



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD QUÍMICA

TESIS

SISTEMAS FLEXIBLES DE MANUFACTURA:  
APLICACION A LA PLANEACION OPERATIVA  
DE UNA EMPRESA

PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN ADMINISTRACION INDUSTRIAL

PRESENTA

ING. ALFONSO CHAVOLLA CALDERON

MEXICO, D.F.

FEB. DE 1996

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TESIS**

**COMPLETA**

A MIS HIJOS MARISÓL, OWEN,  
MALCOLM, KEVIN Y A MI ESPOSA  
POR EL INVALUABLE APOYO QUE ME  
OTORGARON PARA LA REALIZACION  
DE ESTA META EN MI VIDA

A MIS PADRES

CON UN GRAN AGRADECIMIENTO Y  
RESPECTO A LA MAESTRA EN  
CIENCIAS LAURA GARCIA (QUE EN  
PAZ DESCANSE) POR CREER Y  
APOYAR MI PROYECTO Y POR  
AXIGIRME EL MAXIMO DE MI MISMO

A MI MADRE (QUE EN PAZ  
DESCANSE) QUE DONDE QUIERA  
QUE SE ENCUENTRE SE QUE ESTARA  
ORGULLOSA DE MI.

A MIS HIJOS MARISOL, OWEN,  
MALCOLM, KEVIN Y A MI ESPOSA  
POR EL INVALUABLE APOYO QUE ME  
OTORGARON PARA LA REALIZACION  
DE ESTA META EN MI VIDA

A MIS PADRES

CON UN GRAN AGRADECIMIENTO Y  
RESPECTO A LA MAESTRA EN  
CIENCIAS LAURA GARCIA (QUE EN  
PAZ DESCANSE) POR CREER Y  
APOYAR MI PROYECTO Y POR  
AXIGIRME EL MAXIMO DE MI MISMO

A MI MADRE (QUE EN PAZ  
DESCANSE) QUE DONDE QUIERA  
QUE SE ENCUENTRE SE QUE ESTARA  
ORGULLOSA DE MI.

## INDICE

I. Introducción

II. Los sistemas flexibles de manufactura

III. Aplicaciones de los sistemas flexibles de manufactura

IV. Aplicaciones a sistemas de flujo de proceso

V. Modelos de optimización alternativos

VI. Conclusiones

VII. Bibliografía

VIII: Apéndices

## I. INTRODUCCION

El presente trabajo se enmarca en los estudios de los diferentes sistemas de manufactura. Un sistema de manufactura se define como la combinación de recursos materiales y humanos cuyo objetivo es el de transformar insumos en productos terminados vendibles, para garantizar a la organización una entrada de efectivo, que le permita operar.

La presente tesis tiene por objetivo analizar y comparar con ejemplos aplicados a sistemas reales, diferentes metodologías para la determinación de la eficiencia y productividad de un sistema de manufactura. Se define como eficiencia del sistema de manufactura a la forma en que el sistema utiliza sus recursos disponibles para lograr sus objetivos. Mientras que la productividad se define como la capacidad del sistema para generar productos vendibles y por lo tanto efectivo, así como finalmente utilidades.

Un último objetivo de la tesis es, una vez que se ha escogido el método de determinación de la eficiencia y productividad, se tratará de optimizar estas variables.

Los anteriores objetivos se pueden resumir mediante el siguiente planteamiento, en forma de método simplex, de la optimización en cuestión:

Función Objetivo: MAX facturación =  $Z = N_1 P_1 + N_2 P_2 + \dots + N_n P_n$

donde:  $N_n$  - Cantidad de productos del tipo n vendidos

$P_n$  - Precio del producto n

sujeto a:

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \leq \text{Capacidad de planta}$$

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n \leq \text{Inventario de proceso máximo que puede existir en el sistema de manufactura}$$

donde:  $Q_n$  - Capacidad del sistema de manufactura para producir el producto tipo n

$I_n$  - Inventario en proceso del producto n

y además la ecuación vectorial:  $N = f(Q, I)$  es válida.

Por otro lado si existen limitaciones en la cantidad que se puede vender de un cierto producto o de todos habrá restricciones relacionadas con el vector N relacionadas a alguno o todos sus componentes. Existen por supuesto otras limitaciones como la disponibilidad y costo de las materias primas y empaques, la disponibilidad de personal capacitado, la calidad de los insumos y productos terminados, la capacidad del almacenamiento de materia prima y material de empaque y la disponibilidad del capital de trabajo. Sin embargo un modelo completo que describa un sistema de manufactura con todas estas restricciones aún no existe. Por lo que debemos suponer en esta tesis, que en el corto plazo el resto de las limitaciones se establecen en algún nivel fijo.

Por otro lado la facturación per-se, no es indicativo suficiente que la empresa está llegando a sus objetivos de productividad (o sea de utilidades). Pero si es un factor importantísimo para la supervivencia de corto plazo de la empresa y para el pago oportuna de utilidades en efectivo (que son las únicas que cuentan). Por esta razón en el presente trabajo restringiremos el objetivo al aumentar la facturación o "throughput" como le llamaremos en el resto de la tesis.

Bajo esta perspectiva, la primera parte de la tesis se enfocará a las metodologías que permiten determinar la funcionalidad  $N=f(Q, I)$ . En este sentido ha que reconocer que existen dos tipos de sistemas de manufactura. El primero de ellos es aquel en donde una misma maquinaria y equipo es capaz de producir múltiples productos al mismo tiempo. A estos sistemas se les conoce como sistema flexibles. Las metodologías de determinación del "throughput" son muy complejas.

El segundo sistema es aquel en donde la maquinaria y equipo está dedicado a producir pocas variedades de producto, la producción es en serie y se hace por lotes. A estos sistemas se les conoce como en "línea", en serie o bien con sistemas de proceso, como los llamaremos en la presente tesis.

En la segunda parte de la tesis, se mostrarán algoritmos de resolución para el problema de la optimización. Los algoritmos presentados tienen un punto de vista práctico y se pueden aplicar a mejorar los resultados de cualquier sistema de manufactura, tanto flexible como de proceso.

#### **Calidad y servicio a clientes factores que afectan a la facturación.**

El objetivo de toda empresa industrial es el de ganar dinero, hoy y mañana. Para ello, la organización debe ser capaz de generar y vender productos que satisfagan la demanda de un mercado cada vez más competitivo. En este tipo de mercados la calidad de un producto es crítica para su éxito comercial. No será objetivo de la tesis analizar los sistemas de aseguramiento de la calidad, aunque sí se debe reconocer su importancia para la obtención de productos vendibles que satisfagan a nuestros consumidores.

Existen hoy en día métodos de aseguramiento y mejora continua de la calidad. Uno de esos métodos es el llamado de Calidad Total. Este método se enfoca a la mejora de procesos específicos, relacionados con la variable de calidad a mejorar. Su fundamentación es el método científico. La premisa es que en todo sistema productivo, existen procesos que generan ciertos resultados. El primer paso es fijar objetivos a lograr para un determinado proceso. Después se fijan las diferentes variables que afectan los resultados del proceso. Después se investiga cuáles de esas causas están provocando el 80% de los resultados. Usualmente sólo un 20% de las causas provocan el 80% de los efectos. Encontradas estas causas, los planes de acción sólo se centrarán en estas causas. Esta es la manera como la empresa puede mejorar su calidad, que estará medida en función de la satisfacción de las necesidades de sus consumidores.

Sin embargo, en el mundo tan competitivo de hoy, la calidad no basta para asegurar el éxito. Una parte muy importante del éxito de una empresa es el servicio a clientes. De nada sirve un producto con una gran calidad si no es accesible al público consumidor. Es posible que un producto con menor calidad se venda más que otro de calidad superior, simple y sencillamente porque es el único que se encuentra presente en el mercado.

Debido a que los productos que se van a vender, provienen de las organizaciones de manufactura, se hace imperativo un análisis de la capacidad productiva real de dichas organizaciones. Para esto es conveniente decir algo sobre cómo están organizadas las funciones de manufactura.

#### **La organización de suministro de producto como estrategia para aumentar la facturación.**

En muchas organizaciones modernas las funciones de Ingeniería, Compras, Manufactura y Distribución, se agrupan en un sólo grupo llamado Organización de Suministro de Producto (OSP). El objetivo de esta organización es el de proveer a los clientes y consumidores de la empresa de los productos en las cantidades y tiempos especificados y con los requerimientos de calidad solicitados. Es decir, en estas organizaciones se alinean a unidades de negocio, que directamente tienen que ver con el suministro de productos, con las necesidades del cliente. Al hacer esto, indirectamente están buscando incrementar el "throughput" del sistema.

Anteriormente, cada departamento trabajaba con objetivos separados del resto de la organización. Por ejemplo, el departamento de compras buscaba antes que calidad, precio, mientras que manufactura quería cantidad, calidad y oportunidad en entregas. Obviamente ambos objetivos son incompatibles en muchos casos. Al unirse las funciones en la Organización de Suministro de Productos la idea es que el objetivo común es satisfacer al cliente, pasando a un término secundario los objetivos departamentales. Esto le confiere a los diferentes departamentos una visión global del negocio. Pero también ofrece una oportunidad de mejorar al sistema de suministro en todo su conjunto. Se podrá observar la interacción entre los diversos recursos del sistema para el logro de sus objetivos.



Esta unión de objetivos, necesariamente tiene que cambiar las estructuras administrativas y la forma de manejar una organización así. El enfoque debe ser trabajar para mejorar, optimizar o elevar el suministro de productos al mercado. Esto es especialmente válido en mercados con alta demanda de productos, que no está satisfecha del todo por los productores. Pero también es válido en mercados con bajas demandas, debido a que la competencia en dichos mercados es feroz.

Anteriormente, los departamentos que constituyen la OSP, al no estar coordinados, regularmente fallaban en la entrega de los productos que el mercado exigía. Y al no entregarlos, la competencia podía tomar partido de esta situación. Una vez constituidos dentro de la organización de suministro de producto, están más alineados con el cliente y pasan a ser un arma de competencia para la organización.

#### El enfoque hacia el "throughput"

Una vez rotas las barreras organizacionales dentro de los departamentos de suministro de productos, es también necesario romper con los "feudos del costo". Estos feudos, son las actitudes de eficiencia local tomadas en cada uno de los departamentos. A esto se le llama enfoque hacia el costo. Las mejoras locales "deben" asegurar las de la organización. Esto es un paradigma que la OSP debe romper.

El enfoque hacia el "throughput" es un cambio en la manera de buscar las utilidades. En este enfoque lo que menos importa son los costos, ni las mejoras locales de eficiencia. Lo que importa aquí es ganar dinero a través de mayor "facturación" es decir de mayor venta y por consiguiente mejor servicio a clientes.

Para visualizar este poderoso concepto observemos el siguiente ejemplo. Supongamos que una empresa hipotética produce sólo dos productos. A uno le llamaremos P y al otro Q. La empresa se enfrenta a una demanda semanal de 100 P y 50 Q. El precio de venta de P es 90\$ y el de Q es de 100 \$. Por otro lado el costo de las materias primas de P es de 45\$ y el de Q es de 40\$. Con estos datos determinaremos por los dos enfoques la mezcla de productos idónea para la empresa. Con esta mezcla trataremos de obtener utilidades. Considérese además que es necesario pagar gastos de operación de 6000 pesos a la semana. Por otro lado, los minutos de fábrica necesarios para producir una unidad de P son 55 minutos y de Q tan solo se necesitan 30 minutos. Del análisis preliminar de la capacidad de las estaciones de trabajo de la fábrica, se ha encontrado que la estación B es la más lenta del sistema con un tiempo de proceso de 15 minutos para las P y de 30 minutos para las Q. Solo hay disponibles 2400 minutos para producir en una semana.

Con estos datos podemos calcular la contribución marginal de la venta de cada uno de los productos de la empresa a las utilidades. Esto se hace restando del precio de venta los costos por materia prima:

Producto	P	Q
Precio de venta	90	100
Costo de materia prima	45	40
Contribución Marginal	45	60

Por otro lado es fácil ver que la demanda de mercado no podrá ser satisfecha por la organización, pues la máquina B necesita para producir toda la demanda los siguientes tiempos

Producto	P	Q
Demanda	100	50
Tiempo de maquina B	15	30
Tiempo requerido de B	1500	1500
Tiempo total requerido del recurso B	3000 minutos	Solo hay disponibles 2400 min.

Un enfoque de costos tomaría entonces la siguiente decisión. Puesto que la contribución marginal de Q es más grande que la de P, y además las Q's requieren de menos tiempo de utilización de fábrica que las P's, la empresa trataría de hacer todas las Q's que pudiera y el resto del tiempo lo emplearía en producir las P's que pudiera. Si la empresa optara por esta estrategia, la mezcla de P's y Q's sería la siguiente:

Cincuenta Q's se llevan un tiempo del recurso B (es decir del limitante)  $50 \times 30 = 1500$  minutos. Como solo hay disponibles 2400, entonces quedan sólo 900 minutos disponibles para producir P's que necesitan un tiempo de 15 minutos por P. Entonces se podrían hacer sólo 60 P's. La cuenta de utilidades semanal para esta empresa sería de:

$$U = (50 \times 60) + (60 \times 45) - 6000 = -300$$

**La empresa tendría pérdidas.**

Supongamos que por azares del destino alguien equivoca la programación "óptima" realizada con anterioridad y se pusiera a producir todas las P's y el tiempo restante las Q's. Entonces las unidades de P que se producirían serían 100, mientras que las de Q sólo serían 30. Y las utilidades de la organización se verían como sigue:

$$U = (100 \times 45) + (30 \times 60) - 6000 = 300$$

**¡La empresa tendría ganancias!**

¿Qué fue lo que pasó? Bueno, si nosotros comparamos las unidades producidas (es decir el "throughput") en el primero y segundo casos obtendremos que en el caso del costo, el número fue de 110 unidades, mientras que en el caso "equivoco" el número producido fue de 130 o 20 unidades más. En este ejemplo, se nota claramente porque un enfoque es superior al otro. Agréguese además el efecto benéfico sobre el servicio a clientes. La lección es que a mayor facturación, mayores utilidades. Y que además un enfoque a la facturación es un enfoque de servicio a clientes.

Las reglas básicas para aumentar la facturación se discutirán en capítulos posteriores, pero se observa la importancia de poder determinar, controlar y elevar dicha facturación. En el apéndice #1 se expone una definición de sistema flexible de manufactura, así como una revisión de los principales enfoques de diversas universidades a la determinación de la facturación o "throughput". Así mismo en el apéndice se presentan algunos antecedentes de la teoría para el estudio de los sistemas flexibles de manufactura.

## II. LOS SISTEMAS FLEXIBLES DE MANUFACTURA

Un sistema flexible de manufactura consiste en un grupo de estaciones de trabajo, donde las operaciones de producción están unidas a un sistema de manejo de materiales mediante algún control central ya sea manual o computarizado.<sup>1</sup> Una característica importante de los sistemas flexibles de manufactura es que deben ser capaces de procesar un gran número de diferentes clases de lotes de partes, ya que cada uno de los productos o presentaciones requiere de una cierta ruta de proceso dentro del sistema flexible de manufactura.

La importancia de los sistemas flexibles de manufactura en la moderna teoría de producción, reside en la forma en que actualmente se utiliza la capacidad productiva instalada de una organización, tendiente a satisfacer las necesidades del cliente por lo que, hoy día, las empresas están obligadas a mantener un gran número de productos y presentaciones en su almacén para satisfacer a mercados cada vez más segmentados. Por otra lado se debe a ofrecer un servicio a clientes superior al de su competencia. Estos dos factores combinados hacen que la maquinaria disponible se tenga que dedicar a la producción de varios productos en diversas presentaciones. En otras palabras, se requiere que los sistemas productivos sean flexibles y puedan manejar muchos lotes diferentes de productos.

El objetivo del estudio de los sistemas flexibles de manufactura, es el de encontrar la combinación ideal de maquinaria, tiempos de proceso, materias primas y productos a producir, que minimice los costos, maximice la producción, minimice el inventario y mejore el servicio a clientes.

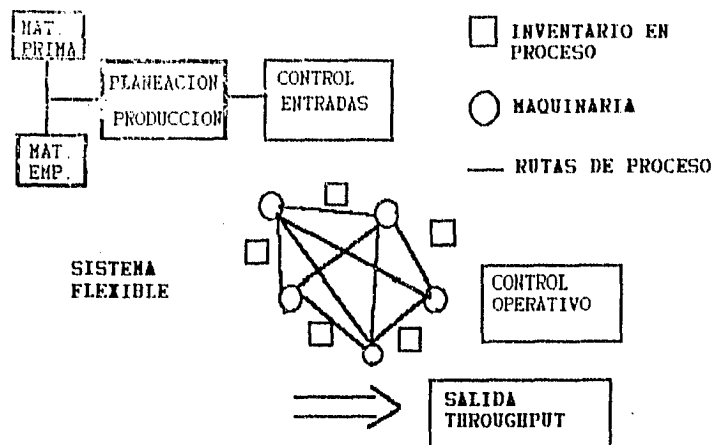
El propósito de un sistema flexible de manufactura es el de convertir una serie de materias primas en productos terminados mediante la adición de un valor agregado. Los elementos con que cuenta el sistema para el logro de sus objetivos son: el control de materias primas y productos terminados, la maquinaria y procesos de fabricación y los inventarios en proceso.

En un sistema flexible donde hay un cierto número de estaciones de trabajo, se pueden procesar uno o varios productos. Esta multiplicidad de productos confiere a los sistemas de ciertas características que hacen del control de materiales, de la programación de la producción y del inventario, variables críticas para obtener los niveles de producción requeridos.

En el caso del inventario en proceso, es importante reconocer que para obtener mayores volúmenes de producción, éste deberá fomentar un crecimiento. Esto sucede en sistemas de manufactura en donde se tiene un claro enfoque al servicio al cliente. Más adelante, cuando se trate el tema de la teoría de las restricciones, se verá que ese aumento en el inventario en proceso debe ser localizado en un punto del sistema conocido como la restricción.

---

<sup>1</sup> J. A. Buzacott and J.G. Shanthikumar, "Models for Understanding Flexible Manufacturing Systems", **AIIE Transactions**. Vol. 12, No. 4 December 1980.



#### Control del sistema flexible

En los sistemas de manufactura, un aspecto de relevancia es el control. El control involucra el monitoreo de variables como el inventario en proceso, la eficiencia productiva, la velocidad de producción y los paros de las estaciones de trabajo. Estas variables son de gran importancia para la toma de decisiones de inversiones en capital, capacitación del personal, de inversión en inventario de materia prima, inventario en proceso y producto terminado.

El objetivo de este control es el de maximizar la producción aprovechando óptimamente los elementos del sistema de manufactura.

Los sub-elementos con que cuenta el control del sistema productivo son: el "hardware" y el "software". El "hardware" se refiere a los diversos dispositivos de detección y procesamiento de datos con que cuenta la línea. El "software" se refiere a los programas de proceso de datos que nos ayudan a la toma de decisiones. Son en estos últimos donde los estudios de los sistemas flexibles de manufactura concentran su atención.

El control del sistema se utilizará para programar la producción de manera de optimizar el uso de las estaciones de trabajo, minimizando el tiempo ocioso. Para lograr esto se debe considerar el efecto del inventario en proceso, las diversas confiabilidades de las estaciones de trabajo, las distribuciones de las medias de sus tiempos de proceso y las rutas de proceso de los diferentes productos.

En un sistema flexible existen tres niveles de control a saber:<sup>2</sup>

El nivel de planeación. Que es donde se decide qué productos han de ser manufacturados, con qué secuencias y la duración estimada de las operaciones.

El nivel de entrada. El propósito de este nivel es el de determinar la secuencia en que los trabajos deben liberarse al sistema.

El nivel operativo. En donde se debe decidir, ya en la operación, sobre posibles conflictos en la rutas de los diferentes

<sup>2</sup> J. A. Buzacott and J. G. Shanthikumar *AIIE Transactions*.  
Vol. 12, No. 4 December 1980.

trabajos.

### **El uso del control central computarizado**

Un sistema flexible controlado por una computadora central es aquel en donde las decisiones en los niveles de planeación y control de entradas, son tomadas por una computadora. En este tipo de control, la computadora es capaz de establecer por adelantado el comportamiento del sistema y optimizarlo, para una determinada mezcla de productos y presentaciones. Se determina así un programa de producción y se transfiere el control del sistema al nivel de control de entradas.

La necesidad del uso de una computadora para el control de un sistema flexible, se justifica por el hecho de que dichos sistemas de manufactura son tan dinámicos que requieren decisiones basadas en el manejo de información a alta velocidad. Por otro lado, en el estudio de los sistemas flexibles, se requiere del desarrollo de modelos de corte matemáticos que requieren para su solución e implementación de una computadora.

Un modelo que describa las decisiones posibles y sus efectos en el "throughput", al nivel de los tres niveles del control, es muy complejo y requiere de una inversión alta en equipo de cómputo, por lo que para aplicaciones prácticas sólo es posible controlar los niveles de planeación y de entrada.<sup>3</sup>

### **Fundamentos de los modelos de sistemas flexibles**

#### **El Modelo de Jackson**

Antes de iniciar con el modelo de Jackson, es necesario establecer los fundamentos de los modelos que describen el comportamiento de un sistema flexible de manufactura. El más básico de ellos, es el considerar a éste como una red de colas, donde los servidores son las estaciones de trabajo, y los clientes son los diversos productos a producir.

Para definir matemáticamente el modelo se suelen hacer otros supuestos para acotar y simplificar el tratamiento matemático. Las más usuales entre todos los modelos son:

1. Existe un número definido de estaciones de trabajo que solo pueden ejecutar un trabajo a la vez.<sup>3</sup>
2. Los requerimientos de productos llegan al sistema flexible de acuerdo a un modelo de Poisson.
3. Hay un número definido de productos y presentaciones que puede procesar un sistema flexible de manufactura, cada uno con su ruta de proceso particular.
4. Los tiempos de proceso en cada una de las estaciones de trabajo están distribuidos en forma exponencial y son independientes del tipo de producto que estén procesando.
5. Puede existir según sea el caso un almacén en cada una de las estaciones de trabajo, o en forma común para todo el sistema de manufactura.

Uno de los primeros trabajos efectuados para el desarrollo de un modelo matemático basado de redes de colas, es el trabajo de James R. Jackson<sup>6</sup> (1963), que retomando los supuestos generales, construye su modelo y desarrolla las ecuaciones descriptivas de la distribución de probabilidad en estado estacionario, de las diferentes longitudes de cola

<sup>3</sup> Ibid

<sup>3</sup> Ibid

<sup>6</sup> James R. Jackson, "Jobshop Like Queueing Systems", *Management Science*. Vol. 10, No. 1, October, 1963.

antes de que los elementos entren a cada una de las estaciones de trabajo. Esto es, estas ecuaciones permiten determinar la cantidad de inventario en proceso.

Aparte de los supuestos generales, este modelo define una política de entrada de trabajos totalmente aleatoria al sistema flexible de manufactura. Cada uno de éstos además tiene una ruta aleatoria de proceso, que da como resultado la generación de un producto. Las estaciones procesan los trabajos de acuerdo a la disciplina de primeras entradas/primeras salidas (FCFS).

Esta política de entrada de trabajos es la más simple. Esta implica el desperdicio de alguna capacidad de planta, pues promueve el ocio de algunas estaciones de trabajo. Posteriormente se mencionarán otras políticas más efectivas para el uso de los equipos de las estaciones de trabajo.

El modelo define para los supuestos anteriores la probabilidad de un cierto número de trabajos pendientes, delante de cada una de las estaciones del sistema. A esta probabilidad se denomina estado del sistema y permite determinar el número total de trabajos en el sistema.

Las ecuaciones del modelo y su desarrollo se resumen en el apéndice #2.

Es importante recalcar que el modelo no tiene limitantes en cuanto al número de trabajos en las colas de las estaciones de trabajo. En otras palabras, el modelo no considera el posible bloqueo de dichas estaciones.

El "throughput" según este modelo

Una vez que se resuelve el modelo y se encuentra la ecuación que describe el estado del sistema, en teoría es posible encontrar un único estado que tiene la máxima probabilidad de existencia y a partir de ésta es posible encontrar la producción en estado estable del sistema. Esta producción se le denomina como "throughput" o facturación del sistema. La ecuación número 1 sirve para determinar el "throughput":

$$Th = \sum_n \mu(n, k_n + 1) r(n, N = 1) \quad n \in \{1, N\} \quad \text{Ecuación 1}$$

donde: Th.- "Throughput"

$\mu(n, k_n + 1)$ .- Velocidad de servicio de la estación n cuando hay  $k_n + 1$

trabajos en espera

$r(n, N + 1)$ .- Probabilidad de que la estación de trabajo n sea la

última estación en la ruta del trabajo

N.- Número total de estaciones de trabajo del sistema flexible de manufactura.

#### Ventajas y desventajas del modelo de Jackson

El modelo de Jackson, es integrador, es decir, determina las variables más importantes del sistema flexible y además admite diversas disciplinas de entrada y salida del sistema.

Es un modelo muy completo y por lo mismo es muy complicado. Esta complejidad le impide ser útil en la toma de decisiones operacionales. No considera la probabilidad de bloqueo o "hambreamiento" de las diversas estaciones de trabajo.

Por otro lado, al igual que otros modelos derivados del modelo de Jackson, se considera que la distribución de tiempos de servicio es exponencial. Esta distribución se ajusta bien a tiempos de servidores cuya tarea varía de un "cliente" a otro. En sistemas flexibles esto es muy conveniente, pero en sistemas en donde sólo se procesa un solo tipo de cliente, la suposición pierde validez.

Redes de colas abiertas y cerradas (modelo de Gordon y Newell 1967)

Das formas alternativas de determinar la velocidad de producción de un sistema flexible son:

1. Suponer que todos los trabajos que entran al sistema salen como productos terminados. Esto sería considerar a la red como "abierta".
2. Considerar que los trabajos, una vez que salen de la red son "reciclados a la misma". Esto equivale a decir que la red es cerrada.

En el primer caso, para obtener la velocidad de producción hay que contar el número de productos que salen del sistema. En el segundo hay que contar el número de productos que son reciclados al sistema. A este último se le conoce como el modelo de Gordon y Newell.<sup>6</sup>

Para la determinación de la velocidad de producción, así como el inventario promedio en proceso, se prefiere utilizar la red cerrada, por simplificar el análisis, pero ambos enfoques son equivalentes estocásticamente.<sup>7</sup>

Además se ha demostrado que una red abierta conteniendo M-1 estaciones de trabajo, es equivalente a una red cerrada de M estaciones de trabajo.<sup>8</sup>

Esta última propiedad es la que utilizan los autores que se dedican a estudiar, en los sistemas flexibles, los efectos de las diversas disciplinas de entradas de trabajos al sistema.

Las ecuaciones del modelo de Gordon y Newell se presentan en el apéndice #3. Como en el caso del trabajo de Jackson, el objetivo es el de encontrar una distribución de probabilidad de estado estable, del número de trabajos pendientes en cada una de las estaciones.

Gordon y Newell plantean una ecuación de equilibrio de la distribución de trabajos dentro del sistema flexible del tipo cerrado. La ecuación es la siguiente:

$$\{\sum_{k=1, M} c(n_k) \alpha_k(n_k) q_k\} P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \{\sum_{j=1, M} \sum_{k=1, M} c(n_k) \alpha_j(n_j+1) \mu_j p_{jk}\} P(n_1, \dots, n_k-1, \dots, n_j+1, \dots, n_M)$$

Ecuación 2

donde:

$$c(n_i) = \{0, \text{ si } n_i = 0 \text{ y } 1 \text{ si } n_i > 0\}$$

$$\alpha_k(n_k) = \{n_k \text{ si } n_k \leq r_k \text{ y } r_k \text{ si } n_k > r_k\}$$

$n_k$ . Número de trabajos en espera de ser procesados por la estación k

$r_k$ . Número de canales de servicio en paralelo en la estación k

$\mu_k$ . Velocidad de servicio promedio de los  $r_k$  canales de servicio de la estación k.

$p_{jk}$ . Probabilidad de que un trabajo habiendo completado su estación k se dirija hacia la estación j.

$P(n_1, n_2, \dots, n_M)$ . Probabilidad de existencia del estado del sistema donde existen  $n_i$  clientes en cada una de las estaciones de trabajo.

$c(n_k)$  y  $\alpha_k(n_k)$  son factores que representan la imposibilidad de que un trabajo deje la estación k si ésta quedara vacía y el número máximo de trabajos a procesar en dicha estación, que no puede ser mayor que el número de canales de servicio.

