

01170

3
29

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA**

**Estudio Comparativo e Implementación de
Métodos Tiempo Frecuencia**

MONICA MARIA CORLAY TRUJILLO

TESIS

**PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS
DE POSGRADO DE LA**

**FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

COMO REQUISITO PARA OBTENER

EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERIA ELECTRICA
(COMUNICACIONES)**

**CIUDAD UNIVERSITARIA
- 1 9 9 6 -**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres

A Lino y Beatriz

A mis amigos

A la comunidad de la DEPFI

A todos ustedes

Gracias por su apoyo constante e incondicional.

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a todas las personas que colaboraron directa e indirectamente para la culminación de este trabajo: a los profesores de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, en especial al **Dr. Francisco García Ugalde** y al **Dr. Boris Escalante Ramírez**, por las facilidades prestadas para la realización de esta tesis; a todos los profesores que me dieron su apoyo durante mi formación, así como a las siguientes personas que me brindaron su valiosa asesoría: **Dr. Patrick Flandrin**, **Dr. Gabriel Cristóbal**, **Dr. Greg Donohoe**, **Dr. Enrico Piazza**.

Finalmente, un reconocimiento especial al **Dr. Rogelio Alcántara Silva**, a quien agradezco su confianza, motivación, apoyo incondicional y paciencia a lo largo de la realización de esta tesis.

Resumen:

En el análisis tiempo-frecuencia se conjuntan dos de las representaciones de señales clásicas más utilizadas, la temporal y la frecuencial, que son necesarias cuando estas representaciones por separado no dan información suficiente del fenómeno en estudio. Uno de los principales objetivos que se busca y logra con estas representaciones es el conocer en un tiempo dado cual es la frecuencia de la señal en dicho instante. Existen dos tipos de representaciones tiempo-frecuencia, las que se calculan a través de métodos directamente sobre la señal y aquellos que se obtienen a través de métodos paramétricos. En el presente trabajo se analizan e implementan algoritmos de ambos tipos y se evalúa su desempeño a través de los resultados obtenidos con simulaciones de señales sintéticas y reales, para así establecer las características y propiedades de cada uno de ellos que los hacen más eficientes en aplicaciones específicas. En el estudio comparativo se propone el modo de utilización más adecuado de los mismos, evaluados en función de los parámetros de operación de los mismos y de la aplicación en particular. Las representaciones tiempo-frecuencia más conocidas pertenecientes a la clase de Cohen, fueron implementadas bajo el ambiente de programación gráfica Khoros y se ponen a disposición de cualquier usuario que desee utilizarlas.

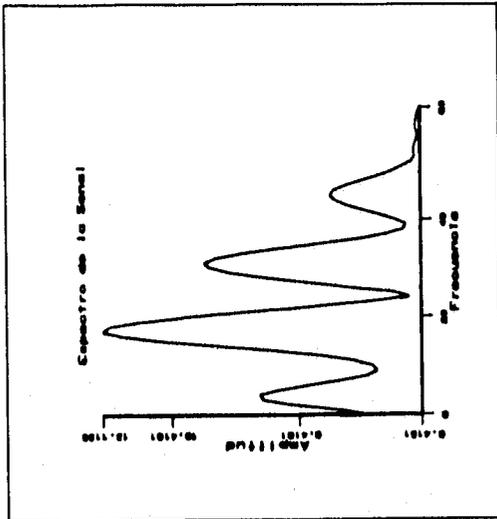


Figura 1: Espectro de la Señal de Radar.

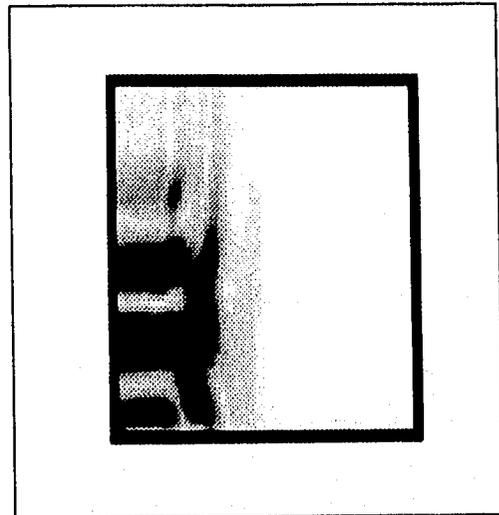


Figura 2: Vista Superior del Espectrograma (vt=27).

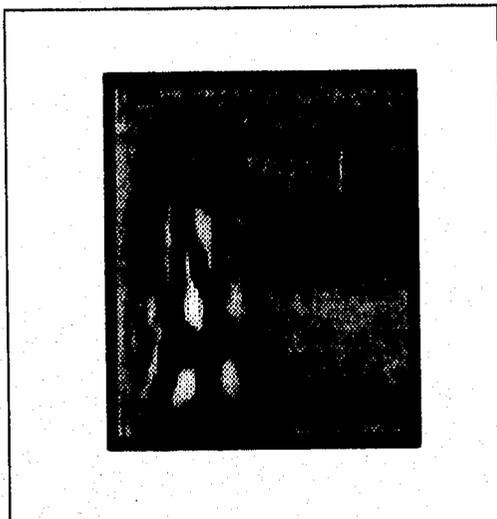


Figura 3: Vista Superior Wigner Ville (vt=27).

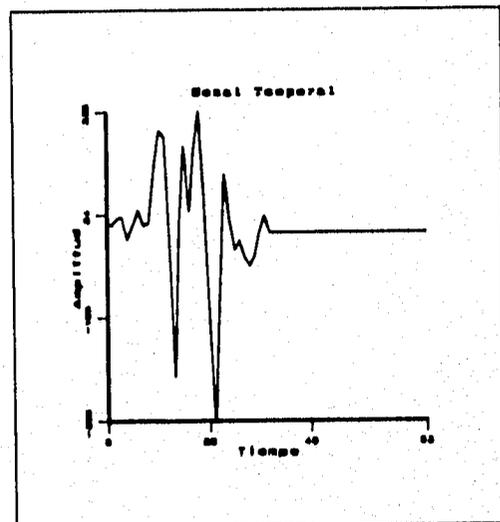


Figura 4: Señal Temporal.

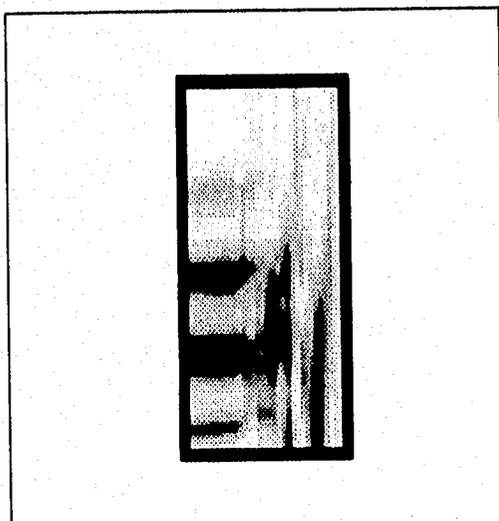


Figura 5: Estimación con Algoritmo Paramétrico.

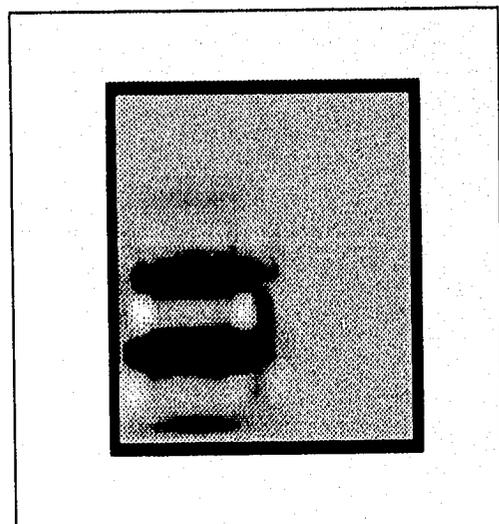


Figura 6: Vista Superior PWVL (vt=27, vf=41).

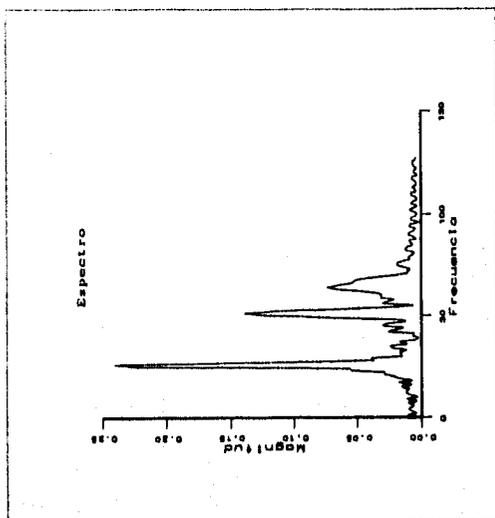


Figura 1: Espectro de la Señal.

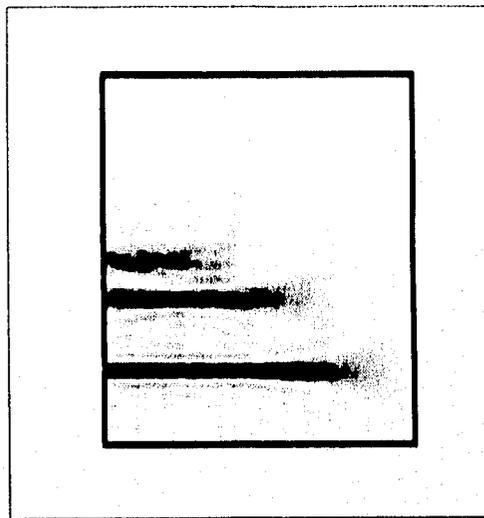


Figura 2: Vista Superior del Espectrograma.

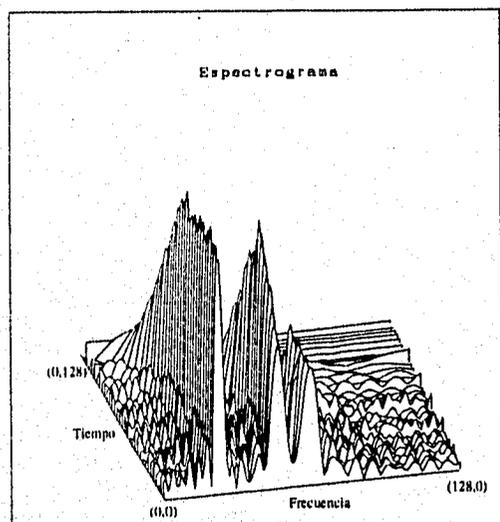


Figura 3: Espectrograma de la Señal ($v_t=71$).

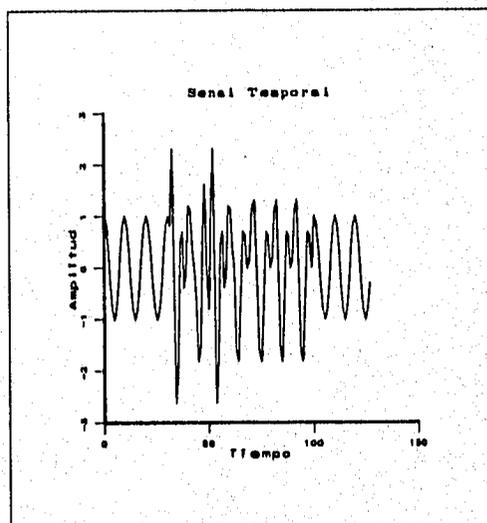


Figura 4: Señal Temporal.

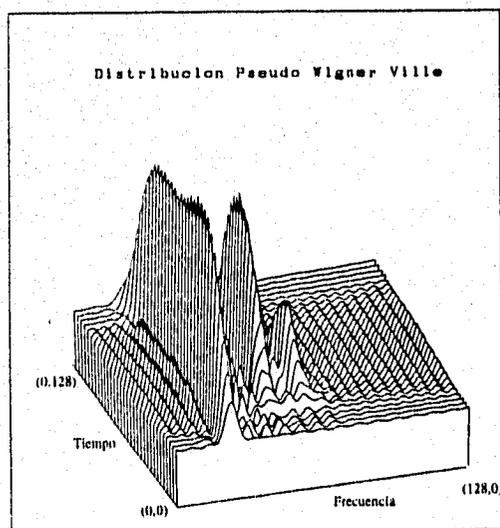


Figura 5: Distribución Pseudo Wigner Ville ($v_t=25$, $v_f=63$).

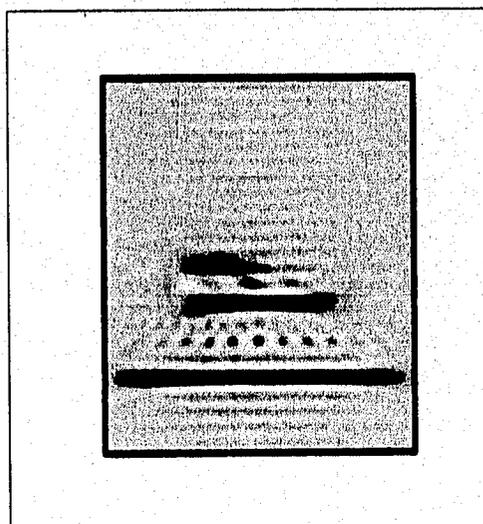


Figura 6: Vista Superior de la Distribución PWV.

Indice

1	Introducción	3
2	Análisis y Procesamiento de Señales	6
2.1	Introducción	6
2.2	Análisis en Frecuencia de Señales	6
2.2.1	Análisis de Fourier Continuo	7
2.2.2	El teorema del muestreo	8
2.2.3	Fourier Discreto	8
2.3	Función de Autocorrelación	9
2.4	Sistemas y Modelos Paramétricos	10
2.5	Estimación de Parámetros de un Sistema	11
2.6	Algoritmos de Estimación de Parámetros Basados en el Error Cuadrático Promedio	12
2.6.1	Algoritmo de Levinson-Durbin	13
2.6.2	Algoritmo de Leroux-Gueguen	14
2.7	Algoritmos de Estimación Basados en los Mínimos Cuadrados	16
2.7.1	Algoritmo Clásico de los Mínimos Cuadrados Recursivo	17
2.7.2	Algoritmo Rápido de los Mínimos Cuadrados Recursivo	18
2.8	Densidad Espectral de Potencia	22
2.9	Conclusiones	23
3	Los Métodos Tiempo-Frecuencia	24
3.1	Introducción	24
3.2	El Análisis Tiempo-Frecuencia	24
3.3	Representaciones Tiempo-Frecuencia	25
3.3.1	La Transformada de Fourier de Tiempo Corto y el Espectrograma	25
3.3.2	Marginales de una Distribución Tiempo-Frecuencia	27
3.3.3	Principio de Incertidumbre	28
3.3.4	Tipos de Representaciones Tiempo-Frecuencia	28
3.4	La Clase de Cohen	28
3.4.1	Propiedades de las Representaciones Tiempo-Frecuencia	29
3.4.2	Artefactos en las Representaciones Tiempo-Frecuencia	30
3.4.3	Representaciones Tiempo-Frecuencia Discretas	31
3.4.4	Propiedades de la Representaciones Tiempo-Frecuencia Discretas	31
3.4.5	Algunos de los Miembros de la Clase de Cohen	32
3.5	El Espectrograma	32

3.6	Distribución Wigner Ville	33
3.7	Distribución Pseudo Wigner Ville Suavizada	36
3.8	Distribución Choi Williams	37
3.9	Conclusiones	38
4	Implementación y Comparación de los Diferentes Métodos	39
4.1	Introducción	39
4.2	Estructura e Implementación de Algoritmos	39
4.2.1	El Espectrograma	40
4.2.2	Representaciones Tiempo-Frecuencia Cuadráticas: Generalidades	41
4.2.3	Distribución Wigner Ville	42
4.2.4	Distribución Pseudo Wigner Ville Suavizada	42
4.2.5	Distribución Choi Williams	43
4.3	Evaluación del Desempeño de los Métodos Tiempo-Frecuencia	44
4.3.1	Simulaciones con Señales Sintéticas	44
4.3.2	Simulaciones con Señales Reales	99
4.4	Aplicaciones	109
4.5	Conclusiones	113
5	Resultados y Conclusiones	114
A	La Señal Analítica	118
A.1	Introducción	118
A.2	Representación de las Señales	118
A.3	La Frecuencia Instantánea	119
A.4	La transformada Hilbert	121
A.5	Cálculo de la Señal Analítica	122
A.5.1	Caso Continuo	122
A.5.2	Caso Discreto	122
B	Propiedades de las Representaciones Tiempo Frecuencia	124

Capítulo 1

Introducción

El análisis tiempo-frecuencia no es ninguna herramienta nueva, y sus orígenes se remontan hacia el año de 1940. Surge de la necesidad de representar de manera conjunta los dos tipos de representaciones clásicas más utilizadas en la teoría de señales: la temporal y la frecuencial.

Una forma de conocer cuales son los componentes frecuenciales de una señal y la intensidad relativa de cada componente es efectuando un análisis frecuencial. Dos métodos con los que se puede realizar este análisis son: el análisis de Fourier y los métodos paramétricos. El análisis de Fourier se aplica tanto para señales en el dominio continuo como en el discreto, una ventaja que presenta es la variedad de algoritmos rápidos existentes para su cálculo, por lo cual su implementación es sencilla; pero una desventaja que tiene es que a veces el espectro obtenido es ruidoso, por lo que recurre a otra técnica tradicional de análisis muy utilizada como son los métodos paramétricos.

El método paramétrico consiste en modelar la señal y calcular ciertos parámetros con los cuales se obtiene su espectro, que generalmente es más limpio que el calculado con la transformada de Fourier. Para la mayor parte de las señales es suficiente la información que se obtiene al analizarlas con estas técnicas; pero existen algunas señales, e.g. las señales de voz, para las cuales este tipo de análisis es insuficiente. Dichas señales se caracterizan por tener un espectro que varía con el tiempo y esta información no puede obtenerse a través de un simple análisis frecuencial.

El espectrograma, basado en el cálculo de la Transformada de Fourier de Tiempo corto (o STFT por sus siglas en inglés), surge de la necesidad de generar una herramienta capaz de analizar señales como la voz y hasta la fecha, sigue siendo de gran importancia; se le puede considerar como la primer representación tiempo-frecuencia y es por ello que la generalidad de los métodos tiempo-frecuencia tienen como finalidad el mejorar el desempeño del espectrograma. Por ejemplo, para los métodos paramétricos se desarrollan los algoritmos adaptables que mejoran en muchos casos los resultados obtenidos con el espectrograma.

Sin embargo, desde los trabajos de Gabor y Ville, ha existido un desarrollo alternativo para estudiar las variaciones del espectro con el tiempo. La idea principal es obtener una distribución conjunta en donde se pueda conocer que fracción de energía existe en un cierto

rango de frecuencia y tiempo, cual es la frecuencia en un tiempo en particular o poder calcular la frecuencia media en un momento dado. Como se observa, una representación como tal presenta las mismas características que una distribución estadística, por lo que muchas veces son llamadas (de una manera incorrecta) distribuciones tiempo-frecuencia. La más conocida y simple de estas distribuciones es la Distribución Wigner Ville. Su importancia radica en su simplicidad de cálculo y en que a partir de ella se pueden derivar una familia de representaciones tiempo-frecuencia, conocidas como la clase de Cohen. Estas representaciones tiempo-frecuencia (o TFR's por sus siglas en inglés) han cobrado importancia recientemente por su facilidad de implementación, ya que su estructura es muy sencilla: un kernel común para las distribuciones cuadráticas y el algoritmo de la Transformada de Fourier. En la actualidad se están aplicando en diversos campos científicos, como ejemplo mencionamos la biomedicina y análisis de señales de radar y sonar. Como en cualquier campo de investigación, una herramienta novedosa tiene muchas ventajas y desventajas que deben conocerse, para poder hacer un uso eficiente de ellas.

Para familiarizarse con este tipo de TFR's, su terminología, características y la forma de implementar sus algoritmos, es necesario revisar la literatura existente sobre este tema, cosa que no es sencilla, porque actualmente existe una gran cantidad de artículos sobre el mismo. Un objetivo de esta tesis es que este documento sirva como una introducción al estudio de estas representaciones, presentar las características fundamentales, mostrar como se pueden implementar los algoritmos y ejemplificar su funcionamiento con señales sintéticas y reales. Con esto, se debe facilitar la comprensión e interpretación de los resultados que pueden obtenerse con ellas sin necesidad de consultar la gran cantidad de artículos existentes sobre el tema. Un segundo objetivo de este trabajo es el evaluar estas herramientas, y para poder realizar esta evaluación hay que efectuar una comparación del desempeño de estos métodos tiempo-frecuencia con el de las representaciones tradicionales. Para el análisis comparativo se consideran dos representaciones paramétricas, una de ellas un algoritmo adaptable con dos formas de implementación, y cuatro representaciones no paramétricas: el espectrograma y las distribuciones Wigner Ville, Pseudo Wigner Ville "Suavizada" y Choi Williams. El tercer objetivo de este trabajo es implementar estos métodos tiempo-frecuencia en un ambiente que facilitara las simulaciones así como la presentación gráfica de resultados. Un programa que reúne estas características es KHOROS, un paquete desarrollado en la Universidad de Nuevo México para el análisis y procesamiento de señales, que es de dominio público y además está disponible a través de internet. Las ventajas que presenta este programa es la facilidad de programar secuencias de algoritmos a semejanza de un diagrama de bloques, se pueden aprovechar las utilerías gráficas que vienen incluidas en el mismo y finalmente, por la forma en que fue diseñado, se pueden programar nuevos módulos con otras funciones que complementen a las ya existentes, con lo que se enriquece aún más las herramientas disponibles para el usuario. En este caso, los algoritmos aquí estudiados los programé en lenguaje C y fueron anexados como rutinas auxiliares al programa de Khoros.

