

01173

B.  
20  
7

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

de la

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**MODELACION MECANICA  
DE UN  
DISCO SUJETO A COMPRESION DIAMETRAL**

**(tesis)**

Requisito que para obtener el grado de Maestro en Ingeniería Mecánica presenta

**Rubén Vázquez León**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

1996

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

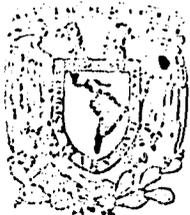
**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Dedicado a Candy y a Mariana**

**por su comprensión y apoyo decidido.**



Escuela Nacional  
de Ingeniería

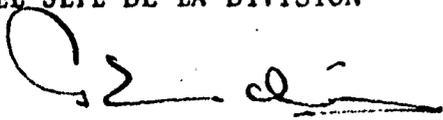
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO.  
FACULTAD DE INGENIERIA

Profr. LUIS REYES AVILA  
P r e s e n t e

Comunico a usted que a propuesta del COORDINADOR DE LA  
SECCION DE MECANICA ha sido designado  
como director de tesis del alumno(a) RUBEN VAZQUEZ LEON  
para obtener el grado de  
M EN I EN MECANICA.

Mucho he de agradecerle su comunicaci3n, por escrito, de la  
aceptaci3n a esta designaci3n y el nombre de la tesis a de-  
sarrollar.

Atentamente,  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
Cd. Universitaria a 26 de febrero de 1987  
EL JEFE DE LA DIVISION

  
DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE

E.5.1

# CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>1. ELEMENTOS TEÓRICOS BÁSICOS</b>	<b>3</b>
<b>2. FUNCIONES DE DEFORMACIÓN.</b>	<b>5</b>
<b>2.1. Modelo matemático de un disco.</b>	<b>5</b>
<b>2.2 Función de deformación interpolada sobre nueve puntos.</b>	<b>5</b>
<b>2.3. Función de deformación interpolada con doce puntos de observación.</b>	<b>8</b>
<b>3. MODELACIÓN MECÁNICA</b>	<b>11</b>
<b>3.1 Campos derivados de la deformación que se basa en mediciones sobre nueve puntos.</b>	<b>11</b>
GRADIENTE DE DEFORMACIÓN.	11
CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.	12
GRADIENTE DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.	12
DEFORMACIONES INFINITESIMALES.	12
SUPOSICIONES DE CONSTITUTIVIDAD (Esfuerzos de Piola-Kirchoff).	12
TRACCIONES DE SUPERFICIE.	13
CARGAS DE CUERPO.	14
<b>3.2 Campos derivados de la función de deformación interpolada sobre doce puntos.</b>	<b>14</b>
GRADIENTE DE DEFORMACIÓN.	15
CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.	15
GRADIENTE DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.	15
DEFORMACIONES INFINITESIMALES.	16

ESFUERZOS DE PIOLA-KIRCHOFF.	16
TRACCIONES DE SUPERFICIE.	16
<b>4. EXPERIMENTACIÓN CON MOIRE.</b>	<b>17</b>
4.1 Técnica aplicada en el análisis por moire de un disco sujeto a compresión diametral.	18
4.2. Notas de laboratorio.	18
<b>5. INTERPOLACIÓN DE LOS CAMPOS DE DESPLAZAMIENTO UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS.</b>	<b>21</b>
5.1 Método del elemento finito en síntesis.	21
5.2. Aplicación del método del elemento finito para interpolar desplazamientos en un disco sujeto a compresión diametral	21
<b>6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.</b>	<b>25</b>
6.1. Modelación computacional.	25
6.2. Calibración del Modelo.	28
Preliminares.	28
Deformaciones Planas	29
Esfuerzos Planos	29
Objetivo de la calibración.	30
6.2. La Modelación computacional y las Gráficas de campo total.	33
<b>CONCLUSIONES.</b>	<b>36</b>

## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo nace de nuestra convicción de que es necesaria e inaplazable para el desarrollo de la ingeniería, la creación de nuevos métodos de análisis que se deriven de modelos matemáticos representativos de los fenómenos físicos presentes en los problemas, en contraposición a los métodos de análisis demasiado simplificados que se usan tradicionalmente.

Es indudable que las hipótesis tradicionales y las soluciones "de ingeniería" (que violan a veces principios fundamentales de la física) han sido respuestas adecuadas hasta un pasado reciente. Sin embargo, también es cierto que los problemas actuales plantean situaciones donde es imprescindible la optimización y la seguridad. Entonces, las respuestas válidas nacen de modelos cuya característica principal es la gran aproximación con que describen la física de los problemas. Además, las herramientas y tecnologías de análisis se han vuelto más poderosas. No hay razón entonces para eludir total o parcialmente, a través de hipótesis, las complejidades matemáticas de los modelos de la física de los problemas analizados ni se debería extrapolar peligrosamente la potencia de los modelos elementales.

Para resolver problemas complicados por su geometría o condiciones de carga, los métodos numéricos avanzados como el FEM (Método el elemento finito) y el BEM (Método de elementos frontera) se basan en los desarrollos recientes de la computación electrónica. La alternativa para el ingeniero son los métodos experimentales de análisis, como el moire y la fotoelasticidad. Sin embargo, el desconocimiento de los fundamentos teóricos en que se basan estos métodos ha conducido a la comisión de costosos errores durante su aplicación.

Con esa ideología, en este trabajo se plantean los siguientes objetivos:

1. Proponer una nueva metodología de análisis y modelación para problemas de valores en la frontera asociados a la mecánica de sólidos deformables, a través de la cual se obtiene la solución analítica del problema partiendo del conocimiento de la configuración deformada del cuerpo en estudio. Dicha metodología puede resumirse en los siguientes pasos:
  - A). Observación experimental de la configuración deformada del cuerpo  $B$  en estudio.
  - B). Con base en la cinemática observada de algunos puntos en la frontera del cuerpo, construir una función  $f:B \rightarrow f(B)$  de deformación que caracteriza el fenómeno. Aquí  $f(B)$  es la configuración deformada del cuerpo  $B$  y se ha propuesto de tipo polinomial.
  - C). Dentro del marco teórico de la mecánica del medio continuo, construir a partir de  $f$  los campos vectoriales y tensoriales de desplazamiento en la superficie, deformación infinitesimal, esfuerzo, etc., y probar que satisfacen los principios básicos de la mecánica, a saber: el principio de conservación de la masa, los balances de momento lineal y angular. Además, el campo tensorial de esfuerzos debe satisfacer el teorema de Cauchy de donde se determinan las tracciones de superficie compatibles con  $f:B \rightarrow f(B)$ .
2. Utilizar la modelación mecánica desarrollada previamente para simular en computadora el fenómeno estudiado. Tal simulación, a la que hemos llamado Análisis Computacional de Esfuerzos, consiste en:
  - A). Utilizando la función de deformación  $f:B \rightarrow f(B)$ , reproducir en la pantalla de la computadora el experimento de moire de Análisis Experimental de Esfuerzos.
  - B). Graficar los campos globales de desplazamiento, deformación y esfuerzos construídos con la modelación mecánica.

3. Conceptualizando el método del elemento finito como una técnica de interpolación y aprovechando que la técnica experimental de moire permite conocer los desplazamientos en ciertos puntos del cuerpo, los cuales identificaremos como puntos nodales, proponer un método para determinar el campo de desplazamientos en la frontera del cuerpo en estudio. Este método consiste en:

- A). Partiendo de los resultados experimentales de la técnica de moire, determinar los desplazamientos de los puntos nodales elegidos.
- B). Utilizando la técnica del elemento finito, construir un conjunto de funciones linealmente independientes o funciones base, para general el espacio vectorial de elemento finito sobre el dominio de la superficie de  $B$  y construir el campo de desplazamientos aproximado que viene a ser una combinación lineal de dichas funciones base.
- C). A partir de los resultados anteriores, construir gráficas que puedan compararse con las obtenidas en la etapa B del segundo objetivo.

Como aportación especial de esta tesis, además de la propuesta arriba descrita, se presenta el desarrollo de una solución fotosensibilizadora de superficies que se preparó por primera vez en los laboratorios nacionales a partir de la solución de Van Dike<sup>1</sup>. Este desarrollo fue necesario porque, para validar la metodología propuesta, se analizó en este trabajo el modelo de un disco sujeto a compresión diametral para el que existen soluciones publicadas<sup>2</sup> que sirven como medio de contraste para los resultados obtenidos con el modelo mecánico propuesto.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: En el primer capítulo se presenta el modelo racional de la elasticidad lineal tridimensional en forma concisa pero suficiente para familiarizar al lector con la nomenclatura y los conceptos que se discuten en los capítulos subsecuentes.

El capítulo 2 detalla la metodología que se propone para la construcción de la función de deformación del problema analizado: Se modela un disco mediante un subconjunto de puntos materiales en  $\mathbf{R}^3$ , Enseguida y con base en mediciones efectuadas en un experimento previo, se construyen dos funciones polinomiales de deformación y se discute su validez.

En el tercer capítulo se construyen, dentro del marco teórico de la mecánica del medio continuo, los campos vectoriales y tensoriales de desplazamiento, deformaciones infinitesimales y esfuerzos de Piola-Kirchoff.

El capítulo 4 es un resumen de los procedimientos y técnicas desarrollados para instrumentar un modelo de poliuretano con la técnica experimental de moire a fin de reproducir algunos experimentos publicados por Durelli y Parks<sup>3</sup> y obtener experimentalmente los datos de desplazamiento de los nodos de una triangularización con elementos finitos de la frontera del modelo que permite la construcción del campo global de desplazamientos sobre dicha frontera mediante esta técnica de Interpolación. La triangularización con elementos finitos y las funciones base utilizadas se describen en el capítulo 5.

En la redacción de este trabajo se ha evitado en lo posible la reproducción textual de la teoría ya publicada, proporcionando al final de cada capítulo las referencias correspondientes, a donde agradeceremos se remita el lector interesado.

# 1. ELEMENTOS TEÓRICOS BÁSICOS

El modelo matemático del problema analizado en este trabajo tiene su fundamentación teórica en la presentación formal de la mecánica del medio continuo y es conocido como modelo de la elastostática tridimensional<sup>4</sup>. En esta parte se presentan las definiciones de los conceptos involucrados así como la nomenclatura utilizada.

1o. Cualquier cuerpo  $B$  se puede modelar como un subconjunto del espacio euclideo de puntos  $\mathbf{R}^3$ .

2o. La afirmación anterior permite postular una relación univaluada entre las configuraciones no deformada (denotada  $B$ ) y deformada ( $B'$ ) del cuerpo estudiado. Tal función  $f: B \rightarrow B'$  donde  $B \subset \mathbf{R}^3$  se llama la función matemática de deformación de  $B$  o simplemente la **deformación de  $B$** .

Para que dicha función modele una deformación física de  $B$ , debe cumplir las siguientes propiedades:

- i).  $f \in C^1(B, B')$
- ii).  $f^{-1} \in C^1(B, B')$
- iii).  $\det \nabla f(x_1, x_2, x_3) > 0 \forall (x_1, x_2, x_3) \in B$

Las dos primeras condiciones se asocian con la hipótesis de continuidad y la tercera con el principio de conservación e impenetrabilidad de la materia.

3o. Por otro lado, cualquiera que sea su forma, debe satisfacer las ecuaciones de campo de la mecánica, es decir:

- iv).  $\bar{u}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) - (x_1, x_2, x_3)$ .
- v).  $\underline{E}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} [\nabla u(x_1, x_2, x_3) + \nabla u^T(x_1, x_2, x_3)]$
- vi).  $\text{div} \underline{S}(x_1, x_2, x_3) + b(x_1, x_2, x_3) = \rho \ddot{f}(x_1, x_2, x_3)$
- vii).  $\underline{S} \underline{F}^T(x_1, x_2, x_3) = \underline{F} \underline{S}^T(x_1, x_2, x_3) \forall (x_1, x_2, x_3) \in B$

Donde  $u$  es el campo vectorial de desplazamientos,  $\underline{E}$  es el campo tensorial de deformaciones infinitesimales,  $\underline{S}$  es el campo tensorial de esfuerzos,  $b$  es el vector de cargas de cuerpo y  $\underline{F}$  es el gradiente de  $f$ .