<sup>6</sup> Gordon WJ and G.F. Newell, "Closed queuing systems with exponential servers", **Operations Research**, Vol 15 (1967) a pp. 254-265

<sup>7</sup> Ibid

<sup>8</sup> Ibid

La interpretación de la ecuación 2 es que el lado izquierdo corresponde a la velocidad con que los trabajos salen del estado  $(n_1, n_2, \dots, n_M)$ , mientras que el lado derecho representa la velocidad con que los trabajos entran al estado  $(n_1, \dots, n_{k-1}, \dots, n_k+1, \dots, n_M)$ . Y ambas velocidades son iguales, porque la red es cerrada y se encuentra en estado de equilibrio.

Definiendo:

$$\begin{aligned} \beta_k(0) &= 1 \\ \beta_k(n) &= \alpha_k(n) \beta_k(n-1) \end{aligned}$$

Entonces se puede representar a:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \left( \prod_{i=1, M} \beta_i^{-1}(n_i) \right) Q(n_1, n_2, \dots, n_M) \quad \text{Ecuación 3}$$

Substituyendo 3 en 2 y representando a  $Q(n_1, n_2, \dots, n_M)$  como la multiplicación de una serie de constantes de normalización de ésta forma:

$$Q(n_1, n_2, \dots, n_M) = \left( \prod_{i=1, M} x_i^{n_i} \right) \text{Constante} \quad \text{Ecuación 4}$$

Se llega a la siguiente reducción de la ecuación 1 (ver apéndice #3):

$$\sum_{i=1, M} p_{ik}(\mu_i x_i) = \mu_k x_k \quad (k=1, 2, \dots, M) \quad \text{Ecuación 5}$$

Esta última ecuación se puede escribir como un sistema de ecuaciones matriciales del tipo  $yP=y$  donde el eigenvector y es único con respecto a una constante multiplicativa que se puede escoger con libertad. Entonces la distribución de las longitudes de cola de equilibrio resulta de combinar las ecuaciones 4 y 5 y multiplicando por dicha constante de normalización.

$$P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \left( \prod_{i=1, M} [x_i^{n_i} / \beta_i(n_i)] \right) G^{-1}(N) \quad \text{Ecuación 6}$$

donde:

$$\begin{aligned} G(N) &= \sum_N \left\{ \prod_{i=1, M} [x_i^{n_i} / \beta_i(n_i)] \right\} \\ N &= \sum_{i=1, N} \{ n_i \} \\ G(N) &\text{ es una constante de normalización} \end{aligned}$$

Estos autores desarrollaron una importante solución a la ecuación de probabilidad estacionaria, haciendo varias consideraciones que se refieren al estudio de sistemas uniformes. Un sistema uniforme se define como aquel cuyas razones  $x_i/\mu_i$  son de un tamaño comparable y se tiene un gran número de estaciones de trabajo (M) y el número total de trabajos en el sistema de manufactura es también grande (N). Esto quiere decir que el número de trabajos en las líneas de espera, de las diferentes estaciones de trabajo, es parecido. Esto no le resta a la solución ninguna generalidad, al menos desde el punto de vista de un sistema flexible de manufactura. El objetivo del trabajo de Gordon y Newell (14a) fue el de encontrar una expresión que relacionara el número de servidores en una estación, la velocidad de llegada de trabajos, la ruta de dichos trabajos, y la velocidad de servicio de cada estación de trabajo. Para resolver dicha ecuación es necesario encontrar una relación que caracterice al vector de constantes de normalización.

#### Ventajas y desventajas

El modelo de Gordon y Newell es relativamente más sencillo que el modelo de Jackson. Esta simplificación tiene un costo que se refleja en la dificultad de la determinación de las constantes de normalización.

---

(14a) Op Cit



Como el modelo es parte de una red cerrada, que por definición se encuentra en equilibrio, pues el número de trabajos en el sistema no varía con el tiempo, permite simplificar el análisis y además establecer una equivalencia con la red abierta.

Al igual que en el modelo de Jackson, el bloqueo de estaciones de trabajo por descomposturas, no está considerado en el modelo.

Por su sencillez, éste modelo ha servido como base de otros modelos aplicados a problemas prácticos.

#### **Las áreas de presurtido (Modelo de Buzacott y Shanthikumar)**

En muchas situaciones prácticas, en las áreas de manufactura del sistema, se asigna un área para presurtir las materias primas al sistema flexible de manufactura. Esta área de presurtido puede considerarse como un área de control para la "dosificación" de trabajos. En estas áreas se pueden aplicar diversas políticas para la entrada de trabajos del sistema, con el objeto de optimizar el trabajo de la planta.

Esta es una de las aplicaciones importantes de la metodología de análisis de red cerrada, de un sistema flexible de manufactura. Como se dijo anteriormente, la variable a estudiar en este caso es la producción del sistema flexible, bajo diversas políticas de entrada de proceso y almacenamiento de trabajos.

Estas áreas de presurtido se pueden considerar como áreas donde se puede experimentar las diversas políticas de entrada y con esto observar el comportamiento del sistema. Buzacott y Shanthikumar (15) han definido cuatro maneras en que pueden arriar trabajos al sistema:

En forma estática. Los trabajos llegan cuando todo el sistema está parado y vacío. Antes de surtirse al sistema, se hace una programación de tipo determinístico, pues se conocen todas las clases de trabajos existentes y sus rutas.

En forma dinámica. Los trabajos llegan aleatoriamente y de esta misma forma son enviados al sistema. Este tipo de sistemas de manufactura se comportan igual que el sistema FCFS.

En forma pseudo-estática. El taller dinámico se divide en una secuencia de programaciones de tipo estático. Cuando el sistema de manufactura ha acabado con un lote de trabajos, entonces se programa el otro lote.

En forma pseudo-dinámica. En un sistema de manufactura con este tipo de control, éste se ejerce en el nivel de presurtido, así como en las máquinas.

El estudio de Buzacott y Shanthikumar (16) se centra en los talleres del tipo pseudo dinámicos, donde las diversas disciplinas de entrada pueden probarse para demostrar su superioridad sobre los talleres de tipo FCFS o dinámicos.

El modelo de aproximación utilizado por Buzacott y Shanthikumar (17) se basa en el análisis mediante un modelo de red de colas abierta al sistema de manufactura bajo una disciplina de entrada de FCFS, para luego obtener la velocidad de producción, dependiente del número de trabajos en proceso en el sistema de manufactura. Una vez hecho esto, se considera al sistema de manufactura como una cola de un solo servidor con característica M/M/1, es decir entrada tipo Poisson, servicio tipo exponencial y un sólo servidor. El resto es modelar esa "estación de trabajo", de un sólo servidor

(15) J.A. Buzacott and J.G. Shanthikumar, "On Approximate Queueing Models of Dynamic Job Shops", *Management Science*, Vol. 31, No. 7, July, 1985.

(16) Op Cit

(17) Op Cit

como una cola tipo M/M/1 con entradas controladas.

Como se dijo antes, los modelos del tipo FCFS, fueron analizados por J. R. Jackson (18). Sin embargo la complejidad del método de Jackson ha propiciado el desarrollo de métodos aproximados. Uno de ellos es el de descomposición. En este modelo, cada una de las estaciones de trabajo es analizada, junto con su cola asociada, en forma separada, para luego "reunirse" y crear el modelo del sistema completo.

Como es obvio, cada una de las estaciones de trabajo está alimentada de las otras o del presurtido. Además los trabajos que son terminados por la estación de trabajo, o salen del sistema o se van a otra máquina. Esto obliga a pensar que cada una de las estaciones de trabajo se puede modelar como una cola de tipo G1/G1/1, es decir con distribuciones generales para la llegada de trabajos, como para el servicio de cada uno de ellos.

Otra aproximación que suele hacerse en estos modelos de descomposición, es considerar a cada estación de trabajo como una cola de tipo M/G/1. Este tipo de aproximación funciona muy bien solo en sistemas de manufactura, donde cada una de las estaciones de trabajo son idénticas.

Buzacott y Shanthikumar (19) comparan gráficamente ambas aproximaciones para determinar cuál es mejor de las dos para una determinada situación. Las conclusiones a las que llegan son:

- Para bajas tasas de llegadas al sistema (o bajas utilizaciones de máquina, prácticamente no hay diferencia entre las dos aproximaciones.

-Las líneas desbalanceadas en ambas aproximaciones son superiores en su producción (throughput) que las balanceadas.

El modelo de Shanthikumar, añade un nuevo factor al análisis de los sistemas flexibles, la posibilidad de mayor simplificación con alguna pérdida de generalidad, pero con la posibilidad de probar diversas disciplinas de entrada y distribuciones de probabilidad en el servicio de las estaciones de trabajo.

Como conclusión al capítulo podemos decir que éstos tres modelos de análisis de sistemas flexibles de manufactura, fundamentan a métodos posteriores aplicados a problemas más prácticos.

---

(18) Op Cit

(19) Op Cit

### III. APLICACIONES DE LOS SISTEMAS FLEXIBLES DE MANUFACTURA

Una de las aplicaciones de la teoría de sistemas flexibles de manufactura es el análisis de la capacidad instalada.

La máxima capacidad de planta instalada es la capacidad ideal que un sistema de manufactura nos puede otorgar, para ciertas clases de productos y para un nivel de inventario en proceso.

Es lógico pensar que la máxima capacidad instalada, está en función de la estación de trabajo más lenta. Esto es cierto si se considera que las estaciones de trabajo son 100 % confiables. Sin embargo, ya sabemos que esto no es cierto.

Otro factor de gran importancia para que una estación de trabajo no opere es la falta de trabajos. A esto se le conoce como desperdicio de capacidad instalada. Este desperdicio de capacidad instalada, normalmente no es considerado en los sistemas de monitoreo de la eficiencia convencionales. Es por eso que se necesita un sistema de análisis por separado.

El sistema que se propone para efectuar dicho análisis, está basado en el análisis de redes de colas hecho por PJ Schweitzer. En este sistema se considera que existe almacenamiento entre cada una de las estaciones, con el objeto de minimizar paros por ineficiencias.<sup>1</sup>

Schweitzer planteó el problema de análisis de una red abierta de colas. Las hipótesis de su modelo son:

- Los servidores tienen un tiempo de servicio exponencial.
- Estos servidores pueden atender a sus clientes de acuerdo a cuatro prioridades de servicio:

Primeras entradas, primeras salidas (FCFS)

Últimas entradas, primeras salidas (UEPS)

Proceso Compartido (PS)

Infinito número de canales paralelos (IS)

- La red de servidores es abierta.
- La velocidad con que los clientes llegan al sistema es constante y es cero cuando el sistema se satura.

Ahora, supongamos que  $\lambda$  es la velocidad de llegada de clientes al sistema. Además, C es la capacidad de almacenamiento de clientes total del sistema. Pueden existir varios tipos de clientes, cada uno requiriendo de una diferente ruta para su procesamiento dentro de la red. Schweitzer define como  $Th(\lambda, C)$  al número de salidas de clientes del sistema, en función de la velocidad de llegada y la capacidad de almacenamiento del sistema. Y entonces, también Schweitzer define como:

$$\lambda^* = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{C \rightarrow \infty} Th(\lambda, C) \quad \text{Ecuación 1}$$

a la máxima capacidad que es posible obtener de clientes en una determinada red de colas. En un proceso de manufactura, estos clientes, serán los productos que el sistema es capaz de producir.

Es importante conocer las bases con que el autor dedujo las ecuaciones para su modelo. Estas bases son:

- Hay solo cuatro tipos de servidores en la red. Estos son FCFS, UEPS, PS IS.

Para las aplicaciones a casos prácticos es necesario agregar dos conceptos adicionales: cajas estadísticas y las estaciones de trabajo con disciplina de servicio FCFS únicamente. Estas consideraciones tienen por objeto adecuar el modelo a los datos disponibles generados por un sistema de manufactura en estudio.

<sup>1</sup>p. J. Schweitzer, "Maximum Throughput in Finite Capacity Open Queueing Networks with Product Form Solutions", Management Science, Vol. 24, No. 3, October, 1977

### Cajas Estadísticas

Este concepto permite disminuir las diferentes clases de clientes del sistema (productos, presentaciones, marcas) a un solo tipo de cliente. Las cajas estadísticas son una forma de comparar diversas presentaciones de un mismo producto entre sí, o bien nos sirven para comparar dos productos entre sí, ya que representan la cantidad del producto que un consumidor promedio compra a lo largo de un año.

La determinación de una caja estadística se hace mediante un estudio de mercado, en donde se investiga el consumo anual de familias o individuos de un determinado producto. La investigación puede abarcar diversos estratos sociales, con diversos poderes adquisitivos, ó bien enfocarse a uno sólo. La naturaleza del producto dicta la apertura del estudio.

El concepto de caja estadística es de gran importancia, pues ayuda a los gerentes a medir la eficiencia y eficacia de sus organizaciones, en función de qué tanto satisfacen las necesidades de un consumidor típico.

Por otro lado, en sistemas típicos de manufactura de proceso, sólo se tiene un tipo de estación de trabajo a saber: FCFS, lo que significa que en este tipo de sistemas se trabaja bajo la regla de hacer todo lo que se tenga enfrente.

Con todas estas reducciones se llega al siguiente modelo simplificado de Schweitzer:

Sea:

$e_i$ : El número esperado de veces que un cliente visita la estación de trabajo  $i$ .

$\mu_i$ : El número de clientes que por unidad de tiempo, puede atender la estación  $i$ .

$n$ : El número total de estaciones del sistema

Se define como:

$$a_i = e_i / \mu_i \quad \text{Ecuación 2}$$

$a_i$ .- Se define como la rapidez de atención de clientes de la estación  $i$ .

además:

$$h(i) = \pi_i (1 - a_i) \quad \forall j \neq i \quad \text{Ecuación 3}$$

Si  $K$  representa el número de clientes probables en el sistema entonces se define:

$$q(K) = \sum_{j=1}^K h(j) \cdot a_j \quad \text{Ecuación 4}$$

Además, Schweitzer<sup>2</sup> ha demostrado que:

$$\lambda^* = 1/a_{\max} \quad \text{Ecuación 5}$$

Esta última ecuación conjuntamente con la ecuación 1 serán de gran utilidad para la determinación del desperdicio de capacidad instalada.

El factor  $\lambda^*$  es el valor de saturación del sistema. Es la máxima capacidad de procesamiento de las cajas estadísticas del sistema. Sin embargo, es posible también encontrar la capacidad de producción para otros valores de  $\lambda$ , siempre que sean menores que  $\lambda^*$ .

Valores de  $\lambda$  menores a  $\lambda^*$  son posibles, pero no deseables. Esto es porque resulta natural pensar que una empresa desea trabajar sus instalaciones al máximo de productividad. Para este modelo, valores de  $\lambda$  menores a  $\lambda^*$  son provocados por variaciones en la capacidad de almacenamiento de clientes en el sistema, lo que definimos

<sup>2</sup>Op Cit.

como C. A esto en sistemas de manufactura se le conoce como inventario en proceso.

Supongamos por un momento que una empresa se enfrenta a una gran demanda de producto. Hasta el momento es incapaz de satisfacer la demanda. De no satisfacerla en el corto plazo, algún competidor podría "canibalizar" dicho mercado. Debe entonces aumentar con rapidez su "throughput", que se traduce en mayor facturación.

El primer paso sería encontrar la capacidad máxima teórica instalada de la planta. El encontrar esta capacidad por sí sola no garantiza el poder llegar a ella, pero sí fija un objetivo a los esfuerzos de optimización. Puede, además, retrasar inversiones inútiles en capacidad adicional de planta, que además no se pueden hacer en el corto plazo.

Existen técnicas para aumentar el "throughput". Una muy evidente es aumentar el inventario en proceso (o C en la ecuación 1). Otra técnica es la "teoría de restricciones", que se planteará en el capítulo 4.

Relacionado con este aumento propuesto de C, para encontrar la relación entre el inventario en proceso y la producción de un sistema de manufactura, Schweitzer<sup>3</sup> ha desarrollado varias ecuaciones que nos dan valores de  $TH(\lambda, C)$  a diferentes velocidades de entrada de clientes y capacidades de almacenamiento. En estas ecuaciones también se han aplicado las reducciones anteriormente propuestas.

En su artículo el autor ha demostrado que:

$$A(C) = \sum_K \lambda^K q(K) \quad \text{Ecuación 6}$$

Para resolver esta serie, y para aplicar la ecuación a casos prácticos vale la pena recordar la solución a la serie infinita:

$$\sum_{i=0, n-1} q^i = (1 - q^n) / (1 - q) \quad q < 1 \quad \text{Ecuación 7}$$

Además el mismo autor ha demostrado que:

$$TH(\lambda, C) = \lambda A(C-1) / A(C) \quad \text{Ecuación 8}$$

Con las ecuaciones 6, 7 y 8 se pueden obtener la capacidad de planta para combinaciones de  $\lambda$  y C.

#### Desperdicio de capacidad instalada. Un ejemplo

Una de las formas de tener un desperdicio en la capacidad instalada es producir un producto de baja venta. En muchas ocasiones, hay presentaciones que se venden más que otras. Esto provoca que las estaciones de trabajo que producen la presentación de mayor venta, se ocupen más que las que producen otras presentaciones de menor venta. Esto provoca el ocio de algunas estaciones de trabajo con el correspondiente desperdicio de la capacidad instalada.

Para ilustrar esto es mejor hacerlo a través de un ejemplo. En una planta que produce un polvo alimenticio, se obtienen las siguientes presentaciones:

- Sobre de 50 g
- Sobre de 200 g
- Sobre de 500 g
- Lata de 500 g
- Lata de 1000 g
- Lata de 2000 g

La siguiente red de estaciones de trabajo demuestra esquemáticamente el empaque de dichas presentaciones:

<sup>3</sup>Op Cit.

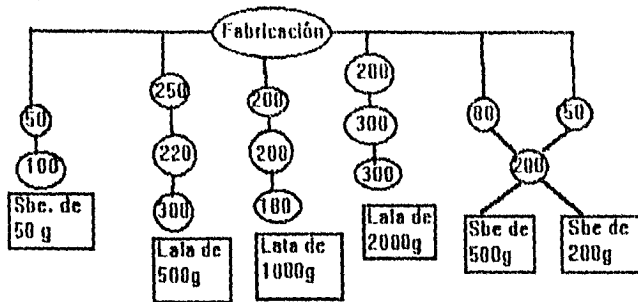


FIGURA 1: Diagrama de empaque de un producto en polvo

Los números dentro de los círculos son las velocidades reales (es decir considerando ineficiencias) de producción en cajas estadísticas por hora de cada una de las estaciones de trabajo.

Una de las características de esta red es que en una estación de trabajo, no se puede empacar ninguna otra presentación. Esto va de acuerdo con reglas específicas de buenas prácticas de manufactura, ya que un producto hecho en una línea de producción, no puede ser hecho en cualquier otra, si no se ha validado previamente el proceso. Estas reglas aplican primordialmente a la industria farmacéutica y alimenticia. Su objeto es eliminar riesgos de contaminación.

De acuerdo al párrafo anterior y usando la regla de la ergonomía, que nos dice que la velocidad de la estación de trabajo más lenta es la que determina la velocidad total de la línea productiva la red de la Fig. 1 puede ser reducida a la de la siguiente figura:

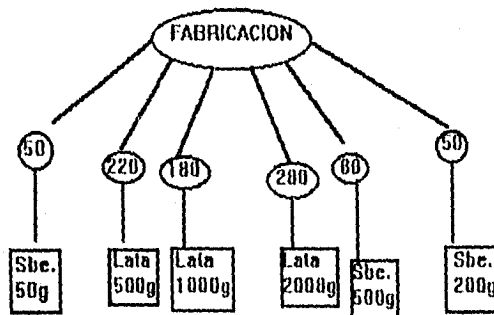


FIGURA 2: Diagrama de empaque simplificado

Esta reducción es importante pues simplifica el análisis, sin que éste pierda validez.

Ahora, supongamos que el departamento de ventas ha estimado que la demanda anual, expresada en cajas estadísticas, de cada una de las presentaciones:

Presentación	MSU/año	%
Sobre 50 g	345	25.46
Lata 500 g	420	30.99
Lata 1000 g	150	11.07
Lata 2000 g	130	9.59
Sobre 500 g	200	14.76
Sobre 200 g	110	8.13
Total	1355	100.00

MSU= Miles de cajas estadísticas

Esto equivale a un requerimiento de embarque diario mínimo de 5272 cajas estadística. Esto calculado suponiendo que sólo se embarca y produce durante 257 días hábiles al año.

Los porcentajes se deben interpretar como equivalentes a  $e_i$ , pues es el número de veces en que esperamos que las estaciones de trabajo, involucradas en la producción de la presentación, trabajen. A su vez las velocidades dentro de los círculos de la red son equivalentes a  $\mu_i$ .

Obteniendo los factores  $a_i$  se llegan a los siguientes resultados, que se calculan con la ecuación 2:

i	$a_i \times 10^3$
1	5.092
2	1.408
3	.615
4	.3425
5	1.845
6	1.626

$a_{\max} = 5.092 \times 10^{-3}$

Entonces la máxima velocidad de producción es igual a  $1/a_{\max} = 196.38$  SU/ltr. Estas cajas estadísticas son la máxima producción que se espera de todo el sistema con ese requerimiento de tamaños por parte de ventas. Ahora, si se multiplica este número por 24 hrs que tiene un día se llega a la máxima capacidad que tiene el sistema para suministrar producto. Este número es 4713 SU/DIA.

Obsérvese que es obvio que el sistema de manufactura no tiene capacidad para suministrar producto al mercado, aún a máxima productividad. Si además aunamos que para obtener este "throughput" es necesario tener una programación de la producción casi perfecta, es lógico pensar que el sistema real tendrá una salida menor de 4713 SU/DIA.

La diferencia entre la realidad y esta máxima capacidad se acentúa si se considera que en el análisis, no se tomaron en cuenta faltas de materiales, materiales defectuosos y los rechazos de producto terminado.

Es correcto pensar, que para otro requerimiento de presentaciones se obtenga otra producción máxima. Sin embargo la mezcla de presentaciones será muy difícil de cambiar pues depende de los gustos del consumidor.

Por otro lado, para llegar a ésta producción máxima y amortiguar la falta de materiales y rechazos de producto terminado, se puede recurrir a aumentar el inventario en proceso. El objetivo de la siguiente sección es encontrar la relación entre inventario en proceso y el "throughput".

#### Relación entre producción y la capacidad del inventario en proceso.

La ecuación 8 nos demuestra la relación entre la producción total y  $\lambda$ , que es la cantidad de MSU's de granel que llegan al sistema para su empaque.

Podría pensarse que todo el granel que llega al sistema debe salir empacado. Pero esto no es necesariamente cierto. Esto es debido a que las estaciones de trabajo de la vida real, no son del todo confiables.

Las estaciones de trabajo pueden fallar por falta de gente, maquinaria en mantenimiento, falta de materiales, falta energía etc. Cuando esto ocurre, se dice que la estación de trabajo está inhabilitada.

Cuando una estación está inhabilitada, el almacenamiento de inventario en proceso puede proteger al sistema, haciendo que se acumulen los trabajos en proceso hasta que la estación de trabajo quede habilitada otra vez. El almacenamiento de proceso no podrá proteger al sistema productivo, si la estación más lenta del sistema es la que queda inhabilitada.

Para el sistema productivo simplificado de la figura 2, se puede desarrollar la siguiente ecuación, gracias a las ecuaciones 4, 6, 7 y 8:

$$TH(\lambda, C) = \lambda \left[ \sum_{i=1, n} h(i) * \{1 - (a_i \lambda)^{C+1}\} / \{1 - (a_i \lambda)\} \right] / \left[ \sum_{i=1, n} h(i) * \{1 - (a_i \lambda)^C\} / \{1 - (a_i \lambda)\} \right] \quad \text{Ecuación 9}$$

donde:

$$h(i) = (1 / (1 - (a_j / a_i))) * h(i) \quad \text{para toda } j \neq i \quad \text{Ecuación 10}$$

Este multiplicador se calcula para todas las estaciones de trabajo y relaciona las capacidades de cada estación con las capacidades de las demás estaciones.

C.- Capacidad del almacenamiento en proceso del sistema.

En el apéndice 4 se presenta un programa en basic para simplificar los cálculos necesarios para resolver esta última ecuación.



#### IV. APLICACIONES A SISTEMAS DE FLUJO DE PROCESO

En el capítulo anterior se aplicó un modelo simplificado de sistema flexible de manufactura, en la obtención de la capacidad de producción de una planta.

Un sistema productivo de este estilo, es un arreglo lineal de estaciones de trabajo, en donde se alimentan trabajos a la primera estación y se obtienen productos únicamente al final de la línea. El orden de estas estaciones de trabajo no es conmutable. En esta línea se puede producir un solo tipo de producto por cada ciclo.

Si se requiere manufacturar otro producto o una presentación diferente del mismo, se deben hacer ajustes o cambiar las estaciones de trabajo de la línea productiva.

En este tipo de sistemas también existe un inventario en proceso, el efecto de éste en la producción es el mismo que en el caso de los sistemas flexibles. Es decir, a mayor cantidad de inventario, mayor producción.

**Almacenamiento para inventario en proceso local o común.**

Tanto para sistemas flexibles, como para sistemas de flujo, existen dos formas de suministrar el almacenamiento necesario para mantener el inventario en proceso. Una de estas formas, es la de asignar un espacio en cada una de las estaciones de trabajo destinado para su almacenamiento. A esto se le llama almacenamiento local y se muestra en la figura 1:<sup>1</sup>



**M1= MAQUINAS**  
**A1=ALMACENES**

FIGURA 1 Diagrama de Almacenamiento local

También se puede suministrar este espacio de almacenamiento en forma única para todas las estaciones de trabajo. A esto se le conoce como almacenamiento común, como puede observarse en la figura 2:

---

1. Buzacott & Shanthikumar "Models for understanding flexible manufacturing systems" *AIIE Trans.* Vol 12, No. 4 Dec 1980

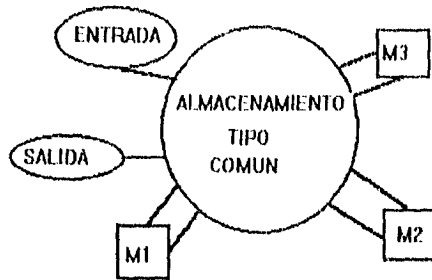


FIGURA 2: Diagrama de Almacenamiento Común

En este tipo de almacenamiento, los materiales pueden ser suministrados a cualquier estación de trabajo lo que permite una mayor flexibilidad.

Buzacott y Shanthikumar<sup>2</sup> proponer otra forma de almacenamiento común, mediante el uso de "palomar" como se muestra en la siguiente figura:

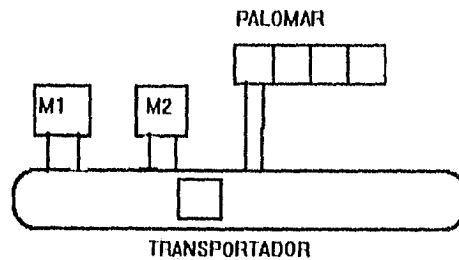


FIGURA 3: Diagrama de Almacenamiento tipo palomar

Superioridad del almacenamiento común sobre el almacenamiento local.

Buzacott y Shanthikumar<sup>3</sup> demuestran la superioridad del almacenamiento común sobre el local y lo hacen analizando un sistema de dos estaciones de trabajo que procesan un solo producto. Dicho producto no requiere de un orden de procesamiento y por tanto puede estar en cualquiera de las dos estaciones.

Si  $M$  es el número de estaciones de trabajo y si además  $q_i$  es la probabilidad de que el primer procesamiento se dé en la estación de trabajo  $i$  entonces este sistema de dos estaciones se representa de la manera siguiente:<sup>4</sup>

$$q_i = 1/M \text{ si } M=2 \quad q_i = 1/2 \quad \forall i$$

<sup>2</sup> Ibid

<sup>3</sup> Ibid

<sup>4</sup> Ibid

Si  $P_{ij}$  es la probabilidad de que el siguiente procesamiento del producto se dé en la estación  $j$ , partiendo de la estación  $i$ , entonces: <sup>5</sup>

$$P_{ij} = 1/M \quad \text{si } M=2 \quad P_{ij} = 1/2$$

A partir de estos resultados Buzacott y Shanlikumar e incorporando los supuestos de Schweitzer<sup>6</sup> encuentran la máxima producción posible, para los casos en que se provee al sistema de manufactura con un almacenamiento local o uno común. En el primer caso, se tienen dos almacenamientos en cada una de las estaciones de trabajo.

La capacidad de cada estación es idéntica y es igual a  $N$ . Suponiendo que los trabajos se suministran al sistema bajo la disciplina de FCFS (Primeras entradas-Primeras salidas), y que el número máximo de trabajos en el sistema se mantiene en  $C$  (inventario en proceso) donde  $C \geq N+1$  y  $C \leq 2N$ . Con estos supuestos se construye la ecuación siguiente:

$$PC(C) = \mu (4N-2C+3)/(4N-2C+4) \quad \text{Ecuación 1}$$

donde  $\mu$  es la velocidad de procesamiento de cualquiera de las dos estaciones de trabajo, ya que se trata de un sistema balanceado.