En este documento se muestra que una ventaja de las TFR's no paramétricas se pueden generar a partir de una ecuación general en la cual solo una función, llamada kernel, es la que diferencia a cada representación. Esto facilita la tarea de programar e implementar dichos algoritmos. Una vez programados los métodos tiempo-frecuencia, se observará

que aunque muchos presenten un buen desempeño para alguna aplicación en particular, no es indicio de que se comportará de la misma manera con otro tipo de señales, llegando a la conclusión que se debe de aplicar el método tiempo-frecuencia dependiendo del tipo de señal que se quiera procesar. Finalmente, se observa que el desempeño de los métodos tiempo-frecuencia no paramétricos es comparable o superior al de los métodos paramétricos, razón por la cual están siendo aplicados en muchas áreas de investigación.

Siguiendo el mismo orden que en esta introducción, el documento está estructurado en tres secciones principales: la primera incluye un breve resumen sobre el análisis de señales con métodos tradicionales como son el análisis de Fourier y los métodos paramétricos, incluyendo un algoritmo adaptable de los mínimos cuadrados. La segunda parte incluye un análisis de las propiedades y características de los métodos tiempo-frecuencia tanto para el dominio de señales continuas como discretas. Para concluir, en la tercera sección se explica una forma de implementar estos algoritmos para el caso discreto y ejemplificamos su desempeño con señales sintéticas. Posteriormente al final de este capítulo efectuamos las mismas simulaciones aplicando los métodos tradicionales y comparamos el desempeño de los métodos utilizados, tanto para señales sintéticas como para señales reales, en este caso, señales electroencefalográficas (EEG) y señales de voz. Se anexan dos apéndices complementarios a los capítulos desarrollados, uno con información de la señal analítica y otro con las propiedades de las representaciones tiempo-frecuencia.

Finalmente, una nota referente a los programas desarrollados para esta tesis: si se desea consultar información en español acerca de como utilizar el paquete Khoros, y como programar y anexar rutinas auxiliares al programa, consultar [ZEP95] y [ALC96], o se pueden remitir directamente a los manuales de Khoros en inglés [RAS91], [ARG91]. La documentación y listado de los programas con los algoritmos utilizados para esta tesis, no se incluyen en el presente documento, ya que la misma estructura de Khoros contiene la documentación dentro del archivo en donde se encuentra el código de programación. Si alguna persona está interesada en obtener las rutinas, puede pedir las a las siguientes direcciones de correo electrónico: **monic@pacific.depfi.unam.mx** o **rogelio@depfi1.depfi.unam.mx**

Capítulo 2

Análisis y Procesamiento de Señales

2.1 Introducción

La forma tradicional de analizar las señales es con los métodos clásicos, como son el Análisis de Fourier y el Modelado Paramétrico. El Análisis de Fourier ha sido y seguirá siendo una herramienta básica para este análisis, como se constata en la literatura publicada sobre el tópico. Pero tiene algunos puntos débiles que pueden ser fortalecidos con otro tipo de técnicas. Por ejemplo, el modelado paramétrico, con el que se pueden obtener espectros más limpios a partir del modelado de la señal. En este primer capítulo se hace un breve resumen de dichas técnicas, haciendo mención de los algoritmos paramétricos adaptables.

2.2 Análisis en Frecuencia de Señales

Existen varias razones por las cuales es necesario utilizar el análisis en frecuencia o análisis espectral. Una de ellas es que simplifica el entendimiento de la señal que es el objeto de nuestro análisis. En segundo lugar, nos puede dar una idea de las propiedades físicas de la señal, (por ejemplo su propagación a través de un medio frecuentemente depende de la frecuencia) y en tercero: es una herramienta matemática para resolver ecuaciones. La herramienta más utilizada para efectuar dicho análisis es la Transformada de Fourier.

La Transformada de Fourier directa y su inversa establecen una relación uno a uno entre una señal $x(t)$ en el dominio del tiempo t , y su espectro $X(w)$ en el dominio de la frecuencia w . Estos dominios constituyen dos alternativas para analizar una señal, y aunque la Transformada de Fourier establece la relación entre un dominio y el otro, no permite por sí sola la combinación de ambos. Se asume que el lector tiene conocimientos previos acerca de la teoría de sistemas lineales y de la transformada de Fourier tanto en el dominio de las señales continuas como en el de las señales discretas, por lo que en esta sección sólo se incluye información necesaria para poder desarrollar los temas subsecuentes.

2.2.1 Análisis de Fourier Continuo

La Transformada de Fourier de una función $x(t)$ y su inversa se definen por las siguientes relaciones [POU94]:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\} &= X(w) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ \mathcal{F}^{-1}\{X(w)\} &= x(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w) e^{j\omega t} dw\end{aligned}$$

No todas las funciones tienen una transformada y su existencia se determina bajo ciertas condiciones, por ejemplo, que su integral sea finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Una condición suficiente y menos restrictiva es que tenga energía finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Si se cumplen las condiciones necesarias, $x(t)$ puede transformarse. Existen algunas funciones que no tienen una transformada de Fourier en un sentido estricto ya que no cumplen con alguna de las condiciones para que exista su transformada, pero en muchos casos, aun es posible deducirla bajo ciertas consideraciones pertenecientes a un conjunto conocido como funciones generalizadas [POU94].

Como toda transformación matemática, la transformada de Fourier tiene varias propiedades, como son la de linealidad, corrimiento en frecuencia, corrimiento en tiempo, etc., ver por ejemplo [BRA78], [RAB75], [OPP75]. Existen dos características que deben mencionarse: la transformada de una señal con longitud finita será una función continua con un rango de frecuencias muy amplio; y el espectro de una señal real es complejo.

Como el espectro en frecuencia $X(w)$ es complejo, no es conveniente trabajar con este tipo de datos ya que la mayoría de las aplicaciones utilizan generalmente valores reales para caracterizar el comportamiento frecuencial de la señal. Una solución es utilizar $|X(w)|^2$ que representa la energía de la señal.

El postulado de Parseval sobre la conservación de la energía se expresa de la siguiente forma [POU94]:

$$\int |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int |X(w)|^2 dw$$

y nos indica que la energía en el dominio del tiempo es igual a la energía en el dominio de

la frecuencia. Por esta razón, $|X(w)|^2$ es llamada frecuentemente el espectro de potencia de la señal $x(t)$. La potencia espectral indica cuanta energía está presente en la frecuencia w durante todo el periodo de tiempo.

2.2.2 El teorema del muestreo

Antes de establecer las condiciones y el algoritmo de la transformada de Fourier para señales discretas es conveniente recordar algunas cosas referentes al muestreo de las señales. El teorema de muestreo nos dice que para poder reconstruir una señal sin distorsiones por medio de sus muestras, la tasa de muestreo (conocida como tasa de Nyquist) debe ser [POU94]:

$$f_s \geq 2f_{max}$$

donde f_s es la frecuencia de muestreo y f_{max} la frecuencia máxima contenida en la señal $x(t)$. Si esta frecuencia fuera menor, existirá una superposición o traslape entre los espectros, fenómeno conocido como *aliasing*. Aunque puede ser visto como un problema, este fenómeno es ventajoso en algunos casos. Una manera de evitarlo es utilizando la señal analítica (consultar el Apéndice A).

Existe un teorema muy parecido, que es el teorema del muestreo en frecuencia, en la que en vez de utilizar una señal limitada en banda, se considera una función real limitada en tiempo. Esto indica que una señal $s(t)$ es cero para un $|t| > T_0$. Si se muestrea en el dominio de la frecuencia, en vez de hacerlo en el dominio del tiempo, a intervalos de frecuencia de $F \leq \frac{1}{2T_0}$, se obtendrá una señal periódica sin traslape de frecuencias, en caso de que la frecuencia sea menor, se presentará el fenómeno de *aliasing* en el tiempo [POU94].

2.2.3 Fourier Discreto

Para generar un estimador del espectro a partir de una señal muestreada se utiliza el par de transformadas que define a la Transformada de Fourier Discreta directa y su inversa. Para una secuencia $x[n]$ en tiempo discreto de longitud N puntos y su espectro $X[k]$ con longitud N puntos se tiene [POU94]:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad (2.1)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} \quad (2.2)$$

Al igual que para la Transformada de Fourier Continua, existen propiedades para la Transformada de Fourier Discreta, [BRA78], [OPP75], [RAB75], [POU94]. Una característica

que debe mencionarse es que el espectro que se obtiene es periódico y simétrico, ya que las funciones $e^{-j2\pi kn/N}$ y $e^{j2\pi kn/N}$ son periódicas, con lo que se concluye que la transformada discreta es periódica.

Si se implementan las ecuaciones 2.1 y 2.2, el número de operaciones a efectuar son N^2 multiplicaciones complejas y $N^2 - N$ sumas complejas, por lo que el tiempo de cálculo es ineficiente. Afortunadamente, se desarrolló un algoritmo rápido y más eficiente en cuestión de tiempo de cálculo, conocido como el algoritmo de Transformada de Fourier Rápida o FFT.

La FFT es un algoritmo que reduce el número de multiplicaciones y sumas requeridas para determinar los coeficientes de la Transformada de Fourier Discreta. Existen varios tipos de algoritmos de FFT. Su estructura de cálculo es semejante, y lo único en que se diferencian es en el tamaño de cada una de las transformadas que se van calculando. Si el número de puntos N lo expresamos como la potencia de un número r , en donde r es un número primo, entonces $N = r^v$. Este número r indica el tamaño de las transformadas y se le conoce con el nombre de *radix*. La FFT más utilizada es la FFT radix-2, por lo que N en este caso, tendrá que ser una potencia de dos.

Este algoritmo consiste en fraccionar (decimar en tiempo) el número de transformadas que se van a calcular, reduciendo con esto el número de datos que se calculan en cada transformada. Esta división del proceso se continua hasta que el número de transformadas que quede por calcularse sea solo una. El único inconveniente con este algoritmo es verificar el orden en que quedan las muestras, porque no existe correspondencia entre el orden en que se procesan las muestras y el orden resultante. En cuanto al número de operaciones se reduce a $\frac{N}{2} \log_2 N$ multiplicaciones y $N \log_2 N$ sumas complejas, [KAY88].

2.3 Función de Autocorrelación

La correlación es una operación matemática muy parecida a la convolución, y con ella se puede examinar qué tan parecidas son dos secuencias de datos. La función de intercorrelación entre la señales $x[k]$ e $y[k]$ se define como [KAY88]:

$$r_{xy}[l] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[k+l] \quad |l| = 0, 1, 2, \dots$$

Para obtener la función de autocorrelación de la señal $x[k]$:

$$r_{xx}[l] \triangleq r_x[l] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] x[k+l] \quad |l| = 0, 1, 2, \dots$$

En el caso de que $x[k]$ ó $y[k]$ sean señales no determinísticas se utiliza cualquiera de los siguientes estimadores [ALC92], [KAY88]:

- Estimador no sesgado de la función de autocorrelación:

$$r_x[l] = \frac{1}{N - |l|} \sum_{k=0}^{N-|l|-1} E \{x[k] x[k+l]\} \quad |l| = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- Estimador sesgado de la función de autocorrelación:

$$r_x[l] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-|l|-1} E \{x[k] x[k+l]\} \quad |l| = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Para algunas aplicaciones es interesante trabajar con correlaciones normalizadas para la cual se utilizará la siguiente notación:

$$\rho_x[l] = \frac{r_x[l]}{r_x[0]} \quad (2.3)$$

2.4 Sistemas y Modelos Paramétricos

En la sección anterior se estableció que una forma de obtener el contenido espectral de una señal es a través de la Transformada de Fourier. Sin embargo, como se observa a través de este documento, no es la única forma de obtenerlo. Otra técnica muy utilizada es el modelado paramétrico. Los parámetros del modelo se obtienen con ayuda de la función de autocorrelación de la señal que se va a parametrizar. Este método consiste en escoger un modelo apropiado para el fenómeno en cuestión, estimar los parámetros de este modelo y sustituir los valores estimados en la ecuación que define a dicho modelo. Existen tres modelos: el Modelo Autorregresivo (AR), el Modelo de Promedio Móvil (Moving Average o MA) y una combinación de ambos, el Modelo Autorregresivo de Promedio Móvil (ARMA). El más sencillo es el modelo AR, en el cual para obtener sus parámetros, se debe resolver un conjunto de ecuaciones lineales, mientras que las soluciones para los modelos MA y ARMA se obtienen a partir de la resolución de un conjunto de ecuaciones no lineales. Es importante mencionar que dependiendo del tipo de señal que se va a modelar es el tipo de modelo que se debe de utilizar. El modelo AR está indicado para señales con muchos picos, pero no se deben utilizar para señales con abundancia de valles. Es recomendable utilizar el modelo MA para señales con valles muy profundos y finalmente, los ARMA se desempeñan bien en ambas direcciones [KAY88].

Una señal o un sistema lineal cuyas variables de entrada sean variables aleatorias e independientes se puede representar en su forma mas general por su ecuación en diferencias:

$$\sum_{i=0}^p a_i y[k-i] = \sum_{m=0}^q b_m x[k-m]$$

en donde los coeficientes a_i y b_m son los coeficientes que definen al sistema. Este es el modelo general conocido como modelo ARMA o modelo autorregresivo de promedio móvil.

Cuando $p = 0$, se tiene la ecuación de un modelo de promedio móvil (MA). Si $q = 0$ se obtiene la ecuación de un modelo AR. Nos concentraremos exclusivamente en el modelo AR.

2.5 Estimación de Parámetros de un Sistema

Sea $y[k]$ una señal discreta la cual puede ser caracterizada por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[k] = - \sum_{i=1}^p a_i y[k-i] + x[k]$$

donde $x[k]$ puede ser una señal determinística o aleatoria.

Se plantea el problema de predecir a la señal $y[k]$ en términos de un conjunto de muestras pasadas de la misma, e.g. $y[k-1], y[k-2], \dots, y[k-p]$, para lo cual podemos definir al predictor de $y[k]$ como sigue, [ALC92]:

$$\hat{y}[k] = - \sum_{i=1}^p a_i y[k-i] \quad (2.4)$$

Para evaluar la calidad del estimador, se introduce el siguiente error de predicción :

$$\varepsilon_p^f[k] = y[k] - \hat{y}[k] \quad (2.5)$$

y sustituyendo 2.4 en 2.5:

$$\varepsilon_p^f[k] = y[k] + \sum_{i=1}^p a_i y[k-i] = y[k] + \mathbf{A}_p^T \mathbf{Y}_p[k-1] \quad (2.6)$$

en donde:

$$\mathbf{A}_p^T \triangleq [a_1, a_2, \dots, a_p] \quad (2.7)$$

$$\mathbf{Y}_p^T[k-1] \triangleq [y[k-1], y[k-2], y[k-3], \dots, y[k-p]] \quad (2.8)$$

Existen varios tipos de criterios para optimizar, en este caso minimizar, el error de predicción establecido con respecto a los parámetros del modelo, entre los más utilizados se encuentran el del error cuadrático promedio y el de los mínimos cuadrados.

- Criterio del Error Cuadrático Promedio

$$J_{mse} = E \{ \varepsilon_p^{f2}[k] \}$$

Este criterio para el caso complejo o vectorial se escribe como:

$$J_{mse} = E \{ \varepsilon_p^f[k] \varepsilon_p^{f*}[k] \} \quad (2.9)$$

en donde la notación * indica el complejo conjugado transpuesto.

• Criterio de los Mínimos Cuadrados

Siguiendo la misma notación para el caso complejo o vectorial, este criterio se define como:

$$J_{lse} = \sum_{i=0}^k \varepsilon_p^i [i] \varepsilon_p^{i*} [i] \quad (2.10)$$

La utilización de un criterio u otro dependerá del conocimiento del problema a resolver y de los resultados esperados. A continuación, se presenta una descripción de los algoritmos basados en cada uno de los criterios mencionados.

2.6 Algoritmos de Estimación de Parámetros Basados en el Error Cuadrático Promedio

Para estimar los parámetros del predictor establecido derivamos el criterio del error cuadrático promedio, 2.9, con respecto a los parámetros buscados e igualándolo a cero, se pueden encontrar fácilmente los parámetros del predictor que hacen mínimo el criterio.

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{mse}}{dA_p} &= \frac{d}{dA_p} E \left\{ \left[y[k] + \mathbf{A}_p^T \mathbf{Y}_p[k-1] \right] \left[y[k] + \mathbf{A}_p^T \mathbf{Y}_p[k-1] \right]^* \right\} \\ &= \frac{d}{dA_p} E \left\{ y^2[k] + 2 \mathbf{A}_p^T \mathbf{Y}_p[k-1] y[k] + \mathbf{A}_p^T \mathbf{Y}_p[k-1] \mathbf{Y}_p^T[k-1] \mathbf{A}_p \right\} \\ &= \frac{d}{dA_p} E \left\{ y^2[k] \right\} + 2 \frac{d}{dA_p} E \left\{ \mathbf{A}_p^T \mathbf{Y}_p[k-1] y[k] \right\} \\ &\quad + \frac{d}{dA_p} E \left\{ \mathbf{A}_p^T \mathbf{Y}_p[k-1] \mathbf{Y}_p^T[k-1] \mathbf{A}_p \right\} \end{aligned}$$

En el desarrollo anterior consideramos que tanto los parámetros como la señal son reales y para derivarla utilizamos las siguientes expresiones, [KAY88]:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \\ \frac{dM(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{d\mathbf{x}} &= \left[M + M^T \right] \mathbf{x} = 2M\mathbf{x}, \quad \text{si } M \text{ es simétrica} \end{aligned}$$

y dado que el producto $\mathbf{Y}_p[k-1] \mathbf{Y}_p^T[k-1]$ implica una matriz simétrica entonces obtenemos:

$$\frac{dJ_{mse}}{dA_p} = 2 E \left\{ \mathbf{Y}_p[k-1] y[k] \right\} + 2 E \left\{ \mathbf{Y}_p[k-1] \mathbf{Y}_p^T[k-1] \right\} \mathbf{A}_p$$

e igualando a cero se tiene:

$$2 E \left\{ \mathbf{Y}_p[k-1] y[k] \right\} = -2 E \left\{ \mathbf{Y}_p[k-1] \mathbf{Y}_p^T[k-1] \right\} \mathbf{A}_p \quad (2.11)$$

Analizando la ecuación anterior observamos que tanto los elementos de $E \left\{ \mathbf{Y}_p[k-1] y[k] \right\}$

como de $E \{ \mathbf{Y}_p[k-1] \mathbf{Y}_p^T[k-1] \}$ son puntos de la función de autocorrelación de la señal $y[k]$ estacionaria, con lo que finalmente podemos escribir :

$$R_p[k-1] \mathbf{A}_p = -\mathbf{r}_p[k] \quad (2.12)$$

donde :

$$\mathbf{r}_p^T[k] = [r_y[1] \ r_y[2] \ \cdots \ r_y[p-1] \ r_y[p]] \quad (2.13)$$

$$R_p[k-1] = \begin{bmatrix} r_y[0] & r_y[1] & r_y[2] & \cdots & r_y[p-2] & r_y[p-1] \\ r_y[1] & r_y[0] & r_y[1] & \cdots & r_y[p-3] & r_y[p-2] \\ r_y[2] & r_y[1] & r_y[0] & \cdots & r_y[p-4] & r_y[p-3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ r_y[p-2] & r_y[p-3] & r_y[p-4] & \cdots & r_y[0] & r_y[1] \\ r_y[p-1] & r_y[p-2] & r_y[p-3] & \cdots & r_y[1] & r_y[0] \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Es importante mencionar que la matriz $R_p[k-1]$ es una matriz Toeplitz, simétrica y cuyos elementos diagonales y subdiagonales son los mismos. A la expresión 2.12 se le conoce con el nombre de ecuaciones de Yule-Walker, y para encontrar la solución para \mathbf{A}_p se necesita invertir la matriz $R_p[k-1]$, obteniéndose:

$$\mathbf{A}_p = -R_p^{-1}[k-1] \mathbf{r}_p[k] \quad (2.15)$$

2.6.1 Algoritmo de Levinson-Durbin

Una forma eficiente de resolver la ecuación 2.12 es utilizando el Algoritmo de Levinson-Durbin [PRO88], con el que se reduce el número de operaciones necesarias para la inversión de una matriz por métodos tradicionales de N^3 a solamente N^2 operaciones. Esta reducción se logra gracias a la estructura Toeplitz de la matriz de autocorrelación $R_p^{-1}[k-1]$. La idea del algoritmo de Levinson-Durbin es simple. Se toman las ecuaciones de Yule-Walker al orden $p+1$:

$$R_{p+1}[k-1] \mathbf{A}_{p+1}^{\mathbf{p}+1} = -\mathbf{r}_{p+1}[k] \quad (2.16)$$

en donde $\mathbf{A}_{p+1}^{\mathbf{p}+1}$ es un vector de dimensión $p+1$ que contiene los parámetros al orden $p+1$, y $R_{p+1}[k-1]$ también es una matriz Toeplitz de dimensión $p+1$ que tiene la siguiente estructura particionada:

$$R_{p+1}[k-1] = \begin{bmatrix} R_p[k-1] & \tilde{\mathbf{r}}_p[k] \\ \tilde{\mathbf{r}}_p^T[k] & r_y[0] \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{r}}_p^T[k] \triangleq [r_y[p] \ r_y[p-1] \ \cdots \ r_y[2] \ r_y[1]] \quad (2.18)$$

