

33
2Ej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ACERCA DE LAS
CORTADURAS EN UNA RED"



T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C A
P R E S E N T A :

SILVIA ZAVALA BETANZOS



DIRECTOR DE TESIS
MAT. AGUSTIN CANO GARCES

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"ACERCA DE LAS CORTADURAS EN UNA RED"

realizado por SILVIA ZAVALA BETANZOS

con número de cuenta 6808716-4 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

MAT. JESUS AGUSTIN CANO GARCES

Propietario

Propietario

Suplente

Suplente

M. en I. O. MARIA DEL CARMEN HERNANDEZ AYUSO

M. en C. BEATRIZ RODRIGUEZ FERNANDEZ

MAT. MARGARITA ELVIRA CHAVEZ CANO

M. en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

M. del Carmen Hdz Ayuso
Beatriz Rodriguez Fernandez
M. Margarita Elvira Chavez Cano
Jose Antonio Flores Diaz

Hay ciertas cosas que nuestra era necesita y ciertas cosas que debe evitar. Necesita compasión y un deseo de que la humanidad deba ser feliz, necesita el deseo de conocimiento y la determinación para evitar mitos agradables, necesita, sobre todo, esperanza valerosa y un impulso para la creatividad. Las cosas que debe evitar y que la han traído al borde de la catástrofe, son crueldad, envidia, voracidad, competitividad, búsqueda de la certeza subjetiva irracional y lo que los Freudianos llaman el deseo de muerte.

La raíz del asunto es una materia muy simple y pasada de moda, una materia tan simple que estoy casi avergonzado de mencionarla, por miedo a la sonrisa burlona con la que los sagaces cínicos recibirán mis palabras. La materia a la que me refiero -por favor, perdónenme por mencionarlo- es amor, amor cristiano o compasión. Si tu lo sientes, tienes un motivo de existencia, una guía de acción, una razón para darte valor, una necesidad imperativa de honestidad intelectual. Si tu sientes esto, tienes lo que cualquiera necesitaría a manera de religión. Aunque no puedas encontrar felicidad, nunca conocerás la profunda desesperación de aquellos cuya vida no tiene un objetivo y está vacía de propósito; porque siempre habrá algo que puedas hacer para disminuir la tremenda suma de miseria humana.

Lo que quiero subrayar es que la clase de desesperación letárgica la cual, es ahora no poco común, es irracional. La humanidad esta en la posición de un hombre escalando un precipicio difícil y peligros, en cuya cima hay una meseta de

praderas de montañas deliciosas. Con cada paso que él sube, su caída, si él cae, llega a ser más terrible; con cada paso que cansancio aumenta y la subida crece más difícil. Al final hay solamente un paso más a ser dado, pero el escalador no lo sabe, porque él no puede ver más allá de las salientes rocas por encima de su cabeza. Su extenuación, es tan completa que él no quiere otra cosa, si no, descansar. Si él se deja ir encontrará descanso en la muerte. La esperanza lo llama: "Un esfuerzo más - quizás sea el último necesitado." La ironía réplica: "Muchacho tonto! No has estado escuchando a la esperanza todo este tiempo, y mira donde te ha traído." El optimismo dice: "Mientras haya vida hay esperanza." El pesimismo se queja: "Mientras haya vida hay dolor." ¿Hará el exhausto escalador un esfuerzo más?, o ¿se dejará hundir dentro del abismo? En unos pocos años aquellos de nosotros que estemos todavía vivos conoceremos la respuesta.

"El Impacto de la Ciencia en la Sociedad,"

Por Bertrand Russell.

1952.

A mis Padres:
Carlos Zavala López
y Francisca Betanzos Ruiz

A mis hermanos:

Carlos y Teresa

Emma

Eva y Arturo

Julia

Joel y Carmen

Lourdes

A mis sobrinos:

Edgar y Billie Jo

Myrna Olivia

Emma

Julia

Virginia

Eva

Arturo

Mary Carmen

Silvia

Carlos

Joel

Francisco Javier

Mario Alberto

Wendy Stephanie

Debbie Cassani

.....al enamorado
que por vez primera
enciende la luz de lo apagado.

"Entre los individuos
como entre las naciones
el respeto al derecho ajeno
es la Paz."

Benito Juárez.
"Benemérito de las Américas"

AGRADECIMIENTO

Agradezco al Mat. Agustín Cano Garcés la dirección de este trabajo, a M. en I. O. Carmen Hernández Ayuso, a M. en C. Beatriz Rodríguez Fernández, a Mat. Margarita Chavez Cano y al M. en C. José Antonio Flores la atención y comentarios que me ayudaron a una mejor presentación de esta tesis.

Agradezco la atención y valiosa ayuda que me fue proporcionada por el personal administrativo del Departamento de Matemáticas, del Consejo Técnico de Matemáticas y de la Sección Escolar de la Facultad de Ciencias.

Agradezco al Dr. Alberto Barajas Celis sus enseñanzas, consejos y estímulos recibidos por mí al inicio de mis estudios profesionales.

Agradezco al Mat. Saúl Pérez y al M. en C. Sergio Hernández la oportuna orientación que me dieron para realizar este trabajo.

Agradezco infinitamente a Mario el haberme proporcionado el tema así como gran parte del material empleado para desarrollar este trabajo.

Agradezco a los, por mí, extrañados compañeros, los momentos felices de estudio compartidos juntos y a todos los profesores que me impartieron su conocimiento.

Agradezco finalmente a la Universidad Nacional Autónoma de México la oportunidad que me dio de adquirir conocimiento y así ampliar mi criterio.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	3
I. GRÁFICAS.	
1.1 Gráficas y Subgráficas.....	4
1.2 Árboles.....	16
1.3 Gráficas Dirigidas.....	22
II. REDES.	
2.1 Concepto de Red.....	26
2.2 Flujos.....	29
2.3 Cortaduras.....	37
2.4 Teorema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima..	41
III. PROBLEMAS.	
3.1 El problema de la Mochila (PM).....	51
3.2 El Problema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima (PFM-CM).....	53
3.3 Un Caso Especial del (PM) y (PFM-CM).....	54
IV. ÁRBOL DE CORTADURA.	
4.1 Árbol de Cortadura de Gomory y Hu (G-H).....	59
4.2 Un Ejemplo.....	66
4.3 Árbol de Cortadura G-H y Cortadura Mínima de una Red.....	67

V. EL PROBLEMA DE LA CORTADURA CIRCULAR.

5.1 El Problema de la Cortadura Circular.....	71
5.2 Cortaduras de Árbol.....	72
5.3 Lema de las Cortaduras Cruzadas.....	79
5.4 Gráfica de Orden Parcial (GOP).....	86
5.5 Los Arboles (G-M) Reducidos y la (GOP).....	94
5.6 Ejemplos.....	100

VI. ALGORITMO DE REDUCCIÓN.

6.1 Cortaduras Circulares Locales Mínimas.....	106
6.2 Descripción del Algoritmo.....	108
6.3 Algoritmo de Reducción.....	110
6.4 Un Ejemplo.....	113
6.5 Demostración de la Validez del Algoritmo....	115
6.6 Ejemplos.....	117

CONCLUSIÓN.....	123
-----------------	-----

TABLA DE FIGURAS.. ..	125
-----------------------	-----

BIBLIOGRAFÍA.....	127
-------------------	-----

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta el problema de la cortadura circular mínima, la teoría en que se basa un algoritmo para determinar una solución dentro de la clase de las cortaduras circulares locales mínimas explicando la diferencia entre ambas clases y el algoritmo mismo.

El problema de la cortadura circular mínima consiste en: dada una red $(V(N), A(N), \Psi_N, c_N)$ donde cada nodo V_i tiene asociado un peso w_i , seleccionar un subconjunto $X \subset V(N)$ con $V_i \in X$ y $V_n \in \bar{X}$, tal que, $\sum_{V_i \in X} w_i \leq M$, siendo M una constante dada y $\sum_{V_i \in X, V_j \in \bar{X}} c_{ij}$ sea mínima.

Para desarrollar este trabajo, en el Capítulo I se presentan algunos conceptos de Teoría de Gráficas, necesarios para el desarrollo de la Teoría de Redes presentada en el Capítulo II y por ser el problema aquí tratado un caso especial del problema de la Mochila y del problema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima el Capítulo III presenta el planteamiento matemático de ellos.

En los Capítulos IV y V se desarrolla la teoría que justifica al algoritmo, dando técnicas para reducir el tamaño del problema, al disminuir el número de cortaduras candidatas a ser la solución y al condensar, bajo ciertas condiciones, algunos nodos.

En el Capítulo VI, se plantea el algoritmo, se demuestra su validez y se da un ejemplo. Por último, se presenta la conclusión de este trabajo.

CAPÍTULO 1

GRÁFICAS

Introducción: En este Capitulo se presentan algunos conceptos de la Teoría de Gráficas empleados en los Capítulos siguientes, tales como, componentes de una gráfica, arboles, digráficas, camino elemental y cortaduras, así como, los conceptos necesarios para definirlos.

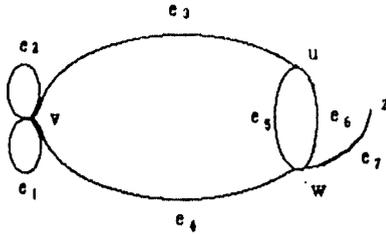
1.1. Gráficas y Subgráficas.

Definición 1.1.-Una GRÁFICA G es una terna $(V(G), E(G), \Psi_G)$ formada por un conjunto no vacío $V(G)$ de vértices (o nodos, o puntos), un conjunto $E(G)$ de aristas (o arcos, o líneas), ajeno a $V(G)$ y una función de incidencia Ψ_G que asocia con cada arista de $E(G)$ un par no ordenado de vértices (No necesariamente distintos) que pertenecen al conjunto $V(G)$.

Así, tenemos que si $e \in E(G)$ y $u, v \in V(G)$, y si $\Psi(e) = (u, v)$ se dice que la arista e une al vértice u con el vértice v , y los vértices u y v son llamados los EXTREMOS de la arista e .

A la arista (u, v) también se le representa como uv .

La Figura 1 muestra una gráfica.



$V(G) = \{u, v, w, z\}$
 $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$
 $\Psi(e_1) = vv \quad \Psi(e_2) = vv \quad \Psi(e_3) = vu \quad \Psi(e_4) = vw \quad \Psi(e_5) = uw \quad \Psi(e_6) = uw \quad \Psi(e_7) = wz$

FIGURA 1

Se dice que los extremos u y v de una arista e son **INCIDENTES** en la arista e , así como la arista e es incidente con sus extremos u y v , con $e \in E(G)$ y $u, v \in V(G)$.

No hay una única forma de representar gráficas, la posición relativa de puntos representando vértices y líneas representando aristas no tiene significado. El diagrama de una gráfica solamente representa la relación de incidencia mantenida entre sus vértices y sus aristas.

La Figura 2 muestra otra representación de la gráfica de la Figura 1.

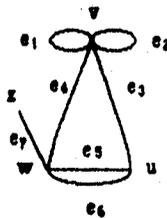


FIGURA 2

Si se tiene $e \in E(G)$ $e = (u, v)$, con $u, v \in V(G)$ incidentes en e , se dice que u y v son VÉRTICES ADYACENTES. Si $e_1 = (u, v)$ y $e_2 = (v, w)$ con e_1 y e_2 incidentes en v donde $e_1, e_2 \in E(G)$ y $u, v, w \in V(G)$ se dice que e_1 y e_2 son ARISTAS ADYACENTES.

Una arista $e \in E(G)$ con $v \in V(G)$ de la forma $e = (v, v)$ - con idénticos extremos - se dice que es un RIZO.

Así en la Figura 1, tenemos:

- w, z son extremos de e_1 .
- w, z son incidentes en e_7 .
- w, z son adyacentes.
- e_6, e_7 son incidentes en w .
- e_6, e_7 son adyacentes.
- e_1, e_7 son rizos.

Una gráfica G es una GRÁFICA FINITA, si $V(G)$ y $E(G)$ son conjuntos finitos. Una gráfica G , tal que, $v \in V(G)$ con v único elemento de $V(G)$ es llamada una GRÁFICA TRIVIAL, todas las demás son llamadas GRÁFICAS NO TRIVIALES. Una gráfica G es llamada una GRÁFICA SIMPLE si no contiene aristas $e_1, e_2, e_3 \in E(G)$, tales que, $e_1 = (v, v)$, es decir, e_1 es un rizo y $e_2 = (u, v) = e_3 = (u, v)$ con $u, v \in V(G)$, es decir, existen dos aristas uniendo el mismo par de vértices. Las gráficas de las Figuras 1 y 2 no son simples. La Figura 3 muestra una gráfica simple.

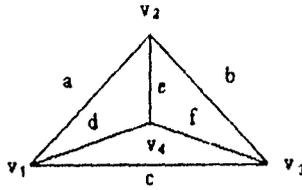


FIGURA 3

Denotaremos siempre a una gráfica con la letra G y con los símbolos $r(G)$ y $s(G)$ al número de elementos de los conjuntos $V(G)$ y $E(G)$ respectivamente. En lugar de $V(G)$, $E(G)$, $r(G)$ y $s(G)$, escribiremos únicamente V , E , r y s .

Una gráfica simple G , tal que, para cada par de vértices distintos $V_i, V_j \in V$ existe siempre una arista $e_{ij} = (V_i, V_j)$ con $e_{ij} \in E$ es llamada una **GRÁFICA COMPLETA**. Una gráfica completa de n vértices se denota por K_n . Una representación de K_3 se da en la Figura 4.

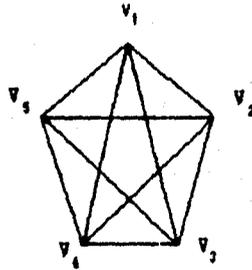


FIGURA 4

Una gráfica G es llamada una **GRÁFICA VACÍA**, si $E = \emptyset$. Una gráfica G es llamada una **GRÁFICA BIPARTITA**, si se tiene una partición de V en dos subconjuntos X e Y , tales que, para cada

$e_{ij} \in E$ con $e_{ij} = (X_i, Y_j)$ se tiene que $X_i \in X$ y $Y_j \in Y$. A tal partición (X, Y) , se le llama BIPARTICION de la gráfica G (Figura 5).

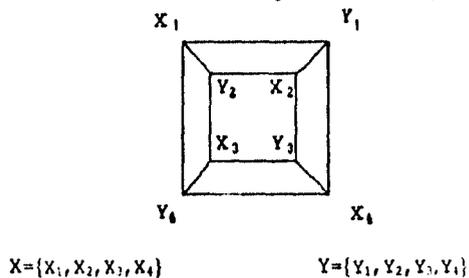


FIGURA 5

Una gráfica G es llamada una GRÁFICA BIPARTITA COMPLETA si G es una gráfica simple bipartita con bipartición (X, Y) , tal que, para toda $X_i \in X$ existen siempre aristas $e_{ij} = (X_i, Y_j)$ para toda $Y_j \in Y$; si $|X| = m$ y $|Y| = n$, tal gráfica se denota por $K_{m,n}$. La Figura 6 es una representación de $K_{3,3}$.

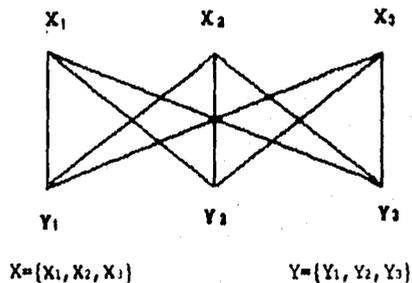


FIGURA 6

Una gráfica H es una SUBGRÁFICA de la gráfica G , si se tiene que $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ siendo Ψ_H la restricción de Ψ_G a $E(H)$ y escribimos $H \subseteq G$. Cuando $H \subseteq G$, pero $H \neq G$, escribimos $H \subset G$ y

decimos que la gráfica H es una SUBGRÁFICA PROPIA de la gráfica G . Si H es una subgráfica de la gráfica G entonces, G es una SUPERGRÁFICA de H .

Una GRÁFICA PARCIAL de G es una gráfica H con $V(H)=V(G)$ y $E(H)\subseteq E(G)$ (Figura 8). Al eliminar de $E(G)$ todas las aristas de la forma $e_{ij}=(V_i, V_j)$ y, si se tiene que para cada $V_i \neq V_j$ con $V_i, V_j \in V$, existe una única $e_{ij} \in E$ tal que, $e_{ij}=(V_i, V_j)$ obtenemos una gráfica parcial de la gráfica G llamada la GRÁFICA SIMPLE IMPLÍCITA de G .

La Figura 7 muestra la gráfica simple implícita de la gráfica dada en la Figura 1.

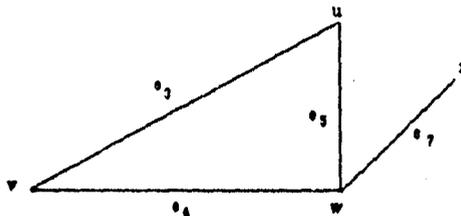


FIGURA 7

La subgráfica H con conjunto de vértices $V'(H)\subseteq V(G)$ y conjunto de aristas $E'(H)\subseteq E(G)$, tal que, si $e \in E'$ y $e=(u,v)$ entonces $u,v \in V'$, es llamada la SUBGRÁFICA INDUCIDA por el subconjunto de vértices V' y se denota por $G[V']$. La subgráfica inducida $G[V \setminus V']$ se denota por $G - V' = G_1$, es obtenida al eliminar de V todos los vértices de V' .

$$V(G_1) = \{v_i / v_i \in V \text{ y } v_i \notin V'\} = V \setminus V'$$

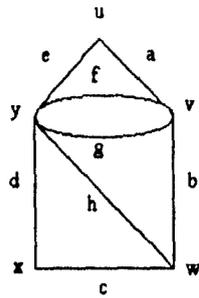
Si $V' = \{v\}$, escribimos $G - v$ en lugar de $G - \{v\}$ (Figura 8).

La subgráfica H con conjunto de aristas $E'(H) \subset E(G)$ y conjunto de vértices $V'(H) \subset V(G)$, tal que, si $e \in E'$ y $e = (u, v)$ entonces $u, v \in V'$, es llamada la SUBGRÁFICA ARISTA-INDUCIDA de la gráfica G y se denota por $G[E']$. La gráfica parcial obtenida a partir de la gráfica G con conjunto de aristas $E''(G) = [E \setminus E']$ se denota por $G - E' = G_1'$ y es obtenida al eliminar de $E(G)$ todas las aristas de E' .

$$E(G_1') = \{e_i / e_i \in E \text{ y } e_i \notin E'\} = E \setminus E'$$

La gráfica obtenida a partir de la gráfica G al agregar un subconjunto de aristas E' se denota por $G + E'$.

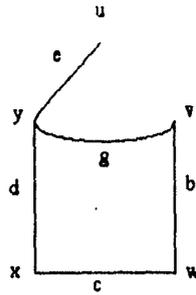
Si $E' = \{e\}$ escribimos $G - e$ y $G + e$, en lugar de $G - \{e\}$ y $G + \{e\}$ respectivamente (Figura 8).



GRÁFICA G

$$V(G) = (u, v, w, x, y)$$

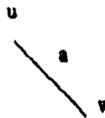
$$E(G) = (a, b, c, d, e, f, g, h)$$



H GRÁFICA PARCIAL DE G

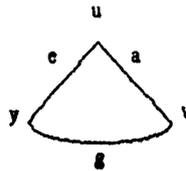
$$V(H) = (u, v, w, x, y) = V(G)$$

$$E(H) = (b, c, d, e, g) \subset E(G)$$



x .

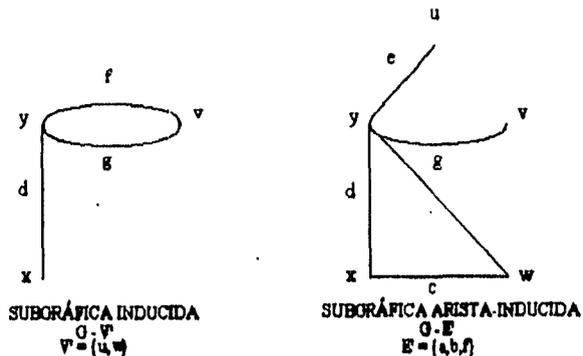
SUBGRÁFICA INDUCIDA
 $G[V]$
 $E = (a, v, x)$



x ——— c ——— w

SUBGRÁFICA ABSTA-INDUCIDA
 $G[E]$
 $E = (a, c, g)$

FIGURA 8



Continuación FIGURA 8

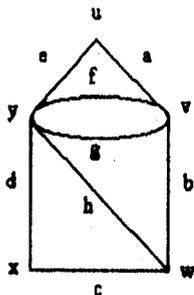
Sean G_1 y G_2 dos subgráficas de la gráfica G , decimos que son **SUBGRÁFICAS AJENAS**, si no tienen vértices en común y son **SUBGRÁFICAS ARISTA-AJENAS**, si no tienen aristas en común. La **UNIÓN**, $G_1 \cup G_2$ (o bien $G_1 + G_2$), es la subgráfica G_0 con conjunto de vértices $V'(G_0) = V(G_1) \cup V(G_2)$ y conjunto de aristas $E'(G_0) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Si las subgráficas G_1 y G_2 tienen al menos un vértice en común, definimos su **INTERSECCIÓN** $G_1 \cap G_2$ como la subgráfica G_i con conjunto de vértices $V''(G_i) = V(G_1) \cap V(G_2)$ y conjunto de aristas $E''(G_i) = E(G_1) \cap E(G_2)$.

Una **CADENA** W en la gráfica G es una secuencia finita no nula $W = V_0, e_1, V_1, e_2, V_2, \dots, e_k, V_k$, cuyos términos son alternadamente vértices y aristas, tales que, para $1 \leq i \leq k$, los extremos de e_i son V_{i-1} y V_i .

Decimos que W es una cadena de V_0 a V_k o una (V_0, V_k) cadena también denotada como una (V_0, V_k) - W cadena. Los vértices V_0 y V_k son llamados el ORIGEN y el TERMINO de W , respectivamente, los vértices V_1, V_2, \dots, V_{k-1} son llamados los VÉRTICES INTERNOS de W y el entero k es llamado la LONGITUD de W .

En una gráfica simple una cadena $V_0, e_1, V_1, \dots, e_k, V_k$ está determinada por la secuencia de sus vértices, es decir, por $V_0, V_1, V_2, \dots, V_k$.