Si  $PC$  es la capacidad productiva del sistema, el máximo valor para este parámetro se obtiene cuando  $C=N+1$  y entonces se puede escribir:

$$PC_{\max} = \mu (2N+1)/(2N+2) \quad \text{Ecuación 2}$$

Bajo las mismas consideraciones pero suponiendo un almacenamiento común de tamaño  $z$  se obtiene que:

$$PC_{\max} = \mu(2z+3)/(2z+4) \quad \text{Ecuación 3}$$

En la ecuación 3 se puede observar que  $z$  es mayor que  $N$  debido a que el almacenamiento común es la suma de los almacenamientos locales, por lo que la facturación obtenida con el almacenamiento común es mayor que en el caso del almacenamiento local.

#### Modelos desarrollados para sistemas de manufactura de proceso

Como se mencionó anteriormente, estos sistemas están basados en el alineamiento de las estaciones de trabajo, para la manufactura en serie de un sólo producto. Numerosas plantas de manufactura se basan en sistemas de proceso. A éstos se les conoce también como de flujo. Para este tipo de sistemas existen modelos basados en simplificaciones del modelo general de sistema flexible de manufactura que se aplican a la determinación de la capacidad de una línea de producción.

Para una aplicación de este tipo de sistemas, se parte de las ecuaciones de Buzacott <sup>7</sup> que describen un sistema flexible de manufactura:

$$c_{jr} = q_{jr} + \sum_{j=1, M} P_{ij,r} c_{jr} \quad \text{Ecuación 4}$$

donde:

$r$ : Número de clases de trabajos que el sistema puede admitir

<sup>5</sup> Ibid

<sup>6</sup> P. J. Schweitzer, "Maximum throughput in finite capacity open queueing networks with product form solutions", *Management Science* Vol 24, No. 2, October 1977

<sup>7</sup> op cit

$e_{ir}$ : Número esperado de veces que un trabajo de la clase  $r$  visita la estación  $i$   
 $q_{ir}$ : Número esperado de veces que un trabajo de la clase  $r$  visita por primera vez la estación  $i$   
 $P_{ij,r}$ : Probabilidad de que un trabajo de la clase  $r$ , una vez procesado en la estación  $i$  tenga como destino siguiente en su ruta de procesamiento la estación  $j$ .

Esta ecuación representa el número de veces que la estación  $i$  aparece en la ruta de un trabajo.

$$\text{Sea: } U_i = \lambda a_i \quad \text{Ecuación 5}$$

donde:

$U_i$ : Utilización total de la estación  $i$

$a_i = c_i / \mu_i$

$c_i = \sum_{r=1, R} e_{ir}$

$\mu_i$ : Velocidad en que los trabajos son procesados por la estación  $i$

$\lambda$ : Velocidad de llegada de trabajos al sistema.

La ecuación 5 proporciona el porcentaje del tiempo total en el que la máquina  $i$  se encuentra ocupada.

En el caso de un sistema de flujo o de proceso de manufactura se tienen que incorporar los siguientes supuestos:

Solo se admiten un tipo de trabajos ( $r=1$ ), los trabajos sólo pueden entrar a través de la estación 1 ( $q_1=1$ ,  $q_i=0$  ( $i > 1$ )) y éstos sólo pueden avanzar en el sistema en forma secuencial ( $P_{i,i+1}=1$  ( $i=1,2,\dots,M-1$ ) y  $P_{ij}=0$  para  $j > i+1$ ).

Dado que todos los trabajos deben pasar por todas las estaciones, entonces se tiene:

$e_i=1$  y  $a_i=1/\mu_i$  para toda  $i$ ; y en el caso de los sistemas de flujo la ecuación 5 se transforma en:

$$U_i = \lambda / \mu_i \quad \text{Ecuación 6}$$

Esta última ecuación muestra que para encontrar la producción de un sistema de flujo éste se puede analizar observando el comportamiento de cada una de las estaciones de trabajo en forma individual lo que permite conocer la salida (throughput) del sistema así como el nivel de inventario en proceso, dada una eficiencia en cada una de las estaciones de trabajo.

En este análisis no se incluye el efecto del inventario en proceso. Cuando éste está limitado, existe la probabilidad de que las estaciones de la línea productiva, se bloqueen o se queden "hambrientas" y cuando el inventario en proceso tiende a infinito, estas probabilidades desaparecen.

### Eficiencia

La definición más común de la eficiencia, es la de la razón resultante de dividir la producción real obtenida entre la producción teórica de una estación de trabajo. Esta es la resultante de multiplicar la velocidad de diseño de la estación de trabajo, por el número de horas programadas de producción.

Existen diversas razones por las cuales se interrumpe la producción de una línea. Las cinco más importantes son: falta de materiales, fallas en la maquinaria, paros para descansos, fallas de energía y cambios de tamaño, o de producto.

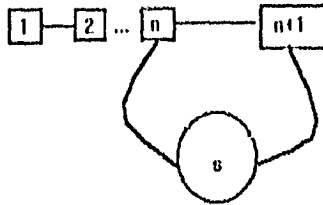
Los sistemas de medición de eficiencia se enfocan a determinar cual de esas cinco causas provocan las mayores inproductividades y una vez detectada se hacen planes para disminuir su efecto.

En los modelos que a continuación se presentan, la eficiencia solo deberá contemplar paros de maquinaria por descomposturas, por falta de herramientas, paros por descansos y fallas de energía y será objetivo de éstos el de determinar el efecto del manejo y almacenamiento de los materiales, en el "throughput" de la línea.

**Modelo de Yamashita y Suzuki <sup>8</sup>**

Este modelo se aplica a sistemas de manufactura de proceso. Los supuestos de este modelo son los siguientes:

1. Se considera que la línea productiva tiene un almacén común de proceso. El número de estaciones de trabajo es  $n$  y la capacidad máxima del almacenamiento de proceso es  $s$ .
2. Todas las estaciones de trabajo son balanceadas, e incluye la eficiencia de las estaciones de trabajo como la variable que caracteriza al "throughput". La eficiencia de cada una de las estaciones de trabajo se representa como una variable llamada  $A_i$ . Esta variable se interpreta como la probabilidad de que una estación esté en operación en un cierto intervalo de tiempo.
3. La producción total de la línea depende del hecho de que la última estación de trabajo siempre tenga espacio para transferir una unidad procesada. Para que esto suceda, en los sistemas reales de manufactura, toda unidad producida debe ser vendida.
4. La línea productiva no se bloqueará hasta que el almacenamiento común se llene y pueden dos trabajos parados en las dos estaciones de trabajo adyacentes, como se muestra en la fig 4.



**FIGURA 4:** Esquema del modelo de Yamashita y Suzuki

La solución se basa en un proceso iterativo consistente en el análisis de pares de estaciones de trabajo desde el final de la línea hasta el principio y su interacción con el almacenamiento común.

Esta solución es aproximada y simplificada ya que se considera que el almacenamiento común solo tiene interacción con las dos estaciones de trabajo bajo análisis. En la realidad esto no es válido, pues todas las estaciones de trabajo interactúan en un momento dado con el almacén. Pero en intervalos de tiempo muy pequeños, es poco probable que dos pares de estaciones interactúen con el almacenamiento común al mismo tiempo. Esto no es otra cosa que el estudio de un proceso "muerte nacimiento", que es la metodología básica para el análisis probabilístico de teoría de colas.

Sea la probabilidad de que el número de trabajos en el almacén común pase de  $k$  a  $k+1$ , por la acción de la estación  $n$ ,  $\lambda_n$  y la probabilidad de transición de  $k+1$  a  $k$   $\mu_{n+1}$ .

La probabilidad de que exista una unidad en proceso en la estación  $i$ , cuando el número de unidades en el almacenamiento común, es igual a  $k$  se representa como  $P[E_i | M_i=k]$ .  $M_i$  representa las unidades en el almacén común.

Las siguientes ecuaciones permiten calcular la velocidad de transferencia de unidades de y hacia el almacén común:

$$\lambda_i = P[E_i | M_i=k] * (1 - P[E_i | M_i=k]) \tag{Ecuación 7}$$

$$\mu_{i-1} = (1 - P[E_{i-1} | M_i=k]) * P[E_i | M_i=k] \quad (k=1, 2, \dots, s+2) \tag{Ecuación 8}$$

<sup>8</sup> Hediaki Yamashita and Shigemichi Suzuki, "An Approximation method for line production rate of a serial production line with a common buffer" **Comput Opns. Res.** Vol 15 No 5 1988

El cálculo de la eficiencia terminal y la probabilidad de que esté ocupada o vacío una estación se realiza por medio del siguiente sistema de ecuaciones recursivas:

$$i=n: P[E_i | M_i=k] = \{A_i (k > 0), 0 (k=0)\} \quad \text{Ecuación 9}$$

$$i < n: P[E_i | M_i=k] = \{A_i (k > 2), A_i (k=1), 0 (k=0)\} \quad \text{Ecuación 10}$$

$$i > 2: P[E_{i-1} | M_i=k] = \{P_{i-1,j} (k=0), 0 (k=j+2), P_{i-1,j-k+1} (1 \leq k \leq j+1)\} \quad \text{Ecuación 11}$$

$$i=2: P[E_{i-1} | M_i=k] = \{A_i (k < j+2), 0 (k=j+2)\} \quad \text{Ecuación 12}$$

Donde  $A_i$  la probabilidad de que la estación de trabajo  $i$  esté funcionando durante un ciclo productivo y  $P_{ij}$  la probabilidad de que exista una unidad en proceso en la estación de trabajo  $i$  dado que existen  $j$  unidades en el almacenamiento común.

El objetivo del modelo es buscar  $P_{n,s}$ , que es igual a la velocidad de producción de la línea y para ello es necesario obtener el resto de las  $P_{ij}$  para  $i=1, \dots, n-1$ .

En el apéndice 5 se presenta un programa en Basic que permite resolver para casos prácticos este modelo.

#### Modelo de S.B. Gershwin<sup>9</sup>

Este modelo se desarrolló para sistemas que pueden ser fraccionados, esto es, sistemas que pueden ser analizados entre dos estaciones de trabajo con un almacenamiento intermedio y la posterior integración de las diferentes estaciones estudiadas, para realizar el análisis del sistema total, como se observa en las figuras 5 y 6. Esta descomposición en partes permite que el modelo se simplifique para el caso de dos estaciones de trabajo y se resuelva de acuerdo a lo establecido por Gershwin y Schick.<sup>10</sup>

El objetivo del modelo es el de determinar la eficiencia global del sistema, a través del estudio de las eficiencias de pares de estaciones de trabajo en forma secuencial y es condición esencial que la línea sea de proceso sea unidireccional, como se observa en la figura 5.

En la misma figura 5 se muestra la interrelación entre la estación 2 y las estaciones 1 y 3, por supuestos del modelo sólo se pueden analizar pares de estaciones, por lo que es necesario descomponer este subsistema de la manera siguiente: el primer par de estaciones será  $M1$  y  $M2$  con el almacén  $B1$  y el segundo estará dado por el par  $M2$  y  $M3$  con el almacén  $B2$  y se puede continuar en forma recurrente para el resto de las estaciones de trabajo, como se muestra en la figura num. 5.

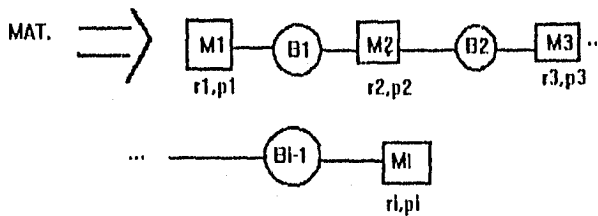


FIGURA 5. Esquema del modelo de Gershwin

donde  $M_i$ : Estación de trabajo  $i$   
 $B_j$ : Almacenamiento o "buffer"  $i$

<sup>9</sup> S. B. Gershwin, "An efficient decomposition method for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking", *Op. Res.* Vol 35 No. 2, 1987

<sup>10</sup> Gershwin and Schick

- $r_i$ : Probabilidad de que una estación de trabajo sea reparada dentro de el término de un ciclo productivo.
- $p_i$ : Probabilidad de una descompostura de la estación  $i$  durante un ciclo productivo

Este modelo incluye el estudio probabilístico de las fallas, el cálculo de la probabilidad del tiempo de reparación por ciclo productivo y la probabilidad de que una estación de trabajo se encuentre operativa durante el ciclo productivo. En este último punto coincide este modelo con el planteado por Yamashita.

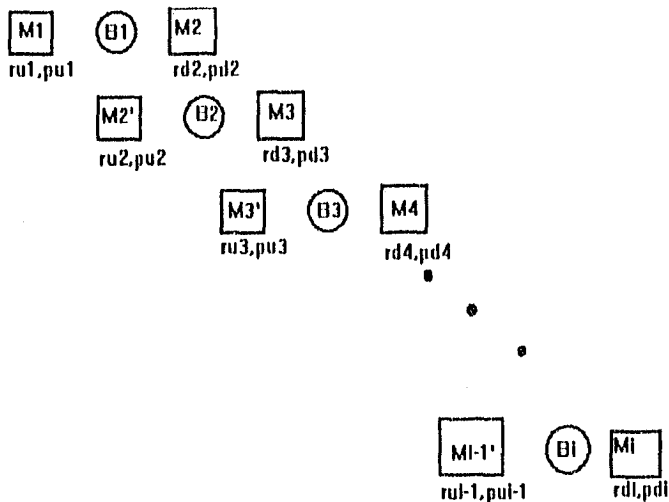


FIGURA 6 Descomposición del sistema de la figura 5

Una vez descompuesto el sistema de proceso en subsistemas de dos estaciones de trabajo, se analizan en forma particular cada uno de estos subsistemas, para encontrar todas las  $r_{ij}(i)$ ,  $r_d(i)$ ,  $p_{ij}(i)$ ,  $p_d(i)$  y con estos parámetros se determina la eficiencia global del sistema.

Supuestos del modelo:

- 1.- Las estaciones de trabajo pueden descomponerse y requerir de reparaciones.
- 2.- Existe un número finito que representa la capacidad máxima del almacenamiento local.
- 3.- Puesto que el almacenamiento local no es infinito, existe la probabilidad de paro de alguna estación de trabajo, debido al bloqueo del almacenamiento local inmediato después de ella o bien que se vacíe el almacenamiento antes de la estación.
- 4.- La primera estación de trabajo nunca se para por falta de trabajos y la última nunca se bloquea.
- 5.- Existe conservación en el flujo del material, o los trabajos en proceso en la línea. Este concepto se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$E(1)=E(2)=\dots=E(i)=\dots=E(n) \tag{Ecuación 13}$$

donde  $E(i)$  es la eficiencia global de la máquina  $i$  considerando que se puede bloquear, o quedar sin trabajos en la línea.

- 6.- Si la eficiencia de cada una de las estaciones de trabajo se define como:

$$e_i = p_i / (r_i + p_i) \tag{Ecuación 14}$$

Entonces la eficiencia puntual en la línea de una estación de trabajo es igual a:

$$E(i) = e_i (1 - p_s(i-1) - p_b(i)) \quad \text{Ecuación 15}$$

donde:

$p_s(i-1)$  es la probabilidad de que se vacíe el buffer inmediatamente antes de la estación  $i$  (hambreamiento)

$p_b(i)$  es la probabilidad de que se bloquee el buffer inmediatamente después de la estación  $i$

La ecuación 19 como lo demuestra Gershwin<sup>11</sup> puede reescribirse en términos de las probabilidades de falla y funcionamiento para cada uno de los subsistemas de pares de máquinas, fuera de las condiciones a la frontera:

$$p_d(i-1)/r_d(i-1) + p_u(i)/r_u(i) = 1/E(i) + 1/e_i - 2 \quad i=2, \dots, k-1 \quad \text{Ecuación 16}$$

Gershwin<sup>9</sup> propone que una estación de trabajo  $i$  en la línea "dividida" de la figura 6 para debido a dos causas:

- a) Falla en la estación  $i$  "original" representada en la figura 5
- b) El almacenamiento  $i-1$  se encuentra vacío.

Esta última causa es consecuencia de una falla en la estación de trabajo  $M_u(i-1)$  del sistema de manufactura dividido. Estas fallas se representan mediante las siguientes ecuaciones:

$$r_u(i) = r_u(i-1)X(i) + r_i(1-X(i)) \quad i=2, \dots, k-1 \quad \text{Ecuación 17}$$

$$r_d(i-1) = r_d(i)Y(i) + r_i(1-Y(i)) \quad i=2, \dots, k-1 \quad \text{Ecuación 18}$$

donde:

$$X(i) = (P_s(i-1)r_u(i))/(p_u(i)E(i)) \quad Y(i) = (P_b(i)r_d(i-1))/(p_d(i-1)E(i-1)) \quad \text{Ecuación 19}$$

Con las condiciones a la frontera siguientes:

$$r_u(i) = r_i \quad r_d(k-1) = r_k \quad p_u(1) = p_1 \quad p_d(k-1) = p_k \quad \text{Ecuación 20}$$

Las ecuaciones 17, 20, 21, 22 y 23 conforman un sistema en donde se pueden resolver todas las  $p_u(i)$ ,  $p_d(i)$ ,  $r_u(i)$  y  $r_d(i)$  del sistema "dividido". Con estos parámetros se pueden conocer las  $E(i)$  que al final del algoritmo deben de ser iguales. Entonces cualquier  $E(i)$  es la eficiencia global del sistema.

Además es necesario calcular todas las  $P_s(i)$  y  $P_b(i)$  del sistema. Para lo que se requiere la metodología propuesta por Gershwin y Schick<sup>12</sup>. Este modelo define las ecuaciones para el estado estable de un sistema de dos estaciones de trabajo, que necesitan ser reparadas con alguna periodicidad. Sea  $n$  el número de unidades esperando para ser procesadas en el buffer que existe entre ambas estaciones de trabajo.  $N$  es la capacidad máxima del buffer. Se requiere de especificar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que toman valores de 0 o 1. Si  $\alpha$  es cero, la estación de trabajo está en reparación y si el valor es uno, la estación de trabajo está activa.

Entonces  $p(n, \alpha, \beta)$  es la probabilidad de que el sistema tenga  $n$  unidades en el buffer y que las dos estaciones de trabajo se encuentren en los estados  $\alpha$  y  $\beta$ .

<sup>11</sup> Gershwin S. B. 1984. "An efficient decomposition method for the approximate evaluation of production lines with finite storage space. In *Analysis and Optimization of Systems, Part 2, Vol. 63 of Lecture notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, New York.

<sup>9</sup>

<sup>12</sup> Gershwin S.B. and I. C. Schick 1983 "Modeling and analysis of three stage transfer lines with unreliable machines and finite buffers. *Opns Research*. 31, pages 354-380 1983.



La determinación de las probabilidades para todos los estados del sistema se realiza mediante el siguiente conjunto de ecuaciones<sup>13</sup>:

$$\begin{aligned}
 p(0,0,0) &= 0 \\
 p(0,0,1) &= (CX)(r_1 + r_2 - r_1 r_2 - p_2 r_1) / (p_2 r_1) \\
 p(0,1,0) &= 0 \\
 p(0,1,1) &= 0 \\
 p(1,0,0) &= CX \\
 p(1,0,1) &= CXY_2 \\
 p(1,1,0) &= 0 \\
 p(1,1,1) &= (CX/p_2)(r_1 + r_2 - r_1 r_2 - p_2 r_1) / (p_1 + p_2 - p_1 p_2 - p_2 r_1) \\
 p(n, \alpha, \beta) &= CX^n Y_1 Y_2 \quad 2 \leq n \leq N-2 \\
 p(N-1,0,0) &= CX^{N-1} \\
 p(N-1,0,1) &= 0 \\
 p(N-1,1,0) &= CX^{N-1} Y_1 \\
 p(N-1,1,1) &= (CX^{N-1} / p_1)(r_1 + r_2 - r_1 r_2 - p_1 r_2) / (p_1 + p_2 - p_1 p_2 - p_1 r_2) \\
 p(N,0,0) &= 0 \\
 p(N,0,1) &= 0 \\
 p(N,1,0) &= (CX^{N-1})(r_1 + r_2 - r_1 r_2 - p_1 r_2) / (p_1 r_2) \\
 p(N,1,1) &= 0
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 X &= Y_1 / Y_2 \\
 Y_1 &= (r_1 + r_2 - r_1 r_2 - p_2 r_1) / (p_1 + p_2 - p_1 p_2 - p_1 r_2) \\
 Y_2 &= (r_1 + r_2 - r_1 r_2 - p_1 r_2) / (p_1 + p_2 - p_1 p_2 - p_2 r_1) \\
 \text{y } C & \text{ es tal que } p(i) = 1
 \end{aligned}$$

Es obvio que  $P_j(1)$  es igual a la sumatoria de todas las  $p(N, \alpha, \beta)$  y  $P_j(2)$  es la sumatoria de todas las  $p(0, \alpha, \beta)$ .

Para resolver el modelo se necesita sustituir las  $r_1, r_2, p_1, p_2$  por las  $r_{1i}(i), r_{2i}(i), p_{1i}(i), p_{2i}(i)$ , del modelo "dividido" para obtener  $P_{1i}(i)$  y  $P_{2i}(i)$  y así resolver las ecuaciones del modelo para todas las  $i$  del modelo "dividido". Esto implica la aplicación de un método iterativo que ajuste los valores de las eficiencias globales de cada estación de trabajo, de tal suerte que todas las eficiencias de la línea sean iguales. En el apéndice 6 se muestra un programa en Basic que resuelve el sistema de acuerdo al algoritmo presentado por S. B. Gershwin.<sup>14</sup>

## SIMULACION

La simulación es la rama experimental de la Investigación de Operaciones por excelencia.<sup>15</sup> Es la técnica utilizada para el análisis de problemas complejos, que no pueden ser resueltos analíticamente, como es el caso de los sistemas flexibles y de proceso de manufactura.

En los modelos analíticos anteriormente estudiados, se hacen algunas simplificaciones que los hacen manejables pero al mismo tiempo los hacen perder exactitud. Por esta razón, es conveniente investigar las posibilidades de la simulación aplicadas a los sistemas de manufactura de proceso.

El paso previo a la aplicación de la simulación consiste en la descomposición jerárquica de las diferentes operaciones que componen el sistema global de producción. A continuación se construye el modelo matemático que describe al sistema en estudio y se prueba la solución.

<sup>13</sup> Ibid

<sup>14</sup> S. B. Gershwin "An efficient decomposition method for the evaluation of tandem queues.....1987

<sup>15</sup> Frederick Hillier y Gerald J. Lieberman, "Introducción a la Investigación de Operaciones", Ed. Mac Graw -Hill 3era Edición en Español 1982.

En el proceso de simulación se identifican los cinco pasos siguientes:<sup>16</sup>

- Construcción del modelo
- Generación de números aleatorios
- Generación de observaciones aleatorias a partir de una distribución de probabilidad
- Preparación de un programa de simulación
- Validación del modelo

**Construcción del modelo.** En esta etapa, es necesario conocer a profundidad la operación del sistema de manufactura para construir su diagrama de flujo. Para estos fines se requiere la siguiente información:

- Número de productos a manufacturarse
- Rutas posibles de los productos dentro del sistema
- Tiempo de maquinado requerido por producto
- Probabilidades de paro de las estaciones de trabajo
- Probabilidades de paro por falta de materiales, materiales defectuosos, descansos.

En los modelos de sistemas flexibles, todas las variables a excepción de las rutas y el número de productos son aleatorias. Es decir habrá que encontrar las distribuciones de probabilidad que más se ajusten al comportamiento observado, ya que los paros de las estaciones de trabajo se deben a múltiples causas y los efectos de muchas de ellas no pueden representarse mediante ningún modelo analítico simple.

**Generación de números aleatorios.** Una vez diseñado el modelo, es necesario generar un juego de números aleatorios que va a servir para darle valores a las variables de entrada del modelo.

Existen varios métodos para generar números aleatorios. El método congruencial es el más utilizado por los programas de simulación. Existen tres variedades de este método, congruencial aditivo, multiplicativo y mixto.

El método congruencial mixto es el usado por el programa de simulación GPSS (General Purpose Simulating System) y requiere de un número aleatorio inicial llamado semilla, a partir de la cual se genera el resto de los números aleatorios utilizando la siguiente relación:

$$x_{n+1}=(ax_n+c)/m \text{ donde: } (a < m, c < m) \quad \text{Ecuación 21}$$

**Generación de observaciones aleatorias a partir de una distribución de probabilidad.** En esta etapa se determinan los valores de las variables de entrada del modelo a partir de las distribuciones de probabilidad que los caracterizan. Una vez determinados los números aleatorios de la etapa anterior se asigna uno de ellos a cada variable del modelo para determinar el valor de ésta. El número aleatorio debe de ser igual a la frecuencia acumulada correspondiente al valor de la variable.

Como ejemplo, supongamos que una de las variables del modelo tiene un comportamiento exponencial, entonces su función de distribución acumulada es:

$$P\{X \leq x\} = 1 - e^{-x} \quad \text{Ecuación 22}$$

Si el número aleatorio escogido para describir la frecuencia acumulada de la variable es  $r$  entonces:

$$r = P\{X \leq x\} = 1 - e^{-x} \quad \text{Ecuación 23}$$

y despejando  $x$  se llega a:

$$x = -\ln(1-r) \quad \text{Ecuación 24}$$

Entonces el valor de la variable, a utilizar en el modelo es  $x$  para un cierto número aleatorio  $r$ .

---

<sup>16</sup>Ibid

**Preparación de un programa de simulación.** Se traduce el diagrama de flujo del paso I en un lenguaje de simulación. Existen diversos lenguajes de simulación como el SIMSCRIPT, el SIMULA, el DINAMO y el GPSS. Los hay inclusive especializados en simular sistemas de manufactura, como el SIMFACTORY. Cada uno tiene sus reglas particulares, pero todos facilitan la simulación de sistemas reales.

**Validación del modelo.** Es necesario convencer de la confiabilidad del modelo y para ello se pueden comparar los resultados obtenidos contra el sistema real y si esto no fuera posible, se puede validar estadísticamente a fin de determinar las variaciones significativas.

#### **Ejemplo de la utilización de la simulación para determinar el "throughput" de sistemas reales.**

McDonnell Douglas Health Information Systems. <sup>17</sup> desarrolló un modelo que tiene por objetivo el de ayudar a determinar el tiempo promedio de respuesta de los servicios de información de salud a los hospitales. Este servicio se conoce como MDHIS por sus siglas en inglés. El modelo de simulación debe ser representativo de la realidad, que permita la toma de decisiones a partir de la información generada.

El objetivo del MDHIS es el de proveer servicios de información a hospitales sobre avances tecnológicos y científicos en el área médica, con la rapidez y oportunidad necesarias para ayudar a la toma de decisiones médicas. Para lograr su objetivo, el MDHIS cuenta con un programa llamado Ejecutivo.

El programa Ejecutivo, consta de cuatro módulos: el núcleo, las tablas de configuración, los programas de soporte y las aplicaciones. El núcleo son un grupo de programas que construyen el ambiente de trabajo necesario para los demás módulos. El núcleo inicializa el programa, lleva estadísticas, transmite mensajes y registra errores. Las tablas de configuración es la interfase del usuario. Los programas de soporte son los que se encargan de las rutinas de entrada y salida, edición de textos, manipulación de datos, etc. Finalmente las aplicaciones son toda aquella información que el cliente puede acceder.

El programa Ejecutivo tiene que servir a 600 hospitales, cada uno requiriendo información diversa, alguna de esta información se requiere de urgencia, por necesidades quirúrgicas. Por otro lado, también hay requerimientos de información internos, por lo que el personal de Mc Donnell Douglas necesita también tener acceso y también hay requerimientos de clientes a quienes solo les interesa obtener información en pantalla. Para dar servicio a los diferentes clientes, el Programa Ejecutivo consta de cinco tipos de servidores:

Módulo de Preguntas Urgentes es el que atiende aquellas requisiciones de información de alta prioridad. Módulo de Misceláneos recoge las consultas normales de los clientes.

Módulo de Servicios internos se encarga de atender al personal de la Mc Donnell Douglas.

Módulo de Edición permite a todos los clientes modificar sus preguntas según sus necesidades, o de acuerdo a los errores detectados.

Módulo POW le permite al cliente obtener un reporte impreso de la información solicitada.