Podemos constatar que la matriz $R_p[k-1]$ está incluida dentro de la matriz $R_{p+1}[k-1]$. La solución del problema de estimación al orden $p+1$, 2.17, utilizando la matriz particionada

nos lleva al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} R_p[k-1] & \tilde{\mathbf{r}}_p[k] \\ \tilde{\mathbf{r}}_p^T[k] & r_y[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p^{p+1} \\ a_{p+1}^{p+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_p[k] \\ r_y[p+1] \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

y resolviendo obtenemos:

$$\mathbf{A}_p^{p+1} = \mathbf{A}_p^p + k_p \tilde{\mathbf{A}}_p^p \quad (2.20)$$

$$k_p \triangleq a_{p+1}^{p+1} = - \frac{\alpha_p}{\beta_p} \quad (2.21)$$

donde α_p y β_p están dados por:

$$\alpha_p = \sum_{j=0}^p a_j^p \rho_y[p+1-j] \quad (2.22)$$

$$\beta_p = \sum_{j=0}^p a_j^p \rho_y[j] \quad (2.23)$$

Se estableció que $a_0^p = 1$ para cualquier dimensión p . La ecuación 2.20 permite resolver el sistema para \mathbf{A}_p^{p+1} a partir de \mathbf{A}_p^p . k_p son los coeficientes de reflexión al orden p . De 2.23 se puede demostrar la siguiente recursión para el cálculo de β_p :

$$\beta_{p+1} = \beta_p + k_p \rho_y[p-1] \quad (2.24)$$

2.6.2 Algoritmo de Leroux-Gueguen

Un método alternativo para el cálculo de los coeficientes k_p del algoritmo de Levinson-Durbin es el algoritmo de Leroux-Gueguen [ALC92], [LE 76]. Se basa en el cálculo de la intercorrelación entre el error $\varepsilon_p[k]$ y la señal $y[k-i]$:

$$r_{\varepsilon_y}[l] = E \{ \varepsilon_p^f[k] y[k-l] \} \quad (2.25)$$

Reescribiendo 2.6 con $a_0 = 1$:

$$\varepsilon_p^f[k] = \sum_{i=0}^p a_i y[k-i] \quad (2.26)$$

y sustituyéndola en 2.25:

$$\begin{aligned} r_{\varepsilon_y}[l] &= E \left\{ \sum_{i=0}^p a_i^p y[k-i] y[k-l] \right\} \\ &= \sum_{i=0}^p a_i^p E \{ y[k-i] y[k-l] \} \end{aligned}$$

y como $E\{y[k-i]y[k-l]\}$ es la autocorrelación de $y[l-i]$:

$$r_{\varepsilon y}[l] = \sum_{i=0}^p a_i^p r_y[l-i] \quad (2.27)$$

Al igual que con el algoritmo de Levinson Durbin, se pueden trabajar con correlaciones normalizadas, que en este caso quedan definidas como:

$$\rho_c^p[l] \triangleq \frac{r_{\varepsilon y}[l]}{r_y[0]}$$

Observando por un lado la ecuación 2.21 para el cálculo de k_p expresando los términos α_p y β_p en función de las autocorrelaciones normalizadas, 2.22 y 2.23, y por otro lado, evaluando $\rho_c^p[l]$ en $p+1$ y en 0 obtenemos:

$$k_p = -\frac{\alpha_p}{\beta_p} = -\frac{\rho_c^p[p+1]}{\rho_c^p[0]} \quad (2.28)$$

Es posible encontrar una recursión para el cálculo de los parámetros $\rho_c^p[l]$, para esto podemos escribir $\rho_c^p[l]$ al orden $p+1$:

$$\begin{aligned} \rho_c^{p+1}[l] &= \sum_{i=0}^{p+1} a_i^{p+1} \rho_y[l-i] \\ &= a_0^{p+1} \rho_y[l] + \sum_{i=1}^p a_i^{p+1} \rho_y[l-i] + a_{p+1}^{p+1} \rho_y[l-p+1] \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $a_0^{p+1} = 1$ y las ecuaciones 2.20 y 2.21 en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \rho_c^{p+1}[l] &= \rho_y[l] + \sum_{i=1}^p \left[a_i^p + k_p a_{p+1-i}^p \right] \rho_y[l-i] + k_p \rho_y[l-p+1] \\ &= \rho_y[l] + \sum_{i=1}^p a_i^p \rho_y[l-i] + k_p \sum_{i=1}^p a_{p+1-i}^p \rho_y[l-i] + k_p \rho_y[l-p+1] \\ &= \sum_{i=0}^p a_i^p \rho_y[l-i] + k_p \sum_{i=1}^{p+1} a_{p+1-i}^p \rho_y[l-i] \end{aligned}$$

efectuando un cambio de índice: $j = p+1-i$, entonces:

$$\rho_c^{p+1}[l] = \rho_c^p[l] + k_p \sum_{j=p}^0 a_j^p \rho_y[l-p-1+j]$$

y como $\rho_y[l-p-1+j] = \rho_y[p+1-l-j]$:

$$\rho_c^{p+1}[l] = \rho_c^p[l] + k_p \sum_{j=0}^p a_j^p \rho_y[p+1-l-j] \quad (2.29)$$

El último término de la ecuación 2.29 se puede expresar también en términos de $\rho_c^p[l]$ con lo que finalmente obtenemos:

$$\rho_c^{p+1}[l] = \rho_c^p[l] + k_p \rho_c^p[p+1-l] \quad (2.30)$$

Con las ecuaciones 2.28 y 2.30 tenemos un algoritmo para el cálculo recursivo en orden de los coeficientes de reflexión sin necesidad de pasar por el cálculo de los coeficientes de predicción. Con esto finalizamos el análisis de los algoritmos de estimación basados en el error cuadrático medio. Pasamos entonces al desarrollo de los algoritmos de estimación para los mínimos cuadrados.

2.7 Algoritmos de Estimación Basados en los Mínimos Cuadrados

Se puede reescribir la ecuación 2.10 de la siguiente forma:

$$J_{lse}[k] = \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \varepsilon_p^f[i] \varepsilon_p^{f*}[i] \quad (2.31)$$

$$= \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \{y[i] + \mathbf{A}_p^T[k] \mathbf{Y}_p[i-1]\} \{y[i] + \mathbf{Y}_p^T[i-1] \mathbf{A}_p[k]\} \quad (2.32)$$

$$= r_y[0] + 2\mathbf{A}_p^T[k] r_p^f[k] + \mathbf{A}_p^T R_p[k-1] \mathbf{A}_p^T[k] \quad (2.33)$$

donde:

$$r_y[0] \triangleq \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} y^2[i] \quad (2.34)$$

$$R_p[k-1] \triangleq \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \{ \mathbf{Y}_p[i-1] \mathbf{Y}_p^T[i-1] \} \quad (2.35)$$

$$r_p^f[k] \triangleq \sum_{i=0}^k \mathbf{Y}_p[i-1] y[i] \quad (2.36)$$

En la ecuación 2.31 se introdujo la constante λ la cual se conoce con el nombre de factor de olvido. Esta constante pondera las muestras de la señal, y actúa como una ventana exponencial. Por ejemplo, el factor que se le aplica a las muestras más distantes con respecto al instante k es menor al que se le aplica a las muestras más recientes, con lo que se puede decir que "olvida" en un cierto factor las muestras pasadas. La introducción de este parámetro es útil si se desea seguir las pequeñas variaciones que ocurren en los parámetros conforme transcurre el tiempo. El valor de la constante fluctúa entre $0 < \lambda \leq 1$ y si $\lambda = 1$ obtendremos la expresión original del criterio. Se muestra en [ALC86] que el algoritmo trabaja mejor en la mayoría de los casos si el rango de λ se restringe entre $0.98 \leq \lambda \leq 1$.

Siguiendo un desarrollo parecido al de la optimización del predictor "forward" en base al error cuadrático promedio, se puede demostrar que la solución para los mínimos cuadrados está dada por:

$$R_p[k-1]\mathbf{A}_p[k] = -\mathbf{r}_p^f[k] \quad (2.37)$$

Es importante mencionar que los parámetros $\mathbf{A}_p[k]$ no son los mismos que los de la ecuación 2.15 ya que los criterios que se están minimizando son diferentes.

2.7.1 Algoritmo Clásico de los Mínimos Cuadrados Recursivo

Este algoritmo tiene la misma finalidad que el algoritmo de Levinson-Durbin (c.f. 2.6.1) que es el calcular los coeficientes que modelan a un sistema del tipo ARMA. La única diferencia es que el cálculo de estos coeficientes se hace por muestra, es decir, se crea un juego de parámetros por cada muestra de la señal [ALC86], mientras que la recursividad de Levinson es en orden y no en tiempo. Para desarrollar este algoritmo, se puede verificar fácilmente que la matriz $R_p[k]$ y el vector $\mathbf{r}_p^f[k]$ se pueden calcular en forma recursiva a través de las siguientes ecuaciones:

$$R_p[k] = \lambda R_p[k-1] + \mathbf{Y}_p[k-1]\mathbf{Y}_p^T[k-1] \quad (2.38)$$

$$\mathbf{r}_p^f[k] = \lambda \mathbf{r}_p^f[k-1] + \mathbf{Y}_p[k-1]y[k] \quad (2.39)$$

Ahora sustituyendo la expresión 2.39 en 2.37 y agregando en ambos lados de la igualdad $\mathbf{Y}_p[k-1]\mathbf{Y}_p^T[k-1]\mathbf{A}_p[k-1]$ se puede demostrar fácilmente la siguiente expresión:

$$\mathbf{A}_p[k] = \mathbf{A}_p[k-1] + \mathbf{k}_p[k-1]e_p^f[k] \quad (2.40)$$

en donde $\mathbf{k}_p[k]$ es conocida como la ganancia de Kalman y $e_p^f[k]$ es el error de predicción directa a priori y están definidas como:

$$\mathbf{k}_p[k] \triangleq -R_p^{-1}[k]\mathbf{Y}_p[k] \quad (2.41)$$

$$e_p^f[k] \triangleq y[k] + \mathbf{A}_p^T[k-1]\mathbf{Y}_p[k-1] \quad (2.42)$$

Se observa que para obtener la ganancia de Kalman es necesario calcular la inversa de la matriz $R_p[k]$. Utilizando el lemma de inversión matricial [KAY88] se llega a la siguiente expresión para $R_p^{-1}[k]$:

$$R_p^{-1}[k] = \lambda^{-1}R_p^{-1}[k-1] - \mathbf{w}_p[k]\gamma_p[k]\mathbf{w}_p^T[k] \quad (2.43)$$

donde:

$$\mathbf{w}_p[k] \triangleq -\frac{1}{\lambda}R_p^{-1}[k-1]\mathbf{Y}_p[k] \quad (2.44)$$

$$\gamma_p[k] \triangleq \frac{1}{1 - \mathbf{Y}_p^T[k]\mathbf{w}_p[k]} \quad (2.45)$$

Postmultiplicando ambos miembros de la expresión 2.43 por $-\mathbf{Y}_p[k]$ se puede demostrar la siguiente relación:

$$\mathbf{k}_p[k] = \mathbf{w}_p[k]\gamma_p[k] \quad (2.46)$$

Finalmente el algoritmo clásico de los mínimos cuadrados recursivo se calcula como se indica en la tabla 1.1. En el organigrama el valor de δ debe ser un valor pequeño.

Tabla 1.1

Algoritmo Clásico de los Mínimos Cuadrados Recursivo

Condiciones iniciales	
Para el instante $k - 1$:	
$R_p^{-1}[k - 1] = \delta^{-1}I, \delta > 0, \mathbf{Y}_p[k - 1] = \mathbf{A}_p[k - 1] \approx 0$	
Ecuación	
$e_p^f[k] = y[k] + \mathbf{A}_p^T[k - 1]\mathbf{Y}_p[k - 1]$	2.42
$\mathbf{A}_p[k] = \mathbf{A}_p[k - 1] + \mathbf{k}_p[k - 1]e_p^f[k]$	2.40
$\mathbf{w}_p[k] = -\lambda^{-1}R_p^{-1}[k - 1]\mathbf{Y}_p[k - 1]$	2.44
$\gamma_p[k] = (1 - \mathbf{Y}_p^T[k]\mathbf{w}_p[k])^{-1}$	2.45
$R_p^{-1}[k] = \lambda^{-1}R_p^{-1}[k - 1] - \mathbf{w}_p[k]\mathbf{w}_p^T[k]\gamma_p[k]$	2.38
$\mathbf{k}_p[k] = -R_p^{-1}[k]\mathbf{Y}_p[k] = \mathbf{w}_p[k]\gamma_p[k]$	2.41 2.46

2.7.2 Algoritmo Rápido de los Mínimos Cuadrados Recursivo

A este algoritmo también se le conoce como el algoritmo de Kalman Rápido [ALC86], y reduce el número de operaciones aritméticas que se efectúan en el algoritmo de los mínimos cuadrados clásico recursivo, del orden de p^2 al orden de p operaciones. Este algoritmo se ayuda de un predictor regresivo ("backward") del tipo:

$$\hat{y}[k - p] = -\sum_{i=1}^p b_i y[k - p + i] \quad (2.47)$$

Si se sigue un procedimiento semejante al predictor "forward", también podemos definir un error de predicción "backward", $\varepsilon_p^b[k]$:

$$\varepsilon_p^b[k] = y[k - p] + \mathbf{B}_p^T[k] \mathbf{Y}_p[k]$$

donde:

$$\mathbf{B}_p^T[k] \triangleq [b_p, b_{p-1}, \dots, b_1] \quad (2.48)$$

y el vector $\mathbf{Y}_p^T[k]$ es el mismo que el de la predicción "forward" pero al instante k :

$$\mathbf{Y}_p^T[k] = [y[k], \dots, y[k-p+1]] \quad (2.49)$$

En este caso el criterio de los mínimos cuadrados a minimizar está dado por:

$$J_{lse} = \sum_{i=0}^k \varepsilon_p^b[i] \varepsilon_p^{b*}[i] \quad (2.50)$$

y cuya solución es de la forma:

$$\mathbf{B}_p[k] = -R_p^{-1}[k] \mathbf{r}_p^b[k] \quad (2.51)$$

donde:

$$\mathbf{r}_p^b[k] \triangleq \sum_{i=0}^k \mathbf{Y}_p[i] y[i-p] \quad (2.52)$$

y $R_p[k]$ es la misma que la de la predicción "forward" pero al instante k :

$$R_p[k] = \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \{ \mathbf{Y}_p[i] \mathbf{Y}_p^T[i] \} \quad (2.53)$$

Aquí, también el vector $\mathbf{r}_p^b[k]$ se puede calcular recursivamente:

$$\mathbf{r}_p^b[k] = \lambda \mathbf{r}_p^b[k-1] + \mathbf{Y}_p[k] y[k-p] \quad (2.54)$$

Con las ecuaciones 2.54 y 2.53 en 2.51 se puede demostrar fácilmente que el predictor se puede calcular de manera recursiva:

$$\mathbf{B}_p[k] = \mathbf{B}_p[k-1] + \mathbf{k}_p[k] e_p^b[k] \quad (2.55)$$

en donde $\mathbf{k}_p[k]$ es la misma ganancia de Kalman del predictor "forward" pero al instante k y:

$$e_p^b[k] \triangleq y[k-p] + \mathbf{B}_p^T[k-1] \mathbf{Y}_p[k] \quad (2.56)$$

$e_p^b[k]$ y ε_p^b son respectivamente los errores "backward" a posteriori y a priori.

La idea del algoritmo rápido se basa en la estructura particionada de la matriz de covarianza, la cual al orden $p+1$ está dada por:

$$R_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} r_y[0] & \mathbf{r}_p^f[k] \\ \mathbf{r}_p^f[k] & R_p[k-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p[k] & \mathbf{r}_p^b[k] \\ \mathbf{r}_p^{bT}[k] & r_y[p] \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

donde $r_y[0]$ es la misma de la ecuación 2.34 y $r_y[p]$ está definida por:

$$r_y[p] \triangleq \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} y^2[i-p] \quad (2.58)$$

Si ahora escribimos la ganancia de Kalman al orden $p+1$:

$$\mathbf{k}_{p+1}[k] = -R_{p+1}^{-1}[k] \mathbf{Y}_{p+1}[k] \quad (2.59)$$

donde $\mathbf{Y}_{p+1}[k]$ se puede escribir como:

$$\mathbf{Y}_{p+1}^T[k] = [y[k] \mathbf{Y}_p^T[k-1]] = [\mathbf{Y}_p^T[k] y[k-p]] \quad (2.60)$$

y aplicando el lemma de inversión particionada a $R_{p+1}^{-1}[k]$ particionada, $\mathbf{k}_{p+1}[k]$ se expresa bajo las siguientes ecuaciones [ALC86], [KAY88]:

$$\mathbf{k}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{k}_p[k-1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{A}_p[k] \end{bmatrix} \alpha_p^{-f}[k] \varepsilon_p^f[k] \quad (2.61)$$

$$\mathbf{k}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_p[k] \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p[k] \\ I \end{bmatrix} \alpha_p^{-b}[k] \varepsilon_p^b[k] \quad (2.62)$$

donde α_p^f y α_p^b son las energías residuales de los predictores "forward" y "backwards" respectivamente y están dadas por [ALC86], [PRO88]:

$$\alpha_p^f[k] \triangleq \mathbf{r}_y^f[0] + \mathbf{r}_p^T[k] \mathbf{A}_p[k] \quad (2.63)$$

$$\alpha_p^b[k] \triangleq \mathbf{r}_y^b[p] + \mathbf{r}_p^b[k] \mathbf{B}_p[k] \quad (2.64)$$

o bien recursivamente, con la ayuda de 2.39, 2.40, 2.54 y 2.55 y las versiones recursivas de $r_y[0]$ y $r_y[p]$:

$$\alpha_p^f[k] = \lambda \alpha_p^f[k-1] + \varepsilon_p^f[k] e_p^{fT}[k] \quad (2.65)$$

$$\alpha_p^b[k] = \lambda \alpha_p^b[k-1] + \varepsilon_p^b[k] e_p^{bT}[k] \quad (2.66)$$

observando que la ganancia $\mathbf{k}_{p+1}[k]$ se puede particionar de la siguiente manera:

$$\mathbf{k}_{p+1}[k] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{M}_p[k] \\ \mu[k] \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

en donde de 2.62 :

$$\mu[k] \triangleq -\frac{\varepsilon_p^b[k]}{\alpha_p^b[k]} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{M}_p[k] \triangleq \mathbf{k}_p[k] + \mathbf{B}_p[k] \mu[k] \quad (2.69)$$

Sustituyendo en 2.69 la ecuación 2.55 y despejando $\mathbf{k}_p[k]$:

$$\mathbf{k}_p[k] = [\mathbf{M}_p[k] - \mathbf{B}_p[k-1]\mu[k]] [1 + e_p^b[k]\mu[k]]^{-1} \quad (2.70)$$

Finalmente el algoritmo rápido recursivo se resume en la tabla 1.2 :

Tabla 1.2

Algoritmo Rápido de los Mínimos Cuadrados

Condiciones iniciales	
Para el instante $k - 1$:	
$\alpha_p^f[k - 1] = \delta > 0$	
$\mathbf{Y}_p[k - 1] = \mathbf{A}_p[k - 1] = \mathbf{B}_p[k - 1] = \mathbf{k}_p[k - 1] = 0$	
Ecuación	
$e_p^f[k] = y[k] + \mathbf{A}_p^T[k-1]\mathbf{Y}_p[k-1]$	2.42
$\mathbf{A}_p[k] = \mathbf{A}_p[k-1] + \mathbf{k}_p[k-1]e_p^f[k]$	2.40
$\varepsilon_p^f[k] = y[k] + \mathbf{A}_p[k]\mathbf{Y}_p[k-1]$	2.6
$\alpha_p^f[k] = \lambda \alpha_p^f[k-1] + \varepsilon_p^f[k]e_p^f[k]$	2.65
$\mathbf{k}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{k}_p[k-1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{A}_p[k] \end{bmatrix} \alpha_p^{-f} \varepsilon_p^f[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_p[k] \\ \mu[k] \end{bmatrix}$	2.61
$e_p^b[k] = y[k-p] + \mathbf{B}_p^T[k-1]\mathbf{Y}_p[k]$	2.56
$\mathbf{k}_p[k] = [\mathbf{M}_p[k] - \mathbf{B}_p[k-1]\mu[k]] [1 + e_p^b[k]\mu[k]]^{-1}$	2.70
$\mathbf{B}_p[k] = \mathbf{B}_p[k-1] + \mathbf{k}_p[k]e_p^b[k]$	2.55

En este caso el valor inicial de $\alpha_p^f[k]$, el valor de delta, debe ser positivo y pequeño.

2.8 Densidad Espectral de Potencia

Una de las aplicaciones de los métodos paramétricos es la estimación de la densidad espectral de potencia (o psd por sus siglas en inglés) de una señal. Para ilustrar esto, si evaluamos la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo caracterizado por su ecuación en diferencias y como entrada una señal aleatoria, podremos establecer la psd de la señal en términos de los parámetros del sistema, los cuales, para un modelo todo polo, se calculan con los algoritmos antes descritos.