Si las aristas e_1, e_2, \dots, e_k de una cadena son distintas W es llamada una CADENA SIMPLE, en este caso, la longitud de W es $l(W)=k$. Si además los vértices de la cadena simple W son distintos, entonces W es llamada una CADENA ELEMENTAL (Figura 9).



CADENA : u, a, v, f, y, f, v, g, y, h, w, b, v
 CADENA SIMPLE : w, c, x, d, y, h, w, b, v, g, y
 CADENA ELEMENTAL: x, c, w, h, y, e, u, a, v

FIGURA 9

Dos vértices $V_0, V_k \in V(G)$ se dice que están CONECTADOS si existe una (V_0, V_k) -cadena elemental en la gráfica G . La conexión es una relación de equivalencia sobre $V(G)$. Por lo tanto existe una partición de V en subconjuntos no vacíos V'_1, V'_2, \dots, V'_w , tal que, los vértices V_0 y V_k están conectados, si y sólo si, $V_0, V_k \in V'_i$. Las subgráficas $G[V'_1], G[V'_2], \dots, G[V'_w]$ son llamadas los COMPONENTES de la gráfica G . Si G tiene exactamente un componente decimos que G es una GRÁFICA CONEXA, de otra manera G es una GRÁFICA NO CONEXA. Denotamos por $w(G)$ al número de componentes de la gráfica G (figura 10).

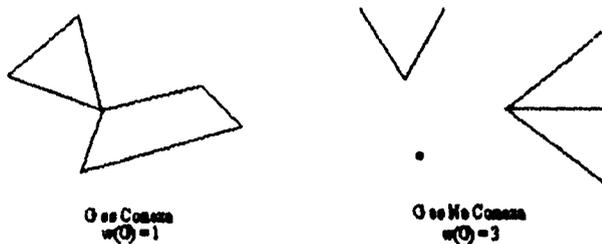
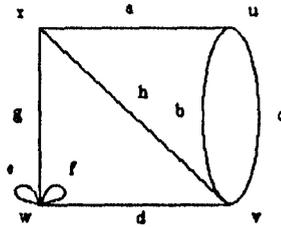


FIGURA 10

Una cadena W es un CICLO CERRADO si $k > 0$ y $V_0 = V_k$.

Un ciclo cerrado que no tiene aristas repetidas es llamado un CICLO SIMPLE, y un ciclo simple cuyo origen y vértices internos son distintos es llamado un CICLO ELEMENTAL (Figura 11).



CICLO CERRADO

: x, a, u, c, v, b, u, a, x

CICLO SIMPLE

: u, c, v, d, w, f, w, g, x, h, v, b, u

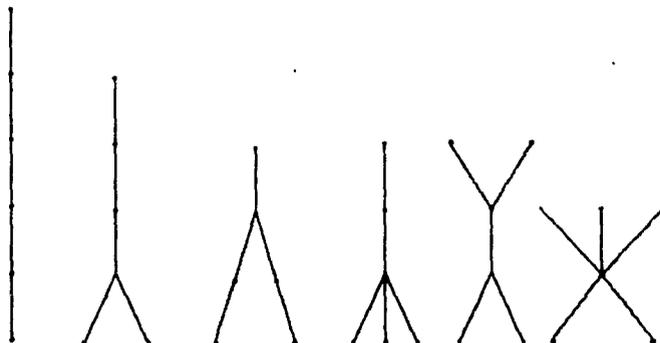
CICLO ELEMENTAL

: x, a, u, b, v, h, x

FIGURA 11

1.2. Árboles.

Una gráfica G que no contiene ciclos, es llamada una GRÁFICA ACÍCLICA. un ÁRBOL T es una GRÁFICA ACÍCLICA CONEXA.



ARBOLES DE 6 VÉRTICES

FIGURA 12

Teorema 1.1.- En un árbol cualesquiera dos vértices están conectados por una única cadena elemental.

Demostración:(Figura 13). Por contradicción, sea T un árbol, supongamos que existen dos (u,v) -cadenas elementales distintas P_1 y P_2 en T , puesto que $P_1 \neq P_2$ sea $e=(x,y)$ con $e \in P_1$ y $e \notin P_2$, entonces la gráfica $(P_1 \cup P_2) - e$ es claramente conexa y además contiene una (x,y) -cadena elemental P , entonces $P+e$ es un ciclo en una gráfica acíclica $T \setminus \{e\}$.

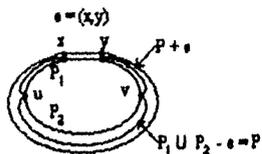


FIGURA 13

Podemos observar en la Figura 12 que todos los árboles de 6 vértices tienen 5 aristas, en general, tenemos:

Teorema 1.2.- Si T es un árbol de r vértices entonces el número de aristas s de T es $s = r - 1$.

Demostración: Por inducción sobre r ,

Sea $r = 1$, entonces,

$$T \approx K_1 \text{ y } s = 0 = 1 - 1 = r - 1$$

Lo suponemos cierto para $r - 1$ y lo demostramos para r .

Sea T un árbol con r vértices, tal que, $r \geq 2$.

Sea $(u, v) \in E(T)$, entonces $T - (u, v)$ no contiene una (u, v) -cadena elemental, dado que, (u, v) es la única (u, v) -cadena elemental de T , (Teorema 1.1) por lo tanto, $T - (u, v)$ es no conexa y se tiene que si,

$$e \in E(T) \Rightarrow w(T) \leq w(T - e) \leq w(T) + 1$$

entonces, si $e = (u, v)$,

$$w(T - (u, v)) = w(T) + 1 = 1 + 1 = 2$$

Los componentes T_1 y T_2 de $T-(u,v)$ son acíclicos y por lo tanto son árboles, más aún, cada uno con menos de r vértices.

Entonces por hipótesis de inducción tenemos que:

$$s(T_i) = r(T_i) - 1 \text{ para } i=1,2$$

entonces,

$$\begin{aligned} s(T) &= s(T_1) + s(T_2) + 1 \\ &= (r(T_1) - 1) + (r(T_2) - 1) + 1 \\ &= r(T_1) + r(T_2) - 1 \\ &= r(T) - 1 \quad \square \end{aligned}$$

Una ARISTA DE CORTE de la gráfica G es una arista $e \in E$, tal que, $w(G-e) > w(G)$ (Figura 14).

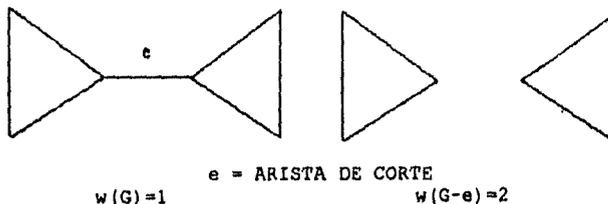


FIGURA 14

Sean los subconjuntos $S, \bar{S} \subset V$ donde $\bar{S} = V \setminus S$ definimos al conjunto (S, \bar{S}) como:

$$(S, \bar{S}) = \{e_{ij} / \text{si } e_{ij} = (V_i, V_j) \text{ entonces } V_i \in S \text{ y } V_j \in \bar{S}\}$$

Una CORTADURA de una gráfica G es un subconjunto $K \subset E$ de la forma $K = (S, \bar{S})$.

Se tiene que si la gráfica G es conexa entonces la gráfica $G-K$ es no conexa.

Una cortadura K es llamada una CORTADURA MINIMAL si, $e \in K$ y hacemos $K' = K - e$, entonces, la gráfica $G-K'$ es conexa. En la Figura 14 se muestra una cortadura y una cortadura minimal indicadas con líneas mas gruesas (Figura 15).

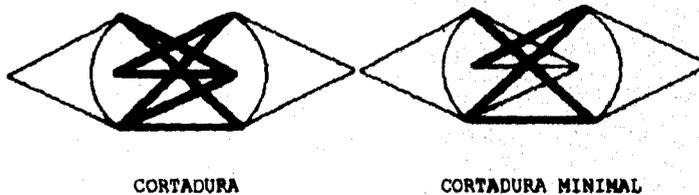


FIGURA 15

Un vértice $v \in V$ es un VÉRTICE DE CORTE si el conjunto E puede ser particionado en dos subconjuntos E_1 y E_2 no vacíos, tales que, las subgráficas inducidas $G[E_1]$ y $G[E_2]$ tienen al vértice v en común. Si la gráfica G no contiene rizados y es una gráfica no trivial, se dice que el vértice v es un vértice de corte, si y sólo si, $w(G-v) > w(G)$ (Figura 16).

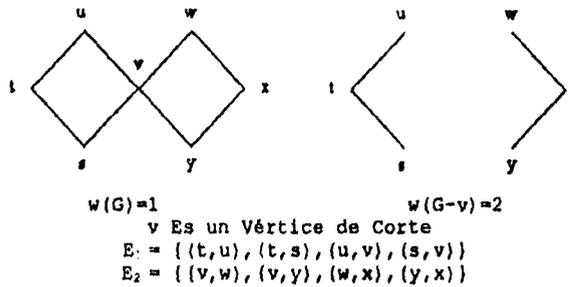


FIGURA 16

Una CORTADURA DE VÉRTICES de una gráfica conexa G es un subconjunto $V' \subset V$, tal que, la subgráfica inducida $G-V'$ es no conexa (Figura 17).

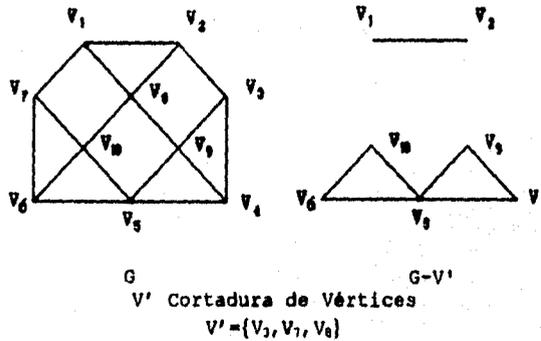
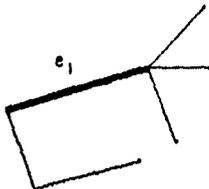
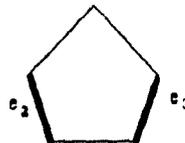


FIGURA 17

E' es una k -cortadura de arista si E' es un conjunto que consta de k elementos (Figura 18).



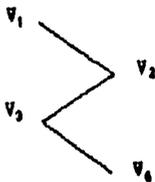
E_1 es una 1-cortadura de Arista
 $E_1 = \{e_1\}$



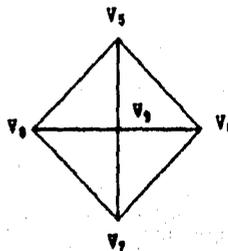
E_2 es una 2-cortadura de Arista
 $E_2 = \{e_2, e_3\}$

FIGURA 18

V' es una k -cortadura de vértices, si V' es un conjunto que consta de k elementos (Figura 19).



V_1 es una 2-cortadura de vértices
 $V_1 = \{v_2, v_3\}$



V_2 es una 3-cortadura de vértices
 $V_2 = \{v_5, v_7, v_4\}$

FIGURA 19

1.3. Gráficas Dirigidas.

En algunos problemas el concepto de gráfica no es el adecuado, por ejemplo, en los problemas de flujo de tráfico en donde es necesario saber qué caminos son de un sólo sentido y hacia donde es la dirección del tráfico permitido por ese camino.

Por lo que se ha introducido el concepto de gráfica dirigida o digráfica, en donde a cada arista se le asigna una orientación.

Definición 1.2.- Una GRÁFICA DIRIGIDA o DIGRÁFICA D , es una terna ordenada $(V(D), A(D), \Psi_D)$ formada por un conjunto no vacío $V(D)$ de vértices, un conjunto $A(D)$ de arcos y una función de incidencia Ψ_D , que asocia a cada arco de $A(D)$ un par ordenado de vértices (no necesariamente distintos) de $V(D)$.

$$\text{Si } A_{ij} \in A(D) \text{ y } V_i, V_j \in V(D) \rightarrow \Psi_D(A_{ij}) = (V_i, V_j)$$

Se dice que el arco A_{ij} une al vértice V_i con el vértice V_j , siendo los vértices V_i y V_j , el EXTREMO INICIAL y el EXTREMO FINAL del arco A_{ij} respectivamente.

Una digráfica D' es una SUBDIGRÁFICA de D , si $V(D') \subseteq V(D)$, $A(D') \subseteq A(D)$ y $\Psi_{D'}$ es la restricción de Ψ_D a $A(D')$.

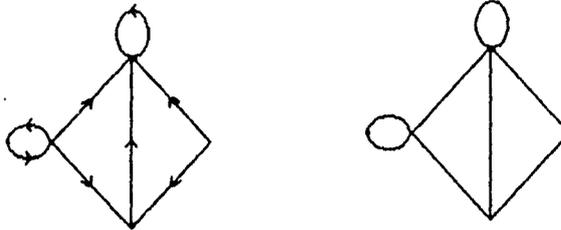
La terminología y notación empleadas con subdigráficas es similar a la dada para subgráficas.

A cada digráfica D se le asocia una gráfica G con el mismo conjunto de vértices y a cada arco de $A(D)$ le corresponde una

arista de $E(G)$ con los mismos extremos, esta gráfica es la GRÁFICA IMPLÍCITA de D .

Inversamente, a cada gráfica G , se le puede asignar una orientación en cada arista y se obtiene una digráfica que es llamada una ORIENTACIÓN de G .

Una digráfica se representa por el diagrama de su gráfica implícita y en cada arista una flecha apuntando hacia el extremo final de su arco correspondiente (Figura 20).



Digráfica D

Gráfica Implícita de D

FIGURA 20

Cada concepto que es válido para gráficas se aplica automáticamente a digráficas, aunque, hay muchos conceptos que involucran la noción de orientación, por lo que se aplican solamente a digráficas.

Un CAMINO W en D es una secuencia finita no nula $W=(V_0, A_1, V_1, \dots, A_k, V_k)$ cuyos términos son vértices y arcos alternadamente, tal que, para $i=1, 2, \dots, k$, el arco A_i tiene extremo final en V_i y

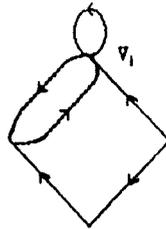
extremo inicial en V_{i-1} ; W es también representado por la secuencia de sus vértices $(V_0, V_1, V_2, \dots, V_k)$.

Un CAMINO SIMPLE, es un camino que no tiene arcos repetidos. Un CAMINO ELEMENTAL, es un camino simple que no tiene vértices repetidos.

Un CIRCUITO es un camino elemental cuyo vértice inicial es idéntico al vértice final.

Si existe un (V_i, V_k) -camino elemental en D , se dice que, el vértice V_k es alcanzable desde el vértice V_i . Dos vértices son DICONECTADOS, si cada uno es alcanzable desde el otro. La DICONEXIÓN, es una relación de equivalencia sobre el conjunto $V(D)$. Las subdigráficas $D[V'_1], D[V'_2], \dots, D[V'_n]$ inducidas por la partición $(V'_1, V'_2, \dots, V'_n)$ del conjunto $V(D)$ son llamadas los DICONEXIONES de D . Una digráfica D es DICONEXA, si tiene exactamente un dicomponente.

El GRADO HACIA ADENTRO de un vértice $V_i \in V(D)$ es denotado por $d^-(V_i)$ y es el número de arcos con extremo final en V_i . El GRADO HACIA AFUERA de V_i es denotado por $d^+(V_i)$ y es el número de arcos con extremo inicial en V_i . En la Figura 21 se da un ejemplo.



$$d^-(v_1) = 3$$

$$d^+(v_1) = 2$$

FIGURA 21

Una digráfica es una DIGRÁFICA ESTRICTA si no contiene rizos y no contiene dos arcos que tengan los mismos extremos y la misma orientación. La Figura 21 no representa una digráfica estricta.

CAPÍTULO 2

REDES

Introducción: En este Capítulo estudiaremos los conceptos de red, flujo y cortadura en una red; a continuación se presenta el Teorema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima donde se relacionan el flujo máximo y la cortadura mínima de una red. Para demostrar este Teorema Ford y Fulkerson desarrollaron el Algoritmo de Etiquetación con el que se obtiene una cortadura mínima. Este algoritmo es tomado como ejemplo en cuanto a procedimiento y presentación, para después, en el capítulo VI presentar el Algoritmo de Reducción tratado en este trabajo para obtener la cortadura circular local mínima o la cortadura circular mínima de una red.

2.1. Concepto de Red.

Definición 2.1.- Una RED N es una digráfica definida por una cuarteta ordenada $(V(N), A(N), \Psi_N, C_N)$, formada por un conjunto no vacío de vértices o nodos $V(N)$, un conjunto $A(N)$ de arcos, una función de incidencia Ψ_N , que asocia a cada arco del conjunto $A(N)$ un par ordenado de vértices del conjunto $V(N)$ y una función C_N definida sobre el conjunto de arcos $A(N)$, con valores reales llamada función de capacidad de la red N , cuyo valor sobre un arco $A_{ij} \in A(N)$, es llamado la CAPACIDAD del arco A_{ij} , teniéndose que, $c(A_{ij}) \geq 0$.

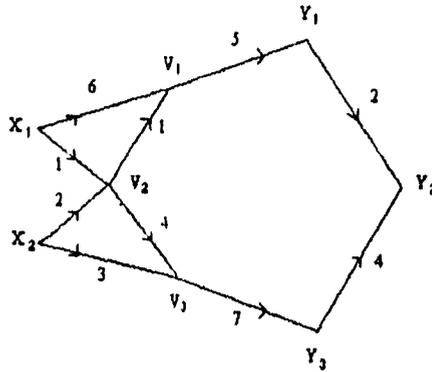
Se define a $V(N)$ como $V(N) = X(N) \cup I(N) \cup Y(N)$, donde $X(N)$ es un subconjunto no vacío de vértices llamados ORÍGENES, $Y(N)$ es un subconjunto no vacío de vértices ajeno a $X(N)$ llamados

DESTINOS e $I(N)$ es un subconjunto de vértices INTERMEDIOS entre los orígenes $X(N)$ y los destinos $Y(N)$.

Podemos visualizar a una red de transporte, es decir, los medios por los cuales las mercancías son transportadas desde sus centros de producción a sus mercados, como la definida anteriormente, donde $X(N)$ puede ser visto como los centros de producción donde se origina la mercancía, $I(N)$ como los centros de distribución intermedios de la mercancía a los diferentes mercados, y $Y(N)$ como los mercados o destinos finales.

Un arco puede ser visualizado como la ruta a seguir por un medio de transporte al transportar la mercancía desde un centro de producción hacia un centro de distribución intermedio o bien de un centro de distribución intermedio hacia un mercado o hacia un centro de producción. La capacidad de un arco puede ser vista como la cantidad máxima de mercancía que es posible transportar a través de él. E introduciendo el concepto de flujo en un arco lo podemos visualizar, como la cantidad de mercancía que es transportada a través del arco.

La Figura 22 muestra una red.



$$V(N) = \{X_1, X_2, V_1, V_2, V_3, Y_1, Y_2, Y_3\}$$

$$X(N) = \{X_1, X_2\} \quad I(N) = \{V_1, V_2, V_3\} \quad Y(N) = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$$

$$A(N) = \{ (X_1, V_1), (X_1, V_2), (X_2, V_2), (X_2, V_3), (V_1, V_2), (V_2, V_3), (V_1, Y_1), (V_2, Y_1), (V_2, V_3), (V_3, Y_2), (Y_1, Y_2), (Y_2, Y_3) \}$$

$$\begin{array}{lllll} c(X_1, V_1) = 6 & c(X_1, V_2) = 1 & c(X_2, V_2) = 2 & c(X_2, V_3) = 3 & c(V_1, V_2) = 1 \\ c(V_1, Y_1) = 5 & c(V_2, Y_1) = 2 & c(V_2, V_3) = 4 & c(V_3, Y_2) = 4 & c(V_3, Y_3) = 7 \\ c(Y_1, Y_2) = 2 & c(Y_2, Y_3) = 4 & & & \end{array}$$

FIGURA 22

Existen redes cuyos arcos no tienen dirección y se les llama
REDES ADIRECCIONALES.

2.2. Flujos.

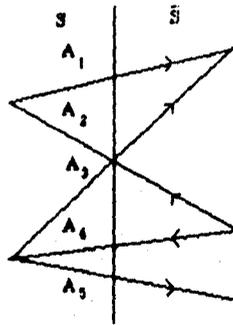
En una red N , sea $K \subset A(N)$. Si f es una función definida sobre el conjunto de arcos $A(N)$, que toma valores en el conjunto de los números reales, denotamos por:

$$f(K) = \sum_{A_i \in K} f(A_i)$$

Sea $S \subset V(N)$ y $\bar{S} = V \setminus S$, si $K = (S, \bar{S})$, (Figura 23) denotamos como:

$$f^+(S) = f(S, \bar{S})$$

$$f^-(S) = f(\bar{S}, S)$$



$$f^+(S) = f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) = f(S, \bar{S})$$

$$f^-(S) = f(A_4) + f(A_5) = f(\bar{S}, S)$$

FIGURA 23

Definición 2.2.- Un FLUJO en una red N es una función f definida sobre el conjunto de arcos $A(N)$ con valores en el conjunto de los números reales, tal que,

$$0 \leq f(A_{ij}) \leq c(A_{ij}) \quad \forall \quad A_{ij} \in A \quad (2.2.1)$$

$$y \quad f^-(V_i) = f^+(V_i) \quad \forall \quad V_i \in I \quad (2.2.2)$$

donde,

$f^-(V_i)$ es el flujo que entra al vértice V_i ,

$f^+(V_i)$ es el flujo que sale del vértice V_i .

La cota superior en la condición (2.2.1) es llamada la **RESTRICCIÓN DE CAPACIDAD**; ésta impone la restricción natural de que un flujo a través de un arco no puede exceder la capacidad del arco. La condición (2.2.2), es llamada la **CONDICIÓN DE CONSERVACIÓN** y requiere que para cualquier vértice intermedio, el flujo que entra a él, sea igual al flujo que sale de él.

Cada red tiene al menos un flujo, si definimos:

$$f(A_{ij}) = 0 \quad \forall \quad A_{ij} \in A$$

satisface las condiciones (2.2.1) y (2.2.2), éste es llamado el **FLUJO CERO** o **FLUJO NULO**.

En la Figura 24 en las parejas ordenadas, el primer elemento representa el flujo y el segundo elemento representa la capacidad del arco.