El campo tensorial  $\underline{S}: B \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$  está dado, en general, por:

$$\underline{S} = \underline{S}(\underline{F}) + \underline{S}(\underline{I}) + \underline{C}(\underline{E}) + o(\epsilon)$$

y en el caso lineal, por:

$$\underline{S} = \underline{C}(\underline{E})$$

Aquí  $\underline{S}$  es el tensor de esfuerzos de Piola-Kirchoff,  $\underline{S}(\underline{I})$  nos da el tensor de esfuerzos residuales,  $\underline{C}$  es el tensor de elasticidades del material y  $o(\epsilon)$  es el término de orden  $o$  que resulta de la expansión de  $\underline{S}$  en la vecindad de un punto  $p$  en  $B$ .

En el caso especial en que el comportamiento del material sea elástico lineal e isótropo, su ecuación constitutiva está dada por la ley de Hooke generalizada, esto es:

$$\underline{S} = 2\mu \underline{E} + \lambda(\text{tr } \underline{E}) \underline{I}$$

donde  $\beta > 0$ ,  $0 < \nu < 0.5$ , representan el módulo de Young y la relación de Poisson respectivamente. Si se sustituyen dichas constantes, expresándolas en términos de los módulos de Lamé, la expresión anterior se convierte en:

$$\underline{S} = \frac{\beta}{1+\nu} \left[ \underline{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \underline{E}) \underline{I} \right]$$

4o. Para evaluar las cargas en las fronteras de  $B$  se aplica el teorema de Cauchy, cuyo enunciado es:

"Para cada  $\underline{S}$  con dominio  $B$ , existe un campo vectorial único  $s$  tal que  $s = \underline{S} \underline{n}$ "

donde  $\underline{n}$  es el conjunto de vectores unitarios normales a la frontera  $\partial B$  del dominio  $B$ . Dicho campo, es el vector de tracciones de superficie.

#### BIBLIOGRAFIA

<sup>1</sup>DURELLI, A.J.; PARKS, V.J. Moire Analysis of strain, Cap. 14, Prentice Hall, Inc. New Jersey 1970.

<sup>2</sup>Idem. Cap. 7..

<sup>3</sup>Ibidem.

<sup>4</sup>GURTIN, M. E., An introduction to Continuum Mechanics, Cap. 10, p. 205., Academic Press, New York, 1981

## 2. FUNCIONES DE DEFORMACIÓN.

El objetivo de esta parte es presentar la metodología para construir, a partir de la cinemática el cuerpo, la función  $f: B \rightarrow f(B)$  de deformación. Tal método consiste en interpolar mediante un polinomio de grado conveniente, la configuración deformada del disco sujeto a compresión diametral, a partir de mediciones físicas realizadas en puntos de la frontera del mismo.

### 2.1. Modelo matemático de un disco.

Las funciones que se construyen aquí, están definidas sobre el dominio  $B$ , que es el modelo de la configuración no-deformada del disco, mismo que se puede modelar matemáticamente como un conjunto de puntos materiales incluido en el espacio euclideo de puntos  $\mathbf{R}^3$ . Explícitamente:

$$B = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : (x_1, x_2) \in \Omega, -\frac{h}{2} < x_3 < \frac{h}{2} \right\}$$

donde  $B = \Omega \cup \partial\Omega$  y para  $r > 0$ :

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2 \}$$

cuyas fronteras son:

$$\begin{aligned} \partial B_1 &= \{ (x_1, x_2, h/2) : (x_1, x_2) \in \Omega \} \\ \partial B_2 &= \{ (x_1, x_2, -h/2) : (x_1, x_2) \in \Omega \} \\ \partial B_3 &= \partial\Omega \times (-h/2, h/2) \end{aligned}$$

donde  $r > 0$ , es el radio del disco y  $h: \Omega \times \partial\Omega \rightarrow (0, \infty)$  es la función de espesor correspondiente.

Es de esperarse que la representatividad lograda con las funciones de deformación esté relacionada con el grado del polinomio utilizado. Por esta razón, se construyeron dos funciones de este tipo: Una que utiliza como base para la interpolación mediciones en nueve puntos de la frontera del disco y otra que toma como datos para la interpolación las mediciones realizadas sobre doce puntos. Es interesante comparar los resultados obtenidos según el número de puntos de la función utilizada.

### 2.2 Función de deformación interpolada sobre nueve puntos.

Construiremos en esta parte la función de deformación  $f: B \rightarrow B'$ , de nueve puntos. Para hacerlo supondremos que:

**HIPÓTESIS H1:** Los puntos del modelo no se desplazan en la dirección de  $x_3$  (Ver fig. No. 1 en la página siguiente).

La observación del cambio de geometría del disco nos permite construir la deformación a partir de las siguientes consideraciones cinemáticas: Los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I; de la configuración no deformada se convierten, respectivamente en A', B', C', D', E', F', G', H', I'; de la configuración deformada. La medición de coordenadas de estos puntos se hizo sobre un modelo de laboratorio construido con

poliuretano, de 7 cm de diámetro, 1 cm de espesor. Este modelo se colocó en un pequeño marco para cargarlo diametralmente. Los valores medidos se enlistan a continuación:

Datos experimentales

Configuración No Deformada	Configuración Deformada
$a=0.094$	$a_1=0.094$
$b=0.33$	$b_1=0.322$
$r=0.35$	$l=0.356$

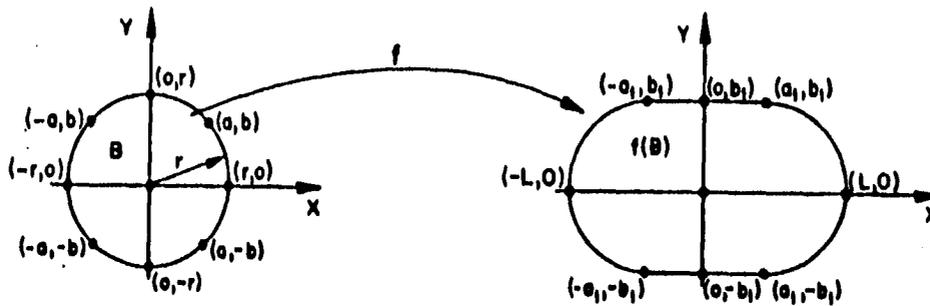


Fig. 1. Datos para la función de deformación basada en nueve puntos de medición.

Con base en la observación anterior se propone una función de deformación definida por:

$$f: B \rightarrow B$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_1^2 x_2^2 + \alpha_7 x_1^3 + \alpha_8 x_2^3, \\ \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \beta_4 x_1^2 + \beta_5 x_2^2 + \beta_6 x_1^2 x_2^2 + \beta_7 x_1^3 + \beta_8 x_2^3, x_3)$$

donde los coeficientes se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas que nace de las condiciones cinemáticas de la figura 1. Los valores de los coeficientes son:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = 0 \\ \beta_0 &= \beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = 0 \\ \alpha_1 &= \frac{a^3 l - a_1 r^3}{a^3 r - a r^3} \\ \alpha_7 &= \frac{a_1 r - a_1 l}{a^3 r - a r^3} \\ \beta_2 &= \frac{b^3 c - c r^3}{b^3 r - b r^3} \\ \beta_8 &= \frac{c r - b c}{b^3 r - b r^3}\end{aligned}$$

expresados en términos de las coordenadas medidas sobre los puntos elegidos (Ver la figura 1). Por supuesto, es posible pensar en varios juegos de mediciones para diferentes experimentos.

La función propuesta se convierte en:

$$\begin{aligned}f: B &\rightarrow B \\ f(x_1, x_2, x_3) &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_7 x_1^3, \beta_2 x_2 + \beta_8 x_2^3, x_3)\end{aligned}$$

Por su carácter polinomial, esta función satisface en forma natural la pertenencia a  $C^1(B, B')$ .

Por otro lado, si  $p$  y  $q$  son dos puntos de  $\mathbf{R}^3$  tales que sus imágenes bajo  $f: B \rightarrow B'$  son idénticas, es decir,  $f(p) = f(q)$ , entonces se tendrá:

$$f(x_p, y_p, z_p) = (\alpha_1 x_p + \alpha_7 x_p^3, \beta_2 y_p + \beta_8 y_p^3, z_p)$$

$$f(x_q, y_q, z_q) = (\alpha_1 x_q + \alpha_7 x_q^3, \beta_2 y_q + \beta_8 y_q^3, z_q)$$

$$f(x_p, y_p, z_p) = f(x_q, y_q, z_q)$$

$$(\alpha_1 x_p + \alpha_7 x_p^3, \beta_2 y_p + \beta_8 y_p^3, z_p) = (\alpha_1 x_q + \alpha_7 x_q^3, \beta_2 y_q + \beta_8 y_q^3, z_q)$$

de donde puede concluirse que, para tener la misma imagen, ambos puntos deben tener las mismas coordenadas. Es decir, la función es uno a uno ya que se estaría hablando del mismo punto.

El tercer requisito que debe cumplir la función es que  $\det \nabla f(x_1, x_2, x_3) > 0 \forall (x_1, x_2, x_3) \in B$ . Este requerimiento impone algunas restricciones matemáticas sobre el dominio de la función de deformación propuesta. Explícitamente:

$$\begin{aligned}\nabla f: B &\rightarrow L(R^2, R^2) \\ \nabla f(x_1, x_2, x_3) &= f_{i,j}(x_1, x_2, x_3) e_i \otimes e_j \forall p \in B\end{aligned}$$

Calculando el determinante, se establece la restricción:

$$\det \nabla f(x_1, x_2, x_3) = (3\alpha_7 x_1^2 + \alpha_1)(3\beta_8 x_1^2 + \beta_2) > 0 \quad (x_1, x_2, x_3) \in B$$

El análisis de la expresión anterior predice que en la vecindad cercana al punto de aplicación de la carga existen condiciones donde "podrían" ocurrir violaciones de la misma. Con los valores de las

mediciones que hemos trabajado en esta función se construyó una representación del dominio donde la restricción se cumple ampliamente. Esta, se muestra en la figura 2.

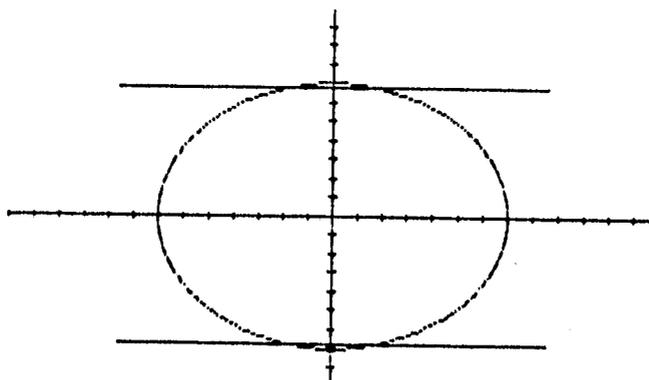


Fig. 2. Dominio de definición positiva para el determinante del gradiente de deformación.

### 2.3. Función de deformación Interpolada con doce puntos de observación.

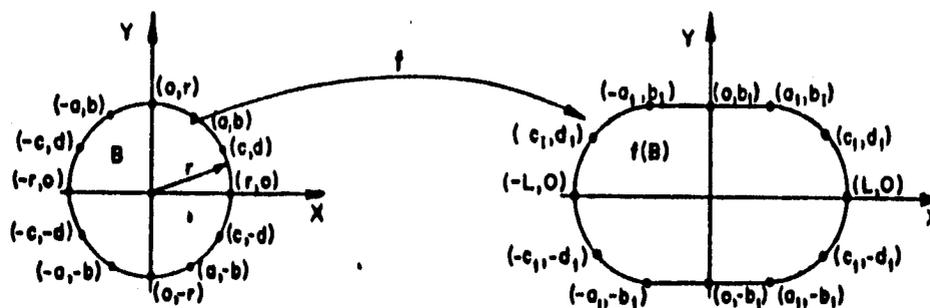


Fig. 3. Datos para la función de deformación basada en doce puntos de medición.