Retomando la representación del sistema lineal e invariante en el tiempo caracterizado por su ecuación en diferencias:

$$\sum_{n=0}^p a_n y[k-n] = \sum_{m=0}^q b_m x[k-m]$$

y aplicándole la transformada Z nos queda:

$$Y(z) \sum_{n=0}^p a_n z^{-n} = X(z) \sum_{m=0}^q b_m z^{-m}$$

Obteniendo su función de transferencia:

$$S(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^q b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^p a_n z^{-n}}$$

Evaluando para $z = e^{j\omega}$ y obteniendo su módulo:

$$|S(\omega)|^2 = \sigma_x^2 \frac{(\sum_{n=0}^q b_n \cos \omega n)^2 + (\sum_{n=0}^q b_n \sen \omega n)^2}{(\sum_{n=0}^p a_n \cos \omega n)^2 + (\sum_{n=0}^p a_n \sen \omega n)^2} \quad (2.71)$$

En esta última ecuación se observa que obtener la psd de la señal es equivalente a dividir el módulo de la transformada de Fourier de los coeficientes b_m entre el módulo de la transformada de Fourier de los coeficientes a_n . Para el caso concreto de un modelo o sistema autorregresivo (AR) la ecuación 2.71 se convierte en:

$$|S(\omega)|^2 = \frac{\sigma_x^2}{(\sum_{n=0}^p a_n \cos \omega n)^2 + (\sum_{n=0}^p a_n \sen \omega n)^2} \quad (2.72)$$

2.9 Conclusiones

Dentro de los métodos tradicionales para el análisis de señales se pueden utilizar los dos enfoques planteados en este capítulo: Uno de ellos consiste en obtener el espectro completo de la señal a analizar por medio de la transformada de Fourier. El otro método es a través de los métodos paramétricos. Existen varias formas de efectuar este análisis: La primera es calcular los parámetros o coeficientes que modelan a toda la señal. La segunda es segmentar la señal en bloques y calcular los coeficientes para cada bloque. La tercera es aplicar un método adaptable en donde se calcula un juego de coeficientes por muestra. En los dos últimos casos, al graficar el espectro de la señal para cada juego de parámetros obtendremos una gráfica aproximada de la variación del espectro durante el tiempo. A este tipo de análisis ya se le puede considerar como un análisis tiempo-frecuencia de la señal, que es el tema a desarrollar en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Los Métodos Tiempo-Frecuencia

3.1 Introducción

El análisis Tiempo-Frecuencia no es nuevo, de hecho, su origen se remonta aproximadamente 50 años atrás [COH92]. La idea fundamental de este análisis es entender y describir las situaciones en donde el contenido de la frecuencia cambia con el tiempo. De hecho, una de las primeras aplicaciones ha sido el análisis del contenido espectral de la voz [COH89] que tradicionalmente ha sido analizada a través de Fourier. En este capítulo introducimos la noción del análisis tiempo-frecuencia y algunos de los métodos que se están utilizando para este análisis.

3.2 El Análisis Tiempo-Frecuencia

La importancia del análisis de Fourier es que permite la descomposición de una señal en sus componentes de frecuencia individuales y además, establece la intensidad relativa de cada componente. Pero este espectro de energía no nos indica en que instante de tiempo ocurrieron esas frecuencias. Por ejemplo, si la señal a estudiar fuera una señal pura o suma de señales puras constantes, con la misma duración, durante todo el tiempo, basta con aplicar una transformada de Fourier para evaluar el contenido espectral, porque la señal no presenta ningún cambio. Pero, ¿que sucede si dichas señales ocurren a diferentes instantes? Probablemente el espectro sea el mismo, pero no podemos saber en que instante se generó cada señal. Otro ejemplo es el análisis de señales que se consideran no estacionarias, como las de monitoreo sísmico, comunicaciones, radar o sonar, de las que no podemos efectuar un análisis completo utilizando simples técnicas de Fourier [COH92].

Otro ejemplo mas: la motivación por el análisis de la voz humana, cuyo contenido frecuencial cambia rápidamente y en una manera compleja. Esto tuvo como consecuencia el diseño en los años 40 de métodos como el espectrograma y que aun sigue siendo una herramienta indispensable para el análisis de señales no estacionarias [COH89].

Un ejemplo no tan matemático se describe en [CLA80a], donde se hace una analogía entre la música y una función matemática. Al escribir una partitura musical, el compositor crea música en función de dos variables: tiempo y frecuencia. En dicha partitura se indica la

nota (frecuencia) y su intensidad y, a su vez, se indica también en que instante se debe de tocar y su duración.

Estas son solo algunas de las razones por las que se introdujo el concepto de Representaciones Tiempo-Frecuencia (también referenciadas como TFR por sus iniciales en inglés). Los métodos tiempo-frecuencia son una de las soluciones planteadas al problema de la representación de señales no estacionarias, y pueden considerarse como una extensión al análisis de Fourier clásico [BOA91].

Desde los años 40, se han desarrollado métodos alternativos para el análisis tiempo-frecuencia. La idea básica es desarrollar una distribución conjunta simultáneamente en tiempo y frecuencia, que describa la densidad de energía o intensidad de la señal simultáneamente en el tiempo y frecuencia [COH89].

Las representaciones tiempo-frecuencia se pueden dividir en dos grupos. El primero contiene a métodos adaptables y evolutivos. Suponiendo que utilizamos un modelo paramétrico, se pueden adoptar dos puntos de vista: uno de ellos es el adaptable, que utiliza un modelo estacionario con coeficientes constantes y que reajusta su estimación en cada instante, como los algoritmos adaptables del capítulo anterior. Dentro de este tipo de modelo, el tiempo está presente dentro del algoritmo de identificación. El método evolutivo, es un modelo explícitamente no estacionario, ya que los coeficientes dependen del tiempo y la variable tiempo está incluida dentro del modelo, ya que el algoritmo no necesariamente debe ser adaptable [BAS92], [FLA93].

El otro grupo se caracteriza por ser del tipo deslizante y conjunto. El tipo deslizante consiste en situarse dentro de una referencia de tiempo local deslizante con el instante de análisis, restringiendo el horizonte de observación a una duración corta y centrada en dicho instante. En estos métodos se considera un tipo de cuasi-estacionaridad, aunque también existen aproximaciones para señales no estacionarias. Todas las distribuciones que pertenecen a esta clase, se caracterizan por ser distribuciones de energía, en el sentido de que al integrarlos en el plano tiempo-frecuencia obtenemos la energía total de la señal analizada. Una de sus limitaciones es el seleccionar el tamaño del horizonte en tiempo corto. Los métodos conjuntos son los que no suponen ningún tipo de estacionaridad desde un principio [BAS92], [FLA93]. En este capítulo sólo nos dedicaremos al estudio de las representaciones tiempo-frecuencia deslizantes.

3.3 Representaciones Tiempo-Frecuencia

Tomaremos como punto inicial para nuestro análisis de las representaciones tiempo-frecuencia (TFR's) a la Transformada de Fourier de Tiempo Corto ó STFT, para después introducir las TFR's en su forma general.

3.3.1 La Transformada de Fourier de Tiempo Corto y el Espectrograma

Al obtener la Transformada de Fourier de una señal, podemos conocer cuales son sus componentes frecuenciales, sin embargo, no se muestra explícitamente la localización en

el tiempo de dichas componentes. Una forma de lograr este efecto es aplicar una ventana, $h(t)$, a la señal $x(t)$ en el instante deseado, τ , [COH92]:

$$X_{STFT}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.1)$$

que no es otra cosa mas que la Transformada de Fourier de la señal $x(t)$ multiplicada por una ventana centrada en τ . Es evidente que el resultado será una cantidad compleja y estará influenciado por el tipo de ventana aplicada. Por el momento sólo podemos saber el contenido frecuencial de la señal $x(t)$ para un tiempo específico. Si queremos seguir el comportamiento de la señal a cada instante, y haciendo un cambio de notación, en donde t será el tiempo de interés donde se centra la ventana, y τ representa el tiempo, la ecuación 3.1 se modifica de la siguiente forma [COH92], [BAS92]:

$$STFT_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\tau - t)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.2)$$

y obteniendo su espectro de potencia tenemos:

$$SP_x(t, f) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\tau - t)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right|^2 \quad (3.3)$$

A esta ecuación (3.3) se le conoce con el nombre de Espectrograma.

El espectrograma es el prototipo de una distribución tiempo-frecuencia. Pero aunque es muy poderosa en algunos aspectos, tiene algunas dificultades. Una de ellas es la correspondiente a la elección de la ventana, ya que tal vez para una señal en particular un tipo de ventana específica trabaja muy bien, mientras que para otra no, y al existir una combinación de ambos tipos de señales probablemente esta herramienta no sea óptima. El otro problema surge en el momento de querer mejorar la resolución tanto en tiempo como en frecuencia. Por ejemplo, si se le aplica una ventana de corta duración, tendremos baja resolución frecuencial, consecuencia de la relación tiempo-ancho de banda (Principio de Incertidumbre). Por el contrario, si se desea una buena resolución frecuencial, la ventana en tiempo debe ser larga, con lo que se pierde resolución temporal [COH92], [HLA92].

La cantidad $SP_x(t, f)$ es la representación conjunta de dos cantidades, tiempo y frecuencia respectivamente. Este tipo de distribución nos indica la fracción de la energía total en el tiempo t y la frecuencia f . Si nosotros sumamos todos los componentes de energía de las diferentes celdas tiempo-frecuencia, se obtendrá la energía total de la distribución [COH92]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} SP_x(t, f) dt df = E_x \quad (3.4)$$

Entonces, con una representación tiempo-frecuencia energética para una señal $x(t)$, representada por $TFR_x(t, f)$, se busca combinar el concepto de la potencia instantánea de la señal $\rho_x(t) = |x(t)|^2$, y la densidad espectral de energía $\rho_x(f) = |X(f)|^2$. Idealmente, esta interpretación se expresa a través de las propiedades marginales [COH92].

3.3.2 Marginales de una Distribución Tiempo-Frecuencia

Una Distribución Tiempo-Frecuencia ideal debe poder manipularse como una función de densidad de probabilidad conjunta. Para ejemplificar el comportamiento de una función probabilística de este tipo, supongamos que se tiene la distribución de peso de una población. Supongamos también que se cuenta con la distribución de la estatura de las personas de la misma población. Ambas nos proveen toda la información acerca del peso y estatura, pero por separado. Por ejemplo, si una persona con una estatura determinada quiere saber si está dentro de su peso, tendría que consultar la distribución del peso, pero estaría comparando su peso con el peso promedio de personas de diferente estatura. Lo correcto sería comparar su peso con el de las personas que tienen su misma estatura. Pero no se puede obtener esa información a partir de las distribuciones individuales, por lo que se tiene que construir una función conjunta que incluya a las dos funciones anteriores. Con esta distribución sí se puede saber cual es el peso promedio de las personas con una misma estatura, como también cual es el total de personas que componen la población, para lo cual se hace la suma de todas las personas que componen cada celda que indica cual es su altura y su peso [COH92].

Se puede hacer una analogía con una distribución tiempo-frecuencia. Si por ejemplo queremos saber cual es la energía total de la señal, solamente tendríamos que sumar la cantidad de energía existente en cada celda tiempo-frecuencia, o lo que es lo mismo [COH92]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} TFR_x(t, f) dt df = E_x \quad (3.5)$$

Otra información que podemos obtener de dicha distribución probabilística conjunta para el peso y estatura, es el número de personas con una misma estatura. Basta con sumar el número de personas con diferente peso pero con una misma estatura. Análogamente, si para un tiempo dado se suma la energía existente en las diferentes frecuencias se tendrá la energía en el tiempo t . A esta cantidad se le conoce con el nombre de marginal temporal y se calcula como [COH92]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} TFR_x(t, f) df = |x(t)|^2 \quad (3.6)$$

Asimismo, si para una frecuencia dada, se suma la energía existente para los diferentes valores de t se obtiene la energía de la frecuencia f , también conocida como marginal frecuencial [COH92]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} TFR_x(t, f) dt = |X(f)|^2 \quad (3.7)$$

Es por esta semejanza en el comportamiento con las distribuciones probabilísticas que a las TFR's también se les conozca como distribuciones tiempo-frecuencia, aunque cabe mencionar el concepto de marginal no es el más adecuado para las marginales temporal y frecuencial, ya que éstas pueden tomar valores negativos en algunos casos [COH92].

3.3.3 Principio de Incertidumbre

Antes de iniciar con una explicación acerca de los tipos de TFR's, es necesario establecer el significado del principio de incertidumbre, una relación de importancia para entender el comportamiento de las TFR's. El principio de incertidumbre se escribe como [FLA93]:

$$\Delta t \Delta w \geq \frac{1}{4\pi} \quad (3.8)$$

donde Δt y Δw representan la duración y el ancho de banda de la señal respectivamente. La ecuación 3.8 expresa el ya conocido principio matemático que establece que a una señal temporal de corta duración le corresponde un espectro frecuencial ancho, y a su vez, una señal temporal con mayor duración tiene un espectro estrecho, y ambos, tanto la señal temporal como el espectro frecuencial no pueden ser arbitrariamente pequeños simultáneamente [COH89], [FLA93]. Entonces, este principio establece la imposibilidad de que una señal coexista con soportes temporal y frecuencial simultáneamente pequeños. Es por ello que el uso de una ventana temporal pequeña conjuntamente con una ventana frecuencial grande mejoran la resolución tiempo-frecuencia de la TFR.

3.3.4 Tipos de Representaciones Tiempo-Frecuencia

Es evidente que la cantidad $SP_x(t, f)$ es una representación tiempo-frecuencia lineal, ya que satisface el principio de superposición, al igual que la "Transformada Wavelet" (*ondeleta*) [HLA92]. Pero no todas las representaciones tiempo-frecuencia son lineales. Existen otras transformadas que reciben su nombre de acuerdo al tipo de dependencia de la señal, que puede ser cuadrática o no lineal. Los dos primeros casos, el lineal y el cuadrático, son los más utilizados. En este documento sólo consideraremos el espectrograma, perteneciente a las TFR's lineales, y algunas TFR's cuadráticas. Se puede encontrar una lista completa de las representaciones tiempo-frecuencia en [HLA92].

Muchas de las TFR's cuadráticas tienen varias características en común, lo que permite hacer un estudio unificado al utilizar una forma general para referirnos a ellas. Esta definición de "estudio único" la definió Cohen [COH89], por ello, todas las distribuciones que pueden derivarse a partir de esta forma general pertenecen a la clase de Cohen.

3.4 La Clase de Cohen

La forma general de definición de la Familia de Representaciones Tiempo-Frecuencia que define a la Clase de Cohen es la siguiente [COH92], [COH89]:

$$TFR_C(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi v(u-t)} g(v, \tau) x^*(u - \frac{\tau}{2}) x(u + \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f \tau} du d\tau dv \quad (3.9)$$

donde:

v, f son variables frecuenciales

t, τ son variables temporales

u es una variable de retraso (*lag*), como en una autocorrelación

$g(v, \tau)$ es una función arbitraria llamada kernel

Cada miembro de la clase de Cohen está asociado con una función única, un kernel independiente de la señal. Cambiando dicho kernel se pueden ir obteniendo las diferentes TFR's que pertenecen a esta clase. Integrando 3.9 con respecto a la variable v se puede reescribir la forma general como [COH92]:

$$TFR_C(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u - t, \tau) x^*(u - \frac{\tau}{2}) x(u + \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f \tau} du d\tau \quad (3.10)$$

donde :

$$r(u, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v, \tau) e^{j2\pi v u} dv \quad (3.11)$$

En términos de su espectro 3.9 puede reescribirse como [COH92]:

$$TFR_C(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi v t - j2\pi f \tau + j2\pi \tau u} g(v, \tau) X^*(u + \frac{v}{2}) X(u - \frac{v}{2}) du d\tau dv \quad (3.12)$$

3.4.1 Propiedades de las Representaciones Tiempo-Frecuencia

La forma general de Cohen es una idea muy útil para el estudio de las distribuciones ya que facilita su diseño y el estudio de sus propiedades con solo modificar el kernel $g(v, \tau)$. Una lista de las propiedades de las representaciones tiempo-frecuencia se muestra en el Apéndice B. Del tipo de kernel que se utilice dependerá el que dicha distribución cumpla con un mayor número de propiedades.

Existen dos tipos de kernels, los no separables: $g(v, \tau) = g(v\tau)$ y los separables, que son productos de funciones de v y τ : $g(v, \tau) = g_1(v)g_2(\tau)$. Un ejemplo de la utilidad del uso del kernel es cuando se desea que la distribución satisfaga las marginales tanto en tiempo como en frecuencia, por lo que el kernel $g(v, \tau)$ debe satisfacer [COH92], [CLA80c], [FLA93]:

$$g(0, \tau) = g(v, 0) = 1 \quad (3.13)$$

Para obtener una TFR con valores reales para todo el rango tiempo-frecuencia, el kernel debe satisfacer [COH92], [CLA80c] :

$$g(v, \tau) = g^*(-v, -\tau) \quad (3.14)$$

Aunque el kernel aparentemente solo depende de v y de τ , no implica que no pueda depender también de t y f . La mayoría de los trabajos que se han desarrollado son para kernels que no dependen explícitamente de las propiedades de la señal [COH92], [HLA92]. Otra característica que debe tener la distribución tiempo-frecuencia es que tenga la misma duración que la señal, o sea, que sea cero antes de que la señal comience y cero después de que la señal termine. En este caso se dice que la distribución tiene soporte finito [COH92]. El mismo concepto se aplica al eje de las frecuencias. Pero esto no se cumple para todas las distribuciones, ya que al asegurar un soporte finito en tiempo, es decir, si aseguramos que la representación sea cero antes y después de que ocurra la señal, no necesariamente

implica que la distribución sea cero cada vez que la señal tenga un valor de cero. A este tipo de distribuciones se les clasifica como distribuciones con soporte débil, mientras que las representaciones que si cumplen con la condición de ser cero cuando la señal es cero, se clasifican como distribuciones de soporte finito fuerte.

3.4.2 Artefactos en las Representaciones Tiempo-Frecuencia

Por lo dicho anteriormente, sabemos que el espectrograma es una representación tiempo-frecuencia lineal. Se demuestra que si $x(t)$ es una combinación de señales, entonces al aplicarle una representación tiempo-frecuencia lineal, que en este caso denominaremos como TFR^{lin} , el resultado será una combinación lineal de la TFR^{lin} de cada uno de los componentes de la señal [HLA92]:

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \Rightarrow TFR_x^{lin}(t, f) = c_1TFR_{x_1}^{lin}(t, f) + c_2TFR_{x_2}^{lin}(t, f) \quad (3.15)$$

Pero para las distribuciones cuadráticas ya no se cumple este principio, ya que cualquier TFR cuadrática satisface el principio de superposición cuadrático. Si TFR representa una distribución tiempo-frecuencia cuadrática, este principio se escribe como [HLA92]:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \Rightarrow \\ TFR_x(t, f) &= |c_1|^2TFR_{x_1}(t, f) + |c_2|^2TFR_{x_2}(t, f) \\ &\quad + c_1c_2^*TFR_{x_1, x_2}(t, f) + c_2c_1^*TFR_{x_2, x_1}(t, f) \end{aligned}$$

donde $TFR_{x_1}(t, f)$ es la TFR de la señal $x_1(t)$ y $TFR_{x_1, x_2}(t, f)$ es la representación tiempo-frecuencia "cruzada" de las dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Nótese que la TFR "cruzada" es bilineal en las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$. De esta ecuación se aprecia que no solo existen dos términos $|c_1|^2TFR_{x_1}(t, f)$, $|c_2|^2TFR_{x_2}(t, f)$, uno por cada señal tal como se espera, sino que también aparecen otros dos, $c_1c_2^*TFR_{x_1, x_2}(t, f)$, $c_2c_1^*TFR_{x_2, x_1}(t, f)$. Estos términos son los que se conocen con el nombre de artefactos o términos de interferencia [COH89], [COH92], [BOA87], [HLA92]. Generalizando el principio de superposición cuadrático para una señal de N componentes:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N c_k x_k(t) \quad (3.16)$$

se obtiene la siguiente regla para el número de términos en una TFR cuadrática:

- Por cada componente de señal $c_k x_k(t)$ corresponde un término de señal o componente $|c_k|^2 TFR_{x_k}(t, f)$
- Por cada par de componentes de señales $c_k x_k(t)$ y $c_l x_l(t)$ (con $k \neq l$) corresponde un componente cruzado o término de interferencia

$$c_k c_l^* TFR_{x_k, x_l}(t, f) + c_l c_k^* TFR_{x_l, x_k}(t, f)$$

Entonces para una señal de N componentes, su TFR contendrá N términos de señales y $N(N-1)/2$ términos de interferencia. El número de términos de interferencia crece de una manera cuadrática con respecto al número de componentes de señales [HLA92]. Para la mayoría de las aplicaciones, estos términos de interferencias no son deseables, sin embargo, a veces pueden ser de utilidad como se demuestra en el capítulo siguiente.

3.4.3 Representaciones Tiempo-Frecuencia Discretas

Así como existe un Análisis de Fourier Continuo y Discreto, cada una de las TFR's se puede implementar de manera discreta. Al discretizar la ecuación general que define la clase de Cohen (3.9) se obtiene la expresión general de Cohen en su forma discreta [BOA91]:

$$TFR_C[n, f] = \sum_k \sum_m G[m-n, k] x[m+k] x^*[m-k] e^{-j4\pi f k} \quad (3.17)$$

La señal real $x(n\Delta t)$ se forma al muestrear $x(t)$ a la frecuencia $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ de tal manera que:

$$\begin{aligned} t &= n\Delta t \\ f &= k\Delta f = \frac{k f_s}{N} \end{aligned}$$

por simplicidad, $\Delta t = 1, f_s = 1$.