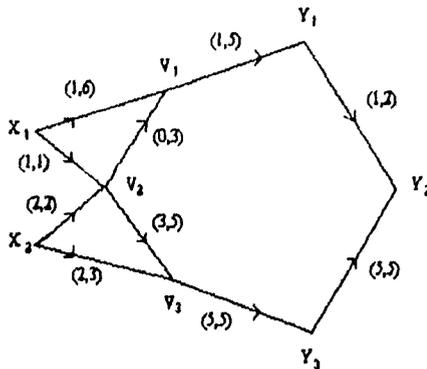


FIGURA 24

Definición 2.3.- Si S es un subconjunto de vértices de una red N y f un flujo de N , entonces:

$$f^+(S) - f^-(S)$$

es llamado el FLUJO RESULTANTE FUERA de S ,

$$f^-(S) - f^+(S)$$

es llamado el FLUJO RESULTANTE DENTRO de S .

Lema 2.1.- Para cualquier flujo f de una red N , el flujo resultante fuera de X es igual al flujo resultante dentro de Y , es decir:

$$f^+(X) - f^-(X) = f^-(Y) - f^+(Y)$$

Demostración: Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 f^+(X) - f^-(X) &= f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \\
 &= \sum_{A_{ij} \in (X, \bar{X})} f(A_{ij}) - \sum_{A_{ij} \in (\bar{X}, X)} f(A_{ij}) \\
 &= \sum_{A_{ij} \in (X, Y)} f(A_{ij}) + \sum_{A_{ij} \in (X, V)} f(A_{ij}) - \sum_{A_{ij} \in (V, X)} f(A_{ij}) - \sum_{A_{ij} \in (Y, X)} f(A_{ij}) \\
 &= \sum_{A_{ij} \in (X, Y)} f(A_{ij}) - \sum_{A_{ij} \in (Y, X)} f(A_{ij}) + \sum_{A_{ij} \in (X, V)} f(A_{ij}) - \sum_{A_{ij} \in (V, X)} f(A_{ij}) \quad (2.1.a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y, \\
f(Y) - f^*(Y) &= f(\bar{Y}, Y) - f(Y, \bar{Y}) \\
&= \sum_{A_{1j} \in (I, X, Y)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (Y, I, X)} f(A_{1j}) \\
&= \sum_{A_{1j} \in (I, Y)} f(A_{1j}) + \sum_{A_{1j} \in (X, Y)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (X, Y)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (Y, I)} f(A_{1j}) \\
&= \sum_{A_{1j} \in (I, Y)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (Y, I)} f(A_{1j}) + \sum_{A_{1j} \in (X, Y)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (Y, X)} f(A_{1j}) \quad (2.1.b) \\
&= \sum_{A_{1j} \in (X, Y)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (Y, X)} f(A_{1j})
\end{aligned}$$

Para que (2.1.a) y (2.2.b) sean iguales, se debe tener:

$$\begin{aligned}
&\sum_{A_{1j} \in (X, I)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (I, X)} f(A_{1j}) = \sum_{A_{1j} \in (I, Y)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (Y, I)} f(A_{1j}) \\
\text{es decir} \quad &\sum_{A_{1j} \in (X, I)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (I, X)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (I, Y)} f(A_{1j}) + \sum_{A_{1j} \in (Y, I)} f(A_{1j}) = 0 \\
&\sum_{A_{1j} \in (X, I)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (I, X)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (I, Y)} f(A_{1j}) + \sum_{A_{1j} \in (Y, I)} f(A_{1j}) = \sum_{A_{1j} \in (X, Y)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (Y, X)} f(A_{1j}) \\
&= f(\bar{I}, I) - f(I, \bar{I}) \\
&= f^*(I) - f(I) \\
&= \sum_{v \in I} f(v_i) - \sum_{v \in I} f^*(v_i) \\
&= \sum_{v \in I} (f(v_i) - f^*(v_i)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{A_{1j} \in (X, I)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (I, X)} f(A_{1j}) = \sum_{A_{1j} \in (I, Y)} f(A_{1j}) - \sum_{A_{1j} \in (Y, I)} f(A_{1j})$$

por lo tanto

$$f^*(X) - f^*(X) = f^*(Y) - f^*(Y) \square$$

Denotaremos al valor de un flujo f como:

$$\text{val } f = f^*(X) - f^*(X)$$

es decir, el valor del flujo resultante fuera de X . El valor del flujo indicado en la Figura 24 es $\text{val } f = 6$.

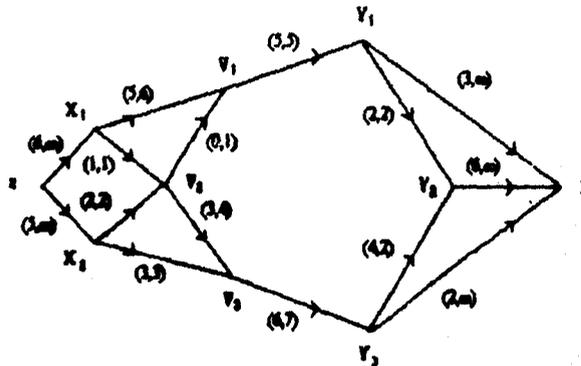
Definición 2.4. - f es un FLUJO MÁXIMO en una red N , si no existe un flujo f' en la red N , tal que:

$$\text{val } f' > \text{val } f$$

El problema de determinar un flujo máximo en una red arbitraria puede ser reducido al caso de redes que tienen un solo origen y un solo destino considerando lo siguiente:

Dada una red N construimos una nueva red N' de la siguiente manera:

- 1.- Añadimos dos vértices nuevos x, y a la red N .
- 2.- Unimos x a cada vértice en X , con un arco de capacidad ∞ .
- 3.- Unimos cada vértice en Y a y , con un arco de capacidad ∞ .
- 4.- Designamos al vértice x , como el vértice origen y, al vértice y como el vértice destino de la nueva red N' . La Figura 25, ilustra este procedimiento aplicado a la red de la Figura 24.



Si $V_i = X$, entonces $f'(x, V_i) = f'(V_i) - f(V_i) = 5 + 1 - 0 = 6 = f''(V_i) = f''(V_i)$

Si $V_i = Y$, entonces $f'(V_i, y) = f'(V_i) - f'(V_i) = 5 - 2 = 3$

$$f''(V_i) = f'(V_i) + f'(V_i, y) = 2 + 3 = 5$$

Así se obtienen:

$$\text{val } f' = f'(x) - f'(x) = \sum_{V_i \in N'} (f'(V_i) - f'(V_i)) = 5 + 1 + 2 + 3 = 11 = 6 + 5 =$$

$$= f''(x) - f''(x) = \text{val } f''$$

FIGURA 25

Teorema 2.1. - Si f es un flujo en N , tal que el flujo resultante fuera de cada vértice origen y dentro de cada vértice destino es no negativo entonces la función f' definida por:

$$f'(A_{ij}) = \begin{cases} f(A_{ij}) & \text{si } A_{ij} \in A(N) \\ f'(V_i) - f^-(V_i) & \text{si } A_{ij} = (x, V_i) \text{ con } V_i \in X(N) \\ f^-(V_i) - f'(V_i) & \text{si } A_{ij} = (V_i, y) \text{ con } V_i \in Y(N) \end{cases}$$

a) Es un flujo en N' y $\text{val } f' = \text{val } f$.

b) Un flujo en N' restringido a $A(N)$ es un flujo en N y tiene el mismo valor.

Demostración: Tenemos $V(N) = X(N) \cup I(N) \cup Y(N) = I(N')$, $x = X(N')$, $y = Y(N')$.

a) P. D. f' es un flujo.

i) Si $A_{ij} \in A(N)$ tenemos:

$$0 \leq f(A_{ij}) = f'(A_{ij}) \leq c(A_{ij})$$

y

$$f^-(V_i) = f'(V_i) \quad \text{para } V_i \in I(N)$$

ii) Si $A_{ij} = (x, V_i)$ tenemos:

$$0 \leq f'(A_{ij}) \leq c(A_{ij}) = \infty$$

como V_i es un vértice origen en N , entonces:

$$f^-(V_i) = f'(V_i) - f^-(V_i) + f^-(V_i)$$

$$= f'(V_i)$$

$$= f'^-(V_i)$$

iii) Si $A_i = (V, y)$ tenemos:

$$0 \leq f'(A_{ij}) \leq c(A_{ij}) = \infty$$

como V_i es un vértice destino en N , entonces:

$$\begin{aligned} f''(V_i) &= f'(V_i) - f'(V_i) + f'(V_i) \\ &= f'(V_i) \\ &= f''(V_i) \end{aligned}$$

Por i) ii) e iii) afirmamos que f' es un flujo en N' , pues se tiene:

$$0 \leq f'(A_{ij}) \leq c(A_{ij}) \quad \text{para } A_{ij} \in A(N')$$

$$f''(V_i) = f''(V_i) \quad \text{para } V_i \in I(N')$$

P. D. que $\text{val } f' = \text{val } f$

$$\begin{aligned} \text{val } f' &= f''(x) - f''(x) \\ &= f(x, V_i) - f(V_i, x) && \text{para toda } V_i \in X(N) \\ &= \sum_{V_i \in X(N)} (f'(V_i) - f''(V_i)) - 0 && \text{por definición de } f' \\ &= f'(X) - f''(X) \\ &= \text{val } f && \text{por definición de val } f. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\text{val } f' = \text{val } f$$

b) P.D. que un flujo f en N' restringido a $A(N)$ es un flujo en N con el mismo valor. Por construcción de N' tenemos que $A(N) \subset A(N')$ e $I(N) \subset I(N')$. Por ser f un flujo en N' tenemos,

$$0 \leq f(A_{ij}) \leq c(A_{ij}) \quad \text{para toda } A_{ij} \in A(N')$$

$$y \quad f'(V_i) = f''(V_i) \quad \text{para } V_i \in I(N')$$

como $A(N) \subset A(N')$ tenemos,

$$0 \leq f(A_{ij}) \leq c(A_{ij}) \quad \text{para toda } A_{ij} \in A(N) \quad (2.2.a)$$

como $I(N) \subset I(N')$ tenemos,

$$f^-(V_i) = f^-(V_i) \quad \text{para } V_i \in I(N) \quad (2.2.b)$$

Por (2.2.a) y (2.2.b) f es un flujo en N .

P. D. val f es igual para f restringido a $A(N)$.

$$\text{val } f = f^+(x) - f^-(x)$$

$$= f(x, V_i) - f(V_i, x)$$

$$= \sum (f^+(V_i) - f^-(V_i)) + 0 \quad \text{para toda } V_i \in X(N)$$

$$= f^+(X) - f^-(X)$$

$$= \text{val } f \quad \text{para } f \text{ restringido a } X(N) \quad \square$$

2.3. Cortaduras.

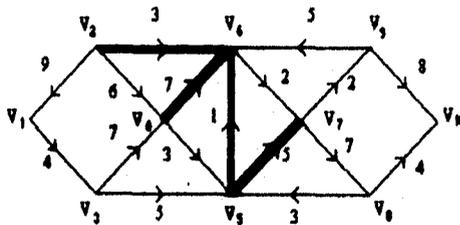
Definición 2.5.- Una CORTADURA K es un conjunto de arcos de N , con la propiedad de que todo camino elemental del origen V_1 al destino V_n , y incluye un arco de dicho conjunto, es decir, una cortadura es un conjunto desconectador de N .

Sea $S \subset V(N)$ y $\bar{S} = V \setminus S$ entonces $K = (S, \bar{S})$ con $V_1 \in S$, $V_n \in \bar{S}$.

La CAPACIDAD DE UNA CORTADURA K es la suma de las capacidades de los arcos que la forman.

$$\text{Cap } K = \sum_{A_{ij} \in K} c(A_{ij})$$

En la Figura 26, las líneas gruesas indican una cortadura con capacidad 16.



$$\text{cap } K = \sum_{A_{ij} \in K} c(A_{ij}) = 3 + 7 + 1 + 5 = 16$$

$K = (S, \bar{S})$, con $S = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ y $\bar{S} = \{V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}\}$

FIGURA 26

Lema 2.2.- Para cualquier flujo f y cualquier cortadura (S, \bar{S}) en N , se tiene:

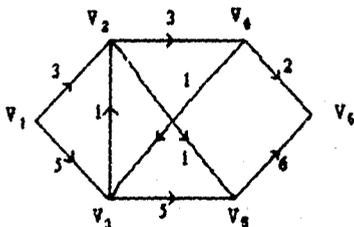
$$\text{val } f = f'(S) - f'(S)$$

Demostración: (Figura 27). Por las definiciones de flujo y de valor de un flujo, tenemos:

$$f'(V_i) - f'(V_i) = \begin{cases} \text{val } f & \text{si } V_i = V_1 \\ 0 & \text{si } V_i \in S \setminus \{V_1\} \end{cases}$$

sumando sobre S ,

$$\begin{aligned} f'(S) - f'(S) &= f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S) \\ &= \sum_{A_1 \in (S, \bar{S})} f(A_1) - \sum_{A_2 \in (\bar{S}, S)} f(A_2) \\ &= \sum_{V_i \in S} (f'(V_i) - f'(V_i)) \\ &= f'(V_1) - f'(V_2) + \sum_{V_i \in S \setminus \{V_1\}} (f'(V_i) - f'(V_i)) \\ &= f'(V_1) - f'(V_2) + 0 \\ &= \text{val } f \quad \square \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S &= (V_1, V_2, V_3) \quad \bar{S} = (V_4, V_5, V_6) \quad f'(S) = f(S, \bar{S}) = 3 + 5 + 1 = 9 \quad f'(S) = f(\bar{S}, S) = 1 \\ f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S) &= 9 - 1 = 8 \\ \sum_{V_i \in S} f'(V_i) &= f'(V_1) + f'(V_2) + f'(V_3) = 8 + 4 + 6 = 18 \\ \sum_{V_i \in S} f'(V_i) &= f'(V_1) + f'(V_2) + f'(V_3) = 0 + 4 + 6 = 10 \\ \sum_{V_i \in S} (f'(V_i) - f'(V_i)) &= 8 - 0 + 4 - 4 + 6 - 6 = 8 \quad \text{NÓTESE: } f'(S) \neq \sum_{V_i \in S} f'(V_i), \quad f'(S) \neq \sum_{V_i \in \bar{S}} f'(V_i) \end{aligned}$$

FIGURA 27

Por convención, llamaremos a un arco A_{ij} :

f -cero	si	$f(A_{ij})=0$
f -positivo	si	$f(A_{ij})>0$
f -no saturado	si	$f(A_{ij}) < c(A_{ij})$
f -saturado	si	$f(A_{ij})=c(A_{ij})$

Teorema 2.2.- Para cualquier flujo f y cualquier cortadura $K=(S, \bar{S})$ en N se tiene:

$$\text{val } f \leq \text{cap } K$$

Demostración: Por definición de flujo, tenemos:

$$f^+(S) \leq \text{cap } K \quad (2.3.a)$$

$$f^-(S) \geq 0 \quad (2.3.b)$$

del Lema 2.2, se tiene:

$$\text{val } f = f^+(S) - f^-(S)$$

substituyendo

$$\text{val } f \leq f^+(S) - 0 \leq \text{cap } K$$

La igualdad en (2.3.a) se lleva a cabo, si y sólo si, cada arco en (S, \bar{S}) es f -saturado, y la igualdad en (2.3.b) se cumple, si sólo si, cada arco en (\bar{S}, S) es f -cero.

Definición 2.6.- Una cortadura K en N es una CORTADURA MÍNIMA, si no existe una cortadura K' en N , tal que:

$$\text{cap } K' < \text{cap } K$$

Si f^* es un flujo máximo y \bar{K} una cortadura mínima, se tiene un caso especial del Teorema 2.2, es decir:

$$\text{val } f^* \leq \text{cap } \bar{K} \quad (2.2.3)$$

Corolario 2.1.- Sea f un flujo y K una cortadura en N , tal que $\text{val } f = \text{cap } K$, entonces, f es un flujo máximo y K es una cortadura mínima.

Demostración: Sea f^* un flujo máximo y \bar{K} una cortadura mínima, entonces:

$$\begin{aligned} & \text{val } f \leq \text{val } f^* \\ \text{y} & \quad \text{cap } \bar{K} \leq \text{cap } K \\ & \text{val } f \leq \text{val } f^* \leq \text{cap } \bar{K} \leq \text{cap } K \quad \text{por (2.2.3)} \end{aligned}$$

por hipótesis se tiene que

$$\text{val } f = \text{cap } K$$

entonces

$$\text{val } f = \text{val } f^*$$

y

$$\text{cap } \bar{K} = \text{cap } K$$

es decir, f es un flujo máximo y K una cortadura mínima \square

2.4 Teorema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima.

Definición 2.6.- Sea $C = (V_1, A_{11}, V_1, A_{12}, V_1, \dots, A_{n-m, n}, V_n)$ una cadena elemental de una red N . Definimos al arco $A_{i, i+1}$ como un ARCO HACIA ADELANTE de C si su extremo inicial es V_i y su extremo final es V_{i+1} . Y definimos al arco $A_{i-1, i}$ como un ARCO HACIA ATRÁS de C si su extremo inicial es V_i y su extremo final es V_{i-1} .

Definición 2.7.- Sea f un flujo en una red N , asociamos a cada cadena elemental C de N un entero no negativo $\iota(C)$ definido por:

$$\iota(C) = \min_{A_{ij} \in A(C)} \iota(A_{ij})$$

donde,

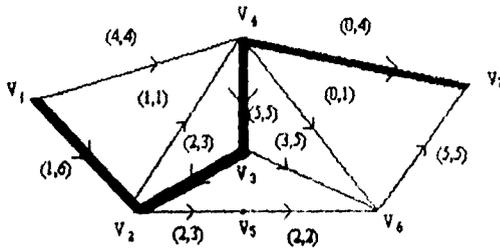
$$\iota(A_{ij}) = \begin{cases} c(A_{ij}) - f(A_{ij}) & \text{si } A_{ij} \text{ es un arco hacia adelante de } C. \\ f(A_{ij}) & \text{si } A_{ij} \text{ es un arco hacia atrás de } C. \end{cases}$$

Por convención llamaremos a una cadena elemental C ,

f -saturada si $\iota(C) = 0$

f -no saturada si $\iota(C) > 0$, es decir, si cada arco hacia adelante de C es f -no saturado y cada arco hacia atrás de C es f -positivo.

f -de incrementación si C es f -no saturada siempre desde el origen, hasta el destino.



$C = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_7)$ cadena elemental f -de incrementación.
 $(V_1, V_2), (V_4, V_7)$ arcos hacia adelante de C .
 $(V_4, V_3), (V_3, V_2)$ arcos hacia atrás de C .
 $\iota(C) = \min_{A_{ij} \in A(C)} \iota(A_{ij}) = \min\{(6-1), (2), (5), (4-0)\} = \min\{5, 2, 5, 4\} = 2$
 $A_{ij} \in A(C)$

FIGURA 20

La existencia de una cadena elemental C f -de incrementación indica que f no es un flujo máximo, de hecho, al enviar un flujo adicional $\iota(C)$ a través de C obtenemos un flujo f , definido por:

$$f(A_{ij}) = \begin{cases} f(A_{ij}) + \iota(C) & \text{si } A_{ij} \text{ es un arco hacia adelante de } C. \\ f(A_{ij}) - \iota(C) & \text{si } A_{ij} \text{ es un arco hacia atrás de } C. \\ f(A_{ij}) & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Teorema 2.3. - Sea f como se definió en (2.2.4) entonces f es un flujo en N y $\text{val } f = \text{val } f + \iota(C)$.

Demostración: Por demostrar que f es un flujo. Dada la definición de $\iota(C)$, se tiene que ésta es la cantidad más grande con la cual se puede incrementar f a través de C sin violar la restricción de capacidad de un flujo, por lo que tenemos:

$$0 \leq f(A_{ij}) \leq c(A_{ij}) \quad \forall A_{ij} \in A \quad (2.4.a)$$

Ahora demostraremos la Propiedad de Conservación. Dado que C es un cadena elemental se dan tres casos de los arcos que inciden en un vértice $V_i \in I(N) \cap V(C)$ se muestran en la Figura 29.

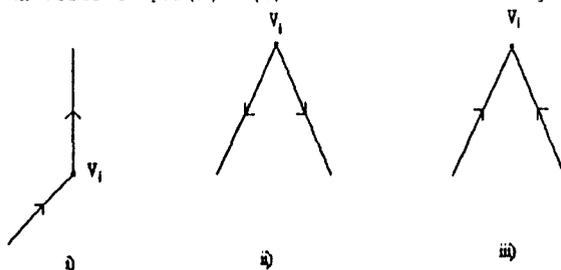


FIGURA 29

Si $V_i \in I$, se tiene:

$$f^-(V_i) = f^+(V_i) \quad \text{por ser } f \text{ un flujo}$$

i) Los dos arcos en C que inciden en V_i , son arcos hacia adelante o hacia atrás de C .

$$\begin{aligned} \widehat{f}^-(V_i) &= f^-(V_i) + 1(C) && \text{si son arcos hacia adelante de } C. \\ &= f^-(V_i) + 1(C) \\ &= \widehat{f}^-(V_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}^-(V_i) &= f^-(V_i) - 1(C) && \text{si son arcos hacia atrás de } C. \\ &= f^-(V_i) - 1(C) \\ &= \widehat{f}^-(V_i) \end{aligned}$$

ii) Los dos arcos de C salen de V_i y uno es un arco hacia atrás y otro un arco hacia adelante.

$$\widehat{f}^-(V_i) = f^-(V_i) - 1(C) + 1(C) = f^-(V_i) = f^+(V_i) = \widehat{f}^-(V_i)$$

iii) Los dos arcos de C , entran a V_i y uno es un arco hacia atrás y otro un arco hacia adelante.

$$\tilde{f}(V_i) = f^-(V_i) - t(C) + t(C) = f^-(V_i) = f^+(V_i) = \hat{f}(V_i)$$

Además si $V_i \in I(N) \setminus V(C)$, se tiene:

$$\tilde{f}(V_i) = f^-(V_i) = f^+(V_i) = \hat{f}(V_i) \text{ por definición de } f$$

Por lo tanto,

$$\hat{f}(V_i) = \tilde{f}(V_i) \quad \forall V_i \in I(N) \quad (2.4.b)$$

Por cumplirse (2.4.a) y (2.4.b) se tiene que \hat{f} es un flujo en N .

