y+=25, "* Un dado.");
 outtextxy(90,y+=17, "* 3 tipos de fichas, cada una con diferente valor, estas son:");
 outtextxy(230,y+=25, " Ficha        Valor");
 outtextxy(230,y+=17, "Tributo       1  punto.");
 outtextxy(230,y+=17, "Guerrrero     2  puntos.");
 outtextxy(230,y+=17, "Senal         3  puntos." );
 outtextxy(90,y+=25, "* Un tablero en forma de penacho en el que las casillas forman caminos");
 outtextxy(90,y+=17, "  entrelazados. ");
 setcolor(15);
 outtextxy(365,460, "Presiona enter para continuar...");
 setcolor(12);
 getche();
 clearviewport();
 settextstyle(2, HORIZ_DIR, 5);
 y=5;
 outtextxy(60,y+=0, "Existen 5 clases de casillas:");
 outtextxy(230,y+=25, "Hechicero (HEC)");
 outtextxy(230,y+=17, "Meta      (MET)");
 outtextxy(230,y+=17, "Neutral   (NEU)");
 outtextxy(230,y+=17, "Pantano   (PAN)");
 outtextxy(230,y+=17, "Tributo   (TRI)");
 outtextxy(60,y+=30, "Hay 9 zonas de pantano. Una zona de pantano es un rango de casillas donde");
 outtextxy(30,y+=17, "1 o 2 de ellas se traga(n) la ficha del jugador (CASPAN).");
 outtextxy(60,y+=25, "* En 6 de esas zonas 1 casilla de un rango de 2 es CASPAN.");
 outtextxy(60,y+=17, "* En 1 zona el rango es de 4 y solo 1 es CASPAN.");
```

```
outtextxy(60,y+=17, "* 2 zonas tienen un rango de 6 casillas de las cuales 2 son CASPAN.");
outtextxy(60,y+=30, "El OBJETIVO del juego es ser el jugador que llege a la meta con el mayor");
outtextxy(30,y+=17, "puntaje para ser el MEXICA.");
outtextxy(60,y+=30, "El TURNO de los jugadores es en lado contrario a las manecillas del reloj");
outtextxy(30,y+=17, "(no es valido dejar pasar turnos). Todos los jugadores deben lanzar el dado");
outtextxy(30,y+=17, "dos veces y el que obtenga la mayor suma es el INICIADOR del juego.");
outtextxy(60,y+=30, "DISTRIBUCION DE LAS FICHAS. A cada jugador le corresponde de entrada una");
outtextxy(30,y+=17, "senal y ocho guerreros. La distribucion de los tributos es en forma aleatoria.");
outtextxy(30,y+=17, "Cada jugador coloca 3 tributos en los compartimentos de su respectivo Inicio");
outtextxy(30,y+=17, "y lanza el dado 3 veces, el No. del dado corresponde al No. del compartimento");
outtextxy(30,y+=17, "donde se verifica que haya un tributo, de ser asi este pertenece al jugador.");
setcolor(15);
outtextxy(365,460, "Presiona enter para continuar...");
setcolor(12);
getche();
clearviewport();
y=5;
outtextxy(230,y+=0, "Avance De Los Guerreros.");
outtextxy(60,y+=30, "Se coloca un guerrero de cada jugador en todos los inicios.");
outtextxy(60,y+=30, "Los guerreros de un mismo jugador avanzan un numero de casillas igual al");
outtextxy(30,y+=17, "numero de un mismo tiro del dado en la direccion que se desee pero sin pasar");
outtextxy(30,y+=17, "mas de una vez sobre una casilla.");
outtextxy(60,y+=30, "La casilla de salida para cada Inicio es la inmediata frontal.");
outtextxy(60,y+=30, "La entrada a las casillas HEC no necesita ser con un tiro exacto.");
outtextxy(60,y+=30, "En las casillas TRI se pierde un tributo, en caso de no tener este tipo");
outtextxy(30,y+=17,"de fichas, el guerrero 'muere'.");
outtextxy(60,y+=30, "Se pueden colocar a lo mas dos guerreros en una misma casilla. Al haber" );
outtextxy(30,y+=17, "dos guerreros de jugadores diferentes en la misma casilla, se produce un");
outtextxy(30,y+=17, "enfrentamiento que consiste en lanzar un dado y realizar lo siguiete:");
outtextxy(30,y+=25, "No. del dado                    Accion");
outtextxy(30,y+=25, "  1 o 3    Moverse una casilla.");
outtextxy(30,y+=17, "  2 ó 3    Permanecer en esa casilla.");
outtextxy(30,y+=17, "    5      El jugador contrincante pierde a su guerrero y lo entrega al");
outtextxy(30,y+=17, "           jugador en turno, asi como su senal (en caso de tenerla).");
outtextxy(30,y+=17, "    6      Se aplica la regla del dado igual a 5 para el jugador en turno.");
setcolor(15);
outtextxy(365,460, "Presiona enter para continuar...");
setcolor(12);
getche();
clearviewport();
y=5;
outtextxy(60,y+=50, "En las casillas de hechiceros se pueden cambiar dos gurreros obtenidos en");
outtextxy(30,y+=17, "enfrentamientos por un tributo.");
outtextxy(60,y+=30, "Cuando se presenten enfrentamientos en las casillas TRI o HEC, primero se");
outtextxy(30,y+=17, "aplican las reglas correspondientes a esas casillas y posteriormete se efectua");
outtextxy(30,y+=17, "el enfrentamiento.");
outtextxy(60,y+=30, "Si un guerrero llega a la casilla MET, todos los guerreros restantes del" );
outtextxy(30,y+=17, "jugador correspondiente se uniran a el." );
outtextxy(60,y+=30, "Llegando 4 jugadores a las casillas MET, se procede a realizar el conteo." );
outtextxy(60,y+=30, "El jugador con mayor puntaje es el MEXICA (en caso de empate, se toma en");
```