En general, para implementar alguna distribución perteneciente a la clase de Cohen, los pasos a seguir son los siguientes:

- Obtener el arreglo $K[n, m] = x[n+m] x^*[n-m]$.
- Efectuar la convolución discreta en el tiempo $[n]$ del arreglo $K[n, m]$ con $G[n, m]$.
- Calcular la Transformada de Fourier del resultado anterior sobre m .

3.4.4 Propiedades de la Representaciones Tiempo-Frecuencia Discretas

Estas representaciones deben de preservar las propiedades listadas anteriormente para el caso continuo (Apéndice B). Para el kernel $G[n, m]$ también se debe cumplir con ciertas condiciones, por ejemplo, para asegurar que tenga valor real para todo tiempo y frecuencia, el kernel debe cumplir con [BOA91]:

$$G[n, m] = G^*[-n, -m] \quad (3.18)$$

Si se desea que cumpla con las propiedades marginales el kernel debe tener las siguientes características [BOA91]:

$$\begin{aligned} G[n, 0] &= \delta(n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} G[n, m] &= 1 \end{aligned}$$

donde $\delta[n]$ es la función delta discreta.

3.4.5 Algunos de los Miembros de la Clase de Cohen

Actualmente son varias las distribuciones que pertenecen a la Clase de Cohen, dentro de las cuales destacan las siguientes:

- Espectrograma
- Distribución Wigner Ville
- Distribución Pseudo Wigner Ville Suavizada
- Distribución Choi Williams

que son con las cuales se trabajará en este texto. Los kernels que generan a estas distribuciones se muestran en la tabla 2.1. Una lista muy completa de las representaciones tiempo-frecuencia que pertenecen a esta clase se encuentra en [HLA92], aunque también se puede consultar [COH89], [COH92], [BAS92], [FLA93].

Tabla 2.1

Algunos Kernels Pertenecientes a la Clase de Cohen	
TFR	$g(v, \tau)$
Wigner-Ville	1
Espectrograma	$\int h^*(u - \frac{\tau}{2})h(u + \frac{\tau}{2})e^{-jv u} du$
Pseudo Wigner Ville "Suavizada"	$G(v) h(\frac{\tau}{2}) ^2$
Choi Williams	$e^{-\frac{v^2 \tau^2}{\sigma}}$

A continuación, se hace un breve análisis de cada una de las distribuciones tiempo-frecuencia estudiadas en este documento. Comenzaremos con la más conocida que es el Espectrograma.

3.5 El Espectrograma

Retomando la ecuación 3.9, y sustituyendo el kernel propio al espectrograma [COH89]:

$$g(v, \tau) = \int h^*(u - \frac{\tau}{2})h(u + \frac{\tau}{2})e^{-jv u} du \quad (3.19)$$

se obtiene la ecuación 3.3, con lo que obtenemos la definición del espectrograma en el tiempo continuo.

Definición Tiempo Continuo: [BAS92]

$$SP_x(t, f) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right|^2 \quad (3.20)$$

Las propiedades con las que cumple esta representación tiempo-frecuencia son: que es positiva y real para todo el plano tiempo frecuencia, y además si la distribución se integra tanto en tiempo como en frecuencia, la cantidad resultante es equivalente a la energía de la señal [FLA93]. El equivalente en el dominio discreto es el siguiente:

Definición Tiempo Discreto [BAS92] :

$$SP_x(n, f) = \left| \sum_{k=-N+1}^{N-1} h[k] x[n+k] e^{-j2\pi fk} \right|^2 \quad (3.21)$$

3.6 Distribución Wigner Ville

La Distribución Wigner Ville fue la primera distribución tiempo-frecuencia cuadrática, introducida en 1932 por Wigner dentro del contexto de mecánica cuántica [WIG32], y retomada por Ville para el análisis de señales en 1948 [VIL48]. Está considerada la distribución prototipo o referencia para las otras representaciones tiempo-frecuencia pertenecientes a la clase de Cohen. Una característica que se destaca de esta distribución es que es real, pero no necesariamente positiva, para todo el rango tiempo-frecuencia, excepto para el "chirp" (*señal modulada en frecuencia linealmente*), en donde sí es positiva para todo el rango. Hasta el momento no se ha encontrado un significado a la existencia de estos valores negativos, pero la mayoría de los autores coinciden en que las partes positivas sí representan la información deseada. [COH92].

Definición en Tiempo Continuo

Al sustituir el kernel $g(v, \tau) = 1$ en la ecuación general de la clase de Cohen, 3.9, se obtiene la definición de la Distribución Wigner Ville [CLA80a]:

$$WVD_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.22)$$

y la Distribución Wigner Ville "cruzada" de dos señales se define como [CLA80a] :

$$WVD_{x,y}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.23)$$

Esta distribución tiempo-frecuencia también puede definirse a partir del espectro de la señal [CLA80a]:

$$WVD_X(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{v}{2}\right) X^*\left(f - \frac{v}{2}\right) e^{-j2\pi vt} dv \quad (3.24)$$

Con las ecuaciones anteriores se demuestra que [CLA80a]:

$$WVD_X(f, t) = WVD_x(t, f) \quad (3.25)$$

Esto significa que la Distribución Wigner del espectro de dos señales puede ser determinado a partir de las funciones en el tiempo al intercambiar las variables, lo que nos ilustra la simetría entre las definiciones de los dominios tiempo y frecuencia [CLA80a].

Esta distribución satisface un gran número de propiedades matemáticas [CLA80a], [COH89], [HLA92], [FLA93], entre la cuales se encuentran las propiedades de las marginales, el que sus valores siempre sean reales y el ser invariante a desplazamientos en tiempo y frecuencia, por mencionar algunas. Algo que es importante recalcar es que a pesar de cumplir con muchas características deseables en una TFR, no puede ser interpretada como una densidad tiempo-frecuencia energética propiamente, ya que puede tener valores negativos locales [COH92], [HLA92].

Como hemos mencionado anteriormente, una distribución tiempo-frecuencia ideal debería poder manejarse de la misma manera que una distribución conjunta de dos variables. Si nosotros calculamos el primer momento con respecto a la frecuencia de la WVD obtenemos que [CLA80a]:

$$f_{x(t)} = \frac{\int_f f TFR_x(t, f) df}{\int_f TFR_x(t, f) df} = \text{Im} \frac{d}{dt} \ln x(t) \quad (3.26)$$

Esta ecuación nos dice que para señales reales la frecuencia promedio será cero, ya que la WVD es una función par de w , y no nos proporcionará ninguna información [CLA80a]. En caso de que la señal $f(t)$ sea una señal compleja de la forma:

$$x(t) = A(t) e^{j\varphi(t)} \quad (3.27)$$

entonces se muestra que:

$$f_{x(t)} = \frac{1}{2\pi} \varphi'(t) \quad (3.28)$$

De esta última ecuación podemos concluir que la frecuencia promedio de la WVD en el tiempo t es igual a la derivada de la fase, resultado que ya había sido comentado en el apéndice A cuando se define la señal analítica. Entonces, cuando la señal $x(t)$ está escrita en la forma de 3.27 la derivada de la fase recibirá el nombre de frecuencia instantánea. Pero lo más importante de estas relaciones es que a partir de 3.28 se muestra que la frecuencia promedio de la WVD es igual a la frecuencia instantánea de la señal, pero que además se mantiene esta definición para cualquier señal compleja y con esto se extiende la definición de la frecuencia instantánea para señales complejas en general [CLA80a].

Una desventaja que presenta la distribución Wigner-Ville es que no tiene un soporte finito fuerte, ya que no siempre será cero cada vez que la señal analizada tenga un valor de cero. En [COH89] se da una regla empírica muy básica para darnos una idea si se está obteniendo el resultado correcto con la WVD, sobre todo cuando aparecen artefactos en zonas en donde no existe señal. Dicha regla parte de la observación de la ecuación 3.22 de la WVD, donde se establece que para un tiempo t en particular, se multiplican dos segmentos de la señal a analizar. Un segmento está compuesto por muestras de la señal en un tiempo futuro, y el otro está compuesto de muestras de la señal en un tiempo pasado,

a ambos segmentos se les añade el mismo número de muestras anteriores o posteriores al tiempo t que se está considerando. Para saber si la WVD es cero en el instante t , se debe doblar mentalmente la señal en el instante t hacia el lado izquierdo y hacia el lado derecho y ver si existe un traslape de la señal. En caso afirmativo, la WVD no será cero en ese punto [COH89]. De esta regla se observa que el tamaño de la ventana que se haya definido influye en la aparición de un artefacto. Muchas veces ese artefacto puede desaparecer al utilizar una ventana de menor longitud como se observará en el capítulo siguiente.

Definición en Tiempo Discreto

Es lógico pensar que para pasar del dominio continuo al discreto sea necesario discretizar la función. Existen varias definiciones de la Distribución Wigner Ville Discreta [CLA80a], [PEY86], [BOA91]. Pero independientemente de la definición que se utilice, lo que se desea es obtener un concepto simple, que retenga la mayor cantidad de propiedades posibles de las distribución para el dominio continuo y obtener una relación simple entre ambos dominios [CLA80b].

Se define la distribución Wigner Ville Discreta como [BAS92]:

$$WVD_x[n, f] = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n+k] x^*[n-k] e^{-j4\pi f k} \quad (3.29)$$

Aunque muestra mucha similitud con la definición en el dominio continuo, y cumple con varias de sus propiedades, tiene algunas características diferentes. Por ejemplo se presenta un fenómeno de periodicidad:

“La distribución Wigner-Ville discreta es una función de la variable discreta n que representa el tiempo, y la variable continua f que representa a la frecuencia”. Con respecto a la última variable, la función es periódica con periodo π [CLA80b]:

$$WVD_x[n, f] = WVD_x(n, f + \pi) \quad \forall n, f \quad (3.30)$$

Como el “aliasing” ocurre alrededor de π/T en vez de $2\pi/T$ es necesario muestrear la señal al doble de la frecuencia de Nyquist para evitar dicho fenómeno [PEY86], [CLA80b]. No siempre se puede muestrear a una frecuencia mayor, sobre todo cuando se está trabajando con señales reales. Por lo que una solución a este problema, muestreando a la frecuencia de N , es el uso de la Señal Analítica (Apéndice A).

Pero el uso de la Señal Analítica no elimina los términos de interferencia que existen en esta distribución, es por ello que se le hizo una modificación a su kernel y se obtuvo la Distribución Pseudo Wigner Ville Suavizada, para tratar de reducir estos términos de interferencia.

3.7 Distribución Pseudo Wigner Ville Suavizada

La idea general de este algoritmo es reducir las interferencias de la distribución Wigner Ville a través de un "suavizado" dentro del plano tiempo-frecuencia. El principio del método es utilizar una función separable en tiempo y frecuencia, cuyo kernel está dado por [BAS92]:

$$g(v, \tau) = G(v) \left| h\left(\frac{\tau}{2}\right) \right|^2 \quad (3.31)$$

donde el kernel está compuesto de dos funciones, g y h , cuyas longitudes determinan el suavizado en tiempo y en frecuencia respectivamente. Si la función $g(t) = \delta(t)$ se obtiene la distribución Pseudo Wigner, que no es más que una distribución Wigner Ville de tiempo corto y con una ventana de análisis corta [BAS92],[HLA92]. Si por el contrario, $g(t) = 1$, y $h(\tau) = h^*(\tau/2)h(-\tau/2)$, se obtiene la distribución Wigner-Ville original [FLA93].

Definición en Tiempo Continuo [BAS92]:

$$PWV L_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| h\left(\frac{\tau}{2}\right) \right|^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(u-t) x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.32)$$

Esta distribución reduce las interferencias de la distribución Wigner-Ville en detrimento de la resolución conjunta, tanto en tiempo como en frecuencia, y de sus propiedades marginales [BAS92], [HLA92]. También permite el suavizado tanto en tiempo como en frecuencia de una forma libre e independientemente para cada variable, ya que el kernel es una función separable compuesta de dos funciones g y h , cuyas longitudes determinan el suavizado en tiempo y en frecuencia respectivamente. Si la función $g(t) = \delta(t)$ se obtiene la distribución Pseudo Wigner, que no es más que una distribución Wigner Ville de tiempo corto y con una ventana de análisis corta [BAS92],[HLA92]. Si por el contrario, $g(t) = 1$, y $h(\tau) = h^*(\tau/2)h(-\tau/2)$, se obtiene la distribución Wigner-Ville original [FLA93].

Las únicas propiedades con las que cumple esta distribución son que su valor es real para todo el plano tiempo-frecuencia, y que presenta invarianza a desplazamientos tiempo-frecuencia [HLA92].

Definición en Tiempo Discreto [BAS92]:

$$PWV L_x[t, f] = \sum_{k=-N+1}^{N-1} |h[k]|^2 \left[\sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m] x[n+m+k] x^*[n+m-k] \right] e^{-j4\pi f k} \quad (3.33)$$

3.8 Distribución Choi Williams

Como se observó en el inciso anterior, al tratar de suavizar los términos de interferencia, se pierden las mayoría de las propiedades de la distribución Wigner-Ville. El propósito de la distribución Choi-Williams es suprimir los términos de interferencia sin alterar significativamente las propiedades de las distribuciones tiempo-frecuencia. Esto lo lograron con un kernel gaussiano [COH92]:

$$g(v, \tau) = e^{-\frac{v^2 \tau^2}{\sigma}} \quad (3.34)$$

donde σ es un parámetro que varía entre 1 y 80 (el rango de valores de la constante σ se ha obtenido experimentalmente [BAS92]). Si el valor de σ tiende hacia el límite superior, la distribución tiende a parecerse a la Distribución Wigner Ville. Cuando σ tiende al límite inferior, el kernel presenta un pico más cercano al origen del plano v, τ y es cuando se eliminan los términos cruzados.

Definición en Tiempo Continuo [BAS92]:

$$CW_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau^2/\sigma}} e^{-\frac{(u-\tau)^2}{4\pi\tau^2/\sigma}} x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.35)$$

Clasificada como una función invariante a escala [HLA92], la distribución Choi Williams retiene muchas de las propiedades de la distribución Wigner-Ville, como son las marginales [HLA92]. Aunque la atenuación de los términos de interferencia es notable (como se observa en el siguiente capítulo), existirán ciertas limitaciones, sobre todo cuando una señal compuesta de varios términos, contiene señales que ocurren al mismo tiempo o con la misma frecuencia [HLA92].

Definición "suavizada" en Tiempo Discreto [BAS92]:

$$CW_x(t, f) = 2 |h[0]|^2 |x[n]|^2 + 2 \sum_{k=-N+1, k \neq 0}^{N-1} |h[k]|^2 K[n, k] e^{-j4\pi f k} \quad (3.36)$$

donde:

$$k[n, m] = \sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m] \frac{1}{\sqrt{16\pi k^2/\sigma}} e^{-\frac{m^2}{16\pi k^2/\sigma}} x[n+m+k] x^*[n+m-k] \quad (3.37)$$

• Resumen de las Representaciones Tiempo-Frecuencia

A continuación, en la tabla 2.2 presentamos un cuadro sinóptico con las ecuaciones de las TFR vistas en este documento. Primero se encuentran las ecuaciones para el tiempo continuo y posteriormente para el tiempo discreto. Algunas sugerencias de como implementarlas se muestran en el siguiente capítulo.

Tabla 2.2

Representaciones Tiempo-Frecuencia	
TFR	Definición en Tiempo Continuo
Espectrograma	$SP_x(t, f) = \left \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right ^2$
Wigner Ville	$WVD_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$
Pseudo Wigner Ville "Suavizada"	$PWVL_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left h\left(\frac{\tau}{2}\right) \right ^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(u - t) x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau$
Choi Williams	$CW_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau^2/\sigma}} e^{-\frac{(u-t)^2}{4\pi\tau^2/\sigma}} x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du e^{-j2\pi f\tau} d\tau$
TFR	Definición en Tiempo Discreto
Espectrograma	$SP_x(n, f) = \left \sum_{k=-N+1}^{N-1} h[k] x[n+k] e^{-j2\pi/k} \right ^2$
Wigner Ville	$WVD_x[n, f] = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n+k] x^*[n-k] e^{-j4\pi/k}$
Pseudo Wigner Ville "Suavizada"	$PWVL_x[n, f] = \sum_{k=-N+1}^{N-1} h[k] ^2 \left[\sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m] x[n+m+k] x^*[n+m-k] \right] e^{-j4\pi/k}$
Choi Williams	$CW_x[n, f] = 2 h[0] ^2 x[n] ^2 + 2 \sum_{k=-N+1, k \neq 0}^{N-1} h[k] ^2 K[n, k] e^{-j4\pi/k}$ $K[n, m] = \sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m] \frac{1}{\sqrt{16\pi k^2/\sigma}} e^{-\frac{m^2}{16\pi k^2/\sigma}} x[n+m+k] x^*[n+m-k]$

3.9 Conclusiones

Hemos introducido algunas ideas respecto a las TFR's, su importancia y las características particulares de algunas de ellas. Es un enfoque relativamente nuevo y cuyo potencial apenas está en pleno desarrollo. Este tipo de representación tiene muchas ventajas, sobre todo para el análisis de señales multicomponentes, aunque al efectuar dicho análisis puedan surgir algunos términos indeseables como son los términos de interferencia. Si en realidad no nos interesa la información que estos términos pudieran darnos, podemos tratar de eliminarlos utilizando alguna de las TFR's diseñadas con esa finalidad. Resta entonces aplicar estos conceptos a algunas señales para comprobar lo aquí expuesto en este capítulo, por lo que en la siguiente sección se presenta un estudio comparativo de las diferentes representaciones a través de simulaciones con señales sintéticas y reales.

Capítulo 4

Implementación y Comparación de los Diferentes Métodos

4.1 Introducción

En esta sección, se describen brevemente las generalidades acerca de la estructura e implementación de los algoritmos planteados en el capítulo anterior. Posteriormente se ejemplifica con señales sintéticas cual es el tipo de información esperada para las representaciones tiempo-frecuencia. Como referencia se utilizan los resultados obtenidos con los espectrogramas de dichas señales, y se efectúa un análisis comparativo entre los diferentes métodos mencionados en este texto para finalizar con algunas simulaciones con señales reales, que en este caso serán señales electroencefalográficas (EEG) y segmentos de voz. Al final, se mencionan algunos de los campos en donde se están aplicando estas técnicas.

4.2 Estructura e Implementación de Algoritmos

Como se observó en el capítulo anterior, las distribuciones que pertenecen a la Clase de Cohen sólo se diferencian en el kernel que define a la representación tiempo-frecuencia, por lo que al implementar el algoritmo de la distribución Wigner-Ville, se pueden programar todas las demás distribuciones a partir de éste efectuando algunas modificaciones. Los algoritmos de las TFR's que se mencionan en este trabajo están programados bajo ambiente Khoros [RAS91] [ARG91], un programa que permite la versatilidad para poder analizar y procesar señales ya que cuenta con varias rutinas o módulos, los cuales se interconectan entre sí dependiendo de las necesidades del usuario. Antes de introducir algunas ideas acerca de como implementar estos algoritmos, primero explicamos la notación que se utiliza en la mayoría de los algoritmos:

Notación

x	Señal real de longitud L muestras.
n_0	Instante inicial desde el cual se empezará a procesar la señal.
NPT	Número de puntos temporales a calcular.
n	Instante para el cual se desea calcular su espectro. $n = n_0 + (m - 1)\Delta t$ donde $m = 1, \dots, NPT$
Δt	Incremento temporal.
h	Ventana de observación. Puede ser cualquier tipo de ventana (Rectangular, Hamming, Bartlett, etc.), generalmente de longitud impar $2N - 1$.
NPF	Número de puntos frecuenciales a calcular, que es una potencia de 2. Debe ser mayor que el número de puntos de la ventana.

4.2.1 El Espectrograma

Retomando la definición discreta del espectrograma:

$$SP_x(n, f) = \left| \sum_{k=-N+1}^{N-1} h[k] x[n+k] e^{-j2\pi f k} \right|^2$$

en donde la ventana $h[k]$ tiene una longitud de $2N - 1$ puntos. Los pasos a seguir para implementar este algoritmo son [BAS92]:

1. Para cada instante n : Calcular el arreglo $h[k] x[n+k]$ de longitud $2N - 1$.
2. Completar con ceros hasta que el número de puntos sea NPF .
3. Calcular la transformada de Fourier del resultado anterior y obtener su módulo al cuadrado.
4. Repetir los pasos 1,2,3 hasta que el n sea el número de puntos deseados o NPT .

El resultado será una matriz tiempo-frecuencia de dimensiones $NPT \times NPF$. Recordamos que los primeros $NPF/2$ puntos frecuenciales representan las frecuencias positivas, por lo que si se desea calcular un espectro de 256 puntos frecuenciales, la longitud de NPF deberá ser del doble, en este caso, 512 puntos.

4.2.2 Representaciones Tiempo-Frecuencia Cuadráticas: Generalidades

Para el espectrograma, no existe ningún tipo de restricciones en cuanto al vector al que se le aplica la FFT ya que al resultado que se obtiene, sea real o complejo, simplemente se le calcula su módulo. Se sabe que las distribuciones tiempo-frecuencia son reales para todo t y f , pero ¿cómo obtener un resultado en donde los datos sean todos reales? La respuesta es el tipo de arreglo al que se le calcula la transformada de Fourier.