Por demostrar:

$$\text{val } \tilde{f} = \text{val } f + t(C)$$

Por ser C un cadena elemental se tiene un arco en C que sale de V_i , que además, es un arco hacia adelante, También puede ser que el arco llegue a V_i y sea un arco hacia atrás, entonces:

$$\text{val } \tilde{f} = f^+(V_i) + t(C) - f^-(V_i) \quad \text{si se tiene un arco hacia adelante.}$$

$$= f^+(V_i) - f^-(V_i) + t(C)$$

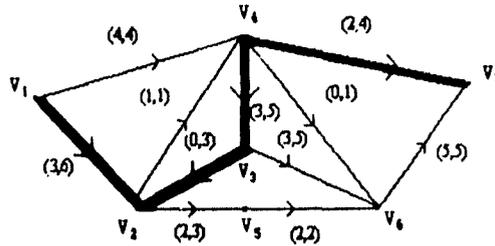
$$= \text{val } f + t(C) \quad \square$$

$$\text{val } \tilde{f} = f^-(V_i) - (f^+(V_i) - t(C)) \quad \text{si se tiene un arco hacia atrás.}$$

$$= f^-(V_i) - f^+(V_i) + t(C)$$

$$= \text{val } f + t(C) \quad \square$$

Llamaremos a \tilde{f} un FLUJO REVISADO BASADO en C , la Figura 30, muestra un flujo revisado basado en la cadena elemental $C = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_7)$ de la Figura 28.



$$f(C) = 2$$

FIGURA 30

Teorema 2.4. - Un flujo en N es un FLUJO MÁXIMO, si y sólo si N no contiene una cadena elemental f -de incrementación.

Demostración: Si N contiene una cadena elemental C f -de incrementación, entonces f no puede ser un flujo máximo, puesto que \hat{f} , el flujo revisado basado en C , tiene un valor más grande.

Inversamente, supongamos que N no contiene una cadena elemental C , f -de incrementación, entonces f es un flujo máximo, Sea:

$S = \{V_i / \text{existen cadenas elementales } f\text{-de incrementación en } N \text{ que conectan a } V_i \text{ con } V_1\}$

Entonces $V_1 \in S$, $V_n \in \bar{S}$, por hipótesis N no contiene cadenas elementales f -de incrementación y sea $K = (S, \bar{S})$ una cortadura de N . Por demostrar que cada arco de (S, \bar{S}) es f -saturado y cada arco de (\bar{S}, S) es f -cero.

Consideremos un arco A_{ij} con extremo inicial en $V_i \in S$, y extremo final $V_j \in \bar{S}$, dado que $V_i \in S$, existe una cadena elemental $Q = (V_i, V_1)$ f -no saturada, si A_{ij} fuera un arco f -no saturado, Q

podría ser extendida agregando el arco A_{ij} , para formar una (V_i, V_j) -cadena elemental f -no saturada, pero $V_j \in \bar{S}$, entonces, tal cadena elemental no existe, por lo tanto el arco A_{ij} es f -saturado.

De la misma forma, consideremos un arco A_{ij} con extremo inicial $V_i \in \bar{S}$ y extremo final $V_j \in S$, exista una cadena elemental $Q'=(V_i, V_i)$ f -no saturada, si A_{ij} fuera f -positivo, Q' podría ser extendido agregando el arco A_{ij} hacia atrás para formar una cadena elemental $Q'=(V_i, V_j)$ f -no saturada, puesto que $V_j \in \bar{S}$, tal cadena elemental no existe, por lo tanto A_{ij} es un arco f -cero.

Aplicando el Teorema 2.2, tenemos que,

$$\text{val } f = \text{cap } K$$

y por el Corolario 2.1, tenemos que f es un flujo máximo y K es una cortadura mínima \square

En la demostración del Teorema anterior quedó establecida la existencia de un flujo máximo f y una cortadura mínima K , tal que, $\text{val } f = \text{cap } K$, por lo que se puede establecer el siguiente Teorema debido a Ford y Fulkerson (1956), llamado el Teorema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima.

Teorema 2.5. (Teorema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima).

En cualquier red el valor de un flujo máximo es igual al valor de la capacidad de una cortadura mínima.

Demostración: Es por construcción y se extrae de ella un algoritmo para encontrar un flujo máximo en una red. Este algoritmo debido también a Ford y a Fulkerson (1957) es llamado

el Metodo de Etiquetación. Éste inicia con un flujo conocido, por ejemplo el flujo cero y se van construyendo recursivamente una secuencia de flujos que van incrementando su valor hasta terminar con un flujo máximo.

Después de la construcción de cada flujo nuevo, una subrutina llamada Procedimiento de Etiquetación se utiliza para encontrar una cadena elemental f -de incrementación, si existe tal cadena elemental y es encontrada, entonces el flujo revisado basado en la cadena elemental encontrada, es construido y tomado como el siguiente flujo en la secuencia.

Si no existe, tal cadena elemental, el algoritmo termina y por el Teorema 2.4. el último flujo construido es un flujo máximo.

Definición 2.8.- Un árbol T en N es f -no saturado si:

- i) $V_1 \in V(T)$
- ii) Para todo $V_i \in V(T)$, existe una cadena elemental única, $C=(V_1, V_i)$ f -no saturada.

La Figura 31 muestra un árbol f -no saturado.

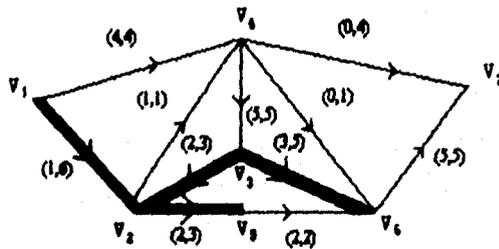


FIGURA 31

La búsqueda de una cadena elemental f -de incrementación involucra el crecimiento de un árbol T , f -no saturado en N . Inicialmente T consiste del origen V_1 , y en cualquier estado, T puede crecer únicamente de las siguiente dos formas:

1. Si existe un arco A_{ij} f -no saturado, $A_{ij} \in (S, \bar{S})$, $S=V(T)$, entonces A_{ij} y su extremo final son agregados a T .

2. Si existe un arco A_{ij} f -positivo, $A_{ij} \in (\bar{S}, S)$, entonces A_{ij} y su extremo inicial son agregados a T .

Si al ir creciendo T se alcanza el destino V_n , se dice que hay un rompimiento y la (V_1, V_n) -cadena elemental es la cadena elemental f -de incrementación. Si ya no es posible que T crezca antes de alcanzar el destino V_n , se deduce del Teorema 2.4 y del Corolario 2.1. que f es un flujo máximo.

El procedimiento de Etiquetación, es una forma sistemática con la cual un árbol T f -no saturado va creciendo, durante este crecimiento a cada vértice $V_n \in V(T)$ se le asigna una etiqueta $t(V_i) = t(C_{V_i})$, donde $C_{V_i} = (V_1, V_i)$ es una cadena elemental. En el caso de un rompimiento, además de tener la cadena elemental $C_{V_n} = (V_1, V_n)$ f -de incrementación se tiene $t(C_{V_n})$, la cantidad con que se calcula el flujo revisado basado en C_{V_n} .

Método de Etiquetación.

0. Iniciar con un flujo. Por ejemplo $f=0$.

1. Asignar a V_1 la etiqueta $t(V_1) = \infty$.

Formar L , el conjunto de vértices etiquetados.

$$L = \{V_1\}$$

Formar S , el conjunto de vértices examinados.

$$S = \{\phi\}$$

2. Examinar los siguientes vértices V_j basados en V_i , es decir, si $V_i \in L \cup S$ asignar la etiqueta:

$t(V_j)$ al vértice V_j , tal que,

$$t(V_j) = \min \{t(V_i), c(A_{ij}) - f(A_{ij})\} \quad \text{donde } A_{ij} \text{ es el arco } f\text{-no saturado con extremo inicial } V_i \text{ y extremo final en } V_j.$$

si el arco A_{ij} no es f -no saturado asignar la etiqueta:

$$t(V_j) = \min \{t(V_i), f(A_{ij})\} \quad \text{donde } A_{ij} \text{ es el arco } f\text{-positivo con extremo final en } V_i \text{ y extremo inicial en } V_j.$$

$$\text{Hacer} \quad L(V_i) = \{V_j / \exists t(V_j)\}$$

$$L \cup L(V_i) \rightarrow L$$

3. ¿Existe V_n en L ?

3.1) Si, entonces existe una cadena elemental C_v , f -de incrementación, calcular el flujo f revisado basado en C_v , hacer $f=f$ pasar a 1.

3.2) NO, hacer $S \cup \{V_i\} \rightarrow S$.

¿Hay más vértices que no hayan sido etiquetados y/o examinados?

3.2.1) Si, Pasar a 2.

3.2.2) No, entonces f es el flujo máximo.

La Figura 32 muestra el diagrama de flujo del Método de Etiquetación.

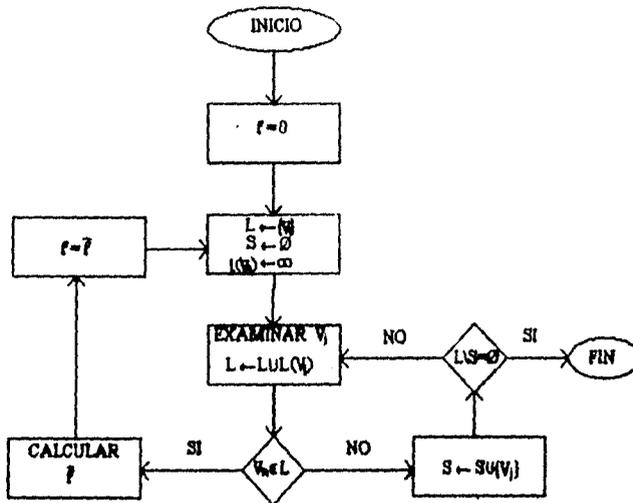


FIGURA 32

Edmonds y Karp (1970), demostraron que un leve refinamiento a este procedimiento lo convierte en uno más eficiente.

Dicho refinamiento es el de examinar a los vértices sobre la base "Primero etiquetado-primero examinado", esto es, antes de examinar un vértice etiquetado V_i , examinar los vértices que fueron etiquetados antes que V_i .

CAPÍTULO 3

PROBLEMAS

Introducción: En este Capítulo se presentan el Problema de la Mochila, el Problema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima y el Problema de la Cortadura Circular Mínima; para así establecer que el Problema de la Cortadura Circular Mínima es bajo ciertas condiciones un caso particular del Problema de la Mochila y del Problema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima.

3.1. El Problema de la Mochila (P.M.).

Este tipo de problema de optimización es de carácter entero y puede darse en dos versiones. En la primera se proporciona un cierto espacio con determinado volumen que debe ser llenado con objetos de valor y volumen dados. El problema consiste en llenar con el conjunto de objetos más valioso el espacio dado, sin exceder sus límites físicos.

La segunda versión consiste en dividir a un objeto en varias porciones de diferente valor. El problema consiste en encontrar la división de mayor valor.

Sean

v el valor del artículo i , $i=1, \dots, n$.

k_i el volumen del artículo i , $i=1, \dots, n$.

K el volumen del espacio dado.

La primera versión se plantea como:

Sea

x_i = Número de artículos i a incluir en el espacio dado.

Entonces

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i \leq K$$

$$x_i \geq 0, \quad x_i \text{ entero} \quad i=1, \dots, n.$$

La segunda versión se plantea como:

Sea

$x_i = 1$ si el artículo i se incluye en la división.

$x_i = 0$

si el artículo i no se incluye en la división.

Entonces

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i \leq K$$

$$x_i = 0, 1 \quad i=1, \dots, n.$$

3.2. El Problema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima (PFM-CM).

El problema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima (PFM-CM), consiste en seleccionar un subconjunto $X \subset V$, con $\bar{X} = V \setminus X$, tal que, $c(X, \bar{X})$ sea mínima con $V_1 \in X$, $V_n \in \bar{X}$ y por el Teorema 2.5 del Flujo Máximo-Cortadura Mínima tendremos el valor del flujo máximo.

Sea una red $(V(N), A(N), \Psi_N, c_N)$ con:

c_{ij} la capacidad del arco A_{ij} .

v valor de un flujo factible en la red.

Sea

$$x_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{si el vértice } V_i \text{ esta en } X \text{ y el vértice } V_j \text{ no} \\ & \text{se incluye en } X. \\ 0 & \text{si el vértice } V_i \text{ esta en } X \text{ y } V_j \text{ se incluye en } X. \end{cases}$$

Entonces

$$\text{Max } v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = \begin{cases} -v & \text{si } j=1 \\ 0 & \text{si } j \neq 1, n \\ v & \text{si } j=n \end{cases}$$

$$c_{ij} > 0 \quad v \geq 0 \quad i=1, \dots, n \quad k=1, \dots, n$$

3.3. Un Caso Particular del (PM) y del (PFM-CM).

Sea una red $(V(N), A(N), \Psi_N, c_N)$, el Problema de la Cortadura Circular Mínima consiste en seleccionar a un subconjunto $X \subseteq V(N)$, con $V_1 \in X$, $V_n \in \bar{X}$ donde a cada vértice V_i se le asocia un peso w_i entonces se debe tener:

$$c(X, \bar{X}) = \sum_{V_i \in (X, \bar{X})} c_{ij} \quad \text{sea mínima} \quad (3.3.1)$$

y

$$\sum_{V_i \in X} w_i \leq M \quad M \text{ constante dada} \quad (3.3.2)$$

Un ejemplo de este problema lo encontramos en la asignación de los boletos para asistir a una recepción nupcial: el vértice V_1 , representa a uno de los contrayentes, el vértice V_2 representa a la familia del contrayente, el vértice V_3 representa a las amistades del contrayente, el vértice V_4 representa a las amistades de la familia del contrayente, el siguiente vértice representa a la familia de las amistades del contrayente, y así sucesivamente, mientras más alejado esté un vértice de V_1 , más alejada es la relación con el contrayente, así el vértice V_n representa al resto de la sociedad, entonces tenemos:

V_1 representa al contrayente.

V_i representa grupos de personas que guardan alguna relación entre ellos y el contrayente $i=2, \dots, n-1$.

V_n representa al resto de la sociedad.

A_{ij} representa la relación guardada entre el vértice V_i y el vértice V_j .

c_{ij} representa el número de boletos comprometidos del vértice V_i para el vértice V_j .

w_i representa el número de boletos asignados al vértice V_i , con $w_i = \sum_{A_{qi} \in A(N)} c_{qi}$, $i=1, \dots, n$

M es el número de boletos a asignar.

X es el conjunto de invitados.

La capacidad de la cortadura (X, \bar{X}) , puede ser vista como el número de compromisos no cumplidos, por lo tanto, debe ser mínima.

Obsérvese en este ejemplo que una elección lógica para formar al subconjunto X es la de seleccionar a los vértices más cercanos a V_1 .

Sea

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } V_i \text{ esta en } X \text{ y el vértice } V_j \text{ no se incluye en } X. \\ 0 & \text{si el vértice } V_i \text{ esta en } X \text{ y el vértice } V_j \text{ se incluye en } X. \end{cases}$$

Entonces

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i x_{ij} \leq M \quad j=2, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ o } 1 \quad i=1, \dots, n-1 \quad j=2, \dots, n$$

si a las $x_{i,j}$ se les añade la restricción de que para agregar un vértice V_i a X , V_{i-1} debe pertenecer a X , aseguramos que X estará integrado por los vértices más cercanos a V_1 . Entonces

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } V_i \text{ esta en } X \text{ y el vértice } V_j \text{ no se} \\ & \text{incluye en } X \text{ con } V_{i-1} \in X. \\ 0 & \text{si el vértice } V_i \text{ esta en } X \text{ y el vértice } V_j \text{ se} \\ & \text{incluye en } X \text{ con } V_{i-1} \in X. \end{cases}$$

Presentaremos al Problema de la Cortadura Circular Mínima como un caso particular del Problema de la Mochila, dado en la segunda versión. Si hacemos:

$K=M$ el peso del conjunto X .

$k_i=w_i$ el peso del vértice V_i .

$v_i = \sum_{A_i \in A(i)} -c_{ij}$ la suma de de las capacidades de los arcos A_{ij}
(multiplicadas por -1) $i=1, \dots, n-1$ y $j=2, \dots, 0$.

Sea

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } V_i \text{ se incluye en el subconjunto } X. \\ 0 & \text{si el vértice } V_i \text{ no se incluye en el subconjunto } X. \end{cases}$$

Entonces, tenemos a la función objetivo del Problema de la Cortadura Circular como:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n c_{ij} x_{ij}$$

si multiplicamos por -1 , tenemos:

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n -c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{n-1} v_i x_i$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n-1} k_i x_i \leq K$$

$$x_i = 0, 1 \quad i=1, \dots, n-1.$$

Que es un Problema de la Mochila.

Ahora presentaremos al Problema de la Cortadura Circular
 Mínima como un caso particular del Problema del Flujo Máximo-
 Cortadura Mínima. Si hacemos:

$w_1=0$ para $i=1, \dots, n-1$, y $w_n=\infty$.

c_{ij} capacidad del arco A_{ij} .

v valor de un flujo factible en la red.

Sea

$$x_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{si el vértice } V_i \text{ esta en } X \text{ y el vértice } V_j \text{ no} \\ & \text{se incluye en } X. \\ 0 & \text{si el vértice } V_i \text{ esta en } X \text{ y } V_j \text{ se incluye en } X. \end{cases}$$

Entonces

$$\text{Max } v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}$$

sujeto a

$$-v \quad \text{si } j=1$$

$$\sum x_{ij} - \sum x_{jk} = 0 \quad \text{si } j \neq 1, n$$

$$v \quad \text{si } j=n$$

$$c_{ij} > 0 \quad v \geq 0 \quad i=1, \dots, n \quad k=1, \dots, n$$

Tenemos un Problema de Flujo Máximo-Cortadura Mínima.

CAPÍTULO 4

ÁRBOL DE CORTADURA

Introducción: En este Capítulo se presenta el concepto de flujo máximo entre dos vértices cualesquiera de una red dada; más adelante se define al árbol de cortadura G-H como el árbol construido con vértices unidos por arcos a los que se les asocia el valor de la capacidad de la cortadura mínima que los separa y por el Teorema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima este valor es igual al valor del flujo máximo entre ellos. Se ilustra con un ejemplo. Finalmente se demuestra que el valor del flujo máximo entre dos vértices no adyacentes en el árbol de cortadura G-H es igual al mínimo valor seleccionado entre los valores asociados a los arcos que integran un camino elemental que conecta tales vértices, concluyendo que, el árbol de cortadura G-H nos da la cortadura mínima cuyo valor coincide con el valor del flujo máximo -entre el vértice origen y el vértice destino- en la red dada.

4.1 Árbol de Cortadura de Gomory y Hu.

Sea una red $N=(V(N),A(N),\Psi_N,c_N)$, sean los vértices $V_1, V_2 \in V(N)$ y el arco $A_{1j} \in A(N)$ con $c(A_{1j})=c_{1j}=c_{j1}$, la capacidad del arco A_{1j} .

En el Capítulo 2 se presentó el Teorema 2.5 del Flujo Máximo-Cortadura Mínima y se aplica para determinar el flujo máximo entre dos vértices específicos de la red, a saber, el vértice origen y el vértice destino. En este Capítulo se presenta lo que es conocido como el Problema Multi-Terminal, en donde se determinan los flujos máximos entre cada par de vértices de la red.

Sea f_{ij} el valor del flujo máximo entre el vértice V_i y el vértice V_j a través de la red N . Obsérvese que el flujo f_{ij} no representa al flujo que pasa a través del arco A_{ij} que une tales vértices, si es que este arco existe para alguna i y alguna j .

La Figura 33 muestra un ejemplo de una red con la matriz asociada de los flujos máximos entre cada par de vértices de la red. Donde $f_{14}=10$ y A_{14} no existe.

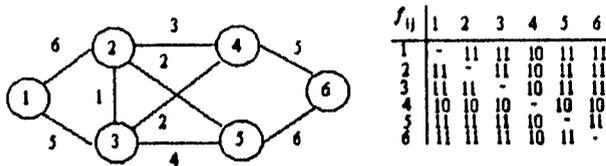
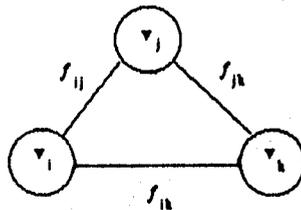


FIGURA 33

Lema 4.1. - Sea f_{ik} el flujo máximo entre el vértice V_i y el vértice V_k , entonces:

$$f_{ik} \geq \min (f_{ij}, f_{jk})$$



Aplicado al ejemplo de la Figura 33, si consideramos únicamente a $V_i=V_1$, $V_j=V_2$ y $V_k=V_3$ tenemos que $f_{12}=6+1=7$, $f_{23}=1+5=6$ y $f_{13}=5+1=6$, entonces: $6 \geq \min (7, 6)$, es decir, $f_{ik} \geq \min (f_{ij}, f_{jk})$

FIGURA 34

Demostración: (Figura 34). Por contradicción. Supongamos:

$$f_{ik} < \min (f_{ij}, f_{jk}) \text{ para algunas } i, j, k.$$

Por el Teorema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima, existe una cortadura (X, \bar{X}) , donde $V_i \in X$ y $V_k \in \bar{X}$, tal que, $c(X, \bar{X}) = f_{ik}$, entonces $V_j \in X$ o $V_j \in \bar{X}$. Si $V_j \in X$ es separado de V_k por la cortadura, y:

$$f_{ik} = c(X, \bar{X}) < f_{jk}$$

Similarmente se tiene si $V_j \in \bar{X}$.