Nuestro objetivo ahora es construir una deformación basada en mediciones sobre doce puntos de la frontera, que se representan en la figura No. 3.. Esto es una mera repetición del procedimiento de la sección

anterior. Sin embargo, implica alguna dificultad adicional para la solución del sistema de ecuaciones simultáneas y podemos apuntar que interpolar con más puntos o para cuerpos con geometrías más complicadas, implican el desarrollo y aplicación de algún método numérico apropiado. Para el efecto, en este trabajo se hizo una adaptación del método del elemento finito que se describe en el capítulo 5.

Bajo la misma hipótesis H1, se analizan los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, cuyas imágenes son A', B', C', D', E', F', G', H', I', J', K' y L' respectivamente (fig. 3) y se propone una función de deformación de la forma:

$$f: B \rightarrow B$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1^2 + \alpha_4 x_1 x_2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_1^3 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_2^3 + \alpha_{10} x_1^4 + \alpha_{11} x_1^2 x_2^2 + \alpha_{12} x_2^4, \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_1 x_2 + \beta_5 x_2^2 + \beta_6 x_1^3 + \beta_7 x_1^2 x_2 + \beta_8 x_1 x_2^2 + \beta_9 x_2^3 + \beta_{10} x_1^4 + \beta_{11} x_1^2 x_2^2 + \beta_{12} x_2^4, x_3)$$

Los coeficientes, calculados a partir de las consideraciones cinemáticas resultan:

$$\alpha_2 = \frac{l}{r} - r^2 \alpha_6$$

$$\alpha_6 = \frac{a_1 r - a_1 l}{a^3 r - a r^3} - \frac{b^2}{(a^2 - r^2)} \cdot \alpha_8$$

$$\alpha_8 = \frac{a(a^2 - r^2)(c_1 r - c l) - c(c^2 - r^2)(a_1 r - a l)}{a c d^2 r (a^2 - r^2) - a b^2 c r (c^2 - r^2)}$$

$$\beta_1 = \frac{b_1}{r} - r^2 \beta_9$$

$$\beta_7 = \frac{d_1 r - d b_1}{c^2 d r} - \frac{d^2 - r^2}{c^2} \cdot \beta_9$$

$$\beta_9 = \frac{c^2 d (b_1 r - b b_1) - a^2 b (d_1 r - d b_1)}{b d r (c^2 (b^2 - r^2) - a^2 (d^2 - r^2))}$$

Todos los demás coeficientes son nulos. Los valores a, b, c, d, a, b, c, d, l, r se determinan mediante mediciones en un experimento similar al que se describió antes para la función propuesta interpolada para nueve puntos. Los valores numéricos correspondientes son:

#### VALORES EXPERIMENTALES

Configuración no deformada	Configuración deformada
a=0.094	a=0.094
b=0.33	b=0.322
c=0.325	c=0.325
d=0.185	d=0.183
e=0.35	l=0.356

Entonces, la función propuesta es de la forma:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_6 x_1^3 + \alpha_8 x_1 x_2^2, \beta_2 x_2 + \beta_9 x_2^3 + \beta_7 x_1 x_2^2, x_3)$$

Esta función, obviamente, es un elemento de  $C^1(B, B')$ . Enseguida, se demuestra que es uno a uno:

Sean dos puntos  $p, q \in B \subset \mathbf{R}^3$ , tales que sus imágenes bajo  $f: B \rightarrow B$  son idénticas, entonces:

$$f(x_p, y_p, z_p) = (\alpha_1 x_p + \alpha_6 x_p^3 + \alpha_8 x_p y_p^2, \beta_2 y_p + \beta_9 y_p^3 + \beta_7 x_p y_p^2, z_p)$$

$$f(x_q, y_q, z_q) = (\alpha_1 x_q + \alpha_6 x_q^3 + \alpha_8 x_q y_q^2, \beta_2 y_q + \beta_9 y_q^3 + \beta_7 x_q y_q^2, z_q)$$

Implican que  $x_p = x_q, y_p = y_q, z_p = z_q$ . Es decir,  $p$  y  $q$  son el mismo punto, o sea  $f: B \rightarrow B$  es una función uno a uno.

Garantizar el requerimiento establecido por  $\det \nabla f(x_1, x_2, x_3) > 0 \forall (x_1, x_2, x_3) \in B$ , conduce a las siguientes expresiones:

$$\nabla f: B \rightarrow L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = f_{i,j}(x_1, x_2, x_3) e_i \otimes e_j \forall p \in B$$

cuya matriz representativa es:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_6 x_1^2 + \alpha_8 x_2^2 & 2\alpha_8 x_1 x_2 & 0 \\ 2\beta_7 x_1 x_2 & \beta_2 + \beta_9 x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \forall p \in B$$

y explícitamente:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1 + 3\alpha_6 x_1^2 + \alpha_8 x_2^2)(\beta_2 + \beta_9 x_1^2 + x_2^2) > 0$$

que se ha graficado, para las mediciones dadas, en la figura 4.

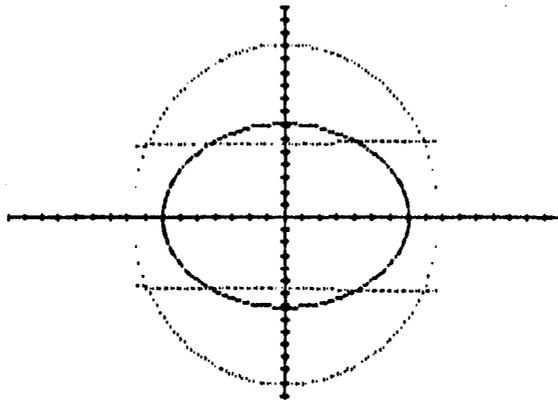


Fig. 4. Dominio de definición positiva para el determinante del gradiente de deformación.

### 3. MODELACIÓN MECÁNICA

Los dos polinomios propuestos en el capítulo anterior modelan el cambio de geometría del disco sujeto a compresión diametral. El modelo mecánico se complementa en este capítulo mediante la derivación, para ambas, de algunos campos vectoriales y tensoriales cuya interpretación física es importante en la mecánica de sólidos deformables. Se observará que la derivación de dichas funciones es rutinaria una vez que se ha encontrado la función de deformación. En cierta etapa de este desarrollo, se introducirán las hipótesis de linealidad, isotropía y homogeneidad para el material constitutivo. Esto es con el fin de obtener resultados comparables a los conocidos. Hemos trabajado cada deformación por separado, discutiéndose simultáneamente las implicaciones de cada caso en particular.

#### 3.1 Campos derivados de la deformación que se basa en mediciones sobre nueve puntos.

Para este caso la deformación de B es:

$$f: B \rightarrow B$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_7 x_1^3, \beta_2 x_2 + \beta_8 x_2^3, x_3)$$

donde los coeficientes están dados por:

$$\alpha_1 = \frac{a^3 l - a_1 r^3}{a^3 r - a r^3}$$

$$\alpha_7 = \frac{a_1 r - a_1 l}{a^3 r - a r^3}$$

$$\beta_2 = \frac{b^3 c - c r^3}{b^3 r - b r^3}$$

$$\beta_8 = \frac{c r - b c}{b^3 r - b r^3}$$

debe observarse que la forma matemática de  $f: B \rightarrow B$  no incluye movimientos en la dirección de  $e_3$ , que es la hipótesis cinemática que hicimos para construir la deformación.

A hora es posible derivar los siguientes campos vectoriales y tensoriales que permiten predecir el comportamiento físico del cuerpo:

#### GRADIENTE DE DEFORMACIÓN.

El gradiente de deformaciones, es el campo tensorial definido por:

$$F: B \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = f_{i,j}(x_1, x_2, x_3) e_i \otimes e_j$$

En este caso, su forma explícita es

$$F(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1 + 3\alpha_7 x_1^2) e_1 \otimes e_1 + (\beta_2 + 3\beta_8 x_2^2) e_2 \otimes e_2$$

de donde puede observarse que la función  $f: B \rightarrow B$  es no homogénea.

## CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.

Los desplazamientos de los puntos del cuerpo  $B$  están dados por el campo vectorial definido por:

$$\bar{u}: B \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\bar{u} = f(x_1, x_2, x_3) - (x_1, x_2, x_3) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in B$$

es decir:

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3) = ((\alpha_1 - 1)x_1 + \alpha_7 x_1^3, (\beta_2 - 1)x_2 + \beta_8 x_2^3, 0) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in B$$

Aquí es obvio que no ocurren desplazamientos en el eje de  $x_3$ . Esta es consecuencia de la hipótesis cinemática de la que partimos. El campo de desplazamientos es no homogéneo.

## GRADIENTE DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.

El campo tensorial definido por:

$$\nabla \bar{u}: B \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\nabla \bar{u} = u_{i,j}(x_1, x_2, x_3) e_i \otimes e_j \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in B$$

resulta:

$$\nabla \bar{u}(x_1, x_2, x_3) = ((\alpha_1 - 1) + 3\alpha_7 x_1^2) e_1 \otimes e_1 + ((\beta_2 - 1) + 3\beta_8 x_2^2) e_2 \otimes e_2 \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in B$$

## DEFORMACIONES INFINITESIMALES.

El tensor de deformaciones infinitesimales se define por:

$$\underline{E}: B \rightarrow S(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$$

$$\underline{E}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} [\nabla \bar{u}(x_1, x_2, x_3) + \nabla \bar{u}^T(x_1, x_2, x_3)] \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in B$$

y en este caso:

$$\underline{E}(x_1, x_2, x_3) = [((\alpha_1 - 1)x_1^2 + 3\alpha_7 x_1^3) e_1 \otimes e_1 + ((\beta_2 - 1)x_2^2 + 3\beta_8 x_2^3) e_2 \otimes e_2] \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in B$$

## SUPOSICIONES DE CONSTITUTIVIDAD (Esfuerzos de Piola-Kirchoff).

Si  $B$  es un cuerpo de material elástico, su relación constitutiva puede modelarse mediante:

$$\underline{S} = \hat{S}(\underline{F}) = \hat{S}(\underline{I}) + \underline{C}(\underline{E}) + o(\varepsilon)$$

donde  $\hat{S}(\underline{I})$  es el tensor de esfuerzos residuales, el cual en este análisis se supone nulo (esta suposición es una práctica generalizada dada la aparente imposibilidad de cuantificar los esfuerzos residuales). Por lo tanto:

$$\underline{S} = \underline{C}(\underline{E}(x_1, x_2, x_3))$$

$$\underline{S} = \frac{\beta(x_1, x_2, x_3)}{1 + \nu(x_1, x_2, x_3)} (\underline{E}(x_1, x_2, x_3)) + \frac{\nu(x_1, x_2, x_3)}{1 - 2\nu(x_1, x_2, x_3)} (\text{tr } \underline{E}(x_1, x_2, x_3) \underline{I})$$

donde  $\beta$  y  $\nu$  son las constantes de Young y Poisson, respectivamente. Por tanto, bajo las suposiciones de homogeneidad, isotropía y elasticidad lineal, resulta el tensor de esfuerzos de Piola-Kirchoff:

$$\underline{S} = \frac{\beta}{1 + \nu} (\underline{E}(x_1, x_2, x_3)) + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr } \underline{E}(x_1, x_2, x_3) (\underline{I})$$

Más explícitamente, componente a componente, el tensor de esfuerzos es:

$$S_{11} = \frac{\beta}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)E_{11} + \nu(E_{11} + E_{22} + E_{33})]$$

$$S_{12} = \frac{\beta}{(1 - \nu)} E_{12}$$

$$S_{13} = \frac{\beta}{(1 - \nu)} E_{13}$$

$$S_{21} = \frac{\beta}{(1 - \nu)} E_{21}$$

$$S_{22} = \frac{\beta}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)E_{22} + \nu(E_{11} + E_{22} + E_{33})]$$

$$S_{23} = \frac{\beta}{(1 - \nu)} E_{23}$$

$$S_{31} = \frac{\beta}{(1 - \nu)} E_{31}$$

$$S_{32} = \frac{\beta}{(1 - \nu)} E_{32}$$

$$S_{33} = \frac{\beta}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)E_{33} + \nu(E_{11} + E_{22} + E_{33})]$$