Dentro de los módulos existen 12 tipos de servidores. Estos son capaces de atender a los 15 tipos de transacciones posibles. Para fines de la simulación, solo se consideran nueve servidores, ya que se eliminan todos los que se relacionan con servicios a personal de la Mc Donnell Douglas. Existen objetivos definidos respecto al tiempo promedio de servicio de cada uno de los servidores. Estos se basan en el objetivo de Mc Donnell Douglas de disminuir el tiempo de servicio total del sistema y con ello aumentar el número de clientes servidos.

Se define como tiempo de respuesta, a la suma del tiempo del servicio de entrada, más el tiempo de espera en las colas, más el tiempo de servicio propio de los módulos de consulta. El tiempo del servicio de entrada es aquel que tarda una transacción desde que es recibida por el ejecutivo hasta que el mismo la asigna a la cola de algún servidor. En este tiempo está incluido el necesario para la corrección de errores y la traducción de los medios de entrada de los mensajes al código de los servidores.

---

<sup>17</sup>Steven R. Irvine and Reuven R. Levary, "A Discrete Event Simulation of the Mc Donnell Douglas Health Information Systems On Line Executive", Comput. & Opns. Res. Vol 15 No. 6, 1988.

Para complementar el planteamiento del problema, mediante los datos existentes, los analistas obtienen las distribuciones de probabilidad para los tiempos de llegada de "clientes" o transacciones al sistema, el tiempo del servicio de entrada, la distribución empírica de los tipos de transacción y los tiempos de servicio de cada uno de los tipos de transacciones, en los nueve módulos considerados del sistema. Se observa que la mayoría de las distribuciones son del tipo exponencial. Existen algunos casos de distribuciones del tipo Weibull, así como las distribuciones empíricas de los tiempos del servicio de entrada y de los tipos de transacciones. Cabe recordar que la distribución de Weibull es capaz de describir un fenómeno aleatorio intermedio entre el extremo exponencial y el de la distribución normal.

Al correr los analistas el modelo de simulación, éste se validó contra la realidad, de esta forma se aseguró la confiabilidad del mismo. Se analizó el comportamiento de los nueve módulos, observándose que el módulo INQ1 fue el que más transacciones tuvo fuera de objetivo de servicio, y por lo tanto el que tenía la línea de espera más grande. Este módulo fundamentalmente procesa transacciones del tipo ARINQ, que son requisiciones normales de información por parte de los usuarios.

Con el objetivo de mejorar el servicio a los usuarios de MDHIS, se realizaron varios cambios. El primero fue permitir que otros módulos procesaran las transacciones del tipo ARINQ cuando la cola de INQ1 se llena. Se involucró a tres módulos más en la operación. Con este simple cambio, se duplicó la capacidad del sistema, debido a que se determinó que el módulo INQ1 es la restricción del sistema. Es decir que el módulo INQ1 es el que determina en gran medida la facturación de la Mc Donnell Douglas. Al actuar sobre la restricción, se eleva dramáticamente la facturación de todo el sistema. Por ejemplo en este caso se eleva de 5997 unidades a 11899.

Estos números muestran el poder que tiene un modelo resuelto por simulación para totalizar un sistema, al representar una situación de la vida real, se pueden obtener estadísticas que permitan tomar decisiones acertadas y observar estas decisiones en acción, sin que en realidad se haya hecho modificación alguna al sistema real.

Es obvio que en los modelos determinísticos la posibilidad de introducir con éxito práctico otra distribución que no sea la exponencial es muy limitada. Esto hace que la simulación tenga algunas ventajas sobre los métodos determinísticos. Sin embargo, el tiempo de cómputo que requiere además del tiempo que requiere el modelo para ser construido, la hacen tener desventajas. En sistemas flexibles complejos la simulación es, sin embargo, la única alternativa de análisis.

#### Construcción del modelo de simulación para la línea de proceso.

Aunque existen una gran variedad de lenguajes de simulación, para el caso de un sistema lineal de producción del tipo de proceso, se puede usar cualquier hoja de cálculo electrónica para desarrollar un modelo simplificado de simulación. El uso de una hoja de cálculo como el caso del Excel, permite desarrollar el modelo de simulación de una manera simplificada y sin tener que recurrir a sofisticados lenguajes de programación. La limitante de simular en una hoja de cálculo, estriba a que difícilmente se podrán simular complejos sistemas flexibles de manufactura, donde los productos son de diversas clases y tiene diferentes secuencias de visita a las diferentes estaciones de trabajo. Un modelo así necesariamente tendrá que ser simulado mediante el uso de algún lenguaje de simulación.

En el caso presente, el objetivo primordial es simular un sistema lineal de manufactura en donde se empaqueta un jarabe medicinal. El proceso de empaquetado empieza con el llenado de las botellas de jarabe, para posteriormente pasar al tapado, etiquetado, posicionamiento de vaso dosificador y finalmente encartonado en estuche individual. Cada una de estas estaciones de trabajo está constituida de una pieza de maquinaria específica. Se considera en el presente caso que el proceso de fabricación del jarabe, de la orientación de botella y del encartonamiento en corrugado final y la estiba, son operaciones más eficientes que el resto de la línea. De hecho de los datos estadísticos extraídos de la línea se observa que la operación más lenta de todo el sistema es la encartonadora.

El modelo de simulación parte de considerar que, debido a que todas las estaciones de trabajo bajo estudio contienen una pieza de maquinaria, la distribución de probabilidad aplicable a la variación de velocidad de trabajo en cada una de ellas, es la distribución Normal. Teniendo en cuenta esto último, se deben capturar como mínimo 30 datos de velocidad para poder determinar confiablemente la media y la desviación estándar que tipifiquen mejor la operación de la estación de trabajo.

Con esto en mente, se obtuvieron de la línea de jarabe los siguientes datos de media y desviación estándar de velocidad:

**VELOCIDADES PROMEDIO DE LAS ESTACIONES DE TRABAJO DE LA LINEA DE JARABE**

	LLENAD	TAP	ETIQ	POS	CART
<b>MEDIA</b>	31.66667	35.14815	33.57407	36.01852	31.03704
<b>DSTD</b>	26.29083	24.83865	29.34608	27.64225	25.37118

**VELOCIDADES EN BOT/MIN**

En base a estos datos se puede empezar a aplicar un modelo de simulación basado en generar observaciones aleatorias de las distribuciones normales, cuyas medias y desviaciones estándar están representadas en la tabla anterior. Estas observaciones representan las velocidades de las diferentes estaciones de trabajo de la línea. En la simulación que se presenta a continuación, la base será representar mediante la distribución normal la velocidad de proceso en botellas por segundo en determinada estación de la línea, para lo cual se modifican la media y la desviación estándar de la tabla anterior. Para generar las observaciones aleatorias se utiliza la siguiente ecuación:

$$x = \sigma \sqrt{n/12} \sum_{i=1}^n r_i + (\mu - (n/2 * (\sigma \sqrt{n/12})))$$

Ecuación 25

donde:

- x.- Es la observación aleatoria de la distribución normal
- σ.- Es la desviación estándar de la distribución
- r.- Es un número aleatorio
- μ.- Es la media de la distribución
- n.- Es la cantidad de números aleatorios a usarse para generar la observación aleatoria.

Esta técnica para generar observaciones aleatorias de una distribución normal, se basa en generar una determinada cantidad de números aleatorios. En el caso de la presente simulación se van a generar 6 números aleatorios que a su vez producirán las observaciones sobre la velocidad de procesamiento y llegada de las piezas, en una determinada estación de trabajo. Una vez determinados estas velocidades, se determina la menor velocidad en el sistema de manufactura, ya que esta determinará la velocidad total del sistema. En nuestro caso ejemplo, se trata de determinar la velocidad de llenado, tapado etiquetado, posicionamiento de vasito dosificador y empaquetado en cartón individual.

Siguiendo la técnica de simulación, la determinación de la velocidad total de proceso se hace por lo menos treinta veces, en el presente caso del empaque de jarabe se realizó un total de 200 veces. En cada iteración se archiva el valor obtenido para después tomar un promedio de los valores, el cual es significativo, pues con este promedio se puede comparar con la velocidad ideal del proceso, con el objeto de determinar la eficiencia de la línea y la forma en que es operada. Para el caso de la presente simulación se hizo la consideración que se tiene disponible un almacenamiento de proceso en línea bastante grande. Los resultados se resumen en la siguiente tabla.

SIMULACION USANDO EXCELL							
PROCESO	PRIMER PROCESO						RESULTADO
	# ALEA	# ALEA	# ALEA	# ALEA	# ALEA	# ALEA	
LLEGADA	0.7113	0.1538	0.6222	0.8312	0.3387	0.8088	0.179687
LLENADORA	0.7621	0.9462	0.91026	0.895	0.9264	0.4716	1.71251002
TAPADORA	0.0675	0.8563	0.8424	0.4192	0.8407	0.4426	0.86021221
ETIQUETADORA	0.0969	0.4796	0.59778	0.9948	0.0894	0.6738	0.51276904
POSICIONADORA	0.2244	0.7793	0.00815	0.2186	0.2505	0.3084	0.18858304
CARTONADORA	0.7407	0.3581	0.11989	0.6805	0.2301	0.6465	0.38313892
VEL DE PROCESO							3.65721324
EFICIENCIA							0.58515412
EF. PROMED.							0.4400581

La velocidad de proceso en la tabla anterior está dada en botellas por segundo, la eficiencia puntual y promedio están calculadas con respecto a la velocidad teórica de la línea que es de 6.25 botellas por segundo.

Resulta interesante comparar los resultados obtenidos por medio de este sencillo proceso de simulación con respecto a los que se pueden obtener mediante el modelo de Yamashita y Suzuki<sup>18</sup> que bajo los mismos parámetros se obtienen los resultados que se resumen en la siguiente tabla.

RESULTADOS SEGUN YAMASHITA	
Buffer	Eficiencia
5	0.3687
10	0.3982
15	0.4095
20	0.414
30	0.4185
40	0.4195
50	0.4198

Para obtener los resultados de eficiencia de la línea de jarabe se monitorearon las velocidades de las estaciones de trabajo de la línea. Se obtuvo el promedio de velocidad de cada una de ellas, para después dividirlo entre la velocidad teórica de la maquinaria. Mediante esta operación se obtuvo la eficiencia promedio de cada estación de trabajo. Estos datos se insertaron en el modelo de Yamashita y Suzuki<sup>19</sup> para obtener la eficiencia total de la línea.

En la tabla anterior, se repitió el cálculo para diversos tamaños de almacenamiento en línea común o "buffer". El tamaño del almacenamiento está dado en botellas. Se observa que a almacenamientos más grandes de 30 unidades el valor de la eficiencia total de la línea calculada, no varía mucho. Es posible entonces tomar el valor de 0.4198 como la eficiencia bajo la condición de "buffer infinito".

Obsérvese que el valor obtenido mediante el modelo de Yamashita es muy parecido al valor obtenido mediante la simulación. Esto nos permite concluir que ambos métodos son válidos para calcular eficiencias totales de una línea. La ventaja del método de Yamashita es que es rápido y fácil de usar, mientras que la simulación requiere de más tiempo de preparación. Por otro lado la simulación puede incorporar más variables para el cálculo de la eficiencia, como por ejemplo otro tipo de distribuciones de entrada (como la distribución uniforme). También es posible incorporar modelos de asignación de materiales y herramientas y el flexibilizar el sistema de manufactura mediante la adición de nuevos productos a manufacturarse dentro del sistema.

Como conclusión podemos validar el método de Yamashita como herramienta útil y sencilla de analizar líneas de manufactura en serie o de proceso en donde sólo se produce un tipo de artículo. En el apéndice #7 se muestra una corrida de simulación para esta misma línea realizada usando el programa GPSS (General purpose simulating system).

<sup>18</sup> Hediaki Yamashita and Shigemichi Suzuki, "An Approximation Method for line production rate of a serial production line with a common buffer" *Comput Opns. Res.* Vol 15 No. 5 1988.

<sup>19</sup> Op Cit

## V. MODELOS DE OPTIMIZACION ALTERNATIVOS

En los capítulos anteriores se mostraron los diferentes métodos para la determinación del throughput o facturación de los sistemas flexibles y de proceso de manufactura. Varios de estos métodos (sobre todo los que se aplican a sistemas flexibles) son muy complicados y su aplicación práctica es limitada.

En sistemas flexibles complejos, es necesario contar con un método que ayude a elevar la facturación, mediante una planeación de la producción óptima. El uso de la simulación permite representar éste tipo de sistemas para observar el efecto en la facturación de diversas estrategias de optimización. El objetivo de algunos de los modelos es maximizar la facturación y/o disminuir el inventario en proceso.

A pesar de la complejidad de este tipo de modelos se busca simplificar la metodología de análisis en sistemas flexibles y de proceso para su aplicación a problemas industriales con el objetivo de elevar la facturación y asignar los recursos de la organización a sus estrategias, en especial de rentabilidad.

Goldratt (1986) plantea una serie de reglas básicas conocidas como teoría de restricciones, cuyo objetivo es aumentar las utilidades finales y el retorno sobre la inversión mediante el aumento en la facturación y la disminución de los inventarios en proceso.<sup>1</sup>

### Teoría de las restricciones

La meta de toda organización es hacer dinero hoy y mañana. Independientemente del papel social de la empresa, tiene que reconocerse que ésta no podrá sobrevivir si no logra darle a sus accionistas los dividendos esperados. La meta *per se* está enfocada a vigilar las utilidades de hoy, el flujo de efectivo y el retorno sobre la inversión. Estas tres variables son las únicas que debe vigilar la organización. El flujo de efectivo es particularmente importante para Goldratt, ya que asegura la existencia de la empresa en el corto plazo.

La siguiente regla de Goldratt es la redefinición de las variables que son la meta. Como el flujo de efectivo solo se puede generar de las ventas (o en otras palabras de la facturación) en realidad la facturación o "throughput" es la "traducción" de flujo de efectivo para Goldratt. Esta es la primera y más importante de las variables para el autor. La maximización de esta variable asegurará no solo la supervivencia en el corto plazo de la empresa, sino que mejora sensiblemente el servicio a clientes. Este servicio a clientes es de gran importancia en un mercado altamente competitivo.

El retorno de la inversión se traduce como inventario para Goldratt. El término inventario lo define como todo aquello que utiliza la empresa para convertir las materias primas en productos vendibles. Por lo tanto el inventario incluye maquinaria, equipo, inventario de materia prima, producto terminado y material en proceso. La regla aquí es disminuir el inventario, lo cual redundará en retornos de la inversión más grandes. Esto le permite a la empresa progresar en el largo plazo.

El objetivo de utilidades se expresan mediante los gastos de operación. Noévemente aquí la definición es especial. Gasto de operación es todo aquel dinero que gasta la empresa para convertir las materias primas en productos vendibles.<sup>2</sup> En esto están incluidos los gastos fijos como los variables. La estrategia a seguir es disminuir estos gastos para mejorar las utilidades.

La tercera regla de la teoría de restricciones se refiere a estos gastos de operación. Estos no deben distribuirse entre los diferentes productos de la empresa, como lo hace la contabilidad de costos. Goldratt cuestiona ésta distribución ya que es muy complicada y no ayuda a llegar a la meta. Además de cualquier manera, en el corto plazo, hay que cubrir los gastos fijos de la empresa al igual que los variables, para obtener utilidades.

La cuarta regla propone el cambio del mundo del costo al mundo de la facturación. Según esta regla, lo importante a perseguir es elevar el throughput o facturación, aunque esto implique en el corto plazo aumentar los gastos de operación y el inventario. Goldratt define lo que es productividad que es toda aquella acción que nos acerque a la meta es decir que nos ayude a obtener utilidades. En tanto que para la contabilidad de costos, la productividad es producir con el mínimo costo.

---

<sup>1</sup> Eliyahu M. Goldratt y Jeff Cox, "La Meta Un Proceso de Mejora Continua", North River Press Inc. 1986

<sup>2</sup> Ibid

La tabla número 1 muestra las características del mundo del costo y el del throughput. De ella se puede inferir las necesidades de cambio en la organización para empezar a aplicar la teoría de las restricciones.

Mundo del costo	Mundo del throughput
- Visión Interna	- Visión Interna y Externa
- Tarea Individual	- Tarea Colectiva
- Muchas cosas son importantes	- Pocas cosas son importantes
- Las mejoras locales aseguran la mejora global	- Para lograr el objetivo global se subordinan los objetivos locales

**Tabla 1. Comparación del enfoque de costos contra "throughput"**

La quinta regla se refiere a los puntos de restricción. Estos son los que evitan que el sistema llegue a su meta. En una empresa con sistemas de manufactura flexibles o de proceso, una restricción se identifica con aquel recurso cuya velocidad para procesar materiales sea la más lenta del sistema y lo suficientemente lenta como para no poder satisfacer la demanda del mercado. No necesariamente una restricción se identifica con alguna estación de trabajo. Una restricción puede encontrarse en los proveedores o bien en la distribución del producto o en el mercado.

El objetivo del análisis, es identificar las restricciones del sistema. Una vez identificadas las restricciones, será necesario explotarlas. Esto quiere decir, que se debe operar la restricción durante todo su tiempo disponible. Como la restricción determina la facturación de todo el sistema, la utilización ideal de ella es 100 %. Esta es una manera sencilla de aumentar la facturación.

Se debe tomar en cuenta que la restricción puede parar por cualquiera de las razones por las que para una estación de trabajo. Si una restricción queda bloqueada o "hambreada" parará definitivamente. Estos paos son altamente inproductivos para el sistema. Por lo que en principio deberá aumentarse el espacio para inventario en proceso antes y después de la restricción. Este inventario extra en la restricción se relaciona con el concepto expresado en capítulos anteriores, de que el aumento en el inventario en proceso del sistema aumenta la facturación.

Las demás partes del sistema productivo, es decir las no restricciones pueden tener utilizaciones menores al 100%. De hecho en muchos casos es preferible que no tengan utilizaciones iguales al 100%. Esto es porque de acuerdo a las reglas de Goldratt un incremento en la eficiencia de una no restricción solo aumenta innecesariamente el inventario. De acuerdo a la regla de Goldratt todo inventario en proceso en una no restricción debe ser cuestionado.

Se puede dar el caso de tener productos que no pasen por la restricción del sistema. La regla aplicable a estos productos, es ser producidos hasta satisfacer la demanda. Dentro de los productos que pasan por la restricción, se deben producir en primer lugar aquellos que representen una mayor contribución a las utilidades. Es decir se debe producir todo aquel producto cuya diferencia entre el precio de venta y los costos de las materias primas es más grande. (regla de prioridad)

Al terminar de explotar la restricción del sistema se llega a una programación "óptima" de la producción que se supone aumentará las utilidades de la empresa en el corto plazo (o "throughput"). Es válido decir que no "optimizará" las utilidades de la empresa, pero sí ayudará a elevarlas. A ésta programación "óptima" se le conoce en el lenguaje de teoría de restricciones como "drum".

Este "drum" junto con la disponibilidad de efectivo en caja nos determina el programa de compra ideal. Los tiempos en que se deben introducir materiales al sistema también vienen determinados por el tiempo en que el material se tarda en llegar hasta la restricción. Este tiempo se determina en base a la experiencia de los operarios del sistema. También es posible determinar matemáticamente dicho tiempo, pero esto implicaría utilizar alguno de los modelos presentados en capítulos anteriores.

La sexta regla de la teoría de restricciones, se identifica con subordinar el resto del sistema a la restricción. Lo primero que se debe hacer es colocar los almacenamientos de material de proceso (o buffers) que requiere el sistema.



En capítulos anteriores, se ha observado que las velocidades de producción de las estaciones de trabajo tienen variaciones estadísticas aproximadas por los modelos que usan distribuciones de probabilidad (como el caso de la distribución exponencial). El buffer va a proteger a la restricción en contra de dichas variaciones estadísticas de las no-restricciones. En ese sentido sólo se necesitan tres buffers en la línea:

**Buffer de restricción** Es el almacenamiento de material en proceso que se pone antes y después de la restricción y que la protege contra las variaciones estadísticas de las estaciones de trabajo antes y después de la restricción.

**Buffer de embarque** Se pone al final del sistema y lo protege contra variaciones estadísticas en la restricción.

**Buffer de ensamble** Protege a la línea productiva de faltantes de materiales de ensamble provenientes de otras estaciones de trabajo del sistema.

El segundo paso en la subordinación del sistema a la restricción es la "regla de cuerdas". Esta regla subordina el trabajo de las demás estaciones al funcionamiento de la restricción. La regla es que toda no-restricción debe hacer el trabajo que tiene enfrente. Las no-restricciones deberán efectuar todo trabajo que se encuentre enfrente de ellas pero que sea alimentado posteriormente a las restricción. En cuanto a los trabajos para productos que su proceso no pasa por la restricción deberá solo hacerse la cantidad necesaria para cubrir totalmente la demanda de estos productos.

La subordinación de las no restricciones se completa mediante el control de puntos "diversivos". Estos son aquellos donde se ensamblan piezas provenientes de una no restricción con piezas provenientes de una restricción. La regla para la no restricción es tan simple como especificarle a la estación que no haga más de determinado número de piezas ni antes de alguna hora especificada.

La subordinación del sistema llega a extremos de cambiar el sistema de recompensas de la organización. Esto es porque las no restricciones antes de la restricción, se les califica en función de la capacidad de mantener lleno el almacenamiento previo a la restricción. A aquellas estaciones de trabajo que son posteriores a la restricción se les califica por su capacidad de mantener vacío el almacenamiento que está después de la restricción.

La séptima regla es la que se refiere a la administración del buffer en la restricción, que se refiere al control de todo el sistema de manufactura. En capítulos anteriores, se demostró que el control del sistema flexible de manufactura es demasiado complicado. De hecho no hay ningún modelo que pueda dar una respuesta rápida, que permita tomar decisiones "óptimas" en la línea, porque los modelos analíticos desarrollados requieren de un gran tiempo de cómputo y que el mismo problema ocurre con la simulación.

La respuesta de la teoría de restricciones es el simple control del buffer en la restricción. La regla aquí se basa en dividir en tres zonas el almacenamiento. La primera zona se conoce como crítica, cualquier faltante de material en esta zona provocará un paro en la restricción. La zona dos es la zona de las acciones preventivas. Un hueco en esta zona provoca que el director de planta acelere a las no restricciones para cubrirlo. La zona dos provoca acciones gerenciales inmediatas. Un hueco en la zona tres tan solo pone en alerta al director de planta. Se espera que dicho hueco quede solucionado en el corto plazo. Demasiados huecos en las zonas 1 y 2 provocan que se tenga que aumentar el tamaño del almacenamiento. Pocos huecos en estas zonas son indicativo de un exceso en el tamaño del buffer.

La administración del buffer puede extenderse al buffer de embarque y a los de ensamble. En principio se puede controlar toda la organización con este sencillo sistema de manejo de buffer, pero puede obviar aspectos importantes de la operación que constituye un defecto.

La octava regla se refiere a la restricción. Hasta ahora el método se puede resumir en tres pasos básicos, **Identificar la restricción, explotar la restricción y subordinar las no-restricciones.**

El cuarto paso es **elegir la restricción**. Este ocurre en el del mediano plazo. En este lapso, se pueden hacer inversiones en equipos, gente o mejoras a la restricción que permita elevar su productividad al menos hasta la productividad del recurso que le sigue.

Los tres primeros pasos se deben realizar semanalmente, mediante un modelo determinístico o de simulación de la fábrica que pueda predecir las utilidades o "throughput" esperados para la organización en dicha semana. Como no se espera que la restricción cambie de una semana a otra, es posible llegar a una programación de la producción de la restricción que asegure que la organización ganará dinero dicha semana. El conocer semanalmente las

ganancias esperadas de la organización, otorga al director de fábrica una información extraordinaria que le libera de las decisiones del día con día y lo enfoca a las decisiones de largo plazo.

Una vez establecida la restricción, explotada y subordinado todo el sistema, queda todavía un paso para mejorar en el corto plazo. La novena regla se refiere a disminuir los tamaños de lotes de producción. Esta es una regla sorprendente si tomamos en cuenta que la teoría clásica del costo nos dice que los lotes deben de ser de tamaño óptimo.

Según esta teoría a mayor número de cambios, mayores costos de producción, pero menores costos de inventario. Entonces, debe existir un lote "óptimo" de producción que minimice el costo total, que no es más que la suma de los costos del inventario más el costo de producción. Además, dicho lote "óptimo" de producción debe compararse contra el lote "óptimo" de compra.

Goldratt establece que si se intenta optimizar el lote de producción se puede estar disminuyendo la facturación de la compañía, debido a que se obtendrán inventarios de producto en presentaciones que no corresponderán a las necesidades del mercado. Esto disminuye la rotación del inventario y por lo tanto la facturación de la empresa. Lotes más pequeños de producción, aún cuando no sean óptimos en costo, significan reducciones importantes en los niveles de inventario (hay que recordar cómo se planteó la meta) en el corto plazo, así como también favorecen el flujo de materiales a través de toda la organización de suministro de productos. La flexibilidad adquirida por el sistema de manufactura con estos lotes pequeños ayuda a tener en inventario la presentación justa que requiere la demanda, con lo cual se aumenta la facturación y se mejora el servicio a clientes.

Después, lo que sucede es que se acortan los tiempos de producción al bajar el tamaño de los lotes, con lo cual se puede ofrecer los productos en entregas parciales, pero mucho más oportunas. Esto hace que también los clientes y proveedores necesiten de inventarios más bajos con beneficios en sus tiempos de respuesta hacia los consumidores finales.

La décima regla es la que mantiene el sistema en continuo movimiento. Una vez que se ha elevado la restricción, se vuelve a identificar otra restricción en el sistema, repitiéndose el ciclo. Goldratt dice que si se aprovecha la inercia del ciclo inicial, la empresa estará en el camino de la mejora continua. Es decir se adaptará a lo único constante para la empresa: es decir el cambio. Todos sus sistemas y empleados estarán adaptados a los cambios constantes, más que a una peligrosa estabilidad.

Una pregunta que surge es, si se elevan las restricciones internas ¿llegará el día en que la restricción esté en el mercado? La respuesta es afirmativa. Si puede existir una restricción en el mercado, pero entonces la introducción de productos nuevos vuelve a reactivar el sistema, que ya está bien adaptado al cambio. De hecho, una de las recomendaciones de Goldratt es elevar una restricción interna sólo hasta la demanda que el mercado haga de dicho recurso e inclusive un poco menos es conveniente. Porque de esta forma aún le quedarán retos a la organización que mantienen su motivación al cambio.

La teoría de Goldratt significa un cambio dramático de la forma de ver el mundo de la producción. Rompe con todos los paradigmas inamovibles del mundo del costo. Por ejemplo que los costos de producción son lo más importante a controlar por parte de la organización. Rompe también con la necesidad de la empresa para equilibrar todos sus recursos con la demanda del mercado y con el hecho de que se debe utilizar todos los recursos al máximo. También elimina el esquema de "lotes óptimos", los sistemas de eficiencia local de planta y propone romper con el "estatismo" de los recursos de la organización, invitando a esta a la mejora continua de sus restricciones.

El enfoque limitado y a corto plazo de una parte de esta teoría permite ganar dinero hoy, también que la organización sobreviva la dura competencia externa. Las reglas que se refieren al largo plazo mantienen el movimiento hacia la mejora constante en la organización. Por estas dos razones se puede pensar que la teoría de las restricciones será (y ya es en algunas organizaciones) una arma competitiva poderosa.

Por último, la teoría de las restricciones y la investigación sobre modelos para sistemas flexibles de manufactura, señalan la moderna tendencia a convertir a las organizaciones de suministro de producto de la empresa en un arma competitiva de gran importancia.

Por tanto, no basta tan solo tener un producto de calidad en el mercado, sino hay que hacerlo disponible para su demanda, de acuerdo a los deseos de los clientes y consumidores de la empresa.

### Optimización de Planta según Bitran y Tirupati<sup>3</sup>

El objetivo del trabajo de Bitran y Tirupati, es el de alinear los recursos productivos de la organización con los objetivos estratégicos de ésta. El modelo utilizado por los autores se deriva del método de análisis de redes de maquinaria de manufactura por descomposición. Este método fue desarrollado por Buzzacott y Shantikumar<sup>4</sup> así como por otros autores, y fue discutido en capítulos anteriores.

Partiendo de que, gracias al modelo de descomposición, es posible conocer el "throughput" o facturación del sistema considerando un arreglo de maquinaria, una cierta capacidad productiva y una combinación de productos a manufacturarse, se puede optimizar el sistema mediante el uso de la programación lineal. Bitran y Tirupati proponen utilizar un método simplex para minimizar o maximizar ciertas características del sistema. El resultado del modelo es la determinación para el sistema de curvas de decisión que permitan al administrador escoger un adecuado nivel de tecnología para lograr sus objetivos. Entre los objetivos a perseguir está el de determinar el nivel de inventario en proceso adecuado con respecto a una cierta tecnología. A esto le llamaremos optimización del inventario en proceso (OIP). En este problema se trata de obtener un inventario en proceso determinado, con un mínimo de inversión en capacidad adicional del sistema. El segundo problema por resolver es el del balanceo de líneas, en este problema, típicamente se trata de redistribuir la capacidad del sistema para optimizar el "throughput" o facturación del sistema, para adecuarlo a las condiciones de la demanda.