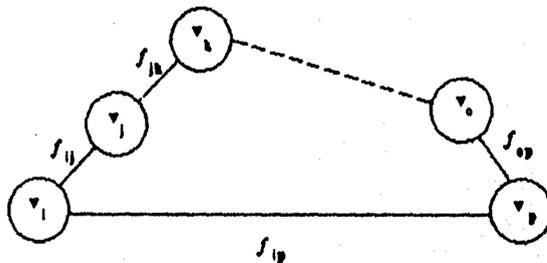
por lo tanto:

$$f_{ik} \geq \min (f_{ij}, f_{jk})$$

El Lema 4.1 se puede generalizar a:

Lema 4.2.- Sea f_{ip} el flujo máximo entre el vértice V_i y el vértice V_p , entonces:

$$f_{ip} \geq \min (f_{i_1j_1}, f_{j_1k_1}, f_{k_1l_1}, \dots, f_{p_1q_1})$$



Aplicado al ejemplo de la Figura 33, tenemos:

$$f_{12} \geq \min (f_{13}, f_{34}, f_{45}, f_{56}, f_{62})$$

$$11 \geq \min (11, 10, 10, 11, 11) \text{ es decir } 11 \geq 10$$

FIGURA 35

Demostración: (Figura 35). Por inducción: Por demostrar:

$$f_{il} \geq \min (f_{ij}, f_{jk}, f_{kl})$$

entonces

$$f_{il} \geq \min (\min (f_{ij}, f_{jk}), f_{kl})$$

por hipótesis de inducción tenemos que:

$$f_{jk} \geq \min (f_{ij}, f_{jk}) = f_{ij}$$

luego,

$$f_{il} \geq \min (f_{ij}, f_{kl})$$

por lo tanto,

$$f_{il} \geq \min (f_{ij}, f_{jk}, f_{kl})$$

entonces

$$f_{ip} \geq \min (f_{ij}, f_{jk}, f_{kl}, \dots, f_{op}) \square$$

Vamos a construir un árbol a partir de una red dada N , este árbol es formado por todos los vértices del conjunto $V(N)$ estando unidos por arcos que tienen asociado un valor α_i el cual corresponde al valor de la capacidad de la cortadura mínima entre cada vértice adyacente en el árbol. Llamaremos a este árbol, Árbol de Cortadura G-H.

Algoritmo para Construir el Árbol de Cortadura G-H.

1.-) Seleccionamos dos vértices $V_i, V_j \in V(N)$.

2.-) Encontramos la cortadura mínima entre ellos.

Sea (X, \bar{X}) tal cortadura.

3.-) Representamos al árbol con dos vértices generalizados X y \bar{X} conectados por un arco al que se le asocia el valor de la capacidad de la cortadura denotado por α_i . (Figura 36).

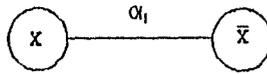


FIGURA 36

4.-) Seleccionamos otros dos vértices V_{i1}, V_{j1} tales que $V_{i1}, V_{j1} \in X$ (o $\in \bar{X}$).

5.-) Conservamos a \bar{X} (o X) como vértice generalizado y encontramos la cortadura mínima entre V_{i1}, V_{j1} .

Sea esta $(X_{i1}/X_{j1}, \bar{X})$ o $(X_{j1}/X_{i1}, \bar{X})$ (o $(X, X_{i1}/X_{j1})$ o $(X, X_{j1}/X_{i1})$). (Figura 37).

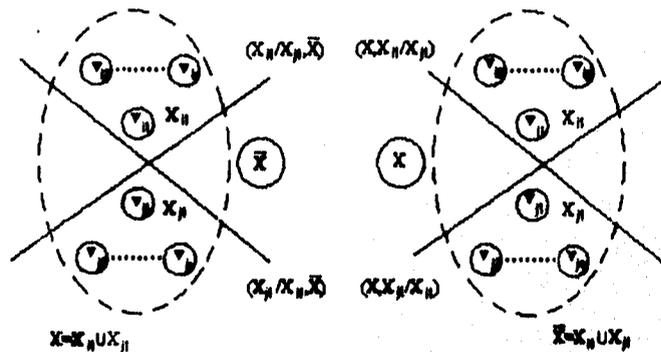


FIGURA 37

6.-) Representamos al árbol con los dos vértices generalizados conectados por los valores α_i de las cortaduras. (Figura 38).

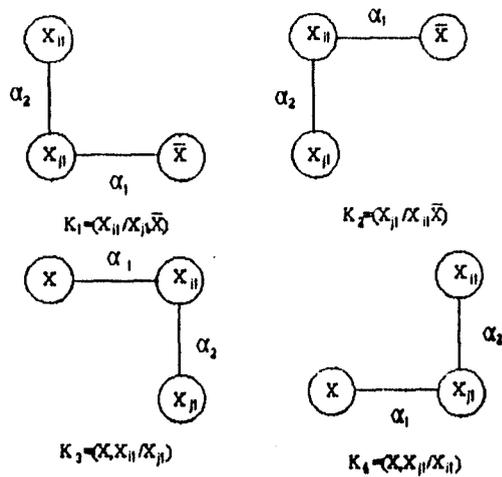


FIGURA 30

7.-) Hacemos $(X, \bar{X}) \leftarrow K_1$, K_1 = La cortadura seleccionada.

8.-) Es X (o \bar{X}) un vértice generalizado?

8.1.-) No, Es \bar{X} (o X) un vértice generalizado?

8.1.1.-) No, terminamos.

8.1.2.-) Si, lo seleccionamos y pasamos a 4.-).

8.2.-) Si, pasamos a 4.-).

En todo árbol cualesquiera de sus arcos es considerado como una cortadura ya que al eliminarlo se divide al árbol en dos componentes

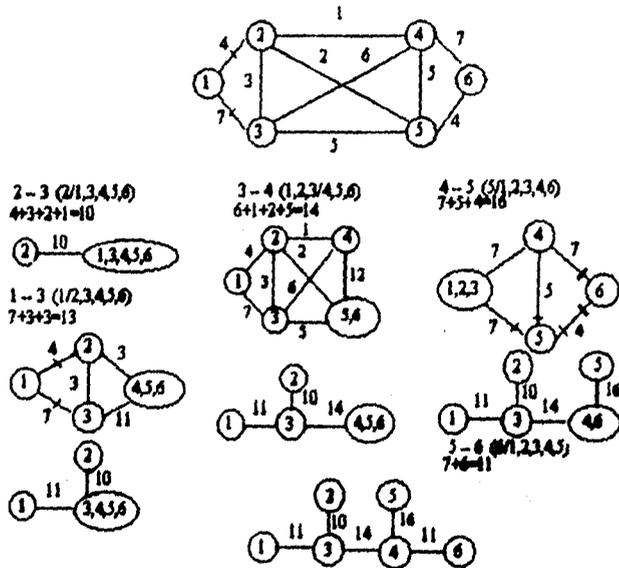
Con el algoritmo anterior se construye un árbol, a cuyos arcos se les da el valor de la capacidad de la cortadura mínima que existe entre los vértices que conectan, luego entonces, el árbol así obtenido es llamado un ÁRBOL DE CORTADURA G-H, donde

las letras G-H corresponden a la primera letra del apellido de R. E. Gomory y T. C. Hu, quienes lo definieron en 1960 y es encontrado, después de resolver $n-1$ problemas de flujo.

4.2. Un Ejemplo.

A continuación se da un ejemplo del procedimiento para obtener un árbol de cortadura.

Sea la siguiente red:



ÁRBOL DE CORTADURA G-H.

FIGURA 39

4.3 Árbol de Cortadura G-H y Cortadura Mínima de una Red.

Lema 4.3.- El flujo máximo entre cualesquiera dos vértices del árbol de cortadura G-H es:

$$\min (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r})$$

donde los α_i son los valores de los arcos que forman un camino elemental que conecta a los dos vértices en el árbol de cortadura G-H.

Demostración: Sean dos vértices $V_i, V_j \in V(N)$, se tiene que:

$$f_{ij} \leq \min (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}) \quad (4.3.a)$$

dado que f_{ij} es igual al valor de la cortadura mínima que separa a los vértices V_i, V_j y los $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ representan valores de cortaduras que separan a los vértices V_i, V_j .

Para demostrar la desigualdad inversa consideremos cualquier estado de la construcción (Figura 40).

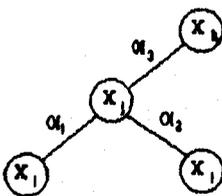


FIGURA 40

Donde tenemos arcos representando cortaduras y vértices representando conjuntos de vértices. Entonces afirmamos que si un arco de valor α une a los conjuntos X_i y X_j , existen vértices $V_i \in X_i$ y $V_j \in X_j$, tal que, $f_{ij} = \alpha$.

Esto es cierto en la primera cortadura, se demostrará que esta propiedad es mantenida después de obtener las cortaduras restantes. Consideremos un X_i que va a ser cortado, unido por el arco de valor α , al conjunto X_j . Por hipótesis de inducción, existen $V_i \in X_i$ y $V_j \in X_j$, tal que, $f_{ij} = \alpha$. Después de cortar otro vértice V_p de V_q que estando ambos en X_i , éste queda dividido en X_{ip} y X_{iq} .

Supongamos que X_j está unido a X_{ip} ,

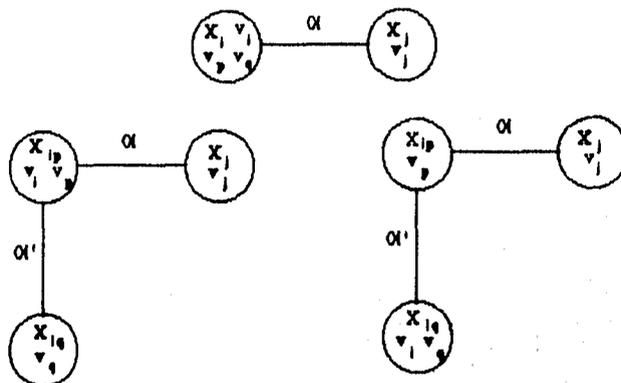


FIGURA 41

Los vértices V_p y V_q están unidos por $\alpha' = f_{pq}$. Existen dos casos: (Figura 41).

- i) $V_i \in X_{ip}$, entonces el flujo α conserva la propiedad.
- ii) $V_i \in X_{iq}$, entonces considerando los vértices V_j, V_i, V_q, V_p y aplicando el Lema 4.2 se tiene:

$$f_{jp} \geq \min (f_{ji}, f_{iq}, f_{qp})$$

Dado que V_j y V_p están de un mismo lado de la cortadura con valor α' y V_i , V_q están en el otro lado, el flujo f_{jp} no es afectado si X_{iq} es reemplazado por un solo vértice, o lo que es lo mismo, si a todos los arcos dentro de X_{iq} , se les asigna un valor grande arbitrario M , así f_{iq} será tan grande para no ser seleccionado como el mínimo y tendremos:

$$f_{jp} \geq \min (f_{ji}, f_{jp})$$

se tiene:

$$f_{ji} = \alpha \text{ y } f_{jp} = \alpha'$$

entonces,

$$f_{jp} \geq \min (\alpha, \alpha')$$

Dado que una cortadura que separa V_j de V_i tiene valor α' tenemos $\alpha' \geq f_{ji} = \alpha$ el valor de la cortadura mínima, entonces se tiene $f_{jp} \geq \alpha$. Como α es el valor de la cortadura que separa a X_j y a X_p , implica que $f_{jp} = \alpha$, entonces V_j y V_p son los dos vértices necesitados.

Dado que en el árbol final los valores de los arcos entre vértices adyacentes representan los valores del flujo entre pares de vértices en la red tenemos que la desigualdad inversa:

$$f_{ij} \geq \min (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \quad (4.3.b)$$

se cumple aplicando el Lema 4.2.

Entonces por (4.3.a) y por (4.3.b) se tiene:

$$f_{ij} = \min (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \square$$

Por el Lema 4.3 se puede conocer el valor de la cortadura mínima entre cualesquiera dos vértices de la red, si esos vértices son V_1 el vértice fuente y V_n el vértice destino el árbol nos dará la cortadura mínima de la red dada y por el Teorema del Flujo Máximo-Cortadura Mínima, ese valor es igual al valor del flujo máximo en toda la red.

CAPÍTULO 5

EL PROBLEMA DE LA CORTADURA CIRCULAR

Introducción: En este Capítulo se introducen los conceptos de cortadura de árbol, cortadura preservadora del orden, se establece cuando una cortadura circular mínima es dominada por otra para así reducir el número de cortaduras a ser consideradas demostrando que una cortadura no de árbol está siempre dominada por una cortadura de árbol y que una cortadura no preservadora del orden está siempre dominada por una cortadura preservadora del orden, y también se demuestra que una cortadura preservadora del orden es siempre una cortadura de árbol reduciendo así el conjunto de soluciones posibles al problema de la cortadura circular mínima. Se define otra estructura de una red llamada la Gráfica de Orden Parcial, tanto en esta estructura como en el árbol de cortadura G-H se establecen las condiciones para condensar ciertos vértices y se demuestra que son idénticos.

5.1. El Problema de la Cortadura Circular.

Como se planteó en la sección 3.3 el Problema de la Cortadura Circular Mínima consiste en dada una red con un conjunto de vértices $V_i, i=1, \dots, n$ y un conjunto de arcos no dirigidos A_{ij} conectando V_i y V_j , donde cada vértice tiene un peso w_i no negativo, y cada arco tiene una capacidad c_{ij} , encontrar un subconjunto de vértices X , tal que, $V_i \in X$ y:

$$\min \sum_{V_i \in X, V_j \notin X} c_{ij} \quad (5.1)$$

y

$$\sum_{V_i \in X} w_i \leq M \quad (5.2)$$

5.2 Cortaduras de Árbol.

Definición 5.1- Una cortadura (X, \bar{X}) que separa V_1 de V_n es llamada una CORTADURA FACTIBLE, si $V_1 \in X$ y (5.2), se cumple. La cortadura (X, \bar{X}) es llamada una CORTADURA MÍNIMA FACTIBLE si también se cumple (5.1).

Consideremos al árbol de cortadura G-H estudiado en el capítulo anterior, denotaremos a los arcos de tal árbol como L así el arco L_{pq} representa al arco que une a los vértices V_p y V_q y denotaremos al flujo máximo posible entre los vértices V_p y V_q como f_{pq} .

Definición 5.2.- (Figura 42). Dos cortaduras (X, \bar{X}) y (Y, \bar{Y}) , se dice que son cruzadas, si y sólo si, no son vacío ninguno de los siguientes subconjuntos, $P = \bar{X} \cap \bar{Y}$, $Q = \bar{X} \cap Y$, $R = X \cap \bar{Y}$, $U = X \cap Y$.

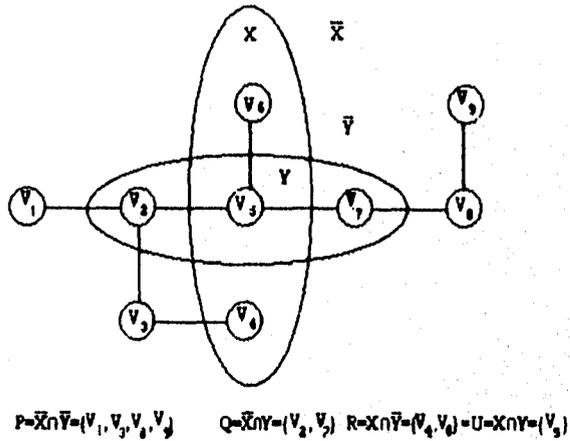


FIGURA 42

Definición 5.3.- Una cortadura (X, \bar{X}) se dice que separa al arco L_i , en el árbol de cortadura G-H T si $V_i \in X$ y $V_j \in \bar{X}$ (o $V_i \in \bar{X}$ y $V_j \in X$). Es decir, los dos extremos del arco están en diferentes lados de la cortadura.

Lema 5.1.- Sea (X, \bar{X}) una cortadura que separa los arcos $L_{a_1}, L_{a_2}, \dots, L_{p_1}, \dots$, entonces:

$$c(X, \bar{X}) \geq \max (f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{p_1}, \dots)$$

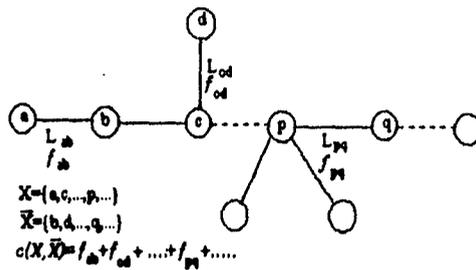


FIGURA 43

Demostración: (Figura 43).

$$\begin{aligned}
 c(X, \bar{X}) &= c(L_{ab}) + c(L_{cd}) + \dots + (L_{pq}) \\
 &= f_{ab} + f_{cd} + \dots + f_{pq} + \dots \\
 &\geq \max f_{i_j} \quad \text{para toda } i \in X, j \in \bar{X} \\
 &= \max (f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{p_1}, \dots)
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$c(X, \bar{X}) \geq \max (f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{p_1}, \dots) \square$$

Lema 5.2.- Dada una red N con árbol de cortadura $G-H$ T . Sean V_r y V_i cualquiera dos vértices adyacentes en el árbol T condensemos V_r y V_i dentro de un sólo vértice en la red N . Llamemos a la nueva red así obtenida N^* y al árbol correspondiente T^* , entonces, T^* puede ser obtenido a partir de T por la simple condensación de V_r , el arco $L_{r,i}$ y V_i dentro de un solo vértice.

Demostración: (Figura 44). Cada arco en el árbol de cortadura T representa una cortadura (X, \bar{X}) en la red original. Si cualesquiera de los vértices en X son condensados dentro de un sólo vértice, entonces la capacidad de la cortadura (X, \bar{X}) no es afectada.

Por otro lado consideremos cualquiera otra cortadura (Y, \bar{Y}) representada por otro arco diferente de $L_{r,i}$, luego V_r y V_i deben estar ambos en un mismo lado de la cortadura, ambos en Y , o ambos en \bar{Y} , si incrementamos la capacidad $c_{r,i}$ a infinito no se afectará la capacidad de las $n-2$ cortaduras restantes representadas por los arcos en el árbol T . Además al incrementar $c_{r,i}$ no se disminuirá la capacidad de ninguna de las $2^{n-1}-1$ cortaduras posibles en T . Así que las $n-2$ cortaduras representadas en los arcos de T resultan ser las mínimas $n-2$ cortaduras no cruzadas \square

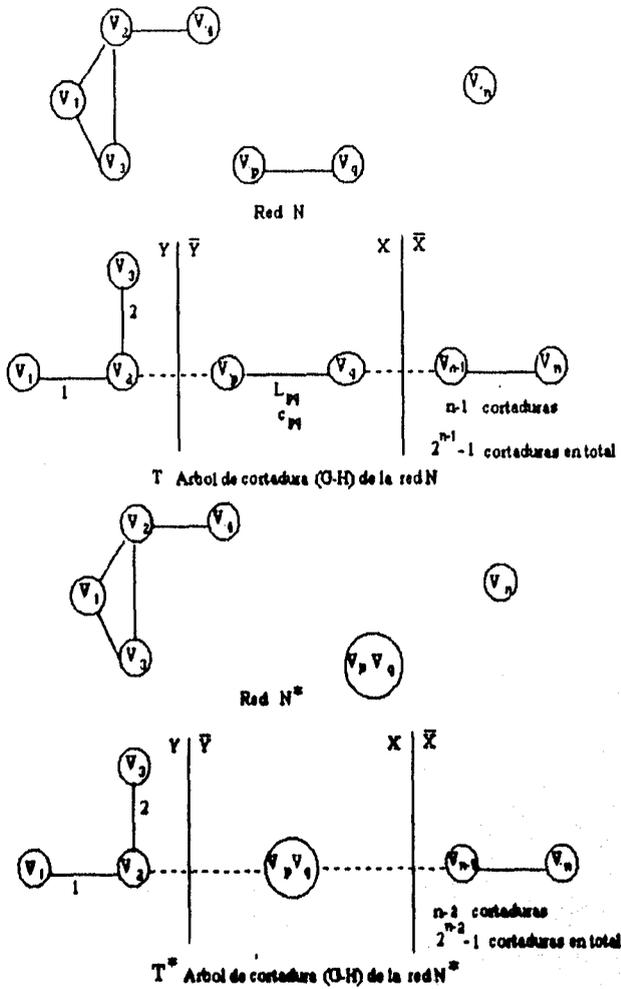


FIGURA 44

Lema 5.3.- Sea N una red con árbol de cortadura G-H T. Sea la partición del árbol T en tres componentes conectados A, B, C,

donde al remover B se desconectaría A de C, Si condensamos cada componente en un solo vértice obteniendo una red N^* consistente de tres vértices, entonces el árbol de cortadura (G-H) T tiene a B en el medio.

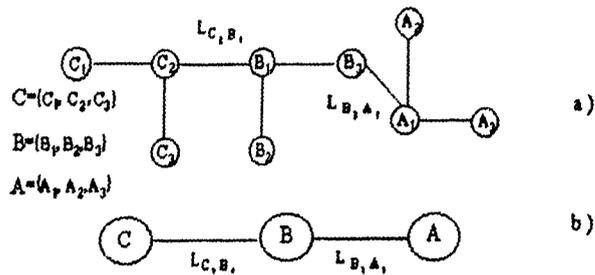


FIGURA 45

Demostración: (Figura 45). Condensem los vértices A_i en el vértice A, los vértices B_i en el vértice B y los vértices C_i en el vértice C, sin cambiar la capacidad de la cortadura representada por los arcos $L_{C_i B_i}$ y $L_{B_i A_i}$, (Lema 5.2). El árbol de cortadura correspondiente a la red de tres vértices es el de la Figura 45b). Tenemos:

$c(C/A, B) =$ el valor asociado al arco $L_{C_i B_i}$

$c(A/B, C) =$ el valor asociado al arco $L_{B_i A_i}$,

luego la cortadura que separa a B de A y C es una cortadura que separa a los arcos $L_{C_i B_i}$ y $L_{B_i A_i}$ y por el Lema 5.1 tenemos:

$$c(B/A, C) \geq \max [c(A/B, C), c(C/A, B)] \quad \square$$

En otras palabras el Lema 5.3 dice que una cortadura la cual separa al árbol de cortadura en tres partes, tiene la capacidad

donde al remover B se desconectaría A de C, Si condensamos cada componente en un solo vértice obteniendo una red N^* consistente de tres vértices, entonces el árbol de cortadura (G-H) T tiene a B en el medio.