### TRACCIONES DE SUPERFICIE.

Según Cauchy, existe un campo vectorial de tracciones de superficie:

$$\underline{s}: B \rightarrow R^3$$

que satisface la ecuación:

$$\underline{s} = S \underline{n}$$

donde  $\underline{n}: B \rightarrow R^3$  es el campo de vectores unitarios normales a la frontera  $\partial B$  del cuerpo  $B$ . En este caso  $\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2 \cup \partial B_3$ , donde:

$$\partial B_1 = \left\{ \left( x_1, x_2, \frac{h}{2} \right) : (x_1, x_2) \in \Omega \right\}$$

$$\partial B_2 = \left\{ \left( x_1, x_2, -\frac{h}{2} \right) : (x_1, x_2) \in \Omega \right\}$$

$$\partial B_3 = \partial \Omega \times \left( -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right)$$

cuyas normales son:

$$n_1 = (0, 0, 1) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \partial B_1$$

$$n_2 = (0, 0, -1) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \partial B_2$$

$$n_3 = \left[ (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} (x_1, x_2) \right] \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \partial B_3$$

Por tanto, las tracciones de superficie son:

$$s_1 = \underline{S} n_1 = \frac{(0, 0, \beta v \operatorname{tr} \underline{E}(x_1, x_2, x_2))}{(1+v)(1-2v)}$$

$$s_2 = \underline{S} n_2 = \frac{(0, 0, -\beta v \operatorname{tr} \underline{E}(x_1, x_2, x_2))}{(1+v)(1-2v)}$$

$$s_3 = \underline{S} n_3 = \left( \frac{\beta}{(1+v)} \left( \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \right) \left( E_{11} + \frac{v}{1-2v} \right) \operatorname{tr} \underline{E}, \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \left( E_{22} + \frac{v}{1-2v} \right) \operatorname{tr} \underline{E}, 0 \right)$$

Este último resultado es una consecuencia de la hipótesis cinemática: Puesto que no se desean desplazamientos en la dirección de  $x_3$  se requiere de una fuerza restrictiva en esa dirección. Dicha fuerza es precisamente  $s_3$ .

### CARGAS DE CUERPO.

Por el principio de balance de la cantidad de movimiento lineal expresado en su forma puntual:

$$\operatorname{div} \underline{S}(x_1, x_2, x_3) + \bar{b}(x_1, x_2, x_3) = \rho_0 \underline{f}$$

y para el caso estático:

$$\operatorname{div} \underline{S}(x_1, x_2, x_3) + \bar{b}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

donde  $\bar{b}: B \rightarrow R$  es el vector de cargas de cuerpo, se concluye que:

$$\bar{b}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\beta(1-v)}{(1+v)(1-2v)} (6\alpha_2 x_1 e_1 + 6\beta_2 x_2 e_2)$$

### 3.2 Campos derivados de la función de deformación interpolada sobre doce puntos.

La deformación interpolada sobre doce puntos es:

$$f: B \rightarrow B$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_2 x_1 + \alpha_6 x_1^3 + \alpha_8 x_1 x_2^2, \beta_1 x_2 + \beta_7 x_1^2 x_2 + \beta_9 x_2^3, x_3)$$

donde:

$$\alpha_2 = \frac{l}{r} - r^2 \alpha_6$$

$$\alpha_6 = \frac{a_1 r - a_1 l}{a^3 r - ar^3} - \frac{b^2}{(a^2 - r^2)} \cdot \alpha_8$$

$$\alpha_8 = \frac{a(a^2 - r^2)(c_1 r - cl) - c(c^2 - r^2)(a_1 r - al)}{acd^2 r(a^2 - r^2) - ab^2 cr(c^2 - r^2)}$$

$$\beta_1 = \frac{b_1}{r} - r^2 \beta_9$$

$$\beta_7 = \frac{d_1 r - db_1}{c^2 dr} - \frac{d^2 - r^2}{c^2} \cdot \beta_9$$

$$\beta_9 = \frac{c^2 d(b_1 r - bb_1) - a^2 b(d_1 r - db_1)}{bdr(c^2(b^2 - r^2) - a^2(d^2 - r^2))}$$

$a, b, a_1, c$  y  $l$ , son los valores determinados experimentalmente y su significado aparece en la figura 3.

Por la hipótesis cinemática, no hay movimientos en la dirección  $x_3$ . A partir de la definición anterior, se construyen los siguientes campos:

A partir de ..... es posible construir los siguientes campos vectoriales y tensoriales que permiten predecir el comportamiento físico del cuerpo:

### GRADIENTE DE DEFORMACIÓN.

El gradiente de deformaciones, resulta para este caso:

$$\underline{F}: B \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$$

$$\underline{F}(x_1, x_2, x_3) = f_{i,j}(x_1, x_2, x_3) e_i \otimes e_j$$

$$\underline{F}(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1 + 3\alpha_6 x_1^2 + \alpha_8 x_2^2) e_1 \otimes e_1 + (2\alpha_8 x_1 x_2) e_1 \otimes e_2 +$$

$$+ (2\alpha_7 x_1 x_2) e_2 \otimes e_1 + (\beta_2 + 3\beta_7 x_1^2 + \beta_9 x_2^2) e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3$$

de donde puede observarse que la deformación  $f: B \rightarrow B$  es no homogénea.

### CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.

El correspondiente campo de desplazamientos es:

$$\underline{u}: B \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3) = ((\alpha_1 - 1)x_1 + \alpha_6 x_1^3 + \alpha_8 x_1 x_2^2, (\beta_2 - 1)x_2 + \beta_9 x_1^3 + \beta_7 x_1^2 x_2, 0)$$

### GRADIENTE DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.

El gradiente de desplazamientos es:

$$\underline{\nabla u}: B \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\underline{\nabla u}(x_1, x_2, x_3) = (3\alpha_6 x_1^2 + \alpha_8 x_2 + (\alpha_1 - 1)) e_1 \otimes e_1 + ((\beta_2 - 1) + \beta_7 x_1^2 + 3\beta_9 x_2^2) e_2 \otimes e_2$$

## DEFORMACIONES INFINITESIMALES.

El campo tensorial de deformaciones infinitesimales resulta:

$$E: B \rightarrow S(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$$

$$E(x_1, x_2, x_3) = [((\alpha_1 - 1)x_1^2 + 3\alpha_2 x_1)e_1 \otimes e_1 + ((\beta_2 - 1)x_2^2 + 3\beta_3 x_2)e_2 \otimes e_2]$$

## ESFUERZOS DE PIOLA-KIRCHOFF.

Aplicando la relación constitutiva el campo tensorial de esfuerzos resulta:

$$S(x_1, x_2, x_3) = \frac{\beta}{1+\nu} (E(x_1, x_2, x_3)) + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} E(x_1, x_2, x_3)(I)$$

Más explícitamente, componente a componente, el tensor de esfuerzos es:

$$S_{11} = \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)E_{11} + \nu(E_{11} + E_{22} + E_{33})]$$

$$S_{12} = \frac{\beta}{(1-\nu)} E_{12}$$

$$S_{13} = \frac{\beta}{(1-\nu)} E_{13}$$

$$S_{21} = \frac{\beta}{(1-\nu)} E_{21}$$

$$S_{22} = \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)E_{22} + \nu(E_{11} + E_{22} + E_{33})]$$

$$S_{23} = \frac{\beta}{(1-\nu)} E_{23}$$

$$S_{31} = \frac{\beta}{(1-\nu)} E_{31}$$

$$S_{32} = \frac{\beta}{(1-\nu)} E_{32}$$

$$S_{33} = \frac{\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)E_{33} + \nu(E_{11} + E_{22} + E_{33})]$$

## TRACCIONES DE SUPERFICIE.

El cálculo de las tracciones de superficie es una mera repetición del procedimiento seguido para con la función interpolada sobre nueve puntos.

Aquí debe destacarse que se obtienen resultados más representativos cuando se trabaja con más puntos de medición para la interpolación..

## 4. EXPERIMENTACIÓN CON MOIRE.

Se conoce como moire, el efecto de franjas de luz y sombras que aparece cuando dos "rejillas" de líneas paralelas o dos patrones de puntos similares se superponen. En realidad, el fenómeno de superposición, que explica este efecto, es muy común en la naturaleza y se conoce como interferencia. La técnica de moire para análisis de esfuerzos y deformaciones a partir del campo de desplazamientos superficiales está basada en este fenómeno.

El aprovechamiento del moire para analizar esfuerzos puede hacerse desde varios puntos de vista: Es posible, por ejemplo, estudiar las relaciones geométricas existentes entre los pasos y las posiciones relativas de dos rejillas o patrones y las distancias aparentes entre las franjas de moire resultantes de su superposición. El otro enfoque consiste en visualizar analíticamente las franjas de moire como la suma o la diferencia de dos familias de funciones cuyo parámetro es el paso de la rejilla patrón<sup>1</sup>.

En la literatura se demuestra que una franja de moire es el lugar geométrico de todos los puntos que sufren el mismo desplazamiento al haber un cambio de configuración. Este punto de vista es el que nosotros seleccionamos ya que el patrón de franjas de moire es la "imagen física" del campo de desplazamientos en la superficie del modelo y, en la primera parte de esta tesis se ha derivado una expresión analítica del mismo campo.

Cabe mencionar que, aunque en todo el mundo se ha combinado el moire con los avances recientes en holografía<sup>2</sup> y computación<sup>3</sup>, en nuestro país el método es poco utilizado. Para la realización de los experimentos que se instrumentaron para verificar la metodología propuesta fue necesario sintetizar una solución fotosensibilizadora y adaptar una técnica de laboratorio adecuada para realizar los experimentos con los recursos disponibles<sup>45</sup>.

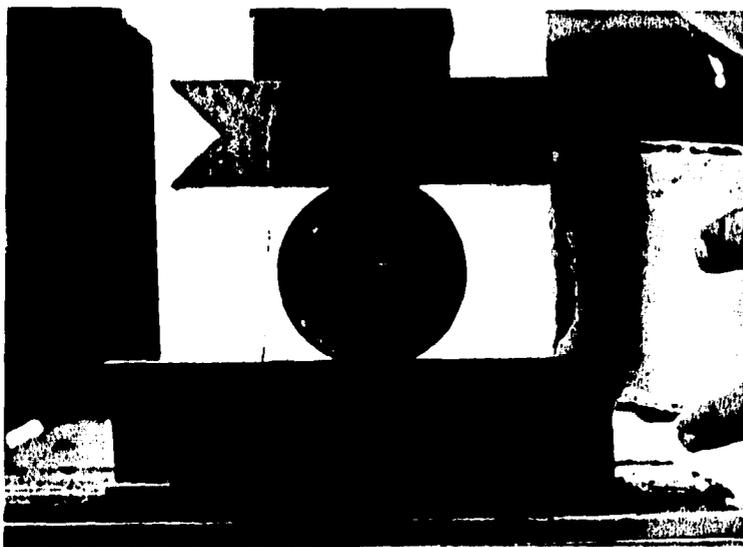


Fig. 5. Campos de desplazamiento que resultan del experimento con moire.

#### **4.1 Técnica aplicada en el análisis por moiré de un disco sujeto a compresión diametral.**

Los experimentos de laboratorio realizados en relación con esta tesis se efectuaron utilizando un modelo de poliuretano con las siguientes propiedades elásticas: Módulo de Young, 36.87 Kg/cm<sup>2</sup>; relación de Poisson, 0.44.

El disco fue sometido a carga diametral para producir las configuraciones deformadas mostradas en la fotografía (figura 4). Los patrones de franjas mostrados son las isotetas que corresponden a los desplazamientos de puntos de la frontera visible. Aquí, se aplicó la técnica de moiré en su versión más ortodoxa, a saber: Fotosensibilización de la superficie del modelo, impresión de una rejilla patrón sobre el modelo, aplicación de la carga y superposición de las rejillas patrón y modelo para obtener el patrón de franjas de moiré, fotografía del patrón de franjas y parámetro de las mismas.