Tanto en el problema de OIP como en el del balanceo de líneas, se tiene que determinar el nivel de inventario en proceso y el "throughput" máximo del sistema para cualquier opción de tecnología, arreglo de maquinaria, nivel de capacitación de la gente o mezcla de productos a manufacturarse. Mediante el uso de modelos de descomposición de sistemas flexibles o de proceso, se determina la longitud de cola promedio en estado estable, por estación. La suma de las longitudes de cola, ponderada por el precio del inventario en proceso en cada una de las estaciones de trabajo, determina el valor monetario del inventario total que está siendo procesado por el sistema. Los métodos de descomposición per se son capaces de determinar el "throughput" de cierto sistema.

La contribución del trabajo de Bitran y Tirupati es el de proponer una metodología para optimizar el inventario en proceso y maximizar la facturación del sistema flexible, mediante un modelo sencillo pero realista que pueda tener convergencia. Para lograr esto, circunscriben el análisis a redes de tipo abierto, con un solo servidor por estación de trabajo, con múltiples clases de productos. Se permite la tipificación tanto del tiempo de llegada de trabajos al sistema como del de servicio, mediante distribuciones generales de probabilidad, con la limitante de que el cuadrado del coeficiente de variación de los tiempos sea menor que uno.

#### Modelo de descomposición referido a los cuadrados de los coeficientes de variación.

Este modelo desarrollado por los autores, se basa en las metodologías de descomposición de Buzzacott y Yao<sup>5</sup>, en el cual se propone que las ecuaciones de balance en estado estacionario del sistema se refieran a los cuadrados de los coeficientes de variación de tanto el tiempo entre llegadas y los tiempos de servicio. Las ecuaciones descriptivas del modelo, para el caso de llegadas aleatorias y rutas de proceso aleatorias, son:

$$\lambda_i = \lambda_0 r_{0i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j r_{ji} \quad \text{Ecuación 1}$$

$$\lambda_i c_{a_i} - \sum_{j=1}^n (\lambda_j (1 - r_j^2) r_{ji}^2 c_{a_j}) = \lambda_0 r_{0i} c_{a_i}^0 + \sum_{j=1}^n (\lambda_j r_{ji} (\rho_j^2 r_{ji} c_{s_j} + 1 - r_{ji})) \quad \text{Ecuación 2}$$

donde:

$\lambda_i, \lambda_j$  - Media de las llegadas de los trabajos a las estaciones i y j

$r_{ji}$  - Probabilidad de que en la ruta de un trabajo saliendo de la estación j, su siguiente estación sea la i.

<sup>3</sup>Gabriel R. Bitran and Devanath Tirupati "Tradeoff Curves, Targeting and Balancing in Manufacturing Queueing Networks" *Operation Research* Vol. 37, No. 4 July-August 1989.

<sup>4</sup>Buzacott, J. A. and J. G. Shanthikumar "Approximate Queueing Models of Dynamic Job Shops" *Management Science* Vol 31 Pags 870-887

<sup>5</sup>Buzacott J. A. and D. D. Yao "Flexible Manufacturing Systems: Review of Analytical Models" *Management Science* 32, 890-905 1986

$\lambda_0$  - Tasa media de llegadas de trabajos a todo el sistema  
 $r_{0j}$  - Probabilidad de que la primera estación en la ruta de un trabajo sea la estación  $i$   
 $ca_i, ca_j$  - Coeficiente cuadrado de variación de los tiempos de llegada de trabajos a la estación  $i$  o a la  $j$   
 $r_j$  - Porcentaje de utilización de la estación  $j$   
 $cs_j$  - Coeficiente cuadrado de variación de los tiempos de servicio de los trabajos siendo procesados en la estación  $j$ .

Nótese que la ecuación 2 es esencialmente una ecuación de balance de entradas hacia la estación  $i$  desde la estación  $j$  multiplicada por los coeficientes cuadrados de variación, de tanto el tiempo entre llegadas como el tiempo de servicio. Además esta ecuación es válida para cualquier distribución de probabilidad para ambos tiempos. Para simplificar el análisis se fija que las distribuciones de probabilidad sean Poisson para la composición de trabajos de llegada a la estación  $j$  desde la  $i$ . Con esta simplificación y con el desarrollo de Whitt <sup>6</sup> se puede estimar la longitud de cola delante de la estación  $j$  con la siguiente ecuación:

$$L_j = r_j + \left\{ (r_j^2 / 2(1-r_j)) (ca_j + cs_j) g(r_j, ca_j, cs_j) \right\} \quad \text{Ecuación 3}$$

donde:

$L_j$  - Longitud de cola de estado estable adelante de la estación  $j$   
 $g(r_j, ca_j, cs_j) = \exp\{ [1 - 2(1-ca_j)(1-r_j)/3(ca_j + cs_j)] (1-r_j)/r_j \}$

El objetivo de la solución del sistema de ecuaciones 1 y 2, es el de determinar la media y los coeficientes cuadrados de variación de los tiempos entre llegadas para cada una de las estaciones del sistema. Una vez conocidos estos parámetros, se puede determinar mediante la ecuación 3 las longitudes de cola en las diversas estaciones, y con este parámetro poder encontrar el total del inventario en proceso. Es necesario aclarar que el modelo es válido sólo para sistemas Markovianos como los que hemos tratado hasta ahora.

El inventario en proceso es un parámetro de decisión de los diversos problemas de optimización. Además de que, el crecimiento de dicho inventario, nos ayuda a aumentar la facturación o "throughput del sistema.

### El problema OIP

El objetivo del problema OIP es el de lograr un costo objetivo del inventario en proceso de un sistema de manufactura, mediante la adición óptima de capacidad adicional en las estaciones de trabajo del sistema. Se entiende por adición óptima de capacidad, a aquella que con mínima inversión incrementa la capacidad de la estación.

Para plantear el problema se debe asociar un valor monetario al inventario en proceso, por lo que es necesario determinar previamente el valor medio de cada trabajo en la estación  $j$  ( $v_j$ ), por lo tanto el valor del inventario en proceso en la estación  $j$  es  $L_j v_j$ . Además se define como  $L_j'$  a la derivada con respecto a  $\mu_j$ . Por otro lado, se debe definir alguna funcionalidad para el caso de la inversión en capacidad. Bitran y Tirupati <sup>7</sup> proponen que dicha funcionalidad se puede representar con bastante aproximación por un función cuadrática.

Una vez definidas las bases del problema se establece la función a minimizar con todo y las restricciones del sistema, de manera que sean congruentes con un problema de programación lineal. En donde se debe minimizar la función de costo de la inversión en capacidad adicional, para lograr llegar al objetivo de inventario en proceso. Esto se expresa matemáticamente así:

$$Z_{TP} = \min \sum_{j=1, J} J' f_j(\mu_j) \quad \text{Ecuación 4}$$

sujeta a:

$$\Phi(\lambda, \mu, ca, cs) = 0 \quad \text{Ecuación 5}$$

$$L_j = f(\lambda_j, \mu_j, ca_j, cs_j) \quad \text{Ecuación 6}$$

$$\sum_{j=1, J} v_j L_j = W^T \quad \text{Ecuación 7}$$

Las primeras dos ecuaciones de las restricciones son la solución a las ecuaciones 1 a 3 de un sistema flexible de manufactura con rutas completamente aleatorias. En muchos casos prácticos, las rutas para los diversos productos del sistema son completamente conocidas. A esto se le conoce como sistema flexible con rutas determinísticas.

<sup>6</sup>Whitt, W. 1983a. "The Queueing Network Analyzer" *Bell Syst. Tech. J.* 62, 2817-2843

<sup>7</sup>Op cit

Las ecuaciones que caracterizan a este sistema, son diferentes a las ecuaciones 1 a 3. En el apéndice #8 de la tesis se propone una metodología para resolver un sistema de estas características.

Existen dos consideraciones de importancia implícita en el sistema de ecuaciones 4 a 7, la primera de ellas se refiere a que la función  $F_j$  debe ser convexa para que pueda ser derivable. La segunda es muy importante para simplificar la solución del problema y es que tanto las  $c_j$  y  $e_j$  de la solución son independientes para pequeños cambios de  $\mu$  en cualquiera de las estaciones de trabajo.

Se define como  $F_j'$  como la derivada con respecto a  $\mu_j$  de la función del costo de la inversión. También se define como coeficientes de prioridad ( $PI_j$ ) de la siguiente forma:

$$PI_j = -v_j L_j' / F_j' \quad \text{Ecuación 8}$$

Este coeficiente de prioridad es muy significativo, pues cuantifica el cambio en el capital de trabajo delante de la estación  $j$  con respecto a inversiones adicionales de capacidad. En base a este resultado, aquella estación de trabajo con el mayor coeficiente de prioridad será en la que deberá invertirse primero para aumentar la capacidad. Con este concepto es posible plantear una solución heurística al problema de programación lineal, definido por la ecuaciones 4 a 7.

La solución heurística comienza con determinar el estado inicial del sistema calculando las  $L_j$ 's y las  $PI$ 's. Con esto conocido se determina  $W$  que es el valor del inventario en proceso total del sistema. Nótese que  $W = \sum_{j=1}^J v_j L_j$ . Ahora, si  $W$  es igual a  $W^1$  que es el objetivo de inventario en proceso del sistema, se para la solución heurística. Si  $W$  es mayor al objetivo, entonces se escoge la estación de trabajo con el mayor  $PI$  y se le aumenta la capacidad ( $\mu_j$ ) con algún incremento. Una vez hecho esto, se vuelve a calcular las  $L_j$ 's y las  $PI$ 's para determinar el nuevo inventario en proceso  $W$ . Los pasos de esta solución heurística se vuelven a repetir hasta que se obtiene el valor deseado del inventario en proceso.

Debido al planteamiento de la solución al problema OIP, la solución garantiza la optimalidad siempre y cuando se incremente la capacidad de la estación con el mayor  $PI$  en forma de incrementos pequeños. De esta manera, se asegura que todos los coeficientes cuadrados de varianza no se vean modificados, con lo cual a lo largo de la solución heurística, pueden ser considerados constantes. Esta última consideración simplifica la solución.

#### Balaceo de la capacidad en línea. (BC)

Otro problema que se puede resolver mediante la misma metodología es el del balaceo de la capacidad en línea. El objetivo del sistema de manufactura es reorganizar la capacidad de las estaciones de trabajo para minimizar el inventario en proceso. Los sistemas de manufactura deben de ser homogéneos para poder ser balanceables, esto quiere decir que las estaciones de trabajo deben poder compartir recursos entre ellas. Estos sistemas se pueden encontrar principalmente en las industrias metalmeccánicas desarrolladas, pues los operarios son capaces de operar todas las estaciones de trabajo.

El problema BP, es complementario al problema OIP, pues un sistema desbalanceado deberá ser balanceado antes de que pueda incrementarse la capacidad para reducir el inventario en proceso. Es necesario advertir sin embargo que el balancear un sistema de manufactura afectará adversamente al "throughput" del sistema de acuerdo a los análisis de Stecké y Solberg<sup>8</sup>.

El planteamiento del problema se refleja en las siguientes ecuaciones:

$$W^{BP} = \min \sum_{j=1}^J v_j L_j \quad \text{Ecuación 9}$$

sujeta a:

$$\Phi(\lambda, \mu, c_a, c_s) = 0 \quad \text{Ecuación 10}$$

$$L_j = W / (\lambda_j \mu_j c_a c_s) \quad \text{Ecuación 11}$$

$$\sum_{j=1}^J \mu_j = \sum_{j=1}^J \mu_j^1 \quad \text{Ecuación 12}$$

<sup>8</sup>Stecke, K. E. and J. J. Solberg. 1985. "The Optimality of Unbalancing Both Work Loads and Machine Group Sizes in Closed Queueing Networks"

La última ecuación representa la no posibilidad de adicionar capacidad adicional a ninguna de las estaciones de trabajo que no haya provenido de otra dentro del sistema. En este caso y para no provocar una longitud de cola infinita en alguna de las estaciones de trabajo del sistema se adiciona una restricción adicional:

$$\mu_j \geq \lambda_j \quad \text{Ecuación 13}$$

El algoritmo de resolución de BP empieza determinando el estado inicial del sistema es decir  $L_j, L_j', P_j$  y  $W$  de la misma manera que en el problema OP. Sea  $J_0$  el número total de estaciones de trabajo,  $J_1$  es el conjunto de estaciones a las cuales se le adicionará capacidad y  $J_2$  al conjunto de estaciones a las cuales se le sustrae capacidad. Como se trata de un problema de balanceo de la capacidad del sistema de manufactura entonces se cumple que:

$$J_1 = J_2 = \phi \quad \text{Ecuación 14}$$

El segundo paso del algoritmo es calcular el factor  $\epsilon_j$  que es un factor de "exceso de capacidad" que se calcula para cada una de las estaciones del sistema de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$v_j L_j' (\lambda_j + \epsilon_j) = P_0 \quad \text{Ecuación 15}$$

donde  $P_0 = \max\{P_j \mid 1 \leq j \leq J\}$

En este punto del algoritmo se revisa si ya se ha llegado a una solución óptima. Las condiciones para obtener el balanceo de línea óptimo son:  $J_0 = \phi$  o  $|J_0| = 1$  ó si  $P_j$  es igual para todas las estaciones de trabajo.

El siguiente paso es escoger la estación de trabajo que debe de ceder su capacidad, así como también se escoge la estación que ha de recibir. Para hacer esto se calculan  $j^*$  e  $i^*$  de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$j^* = \operatorname{argmin}\{P_k, k \in J_0\} \quad \text{Ecuación 16}$$

$$i^* = \operatorname{argmax}\{P_k, k \in J_0\} \quad \text{Ecuación 17}$$

donde:

argmin. - Argumento mínimo del vector  
argmax. - Argumento máximo del vector

Aquí se establece una condicional para proseguir a otros pasos, si  $j^* \notin J_1$  y  $i^* \notin J_2$  se cumplen el sistema no está balanceado y entonces se prosigue al siguiente paso. Si por el contrario  $j^* \in J_1$  y  $i^* \in J_2$  entonces las estaciones  $j^*$  e  $i^*$  deben de ser eliminadas de  $J_0$  pues su capacidad para recibir o ceder capacidad no puede contribuir a balancear el sistema. Cuando sucede que  $j^*$  e  $i^*$  pertenecen a  $J_1$  y  $J_2$  respectivamente hay que revisar si el sistema ya está balanceado. De no estarlo, se deberá sustraer capacidad de una estación de trabajo para otorgárselo a otra. Esto se hace calculando  $\Delta_1$  que es el factor de capacidad a restar en una estación y que la otra estación gana.

$$\Delta_1 = \min(\Delta, \mu_{j^*} - \lambda_{j^*} - \epsilon_{j^*}) \quad \text{Ecuación 18}$$

Donde  $\Delta$  es un factor de transferencia de capacidad que se escoge arbitrariamente al inicio del problema y que constituye el límite en la diferencia de capacidades, debajo del cual el problema se detiene. El valor de  $\Delta$  que se sugiere en el artículo es de 0.02. Una vez calculado el valor de  $\Delta_1$  se procede a balancear la capacidad de las estaciones de trabajo escogidas.

$$\mu_{j^*} \leftarrow \mu_{j^*} - \Delta_1 \quad \text{Ecuación 19}$$

$$\mu_{i^*} \leftarrow \mu_{i^*} + \Delta_1 \quad \text{Ecuación 20}$$

Para terminar el algoritmo, se calculan nuevos valores de  $L_j, L_j', P_j, P_j'$  y  $W$ . Con estos nuevos valores se reinicia el algoritmo a partir de la revisión de los criterios para parar la ejecución del algoritmo.

### Conclusión

En este capítulo hemos analizado los algoritmos para optimizar la operación de un sistema flexible de manufactura. El tipo de optimización requerido dependerá de los objetivos a perseguir. El primer objetivo analizado es la teoría de las restricciones para optimizar el "throughput" del sistema mediante adiciones ordenadas

de capacidad y su interrelación con el sistema de suministro de material prima. Esta teoría es especialmente útil en aquellos sistemas donde existen productos cuyas producciones ya se encuentran vendidas.

Por otro lado se analizaron dos metodologías para que con un "throughput" fijo, se optimice el inventario en proceso. Estas metodologías son especialmente útiles para disminuir costos de inventario cuando este tiene un costo elevado. El algoritmo para balancear el sistema es el primero que se debe ejecutar para empezar la optimización del sistema pues reduce el inventario en proceso sin necesidad de adicionar capacidad al sistema. Una vez balanceado el sistema de manufactura entonces se fija un objetivo de costo del inventario en proceso y se resuelve el problema **OIP**.

Tal como se planteó como introducción a este capítulo, se analizaron dos metodologías alternas para optimizar los sistemas de manufactura. Una última conclusión del capítulo es que estos sistemas deben aplicarse de forma que las operaciones de manufactura sean más rentables, no olvidando que el objetivo último y fundamental de toda empresa es generar utilidades. Con este objetivo en mente, se deben aplicar estas y otras técnicas para optimizar el sistema de manufactura. **Muy importante es destacar que la priorización de la optimización debe empezar por maximizar el "throughput", en segunda lugar se deberá minimizar el inventario y por último se deberá disminuir el costo.**

## VI. CONCLUSIONES

La presente tesis ha analizado las diversas metodologías para determinar el "throughput" de un sistema de manufactura. También ha analizado algunos algoritmos de optimización de dicho "throughput" para lograr más utilidades para la empresa. El objetivo de la presente conclusión es el de dar un sentido práctico a todas las metodologías presentadas en la tesis.

Las preguntas que esta tesis tiene la intención de responder son:

- 1-¿Cómo se puede determinar el throughput de un determinado sistema de manufactura?
- 2-¿De qué manera afecta la programación de partes aleatoria en un sistema de manufactura?
- 3-¿Cuál es el efecto del inventario en proceso en el "throughput" de un sistema de manufactura?
- 4-¿Cuál es el efecto de una restricción del sistema?
- 5-¿En un sistema flexible de manufactura cómo se puede programar la entrada de materiales y herramienta en forma que el "throughput" del sistema no se vea afectado adversamente?
- 6-¿En qué parte del sistema se deben aplicar los recursos de inversión y entrenamiento del personal para poder optimizar el sistema?
- 7-¿Cómo se pueden planear los futuros sistemas de manufactura de manera que estos se adapten a la demanda potencial que pueden tener?
- 8-¿Cómo se pueden disminuir los inventarios sin afectar el throughput del sistema?
- 9-¿Cuál es la manera más efectiva de disminuir el costo de manufactura?
- 10-¿Cómo puede afectar la operación de un sistema de manufactura al flujo de efectivo de una empresa?
- 11-¿Cómo planear más productivamente las mejoras a realizarse en un sistema de manufactura para eliminar fallas y reducir tiempos de reparación?

Tanto para resolver estas preguntas como para poder aplicar las metodologías es necesario obtener datos sobre el sistema de manufactura. A continuación se enlistan los datos necesarios para el análisis e inclusive el diseño del sistema de manufactura:

- 1-Número de productos a manufacturarse
- 2-Tipos de estos productos
- 3-Proceso de manufactura de cada uno de los tipos de productos
- 4-Número, tipo y velocidad de cada una de las estaciones de trabajo del sistema
- 5-Inventario en proceso máximo permisible
- 6-Tipo de proceso de manufactura (flexible o en serie)
- 7-Demanda y precio de cada uno de los productos en el mercado
- 8-Precio de materias primas y materiales de empaque.
- 9-Eficiencia medida de cada una de las estaciones de trabajo.

Sobre éste último punto, la eficiencia de una determinada estación de trabajo se mide como la afectación a la velocidad de diseño de una estación de trabajo por cualquier causa. Entre éstas se puede contar a los paros, a la baja velocidad, a la producción de artículos con baja calidad, al bloqueo y finalmente a la falta de artículos por procesar (hambreamiento). El análisis de fallas es fundamental para poder obtener conclusiones que permitan implementar mejoras efectivas en el sistema de manufactura. El resultado de este análisis nos puede proporcionar lo que se conoce como el tiempo medio entre fallas. Este factor es de gran relevancia para obtener el "throughput" final del sistema. Dentro de este análisis se pueden incluir fallas debidas a defectos en las materias primas, a la incorrecta asignación de recursos humanos y de herramientas, lo cual hace más sofisticado el análisis.

Otro factor que determina grandemente la eficiencia de una determinada estación de trabajo, es el tiempo medio de reparación de la falla. Este tiempo depende en gran medida del tipo de falla, la habilidad relativa de operadores o mecánicos y a la correcta asignación de herramientas.

El análisis se puede hacer aún más sofisticado si se incluyen distribuciones de probabilidad que describan la ocurrencia de las fallas y los tiempos de reparación asociados. Este tipo de análisis permite la aplicación de la simulación para obtener el "throughput" del sistema. En este sentido, se pueden incluir tantas variables como se desee, o se posea información. Es obvio, que entre más variables se incluyan más complejo es el análisis, y su aplicación práctica se pone en duda. Además el sistema de recolección de datos se vuelve más sofisticado, con la posible inclusión de sensores de paro, de falla conectados a un programador controlador lógico, lo cual encarece su aplicación.



### Ingeniería en confiabilidad. (Reliability Engineering)

En tiempos recientes, empresas que se encuentran en ambientes de alta competitividad, cuyos productos requieren de estar a tiempo, con un costo adecuado y con la calidad esperada, han empezado a investigar sobre la ingeniería en confiabilidad. Se define como confiabilidad a la capacidad de un sistema de manufactura para entregar productos al mercado en forma completa, a tiempo, con calidad y a un costo razonable.

Entonces la ingeniería en confiabilidad tiene como objetivo el análisis de todos los factores que pueden ocasionar fallas en un sistema de manufactura, y el tiempo requerido para repararlas. Es el estudio del efecto de los inventarios en el "throughput", así como la predicción de los efectos que puede tener un determinado proyecto en el desempeño del sistema.

Un objetivo adicional de la ingeniería en confiabilidad es el de predecir el comportamiento de un sistema bajo el efecto de diversas variables como son: la asignación de herramientas, los proyectos de mejora o cambio, la inclusión de un nuevo producto, la reducción o aumento del inventario, una determinada programación de la producción, una asignación diferente de personal o un defecto determinado en la materia prima. Este objetivo es de capital importancia para la gente que se encarga de la planeación de la producción, la ingeniería de proyectos, el personal de compras de materia prima y material de empaque y los departamentos de producción y de recursos humanos. Es decir, es de capital importancia para el personal de la organización de suministro de producto.

Por otro lado, un modelo simple o complejo de predicción de la confiabilidad de un sistema de manufactura, es la base de los modelos de optimización de dicho comportamiento. La mayor amplitud del modelo de predicción de la confiabilidad, mejores decisiones se podrán tomar para optimizar el comportamiento.

En esto último hay que tener cuidado, pues la mayor complejidad de los modelos de predicción, requiere de una cantidad considerable de datos y análisis. Es posible que la inversión en sofisticados sistemas de recolección de datos no sea rentable.

En otras palabras, hay que balancear el costo de la inversión contra los potenciales beneficios económicos de realizar la inversión. Además, existe un umbral tecnológico que impide el desarrollo de sofisticados modelos, como por ejemplo el tiempo de simulación suele ser muy largo y en el caso de los modelos matemáticos, no se pueden incluir más de 20 variables. Además no es costoso instalar sofisticados sistemas de recolección automática de datos.

### ¿Qué hacer?

Aunque no existen todavía reglas específicas que orienten la manera de aplicar las metodologías presentadas en la tesis, se pueden dar lineamientos generales para la aplicación de proyectos de mejora y optimización. Es necesario empezar desde los modelos más sencillos, como son los modelos matemáticos para después evolucionar hacia modelos más complejos como pueden ser los modelos de simulación.

El primer paso es recolectar información acerca de cómo se manufacturan los productos actuales de una empresa. Se debe conseguir información acerca de qué tipo de procesos intervienen en la producción, cuánto tiempo se lleva cada operación, la distribución del tiempo medio de proceso por estación de trabajo u operación unitaria.

Por otro lado será necesario obtener datos sobre el tiempo medio entre fallas y el tiempo medio de reparación. También es muy importante determinar el tipo de programación de partes que el sistema tiene que realizar y la asignación de personal y herramientas a lo largo del sistema de manufactura.

Como se puede observar, toda esta información se puede registrar de manera manual o mediante el uso de medios electrónicos. Como primera fase, y para experimentar con los modelos, se sugiere el registro en forma manual. En este caso lo más importante es que se limite el número de variables. Como ejemplo lo que se puede registrar son los tiempos medios entre fallas y de reparación, y el tiempo medio de proceso de las partes. Se debe limitar la programación de partes a una entrada de partes por lotes. Esta última limitación no simplifica demasiado el proceso, pues la programación por lotes es muy común en muchas empresas, aún en aquellas con sistemas muy flexibles de manufactura.

Con estas simplificaciones, se puede aplicar un modelo de corte matemático, que en general aunque limitado, puede predecirnos la eficiencia terminal del sistema. El modelo no será del todo confiable si no se valida. Para

hacer esto se analizan los datos de treinta o más corridas, lotes, turnos o días. Hecho esto el modelo se ha aproximado a la realidad en lo posible.

Una vez que se tiene el modelo, el siguiente paso es obtener proyectos de mejora que realmente tengan un impacto favorable en la eficiencia terminal o throughput del sistema y que por lo tanto sean rentables. Mediante este análisis también se puede encontrar la restricción o restricciones del sistema, con lo cual se pueden asignar inventarios en proceso suficientes para proteger la restricción. El efecto de la inclusión de estos inventarios en proceso en el throughput también puede ser valorado.

Las limitaciones de los modelos matemáticos, son que solo se pueden manejar distribuciones de probabilidad del tipo exponencial. Se limitan a un número máximo de 20 estaciones de trabajo o de fallas y las distribuciones para los tiempos medios entre fallas y de reparación también tienen que obedecer distribuciones del tipo exponencial. Esto limita su aplicación a sistemas de manufactura con un alto componente manual. Estos sistemas de manufactura con un alto componente manual, son típicos de un país como México. Su aplicación a sistemas altamente robotizados o automatizados es limitada, aunque para fines de orientación sobre mejoras pueden ser útiles.

En general, para obtener resultados más precisos y con la finalidad de incluir más variables al análisis, se deberá utilizar la simulación. La predicción de resultados con esta técnica en general es mejor. Se pueden investigar diversas alternativas de programación de la producción, arreglo de máquinas, asignación de personal y herramientas, inventarios en proceso, paros y defectos por calidad y suministro de materia prima. La simulación es excelente para diseñar nuevos sistemas de manufactura y es especialmente útil cuando se trata de aquellos que son flexibles. La simulación además permite incluir en el modelo sofisticadas distribuciones de probabilidad como la distribución Weibull.

La simulación requiere de mayores recursos. Requiere de equipo de cómputo de un poder relativamente grande. Esto es debido a que las corridas de un modelo de simulación suelen ser tardadas en términos de tiempo máquina. Además requiere de sofisticados programas de computación. A este respecto, en los últimos tiempos se tiende a usar paquetería de simulación comercial. Un programa que se recomienda usar es el EXTEND para máquinas Macintosh.

Aparte del equipo y software de computación, los programas de simulación requieren de sofisticados sistemas de recolección de datos. El objetivo de éstos es obtener datos acerca de la programación de la producción y los materiales, los inventarios promedio en el sistema de manufactura, el arreglo de maquinaria y su velocidad de producción, la asignación de las herramientas y finalmente el tiempo promedio entre fallas, el tipo de estas fallas y el tiempo promedio para repararlas. Para recolectar estos datos, se requiere de sistemas electrónicos de detección de paros. Esto es altamente recomendable pues depender de sistemas de recolección de datos manuales, es exponerse a errores. Programas como Quality Windows, son muy útiles para el procesamiento de datos.

Como último requisito para una buena simulación, se necesita un paquete de programación de análisis estadístico para ajustar los datos que se obtengan a las distribuciones de probabilidad que mejor se ajuste. Aquellos que ajustan los datos a distribuciones tipo Weibull, serán los mejores, pues esta distribución permite abarcar tanto a distribuciones de tipo exponencial, como distribuciones normales.

Por último, y a manera de conclusión, la recomendación básica es empezar a experimentar con los modelos de corte matemático, con recolección de datos manual. El siguiente paso en esta evolución es ampliar la recolección manual de datos y ajustarlos a distribuciones tipo Weibull, para empezar a experimentar con sencillas simulaciones, como la de la presente tesis, hechas en Excell.