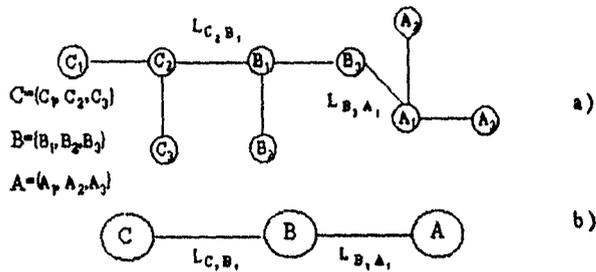


FIGURA 45

Demostración: (Figura 45). Condensem los vértices A_i en el vértice A, los vértices B_i en el vértice B y los vértices C_i en el vértice C, sin cambiar la capacidad de la cortadura representada por los arcos $L_{C_2B_1}$ y $L_{B_1A_1}$, (Lema 5.2). El árbol de cortadura correspondiente a la red de tres vértices es el de la Figura 45b). Tenemos:

$c(C/A, B) =$ el valor asociado al arco $L_{C_2B_1}$

$c(A/B, C) =$ el valor asociado al arco $L_{B_1A_1}$,

luego la cortadura que separa a B de A y C es una cortadura que separa a los arcos $L_{C_2B_1}$ y $L_{B_1A_1}$ y por el Lema 5.1 tenemos:

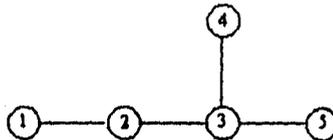
$$c(B/A, C) \geq \max \{c(A/B, C), c(C/A, B)\} \quad \square$$

En otras palabras el Lema 5.3 dice que una cortadura la cual separa al árbol de cortadura en tres partes, tiene la capacidad

mayor a la capacidad de una cortadura que lo separa en dos. Esto sugiere que debemos considerar solamente las cortaduras circulares que rodean a V con todos los vértices en X conectados por los arcos del árbol de cortadura.

Siempre que escribamos (X, \bar{X}) , se tiene $V \in X$.

Definición 5.3.-(Figura 46). Una CORTADURA DE ÁRBOL (X, \bar{X}) es una cortadura circular, donde todos los vértices de X están unidos por arcos del árbol de cortadura $(G-H)$. Una CORTADURA DE ÁRBOL BIPARTITA es una cortadura de árbol (X, \bar{X}) en donde cada arco del árbol de cortadura $(G-H)$ une un vértice de X con un vértice de \bar{X} .



ÁRBOL DE CORTADURA G-H

$n=1-5-1=4$ Cortaduras de árbol del árbol de cortadura G-H:

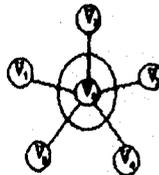
$(1/2, 3, 4, 5), (1, 2/3, 4, 5), (1, 2, 3, 4/5), (1, 2, 3, 5/4)$

Cortadura de árbol que no es una de las $n-1$ anteriores:

$(1, 2, 3, 4, 5)$

Cortaduras que no son cortaduras de árbol:

$(1, 2, 5, 7/3, 4), (1, 2, 4, 5/3), (1, 2, 4, 7/3, 5)$



Cortadura de árbol Bipartita

FIGURA 46

Definición 5.4.- Sean (X, \bar{X}) y (Y, \bar{Y}) dos cortaduras circulares que rodean a V_i , con $V_i \in X \cap Y$. Decimos que la cortadura (X, \bar{X}) , DOMINA a la cortadura (Y, \bar{Y}) , si y sólo si, i) y ii) son ciertas.

$$i) \sum_{i \in X} w_i < \sum_{j \in Y} w_j$$

$$ii) c(X, \bar{X}) \leq c(Y, \bar{Y})$$

Por i), si (Y, \bar{Y}) es una cortadura circular factible, entonces (X, \bar{X}) , también lo es, y por ii) la capacidad de (X, \bar{X}) , no es mayor que la capacidad de (Y, \bar{Y}) . Por lo tanto al buscar una cortadura circular mínima factible no tenemos que considerar a una cortadura dominada por otra.

5.3.- Lema de las Cortaduras Cruzadas.

Lema 5.4.- (Lema de las Cortaduras Cruzadas).

Supongamos que (X, \bar{X}) y (Y, \bar{Y}) son cortaduras cruzadas y,

$$\begin{array}{ll} P = \bar{X} \cap \bar{Y} & Q = \bar{X} \cap Y \\ R = X \cap \bar{Y} & U = X \cap Y \end{array}$$

si

$$c(Y, \bar{Y}) \leq c(P, \bar{P})$$

entonces

$$c(U, \bar{U}) \leq c(X, \bar{X}) \quad (\text{Figura 47a})$$

y por simetría si

$$c(X, \bar{X}) \leq c(P, \bar{P})$$

entonces

$$c(U, \bar{U}) \leq c(Y, \bar{Y}) \quad (\text{Figura 47b})$$

También se cumple, si

$$c(Y, \bar{Y}) \leq c(Q, \bar{Q})$$

entonces

$$c(R, \bar{R}) \leq c(X, \bar{X})$$

y si

$$c(X, \bar{X}) \leq c(Q, \bar{Q})$$

entonces

$$c(R, \bar{R}) \leq c(Y, \bar{Y})$$

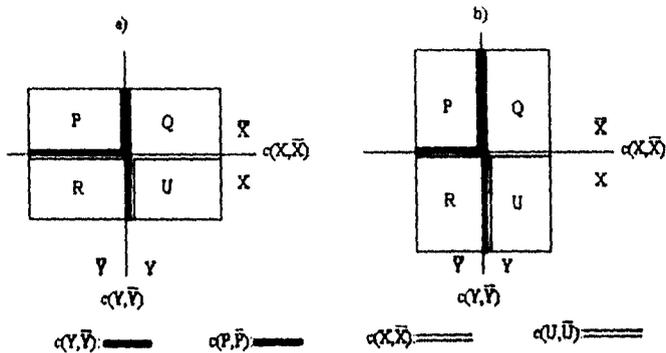


FIGURA 47

Demostración: La desigualdad

$$c(Y, \bar{Y}) \leq c(P, \bar{P})$$

implica

$$c(R, U) \leq c(P, R)$$

y

$$c(P, U) + c(Q, U) \leq c(P, U) + c(Q, U) + c(Q, R)$$

sumando ambas desigualdades

$$c(R, U) + c(P, U) + c(Q, U) \leq c(P, R) + c(P, U) + c(Q, U) + c(Q, R)$$

por lo tanto

$$c(U, \bar{U}) \leq c(X, \bar{X}) \square$$

Definición 5.5.- Consideremos un problema de cortadura circular, donde el árbol de cortadura (G-H) T , correspondiente a la red es conocido. Consideremos al árbol T con raíz en V_1 . Entonces existe un único camino elemental desde V_1 , a cada vértice V_i de T . Si V_i es un vértice intermedio en el camino elemental desde V_1 a V_j , entonces V_i es llamado un ANCESTRO de V_j .

y V es llamado un DESCENDIENTE de V_i . Si V_i y V son adyacentes, entonces V es llamado el PADRE de V_i y V_i es llamado el HIJO de V .

Una vez teniendo al árbol de cortadura $(G-H)$, no tenemos que considerar a ciertas cortaduras como candidatas potenciales a la cortadura circular mínima alrededor de V_i , pues están dominadas por otras. Consideremos a las cortaduras que no están dominadas, si dos vértices están siempre en un lado de la cortadura, esos dos vértices pueden ser condensados en uno sólo.

Teorema 5.1.- Una no cortadura de árbol esta siempre dominada por una cortadura de árbol.

Demostración.-(Figura 48). Sea N una red con árbol de cortadura $(G-H)$ T y sea (X, \bar{X}) una no cortadura de árbol. Sea Z el conjunto de vértices en X para los cuales hay un camino elemental en T desde V_i , a los vértices que no tienen ningún arco en (X, \bar{X}) . Demostraremos que la cortadura (Z, \bar{Z}) domina a (X, \bar{X}) .

Considerando los arcos de la cortadura (Z, \bar{Z}) y aplicando el Lema 5.2 condensemos cada uno de los vértices en ambos lados de la cortadura obteniendo dos subconjuntos de vértices, uno integrado por los vértices en X , y el otro los vértices en \bar{X} .

Esta condensación no afecta la capacidad de la cortadura (X, \bar{X}) o de alguna de las siguientes cortaduras:

Sean V_a y V_b dos vértices en la red condensada, tales que, $V_a \in \bar{X}$, $V_b \in X$ y $V_b \notin Z$. Por demostrar que $(X - V_b, \bar{X} - \bar{V}_b)$ domina a (X, \bar{X}) .

Sea (Y, \bar{Y}) la cortadura correspondiente al arco del vértice V_a , hacia Z , sea:

$$P = \bar{X} \cap \bar{Y}, Q = \bar{X} \cap Y = \{V_a\}, U = X \cap Y = \{V_b\} \text{ y } R = X \cap \bar{Y}$$

se tiene:

$c(Y, \bar{Y}) =$ al valor asociado del arco del vértice V_a hacia Z

$c(Q, \bar{Q}) =$ al valor asociado del arco del vértice V_a hacia Z

y al valor asociado del arco del vértice V_b hacia el vértice V_b .

luego, por el Lema 5.3:

$$c(Q, \bar{Q}) \geq c(Y, \bar{Y})$$

y por el Lema 5.4 de las Cortaduras Cruzadas tenemos que:

$$c(R, \bar{R}) \leq c(X, \bar{X})$$

Entonces podemos condensar V_a y V_b en un sólo vértice. Si $(R, \bar{R}) = (Z, \bar{Z})$ terminamos, de otro modo, consideramos a (R, \bar{R}) como una nueva cortadura (X, \bar{X}) y condensamos a un nuevo par de vértices, continuamos así, hasta obtener la cortadura $(Z, \bar{Z}) \square$

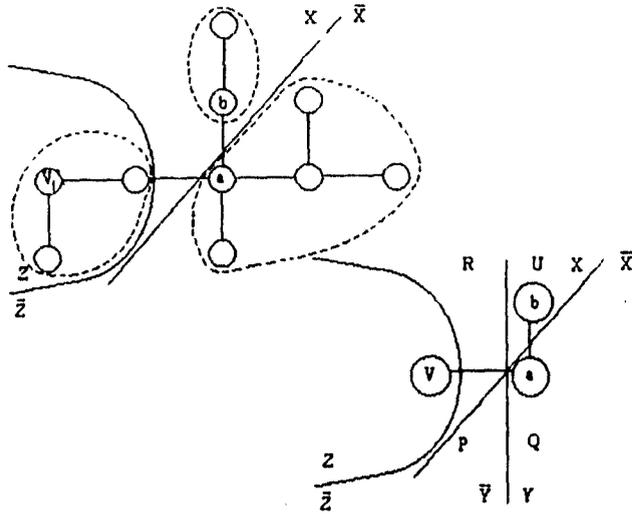


FIGURA 49

Lema 5.5.- Consideremos al árbol de cortadura $(G-H)$ como un árbol con raíz en V_i . Si V_a es el padre de V_b , V_b es el padre de V_c y $f_{ab} \leq f_{bc}$, entonces V_b y V_c pueden ser condensados en un sólo vértice, sin eliminar las cortaduras circulares mínimas. Es decir, podemos condensar sucesivamente los vértices V_a, V_b, V_c, \dots si los valores f_{ab}, f_{bc}, \dots asociados con los arcos que los unen no son decrecientes a lo largo del camino elemental que va desde la raíz V_i a dichos vértices.

Demostración:(Figura 49). Sea (X, \bar{X}) la cortadura mínima correspondiente al arco L_{ab} , en el árbol $(G-H)$ T , y (Y, \bar{Y}) cualquier cortadura separando V_i de V_c .

Se tienen dos casos:

i) (X, \bar{X}) y (Y, \bar{Y}) no son cortaduras cruzadas.

Dado que $c(X, \bar{X}) = f_{ab} \leq f_{bc} \leq c(Y, \bar{Y})$ por hipótesis entonces $V_a \in X \subset Y$. La cortadura (Y, \bar{Y}) está dominada por (X, \bar{X}) .

ii) (X, \bar{X}) y (Y, \bar{Y}) son cortaduras cruzadas con $V_a \in U$, $V_b \in Q$ y $V_c \in P$, se tiene:

$$P = \bar{X} \cap \bar{Y} = \{V_c\} \quad Q = \bar{X} \cap Y = \{V_b\} \quad R = X \cap \bar{Y} \quad U = X \cap Y = \{V_a\}$$

Por demostrar que (Y, \bar{Y}) está dominado por (U, \bar{U}) .

Dado que $f_{ab} \leq f_{bc}$ y (X, \bar{X}) corresponde a L_{ab} , la cortadura (X, \bar{X}) es una cortadura mínima separando a V_a de V_c .

(P, \bar{P}) es otra cortadura separando a V_a de V_c , se tiene que:

$$c(X, \bar{X}) \leq c(P, \bar{P})$$

entonces por el Lema 5.4 de las Cortaduras Cruzadas

$$c(U, \bar{U}) \leq c(Y, \bar{Y})$$

por lo tanto, (Y, \bar{Y}) está dominada por (U, \bar{U}) \square

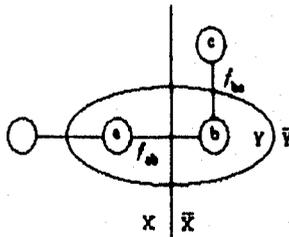


FIGURA 49

Definición 5.6.- Cuando todos los vértices adyacentes son condensados basándose en el Lema 5.5 se conserva un árbol de cortadura (G-H) con un número menor de vértices. Llamaremos a este árbol el ÁRBOL (G-H) REDUCIDO y a la red correspondiente, la RED REDUCIDA.

Las únicas cortaduras a considerar son las cortaduras del árbol (G-H) reducido, pues son las que no están dominadas por otras.

5.4 Gráfica de Orden Parcial (GOP).

Se desea encontrar una cortadura mínima (X, \bar{X}) con $V_1 \in X$ y $\sum w_i \leq M$ con $V_i \in X$ y M una constante dada. Si existe un vértice V_i , tal que, $w_i \geq M$, entonces V_i no puede ser incluido en X , por lo tanto llamaremos V_i un NODO PROHIBIDO. Si existen varios vértices prohibidos los podemos condensar en uno sólo. Si no hay vértices prohibidos podemos crear un V_n artificial y conectarlo a todos los otros vértices con arcos de capacidad $c_{ij} = 0$.

En esta sección se presenta otro enfoque del problema de la cortadura circular mínima, para redes con vértices prohibidos.

Para obtener una cortadura circular mínima factible (X, \bar{X}) con $V_1 \in X$ y $V_n \in \bar{X}$ el vértice prohibido, se procede de la siguiente manera:

Se toma V_2 y se condensa con V_n , a continuación se encuentra la cortadura mínima entre V_1 y el vértice condensado V_{2n} . Se hace lo mismo para V_3, V_4, \dots, V_{n-1} . Así tenemos:

Algoritmo para obtener una Cortadura Mínima de una Red con un Vértice Prohibido.

Paso 0) $j \leftarrow 1$

$X_{j-1} = \{\emptyset\}$

Paso 1) $j \leftarrow j+1$

1.1) ¿Es $j = n$?

1.1.1) Si, terminamos.

1.1.2) No, vamos al Paso 2).

Paso 2) $V_{i-1} \leftarrow$ vértices V_i y V_{i+1} condensados.

2.1) Obtenemos la cortadura mínima (X, \bar{X}) que separa a V_i de V_{i+1} , si existen varias, tomamos la de menor número de vértices.

2.2) $X \leftarrow X_{i-1}$.

$\bar{X} \leftarrow X_{i+1}$.

Vamos al Paso 1).

Aplicando el Algoritmo anterior debemos resolver $n-2$ problemas de flujo máximo con redes de $n-1$ vértices. Obteniendo cortaduras $(X_{1,j}, X_{j,n})$ $j = 2, \dots, n-1$, entre las cuales se encuentra la cortadura circular mínima que separa a V_1 de V_n .

Lema 5.6.- Las cortaduras mínimas $(X_{1,j}, X_{j,n})$ que separan al vértice V_1 de los dos vértices condensados V_j y V_n , con $V_1 \in X_{1,j}$, $V_n \in X_{j,n}$, donde $X_{1,j}$, tiene el mínimo número de vértices, y $X_{1,j} = \{\emptyset\}$ son cortaduras de árbol.

Demostración.-Sea (Y, \bar{Y}) una cortadura circular mínima, dado que $(X_{1,j}, X_{j,n}) = (X, \bar{X})$ es una cortadura circular mínima para la red con $w_j = 0$ excepto $w_n = \infty$. Tenemos

$$i) \sum_{V_i \in X} w_i \leq \sum_{V_j \in Y} w_j$$

$$ii) c(Y, \bar{Y}) \leq c(X, \bar{X})$$

Entonces $(X_{1,j}, X_{j,n}) = (X, \bar{X})$ es una cortadura circular mínima que domina a otra cortadura circular mínima y por el Teorema 5.1 afirmamos que es siempre una cortadura de árbol.

Los subconjuntos $X_{1-1}, X_{1-2}, \dots, X_{1-n}$, obtenidos al variar j desde $1, 2, \dots, n$ esta parcialmente ordenada bajo la inclusión de conjuntos.

Definición 5.8.- Sean los subconjuntos $X_{1-1}, X_{1-2}, \dots, X_{1-n}$ obtenidos con el Algoritmo anterior, entonces,

$$V_i \leq V_j \text{ si y sólo si } X_{1-i} \subset X_{1-j}$$

Dos vértices diferentes, pueden ser equivalentes, bajo este ordenamiento parcial. Por ejemplo, sea (X, \bar{X}) una cortadura separando V_1 de V_2 , todos los vértices en \bar{X} son equivalentes a V_1 , sin embargo, ningún vértice puede ser equivalente a V_2 . También se tiene que, $V_1 \leq V_i \leq V_2$ para todos los vértices V_i .

Definición 5.9.- Para cualquier red N es posible dibujar el diagrama de Hasse, del ordenamiento parcial de los subconjuntos X_{1-1} . A este diagrama le llamamos la GRÁFICA DE ORDEN PARCIAL (GOP).

En la Figura 50, se tiene:

$$X_{1-1} \subset X_{1-2}$$

$$X_{1-1} \subset X_{1-p} \text{ para cualquier } p.$$

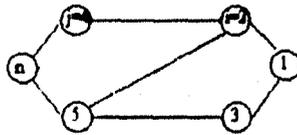


FIGURA 50

Si la gráfica ordenada parcialmente es una cadena como la mostrada en el Figura 51, las cortaduras están en el orden:

$$(X_{1-1}, X_{1,n})$$

$$(X_{1-2}, X_{2,n})$$

.

.

.

$$(X_{1-k}, X_{k,n})$$

donde la capacidad de las cortaduras debe incrementarse por lo que dominará la primera cortadura de la lista.



FIGURA 51

Definición 5.10.- Una cortadura (X, \bar{X}) es llamada una CORTADURA PRESERVADORA DEL ORDEN, si para todos los vértices V_i, V_j , donde $V_i \leq V_j$ y $V_i \in X$, se tiene que $V_j \in X$. Por ejemplo la cortadura (Y, \bar{Y}) con $V_1, V_4, V_5 \in Y$ (Figura 50), no es una cortadura preservadora del orden.

Teorema 5.2.- Cada cortadura que no es una cortadura preservadora del orden, está dominada por una cortadura preservadora del orden.

Demostración: (Figura 52). Sea $X=X_{1-}$ y $V_i < V_j$. Si (Y, \bar{Y}) es cualquier cortadura factible con $V_1, V_i \in Y$ y $V_j, V_j \in \bar{Y}$, por demostrar

que (Y, \bar{Y}) está dominada por una cortadura preservadora del orden.

Como (X, \bar{X}) con $X=X_1$ es una cortadura preservadora del orden.

Sean $P=\bar{X} \cap \bar{Y}$, $Q=\bar{X} \cap Y$, $R=X \cap \bar{Y}$ y $U=X \cap Y$, como $V_i \in P$, $V_i \in Q$, $V_i \in U$, ninguno de estos subconjuntos es vacío. Se tienen dos casos:

i) Si R es vacío, entonces $U=X$, dado que (X, \bar{X}) es una cortadura mínima, se tiene:

$$c(X, \bar{X}) \leq c(Y, \bar{Y})$$

y $U=X \subset Y$, entonces (Y, \bar{Y}) está dominada por una cortadura preservadora de orden.

ii) Si R no es vacío, se tiene (X, \bar{X}) y (Y, \bar{Y}) son cortaduras cruzadas y (P, \bar{P}) es otra cortadura que separa V_i y V_j de V además. Como es una cortadura mínima que separa a V_i de V se tiene,

$$c(X, \bar{X}) \leq c(P, \bar{P})$$

entonces por el Lema 5.4 de las Cortaduras Cruzadas.

$$c(U, \bar{U}) \leq c(Y, \bar{Y})$$

Esta cortadura (U, \bar{U}) puede no ser preservadora del orden, por lo que, se selecciona otro par V_i, V_j para repetir el mismo procedimiento. Puesto que el número de vértices en Y es estrictamente decreciente, el proceso terminará con una cortadura preservadora del orden \square

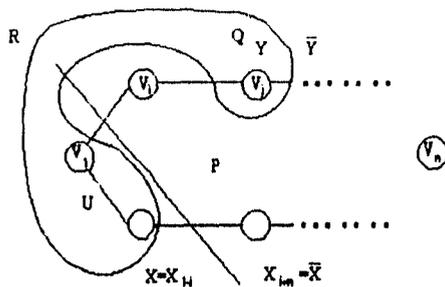


FIGURA 52

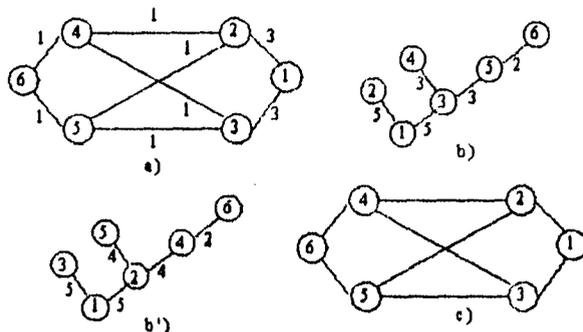
Del Teorema 5.2 se deduce que solamente se necesita considerar cortaduras preservadoras del orden en la búsqueda de la cortadura circular mínima.

Nótese que si $X_{i-1} = X_{i-2}$, los vértices V_i y V_j pueden ser condensados en un sólo vértice.

La Figura 53a) muestra una red, la Figura 53b) muestra dos árboles de cortadura (G-H) de la red anterior. En el árbol (G-H) de la Figura 53b) existen diez cortaduras de árbol, separando V_i de $V_j = V_k$. Los subconjuntos X_{i-1} son:

- $X_{1-1} = \emptyset$
- $X_{1-2} = \{1, 3\}$
- $X_{1-3} = \{1, 2, \}$
- $X_{1-4} = \{1, 2, 3, 5\}$
- $X_{1-5} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $X_{1-6} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

La Figura 53c) muestra la (GOP) donde se encuentran siete cortaduras preservadoras del orden.