#### **4.2. Notas de laboratorio.**

Como aportación importante de este trabajo, se detallan a continuación la fórmula de la solución utilizada para fotosensibilizar superficies y el procedimiento de aplicación de la misma sobre superficies planas de modelos de poliuretano.

En la bibliografía (), uno de los métodos de fotosensibilización consiste en aplicar una mezcla cuyos componentes son:

- |                                 |        |
|---------------------------------|--------|
| 1. Solución de Van Dike.        | 80 cc  |
| 2. Nitrato de Plata diluido     | 20 cc  |
| 3. Emulsión Borden Polyco 2719. | 100 cc |

El componente 1 proporciona la adherencia de la mezcla al modelo. Las componentes de la solución de Van Dike son:

- |                             |        |
|-----------------------------|--------|
| 1. Agua destilada.          | 100 cc |
| 2. Oxalato Férrico.         | 22 g   |
| 3. Oxalato Férrico-Amónico. | 4.2 g  |
| 4. Ácido cítrico.           | 7.5 g  |
| 5. Urea Industrial.         | 6.0 g  |
| 6. Dietilen glicol.         | 8.3 g  |
| 7. Isopropanol.             | 4.2 cc |
| 8. Cola.                    | 1 g    |

Todos estos componentes se encuentran comercialmente disponibles en el mercado nacional, excepto los oxalatos. Afortunadamente, se logró la sintetización de los mismos en los laboratorios y con el auxilio del personal del Departamento de Ingeniería Química y Aplicada de la Facultad de Química de la UNAM.

El nitrato de plata diluido proporciona la fotosensibilidad de la mezcla. Las proporciones utilizadas son:

- |                      |        |
|----------------------|--------|
| 1. Agua destilada    | 100 cc |
| 2. Nitrato de Plata. | 27.7 g |

La Emulsión Borden Polyco 2719 se incluye para proporcionar elasticidad y adherencia a la mezcla una vez aplicada, de manera que pueda deformarse sin desprenderse del modelo y sin romperse. La Emulsión Borden Polyco 2719 no es comercial en México. Esto originó una investigación empírica en la que se probaron varios posibles contratiempos hasta que se encontró uno que satisfizo las necesidades. La mezcla fotosensibilizadora utilizada es:

1. Solución de Van Dike	80 cc
2. Solución de Nitrato de Plata. Mowilith DO25 (Hoechst).	40 cc 80 cc

La preparación y aplicación de la mezcla es fundamental. Su adherencia al modelo le permite deformaciones hasta del 100 % sin desprenderse y soporta temperaturas hasta de 200 °C sin perder sus propiedades. A continuación se describe la técnica de aplicación:

#### TÉCNICA DE APLICACIÓN

1. **Limpieza de la superficie.** Usando alcohol etílico total, frotar vigorosamente, dejar secar un minuto.
2. **Aplicación del recubrimiento fotosensible.** Debe hacerse de manera que resulte un espesor uniforme en la película que cubre totalmente al modelo pero no excesivamente grueso. El espesor ideal es transparente una vez seco. Se consiguen mejores acabados utilizando brocha de aire.
3. **Secado.** La aplicación del espesor ideal seca perfectamente en 45 minutos en el interior de un horno caliente a 50 °C. Deben evitarse los gradientes de temperatura muy pronunciados.
4. **Impresión.** La literatura recomienda utilizar como fuente luminosa para la impresión, lámparas con emisor de arco de carbón, y hacer incidir la luz sobre el modelo a través de una rejilla de referencia en un marco con presiones de vacío. Nosotros utilizamos la luz solar directa durante 15 minutos y no se utilizó ningún control sobre la atmósfera por razones económicas.
5. **Revelado y fijado.** Bajo la luz de una lámpara de seguridad ortocromática, en un cuarto oscuro, se retira la rejilla patrón del contacto con el modelo y se sumerge éste en solución reveladora universal durante 10 segundos. Después, se lava en agua corriente a 25 °C durante 5 minutos.
6. **Remoción del recubrimiento.** El recubrimiento puede limpiarse fácilmente con alcohol.

#### BIBLIOGRAFIA

- <sup>1</sup>DURELLI, A.J., PARKS V.J. Moire Analysis of Strain, Caps. 1,2,3,4 y 5. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- <sup>2</sup>SCIAMARELLO, C. A. "Holographic Moire, an optical tool for the determination of displacements, strains contours, and slopes of surfaces". OPTICAL ENGINEERING, May-Jul 1982, p. 447-457.
- <sup>3</sup>AIZAWA, T., YAGAWA, G., Univ. Of Tokyo, Japan, "Strain analysis of nonlinear crack behaviour at elevated temperature by finite element method and moire topographical method", Transactions of International Conf. Struct. Mech. React. Technology. Agosto de 1979.
- <sup>4</sup>VAZQUEZ, R., VELAZQUEZ, J., FERRER, L. "Desarrollo a nivel nacional de una película fotosensible que permite la implementación del método de moire para análisis de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos". MEMORIA DEL CONGRESO ANIAC 1986
- <sup>5</sup>Expreso mi agradecimiento al personal del Departamento de Química Experimental de la Facultad de Química de la UNAM y en especial al Dr. Francisco Barnés de Castro, por su apoyo desinteresado en este proyecto.

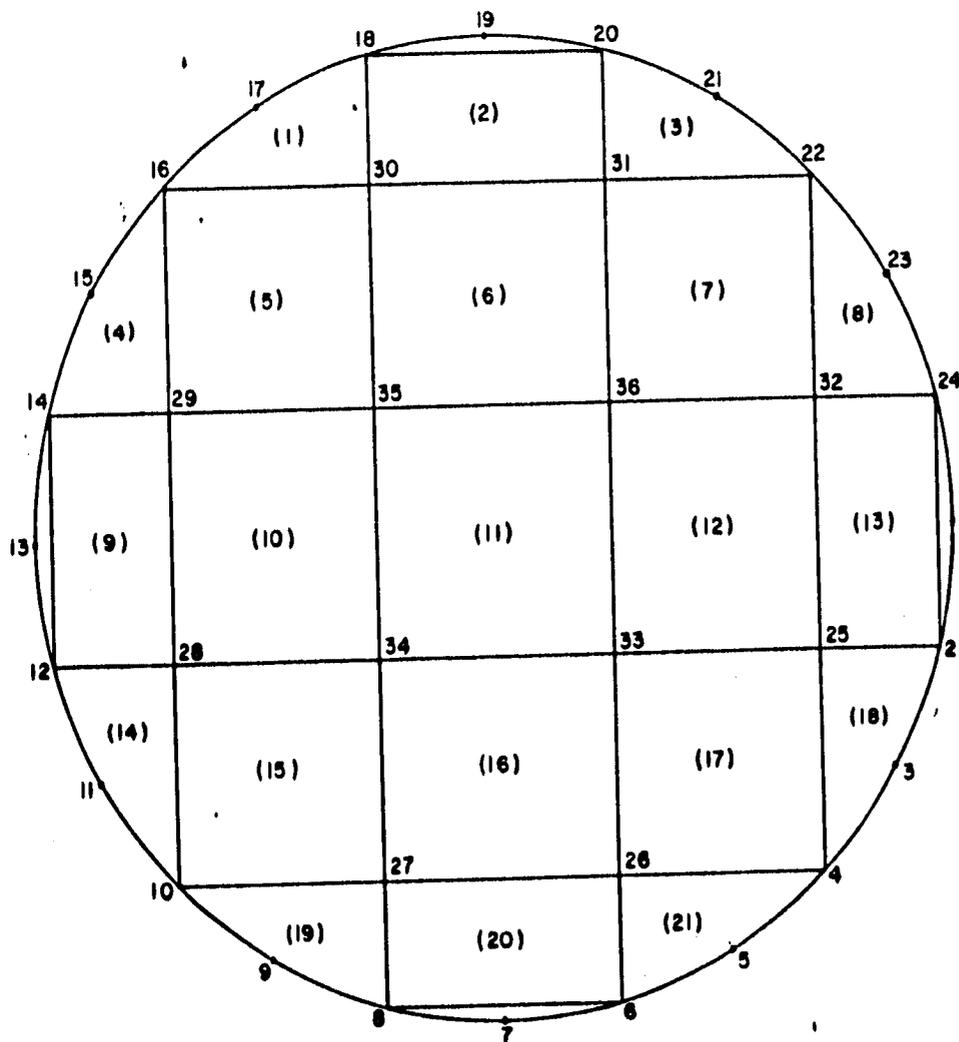


Fig. 6. Discretización del dominio con elementos finitos.

## 5. INTERPOLACIÓN DE LOS CAMPOS DE DESPLAZAMIENTO UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS.

El objetivo de esta sección es presentar un resumen del Método del Elemento Finito y describir la forma en que el mismo se utilizó en esta tesis como una simple técnica de interpolación para calcular numéricamente el campo de desplazamientos a partir de mediciones físicas realizadas sobre los nodos dibujados en el modelo de laboratorio.

La intención fue observar si mediante este procedimiento se obtenía mayor convergencia entre el campo de desplazamientos simulado en computadora y el campo de desplazamientos observado en el experimento con moire.

Fieles a nuestro deseo de no reproducir en lo posible lo ya publicado, remitimos al lector interesado a la lista de bibliografía del final del capítulo.

### 5.1 Método del elemento finito en síntesis.

En términos generales, los pasos del método del elemento finito pueden resumirse como sigue:

1. **Discretización del dominio.** Dividir o "triangularizar" el dominio total en subdominios llamados elementos finitos geométricos, determinar en cada subdominio el espacio vectorial local del elemento y definir el conjunto de grados de libertad del mismo, los cuales satisfacen:

$$B = \sum_{i=1}^N E_i, \quad E_i \cap E_j = \emptyset$$

2. **Derivación de las funciones base.** Para cada nodo de la discretización, derivar funciones de interpolación que generen el espacio de elementos finitos. Estas funciones se proponen como polinomios cuyos coeficientes se calculan en términos de valores (desconocidos) en los nodos del elemento. Dichos valores nodales pueden calcularse a partir de una formulación variacional para el problema considerado, o bien, como lo hicimos nosotros, a partir de mediciones en el laboratorio.
3. **Cálculo de cantidades adicionales.** Usando los valores nodales y la funciones base globales, interpolar el campo global de la variable de interés. En nuestro caso, se interpolaron los campos de desplazamientos verticales y horizontales.