De la ecuación general de la clase de Cohen, se observa que el arreglo $x[n+k] x^*[n-k]$ es constante para todas las representaciones tiempo-frecuencia. Para obtener una distribución real, dicho arreglo debe tener simetría hermítica es decir que si:

$$K[n, k] = x[n+k] x^*[n-k]$$

entonces:

$$K^*[n, k] = K[n, -k]$$

Para ello, suponiendo que el número de puntos de una ventana es $2N - 1$ y que el NPF es una potencia de dos, el arreglo se calcula de la siguiente forma:

1. Calcular el producto $p[k] = 2 x[n+k] x^*[n-k]$ para $k = 0, \dots, N$.

2. Reescribir en un vector \mathbf{P} de longitud NPF de la siguiente forma:

$$\mathbf{P}_{NPF} = [p[0] p[1] p[2] \dots p[N] 0 \dots 0 p^*[N] p^*[N-1] \dots p^*[1]]$$

donde la parte central de dicho vector se llena con tantos ceros como sean necesarios para alcanzar la cantidad de NPF . Nótese que el último elemento del vector \mathbf{P} es $p^*[1]$.

Entonces, al calcular la FFT sobre el vector \mathbf{P}_{NPF} se obtendrá una cantidad real. La forma de calcular este producto es general para todas las distribuciones tiempo-frecuencia aquí citadas. Cabe recordar también que es conveniente utilizar la señal analítica, por lo que el producto $p[k]$ antes mencionado, deberá calcularse sobre la señal analítica. A continuación detallamos entonces la forma de implementar cada una de ellas.

4.2.3 Distribución Wigner Ville

Recordando el algoritmo de la Distribución Wigner-Ville Discreta (DWV) :

$$WVD_x[n, f] = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n+k] x^*[n-k] e^{-j4\pi f k}$$

en donde la ventana $h[k]$ tiene una longitud de $2N - 1$. Los pasos para implementar el algoritmo son los siguientes [BAS92]:

1. **Para cada instante n deseado**, calcular el producto $2 x[n+k] x^*[n-k]$ de dimensión N .
2. **Formar el arreglo** con simetría hermítica y de dimensión NPF como se explicó anteriormente.
3. **Calcular** la FFT del arreglo anterior.
4. **Repetir** los pasos 1, 2, y 3 hasta que el valor de n sea NPT .

Con ello se obtiene una matriz de $NPT \times NPF$ puntos, en donde los NPF puntos frecuenciales representan frecuencias positivas con su parte imaginaria nula.

4.2.4 Distribución Pseudo Wigner Ville Suavizada

Aunque esta distribución deriva de la Wigner Ville, su cálculo es un poco más complicado, ya que se utilizan dos ventanas, una temporal y otra frecuencial:

$$PWVL_x[n, f] = \sum_{k=-N+1}^{N-1} |h[k]|^2 \left[\sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m] x[n+m+k] x^*[n+m-k] \right] e^{-j4\pi f k}$$

donde g es una ventana de suavizado temporal (que puede ser de cualquier tipo) de $2M - 1$ puntos y h es la ventana de observación en tiempo corto con una longitud $2N - 1$. El cálculo del algoritmo se realiza de la siguiente forma [BAS92]:

1. **Para cada instante n deseado**, calcular el producto $2 x[n+m+k] x^*[n+m-k]$ para $k = 0, \dots, N$ y $m = -M + 1, \dots, M + 1$.
2. **Para cada k sumar** los $2M - 1$ productos obtenidos y ponderar el resultado por $g[m]$.
3. **Multiplicar** la suma ponderada por $|h[k]|^2$ y formar el kernel con simetría hermítica y de dimensión NPF como se explicó anteriormente.
4. **Calcular** la FFT del arreglo anterior.
5. **Repetir** los pasos 1, 2, 3 y 4 hasta que el valor de n sea NPT .

Se obtiene entonces una representación tiempo-frecuencia de dimensiones $NPT \times NPF$ puntos.

4.2.5 Distribución Choi Williams

El cálculo de esta distribución es muy similar al de la Pseudo Wigner Ville "suavizada" (PWVL) porque también utiliza dos ventanas, una temporal y una frecuencial:

$$CW_x[n, f] = 2 |h[0]|^2 |x[n]|^2 + 2 \sum_{k=-N+1, k \neq 0}^{N-1} |h[k]|^2 K[n, k] e^{-j4\pi f k}$$

donde:

$$k[n, m] = \sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m] \frac{1}{\sqrt{16\pi k^2/\sigma}} e^{-\frac{m^2}{16k^2/\sigma}} x[n+m+k] x^*[n+m-k]$$

La ventana $g[m]$ tiene una longitud de $2M - 1$ y la ventana $h[n]$ tiene una longitud de $2N - 1$. El parámetro σ varía entre un valor de 1 y 80, recordando que cuando el valor se acerca a 1, es cuando se eliminan las interferencias y entre más se acerque al límite superior, más se parecerá a la distribución Wigner Ville. Una idea para implementar esta distribución es la siguiente [BAS92]:

1. **Para cada instante n deseado**, calcular el producto $2 x[n+m+k] x^*[n+m-k]$ para $k = 0, \dots, N$ y $m = -M+1, \dots, M+1$.
2. **Para cada k diferente de cero**, sumar los $2M-1$ productos obtenidos y ponderar el resultado por $g[m]$. Pasar al punto 4.
3. **Cuando $k = 0$** , utilizar $2 |h[0]|^2 |x[n]|^2$.
4. **Multiplicar** la suma ponderada por $|h[k]|^2$ y formar el kernel con simetría hermítica y de dimensión NPF como se explicó anteriormente.
5. **Calcular** la FFT del arreglo anterior.
6. **Repetir** los pasos 1, 2, 3, 4 y 5 hasta que el valor de n sea NPT .

Nuevamente, el resultado es una representación tiempo-frecuencia de dimensiones $NPT \times NPF$ puntos.

A continuación, se presentan algunas simulaciones con señales sintéticas, para familiarizarnos con las representaciones tiempo-frecuencia, y el tipo de resultados que se esperan de cada una de ellas.

4.3 Evaluación del Desempeño de los Métodos Tiempo-Frecuencia

Las simulaciones están divididas en dos partes: primero se efectuarán simulaciones con señales sintéticas, y para familiarizarnos con los métodos tiempo-frecuencia no paramétricos, desarrollamos primero las simulaciones con cada uno de estos métodos. Posteriormente, repetiremos estas mismas simulaciones para los métodos paramétricos. La segunda parte consiste en hacer simulaciones con señales reales, que en este caso son señales de tipo EEG y de voz, en donde efectuaremos comparaciones entre los diferentes métodos, tanto paramétricos como no paramétricos.

Para tener una referencia para los métodos no paramétricos, comenzaremos estas simulaciones calculando primero el espectrograma de las señales a analizar, para después interpretar el tipo de información que se obtiene de las representaciones tiempo-frecuencia. Para las simulaciones aquí presentadas, si no se indica otra cosa, todas las señales tienen una longitud de $L = 512$ muestras, una amplitud unitaria y su frecuencia de muestreo es $f_s = 2$, por lo que la frecuencia máxima de las señales será $f_{max} = 1$.

Una aclaración pertinente es mencionar que al momento de capturar e imprimir las imágenes para este documento, se pierden algunas de las características de los resultados obtenidos, por lo que no se pueden efectuar comparaciones.

4.3.1 Simulaciones con Señales Sintéticas

• Métodos Tiempo-Frecuencia No Paramétricos: Señales Senoidales

La primer señal a analizar, es una señal senoidal real, presente durante todo el tiempo t , con frecuencia constante de $f = 0.5$. Si calculamos el espectrograma para una ventana con longitud de 127 puntos y con 256 puntos frecuenciales, obtenemos una gráfica como la que se muestra en la fig 4.1. En esta gráfica se observan dos espectros, uno de ellos corresponde a las frecuencias positivas, el segundo es el espectro simétrico, por lo que en realidad solo se deben graficar las primeras 128 muestras en este caso. Si se desea un espectro de 256 puntos, entonces se debe calcular un espectrograma con el doble de puntos, o sea, 512 puntos. Otra vista del espectrograma se muestra en la figura 4.2, donde se observa la localización del espectro de la señal en el plano tiempo frecuencia visto desde arriba. En este tipo de gráficas, el origen se encuentra en la esquina inferior izquierda, el eje horizontal representa al tiempo y el eje vertical representa a la frecuencia. Se observa que la señal está perfectamente localizada en frecuencia y además, la amplitud de dicha señal permanece constante durante todo el tiempo. Las gráficas que se presentan en este documento son indistintamente de una vista u otra, dependiendo del tipo de información que se quiera presentar.

Por el contrario, si se utiliza una señal analítica y se le calcula su espectrograma con los mismos parámetros, se observa en las figuras 4.3 y 4.4 que el espectro simétrico desaparece. Aún así, únicamente se deben graficar los primeros puntos, correspondientes a las frecuencias positivas.

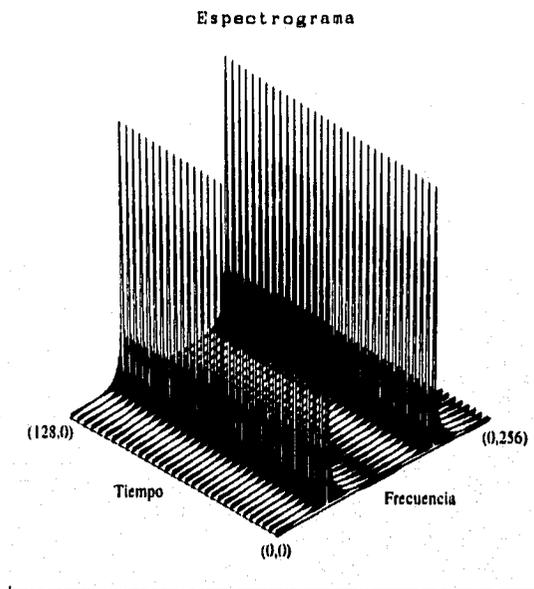


Figura 4.1: Espectrograma de una señal (gráfica con 32 de 128 espectros, $vt=127$, $NPF=256$)

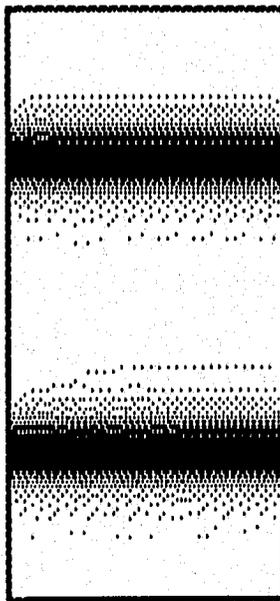


Figura 4.2: Vista Superior del Espectrograma de la figura anterior.

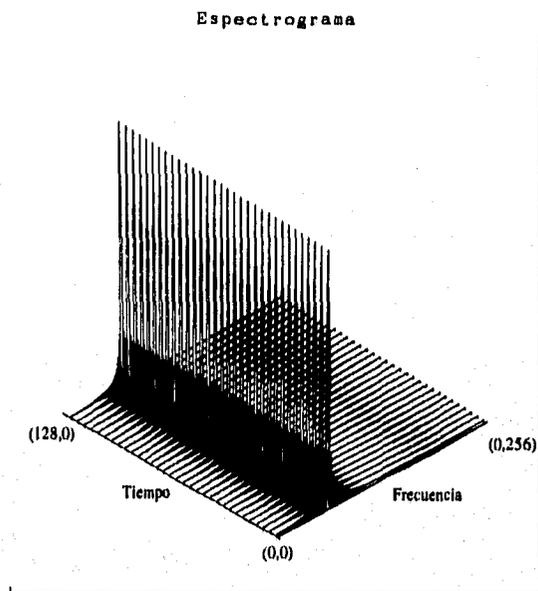


Figura 4.3: Espectrograma de una señal analítica (gráfica con 32 de 128 espectros, $vt=127$, $NPF=256$)

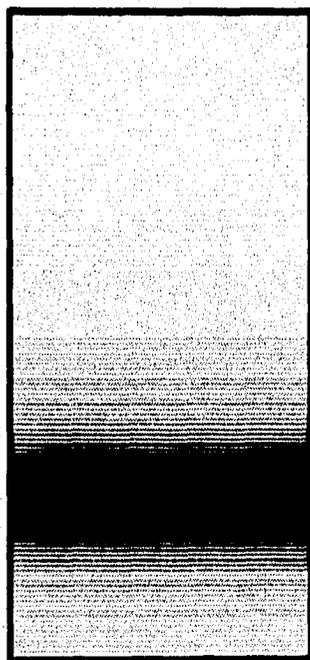


Figura 4.4: Vista Superior del Espectrograma de la figura anterior.

Tomando como base las simulaciones anteriores, analizaremos ahora la misma señal pero con la Distribución Wigner Ville con los siguientes parámetros: la longitud de la ventana temporal se fijará en 127 puntos, 128 puntos frecuenciales y 128 bloques, para obtener una imagen de 128 puntos frecuenciales por 128 puntos temporales. En la primer gráfica, figura 4.5, se observa que el espectro de la señal es creciente, es decir, que el espectro crece conforme transcurre el tiempo. En el instante cero, no existe y conforme el tiempo corre, el espectro alcanza su magnitud máxima que permanece constante hasta el momento en que la señal decae. En este caso, como la duración de la señal es mayor al número de puntos temporales de la distribución, no se observa este efecto, por lo que el espectro aparece con amplitud constante.

Sin embargo, se aprecian dos efectos importantes en esta figura: el primero de ellos es la aparición de un espectro simétrico casi al final del eje frecuencial, que también puede considerarse como artefacto, más visible en la figura 4.5. El segundo, también visible en la misma figura, es que tiene componentes negativos, es decir, que la distribución no siempre es positiva. La figura 4.6 muestra una vista superior del plano tiempo frecuencia, en donde también se observa que la transformada wigner ville localiza la señal en su frecuencia correspondiente, aunque en este caso se observan los artefactos en las orillas del plano tiempo-frecuencia.

Utilizando ahora la señal analítica, se muestra en la figura 4.7 que el término simétrico ya no aparece, por lo que es una forma de eliminarlo. La frecuencia se sigue detectando en la misma posición que la anterior, por lo que no existe ningún cambio y comparando las vistas superiores de la señal real y la señal analítica, figuras 4.8, se observa que los artefactos que se presentaban en los extremos han desaparecido.

Ahora, cambiemos la frecuencia de la señal a analizar a un valor de 0.3. Si le calculamos el espectrograma a la señal analítica obtendremos una imagen como la que se observa en la figura 4.9. Se observa una sola frecuencia cuyo espectro mantiene su magnitud constante durante todo el tiempo.

Al aplicarle la transformada Wigner Ville a la señal real con esta frecuencia, obtenemos un espectro como el de la figura 4.10. En este se aprecia el componente simétrico y artefactos en las orillas del plano tiempo-frecuencia. Al utilizar la señal analítica los artefactos desaparecen (figura 4.11).

Si continuamos disminuyendo la frecuencia hacia valores cercanos a cero, llegará un momento en que en el extremo más alejado del plano tiempo-frecuencia empezarán a aparecer artefactos, similares a los que se aprecian cuando se utiliza una señal real.

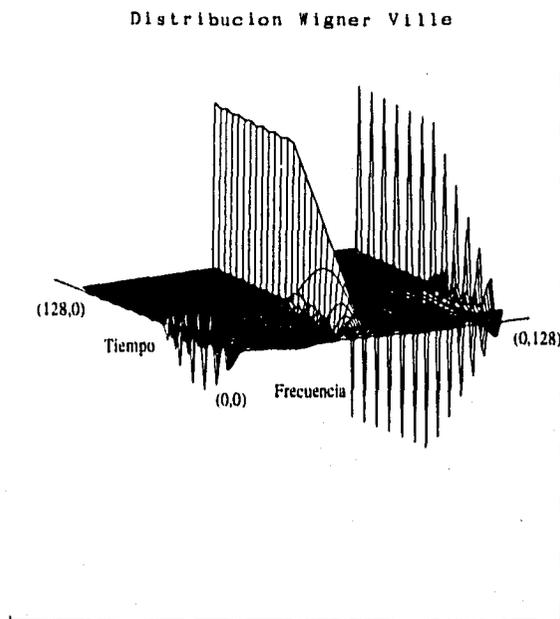


Figura 4.5: Distribución Wigner Ville de una Señal Real Senoidal con frecuencia de $f=0.5$, (gráfica con 25 de 128 espectros), ventana con 127 puntos, NPF=128

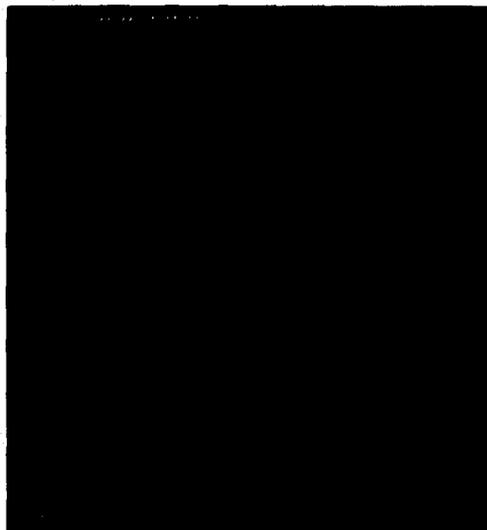


Figura 4.6: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de una Señal Real Senoidal con frecuencia de $f=0.5$.

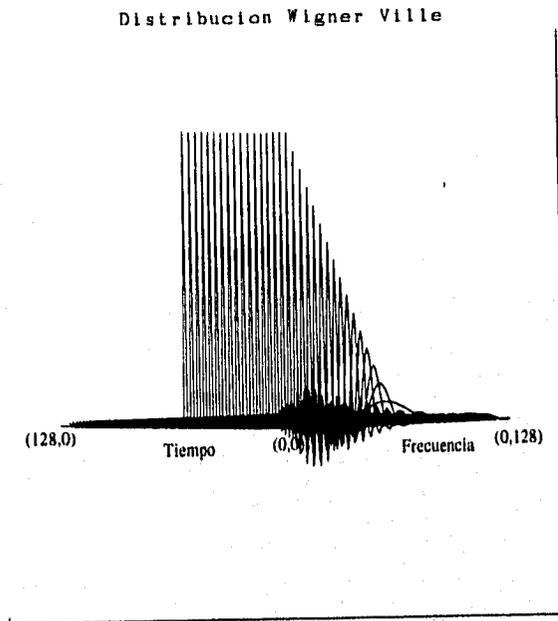


Figura 4.7: Distribución Wigner Ville de una señal senoidal analítica con frecuencia $f=0.5$

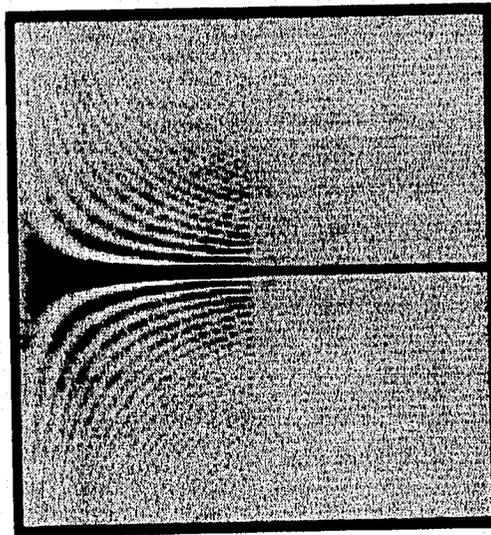


Figura 4.8: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de la figura anterior

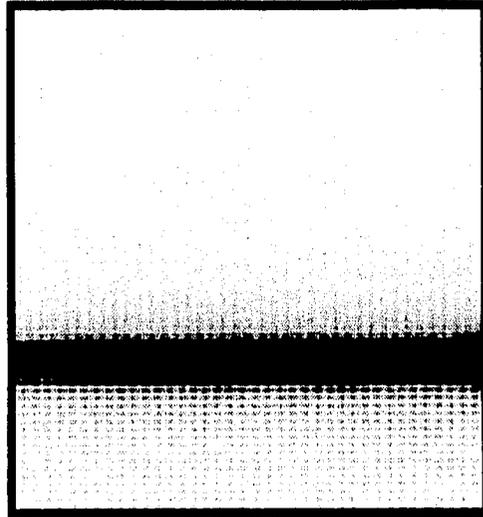


Figura 4.9: Vista Superior del Espectrograma de una Señal Senoidal con Frecuencia $f=0.3$

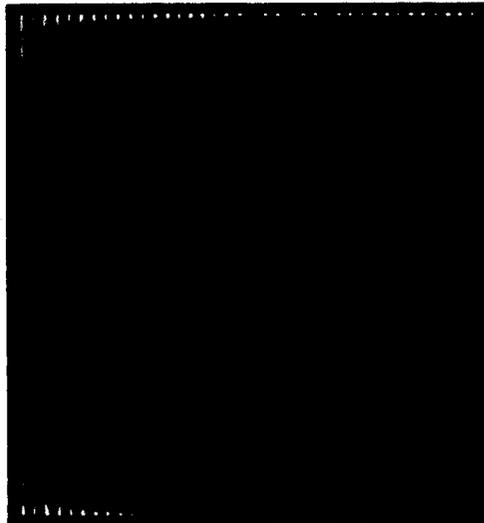


Figura 4.10: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de una Señal Senoidal Real con Frecuencia $f=0.3$

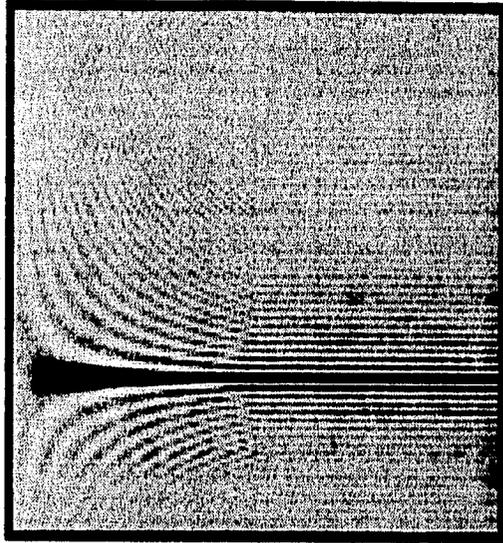


Figura 4.11: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de una Señal Senoidal Analítica con Frecuencia $f=0.3$

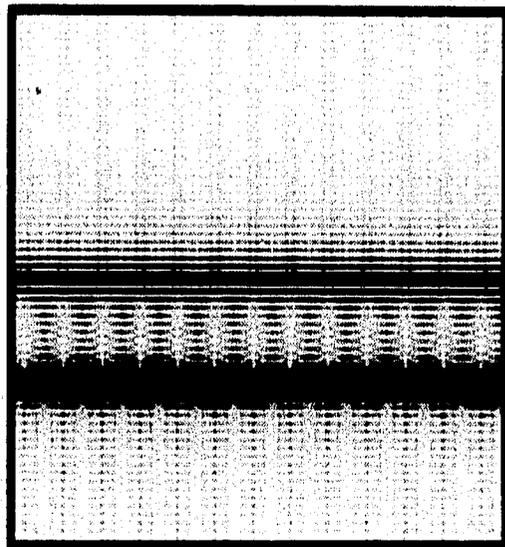


Figura 4.12: Vista Superior del Espectrograma de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.5$

De estas simulaciones se concluye que no existe una gran diferencia entre el desempeño del espectrograma y la Distribución Wigner Ville para la detección de este tipo de señales. Se encuentran diferencias en que el número de puntos que se tiene que calcular, ya que para el espectrograma siempre será el doble de los puntos que se desean graficar, mientras que para la WVD, solo se calcula el mismo número de puntos que se desean visualizar. Otra diferencia es que mientras en la WVD se observa como es que el espectro de la señal crece hasta llegar a un máximo en donde permanece constante, el espectrograma siempre muestra un espectro constante desde el principio. Finalmente, una observación obvia es que el uso de la señal analítica mejora el desempeño de la WVD.