Cortaduras de Árbol:

$(1, 2, 3, 4, 5/6)$, $(1, 2, 3, 4, /5, 6)$, $(1, 2, 3, /4, 5, 6)$,
 $(1, 2, /3, 4, 5, 6)$, $(1/2, 3, 4, 5, 6)$, $(1, 3, 5/2, 4, 6)$, $(1, 3, /2, 4, 5, 6)$,
 $(1, 3, 4/2, 5, 6)$, $(1, 3, 4, 5/2, 6)$, $(1, 2, 3, 5/4, 6)$

Cortaduras Preservadoras del Orden:

$(1, /2, 3, 4, 5, 6)$, $(1, 2, /3, 4, 5, 6)$, $(1, 2, 3, /4, 5, 6)$, $(1, 2, 3, 4, /5, 6)$
 $(1, 2, 3, 4, 5, /6)$, $(1, 3, /2, 4, 5, 6)$, $(1, 2, 3, 5/4, 6)$

FIGURA 53

Lema 5.7.- Para todos los vértices V_1, V_2 , si $V_1 \in X_{1,n}$ entonces $V_2 \in V_1$.

Demostración: (Figura 54). Sean las cortaduras (X, \bar{X}) y (Y, \bar{Y}) donde

$$X = X_{1,j}, \quad \bar{X} = X_{j,n}, \quad Y = Y_{1,i}, \quad \bar{Y} = Y_{i,n}$$

Por hipótesis $V_1 \in \bar{X}$, $V_1 \in \bar{Y}$ y $V_1 \in \bar{X}$. Se presentan dos casos:

- i) Si $V_1 \in \bar{Y}$ se debe tener $X_{1,j} = X_{j,n}$ y queda demostrado.
- ii) Si (Y, \bar{Y}) separa a V_1 de V_2 , sean

$$P = \bar{X} \cap \bar{Y}, \quad Q = \bar{X} \cap Y, \quad R = X \cap \bar{Y}, \quad U = X \cap Y,$$

Por demostrar que R es vacío. Por contradicción.

Si R no fuera vacío las cortaduras (X, \bar{X}) y (Y, \bar{Y}) serían cortaduras cruzadas.

(P, \bar{P}) es otra cortadura que separa a V_i de V_j , dado que

$$c(P, \bar{P}) \geq c(Y, \bar{Y}),$$

por el Lema 5.4 de las Cortaduras Cruzadas tenemos:

$$c(U, \bar{U}) \leq c(X, \bar{X})!$$

pero (X, \bar{X}) no puede estar dominada, por ser una cortadura preservadora del orden, por lo tanto R es vacío, entonces $X \subset Y$, o sea $X_{i-1} \subset X_{j-1}$, por lo tanto $X_{i-1} \subseteq X_{j-1}$, es decir $V_i \leq V_j \square$

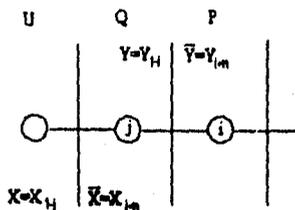


FIGURA 54

El ordenamiento parcial tiene la siguiente propiedad para todos los vértices V_j .

$$X_{j,i,n} = \{V_l / V_l \leq V_i\}$$

Es decir, los conjuntos $X_{j,i,n}$ pueden ser recuperados a partir del ordenamiento parcial (o la GOP).

5.5.- Los Árboles (G-H) Reducidos y la (GOP).

Un árbol (G-H) también induce a un ordenamiento parcial del conjunto de vértices de una red N.

Definición 5.11.- Sea V_s un ancestro de V_t en el árbol de cortadura (G-H) si y sólo si,

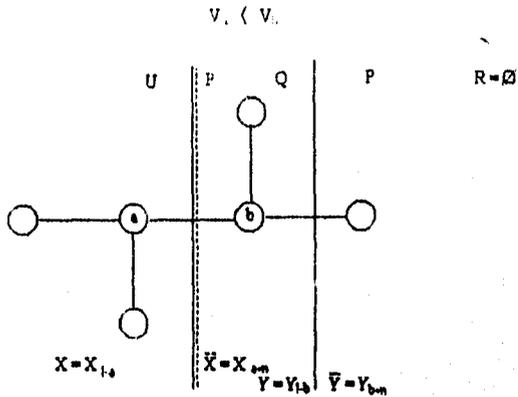


FIGURA 55

Lema 5.8.- Si $V_s \prec V_t$ entonces $V_s \leq V_t$.

Demostración: (Figura 55). Por contradicción, sea $X=X_{t,s}$, $Y=X_{s,m}$, por hipótesis $V_s \prec V_t$. Supongamos que $V_s \leq V_t$, nos llevará a una contradicción.

Por suposición $X_{t,s} \prec X_{s,m}$, dado que (X, \bar{X}) es una cortadura de árbol se tiene $V_t \in \bar{X}$, entonces no se puede tener $Y \subset X$, por lo tanto (X, \bar{X}) y (Y, \bar{Y}) son cortaduras cruzadas. Sean:

$$P = \bar{X} \cap \bar{Y}, \quad Q = \bar{X} \cap Y, \quad R = X \cap \bar{Y}, \quad \text{y} \quad U = X \cap Y$$

Supongamos $v_i, v_j \in P$ y $v_i \in U$. Dado (P, \bar{P}) es una cortadura separando V de V_c y v_i , tenemos

$$c(Y, \bar{Y}) \leq c(P, \bar{P})$$

entonces por el Lema 5.4 de las Cortaduras Cruzadas

$$c(U, \bar{U}) \leq c(X, \bar{X})$$

Es una contradicción, pues (X, \bar{X}) es una cortadura de árbol, por lo tanto debe tenerse:

$$X_{1-a} \subseteq X_{1-b}$$

es decir

$$v_i \leq v_j \square$$

Definición 5.12.- La cortadura (X, \bar{X}) es una cortadura de árbol, si y sólo si, no existe un par de vértices v_i, v_j tales que $v_i \in \bar{X}$, $v_j \in X$ y $v_i < v_j$. (Figura 56).

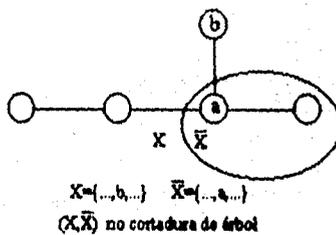


FIGURA 56

Corolario 5.1.- Cualquier cortadura preservadora del orden es una cortadura de árbol.

Demostración:(Figura 57). Por contradicción. Se tiene por hipótesis que (X, \bar{X}) es una cortadura preservadora del orden, entonces se tiene que para todos los vértices V_a y V_b . Si $V_a \leq V_b$ y $V_a \in X$ entonces $V_b \in X$. Supongamos que (X, \bar{X}) no es una cortadura de árbol, entonces existe un par de vértices tales que $V_a \leq V_b$ y $V_a \in X$ con $V_b \in \bar{X}$.

Por el Lema 5.8 si $V_a < V_b$ entonces $V_a \leq V_b$ y por hipótesis se tiene que (X, \bar{X}) es una cortadura preservadora del orden con $V_a \in X$ entonces debe tenerse que $V_b \in X$!, es una contradicción pues por hipótesis se tiene que $V_b \in \bar{X}$.

Por lo tanto debe tenerse que $V_a \in X$, y por la Definición 5.12, (X, \bar{X}) es una cortadura de árbol \square

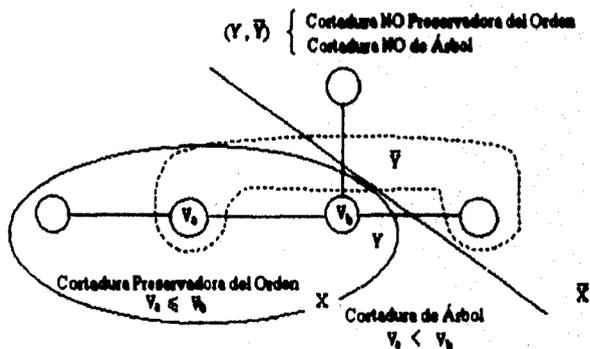


FIGURA 57

Lema 5.9.- Sea T el árbol de cortadura (G-H) de una red N , si V_1 es el padre de V_2 en el árbol T y V_1 es el padre de V_3 y $f_{12} \leq f_{13}$, entonces $X_{1-2} = X_{1-3}$, es decir los vértices V_1 y V_2 se pueden condensar.

Demostración: (Figura 58).

La relación $X_{1-2} \subset X_{1-3}$ se cumple sin considerar que $f_{12} \leq f_{13}$.

Supongamos que $X_{1-2} \not\subset X_{1-3}$. Sea (X, \bar{X}) la cortadura de árbol mínima que separa a V_1 de V_2 , dada por el árbol de cortadura (G-H) con $X = X_{1-2}$ y sea $Y = X_{1-3}$ entonces la cortadura (Y, \bar{Y}) debe separar a V_1 de V_3 , (de otro modo se tendría $X_{1-2} = X_{1-3}$). Se tienen dos casos:

i) Si $X \subset Y$, se tiene (X, \bar{X}) es la cortadura de árbol mínima que separa a V_1 de V_3 y (Y, \bar{Y}) es otra cortadura que también separa a V_1 de V_3 , entonces (X, \bar{X}) domina a (Y, \bar{Y}) .

ii) (X, \bar{X}) y (Y, \bar{Y}) son cortaduras cruzadas. Sean,

$$P = \bar{X} \cap \bar{Y}, \quad Q = \bar{X} \cap Y, \quad R = X \cap \bar{Y} \quad \text{y} \quad U = X \cap Y,$$

se tiene:

$$c(X, \bar{X}) \leq c(P, \bar{P})$$

puesto que ambos separan a V_1 de V_2 , luego,

$$c(U, \bar{U}) \leq c(Y, \bar{Y})$$

por el Lema 5.4 de las Cortaduras Cruzadas, entonces (U, \bar{U}) domina a (Y, \bar{Y}) .

Entonces por el Lema 5.2, como V_1 y V_2 quedan de un mismo lado de una cortadura que domina, pueden ser condensados \square

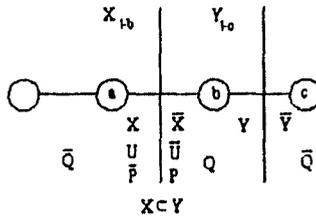


FIGURA 58

Lema 5.10. - El árbol reducido (G-H) y la (GOP) de una red N que no tenga vértices prohibidos son idénticos.

Demostración: (Figura 59). Debemos demostrar que si $X_{1,a} \subset X_{1,b}$ (excluyendo $X_{1,a} = X_{1,b}$), es decir $V_a < V_b$, entonces $V_a < V_b$ en el árbol reducido (G-H).

Se tiene $V_i \in X_{1,b}$, si no se tendría $X_{1,a} = X_{1,b}$, la cortadura $(X_{1,b}, X_{b,n})$ corresponde a un arco en el árbol de cortadura (G-H) y su capacidad es estrictamente menor a la capacidad de cualquier otra cortadura representada en los arcos que forman el camino elemental uniendo V_b con V_i por lo que no será condensada en el árbol (G-H). Si V_a está en el camino elemental de V_b a V_i , entonces V_a es un ancestro de V_b , de otro modo, sea V_c el ancestro común más cercano a V_a y V_b . Debido a que $(X_{1-a}, X_{a,n})$ corresponde a un arco en el árbol de cortadura (G-H), se debe tener $X_{1,c} = X_{1-a}$, la capacidad de este arco es estrictamente menor a las capacidades de los arcos en el camino elemental de V_a , entonces, V_a y V_c serán condensados en el árbol de cortadura (G-H) reducido. Aplicando el Lema 5.9.

Después de la condensación V_a es un ancestro de V_b □

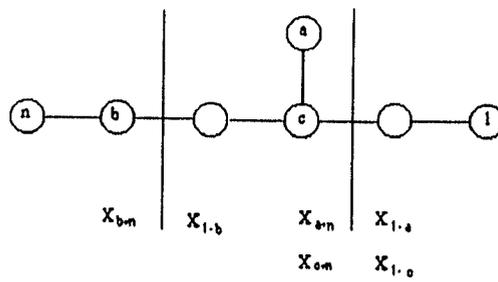
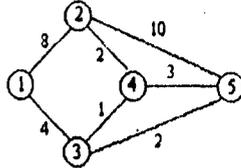


FIGURA 59

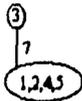
5.6.- Ejemplos.

1.-) Sea la red



1.1) Obtener el Árbol G-H y el Árbol G-H Reducido.

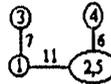
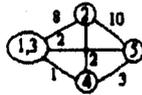
2-3 (3/1,2,4,5)



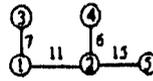
1-2 (1,3,2,4,5)



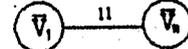
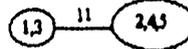
4-5 (4/1,2,3,5)



2-5 (5/1,2,3,4)

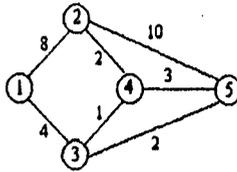


Árbol G-H
Aplicando el Lema 5.2

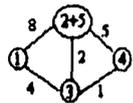


Árbol G-H Reducido

1.-) Sea la red

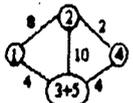


1.2) Obtener la Gráfica de Orden Parcial.



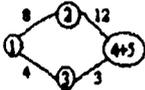
$$(1,3/2,4,5) \quad X_{1,2} = (1,3)$$

$$C(X_{1,2}, X_{2,3}) = 8+2+1 = 11$$



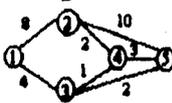
$$(1,2/3,4,5) \quad X_{1,3} = (1,2)$$

$$C(X_{1,3}, X_{3,4}) = 4+10+2 = 16$$



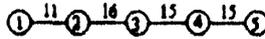
$$(1,2,3/4,5) \quad X_{1,4} = (1,2,3)$$

$$C(X_{1,4}, X_{4,5}) = 12+3 = 15$$



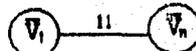
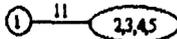
$$(1,2,3,4/5) \quad X_{1,5} = (1,2,3,4)$$

$$C(X_{1,5}, X_{5,5}) = 10+3+2 = 15$$



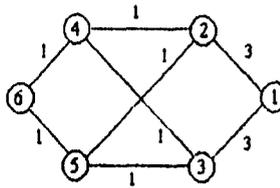
$$V_1 \leq V_2 \leq V_3 \leq V_4 \leq V_5$$

Aplicando el Lema 5.8



Gráfica de Orden Parcial

2.-) Sea la red

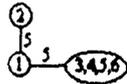


2.1) Obtener el Árbol G-H y el Árbol G-H Reducido.

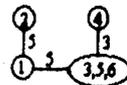
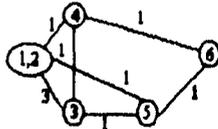
2 - 1 (2/1,3,4,5,6)



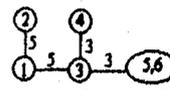
1 - 3 (1,2/3,4,5,6)



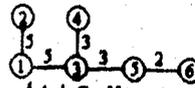
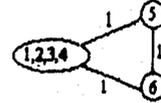
3 - 4 (4/1,2,3,5,6)



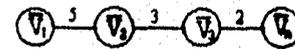
3 - 5 (1,2,3,4/5,6)



5 - 6 (1,2,3,4,5/6)

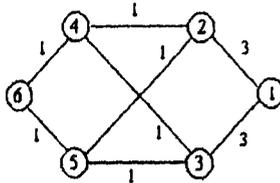


Árbol G - H
Aplicando Lema 5.2

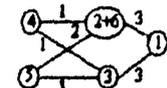


Árbol G - H Reducido

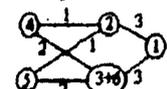
2.-) Sea la red



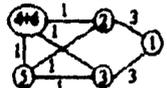
2.2) Obtener la Gráfica de Orden Parcial.



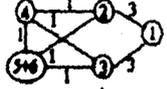
$(1,3/2,4,5,6) \quad X_{1,2} = (1,3)$
 $C(X_{1,2}, X_{2,3}) = 3+1+1 = 5$



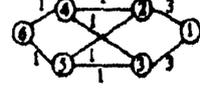
$(1,2/3,4,5,6) \quad X_{1,3} = (1,2)$
 $C(X_{1,3}, X_{3,4}) = 3+1+1 = 5$



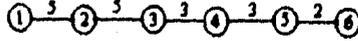
$(1,2,3,5/4,6) \quad X_{1,4} = (1,2,3,5)$
 $C(X_{1,4}, X_{4,5}) = 1+1+1 = 3$



$(1,2,3,4/5,6) \quad X_{1,5} = (1,2,3,4)$
 $C(X_{1,5}, X_{5,6}) = 1+1+1 = 3$

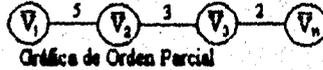
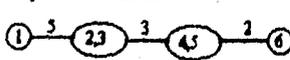


$(1,2,3,4,5/6) \quad X_{1,6} = (1,2,3,4,5)$
 $C(X_{1,6}, X_{6,6}) = 1+1 = 2$

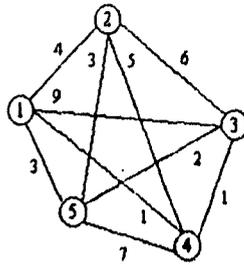


$V_1 \leq V_2 \leq V_3 \leq V_4 \leq V_5 \leq V_6$

Aplicando el Lema 5.8



3.-) Sea la red

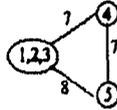


3.1) Obtener el Árbol G-H y el Árbol G-H Reducido.

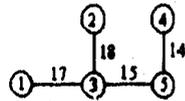
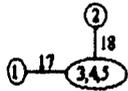
2-5 (2/1,3,4,5)



4-5 (4/1,2,3,5)

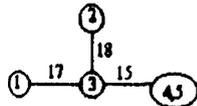


1-3 (1/2,3,4,5)



Árbol G-H

3-4 (4,5/1,2,3)

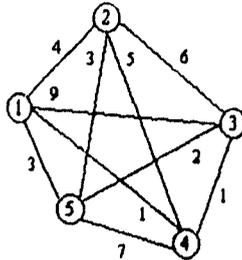


Aplicando el Lema 5.2

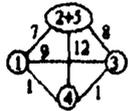


Árbol G-H Reducido

3.-) Sea la red

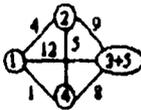


3.2) Obtener la Gráfica de Orden Parcial.



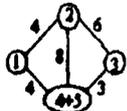
$(1/2,3,4,5) \quad X_{1,2} = (1)$

$C(X_{1,2}, X_{2,3}) = 7+9+1 = 17$



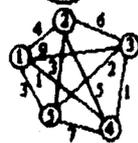
$(1,2/3,4,5) \quad X_{1,3} = (1,2)$

$C(X_{1,3}, X_{3,4}) = 9+5+12+1 = 27$



$(1,2,3/4,5) \quad X_{1,4} = (1,2,3)$

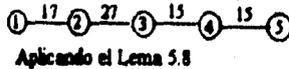
$C(X_{1,4}, X_{4,5}) = 4+8+3 = 15$



$(1,2,3,4/5) \quad X_{1,5} = (1,2,3,4)$

$C(X_{1,5}, X_{5,6}) = 3+3+2+7 = 15$

$V_1 \leq V_2 \leq V_3 \leq V_4 \leq V_5$



Aplicando el Lema 5.8



Gráfica de Orden Parcial

CAPÍTULO 6

ALGORITMO DE REDUCCIÓN

Introducción: En este Capítulo se da el concepto de una cortadura circular local mínima en una red, el de un árbol con raíz natural y el de un preflujo en una red dada, todos estos conceptos son útiles para plantear el algoritmo que nos permite encontrar la cortadura circular mínima o bien la cortadura circular local mínima, así como, justificar su validez.

6.1.- Cortaduras Circulares Locales Mínimas.

En este Capítulo se desarrollará un algoritmo para obtener una cortadura circular (X, \bar{X}) , tal que,

$$c(X, \bar{X}) \leq c(Y, \bar{Y}) \quad Y \subset X$$

Nótese que la cortadura circular así definida no es igual a la cortadura circular mínima buscada en la sección 3.3. Es posible tener $c(Z, \bar{Z}) \leq c(X, \bar{X})$ donde Z no es subconjunto propio de X . Llamaremos a esta clase de cortadura circular mínima una **CORTADURA CIRCULAR LOCAL MÍNIMA**.

Definición 6.1.- Consideremos un árbol con raíz en V_0 , donde todos los arcos están dirigidos hacia afuera de la raíz y cada arco con capacidad c_i asociada a él. La suma de las capacidades de los arcos hacia afuera de un vértice es llamada **LA CAPACIDAD HACIA AFUERA** y la suma de la capacidad hacia adentro de un vértice es llamada **LA CAPACIDAD HACIA ADENTRO**.

Si la capacidad hacia adentro es mayor o igual que la capacidad hacia afuera para todos los vértices excepto para el vértice raíz V_0 , es decir:

$$\sum_i c_{i,j} \geq \sum_{j \neq 0} c_{j,i}$$

El árbol es llamado un **ÁRBOL CON RAÍZ NATURAL**.

Consideremos un árbol con raíz natural como un conjunto de caminos elementales desde V_0 hacia todos los vértices, donde las capacidades de los arcos sean monótonamente decrecientes. Nótese que un arco desde V_i a V_j puede ser visto como varios arcos desde V_i a V_j , al particionar así al árbol.

Sea (X, \bar{X}) una cortadura, en el árbol descrito anteriormente, donde X es el conjunto de todos los vértices con capacidad hacia afuera mayor que cero y \bar{X} es el conjunto de todos los vértices con capacidad hacia afuera igual a cero, entonces

$$c(X, \bar{X}) \leq c(Y, \bar{Y}), \quad V_0 \in Y \subset X$$

Esta desigualdad se cumple debido a que cualquier cortadura (Y, \bar{Y}) debe encontrarse a cada camino elemental en que se particionó el árbol, desde V_0 , al menos una vez, la capacidad de los arcos de cada camino elemental es monótonamente decreciente. (Figura 62).

El algoritmo para localizar una cortadura circular local mínima es equivalente a la búsqueda del conjunto X .