Al tomar estos primeros pasos, se pueden experimentar sencillas modificaciones a los sistemas de manufactura, como detectar la restricción, trabajar con las fallas de ésta, asignar el mejor personal y protegerla con inventario en proceso. En este punto, no se pueden tomar decisiones complejas como son las relacionadas con el inventario total en proceso, o la programación de la producción óptima.

Conforme las bases de datos se van ampliando y se progresa hacia sistemas de detección de fallas electrónicos, los modelos matemáticos, ya no pueden usarse, pero pueden seguir utilizándose los modelos sencillos de simulación. Al llegar a este paso, ya es posible observar efectos de mejoras como sustitución de maquinaria, mejoras en las estaciones de trabajo no restrictivas y cambios en la programación de la producción.

El evolucionar hacia sistemas complejos de análisis por simulación, sólo se justifica en sistemas flexibles de manufactura multiproductos, o con muchas líneas de producción y con requerimientos de calidad muy estrictos. Estos sistemas tienen la ventaja de poder generar una base de datos muy grande, que permite diseñar exitosamente nuevos sistemas de manufactura. Los sistemas complejos relacionados con la simulación, son especialmente importantes para industrias donde las materias primas y materiales de empaque son caros, el personal de estas empresas requiere de niveles altos de paga y capacitación y por lo tanto no se pueden admitir costosos desperdicios.

#### Sistemas de optimización.

No existe hasta la fecha un modelo matemático o de simulación que permita optimizar un sistema de manufactura, sin embargo sí se tienen sistemas de mejora continua de la operación de una empresa. Tal es el caso de la teoría de las restricciones, que nos permite de manera sencilla mejorar los resultados de corto plazo de la empresa. Para una empresa pequeña la teoría de restricciones y la simpleza de sus reglas, combinada con un sistema manual de recolección de datos y un modelo matemático de determinación del "throughput", es lo más adecuado para la correcta administración del sistema de manufactura.

Para una empresa grande, sistemas más complejos de simulación pueden resultar atractivos. La única advertencia en este caso es el decidir a evolucionar a estos sistemas, sólo en caso de que esto sea conveniente económicamente, pues estos sistemas complejos de simulación suelen requerir de mucha inversión. De cualquier manera, la teoría de restricciones es útil aún en el caso de las empresas grandes.

#### El futuro

El análisis de sistemas flexibles de manufactura va obteniendo gran relevancia en la industria actual, a pesar de sus limitaciones prácticas. Es especialmente importante para industrias como la aeroespacial, donde de la confiabilidad de sus productos dependen vidas humanas. Poco a poco otras industrias, en especial la metal mecánica y la química se integran al estudio de sus sistemas productivos, por la potencialidad que tienen éstos de obtener resultados de negocio espectaculares en el corto y largo plazo. Además los sistemas de manufactura están empezando a significar un factor de competencia muy importante.

Por todo esto, hay más interés de hacer más práctica y poderosa la metodología de análisis de los sistemas flexibles de manufactura, para ayudar en la toma de decisiones óptimas en cuanto a administrar estos sistemas. La complejidad, sigue siendo un problema, por lo que el sentido de las investigaciones actuales se dirige a la creación de un modelo de simulación capaz de integrar todas las variables pertinentes de un sistema flexible, de manera que se puedan predecir efectos en el "throughput" de diversas decisiones alternativas que se pueden hacer en el piso de manufactura. Decisiones ligadas a calidad y entregas de materia prima y material de empaque, el efecto de diversas estrategias de programación de la producción, el efecto de entrenamientos, modificaciones y mejoras a maquinaria, reemplazo de ella, asignación de herramientas, localización de maquinaria, sistemas de transporte, defectos de calidad en producto terminado, inventarios en proceso y final y la asignación de recursos humanos y de capital.

Un modelo así hoy día es utópico, primero por su complejidad, segundo por la base de datos que hay que recabar para que sea funcional y tercero porque el equipo de cómputo necesario debe tener tal rapidez que los resultados sean útiles para tomar decisiones en el sistema de manufactura. Resolviendo estos grandes problemas, el modelo actuaría como una caja negra, a la cual se le alimentan en forma electrónica la base de datos necesaria y después se pueden probar con toda eficiencia diversos cambios, políticas o problemas potenciales del sistema de manufactura, para observar sus efectos en el throughput. Este modelo ayudaría a quien administrara el sistema a tomar decisiones financieramente lógicas, en el día a día, con lo cual ayudaría a la empresa en general en la protección al efectivo y al aseguramiento de las utilidades. Este sistema además sería capaz de adquirir el conocimiento y la experiencia de quienes lo manejan, de tal suerte que es posible independizarlo de cambios en la estructura organizacional de una planta.

Aún falta un largo trecho hasta poder tener y usar un modelo así, pero es indudable hoy día su enorme utilidad y potencial. Entre más sea predecible el futuro, mejores decisiones se tomarán en todos los niveles de la empresa. Actualmente lo que se puede hacer es utilizar los modelos simplificados disponibles, como la teoría de restricciones o los modelos de predicción del throughput mostrados en la presente tesis.

Por otro lado, es necesario seguir trabajando en los modelos matemáticos, pues sólo con ellos es posible utilizar las técnicas de optimización de recursos como el modelo simplex descrito en los modelos de optimización presentados

en la tesis. Estos requerirán aún de más investigación por su gran complejidad, pero la filosofía final para el usuario deberá ser la misma, deberán actuar como una caja negra, de otra forma su aplicación práctica es muy limitada.

Existe un gran campo de investigación todavía por cubrir, pero existe un gran potencial de beneficios para las empresas.

## VII. B I B L I O G R A F I A

1. J. A. Buzacott and J.G. Shanthikumar, "Models for Understanding Flexible Manufacturing Systems", *AIIE Transactions*. Vol. 12, No. 4 December 1980.
2. James R. Jackson, "Jobshop Like Queueing Systems", *Management Science*. Vol. 10, No. 1, October, 1963.
3. Gordon WJ and G.F. Newell, "Closed queueing systems with exponential servers", *Operations Research*, Vol 15 (1967 a) pp. 254-265
4. J.A. Buzacott and J.G. Shanthikumar, "On Approximate Queueing Models of Dynamic Job Shops", *Management Science*, Vol. 31, No. 7, July, 1985.
5. P. J. Schwetzer, "Maximum Throughput in Finite Capacity Open Queueing Networks with Product Form Solutions", *Management Science* Vol 24 No 2 October 1977.
6. Buzacott & Shanthikumar "Models for understanding flexible manufacturing systems" *AIIE Trans*. Vol 12, No. 4 Dec 1980
7. Hediaki Yamashita and Shigemichi Suzuki, "An Approximation method for line production rate of a serial production line with a common buffer" *Comput Opns. Res*. Vol 15 No 5 1988
8. S. B. Gershwin, "An efficient decomposition method for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking", *Op. Res*. Vol 35 No. 2, 1987
9. Gershwin S. B. 1984. "An efficient decomposition method for the approximate evaluation of production lines with finite storage space. In *Analysis and Optimization of Systems, Part 2, Vol. 63 of Lecture notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, New York.
10. Gershwin S.B. and I. C. Schick 1983 "Modeling and analysis of three stage transfer lines with unreliable machines and finite buffers. *Opns Research*. 31, pages 354-380 1983.
11. Frederick Hillier y Gerald J. Lieberman , "Introducción a la Investigación de Operaciones", Ed. Mac Graw -Hill 3era Edición en Español 1982.
12. Steven R. Irvine and Reuven R. Levary, "A Discrete Event Simulation of the Mc Donnell Douglas Health Information Systems On Line Executive", *Comput. & Opns. Res*. Vol 15 No. 6, 1988.
13. Eliyahu M. Goldratt y Jeff Cox, "La Meta Un Proceso de Mejora Continua", North River Press Inc.1986
14. Gabriel R. Bitran and Devanath Tirupati "Tradeoff Curves, Targeting and Balancing in Manufacturing Queueing Networks" *Operation Research* Vol. 37, No. 4 July-August 1989.
15. Buzacott J. A. and D. D. Yao "Flexible Manufacturing Systems: Review of Analytical Models" *Management Science* 32, 890-905 1986

16. Whitt, W. 1983a. "The Queueing Network Analyzer" *Bell Syst. Tech. J.* **62**, 2817-2843

17. Stecke, K. E. and J. J. Solberg. 1985. "The Optimality of Unbalancing Both Work Loads and Machine Group Sizes in Closed Queueing Networks"

## VIII. APENDICES

### Apéndice #1 Los sistemas flexibles de manufactura

Los sistemas de manufactura constan de maquinaria, materia prima y recursos humanos, que trabajando en forma coordinada, tienen como objetivo la generación máxima de bienes y servicios.

Un enfoque de los sistemas de manufactura, tradicionalmente se ha centrado en la medición de tiempos y movimientos de la línea de proceso. Este estudio es la base de las decisiones tanto de inversión en capital, como de programación de la producción.

El enfoque de tiempos y movimientos, tiene varios defectos, entre ellos se pueden mencionar los siguientes: En estaciones de trabajo en donde los seres humanos intervienen, éstos tienden a aumentar de "súbito" su productividad, distorcionando las medidas del observador. Una solución propuesta para este problema ha sido el esconder al observador, pero esto provoca que el observador pierda detalles sobre la manera de trabajar del individuo.

Por otro lado, en las estaciones de trabajo automatizadas, donde no hay intervención humana, los observadores se contentan con obtener el dato sobre la velocidad nominal de producción de una máquina y por lo tanto no es posible tomar en cuenta con exactitud los probables paros de dicha estación, debidos a mantenimientos correctivos. Además este tiempo de paro, es muy variable y depende del tipo de descompostura.

Los estudios de tiempos y movimientos, en ningún caso contemplan los paros por fallas operativas o de mantenimiento. Estos paros, obligan a las estaciones de trabajo de la línea a encontrarse en un estado de bloqueo, o bien a quedar hambreadas, es decir sin trabajos por hacer.

Si en una línea de producción ocurre algún paro por falla, en alguna de sus estaciones de trabajo, las estaciones previas a dicha estación de trabajo pueden quedar bloqueadas, por los trabajos acumulados y las estaciones posteriores pueden parar por falta de trabajos.

Los modelos de sistemas flexibles de manufactura tienen por objetivo, estudiar los sistemas productivos compuestos por una serie de estaciones de trabajo, capaces de un cierto grado de flexibilidad. Es decir que fácilmente puede adaptarse para realizar diversos trabajos en la línea productiva. Además estos sistemas cuentan a su vez con un sistema automatizado y flexible de manejo de materiales, que normalmente consiste de un sistema de bandas que le permite a un producto desplazarse entre cualquier par de máquinas. El sistema flexible consta de una red de computadoras supervisoras que dirigen el tránsito de los trabajos, registra el estado de dichos trabajos, genera las instrucciones de fabricación para cada una de las estaciones de trabajo y se asegura de que todas las herramientas estén disponibles en la estación de trabajo. Estos sistemas cuentan con almacenamiento, ya sea en cada una de las estaciones de trabajo, o en un almacenamiento centralizado. Los trabajos en sí, suelen ponerse en tarimas y transportarse mediante bandas.<sup>1</sup>

Un sistema flexible de manufactura combina la tecnología existente en manufactura con el manejo automático de materiales y el "hardware" y "software" de las computadoras, para crear un sistema integrado para el proceso automático y alcatario de productos transportados mediante tarimas a través de varias estaciones de trabajo.

Para introducir en una determinada planta productiva, un sistema flexible de manufactura, es necesario determinar los productos a manufacturar y los requerimientos de manufactura para cada uno de los productos. También es necesario definir las funciones y capacidad de las estaciones de trabajo, el método de transporte y el almacenamiento que se necesita. Además se necesita especificar la programación de la producción y los controles operativos del proceso.

Todo esto puede ser simulado por un modelo analítico y alimentado al sistema de control computarizado. Por supuesto, que debido a la complejidad del problema, no existe aún una solución analítica a este tipo de modelos. Es por esto que en este tipo de sistemas la modelación se ha hecho mediante el uso de paquetes de simulación.

---

<sup>1</sup> J.A Buzacott and David D. Yao, "Flexible Manufacturing Systems: A Review of Analytical Models", **Management Science** Vol 32, No.7, July 1986

Existen sin embargo una serie de modelos analíticos desarrollados, algunos de ellos se analizarán en subsecuentes capítulos del presente trabajo. La intención de mencionarlos es conocer las diferentes "escuelas" o puntos de vista con respecto al problema y los trabajos realizados, a manera de introducción a los siguientes capítulos.

Todos los modelos definen, como variable general la probabilidad conjunta de que exista un cierto número de trabajos en cada una de las estaciones. Por otro lado definen la velocidad esperada de producción en base a una cierta programación del sistema flexible. La determinación de estas variables se hace suponiendo que el sistema flexible de manufactura, se puede comparar con una red de colas, en donde los trabajos entran de acuerdo a una distribución de Poisson, y los servidores (estaciones de trabajo) los procesan con un tiempo de proceso exponencial.

Los modelos desarrollados por las diferentes escuelas varían en los supuestos en que se basan por lo que, como se muestra a continuación, su aplicación es limitada.

El objetivo del desarrollo de estos modelos es el de simplificar el control y toma de decisiones en la línea. El tiempo de procesamiento de datos en los modelos basados en la simulación es muy grande. De ahí el interés en desarrollar modelos analíticos simplificados que permitan un procesamiento más rápido, lo que redundará en una toma de decisiones más eficaz y oportuna en la línea.

La universidad de Purdue desarrolló el modelo de red cerrada de colas. Este modelo se verá con mayor detalle. Se basa en el modelo de Gordon y Newell. El cálculo de la velocidad de producción del sistema y la probabilidad conjunta se basa en:

- En todas las estaciones existe la disciplina del primero que llega, primero en ser servido o (FCFS).
- El número total de trabajos en el sistema está fijo.
- En todas las estaciones de trabajo existe un almacenamiento local.
- La posibilidad de bloqueo en las estaciones de trabajo es cero. Es decir que el tamaño de las estaciones de trabajo es igual al número total de trabajos.
- Las máquinas están siempre disponibles para la producción. Es decir que en el modelo no se consideran paros por mantenimiento correctivo.

En este modelo la parte importante es la de las constantes de normalización. Estas constantes dependen en gran medida de las diversas reglas que deba seguir un determinado trabajo, dentro del sistema flexible de manufactura, para llegar a ser un producto terminado.

En este modelo se define la velocidad de producción como el número de unidades producidas que son regresadas al sistema flexible de manufactura, éste es el comportamiento característico de una red cerrada. En una red abierta, estos productos desaparecen una vez generados.

Se ha observado que el modelo no trabaja bien cuando las distribuciones de probabilidad del tiempo de servicio no sigue la ley exponencial.

Yao y Buzacott<sup>1</sup> proponen dividir al sistema flexible en cinco problemas que tienen una estrecha relación entre sí:

- 1.- Selección de partes.- En este problema se determina que tipos de partes han de ser manufacturadas por el sistema flexible.
- 2.- Agrupamiento de máquinas.- En este problema se trata de dividir las estaciones de trabajo en diversos grupos de tal suerte de que cada grupo haga las mismas operaciones, no importa la...
- 3.- Velocidad de producción.- En este problema, se trata de determinar la velocidad de producción de las diferentes partes a producirse.

---

<sup>1</sup> Op cit



4.- Asignación de turnos.- Se trata de asignar un número de turnos a cada una de las diferentes partes a producirse o procesarse.

5.- Asignación de herramientas y tipos de partes.- En esta parte se asignan las herramientas necesarias a cada una de las estaciones de trabajo para procesar las diferentes partes. También en esta parte se asignan las cargas de trabajo de cada una de las estaciones de trabajo.

Respecto a estos problemas Bucacott et al<sup>2</sup>, han desarrollado una serie de recomendaciones. Por ejemplo, ellos han encontrado que reunir en una estación de trabajo varias máquinas es mejor. Se obtienen mejores resultados en cuanto a la velocidad de producción se refiere, si este agrupamiento de máquinas se hace de manera desbalanceada, es decir habrá estaciones de trabajo con mayor número de máquinas que otras. También recomiendan que si el número de partes dentro de un tipo es similar, se balancee el número de partes a procesar en las diferentes estaciones de trabajo. Si no es así, es preferible desbalancear la línea.

El desbalanceo de las estaciones de trabajo en la línea nos ayuda a "crear", una estación más lenta que las demás. Esta estación será la que marque el paso del sistema, concentrando los esfuerzos de la organización para que esta estación trabaje las 24 hrs al día y los 365 días al año. Esto simplifica, y por lo tanto mejora, el sistema de control y eventualmente aumenta el "throughput".

#### MIT LIDS

Los trabajos de esta escuela, están orientados al control del sistema flexible de manufactura, a través de tres niveles de dicho control, el primer nivel es el de control de flujo. En este control de flujo, el resultado es la determinación de la velocidad de producción de cada uno de los tipos de trabajos que pueden entrar al sistema. Esto se hace mediante el control de las estadísticas sobre confiabilidad de las máquinas o estaciones de trabajo.

Para el control de flujo, así como para los modelos generados por esta escuela, es muy importante el almacenamiento "buffer". Como se dijo antes, existen dos tipos de almacenamientos buffer, en cada una de las estaciones de trabajo, o un buffer centralizado. Para los modelos de control de flujo de esta escuela, son importantes ambos almacenamientos. El modelo de SB Gershwin utiliza el almacenamiento por estación de trabajo.

El control de ritas es el segundo de los controles propuestos por esta escuela. Su objetivo es el de minimizar la congestión en el sistema, optimizando las ritas de los trabajos.

El tercer nivel de control es el que se refiere a control de secuencia y trata de regular la entrada de trabajos, de diferentes tipos al sistema.

Se verá en capítulos posteriores, que los modelos publicados por esta escuela cuentan con la característica de que se asignan buffers individuales en cada una de las estaciones de trabajo.

Por primera vez en esta escuela se analiza el problema de determinar la velocidad de producción de un sistema poco flexible de manufactura como el de proceso. En este sistema productivo, solo se genera un tipo de producto, mediante el estricto seguimiento de una secuencia de estaciones de trabajo, con buffers individuales y con máquinas con un cierto grado de confiabilidad. La confiabilidad, en este caso se refiere a la probabilidad de descompostura de dicha estación de trabajo. Para el caso de la presente tesis, estos modelos son de gran importancia, pues la gran mayoría de los procesos productivos, siguen una secuencia estricta de estaciones de trabajo. Esto es particularmente cierto, en la industria Química y Farmacéutica.

#### HARVARD

Esta escuela se ha concentrado más en los modelos relacionados con la simulación. Como se verá después con mayor detalle, la simulación es la alternativa de solución de las redes complejas de colas. Recuerdese que las redes de colas se utilizan en otras escuelas para describir el proceso productivo flexible.

La simulación no es otra cosa que alimentar a una computadora (que tiene un programa adecuado) de todas las operaciones necesarias para elaborar los productos. Se le alimenta también de todas las eventualidades que pueden

---

<sup>2</sup> Op cit.

ocurrirle al sistema, como fallas mecánicas, incidencias productivas, faltas de materiales. También se introduce en el modelo la velocidad de entrada y la ruta de los diferentes trabajos, los cuales al salir del sistema flexible, se convierten en los productos deseados.

Con esta información la computadora estima la duración de las operaciones, así como la ocurrencia de eventualidades y la velocidad de entrada de trabajos al sistema. Una vez estimados los parámetros, aplica el modelo de las operaciones, para llegar a un resultado sobre el número de trabajos localizados en los buffers. También determina la velocidad de producción de cada una de las partes.

Este grupo de modelos introduce el análisis de perturbación, cuyo objetivo es el de simplificar el modelo de simulación para disminuir el tiempo de procesamiento de datos. Se basa en perturbar artificialmente alguno de los parámetros del modelo para determinar su efecto en el resultado final.

Por ejemplo, un sistema flexible de manufactura se puede introducir dentro de un modelo de simulación. De este modelo obtener observaciones al final de las corridas, sobre número de trabajos en proceso en cada una de las estaciones de trabajo, así como observaciones sobre la velocidad de producción específica de cada parte (a las que llamaremos variables de salida). Posteriormente se puede determinar una funcionalidad estadística que aproxime el comportamiento de una determinada variable de salida, con respecto a un determinado parámetro. Con esta funcionalidad, se puede estimar esta variable de salida cuando se modifica un cierto parámetro, por medio de la siguiente ecuación:

$$x + \Delta x = F_{0+\Delta 0}^{-1}(F_0(x)) \quad \text{Ecuación 1}$$

donde:

x.- Es la media poblacional de una observación (digamos la media de los tiempos de proceso de una estación de servicio en particular)

0.- Representa al tiempo.

$\Delta x$ .- Es el cambio en dicha media poblacional con respecto a un cambio  $\Delta 0$  en el tiempo.

$F_0(x)$ .- Denota la salida del sistema (o "throughput" en el caso de un sistema flexible de manufactura) en el tiempo 0 y cuando el valor del parámetro descriptivo de la media poblacional es x.

Las reglas de la propagación de la perturbación permiten predecir las variables de salida críticas de la simulación, cuando son perturbados algunos parámetros de entrada sin necesidad de volver a correr la simulación. Esto puede ser de importancia para obtener rápidas respuestas sin tener que usar la simulación.

#### Toronto

Esta es una de las escuelas con mayor investigación. En esta escuela no solo se hace un estudio de las redes de colas para emular sistemas de manufactura, sino que se utiliza el método de descomposición para analizar problemas de almacenamiento limitado entre cada una de las estaciones de trabajo, así como cuando se tienen distribuciones de servicio generales. En esta descomposición, se analiza el comportamiento de cada una de las estaciones de trabajo, para después reunir todos los comportamientos y representar al sistema global, como compuesto de un solo servidor, con una sola cola o línea de espera de trabajos enfrente de él.

Este enfoque tiene muchas ventajas, pues cuando ya se tiene representado el sistema es posible probar diversas políticas de alimentación de trabajos a la red. Estas políticas pueden ser desde la más simple, como es la de que el primero que llega es el primero en ser servido (FCFS), hasta aquellas que alimentan primero ciertas categorías de trabajos. Estas categorías pueden ser creadas en base a su mayor o menor tiempo de proceso. A<sup>3</sup> esto se le conoce como control de entradas.

También mediante el mismo modelo se puede analizar qué trabajos ha de ejecutar el sistema flexible, que nos incrementen al máximo la productividad. A este segundo nivel de control se le conoce como balanceo de líneas, o como el problema de planeación de trabajos.

Existe un tercer nivel de control del sistema flexible de manufactura, que es el control operativo. Este se refiere a decidir en la línea qué trabajo va a ser procesado en seguida por una determinada estación de trabajo.

---

<sup>3</sup> Op cit

Este nivel es muy complejo ya que requiere de una base de datos demasiado elaborada. Se necesitan datos específicos sobre tiempos de proceso de una determinada pieza, en una estación de trabajo, además se requiere de saber en cada instante la velocidad de producción de la línea, así como poder predecir los efectos de alimentar una estación de trabajo con tal o cual pieza. Esto significa que un modelo efectivo de control operativo requiere de procesar gran cantidad de datos, por lo que el tiempo de cómputo suele ser muy largo. Si tomamos en consideración que normalmente en la línea productiva, no se dispone de tanto tiempo para tomar decisiones, es fácil ver que un modelo de control operativo resulta ineficiente para tomar decisiones en la línea.

Por esta razón los modelos de esta escuela se centran más en los niveles de control de entradas y de planeación de trabajos. En realidad, un modelo de simulación pudiera abarcar los tres niveles de control. El problema es nuevamente la relativa "tardanza" de los modelos de simulación para la toma de decisión en el nivel operativo.

Los investigadores de esta escuela han centrado sus esfuerzos en desarrollar soluciones para sistemas de manufactura en los cuales el bloqueo de estaciones de trabajo es posible. El bloqueo es un fenómeno que se observa en la realidad en los sistemas de manufactura. Es producido por la falta de confiabilidad de las estaciones de trabajo. Dentro de los ejemplos de falta de confiabilidad están: falla en maquinaria y equipo, errores operativos, ausentismo, etc. También se puede incluir en cierta forma la falta de materiales o herramientas que se puede dar en cualquier estación de trabajo.

Una de las formas de evitar el bloqueo es añadir a cada una de las estaciones de trabajo un almacenamiento previo. En caso de paro de alguna estación de trabajo, las anteriores a ésta, puedan continuar su labor, hasta llenar el almacenamiento previo a la estación en paro. Por lo tanto, los almacenamientos previos (o buffers), nos son de gran ayuda, cuando están localizados en las estaciones de trabajo más rápidas de la línea.

Consecuentemente el diseño del tamaño de los "buffers" es de gran importancia. Y es en este punto donde se centra la investigación de esta escuela. Por otro lado, hay que recordar que los almacenamientos en cada una de las estaciones de trabajo, o aquellos centralizados aumentan la producción de la línea, como se verá posteriormente.

#### Soluciones de forma de producto de factores.

Este es un punto importante para entender las soluciones a los modelos planteados por los investigadores. Se conocen como soluciones de forma de producto de factores, a las soluciones de los modelos cuyo fundamento es la ecuación diferencial planteada por J. R. Jackson.<sup>4</sup> La solución encontrada por el autor, involucra la resolución de una cadena de Markoff, que es planteada para describir el estado del sistema flexible en el estado estable. Esta cadena cuenta con variables que describen el número de trabajos en cada buffer, y el estado de cada estación de trabajo.

Al continuar las investigaciones, diversos autores al modelar los sistemas flexibles de manufactura llegaron a soluciones parecidas a las de Jackson. De tal suerte que, en apariencia, las soluciones de los diversos modelos relacionadas con velocidad de producción y número de trabajos almacenados en los buffers, tienen esta forma.

#### La función de los modelos analíticos.

Como corolario del presente capítulo veamos la función de los diversos modelos analíticos desarrollados. El objetivo de estos modelos, según Yao y Buzacott<sup>5</sup>, es el de ayudarnos a establecer los conceptos básicos, para el diseño de nuevos sistemas flexibles de manufactura. Estos conceptos se relacionan con las siguientes preguntas:

- "¿Qué resulta más efectivo? " El almacenamiento en cada una de las estaciones de trabajo, o el almacenamiento centralizado?

- "¿Cuál es el agrupamiento ideal de máquinas y gente por cada estación de trabajo?"

---

<sup>4</sup> J. R. Jackson "Jobshop Like Queueing Systems" **Management Science**, Vol 10, No. 1, October, 1963.

<sup>5</sup> Op Cit

- ¿Qué productos podremos fabricar simultáneamente en el sistema flexible de manufactura?

- ¿Cuál es la manera ideal de introducir los trabajos al sistema flexible de manufactura?

Los modelos una vez construidos, nos pueden informar sobre capacidades de producción, el nivel de inventario en proceso, el número requerido de tarimas para transporte de producto, y el tipo de transporte de materias primas y productos requerido, ya sea en forma de banda transportadora, o bien como ciclo de transporte.

Los autores nos mencionan que la simulación es necesaria realizar el diseño al detalle. Pero los modelos analíticos nos dan los parámetros necesarios para orientar nuestro esfuerzo de simulación. Además validan la solución por simulación. Por lo que más que competir los modelos analíticos y la simulación más bien son técnicas que se complementan.

#### Sistemas de manufactura de Proceso.

La pregunta obligada es ahora, ¿cómo puede ayudar la teoría de sistemas flexibles de manufactura, para líneas productivas tan poco flexibles como las de proceso?

Los sistemas flexibles de manufactura consideran en sus modelos que las estaciones de trabajo, son poco confiables. La maquinaria tiende a quedar fuera de operación por mantenimientos inesperados, falta de material, fallas en los recursos humanos, variabilidad en la velocidad de producción. Estos son factores comunes aplicables a cualquier línea productiva.

Las líneas de proceso tienen los mismos defectos. Por lo tanto, se puede pensar que una versión "reducida" de los modelos flexibles es aplicable a la línea de proceso. Y efectivamente, algunos autores han hecho reducciones a los modelos generales, para llegar a estas versiones "reducidas". En capítulos posteriores, se hablará de estas versiones "reducidas".

Lo importante es pensar, que el problema de diseñar una línea productiva de proceso, no es tan sencillo como pudiera aparentar.

Como conclusión al capítulo, podemos decir que el desarrollo de los sistemas flexibles de manufactura tienen por objeto ayudarnos a optimizar nuestras operaciones de producción, ayudándonos en el diseño de sus diversas variables.

Por otro lado, la simulación nos ayuda a diseñar al detalle nuestros sistemas de manufactura, al ser una técnica que puede tomar en cuenta multitud de variables que afectan a la producción.