• Suma de Señales Senoidales

La siguiente simulación es con una suma de señales senoidales, una con frecuencia de 0.3 y la otra con frecuencia de 0.5, ambas con la misma duración. Si calculamos el espectrograma (figura 4.12), se observan dos frecuencias constantes durante todo el tiempo. Si aplicamos la transformada wigner ville a la señal analítica, se observan dos frecuencias constantes también durante todo el tiempo, pero en medio de ellas se presentan artefactos (figura 4.13).

Si movemos la frecuencia de 0.5 a una frecuencia más cercana a la frecuencia máxima posible de la señal (figura 4.15), se observa que los artefactos siempre se van a localizar en medio de las dos señales aunque su amplitud puede variar, y cuando dicha frecuencia alcanza el límite, se aprecian artefactos en el origen del plano tiempo-frecuencia, similar al efecto que se aprecia cuando la frecuencia de una señal se acerca al límite inferior, ya que aparecen artefactos en el otro extremo del plano tiempo-frecuencia.

Aquí, nuevamente tanto el espectrograma como la WVD detectan bien la localización de las señales, solo que la desventaja de la Distribución Wigner Ville es que aparecen los términos de interferencia. Dichos artefactos se localizarán en medio de las dos señales y eventualmente, también pueden aparecer en los extremos del plano tiempo-frecuencia. Su utilidad o como eliminarlos se comentan en incisos posteriores.

• Salto de Fase en una Señal Senoidal

Otra simulación es un salto de fase a la mitad de una señal. Hacemos esta simulación para una señal con frecuencia de 0.5 y el cambio de fase (de 180 grados) se efectúa justamente a la mitad de la señal. El espectrograma (figura 4.16) no detecta dicho salto de fase, mientras que en la Distribución Wigner Ville (figura 4.17) sí se observa un cambio a la mitad de la gráfica, justo cuando se efectúa el salto de fase. Si el cambio de fase es únicamente de 90 grados, el efecto es más sutil (figura 4.18).

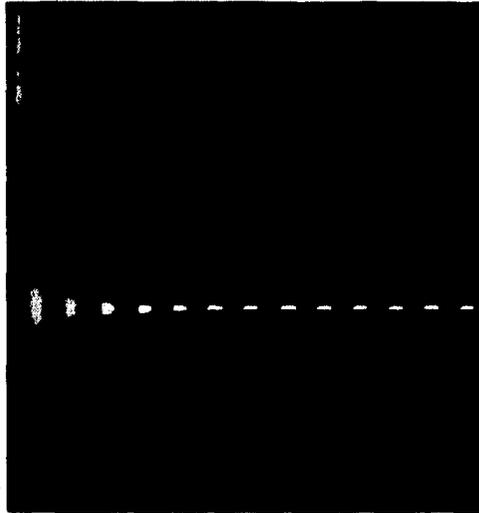


Figura 4.13: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.5$ ($vt=127$)

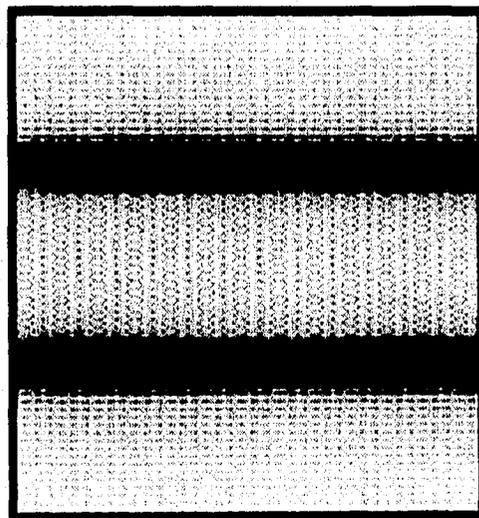


Figura 4.14: Vista Superior del Espectrograma de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.7$ ($vt=127$)

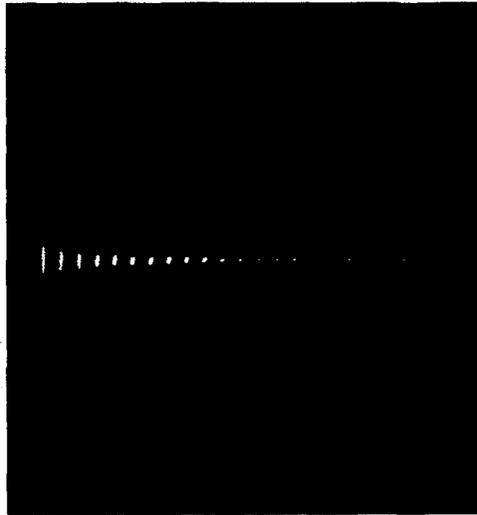


Figura 4.15: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.7$ ($vt=127$)

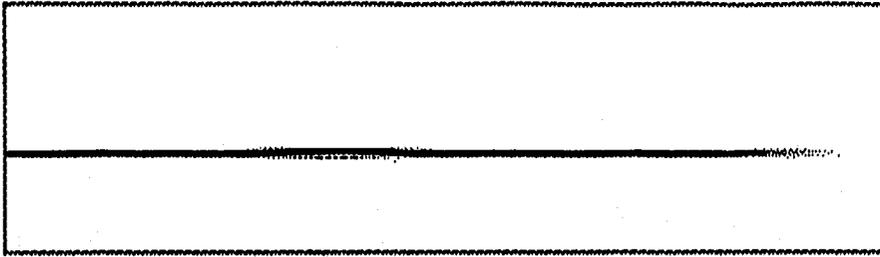


Figura 4.16: Vista Superior del Espectrograma de una Señal Senoidal con Salto de Fase (180 grados) ($vt=127$)

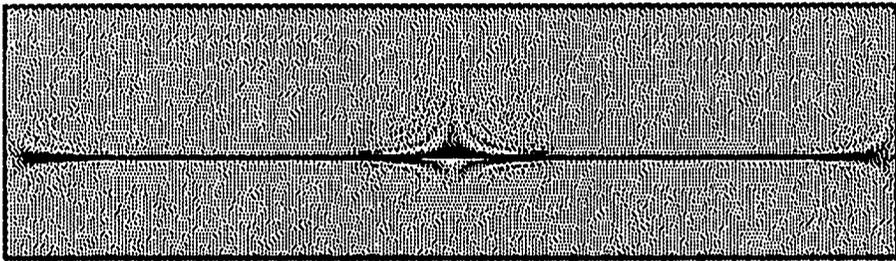


Figura 4.17: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de una Señal Senoidal con Salto de Fase (180 grados) ($vt=127$)

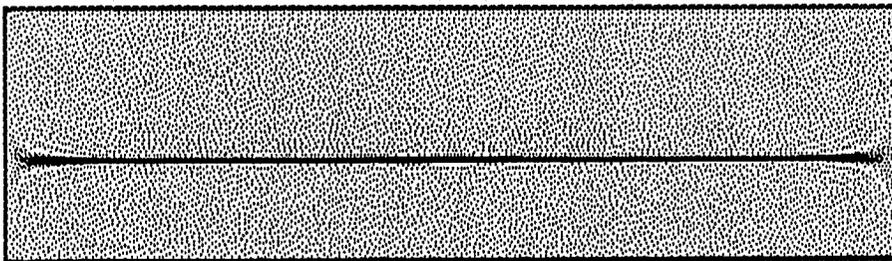


Figura 4.18: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de una Señal Senoidal con Salto de Fase (90 grados) ($vt=127$)

En estas gráficas también se muestra que la distribución Wigner Ville tiene soporte finito en tiempo, ya que la señal tiene una duración de 512 puntos únicamente, y se observa que en la parte media de la gráfica se observa una amplitud constante del espectro, mientras que en los extremos se atenúa dicho espectro, por ser el principio y final de la señal. En el espectrograma, figura 4.16, solo se observa que la amplitud del espectro disminuye hacia el final de la gráfica.

Un comentario a estas simulaciones es que el espectrograma no detecta el cambio de fase en la señal, mientras que la WVD si lo hace. En el siguiente inciso se hace una variante de esta simulación, en donde se utilizan dos señales con diferente fase.

• Suma de Dos Señales con Diferente Fase

Las siguientes simulaciones son con dos señales con diferente fase. En este caso tenemos una señal de frecuencia 0.3 sumada a una señal de frecuencia 0.7. La primera gráfica, figura 4.19, muestra el espectrograma de dicha señales, la segunda figura 4.20, la distribución Wigner Ville. En esta primera gráfica, las señales están en fase. Pero si cambiamos la fase a la señal de 0.7 a 90 grados, entonces se observa un efecto en la parte en donde se presentan los artefactos. En estas gráficas, los tonos negros indican números más positivos que los tonos blancos, por lo que se observa que hay un "movimiento" de las amplitudes de los artefactos, es decir, que existe una variación en la localización de los picos con magnitudes mayores dentro de los artefactos, figura 4.21. Si se vuelve a cambiar la fase a la misma señal 90 grados más, o sea, 180 grados, se observa que nuevamente existe ese "movimiento" en los artefactos, figura 4.22. Finalmente, se observa algo similar para cuando la fase es 270 grados, figura 4.23. Si se obtiene el espectrograma de la señal cuando la fase es 90 grados, figura 4.24, no se encuentra ninguna diferencia entre esta gráfica y la primera. En otras palabras, el espectrograma no detecta este cambio de fase existente entre dos señales.

De lo observado se concluye que la utilidad de los términos de interferencia consiste en indicar que existe una diferencia de fase entre dos señales, que puede cuantificarse si se tiene algún parámetro de comparación como fue en este caso.

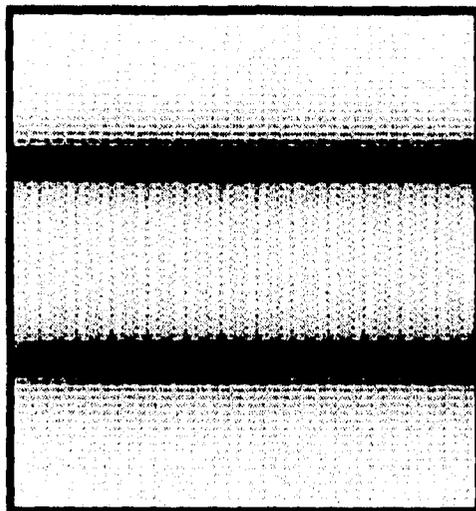


Figura 4.19: Vista Superior del Espectrograma de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.7$ en Fase

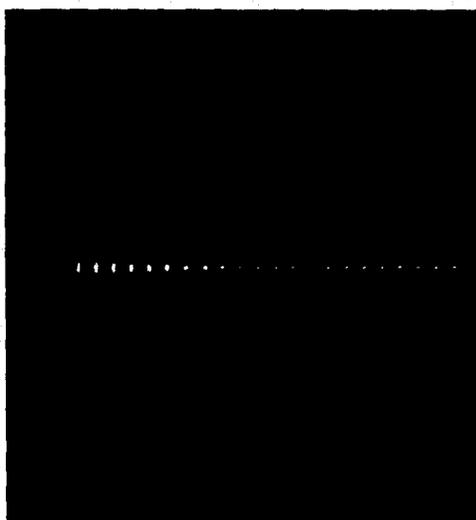


Figura 4.20: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.7$ en Fase

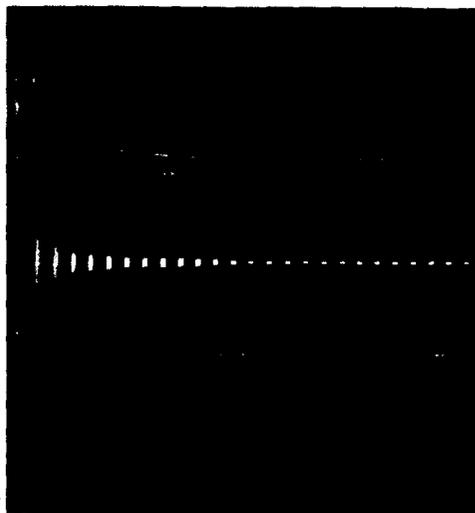


Figura 4.21: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.7$ con Diferencia de Fase de 90 grados

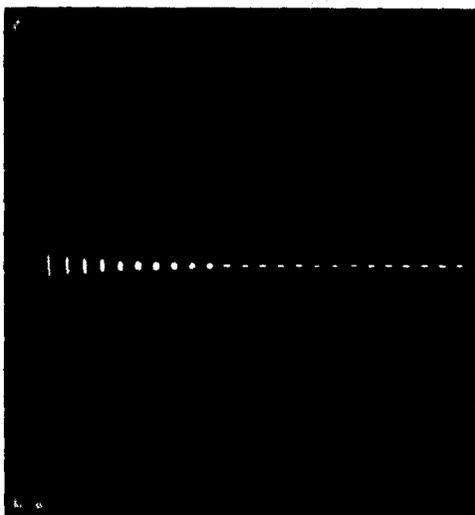


Figura 4.22: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.7$ con Diferencia de Fase de 180 grados

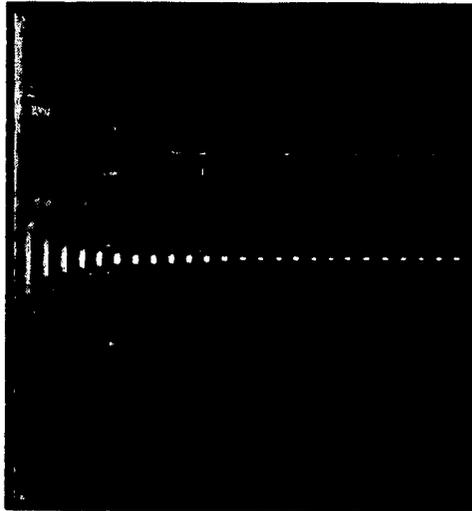


Figura 4.23: Vista Superior de la Distribución Wigner Ville de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.7$ con Diferencia de Fase de 270 grados

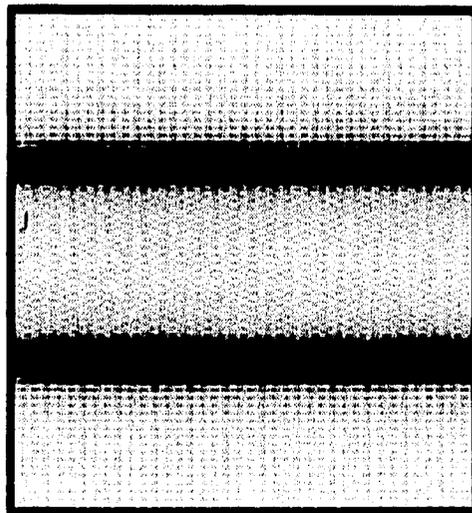


Figura 4.24: Vista Superior del Espectrograma de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.7$ con Diferencia de Fase de 90 grados

• **Artefactos: Como los Afecta el Variar la Longitud de las Ventanas y como Eliminarlos**

Aunque los términos de interferencia hayan mostrado su utilidad para la detección de una diferencia de fase entre dos señales, en aplicaciones de detección de señales pueden resultar molestos. Por ello, trataremos de eliminarlos con la Distribución Pseudo Wigner Ville (PWVL). Primero, para observar cuales son los efectos de la variación de la longitud de las ventanas, procesaremos la señal prototipo con una ventana de la misma longitud en tiempo y en frecuencia, después variaremos la longitud de la ventana temporal, dejando la ventana frecuencial intacta, y posteriormente variaremos la ventana frecuencial.

Consideremos dos señales con frecuencia 0.3 y 0.4, ambas generadas en el mismo instante y con la misma fase. Primero, fijamos el tamaño de las ventanas, temporal y frecuencial, en 127 para cada una de ellas, y con el número de puntos frecuenciales y bloques fijo en 256 para la figura 4.26, como se indica en la tabla 3.1. Para tener una imagen como punto de referencia, calculamos la DWV de la señal con 255 puntos temporales y con NPF=256, la cual se observa en la figura 4.25. Esta misma imagen nos servirá para evaluar el desempeño de la Distribución Choi Williams posteriormente.

Al disminuir la ventana temporal de 127 a 63 muestras, figura 4.27, los artefactos empiezan a ser más notorios que en la figura anterior 4.26, y el espectro se hace más ancho levemente en los primeros instantes de tiempo, por lo que se empieza a perder resolución frecuencial. Para cuando la ventana temporal disminuye su tamaño nuevamente a la mitad, es decir, 31 puntos temporales, la señal empieza a verse un poco borrosa, figura 4.28, y los artefactos comienzan a tomar forma esférica. Finalmente, la última imagen muestra como los artefactos son más visibles que el propio espectro, figura 4.29, para cuando la $vt=15$.