6.2. Descripción del Algoritmo.

El algoritmo inicia con V_1 , como único elemento de X , que se va incrementando gradualmente, cuando el peso total de los vértices en X , es tan grande como sea posible sin exceder a la constante M , la cortadura (X, \bar{X}) así obtenida será la cortadura circular mínima requerida en la sección 3.3. Es posible que el peso total M no sea excedido y ya no sea posible aumentar los miembros de X entonces obtendremos únicamente una cortadura circular local mínima al rededor de V_1 .

Si las capacidades de las cortaduras rodeando a V_1 van decreciendo, en tanto que X va incluyendo más vértices, el algoritmo da la cortadura circular mínima. En general la capacidad de las cortaduras, puede decrecer, luego incrementarse y entonces decrecer otra vez, a valores más pequeños, en este caso, el algoritmo para antes del primer incremento.

Consideremos a V_1 como el vértice origen de la red y acumulemos las máximas cantidades del flujo en los vecinos de V_1 y en los vecinos de los vecinos, durante este proceso se permite que la cantidad de flujo hacia adentro de un vértice sea más grande que la cantidad hacia afuera sin exceder la capacidad del vértice.

Durante el proceso, todos los vértices de la red pertenecen a alguno de los siguientes tres conjuntos que son ajenos entre si.

S conjunto origen.

B conjunto frontera.

K conjunto de vértices que no están en S y no están en B .

Al inicio V_1 , es el único elemento de S .

Todos los vértices adyacentes a V_1 pertenecen a B .

Al incrementarse los elementos de S el conjunto B va a consistir de todos los vértices adyacentes a S .

6.3. Algoritmo de Reducción.

Paso 0) $S = \{V_i\}$

$B = \{V_b / V_b \text{ es adyacente a } V_i\}$ $K = \{V_k / V_k \in S \text{ y } V_k \notin B\}$

Paso 1) $x_{sb} = b_{sb} \quad \forall V_s \in S, V_b \in B$

si $\sum_s x_{sb} > \sum_r b_{br} \quad V_i \in B \cup K$

entonces:

$S \leftarrow S \cup \{V_b\}$

$B \leftarrow B / \{V_b\}$

$B \leftarrow B \cup \{V_t / V_t \text{ es adyacente a } B\}$

Se repite el Paso 1).

Si no existe tal vértice V_b , vamos al paso 2).

Paso 2) Si $\sum_s x_{si} \geq \sum_k b_{ik} \quad V_s \in S, V_i \in B, V_k \in K$.

entonces V_i es positivo, pues contiene exceso de flujo.

Si V_b es positivo para todo B, entonces:

$S \leftarrow S \cup \{B\}$

Vamos al Paso 1).

Si no, consideremos un vértice $V_j \in B$, tal que

$$\sum_s x_{sj} < \sum_k b_{jk} \quad V_s \in S, V_k \in K$$

es decir, V_j es un vértice negativo. Vamos al Paso 3).

Paso 3) Redistribuimos el exceso del flujo de los vértices positivos a los negativos y comprobamos si,

$$\sum_s x_{sj} + \sum_i x_{ij} > \sum_k b_{jk} \quad V_s \in S, V_i, V_j \in B, V_k \in K$$

Si todos los vértices negativos satisfacen ésta desigualdad
entonces

$S \leftarrow \text{SUB}$

Vamos al Paso 1).

Si no, se termina y (S, \bar{S}) es la cortadura circular local
mínima.

Diagrama de Flujo del Algoritmo de Reducción.

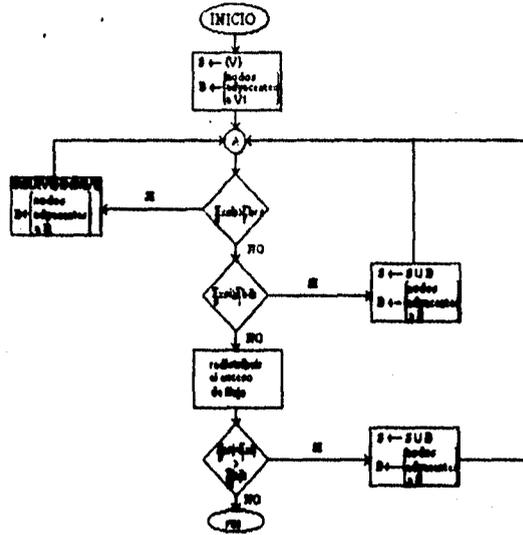


FIGURA 60

6.4. Un Ejemplo.

En la siguiente red, obtener la cortadura circular mínima o bien la cortadura local circular mínima.

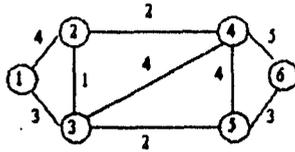


FIGURA 61

Paso 0) $S = \{V_1\}$

$B = \{V_2, V_3\}$ $K = \{V_4, V_5, V_6\}$

Paso 1) $x_{12} = 4$

$x_{13} = 3$

$x_{12} = 4 > b_{24} + b_{23} = 2 + 1 = 3$

$S = \{V_1, V_2\}$

$B = \{V_3, V_4\}$ $K = \{V_5, V_6\}$

Vamos al Paso 1).

Paso 1) $x_{24} = 2$

$x_{23} = 1$

$b_{45} + b_{46} = 4 + 5 = 9$

$b_{34} + b_{35} = 4 + 2 = 6$

Para V_4 $2 < 9$

Para V_3 $1 < 6$

Vamos al Paso 2).

Paso 2) Para V_3

$$x_{13} + x_{23} = 3 + 1 = 4 > b_{3j} = 2$$

V_3 es un vértice positivo.

Para V_4

$$x_{24} = 2 < b_{45} + b_{46} = 4 + 5 = 9$$

V_4 es un vértice negativo.

Como no todos los vértices en B son positivos vamos al Paso 3).

Paso 3) Redistribuimos el exceso del flujo de V_3 a V_4

$$x_{13} + x_{23} - b_{35} = 3 + 1 - 2 = 2 \text{ unidades a } V_4$$

$$x_{24} + x_{34} = 2 + 2 = 4, \quad 4 < b_{46} + b_{45} = 5 + 4 = 9$$

donde la desigualdad

$$\sum_{j \in S} x_{ij} + \sum_{j \in B} x_{ij} > \sum_{k \in K} b_{jk} \quad V_i \in S, V_j \in B, V_k \in K$$

no se satisface, pues

$$2 + 2 < 9$$

Por lo tanto se termina y (S, \bar{S}) , es la cortadura circular local mínima con

$$S = \{V_1, V_2\} \text{ y } c(S, \bar{S}) = 6$$

6.5 Demostración de la Validez del Algoritmo.

Definición 6.2.- Un PREFLUJO de un camino elemental, es un flujo en un camino elemental, donde, los flujos de los arcos son monótonamente decrecientes. En la Figura 61, los siguientes son preflujos de caminos elementales desde V_1 a varios vértices:

$$(x_{12}^{(1)}, x_{23}, x_{34}) = (1, 1, 1)$$

$$(x_{12}^{(2)}, x_{24}) = (3, 2)$$

$$(x_{13}^{(1)}, x_{35}) = (2, 2)$$

$$(x_{13}^{(2)}, x_{34}) = (1, 1)$$

donde

$$x_{12} = x_{12}^{(1)} + x_{12}^{(2)} = 4$$

$$x_{13} = x_{13}^{(1)} + x_{13}^{(2)} = 3$$

y

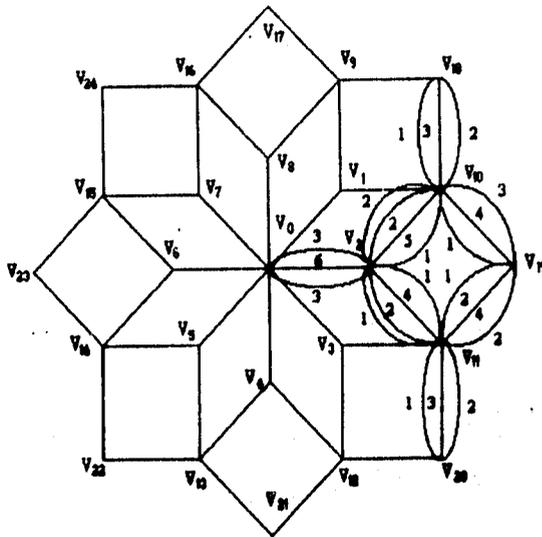
$$\begin{aligned} c(X, \bar{X}) &= c(V_1, V_2/V_3, V_4, V_5) \\ &= x_{23} + x_{24} + x_{35} + x_{34} \\ &= 1 + 2 + 2 + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

El valor del preflujo de un camino elemental esta definido como el flujo del último arco del camino elemental. (Figura 60).

Consideremos $V_i \in X$, la regla de inclusión de V_i , puede ser: enviar un preflujo por el camino elemental de V_1 a V_i , tal que, $c(X, \bar{X})$ es igual a la suma de todos los preflujos de los caminos elementales.

Así cualquier cortadura (Y, \bar{Y}) con $V_1 \in Y, C \in \bar{Y}$, debe tener cada preflujo de un camino elemental al menos una vez. Por lo tanto

$$c(X, \bar{X}) < c(Y, \bar{Y})$$



Partición de los arcos:

$$\begin{aligned} x_{0,2} &= 6 = 3 + 3 = x_{0,2}^{(1)} + x_{0,2}^{(2)} \\ x_{2,10} &= 5 = 2 + 2 + 1 = x_{2,10}^{(1)} + x_{2,10}^{(2)} + x_{2,10}^{(3)} \\ x_{10,18} &= 3 = 1 + 2 = x_{10,18}^{(1)} + x_{10,18}^{(2)} \\ x_{10,19} &= 4 = 2 + 2 = x_{10,19}^{(1)} + x_{10,19}^{(2)} \\ x_{7,11} &= 4 = 1 + 2 + 1 = x_{7,11}^{(1)} + x_{7,11}^{(2)} + x_{7,11}^{(3)} \\ x_{11,19} &= 4 = 2 + 2 = x_{11,19}^{(1)} + x_{11,19}^{(2)} \\ x_{11,20} &= 3 = 1 + 2 = x_{11,20}^{(1)} + x_{11,20}^{(2)} \end{aligned}$$

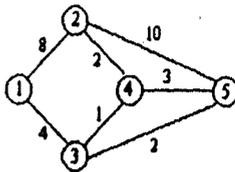
Un preflujo en un camino elemental de:

$(V_0, V_{19}) = x_{0,2}^{(1)}, x_{2,10}^{(3)}, x_{10,18}^{(1)} = 3, 1, 1$	su valor es 1.
$(V_0, V_{19}) = x_{0,2}^{(1)}, x_{2,10}^{(1)}, x_{10,19}^{(1)} = 3, 2, 2$	su valor es 2.
$= x_{0,2}^{(2)}, x_{2,10}^{(2)}, x_{11,19}^{(1)} = 3, 2, 2$	su valor es 2.
$(V_0, V_{20}) = x_{0,2}^{(2)}, x_{2,10}^{(3)}, x_{11,20}^{(1)} = 3, 1, 1$	su valor es 1.

FIGURA 62

6.6 Ejemplos.

1.-) Sea la red



1.3) Aplicar el Algoritmo de Reducción para obtener la cortadura circular mínima o la cortadura circular local mínima.

PASO 0) $S = \{1\}$
 $B = \{2, 3\}$
 $K = \{4, 5\}$

PASO 1)	Para V_2	Para V_3
	$x_{12} = 8$	$x_{13} = 4$
	$b_{24} = 2$	$b_{34} = 1$
	$b_{25} = 10$	$b_{35} = 2$
	$x_{12} = 8 < 12 = b_{24} + b_{25}$	$x_{13} = 4 < 3 = b_{34} + b_{35}$

entonces

$S = \{1, 3\}$
 $B = \{2, 4\}$
 $K = \{5\}$

PASO 1) Para V_4

$$x_{24} = 1$$

$$b_{45} = 3$$

$$x_{24} = 1 < 3 = b_{45}$$

V_2 y V_4 son vértices negativos.

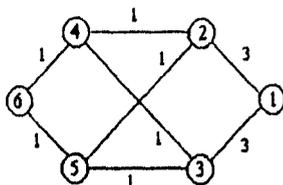
PASO 2) y PASO 3) No existen vértices positivos en B, entonces no existe flujo a redistribuir por lo tanto; terminamos

y

$$S = \{1, 3\} \quad \bar{S} = \{2, 4, 5\}$$

$$C(S, \bar{S}) = 8+1+2 = 11$$

2.-) Sea la red



2.3) Aplicar el Algoritmo de Reducción para obtener la cortadura circular mínima o la cortadura circular local mínima.

PASO 0) $S = \{1\}$

$B = \{2,3\}$

$K = \{4,5,6\}$

PASO 1) Para V_2

$x_{12} = 3$

$b_{24} = 1$

$b_{25} = 1$

$x_{12} = 3 > 2 = b_{24} + b_{25}$

Para V_3

$x_{13} = 3$

$b_{34} = 1$

$b_{35} = 1$

$x_{13} = 3 > 2 = b_{34} + b_{35}$

entonces

$S = \{1,2,3\}$

$B = \{4,5\}$

$K = \{6\}$

PASO 1)	Para V_4	Para V_5
	$x_{24} = 1$	$x_{25} = 1$
	$x_{34} = 1$	$x_{35} = 1$
	$b_{46} = 1$	$b_{56} = 1$
	$x_{24} + x_{34} = 2 > 1 = b_{46}$	$x_{25} + x_{35} = 2 > 1 = b_{56}$

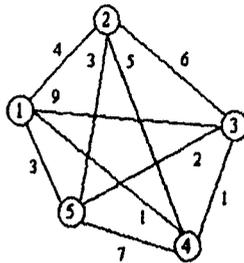
entonces

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Por lo tanto paramos pues el único vértice restante es $V_6 = V_n$, él cual, no puede ser incluido en S y $\bar{S} = \{6\}$.

$$c(S, \bar{S}) = 1+1 = 2$$

3.-) Sea la red



3.3) Aplicar el Algoritmo de Reducción para obtener la cortadura circular minima o la cortadura circular local minima.

PASO 0) $S = \{1\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$K = \{5\}$

PASO 1)	Para V_2	Para V_3	Para V_4
	$x_{12} = 4$	$x_{13} = 9$	$x_{14} = 1$
	$b_{23} = 6$	$b_{32} = 6$	$b_{42} = 5$
	$b_{24} = 5$	$b_{34} = 1$	$b_{43} = 1$
	$b_{25} = 3$	$b_{35} = 2$	$b_{45} = 7$

$$x_{12}=4 < 14 = b_{23} + b_{24} + b_{25} \quad x_{13}=9 = 9 = b_{32} + b_{34} + b_{35} \quad x_{14}=1 < 13 = b_{42} + b_{43} + b_{45}$$

PASO 2)	Para V_2	Para V_3	Para V_4
	$x_{12}=4 > 3 = b_{25}$	$x_{13}=9 > 2 = b_{35}$	$x_{14}=1 < 7 = b_{45}$

es vértice positivo es vértice positivo es vértice negativo.

PASO 3) Redistribuimos el exceso de flujo de V_2 y V_3 a V_4 .

Para V_2

Para V_3

$x_{12} - b_{23} = 4 - 3 = 1$, unidad a V_1 $x_{13} - b_{23} = 9 - 2 = 7$, unidades a V_4

entonces $x_{24} = 1$ pero $b_{34} = 1$, entonces $x_{34} = 1$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1 + 1 + 1 = 3 < 7 = b_{45}$

Por lo tanto paramos y (S, \bar{S}) es la cortadura circular local mínima.

con $S = \{1\}$ $\bar{S} = \{2, 3, 4, 5\}$

y $C(S, \bar{S}) = 4 + 9 + 1 + 3 = 17$

CONCLUSIÓN

Como se puede observar en los ejemplos de las secciones 5.6 y 6.5, el Árbol G-H Reducido y la Gráfica de Orden Parcial en cada uno de ellos son idénticos y al aplicar el Algoritmo de Reducción a cada una de las redes de tales ejemplos obtenemos la cortadura circular local mínima encontrada en el Árbol G-H Reducido y en la Gráfica de Orden Parcial.

Así comprobamos la teoría utilizada para determinar el Algoritmo de Reducción, pues al considerar todas las posibles cortaduras de una red nos enfocamos a la búsqueda de las cortaduras de árbol dadas por el Árbol G-H ya que demostramos con el Teorema 5.1 que una cortadura de árbol domina a una cortadura no de árbol, luego con los Lemas 5.2 y 5.5 demostramos que es posible condensar ciertos vértices y así obtenemos el Árbol G-H Reducido.

Más adelante definimos la Gráfica de Orden Parcial para obtener cortaduras preservadoras del orden y con el Teorema 5.2 demostramos que una cortadura preservadora del orden domina a una cortadura no preservadora del orden. Con el Corolario 5.1 aseguramos que cualquier cortadura preservadora del orden es una cortadura de árbol, con el Lema 5.9 demostramos que se pueden condensar ciertos vértices y así obtenemos la Gráfica de Orden Parcial, a continuación con el Lema 5.10 demostramos que una

Gráfica de Orden Parcial que no tenga vértices prohibidos y el Árbol G-H Reducido son idénticos.

Por lo tanto al encontrar las cortaduras preservadoras del orden dadas por la Gráfica de Orden Parcial reducimos más aún, el número de cortaduras a ser consideradas en la búsqueda de la cortadura circular local mínima $(X, \bar{X}) = (S, \bar{S})$. Como se definió en la Definición 5.6 los vértices que pertenecen al conjunto X están ordenados parcialmente y utilizamos este hecho en el Algoritmo de Reducción para considerar como candidatos a ser incluidos en el conjunto S a los vecinos de V_i y después a los vecinos de los vecinos, así sucesivamente -Paso 0) y Paso 1)- procurando acumular la mayor cantidad de flujo entre ellos al redistribuir el flujo sobrante de los vértices positivos hacia los vértices negativos -Paso 2) y Paso 3).

Por lo tanto queda justificada la teoría empleada para determinar los pasos a seguir en el Algoritmo de Reducción que nos permite encontrar la cortadura circular local mínima o bien la cortadura circular mínima que es la solución al Problema de la Cortadura Circular planteado en las secciones 3.3 y 5.1.

TABLA DE FIGURAS

<u>FIGURA</u>	<u>DESCRIPCIÓN</u>
CAPÍTULO I	
1	Gráfica G.
2	Otra representación de la Gráfica G.
3	Gráfica Simple.
4	Gráfica Completa.
5	Gráfica Bipartita.
6	Gráfica Bipartita Completa.
7	Gráfica Simple Implícita
8	Gráfica, Gráfica Parcial, Subgráfica Inducida. Subgráfica Arista-Inducida.
9	Cadena, Cadena Simple y Cadena Elemental.
10	Gráfica Conexa y Gráfica no Conexa.
11	Ciclo Cerrado, Ciclo Simple y Ciclo Elemental.
12	Arboles de 6 Vértices.
13	Teorema 1.1.
14	Arista de Corte.
15	Cortadura y Cortadura Minimal.
16	Vértice de Corte.
17	Cortadura de Vértices.
18	k-Cortadura de Arista.
19	k-Cortadura de Vértice.
20	Digráfica D y Gráfica Implícita de D.
21	Grado Hacia Adentro y Grado Hacia Afuera de un Vértice.
CAPÍTULO II	
22	Red N.
23	$f'(S)$ y $f(S)$.
24	Capacidad y Flujo en una Red.
25	Conversión de una red N con varios orígenes y varios destinos a una red N' con un sólo origen y un sólo destino.
26	Capacidad de una Cortadura.
27	Lema 2.2.
28	Cadena Elemental f -de incrementación.
29	Tres casos de los arcos que inciden en un vértice de una cadena elemental f -de incrementación.
30	Flujo Revisado Basado en C.
31	Árbol f -no saturado.
32	Diagrama de Flujo del Método de Etiquetación.

<u>FIGURA</u>	<u>DESCRIPCIÓN</u>
CAPÍTULO IV	
33	Flujo Máximo entre dos vértices cualesquiera.
34	Lema 4.1.
35	Lema 4.2.
36	Paso 3.-) Algoritmo para construir el árbol G-H.
37	Paso 5.-) Algoritmo para construir el árbol G-H.
38	Paso 6.-) Algoritmo para construir el árbol G-H.
39	Construcción de un árbol de cortadura G-H. (Ejemplo).
40	Cualquier estado durante la construcción de un árbol de cortadura G-H.
41	Dos casos que se presentan al cortar un vértice generalizado durante la construcción de un árbol de cortadura G-H.
CAPÍTULO V	
42	Cortaduras Cruzadas.
43	Lema 5.1.
44	Lema 5.2.
45	Lema 5.3.
46	Cortaduras de Árbol y Cortadura de Árbol Bipartita.
47	Lema 5.4.
48	Teorema 5.1.
49	Lema 5.5.
50	$X_{i-1} \subset X_i$.
51	Gráfica de Orden Parcial.
52	Teorema 5.2.
53	Gráfica G, dos Árboles de Cortadura G-H de la Gráfica G, Gráfica de Orden Parcial de la Gráfica G.
54	Lema 5.7.
55	Lema 5.8.
56	Definición 5.12.
57	Corolario 5.1.
58	Lema 5.9.
59	Lema 5.10.
CAPÍTULO VI	
60	Diagrama de Flujo del Algoritmo de Reducción.
61	Ejemplo del Algoritmo de Reducción.
63	Preflujo.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Bondy, J. A. and Murty, U. S. R.
"Graph Theory with Applications".
The MacMillan Press Ltd., 1976.
- 2.- Curco Cobos, María del Carmen.
"Una Introducción a la Teoría de Gráficas".
Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México., 1989.
- 3.- Gomory, R. E. and Hu, T. C.
"Multi-Terminal Network Flows".
J. Soc. Indust. Appl. Math.
Vol. 9, No. 4, December, 1961.
- 4.- Hu, T. C.
"Integer Programming and Network Flows".
Mathematics Research Center and Department of Computer
Sciences University of Wisconsin.
Addison Wesley Publishing Company.
- 5.- Hu, T. C. and Rusky, F.
"Circular Cuts in a Network".
Mathematics of Operation Research.
Vol. 5, No. 3, August, 1980.
- 6.- Prawda Wetenberg, Juan.
"Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones".
Vol. 1, Modelos Determinísticos.
Editorial Limusa, 1984.
- 7.- Wilson, R. J.
"Introducción a la Teoría de Grafos".
Editorial Alianza, 1983.