### 5.2. Aplicación del método del elemento finito para interpolar desplazamientos en un disco sujeto a compresión diametral

#### 1. Discretización del dominio.

El disco B se discretizó como se muestra en la figura 6. Como puede observarse, en la partición se utilizaron tres tipos diferentes de elementos finitos de referencia, que se describen a continuación:

**Elemento finito tipo A:** Triangular con cuatro nodos (ver figuras 6 y 7):

$$\hat{E} = \left\{ p: E \rightarrow R: p(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 \right\}$$
$$\sum_{\hat{E}} = \left\{ \phi_i \in L(p_i, R): \phi_i(p_i) = p(a_i) \right\} \quad i = 1, \dots, 4$$

**Elemento finito tipo B:** Cuadrangular con cuatro nodos (ver figura 6 y 8):

$$\hat{E} = \{p: E \rightarrow R: p(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy\}$$

$$\sum_{\hat{E}} = \{\phi_i \in L(p_i, R): \phi_i(p_i) = p(a_i)\} \quad i = 1, \dots, 4$$

**Elemento finito tipo C:** Cuadrangular con cinco nodos (ver figuras 6 y 9).

Descripción formal:

$$\hat{E} = \{p: E \rightarrow R: p(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 x^2 y^2\}$$

$$\sum_{\hat{E}} = \{\phi_i \in L(p_i, R): \phi_i(p_i) = p(a_i)\} \quad i = 1, \dots, 5$$

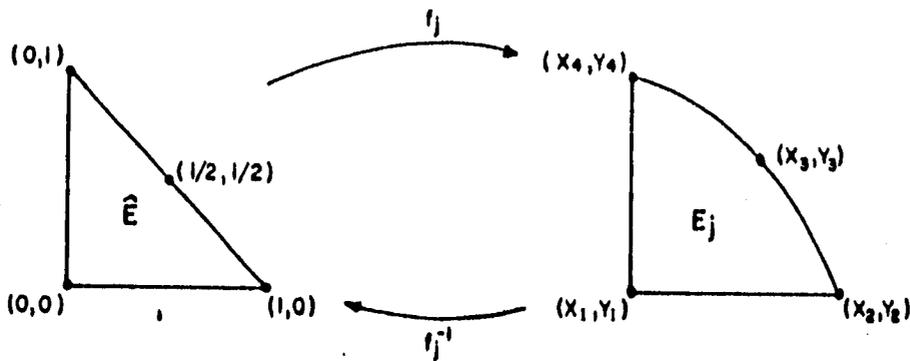


Fig. 7. Elemento finito tipo A

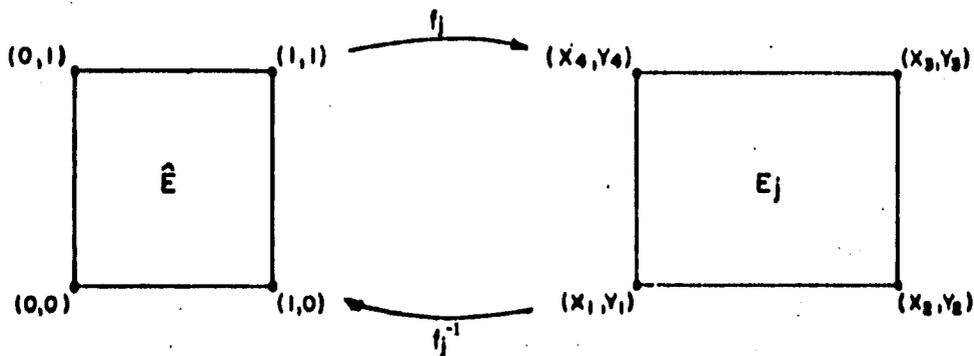


Fig. 8. Elemento finito tipo B.

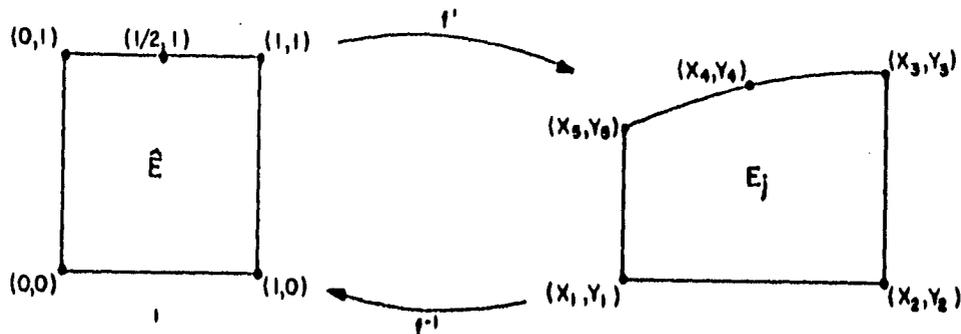


Fig. 9. Elemento finito tipo C.

## 2. Derivación de las funciones base locales.

Como su nombre lo indica, estas funciones son el conjunto generador del espacio local de elemento finito. De manera que, para un función base dada  $\phi_i$  se tendrá

$$\phi_i^E: B \rightarrow R$$

$$\phi_i^E = (w_j |_E) = \delta_{ij}$$

donde  $w_j$  es el  $j$ -ésimo nodo del elemento finito de referencia.

Aunque una función base puede ser de cualquier forma matemática, generalmente, se prefieren polinomios, ya que por experiencia se sabe que las matrices asociadas a este tipo de funciones son bien condicionadas desde el punto de vista del análisis numérico. En el problema aquí analizado, la forma de las funciones base aparece en las definiciones formales de cada elemento que se dieron arriba. Los coeficientes de las funciones base se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones definido por la condición del párrafo anterior.

**Espacio global.** El cambio de geometría del elemento finito de referencia al elemento finito real, está dado por la transformación:

$$f_i = \hat{E} \rightarrow E_i$$

donde el índice indica que para cada elemento real existe una función  $f$ . La inversa de esta transformación representa la transformación de referencia y convierte cada punto del elemento real en un punto del elemento de referencia. De esa manera, es posible asociar a cada elemento real un espacio global de elemento finito definido por:

$$\phi_j^g(x, y) = \phi_i^E(f^{-1}(x, y)) \quad (x, y) \in E_j$$

El cálculo de la transformación de referencia es un proceso similar al que se expuso en el capítulo 2 de este trabajo para las funciones de deformación.

**3. Campo global de desplazamientos.** El conjunto de desplazamientos nodales utilizados para la interpolación aquí expuesta proviene de mediciones sobre el modelo de laboratorio del experimento con moire. El proceso de interpolación se resume a continuación:

Dadas las coordenadas  $(x,y)$  de un punto del dominio:

- Determinar en cual subdominio se localiza el punto.
- Identificar el tipo de elemento y los números nodales del subdominio.
- Tomar los desplazamientos correspondientes de cada nodo (que se midieron experimentalmente).
- Calcular los coeficientes de las funciones base locales, la transformación de referencia y las funciones base globales, a partir de las coordenadas nodales y del tipo del elemento.

Calcular el valor haciendo una combinación lineal con las funciones globales evaluadas en  $(x,y)$ . Los coeficientes de la combinación lineal son los desplazamientos nodales correspondientes.

#### BIBLIOGRAFIA

ALDUNCIN, G., "Implementation of Finite Element Aproximations". Notas proporcionadas durante el curso de elementos finitos que imparte el autor.

CIARLET, P.G. The finite element method for elliptical problems. North Holland, 1978.

NORRIE, D., de VRIES, G., The Finite Element Method, Fundamentals and applications., Academic Press. New York, 1973.

## 6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

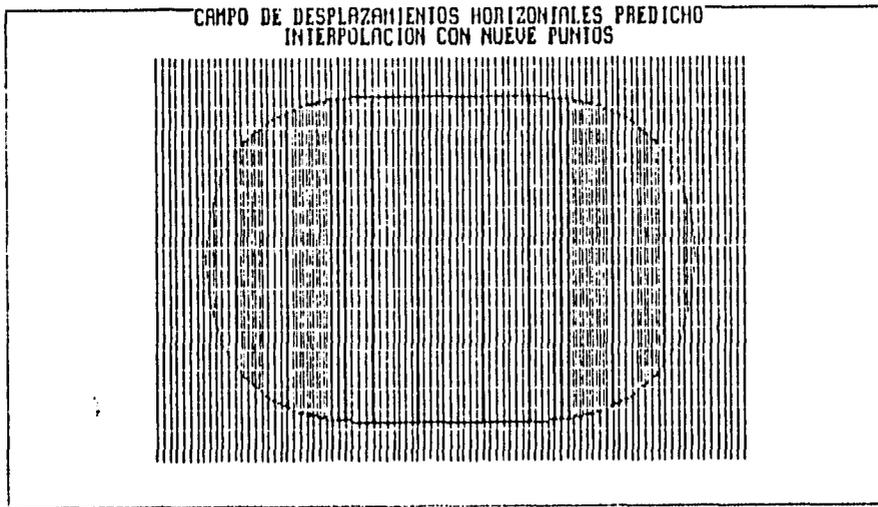
El objetivo de esta sección es presentar los resultados obtenidos con cada técnica utilizada, en forma ordenada y gráfica, a fin de facilitar la comparación entre los mismos. Cabe mencionar que en la bibliografía no hay gráficas de campo como los que resultan de la modelación mecánica. Por lo tanto, mucho del trabajo en esta sección consistió en construir a partir de los resultados obtenidos con el modelo mecánico gráficas comparables con las publicadas.

### 6.1. Modelación computacional.

Para la validación de la metodología propuesta, el paso más natural es comparar los campos de desplazamiento que se obtienen con las funciones de deformación que se construyeron con las isotetas de las fotografías de un modelo instrumentado con moire. Como se explicó, las isotetas resultan de superponer dos patrones de líneas paralelas (originalmente idénticos) después de que uno de ellos (impreso en el modelo) se ha deformado por efecto de la carga aplicada al modelo físico. Hemos simulado computacionalmente el experimento de moire superponiendo a la rejilla de referencia no deformada, la imagen de la rejilla "impresa" en el modelo tal y como aparece después de la deformación. Las figuras 10 y 11 muestran, respectivamente, los patrones de franjas obtenidos en la pantalla de la computadora con la función de deformación interpolada con nueve puntos de control sobre la frontera del disco.

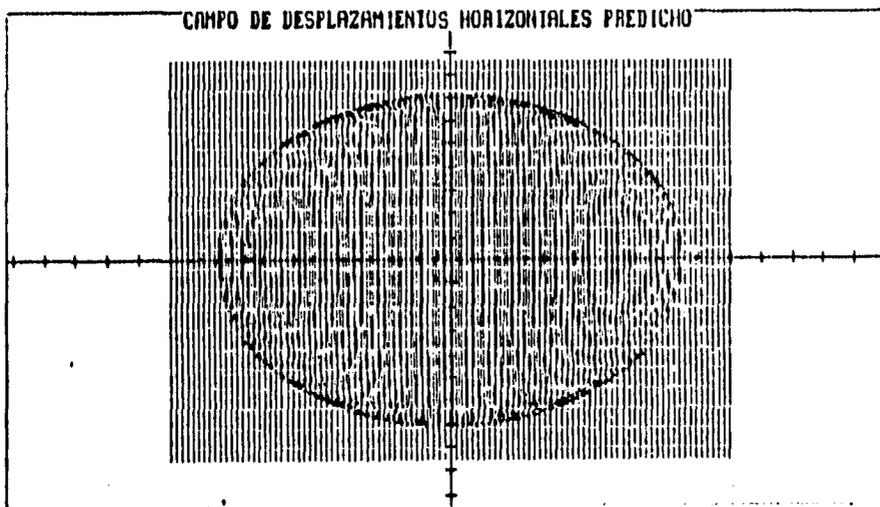


Fig. 10. Simulación del experimento con moire mediante la deformación interpolada con nueve puntos.



**Fig. 11.** Simulación en computadora del experimento de moire mediante la función de deformación basada en observaciones sobre nueve puntos.

En las figuras 12 y 13 aparecen los patrones de franjas obtenidos con la función deformación interpolada con doce puntos de control sobre la frontera del disco.



**Fig. 12.** Campo de desplazamientos obtenido con la función de doce puntos. Obsérvese el cambio en el patrón de franjas.

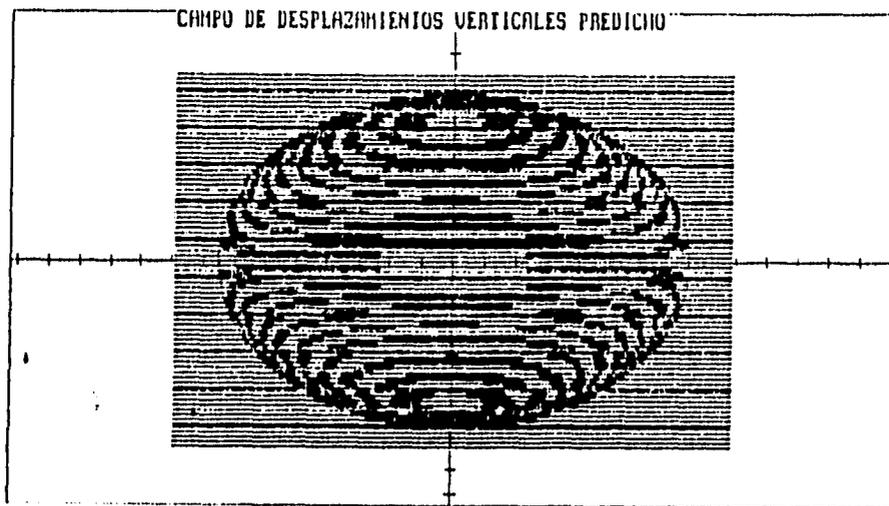


Fig. 13. Simulación computacional del experimento con moire (función de doce puntos).