```
outtextxy(30,y+=17, "cuenta el orden de llegada a la MET). Los 3 restantes forman la TRIPLE
ALIANZA.");
outtextxy(60,y+=30, "Con estos resultados se continua con la segunda etapa del juego que por");
outtextxy(30,y+=17, "ahora no se describira.");
setcolor(15);
outtextxy(365,460, "Presiona enter para continuar...");
setcolor(12);
getche();
clearviewport();
y=5;
outtextxy(230,y+=5, "DESCRIPCION DE MENU");
outtextxy(60,y+=30, "Se dan 5 opciones al usuario:");
outtextxy(230,y+=25, "1) Juego con fichas fijas y tablero fijo.");
outtextxy(230,y+=17, "2) Juego con tablero fijo.");
outtextxy(230,y+=17, "3) Juego con fichas fijas.");
outtextxy(230,y+=17, "4) Juego con fichas y tablero aleatorio." );
outtextxy(230,y+=17, "5) Exit." );
outtextxy(60,y+=30, "El termino 'aleatorio' se refiere a que el sistema genera aleatoriamente el");
outtextxy(30,y+=17, "numero de tributos con los que inician los jugadores y/o las casillas CASPAN.");
outtextxy(60,y+=30, "Con 'fichas fijas' se debe entender que el numero de jugadores es 8 y");
outtextxy(30,y+=17, "que con un previo estudio de la funcion de probabilidad del experimento de");
outtextxy(30,y+=17, "encontrar 3 tributos dadas las reglas del juego se tiene un No. de tributos");
outtextxy(30,y+=17, "deterministico (0, 1, 2, 2, 1, 1, 2, y 1 para el jugador 1, 2, 3, 4, 5, 6 , 7");
outtextxy(30,y+=17, "y 8 respectivanmente).");
outtextxy(60,y+=30, "En lo que respecta a 'tablero fijo', se debe recordar lo referente a las");
outtextxy(30,y+=17, "zonas de pantano. Con esta opcion las casillas CASPAN son las siguientes: 12,");
outtextxy(30,y+=17, "16, 18, 22, 24, 43, 45, 50, 52, 55 y 68.");
outtextxy(60,y+=30, "En las opciones 2) y 4), se pide al usuario que proporcione el numero de");
outtextxy(30,y+=17, "jugadores, este debe ser mayor o igual a 2 y menor o igual a 8.");
setcolor(15);
outtextxy(365,460, "Presiona enter para continuar...");
setcolor(12);
getche();
clearviewport();
y=20;
outtextxy(60,y+=30, "Cuando el 'numero del dado' sea igual al minimo numero de casillas de la");
outtextxy(30,y+=17, "posicion actual a la meta y no exista la posibilidad de entrar a una casilla de");
outtextxy(30,y+=17, "hechicero, o bien, sea innecesario entrar en ella, el sistema automaticamente");
outtextxy(30,y+=17, "hace llegar a la meta al jugador en turno.");
outtextxy(60,y+=30, "El sistema proporciona al usuario un puntaje esperado y una distancia");
outtextxy(30,y+=17, "esperada a la meta en cada casilla alternativa asumiendo que se recuerdan");
outtextxy(30,y+=17, "todas las jugadas anteriores, y que se conoce la situacion de todos los");
outtextxy(30,y+=17, "jugadores. Tambien se sugiere una casilla optima de acuerdo con el puntaje y");
outtextxy(30,y+=17, "distancia a la meta esperados.");
outtextxy(60,y+=30, "El manejo del sistema es muy sencillo, lo unico que debe realizar el");
outtextxy(30,y+=17, "ususario es elegir una casilla opcion.");
setcolor(15);
outtextxy(365,460, "Presiona enter para continuar...");
setcolor(12);
getche();
clearviewport();
```

```
y=30;
settextstyle(SANS_SERIF_FONT, HORIZ_DIR, 1);
settextstyle(2, HORIZ_DIR, 5);
outtextxy(365,450, "Presiona enter para continuar...");
outtextxy(30,y+=0,"Ahora  puedes  continuar");
outtextxy(30,y+=17,"haciendo uso del sistema.");
setcolor(15);
settextstyle(SANS_SERIF_FONT, HORIZ_DIR, 1);
outtextxy(30,198,"                    Suerte y que te diviertas !!!.");
getche();
}
```

"Comprometerse es fácil, demasiado. Perseverar en la palabra dada, no lo es tanto. Terminar lo iniciado suele ser algo heróico. Sólo llega al final aquel que, por amar lo que hace –o aquellos por quien lo hace– se entrega a realizarlo sin temor al cansancio, a la brega, a las caídas y a los retrocesos".

Javier Abad G.