Existen, hoy en día, diversas áreas, en donde la investigación de sistemas flexibles de manufactura, se está concentrando. Una de estas áreas de gran importancia, es la del control automático operativo. En este caso el objetivo de los modelos es el de permitir a una computadora tomar decisiones acertadas, en forma automática a diversos problemas puntuales, que se dan en la línea productiva. Recuérdese, sin embargo, que en párrafos anteriores hablamos un poco de la complejidad de un modelo para control operativo. A pesar de esto, es de esperarse que se logren desarrollos en esta parte del control.

En los siguientes capítulos veremos, cómo la teoría de los sistemas flexibles de manufactura y la simulación, describen a los sistemas de manufactura, en especial los de proceso. Esto es la base para el diseño óptimo de ellos. Es decir estaremos trabajando en la determinación del "throughput". Posteriormente se explicarán técnicas de mejoramiento del "throughput". Este "throughput" tiene un impacto muy fuerte en las utilidades de la empresa. En especial de aquellas que no pueden cubrir la demanda a la que se enfrentan.

#### Apéndice #2 Modelo de Jackson

El trabajo de Jackson inicia al definir un vector de  $N$  términos, cada uno significa la longitud de trabajos pendientes delante de cada una de las estaciones de trabajo.  $N$  es el número de estaciones de trabajo del sistema flexible. Entonces:

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_N) \quad \text{vector de longitudes de cola}$$
$$S(k) = k_1 + k_2 + \dots + k_N = K \quad \text{Total de inventario en proceso}$$

En el trabajo también se define que las llegadas de trabajos se realizan mediante un proceso de Poisson, con tasa media de llegadas fija ( $\lambda$ ). Entonces siendo  $L$  la tasa de llegadas que se dan en un tiempo  $t+h$  cuando el sistema se encuentra en un estado inicial  $k'$  es:

$$L = h\lambda(S(k')) + o(h) \quad \text{Ecuación 1}$$

donde  $o(h)$  es la probabilidad de que dos o más eventos sucedan en el diferencial de tiempo  $h$ .

Se observa que el modelo puede ser adaptado para otras políticas de entrada de trabajos. Por ejemplo se puede limitar la entrada de trabajos al sistema, cuando en este hay más de un cierto número de trabajos pendientes.

El modelo considera que la tasa de servicio tiene una distribución exponencial, pero además esta tasa de servicio es dependiente del número de trabajos pendientes en la cola que tenga delante de sí la estación de trabajo. Además cada estación de trabajo puede tener una tasa de servicio diferente. Sea  $M$  la tasa de servicio de una estación determinada de trabajo,  $n$  el número de la estación de trabajo y  $\mu$  la tasa de servicio, entonces la probabilidad de que un trabajo sea completado en la estación  $n$ , en un tiempo  $t+h$  es:

$$M = h\mu(n, k_n) + o(h) \quad \text{Ecuación 2}$$

donde  $k_n$  es la longitud de cola delante de la estación de trabajo  $n$  y  $o(h)$  es la probabilidad de que dos o más trabajos puedan ser completados en la estación de trabajo durante el intervalo  $h$ .

La generación de rutas en el modelo es completamente aleatorizada y depende de la naturaleza propia del producto a generar.  $r(m, n)$  es la probabilidad de que un trabajo estando en la estación de trabajo  $m$  se dirija a la estación de trabajo  $n$ . Esto significa que  $m$  puede adquirir valores entre 0 y  $N$ , mientras que  $n$  puede tomar valores entre 1 y  $N+1$ . Cuando  $m$  toma el valor de 0,  $n$  es entonces la primera estación de trabajo en la ruta del producto. Si  $n$  toma el valor de  $N+1$  entonces  $m$  es la última estación en la ruta del producto. Para  $r(0, N+1)$ , la ruta del producto no existe. Si  $R$  es la probabilidad de una ruta, y si esta ruta puede ser descrita por un vector tal que  $(n_1, n_2, \dots, n_i)$  sea la ruta de un determinado producto, donde además  $n_1$  sea la primera estación que el producto tenga que visitar y  $n_i$  la última entonces:

$$R = r(0, n_1)r(n_1, n_2) \dots r(n_{i-1}, n_i)r(n_i, N+1) \quad \text{Ecuación 3}$$

Se debe considerar que para cada  $r(m, n)$  se tiene una distribución de probabilidad, y que para cada una de las rutas la suma de las  $r(n_i, n_{i+1})$  debe ser igual a 1. Esta última consideración es de gran importancia y de una gran repercusión para otros modelos. El siguiente sistema de ecuaciones expresan en otros términos esta consideración:

$$e(n) = r(0, n) + \sum_{m=1}^N c(m)r(m, n) \quad \{e(n) | n \in \{1, N\}\} \quad e(n) \geq 0 \quad \text{Ecuación 4}$$

donde  $e(n)$  es el valor esperado del número de veces en que la estación de trabajo  $n$  aparece en una ruta. Para que la suma de las  $r(n_i, n_{i+1})$  sea igual a 1 para una determinada ruta, es necesario que las ecuaciones anteriores tengan una solución única que caracterice a todas las  $e(n)$ .

Una vez hechas todas las consideraciones, el autor entonces plantea que teniendo el sistema flexible una longitud inicial en todas sus colas caracterizada por el vector  $j' = (j_1, j_2, \dots, j_N)$ , se puede llegar en un tiempo  $t+h$  a un estado  $k' = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ . En ese diferencial de tiempo  $h$  puede ocurrir una de estas cosas:

1. Que no haya eventos:

$$1 - h\lambda(S(k')) \sum_{n=1}^N r(0, n) - h \sum_{n=1}^N \mu(n, k_n) (1 - r(n, n)) + o(h) \quad \text{si } j' = k' \quad \text{Ecuación 5}$$

2. La llegada de un trabajo:

$$h\lambda(S(k'))r(0, n) + o(h) \quad \text{si } j' = k' \text{ excepto } j_x = k_x + 1 \quad \text{Ecuación 6}$$

3. Se genera un producto:

$$h\mu(x, k_x)r(x, N+1) + o(h) \quad \text{si } j' = k' \text{ excepto } j_x = k_x + 1 \quad \text{Ecuación 7}$$

4. Se completa un trabajo en una estación de trabajo y este trabajo llega a la siguiente estación de trabajo en su fila:

$$\ln(x, k_X) r(x, y) + o(h) \quad \text{si } j' = k' \text{ excepto } j_X = k_X + 1 \text{ y } j_Y = k_Y + 1 \quad \text{Ecuación 8}$$

Las ecuaciones 9 y 10 reflejan la posibilidad de que en el diferencial de tiempo  $h$  ocurran dos o más eventos en el sistema flexible.

$$\begin{aligned} o(h) & \text{ para cualquier otra } j' \\ o(h^s) & \text{ para } j' \text{ con } |S(j') - S(k')| = s > 1 \end{aligned} \quad \text{Ecuación 10}$$

Para desarrollar la ecuación diferencial que describa el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo es necesario obtener la probabilidad de que el siguiente estado del sistema esté descrito por el vector  $k'$  después de un tiempo  $h$ . Y de la teoría de probabilidad básica:

$$P(k', t+h) = \sum P(j', t) P(k', t+h | j', t) \quad \text{Ecuación 11}$$

donde:

$P(k', t+h)$ .- Probabilidad de que se consolide el estado definido por el vector  $k'$  en el tiempo  $t+h$ .

$P(j', t)$ .- Probabilidad de que el sistema esté en el estado inicial definido por el vector  $j'$  en el tiempo  $t$ .

$P(k', t+h | j', t)$ .- Probabilidad condicional de que el sistema esté en el estado definido por el vector  $k'$  en el tiempo  $t+h$  dado que el sistema se encuentra en el estado inicial definido por el vector  $j'$  en el tiempo  $t$ .

Sustituyendo las probabilidades condicionales y sabiendo que las ecuaciones 9 y 10 tienden a cero cuando  $h$  tiende a cero, restando de ambos lados  $P(k, t)$ , dividiendo entre  $h$  y tomando el límite cuando  $h$  tiende a cero, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{dP(k', t)}{dt} = & -[\lambda(S(k')) + \sum_{n, k_n} \mu(n, k_n)(1 - r(n, n))] P(k', t) + \sum_n \lambda(S(k') - 1) r(0, n) P(n', t) + \sum_{n, m} \mu \\ & (n, k_n + 1) r(n, N + 1) P(n', t) + \sum_{m, n} \mu(n, k_n + 1) r(n, m) P(j'(m, n), t) \end{aligned} \quad \text{Ecuación 12}$$

donde todas las sumatorias se extienden de 1 hasta  $N$  excepto donde  $m=n$  son omitidos de la doble sumatoria, también se omiten los términos negativos de los argumentos de  $P$ .  $h'(n) = k'$  excepto donde el  $n$ -ésimo componente sea  $k_n - 1$ ,  $i'(n) = k'$  excepto donde el  $n$ -ésimo componente sea  $k_n + 1$  y  $j'(m, n) = k'$  excepto donde el  $m$ -ésimo componente sea  $k_m - 1$  y el  $n$ -ésimo componente sea  $k_n + 1$ .

Ahora, para obtener las distribuciones de equilibrio de probabilidad hay que resolver esta ecuación diferencial, y a la solución tomarse límite cuando  $t$  tiende a infinito. Esto fue hecho por Jackson (8). Los resultados se resumen en las ecuaciones 13 a 17.

$$W(K) = \prod_{i=0, K} \lambda(i) \quad \text{para } K=0, 1, 2, \dots \quad \text{Ecuación 13}$$

donde  $K$  es el número total de clases de productos que pueden ser manufacturados en el sistema flexible.

$$w(k') = \prod_{n=1, N} \prod_{i=1, k_n} [c(n) / \mu(n, i)] \quad \text{para } k' = (k_1, k_2, \dots, k_N) \quad \text{Ecuación 14}$$

donde  $k_1, k_2, \dots, k_N$  - es la longitud de cola delante de cada una de las  $N$  estaciones de trabajo.

$$T(K) = \sum w(k') \text{ sumada sobre los vectores } k' \text{ de estado que tengan } S(k') = K, \text{ para } K=0, 1, 2, \dots \quad \text{Ecuación 15}$$

$$\pi = \{ \sum_{K=0, \infty} W(K) T(K) \}^{-1} \quad \text{si la suma converge } \pi=0 \text{ si la suma no converge} \quad \text{Ecuación 16}$$

El siguiente teorema se refiere a la determinación de la probabilidad de que un vector  $k'$  específico, sea el que

describa el tamaño de colas adelante de cada una de las estaciones de trabajo del sistema, cuando éste se encuentra en equilibrio. El teorema dice: si  $\rho > 0$  entonces existe una única distribución de probabilidad de equilibrio para el vector  $k'$  de longitudes de cola, y esta expresada por la siguiente ecuación:

$$p(k') = \pi w(k') W(s(k')) \quad \text{Ecuación 17}$$

Estas ecuaciones nos dan idea de la complejidad de los resultados obtenidos, dada la complejidad del problema. También nos sugiere que la metodología para obtener la probabilidad, de un cierto vector descriptivo de las longitudes de cola, es bastante compleja.

En el caso de una disciplina de tipo FCFS, se tiene una tasa de llegada fija. Lo interesante es que esta ecuación abre la puerta para experimentar con otras disciplinas de llegada de trabajos. Por estas razones, el modelo de Jackson es un típico modelo de control en los niveles de planeación y de entradas.

### Apéndice #3 Modelo de Gordon y Newell<sup>6</sup>

En una red cerrada, el número de trabajos es constante. Los trabajos nunca generan productos, pues en cuanto salen del sistema son reciclados y se convierten en trabajos nuevamente. Esto obliga a que el número de trabajos en el sistema se mantenga constante. Esto se puede expresar considerando una red de estaciones de trabajo, donde pueden haber 1 o r servidores en paralelo. Se considera que un trabajo no podrá dejar una estación de trabajo si ésta se encuentra vacía. Esto se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$c(n_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } n_i = 0, \\ 1 & \text{si } n_i > 0 \end{cases} \quad \text{Ecuación 1}$$

donde  $n_i$  representa el número total de trabajos en la estación de trabajo, considerando a todos los servidores en paralelo, como a la longitud de cola delante de la estación de trabajo.

Por otro lado, también podemos considerar que la siguiente ecuación describe el número de trabajos en servicio en la estación de trabajo  $k$ :

$$\alpha_k(n_k) = \begin{cases} n_k & \text{si } n_k \leq r_k, \\ r_k & \text{si } n_k > r_k \end{cases} \quad \text{Ecuación 2}$$

$\alpha_k(n_k)$  - Representa el número de trabajos que están siendo procesados por la estación de trabajo  $k$  cuando existe un total de  $n_k$  trabajos en la estación.

$r_k$  - Representa el número máximo de trabajos que pueden ser procesados simultáneamente por la estación de trabajo  $k$ .

Finalmente, y considerando que  $M$  es el número total de estaciones de trabajo, se obtiene, que como el sistema es cerrado, la velocidad de salida de los trabajos de la estación  $k$ , es igual a la de entrada de algún otra estación de trabajo  $i$ :

$$\left\{ \sum_{k=1, M}^M \alpha_k(n_k) \mu_k \right\} P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \left\{ \sum_{i=1, M}^M \sum_{k=1, M}^M \alpha_i(n_i + 1) \mu_i p_{ik} \right\} P(n_1, \dots, n_k - 1, \dots, n_i + 1, \dots, n_M) \quad \text{Ecuación 3}$$

donde  $p_{ik}$  es la probabilidad de que la siguiente estación de trabajo, de un cierto trabajo localizado en  $i$  sea la estación  $k$ . Y además todas las  $\mu$ 's son las velocidades de servicio de cada uno de los servidores de las diversas estaciones de trabajo.

Esta ecuación fue resuelta por separación de variables por Gordon y Newell (14) para encontrar la probabilidad de una cierta configuración considerando que las velocidades con la que los servidores otorgan el servicio es igual no importando el número de clientes en la línea de espera. Además, se consideró en la solución, que  $P(n_1, n_2, \dots, n_M)$  podía expresarse mediante  $M$  parámetros desconocidos  $x_i$ . A estas  $x_i$  y al vector que forman  $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ , se les conoce como constantes de normalización. Estas reducciones son de importancia para el desarrollo de otros modelos.

<sup>6</sup>William J Gordon and Gordon F. Newell "Closed Queuing Systems with Exponential Servers" *Operations Research* Vol. 15 (1967a) pp 254-265.

<sup>7</sup> Op Cit

```

10 REM  APENDICE 4
20 J=0
30 REM  CAPACIDAD PRODUCTIVA DE UNA RED
40 REM  DE ESTACIONES DE TRABAJO
50 REM  SEGUN P. J. SCHWEITZER
60 REM
70 DIM A(50),H(50),X(50),V(50)
80 REM ENTRADA DE DATOS
90 INPUT "NUMERO DE ESTACIONES DE TRABAJO";N
100 PRINT "EL PORCENTAJE DE CLIENTES ESPERADOS POR ESTACION DE TRABAJO"
110 PRINT "DEPENDE EN GRAN MEDIDA DEL SIZE SPLIT O DISTRIBUCION DE"
120 PRINT "PRODUCTOS O PRESENTACIONES DE UN MISMO PRODUCTO QUE EL"
130 PRINT "EL MERCADO SE ESPERA REQUIERA"
140 FOR I=1 TO N
150 PRINT "PORCENTAJE DE CLIENTES ESPERADOS EN LA ESTACION";INPUT X(I)
160 NEXT I
170 PRINT:PRINT "LA VELOCIDAD DE PRODUCCION DE CADA UNA DE LAS ESTACIONES"
180 PRINT "DEBE DARSE EN CAJAS ESTADISTICAS POR HORA"
190 PRINT
200 FOR I= 1 TO N
210 PRINT "VELOCIDAD PROMEDIO DE LA ESTACION";INPUT V(I)
220 NEXT I
230 REM CALCULO DE A(I) Y AMAX
240 FOR I=1 TO N: A(I)=X(I)/V(I):NEXT I
250 REM CALCULO DE H(I)
260 FOR I=1 TO N:H(I)=I:NEXT I
270 FOR I=1 TO N
280 FOR J=1 TO N
290 IF J=I THEN 310
300 H(I)=(I/(I-(A(J)/A(I))))*H(I)
310 NEXT J
320 NEXT I
330 PRINT: PRINT "LA VELOCIDAD TEORICA PROGRAMADA DE PRODUCCION ES LA"
340 PRINT "VELOCIDAD CON LA QUE SE ESPERA QUE LOS TRABAJOS LLEGUEN A"
350 PRINT "LA RED PRODUCTIVA EN CAJAS ESTADISTICAS POR HORA"
360 PRINT
370 INPUT "VELOCIDAD DE PRODUCCION PROGRAMADA";L
380 PRINT
390 PRINT "LA CAPACIDAD DISPONIBLE EN ALMACEN PARA EL INVENTARIO EN"
400 PRINT "EN PROCESO ES EL ESPACIO QUE RESERVAMOS PARA ALMACENAR"
410 PRINT "TRABAJOS QUE NO SE HAN TERMINADO POR COMPLETO. ESTA"
420 PRINT "CANTIDAD DEBE DARSE EN CAJAS ESTADISTICAS."
430 PRINT
440 INPUT "CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO EN PROCESO";C
450 REM CALCULO DE PRODUCCION ESPERADA
460 ACMI=0: FOR I=1 TO N
470 ACMI=ACMI+(H(I)*((1-(A(I)*L)^C)/(1-A(I)*L)))
480 NEXT I
490 AC=0: FOR I=1 TO N
500 AC=AC+(H(I)*((1-(A(I)*L)^(C+1))/(1-A(I)*L)))
510 NEXT I
520 TH=L*ACMI/AC
530 PRINT "    ALM    PROG    OBTENIDA"
540 PRINT "    SU    SU/HR    SU/HR"
550 PRINT
560 PRINT "    ;C;    ;L;    ;TH"
570 PRINT
580 IF J>0 THEN 620
590 LPRINT "    ALM    PROG    OBTENIDA"
600 LPRINT "    SU    SU/HR    SU/HR"

```



```
610 J=J+1: GOTO 580
620 INPUT "DESEA IMPRIMIR SUS RESULTADOS (S O N)";D$
630 IF D$="N" THEN 650
640 LPRINT "      ";C;"      ";L;"      ";TH
650 INPUT "DESEA PROBAR OTRO VALOR DE ALMACENAMIENTO DE PROCESO O
DE VELOCIDAD PROGRAMADA DE PRODUCCION (S O N)";D$
660 IF D$="S" THEN 330
670 END
```

```

10 REM      APENDICE 5
20 DIM R(20),P(20),N(20),RU(20),RD(20),PU(20),PD(20),PS(20),PB(20),EI(20),E(20),
PQ(500,2,2)
30 REM
40 REM PRODUCTION LINE WITH INDIVIDUAL BUFFER STORAGE
50 REM STANLEY B GERSHWIN
60 REM
70 REM DATA INPUT
80 REM
90 PRINT "PRODUCTION LINE WITH INDIVIDUAL BUFFER STORAGE"
100 PRINT "INPUT DATA"
110 INPUT "NUMBER OF IN LINE MACHINES?";K
120 FOR I=1 TO K
130 PRINT "INPUT REPAIR PROBABILITY OF MACHINE";I
140 INPUT "PROBABILITY OF A MACHINE IS REPAIRED WITHIN ONE CYCLE TIME?";R(I)
150 PRINT "INPUT DISFUNCTION PROBABILITY OF MACHINE";I
160 INPUT "PROBABILITY THAT A MACHINE BREAKS WITHIN ONE CYCLE TIME?";P(I)
170 NEXT I
180 FOR I=1 TO K-1
190 PRINT "INPUT BUFFER";I;"STORAGE CAPACITY"
200 INPUT "BUFFER STORAGE CAPACITY";N(I)
210 NEXT I
220 REM INITIAL VALUES OF EFFICIENCY
230 FOR I=1 TO K-1:EI(I)=R(I)/(R(I)+P(I)):NEXT I
240 REM
250 REM INITIALIZATION
260 REM
270 REM GUESSING THE VALUES OF THE DECOMPOSED SYSTEM
280 REM : RANDOMIZE TIMER
290 RU(1)=R(1): PU(1)=P(1): RD(1)=RND: PD(1)=RND
300 FOR I=2 TO K-2
310 RU(I)=RND
320 RD(I)=RND
330 PU(I)=RND
340 PD(I)=RND
350 NEXT I
360 RD(K-1)=R(K): PD(K-1)=P(K): PU(K-1)=RND: RU(K-1)=RND
370 FOR I=1 TO K-1: GOSUB 910: NEXT I
380 GOSUB 410: Z=0
390 EAVG1=EAVG
400 GOTO 500
410 REM
420 REM SUBROUTINE TO CALCULATE THE AVERAGE EFFICIENCY
430 REM
440 ESUM=0
450 FOR I=1 TO K-1
460 ESUM=ESUM+E(I)
470 NEXT I
480 EAVG=ESUM/(K-1)
490 RETURN
500 REM
510 REM NEW VALUES OF RU(I) AND RD(I-1)
520 REM
530 FOR I=2 TO K-1
540 XP=(PS(I-1)*RU(I))/(PU(I)*EAVG1)
550 YP=(P(I)*RD(I-1))/(PD(I-1)*EAVG1)
560 RU(I)=RU(I-1)*XP+R(I)*(1-XP)
570 RD(I-1)=RD(I)*YP+R(I)*(1-YP)
580 NEXT I
590 L=0

```

```

600 I=1: GOSUB 910: EM1=E(I)
610 REM
620 REM RECALCULATION OF PU(2)
630 REM
640 PU(2)=ABS(RU(2)*((1/EAVG1)+(1/EI(2))-2-(PD(I)/RD(I))))
650 IF K=3 THEN 800
660 REM
670 REM LOOP 1
680 REM
690 I=2
700 J=0
710 GOSUB 910: EN=E(I)
720 REM ADJUSTING PD(I)
730 DIF=ABS(EN-E(I)):DIF1=EN-E(I):PRINT "DIFEN";DIF:DIF1
740 IF DIF<.01 OR J>200 THEN 770
750 IF DIF1>0 THEN PD(I)=PD(I)*1.05 ELSE PD(I)=PD(I)*.9:J=J+1
760 GOTO 710
770 PU(I+1)=ABS(RU(I+1)*((1/EAVG1)+(1/EI(I+1))-2-(PD(I)/RD(I))))
780 I=I+1
790 IF I<=K-2 THEN 700
800 I=K-1: GOSUB 910: EM=E(I)
810 REM ADJUSTING PD(I)
820 DIF=ABS(EM-EM1): DIF1=EM-EM1 : PRINT "DIFE(I)";DIF
830 IF DIF<.01 OR L>50 THEN 860
840 IF DIF1>0 THEN PD(I)=PD(I)*.9 ELSE PD(I)=PD(I)*1.05 : L=L+1
850 GOTO 600
860 GOSUB 410: EAVG2=EAVG
870 DIF=ABS(EAVG2-EAVG1) : DIF1=EAVG2-EAVG1 :PRINT "DIFEAVG";DIF
880 IF DIF<.01 OR Z>50 THEN 1300
890 IF DIF1>0 THEN E(I)=E(I)*.9 ELSE E(I)=E(I)*1.05 : Z=Z+1
900 GOSUB 410: EAVG1=EAVG : GOTO 500
910 REM
920 REM SUBROUTINE FOR EFFICIENCY CALCULATIONS
930 REM : RANDOMIZE TIMER
940 CK=RND
950 R1=RU(I): R2=RD(I): P1=PU(I): P2=PD(I)
960 K1=R1+R2-R1*R2-R1*P2 : K2=R1+R2-R1*R2-P1*R2
970 K3=P1+P2-P1*P2-P1*R2 : K4=P1+P2-P1*P2-R1*P2
980 Y1=K1/K3 : Y2=K2/K4 : X=(K2*K3)/(K4*K1)
990 SUM=0:PQ(0,0,0)=0
1000 PQ(0,0,1)=CK*X*K1/(R1*P2)
1010 PQ(0,1,0)=0
1020 PQ(0,1,1)=0
1030 PQ(1,0,0)=CK*X
1040 PQ(1,0,1)=CK*X*Y2
1050 PQ(1,1,0)=0
1060 PQ(1,1,1)=(CK*X/P2)*K1/K4
1070 FOR J=2 TO N(I)-2
1080 FOR L=0 TO 1
1090 FOR M=0 TO 1
1100 PQ(J,L,M)=CK*X^J*Y1^L*Y2^M
1110 NEXT M
1120 NEXT L
1130 NEXT J
1140 PQ(N(I)-1,0,0)=CK*X^(N(I)-1)
1150 PQ(N(I)-1,0,1)=0
1160 PQ(N(I)-1,1,0)=CK*X^(N(I)-1)*Y1
1170 PQ(N(I)-1,1,1)=(CK*X^(N(I)-1)/P1)*K2/K3
1180 PQ(N(I),0,0)=0
1190 PQ(N(I),0,1)=0

```

```

1200 PQ(N(I),1,0)=CK*X^(N(I)-1)*(K2/(P1*R2))
1210 PQ(N(I),1,1)=0
1220 FOR J=0 TO N(I):FOR L=0 TO I:FOR M=0 TO 1
1230 SUM=SUM+PQ(J,L,M):NEXT M: NEXT L: NEXT J: DIF=ABS(SUM-1)
1240 IF DIF<=.01 THEN 1280
1250 IF SUM>1 THEN 1260 ELSE 1270
1260 CK=CK/2:GOTO 990
1270 CK=CK*1.5:GOTO 990
1280 PS(I)=PQ(0,0,1):PB(I)=PQ(N(I),1,0):E(I)=E(I)*(1-PB(I))
1290 RETURN
1300 FOR I=1 TO K-1 : GOSUB 910
1310 FOR J=0 TO N(I)
1320 FOR L=0 TO I
1330 FOR M=0 TO 1
1340 NP(I)=NP(I)+J*PQ(J,L,M)
1350 NEXT M
1360 NEXT L
1370 NEXT J
1380 NEXT I
1390 REM
1400 REM PRINTING SUBROUTINE
1410 REM
1420 FOR I=1 TO 5: PRINT :NEXT I
1430 PRINT "PRODUCTION LINE WITH INDIVIDUAL BUFFER STORAGES"
1440 PRINT "BY S. B. GERSHWIN"
1450 PRINT "RESULTS OF CALCULATION"
1460 PRINT "CALCULATED LINE EFFICIENCY=";EAVG2
1470 PRINT "AVERAGE UNITS IN THE BUFFERS"
1480 FOR I=1 TO K-1
1490 PRINT "BUFFER NO=";I," AVERAGE UNITS=";NP(I)
1500 NEXT I
1510 STOP
1520 PRINT
1530 PRINT "DATA USED"
1540 PRINT
1550 PRINT "STATISTICAL DATA ON WORKING STATIONS"
1560 PRINT
1570 PRINT "NUMBER OF WORKING STATIONS=";K
1580 PRINT "NUMBER OF BUFFERS=";K-1
1590 PRINT
1600 FOR I=1 TO K
1610 PRINT "PROBABILITY OF A MALFUNCTION OF MACHINE";I;"=";R(I)
1620 PRINT "PROBABILITY OF A COMPLETED REPAIR OF MACHINE";I;"=";P(I)
1630 NEXT I
1640 PRINT
1650 PRINT BUFFER STORAGE CAPACITIES
1660 PRINT
1670 FOR I=1 TO K-1
1680 PRINT "STORAGE CAPACITY CONSIDERED OF BUFFER";I;"=";N(I)
1690 NEXT I
1700 END