En las figuras 14 y 15 se muestran fotografías del experimento con moire.

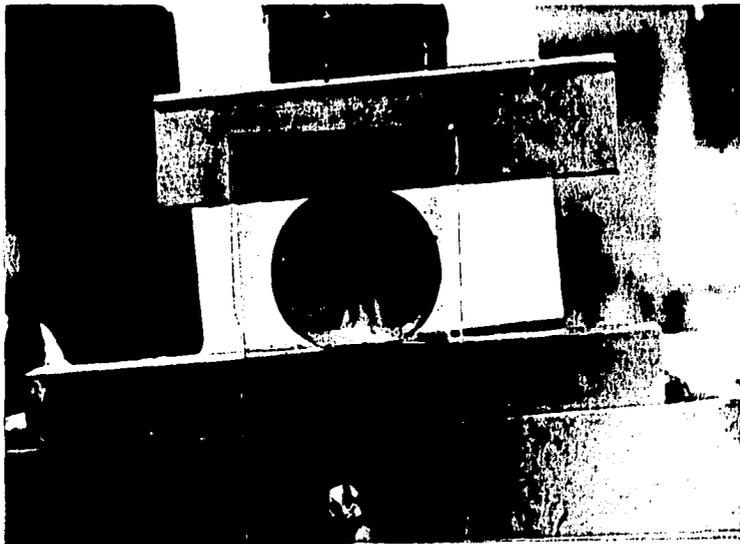


Fig. 14. Franjas obtenidas en el Experimento de laboratorio.  
Nótese la concordancia entre este patrón y el obtenido computacionalmente.

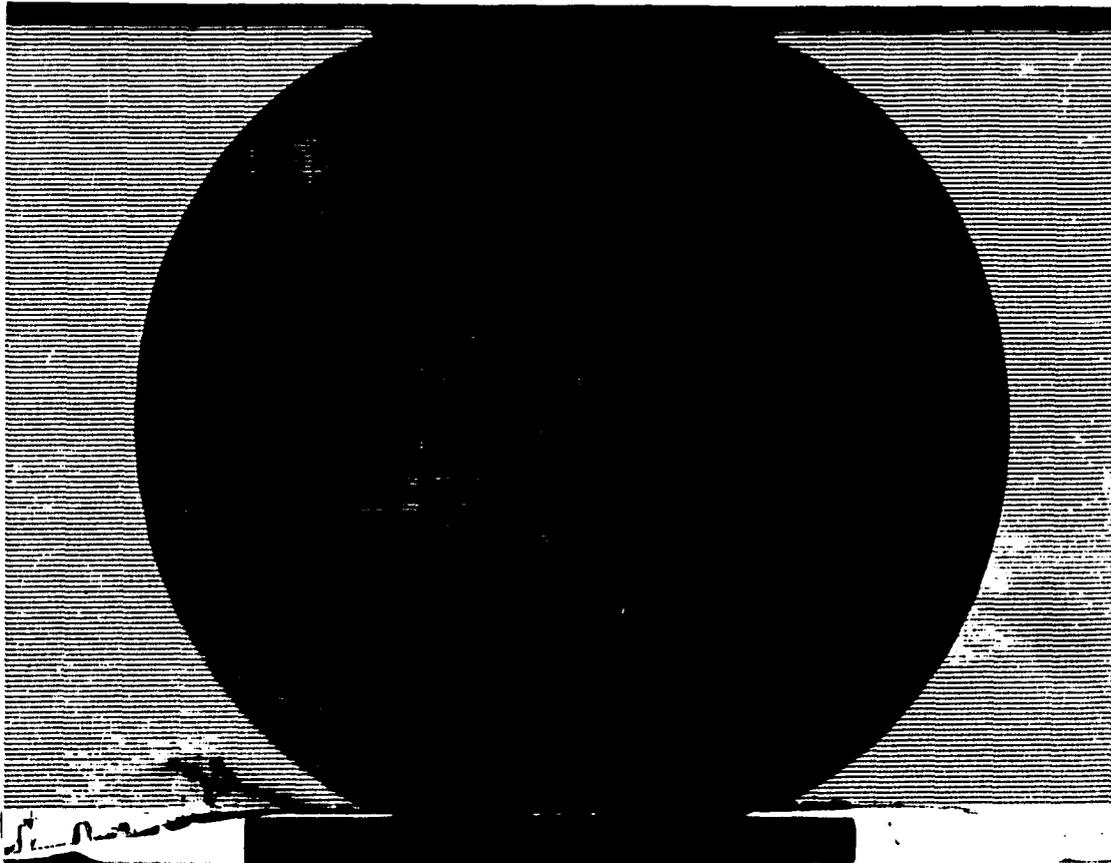


Fig. 15. Patrón de franjas obtenido en el experimento de laboratorio. Nótese la concordancia entre este patrón y el obtenido en la simulación.

## 6.2. Calibración del Modelo.

### Preliminares.

La propuesta analítica de esta tesis permite construir, partiendo directamente de condiciones cinemáticas sobre la frontera del cuerpo, el tensor  $\underline{E}$  de deformaciones infinitesimales definido por:

$$\underline{E}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \left[ \nabla u(x_1, x_2, x_3) + \nabla u^T(x_1, x_2, x_3) \right],$$

donde el campo de desplazamientos está dado por:

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) - (x_1, x_2, x_3).$$

Ahora bien, la relación constitutiva utilizada es el tensor de Piola-Kirchoff definido por:

$$\underline{S} = 2\mu \underline{E} + \lambda(\text{tr } \underline{E}) \underline{I}$$

o sea:

$$\underline{S} = \frac{\beta}{1+\nu} \left[ \underline{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \underline{E}) \underline{I} \right]$$

donde se han sustituido las constantes elásticas por sus equivalencias en términos de los módulos de Lamé. En otras palabras, si  $\underline{E}$  está determinado, la obtención de  $\underline{S}$  es natural y directa. A su vez, el tensor de Piola satisface las condiciones de equilibrio:

$$\text{div } \underline{S} + \underline{b} = 0$$

$$\underline{S} \underline{F}^T + \underline{F} \underline{S}^T$$

donde  $\underline{b}$  es el vector de cargas de cuerpo. Estas expresiones son un caso particular de los principios de balance fundamentales de la mecánica.

### Deformaciones Planas

Si nos concentramos en la primera de las condiciones anteriores, y particularizamos suponiendo que las componentes de  $\underline{S}$  son independientes de  $x_3$ , y suponemos que  $b_3$  es cero, estaremos hablando del estado de deformaciones planas. Las ecuaciones de campo, para equilibrio serían entonces:

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} + b_1 = 0$$

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} + b_1 = 0$$

Obsérvese que la hipótesis H1 de la propuesta analítica de este trabajo conduce directamente a este tipo de enfoque del problema plano.

### Esfuerzos Planos

Por otro lado, las ecuaciones anteriores podrían obtenerse también si se supone que  $S_{11}=S_{22}=S_{33}=0$  con  $b_3=0$  (Siendo  $b_1$  y  $b_2$  funciones sólo de  $x_1$  y  $x_2$ ). En este caso, estamos hablando del problema conocido como problema de esfuerzos planos. Un estado de esfuerzos planos es el que existe precisamente en el modelo de laboratorio que se utiliza en el experimento de moire.

## Objetivo de la calibración.

Por lo tanto, se establecen a continuación las restricciones bajo las cuales son comparables las soluciones obtenidas con la propuesta analítica de esta tesis (estado de deformaciones planas) y la obtenida mediante el procedimiento de moiré (estado de esfuerzos planos) que se utiliza como medio de contraste, probado que las ecuaciones de equilibrio son las mismas en ambos casos.

Para hacerlo, examinemos el Tensor de esfuerzos de Piola-Kirchoff bajo las hipótesis de isotropía y homogeneidad:

$$\underline{S} = 2\mu \underline{E} + \lambda(\text{tr } \underline{E}) \underline{I}$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned} S_{11} &= 2\mu E_{11} + \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) \\ S_{12} &= \mu E_{12} = S_{21} \\ S_{13} &= \mu E_{13} = S_{31} \\ S_{22} &= 2\mu E_{22} + \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) \\ S_{23} &= \mu E_{23} = S_{32} \\ S_{33} &= 2\mu E_{33} + \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) \end{aligned}$$

Invirtiéndose estas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} S_{11} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (S_{11} + S_{22} + S_{33}) \\ E_{12} = E_{21} &= \frac{1}{\mu} S_{12} \\ E_{13} = E_{31} &= \frac{1}{\mu} S_{13} \\ E_{23} = E_{32} &= \frac{1}{\mu} S_{23} \\ E_{22} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} S_{22} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (S_{11} + S_{22} + S_{33}) \\ E_{33} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} S_{33} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (S_{11} + S_{22} + S_{33}) \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis de deformaciones planas, las componentes del tensor de esfuerzos son:

$$\begin{aligned} S_{11} &= 2\mu E_{11} + \lambda(E_{11} + E_{22}) \\ S_{12} &= \mu E_{12} = S_{21} \\ S_{13} &= 0 = S_{31} \\ S_{22} &= 2\mu E_{22} + \lambda(E_{11} + E_{22}) \\ S_{23} &= 0 = S_{32} \\ S_{33} &= \lambda(E_{11} + E_{22}) \end{aligned}$$

donde se observa que la expresión para  $S_{33}$  no está acoplada con las demás relaciones para deformaciones planas.

Por otro lado, de las ecuaciones de deformación bajo la hipótesis de deformación plana se ve que sólo tienen sentido las expresiones para  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{12}$ . Si se sustituyen las constantes elásticas del material se obtiene:

$$E_{11} = \frac{1-\nu^2}{\beta} \left( S_{11} - \frac{\nu}{1-\nu} S_{22} \right)$$

$$E_{22} = \frac{1-\nu^2}{\beta} \left( S_{22} - \frac{\nu}{1-\nu} S_{11} \right)$$

$$E_{12} = \frac{S_{12}}{\mu}$$

#### COMPATIBILIDAD PARA DEFORMACIONES PLANAS.

Puesto que  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  y  $E_{12}$  son funciones solo de los desplazamientos  $u$ , y  $v$ , debe discutirse aquí la compatibilidad entre éstas, dada por:

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

que nos lleva a:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (S_{11} + S_{22}) = -\frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} \right)$$

que es la relación de compatibilidad expresada en términos de esfuerzos. El conjunto de ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de esfuerzos junto con las condiciones frontera del problema de deformaciones planas; son el fundamento de la solución de problemas cuyo modelo se ajuste al de deformación plana.

Si los componentes del tensor de deformaciones se expresan en términos de  $\lambda$ ,  $\beta$  y  $\nu$  resultan:

$$E_{11} = \frac{1}{\beta} (S_{11} - \nu(S_{22} + S_{33}))$$

$$E_{12} = \frac{S_{12}}{\mu} = E_{21}$$

$$E_{13} = \frac{S_{13}}{\mu} = E_{31}$$

$$E_{22} = \frac{1}{\beta} (S_{22} - \nu(S_{11} + S_{33}))$$

$$E_{23} = \frac{S_{23}}{\mu} = E_{32}$$

$$E_{33} = \frac{1}{\beta} (S_{33} - \nu(S_{11} + S_{22}))$$

Suponiendo que  $S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32} = 0$  (hipótesis de esfuerzos planos) resulta:

$$E_{11} = \frac{1}{\beta}(S_{11} - \nu S_{22})$$

$$E_{22} = \frac{1}{\beta}(S_{22} - \nu S_{11})$$

$$E_{33} = -\frac{\nu}{\beta}(S_{11} + S_{22})$$

$$E_{12} = \frac{S_{12}}{\mu}$$

donde puede observarse que  $E_{33}$  no está acoplada con las demás relaciones para esfuerzo plano.

Puesto que las ecuaciones de equilibrio son las mismas bajo esta hipótesis, la relación de compatibilidad es nuevamente:

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 E_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (S_{11} + S_{22}) = -(1 + \nu) \left( \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} \right)$$

#### CONVERSIÓN DE SOLUCIONES

La comparación de las ecuaciones del problema de deformaciones planas con las del problema de esfuerzos planos permiten establecer los parámetros para convertir entre ambas soluciones.