```

```

5 REM      APENDICE 6
10 DIM A(20),P(20,100),PA(20,100),PC(20,100),LAM(20,100),MU(20,100),RO(20,100)
20 REM LINE PRODUCTION RATE PREDICTION
30 REM BY YAMASHITA AND SUZUKI
40 REM
50 PRINT
60 PRINT "LINE PRODUCTION RATE PREDICTION"
70 PRINT "BY YAMASHITA AND SUZUKI"
80 PRINT
90 PRINT "ENTER DATA"
100 INPUT "ENTER NUMBER OF WORKING STATIONS";N
110 PRINT
120 PRINT "WORKING STATION EFFICIENCIES"
130 PRINT "BY THIS EFFICIENCY, WE MEAN THE PROBABILITY THAT IN A PRODUCTION"
150 PRINT "STATION IS OPERATIONAL DURING A PRODUCTIVE CYCLE"
160 FOR I=1 TO N
165 PRINT "INPUT WORKING STATION";I;"EFFICIENCY"
170 INPUT "WORKING STATION EFFICIENCY";A(I)
180 NEXT I
190 PRINT: PRINT "CAPACITY OF COMMON BUFFER"
200 PRINT "USE ONLY INTEGER NUMBERS"
210 INPUT "CAPACITY OF COMMON BUFFER STORAGE";S
220 S=INT(S)
230 FOR I=2 TO N
240 FOR J=0 TO S
250 REM
260 REM DETERMINACION DE PROBABILIDADES DE PROCESO
270 REM
280 M=0: P(I,M)=0
290 FOR M=1 TO J+2
300 P(I,M)=A(I)
310 NEXT M
320 IF I=2 THEN 390
330 M=0:PA(I,M)=PC(I-1,J)
340 FOR M=1 TO J+1
350 PA(I,M)=PC(I-1,J-M+1)
360 NEXT M
370 M=J+2: PA(I,M)=0
380 GOTO 430
390 FOR M=0 TO J+1
400 PA(I,M)=A(I)
410 NEXT M
420 M=J+2: PA(I,M)=0
430 REM
440 REM CALCULATION OF LAMBDA AND MU
450 REM
460 FOR K=0 TO J+1
470 LAM(I,K)=PA(I,K)*(1-P(I,K))
480 NEXT K
490 FOR L=1 TO J+2
500 MU(I,L)=(1-PA(I,L))*P(I,L)
510 NEXT L
520 REM
530 REM DETERMINATION OF RO FOR I AND J FIXED
540 REM
550 FOR T=0 TO J+1
560 RO(I,T)=1
570 FOR O=0 TO T
580 RO(I,T)=RO(I,T)*(LAM(I,O)/MU(I,O+1))
590 NEXT O

```

```
600 NEXT T
610 SUM=0: FOR T=0 TO J+1
620 SUM=SUM+RO(I,T)
630 NEXT T
640 PM=SUM/(SUM+1)
650 REM
660 REM CALCULATION OF BUFFER OCCUPANCY
670 REM
680 PC(I,J)=PM*A(I)
690 NEXT J
700 NEXT I
710 PRINT:PRINT:PRINT "PREDICTION OF LINE PRODUCTION RATE"
720 PRINT "BY YAMASHITA AND SUZUKI"
730 I=N:J=S:PRINT "LINE PRODUCTION RATE OR ESTIMATED EFFICIENCY";PC(I,J)
740 END
```

LINE BLOCK

```

1      *
2      * SIMULACION DE UNA LINEA DE JARABE VICK
3      *
4          SIMULATE          ;NECESITA SIMULARSE
5      * DEFINICION DE BUFFERS Y TABLAS
6      BUFF1 EQU 1,Q          ;BUFFER FRASCO VACIO
7      BUFF2 EQU 2,Q          ;BUFFER FRASCO LLENO
8      BUFF3 EQU 3,Q          ;BUFFER FRASCO TAPADO
9      BUFF4 EQU 4,Q          ;BUFFER FRASCO ETIQUETADO
10     BUFF5 EQU 5,Q          ;BUFFER FRASCO CON BANDA
11     BUFF6 EQU 6,Q          ;BUFFER DE FRASCO LOTIFICADO
12     PG EQU 7,Q             ;BOTELLAS PERDIDAD POR PARO GEN.
13     ITM1 EQU 2,T           ;TABLA DEL CONT. DE BUFF1
14     ITM2 EQU 3,T           ;TABLA DEL CONT. DE BUFF2
15     ITM3 EQU 4,T           ;TABLA DEL CONT. DE BUFF3
16     ITM4 EQU 5,T           ;TABLA DEL CONT. DE BUFF4
17     ITM5 EQU 6,T           ;TABLA DEL CONT. DE BUFF5
18     ITM6 EQU 7,T           ;TABLA DEL CONT. DE BUFF6
19     TRT EQU 1,T            ;TABLA DEL TIEMPO DE TRANSITO
20     FILLER EQU 1,F         ;LLENADORA
21     CAPPER EQU 2,F         ;TAPADORA
22     LABELL EQU 3,F         ;ETIQUETADORA
23     POSIT EQU 4,F          ;POSICIONADORA DE BANDA
24     JPRT EQU 5,F           ;JET PRINTER
25     CARTONE EQU 6,F        ;CARTONETA
26     * FUNCIONES A USAR
27     1 FUNCTION RN$1,C18    ;FUNCION DE CARGA DE FRASCO
28     0,0/0.1,.0965/.2,.204/.3,.326/.4,.4679/.5,.6349/.6,.8393/.7,1.102/
29     .8,1.474/.9,2.109/.95,2.744/.97,3.212/.99,4.218
30     2 FUNCTION RN$2,D2    ;PROBABILIDAD DE PARO LLENADORA
31     .0743,0/1,1
32     3 FUNCTION RN$2,D2    ;PROBABILIDAD DE PARO TAPADORA
33     .05036,0/1,1
34     4 FUNCTION RN$2,D2    ;PROBABILIDAD DE PARO ETIQUETADORA
35     .0496,0/1,1
36     5 FUNCTION RN$2,D2    ;PROBABILIDAD DE PARO POSICIONADORA
37     .04807,0/1,1
38     6 FUNCTION RN$2,D2    ;PROBABILIDAD DE PARO JET PRINTER
39     .07627,0/1,1
40     7 FUNCTION RN$2,D2    ;PROBABILIDAD DE PARO CARTONETA
41     .0743,0/1,1
42     8 FUNCTION RN$2,D2    ;PROBABILIDAD DE PARO GENERAL
43     .1532,0/1,1
44     *VARIABLES A UTILIZAR
45     1 VARIABLE FNS2
46     2 VARIABLE FNS3
47     3 VARIABLE FNS4
48     4 VARIABLE FNS5
49     5 VARIABLE FNS6
50     6 VARIABLE FNS7
51     7 VARIABLE FNS8
52     *SIMULACION DE LA LINEA
53     1 GENERATE 1          ;GENERA BOTELLAS VACIAS
54     2 MARK

```





LINE BLOCK

56	4	TEST_E V\$7,I	;PRUEBA SI NO HAY PARO GENERAL
57	5	QUEUE BUFF1	;ENTRA AL BUFFER DE BOTELLA VACIA
58	6	DEPART PG	;SALE DE COLA
59	7	TEST_E V\$1,I	;PRUEBA OPERACIONAL LLENADORA
60	8	GATE_NU 1	;PRUEBA SI LLENADORA ESTA LIBRE
61	9	SEIZE FILLER	;ENTRA A LLENADORA
62	10	DEPART BUFF1	;SALE DEL BUFFER DE BOTELLA VACIA
63	11	ADVANCE FN\$1	;LLENA
64	12	RELEASE FILLER	;SALE DE LLENADORA
65	13	TABULATE ITM1	;NUM DE ITEMS EN BUFF1
66	14	QUEUE BUFF2	;ENTRA A BUFFER DE BOTELLA LLENA
67	15	TEST_E V\$2,I	;PRUEBA OPERACIONAL DE LA TAPADORA
68	16	GATE_NU 2	;PRUEBA SI TAPADORA ESTA LIBRE
69	17	SEIZE CAPPER	;ENTRA A TAPADORA
70	18	DEPART BUFF2	;SALE BUFFER BOTELLA LLENA
71	19	ADVANCE FN\$1	;TAPA
72	20	RELEASE CAPPER	;SALE DE TAPADORA
73	21	TABULATE ITM2	;NUMERO DE ITEMS EN BUFF 2
74	22	QUEUE BUFF3	;ENTRA BUFFER BOT. TAPADA
75	23	TEST_E V\$3,I	;PRUEBA OPERACIONAL ETIQUETADORA
76	24	GATE_NU 3	;PRUEBA ETIQUETADORA LIBRE
77	25	SEIZE LABELL	;ENTRA A ETIQUETADORA
78	26	DEPART BUFF3	;SALE DE BUFFER BOT. TAPADA
79	27	ADVANCE FN\$1	;ETIQUETA
80	28	RELEASE LABELL	;SALE DE ETIQUETADORA
81	29	TABULATE ITM3	;NUM. DE ITEMS EN BUFF3
82	30	QUEUE BUFF4	;ENTRA AL BUFFER BOT ETIQUET
83	31	TEST_E V\$4,I	;PRUEBA OPERACIONAL POSICIONADORA
84	32	GATE_NU 4	;PRUEBA SI POSICIONADORA LIBRE
85	33	SEIZE POSIT	;ENTRA A POSICIONADORA
86	34	DEPART BUFF4	;SALE DE BUFFER BOT. ETIQUET
87	35	ADVANCE FN\$1	;POSICIONA BANDA
88	36	RELEASE POSIT	;SALE DE POSICIONADORA
89	37	TABULATE ITM4	;NUM DE ITEMS EN BUFF4
90	38	QUEUE BUFF5	;ENTRA AL BUFFER BOT CON BANDA
91	39	TEST_E V\$5,I	;PRUEBA OPERACIONAL JET PRINTER
92	40	GATE_NU 5	;PRUEBA SI JET PRINTER LIBRE
93	41	SEIZE JPRT	;ENTRA A JET PRINTER
94	42	DEPART BUFF5	;SALE DE BUFF BOT CON BANDA
95	43	ADVANCE FN\$1	;IMPRIME LOTE
96	44	RELEASE JPRT	;SALE DE JET PRINTER
97	45	TABULATE ITM5	;NUM DE ITEMS EN BUFF5
98	46	QUEUE BUFF6	;ENTRA BUFFER BOT. CON LOTE
99	47	TEST_E V\$6,I	;PRUEBA OPERACIONAL DE CARTONETA
100	48	GATE_NU 6	;PRUEBA SI CARTONETA LIBRE
101	49	SEIZE CARTONE	;ENTRA CARTONETA
102	50	DEPART BUFF6	;SALE DEL BUFFER DE BOT. CON LOTE
103	51	ADVANCE FN\$1	;CARTONA
104	52	RELEASE CARTONE	;SALE DE CARTONETA
105	53	TABULATE ITM6	;NUM DE ITEMS EN BUFF6
106	54	TABULATE TRT	;CONTABILIZA TIEMPO DE TRANSITO
107	55	TERMINAT 1	
108		TRT TABLE M\$1,0,5,7	;TABLA DE TIEMPO DE TRANSITO
109		ITMI TABLE Q\$1,0,100,15	;TABLA DE BUFFER BOT. VACIA



LINE BLOCK

111	ITM3	TABLE	Q\$3,0,100,16	;TABLA DE BUFFER BOT. TAPADA
112	ITM4	TABLE	Q\$4,0,100,16	;TABLA DE BUFFER BOT. ETIQUETADA
113	ITM5	TABLE	Q\$5,0,100,16	;TABLA DE BUFFER BOT. CON BANDA
114	ITM6	TABLE	Q\$6,0,100,16	;TABLA DE BUFFER BOT. CON LOTE
115		START	5000	;CORRE UN LOTE

SYMBOL	VALUE	SYMBOL	VALUE
=====	=====	=====	=====
BUFF1	1	BUFF2	2
BUFF3	3	BUFF4	4
BUFF5	5	BUFF6	6
CAPPER	2	CARTONE	6
FILLER	1	ITM1	2
ITM2	3	ITM3	4
ITM4	5	ITM5	6
ITM6	7	JPRT	5
LABELL	3	PG	7
POSIT	4	TRT	1

RELATIVE CLOCK      5012    ABSOLUTE CLOCK      5012

BLOCK COUNTS

BLOCK	CURR	TOTAL	HLOCK	CURR	TOTAL	BLOCK	CURR	TOTAL
1	1	5012	2	0	5011	3	0	5011
4	0	5011	5	0	5011	6	0	5011
7	0	5011	8	0	5011	9	0	5011
10	0	5011	11	0	5011	12	0	5011
13	0	5011	14	0	5011	15	0	5011
16	0	5011	17	0	5011	18	0	5011
19	1	5011	20	0	5010	21	0	5010
22	0	5010	23	3	5010	24	0	5007
25	0	5007	26	0	5007	27	1	5007
28	0	5006	29	0	5006	30	0	5006
31	0	5006	32	0	5006	33	0	5006
34	0	5006	35	1	5006	36	0	5005
37	0	5005	38	0	5005	39	4	5005
40	0	5001	41	0	5001	42	0	5001
43	1	5001	44	0	5000	45	0	5000
46	0	5000	47	0	5000	48	0	5000
49	0	5000	50	0	5000	51	0	5000
52	0	5000	53	0	5000	54	0	5000
55	0	5000						

FACILITY	AVERAGE UTILIZATION	NUMBER ENTRIES	AVERAGE TIME/TRAN	SEIZING TRANS.NO.	PREEMPTING TRANS.NO.
FILLER	0.50	5011	0.50		
CAPPER	0.49	5011	0.49	14	
LABELL	0.50	5007	0.50	17	
POSIT	0.49	5006	0.49	9	
JPRT	0.51	5001	0.51	1	
CARTONE	0.51	5000	0.51		

QUEUE	MAXIMUM CONTENT	AVERAGE CONTENT	TOTAL ENTRIES	ZERO ENTRIES	PERC. ZERO	AVERAGE TIME/TR	AVERAGE TIME/TR	TABLE NUMBR	CURR CONTENT
BUFF1	8	0.53	5011	3476	69.37	0.53	1.73	0	
BUFF2	9	0.73	5011	3234	64.54	0.73	2.07	0	
BUFF3	10	0.95	5010	2863	57.15	0.95	2.21	3	
BUFF4	14	1.04	5006	2812	56.17	1.04	2.38	0	
BUFF5	15	1.23	5005	2679	53.53	1.24	2.66	4	
BUFF6	14	1.11	5000	2702	54.04	1.11	2.42	0	
PG	2	0.12	5011	4411	88.03	0.12	1.01	0	

TABLE NO. 1 TRT

ENTRIES IN TABLE	MEAN ARGUMENT	STANDARD DEVIATION	SUM OF ARGUMENT
5000	8.71	3.62	43559.0

UPPER LIMIT	OBSERVED FREQUENCY	PER CENT OF TOTAL	CUMULATIVE PERCENTAGE	CUMULATIVE REMAINDER	MULTIPLE OF MEAN	DEVIATION FROM MEAN
0	1	0.02	0.02	99.98	0.00	-2.40
5	926	18.52	18.54	81.46	0.57	-1.02
10	2709	54.18	72.72	27.28	1.15	0.36
15	1138	22.76	95.48	4.52	1.72	1.73
20	194	3.88	99.36	0.64	2.30	3.11
25	31	0.62	99.98	0.02	2.87	4.49
OVRFLO	1	0.02	100.00	0.00		

AVERAGE VALUE OF OVERFLOW	30.00
---------------------------	-------

TABLE NO. 2 ITMI						
ENTRIES IN TABLE		MEAN ARGUMENT		STANDARD DEVIATION		SUM OF ARGUMENTS
5011		0.66	0.51	3283.0		
UPPER LIMIT	OBSERVED FREQUENCY	PER CENT OF TOTAL	CUMULATIVE PERCENTAGE	CUMULATIVE REMAINDER	MULTIPLE OF MEAN	DEVIATION FROM MEAN
0	2954	58.95	58.95	41.05	0.00	-1.28
100	2057	41.05	100.00	0.00	152.63	194.34

REMAINING VALUES ARE ZERO

TABLE NO. 3 ITM2

ENTRIES IN TABLE	MEAN ARGUMENT	STANDARD DEVIATION	SUM OF ARGUMEN
5010	0.92	1.05	4631.0

UPPER LIMIT	OBSERVED FREQUENCY	PER CENT OF TOTAL	CUMULATIVE PERCENTAGE	CUMULATIVE REMAINDER	MULTIPLE OF MEAN	DEVIATION FROM MEAN
0	2874	57.37	57.37	42.63	0.00	-0.88
5	2038	40.68	98.04	1.96	5.41	3.90
10	98	1.96	100.00	0.00	10.82	8.68

REMAINING VALUES ARE ZERO

TABLE NO. 4 FIM3

ENTRIES IN TABLE	MEAN ARGUMENT	STANDARD DEVIATION	SUM OF ARGUMENTS
5006	1.26	1.63	6311.0

UPPER LIMIT	OBSERVED FREQUENCY	PER CENT OF TOTAL	CUMULATIVE PERCENTAGE	CUMULATIVE REMAINDER	MULTIPLE OF MEAN FROM MEAN	DEVIATION FROM MEAN
0	2591	51.76	51.76	48.24	0.00	-0.77
100	2415	48.24	100.00	0.00	79.32	60.48

REMAINING VALUES ARE ZERO



TABLE NO. 5 ITM4  
ENTRIES IN TABLE MEAN ARGUMENT STANDARD DEVIATION SUM OF ARGUMEN  
5005 1.42 2.07 7104.0

UPPER LIMIT	OBSERVED FREQUENCY	PER CENT OF TOTAL	CUMULATIVE PERCENTAGE	CUMULATIVE REMAINDER	MULTIPLE OF MEAN FROM MEAN	DEVIATION FROM MEAN
0	2571	51.37	51.37	48.63	0.00	-0.69
100	2434	48.63	100.00	0.00	70.45	47.72

REMAINING VALUES ARE ZERO

ESTD TEST IN REPT

TABLE NO. 6 ITM5

ENTRIES IN TABLE	MEAN ARGUMENT	STANDARD DEVIATION	SUM OF ARGUMENTS
5000	1.65	2.40	8263.0

UPPER LIMIT	OBSERVED FREQUENCY	PER CENT OF TOTAL	CUMULATIVE PERCENTAGE	CUMULATIVE REMAINDER	MULTIPLE OF MEAN FROM MEAN	DEVIATION FROM MEAN
0	2436	48.72	48.72	51.28	0.00	-0.69
100	2564	51.28	100.00	0.00	60.51	41.06

REMAINING VALUES ARE ZERO

TABLE NO. 7 ITM6

ENTRIES IN TABLE	MEAN ARGUMENT	STANDARD DEVIATION	SUM OF ARGUMEN
5000	1.57	2.18	7837.0

UPPER LIMIT	OBSERVED FREQUENCY	PER CENT OF TOTAL	CUMULATIVE PERCENTAGE	CUMULATIVE REMAINDER	MULTIPLE OF MEAN	DEVIATION FROM MEAN
0	2370	47.40	47.40	52.60	0.00	-0.72
100	2630	52.60	100.00	0.00	63.80	45.16

REMAINING VALUES ARE ZERO

**Apéndice #8 Metodología propuesta de solución de sistema de ecuaciones según Birtran y Tirupati<sup>7</sup>**

La metodología desarrollada en la presente tesis para resolver el sistema de ecuaciones de los modelos de balanceo de líneas y de optimización del inventario en proceso, se basa en el desarrollo de las siguientes tablas, que de manera comprensiva, dan solución a las ecuaciones fundamento del modelo de optimización.

En primer lugar se necesitan recabar del sistema flexible de manufactura la siguiente table de datos:

**Tabla #1 Datos necesarios que describen las estaciones de trabajo del sistema**

Estación de trabajo (j)	Distribución descriptiva de la velocidad de atención de clientes	Parámetros de la distribución Media/ Desviación Std	Coefficientes de variación $v_j$ $Cd=Cd_j=Csj$	Parámetros de la función de costo.
-------------------------	--	---	---	------------------------------------

Las estaciones de trabajo van desde 1 hasta J, el número de la estación se registra en la primera columna de la tabla. La segunda columna refleja el tipo de distribución (exponencial, normal o Weibull) que describe mejor los datos sobre el tiempo de proceso promedio de la estación de trabajo. En la tercera columna se registran los parámetros descriptivos de estas distribuciones de probabilidad. La cuarta columna se utiliza para calcular los coeficientes de variación o Cd's, que se calculan con la siguiente ecuación:

$$Cd=(\sigma/media)^2 \qquad \text{Ecuación 1}$$

A las medias de la velocidad de procesamiento de las estaciones de trabajo se les representa a lo largo de este apéndice con la letras  $\mu_j$ . Las  $v_j$ 's corresponden a los parámetros de la función de costo. Con estos parámetros se puede describir perfectamente el comportamiento de las estaciones de trabajo del sistema. Ahora será necesario describir los parámetros de los trabajos a procesar por el sistema de manufactura. Esto lo podemos realizar mediante el llenado de la siguiente tabla:

**Tabla #2 Datos necesarios que describen a los trabajos que entran al sistema**

Tipo de trabajo(i)	Distribución descriptiva de la velocidad con los que llegan los trabajos de un determinado tipo al sistema	Parametro descriptivo de la distribución que en este caso es la media. $a_j$	Ruta dentro del sistema flexible que ha de seguir el trabajo para convertirse en producto terminado
--------------------	--	--	---

Los tipos de trabajos van desde 1 hasta M. La ruta de los trabajos dentro del sistema se representa como una secuencia de números de estaciones de trabajo todas pertenecientes al conjunto {1 a J}.

Estas dos tablas completan los datos necesarios para poder aplicar el modelo. Las siguientes tablas simplifican la resolución del modelo. El objetivo es llenarlas para poder encontrar el estado inicial del sistema.

**Tabla 3.-  $\lambda_j$**

Estación de trabajo (j)	$\lambda_j$ Tasa media de llegadas a la estación j del sistema.
-------------------------	---

$\lambda_j$ - Se calcula sumando todas las  $a_j$ 's de los trabajos cuya ruta dentro del sistema pasa por la estación j.

**Tabla 4. Probabilidades de distribución de trabajos dentro del sistema.**

<sup>7</sup>Gabriel R. Bitran and Devanath Tirupati "Tradeoff Curves, Targeting and Balancing in Manufacturing Queueing Networks", *Operatations Research* Vol. 37, No. 4, July August 1989.

Tipo de trabajo (i)/Estación (j)	1 ...	J
l ...	P <sub>l,1</sub>	P <sub>l,J</sub>
m	P <sub>m,1</sub>	P <sub>m,J</sub>

donde: i es el número que se asigna al tipo de producto

j.- es el número que se asigna al número de la estación de trabajo del sistema

P<sub>i,j</sub>- Se calcula mediante la división de a<sub>i</sub> entre λ<sub>j</sub>. Esta es la probabilidad de que un trabajo del tipo i se encuentre en la estación j.

**Tabla 5. Probabilidades de rutas**

En esta tabla se trata de determinar las probabilidades asociadas a las diferentes rutas de los trabajos en el sistema.

Tipo de trabajo (i)	Rutas	
Ruta 1	1	3
1	P <sub>1,1</sub> Cd <sub>1</sub>	P <sub>1,3</sub> Cd <sub>3</sub>
Ruta 2	5	8
2	P <sub>2,5</sub> Cd <sub>5</sub>	P <sub>2,8</sub> Cd <sub>8</sub>

En esta tabla se ilustra un ejemplo del cálculo de las probabilidades de ruta. Por ejemplo para el producto 1, la ruta 1 pasa por las estaciones de trabajo 1 y 3. En base a esta ruta se multiplican las P<sub>ij</sub> Cd<sub>j</sub>. Estas Cd<sub>j</sub>'s provienen de la tabla 1.

**Tabla 6.- Coeficientes de variación cruzados.**

Esta tabla tiene por objetivo mostrarnos las interacciones entre las estaciones de trabajo pertenecientes a una determinada ruta. El factor que se determina en la tabla es el factor Cd<sub>i,k</sub>, donde i es el número asignado del tipo de trabajo a procesar por el sistema de manufactura y k esta referido a la estación de trabajo correspondiente a la ruta específica del trabajo i. Se entiende que k es una función discreta de números enteros no negativos ascendentes y no necesariamente consecutivos. Se define como Cd<sub>i,k</sub>, a la siguiente ecuación:

$$Cd_{i,k} = P_{ik}Cd_k + Cn_{ik} \quad \text{Ecuación 1}$$

donde:

$$Cn_{ik} = (1 - P_{ik})(P_{ik} + (1 - P_{ik})Cd_{i, \text{estación anterior en la ruta}}) \quad \text{Ecuación 2}$$

Como se puede observar para conformar la tabla, es necesario calcular la primera Cd<sub>i,k</sub> para así poder calcular las subsecuentes, sabiendo que: Cd<sub>i,0</sub>=0. La tabla entonces queda conformada así:

Tipo de trabajo (i)	Rutas	
Ruta 1	1	3
1	Cd <sub>1,1</sub>	Cd <sub>1,3</sub>
Ruta 2	5	8
2	Cd <sub>2,5</sub>	Cd <sub>2,8</sub>

**Tabla 7.- Coeficientes de variación integrados de las llegadas de trabajos de todo tipo a cada una de las estaciones de trabajo del sistema (Ca<sub>j</sub>).**

Ca<sub>j</sub> representa el coeficiente de variación de la tasa media de llegadas a la estación de trabajo j del sistema, de trabajos de todo tipo cuya ruta de secuencia de proceso se encuentre con esta estación j. Este es el objetivo final de las tablas anteriores, ya que este parámetro será fundamental para determinar el estado inicial del sistema en cuanto a las colas delante de cada una de las estaciones de trabajo, tanto para la optimización del inventario en proceso (OIP), como para el balanceo de líneas.

El procedimiento para obtener estos coeficientes de variación se basa en modificar la tabla 6, multiplicando las C<sub>i,k</sub> por sus correspondientes a<sub>i</sub>'s extraídas de la tabla #2. Para determinar Ca<sub>j</sub> se aplica la siguiente ecuación:

$$Ca_j = (\sum_{i=1, m} a_i Cd_{i,j}) / \lambda_j \quad \text{Ecuación 3}$$

donde λ<sub>j</sub> se obtiene de la tabla 3.

Tabla 8.- Determinación del inventario en proceso inicial de equilibrio

Para la determinación del inventario en proceso inicial de equilibrio se empieza generando la siguiente tabla:

Estación de trabajo	$\rho_j = \lambda_j / \mu_j$	B	$L_j$	Inventario en proceso = $L_j v_j$
1 ...				
J				

donde:

$$g(\rho_j, C_{aj}, C_{sj}) = \exp\{-2(1-C_{aj})(1-\rho_j)\} / (3(C_{aj} + C_{sj})\rho_j) \quad \text{si } C_{aj} \leq 1$$

$$g(\rho_j, C_{aj}, C_{sj}) = 1 \quad \text{si } C_{aj} > 1 \quad \text{Ecuación 4}$$

$$L_j = \rho_j + (\rho_j^2 (C_{aj} + C_{sj}) g(\rho_j, C_{aj}, C_{sj})) / (2(1-\rho_j)) \quad \text{Ecuación 5}$$

Con esto se conoce el estado inicial del sistema en cuanto al inventario en proceso en equilibrio. Para optimizar el inventario en proceso, en donde el objetivo es disminuir este inventario mediante la adición de capacidad adicional a las estaciones de trabajo del sistema, se debe considerar el costo de capital involucrado en las adiciones de capacidad. El proceso se basa en determinar la estación de trabajo que primero necesita la adición de capacidad y que en mayor medida contribuye a disminuir el inventario en proceso.

Por otro lado es necesario determinar la funcionalidad  $F_j(\mu_j)$ , que se refiere al costo de capital necesario para incrementar la capacidad de procesamiento de la estación de trabajo j. De acuerdo a la experiencia de los autores del artículo, esta función suele ser cuadrática, o sea dependiente de  $\mu_j^2$ .

Para determinar la estación de trabajo con mayor contribución se necesita derivar la ecuación 5 con respecto a  $\mu_j$  así como también se deriva la ecuación  $F_j(\mu_j)$ . Para derivar la ecuación 5 se considera que  $C_{aj}$  y  $C_{sj}$  son constantes para cambios pequeños de  $\mu_j$ .

$$L_j' = -1 + ((C_{aj} + C_{sj})(2\rho_j - \rho_j^2) / (2(1-\rho_j)^2)) \exp\{-2(1-C_{aj})(1-\rho_j)\} / (3(C_{aj} + C_{sj})\rho_j) \{2(1-C_{aj}) / (3(C_{aj} + C_{sj}))\} (1/\rho_j^2)} \quad \text{Ecuación 6}$$

$$(-\lambda_j / \mu_j)$$

Tabla 9 Determinación de la estación de trabajo a la que hay que agregar capacidad

Estación de trabajo	$L_j'$	$F_j'(\mu_j)$	$PI = -v_j L_j / F_j'(\mu_j)$	$W_j = v_j L_j$
1 ...				
J				
				$W = \sum W_j$

donde:

$W_j$ .-Es el inventario en proceso delante de la estación de trabajo j.

$W$ .- Total de inventario en proceso del sistema

$PI$ .- Parámetro indicador de la estación de trabajo a la cual hay que adicionar capacidad.

La tabla se maneja buscando primero la estación de trabajo con un mayor PI. Se le incrementa su capacidad de procesamiento ( $\mu_j$ ), se calculan  $L_j$  y  $L_j'$  considerando que  $C_{sj}$  y  $C_{aj}$  se mantienen constantes y se vuelve a calcular  $W$  con la tabla 9. Las iteraciones se siguen haciendo hasta que  $W = W^T$ , donde  $W^T$  es el inventario en proceso final deseado u objetivo. También se pueden parar las iteraciones cuando el capital disponible para inversión, se acaba.