En síntesis, puede establecerse una relación entre ambas soluciones dada por la siguiente tabla:

Dada la solución para:	Para convertirla en solución de:	Debe sustituirse $\beta$ por	Debe sustituirse $\nu$ por
Esfuerzos planos	Deformaciones Planas	$\frac{\beta}{1 - \nu^2}$	$\frac{\nu}{1 - \nu}$
Deformaciones planas	Esfuerzos planos	$\frac{\beta(1 + 2\nu)}{(1 + \nu)^2}$	$\frac{\nu}{1 + \nu}$

La comparación cuantitativa debe efectuarse bajo estas restricciones.

## 6.2. La Modelación computacional y las Gráficas de campo total.

Un aspecto interesante es el hecho de que la modelación mecánica permite la construcción y graficación de los campos vectoriales y tensoriales calculados. Las siguientes figuras muestran algunas gráficas de campo total obtenidas mediante el uso de la computadora para modelar mecánicamente. La literatura no ofrece gráficas similares susceptibles de comparación a pesar de que estas gráficas podrían ser de gran utilidad para el estudio de geometrías complejas de las que se derivase un modelo mecánico. Las superficies de las gráficas se presentan vistas desde la perspectiva de un observador que "declina" (o sea, camina alrededor del objeto observado) y se "eleva" sobre el plano que contiene el dominio de la función representada. En las figuras, el círculo representa el dominio de la función de campo representada y la altura de los puntos de la gráfica es proporcional a la intensidad del valor en el punto considerado.

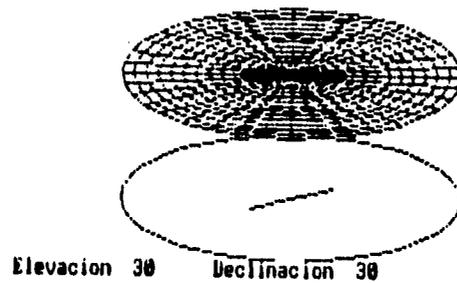


Fig. 16. Perspectiva del dominio de definición.

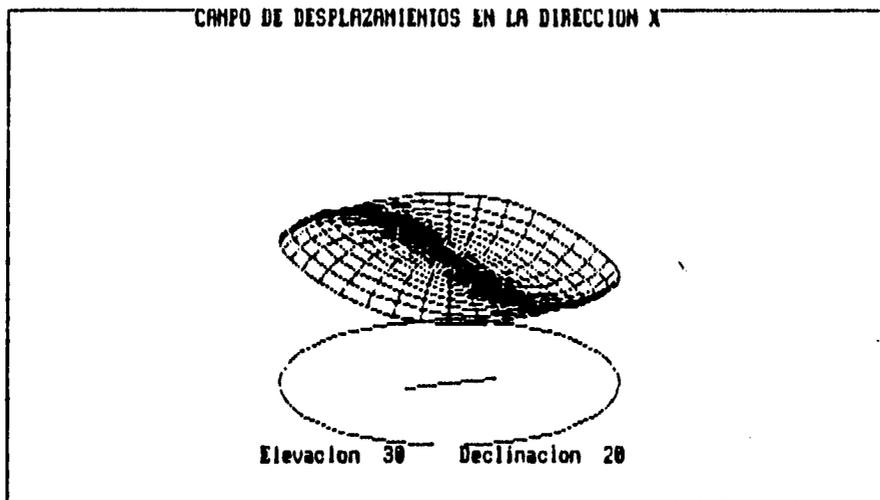


Fig. 17. Desplazamientos en la dirección  $x_1$ .

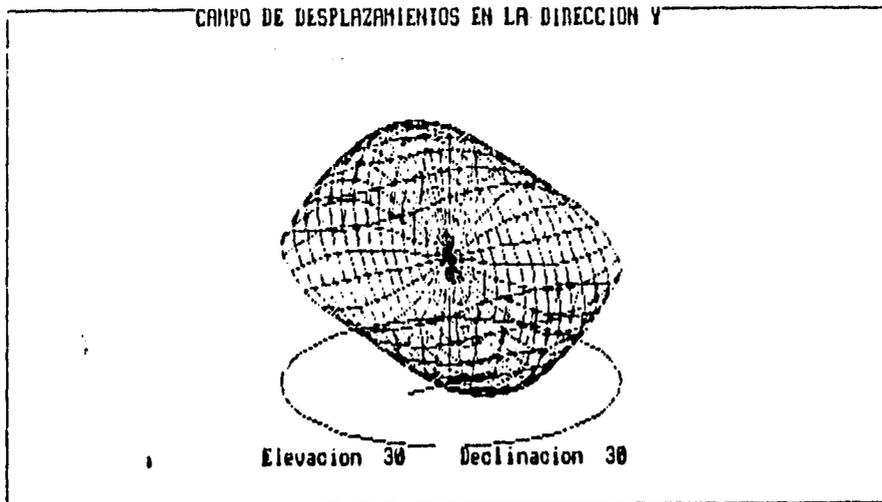


Fig. 18. Desplazamientos en la dirección de  $x_2$ .

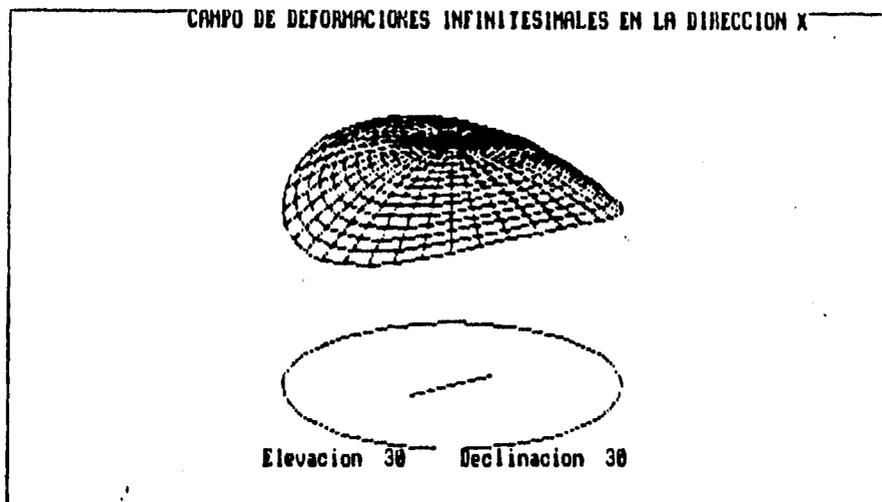


Fig. 19. Campo de deformaciones infinitesimales en la dirección de  $x_1$ .

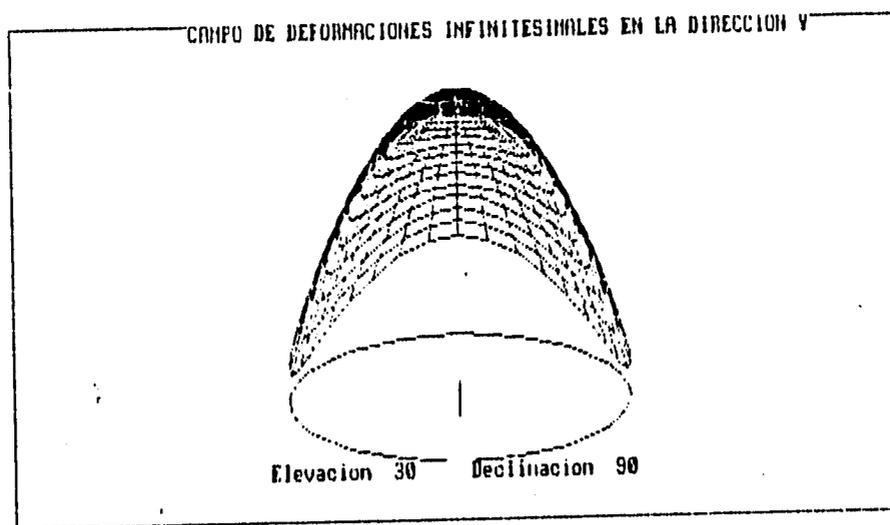


Fig. 20. Deformaciones infinitesimales en la direccin de  $x_2$

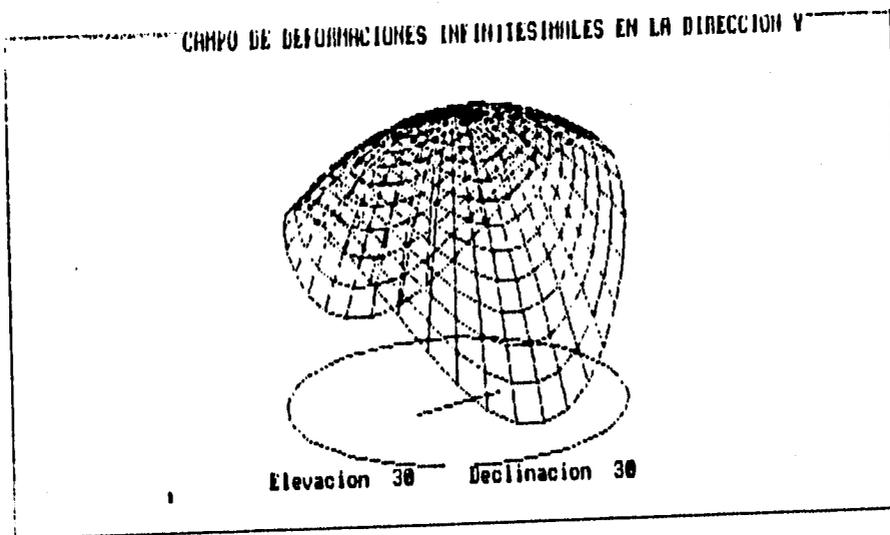


Fig. 21. Campo de deformaciones infinitesimales angulares (plano  $xy$ ).

## CONCLUSIONES.

1. Se ha presentado un nuevo método<sup>1</sup> para construir la solución exacta de problemas de valores en la frontera cuando la cinemática del fenómeno físico es conocida. Dicho método utiliza las definiciones formales de la mecánica racional para analizar desplazamientos sobre la superficie y los campos vectoriales y tensoriales asociados.

2. Con los resultados analíticos de esta metodología se simuló mediante una computadora personal, el patrón de franjas de los campos de desplazamientos. Estas gráficas coinciden con las obtenidas experimentalmente y son comparables a los resultados de Durelli y Parks.

3. Los resultados obtenidos mediante el uso de funciones de deformación coinciden ampliamente con los experimentales. Debe destacarse que el número de puntos de medición influye notablemente sobre la concordancia de ambos resultados. Aunque a lo largo de la investigación surgió la inquietud, no se hizo ningún intento en el sentido de establecer a partir de cuantos puntos se consigue una concordancia óptima.

4. En este trabajo se utiliza el Método del Elemento Finito como una simple técnica de interpolación prescindiendo del enfoque tradicional que implica el uso de una formulación variacional para minimizar una funcional que permita conocer valores nodales. Aquí los valores de entrada fueron los valores nodales, no se implica el uso de funcionales y los polinomios de forma son utilizados como herramientas para una interpolación de campo basada en dichos valores nodales experimentales.

5. La aplicación de técnicas experimentales como la de moiré utilizada en esta tesis es un campo de investigación poco explotado en el país. Como una aportación valiosa de este trabajo, y a despecho de las carencias económicas que se enfrentaron, por primera vez en nuestro país, fue posible la sintetización de una mezcla fotosensibilizadora de superficies.

6. Como perspectivas de este trabajo se plantea la aplicación de la metodología a geometrías más complicadas que las de un disco. Técnicamente no existe ningún impedimento para hacerlo, a excepción quizás, de que no se contaría con tanto material publicado para contrastar resultados como sucede con el problema tratado en esta tesis y sería necesario, por lo tanto, mayor trabajo experimental.

## BIBLIOGRAFIA

- <sup>1</sup>REYES-AVILA, L., FERRER, L., VAZQUEZ, R., "New Method to construct the exact solution of boundary value problems when kinematics of the physical phenomenon is known." Proceedings of the 1989 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics, Cambridge, MA BOSTON.