Tabla 3.1

Parámetros de Simulación					
vt	vf	NPF	NPT	PWVL Figura	CW σ , Figura
127	127	256	256	4.26	$\sigma = 1$, 4.34
127	127	256	256		$\sigma = 5$, 4.35
127	127	256	256		$\sigma = 20$, 4.36
63	127	256	256	4.27	$\sigma = 1$, 4.37
31	127	256	256	4.28	$\sigma = 1$, 4.38
15	127	256	256	4.29	$\sigma = 1$, 4.39
65	65	256	256	4.30	$\sigma = 1$, 4.40
127	201	256	256	4.31	$\sigma = 1$, 4.41
127	255	256	256	4.32	$\sigma = 1$, 4.42
255	255	256	256	4.33	$\sigma = 1$, 4.43
255	255	256	256		$\sigma = 10$, 4.44



Figura 4.25: Vista Superior de la DWV de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 255$)

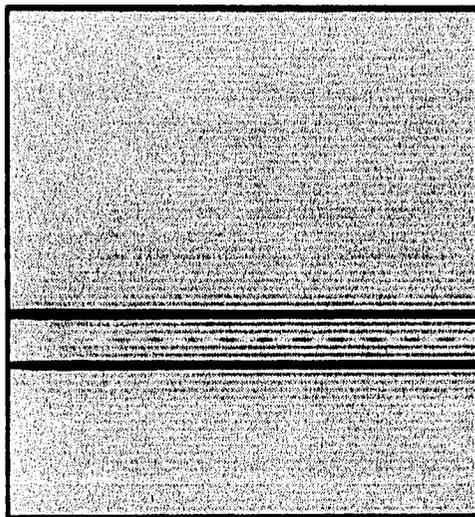


Figura 4.26: Vista Superior de la PWVL de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt=127, vf=127$)

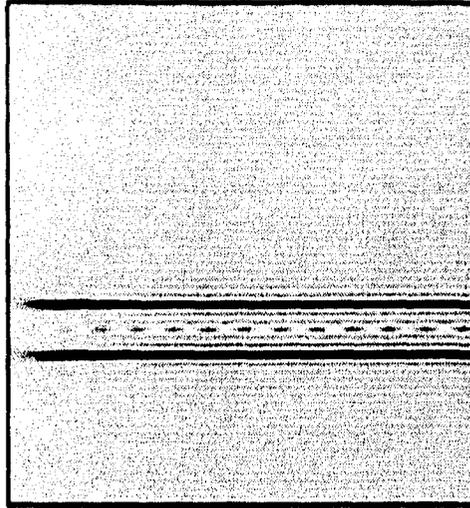


Figura 4.27: Vista Superior de la PWVL de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 63$, $vf = 127$)

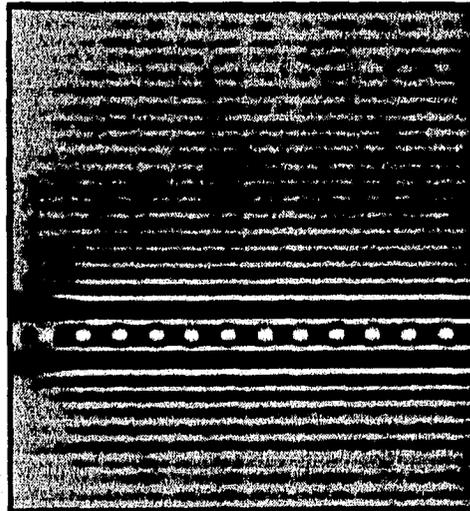


Figura 4.28: Vista Superior de la PWVL de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 31$, $vf = 127$)

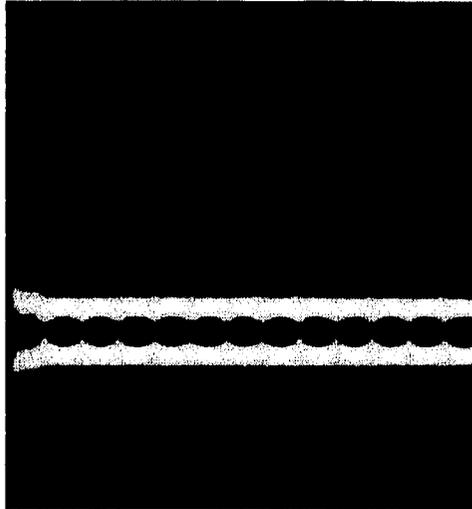


Figura 4.29: Vista Superior de la PWVL de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt=16, vf=127$)

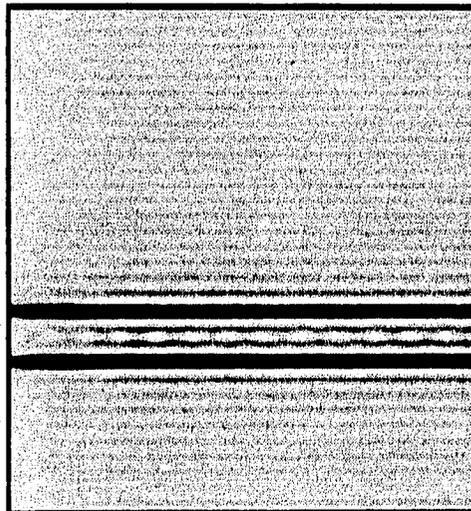


Figura 4.30: Vista Superior de la PWVL de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt=65, vf=65$)

Si por el contrario, cambiamos tanto la ventana frecuencial como la temporal a un valor de 65 puntos para cada una, figura 4.30, los espectros se hacen más anchos con respecto a la figura 4.25. Incrementando entonces la longitud de las ventanas a $v_t=127$ y $v_f=201$ puntos, los artefactos empiezan a desaparecer, figura 4.31, lo mismo sucede conforme vamos aumentando la longitud de la ventana frecuencia a $v_f=255$, figura 4.32, para finalizar con ventanas con longitud de $v_t=v_f=255$ puntos, figura 4.33. En esta última imagen se aprecia una atenuación en el extremo inicial de la señal, aunque los artefactos prácticamente han desaparecido.

De este grupo de simulaciones, se concluye que aunque el reducir la ventana temporal mejora la resolución temporal, no siempre mejora la resolución frecuencial, a menos que se aumente la ventana frecuencial. Por otra parte, la PWVL sí disminuye los artefactos que se presentan en la DWV, y su mejor desempeño para estas señales se obtuvo con los parámetros $v_t=127$, $v_f=255$ como se muestra en la figura 4.32, y también con $v_t=255$, $v_f=255$ cuyo resultado se observa en la figura 4.33.

Las mismas simulaciones se hacen ahora utilizando la Distribución Choi Williams. Recordemos que en esta distribución se utiliza otro parámetro que es σ , y cuyo valor oscila entre 1 y 80 [BAS92]. Las primeras dos gráficas, figuras 4.34 y 4.35, nos muestran una simulación con los mismos parámetros, $v_t=127$, $v_f=127$, excepto que el valor de σ es diferente para ambas, como se indica en la tabla 3.1. En la gráfica 4.34, el valor de σ es 1, y los artefactos disminuyen, en comparación con la DWV, figura 4.25, aunque el espectro se hace un poco más ancho. Si el valor de σ aumenta a 5 como en la figura 4.35, o a 20 como en la figura 4.36, entonces el espectro se hace todavía más ancho, se pierde resolución frecuencial y los artefactos incrementan su valor. Comparando la gráfica 4.34 con la obtenida con los mismos parámetros para la PWVL, figura 4.26, se constata una mejor resolución para la gráfica generada con PWVL, aunque la obtenida con Choi Williams aparentemente disminuye un poco más la amplitud de los artefactos.

Si repetimos la simulación que se efectuó con la PWVL para CW con los mismos parámetros y con un valor de $\sigma = 1$ constante, se observa que al reducir la ventana temporal, los artefactos son más perceptibles y el espectro se hace más ancho ligeramente, figuras 4.37 - 4.39. Si por el contrario se alarga la ventana frecuencial, se obtiene mejor resolución en frecuencia y disminuyen los artefactos, como se aprecia en las figuras 4.40 - 4.43. Se observa además que los mejores resultados para eliminar los artefactos se obtienen con los parámetros $v_t=127$, $v_f=255$, $\sigma = 1$ como se aprecia en la figura 4.42, y con los parámetros $v_t=255$, $v_f=255$, $\sigma = 1$, 4.43. En ambas se eliminan los artefactos, pero si consideramos la imagen como un todo, es mejor el desempeño con los últimos parámetros ya que se elimina el efecto de rayas verticales para esta simulación, figura 4.43.

Finalmente, para apreciar los efectos que causa la variación de σ , basta con comparar las figuras 4.34, 4.35 y 4.43 entre sí, y también las figuras 4.43 con 4.44. Se observa que la mayor atenuación de artefactos se logra con el valor mínimo de $\sigma = 1$ mientras que si se aumenta, los artefactos comienzan a ser más visibles en la gráfica, a grado de lograr restarle importancia a las mismas señales. De ahí que el valor de esta constante influya en el grado de atenuación de los artefactos.

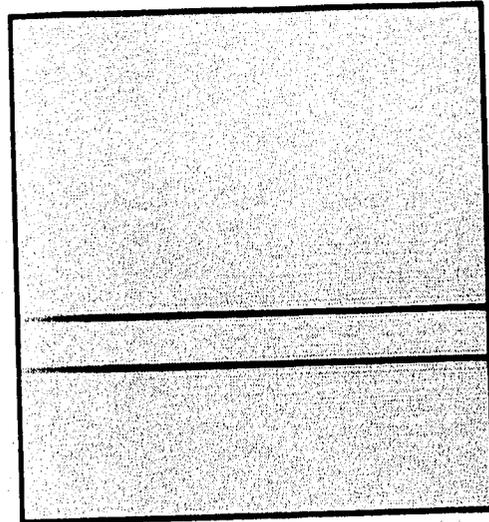


Figura 4.31: Vista Superior de la PWVL de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 127$, $vf = 201$)

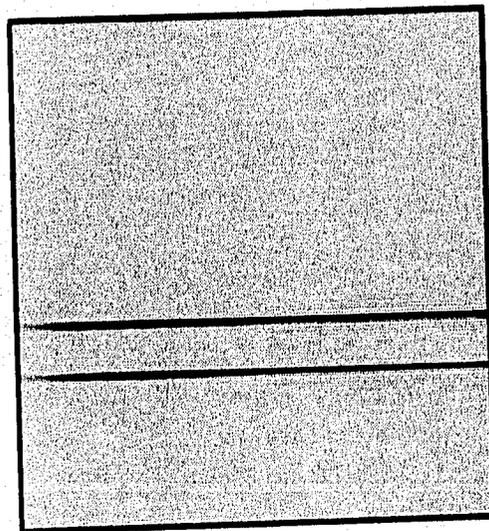


Figura 4.32: Vista Superior de la PWVL de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 127$, $vf = 255$)

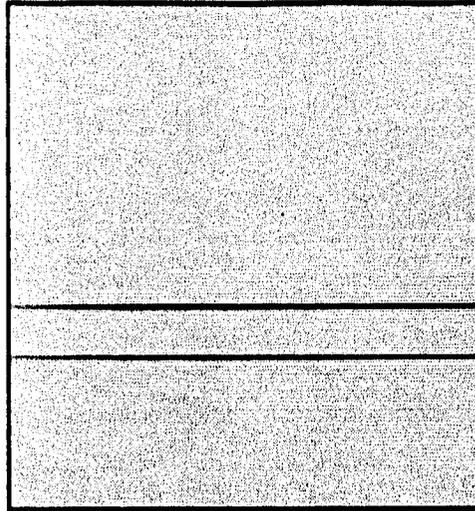


Figura 4.33: Vista Superior de la PWVL de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 255$, $vf = 255$)

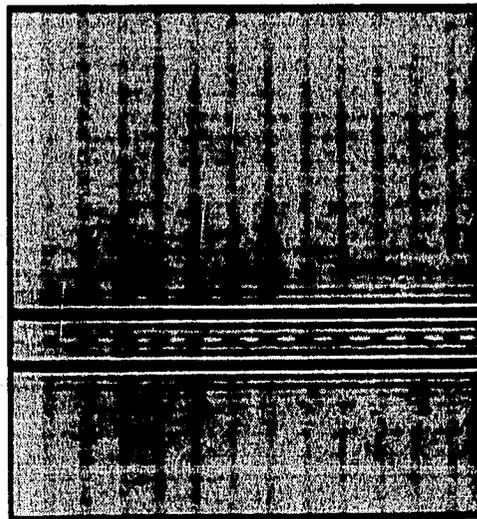


Figura 4.34: Vista Superior de la Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 127$, $vf = 127$, $\sigma = 1$)

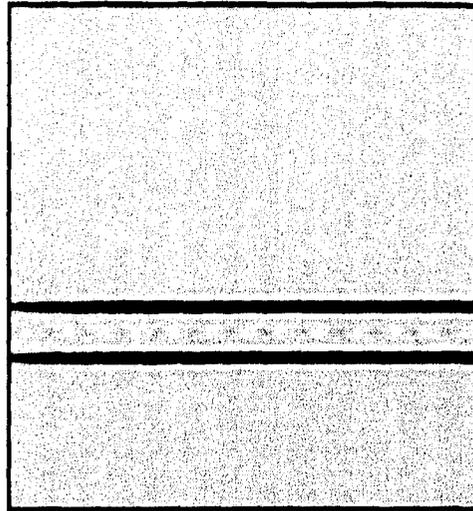


Figura 4.35: Vista Superior de la Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($v_t = 127$, $v_f = 127$, $\sigma = 5$)

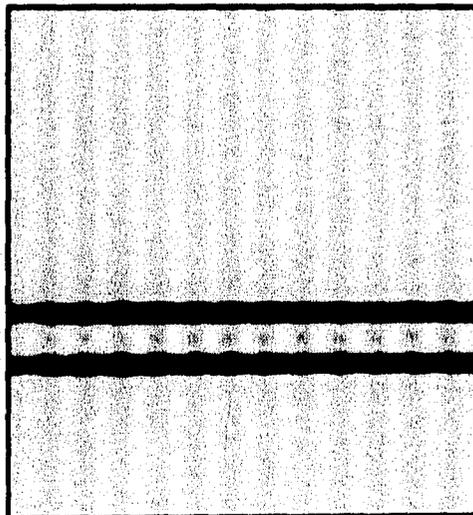


Figura 4.36: Vista Superior de la Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($v_t = 127$, $v_f = 127$, $\sigma = 20$)

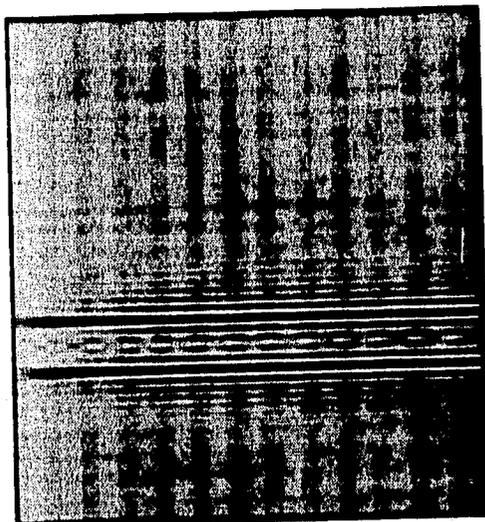


Figura 4.37: Vista Superior de la Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 63$, $vf = 127$, $\sigma = 1$)

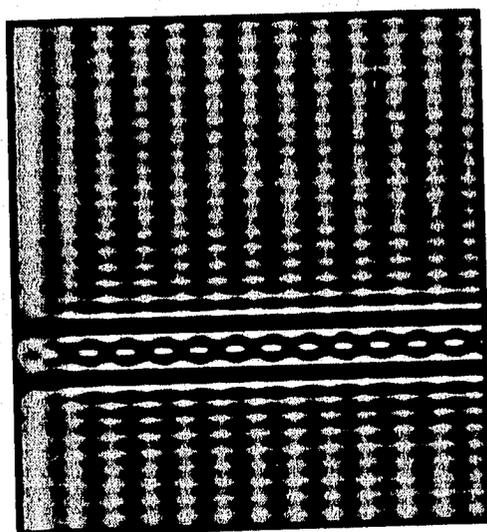


Figura 4.38: Vista Superior de la Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 31$, $vf = 127$, $\sigma = 1$)

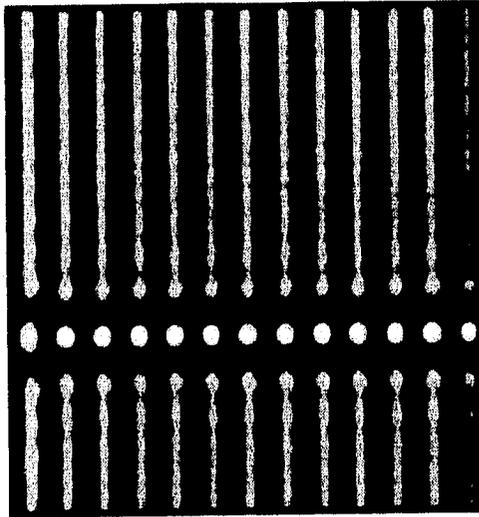


Figura 4.39: Vista Superior de la Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 16$, $vf = 127$, $\sigma = 1$)

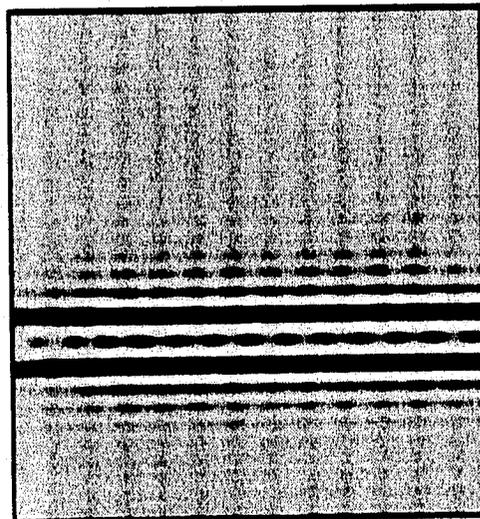


Figura 4.40: Vista Superior de la Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 65$, $vf = 65$, $\sigma = 1$)

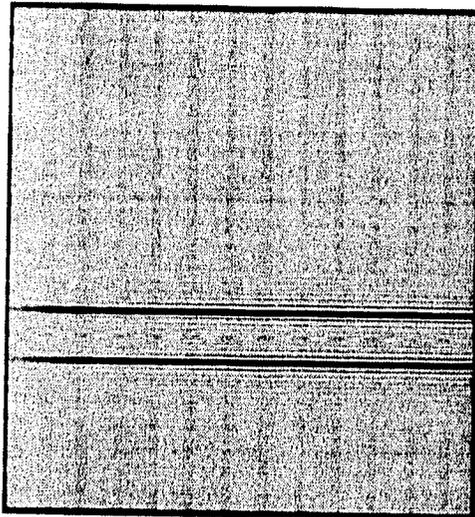


Figura 4.41: Vista Superior de la Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 127$, $vf = 201$, $\sigma = 1$)

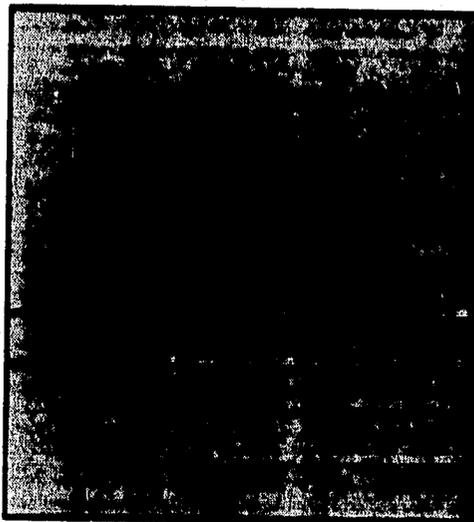


Figura 4.42: Vista Superior de la Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt = 127$, $vf = 255$, $\sigma = 1$)

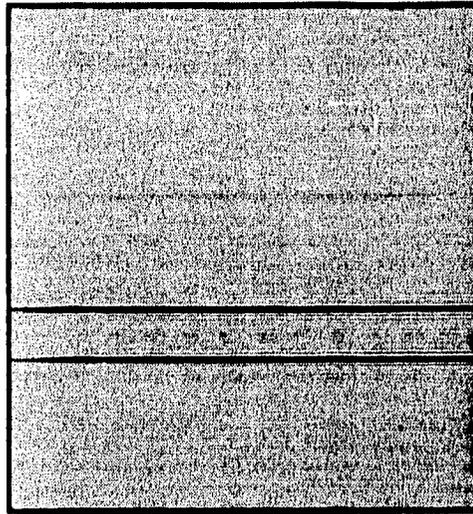


Figura 4.43: Vista Superior de la Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt=255$, $vf=255$, $\sigma = 1$)

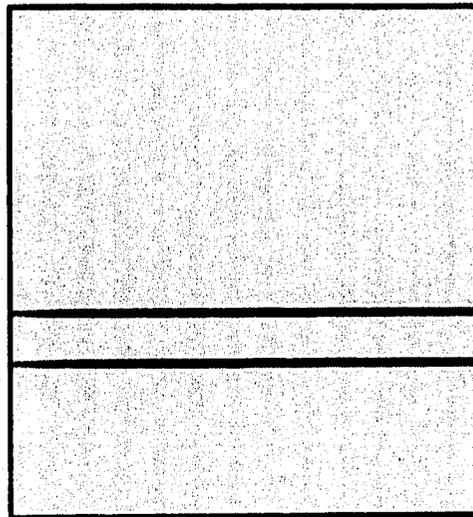


Figura 4.44: Vista Superior de la Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Señales Senoidales con Frecuencias $f_1 = 0.3$ y $f_2 = 0.4$ ($vt=255$, $vf=255$, $\sigma = 10$)

Se comprueba entonces el principio que nos indica que se obtiene una mejor resolución al utilizar una ventana temporal pequeña y una ventana frecuencial grande para la distribución CW, además de que se observa que también elimina los artefactos notablemente, siempre que el valor de σ tienda a la unidad. En caso de que el valor de σ sea mayor, el grado de atenuación de los artefactos será menor conforme se acerque al valor máximo de esta constante. Cabe mencionar una característica de esta distribución, que es la aparición de efecto de "rayas verticales" visible en casi todas las gráficas de las simulaciones CW. Este efecto se presenta cada vez que existen frecuencias que co-existen al mismo tiempo t . Sin tomar en cuenta este efecto, podemos decir que tanto la PWVL como la CW tienen un desempeño similar al momento de eliminar los artefactos. Sin embargo, si tomamos en cuenta el efecto que se presenta en las simulaciones de CW, entonces la distribución PWVL tiene una mejor resolución en general que la distribución CW.

• Señales Compuestas

Ahora, evaluaremos el comportamiento de los diferentes métodos tiempo-frecuencia no paramétricos para una misma señal. Empezaremos con señales compuestas por más de una frecuencia durante el tiempo considerado.

Sea el caso de tres señales con frecuencias de 0.2, 0.4, y 0.6 con diferente duración e instantes de aparición en el tiempo, figura 4.45. Los parámetros utilizados para cada distribución se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 3.2

Parámetros de Simulación NPF=128, NPT=512			
Representación	vt	vf	Figura
Espectrograma	127		4.46
Espectrograma	63		4.47
Wigner Ville	127		4.48
Wigner Ville	63		4.49
Pseudo Wigner Ville	63	63	4.50
Choi Williams	101	127	$\sigma = 1,4.51$

Al calcular el espectrograma, figuras 4.46 y 4.47, se observa que la posición en el plano tiempo-frecuencia dependerá del tamaño de la ventana que se este utilizando, por lo que no detecta bien el momento en que ocurren las señales, aunque frecuencialmente estén bien localizados los componentes de dicha señal. La DWV se muestra en la figura 4.48, y sí especifica exactamente en que momento empiezan y terminan los componentes, pero tiene dos términos cruzados, uno de los cuales se elimina con solo cambiar el largo de la ventana temporal a un valor menor, en este caso de $vt=127$ a $vt=63$, como se observa en la figura 4.47).

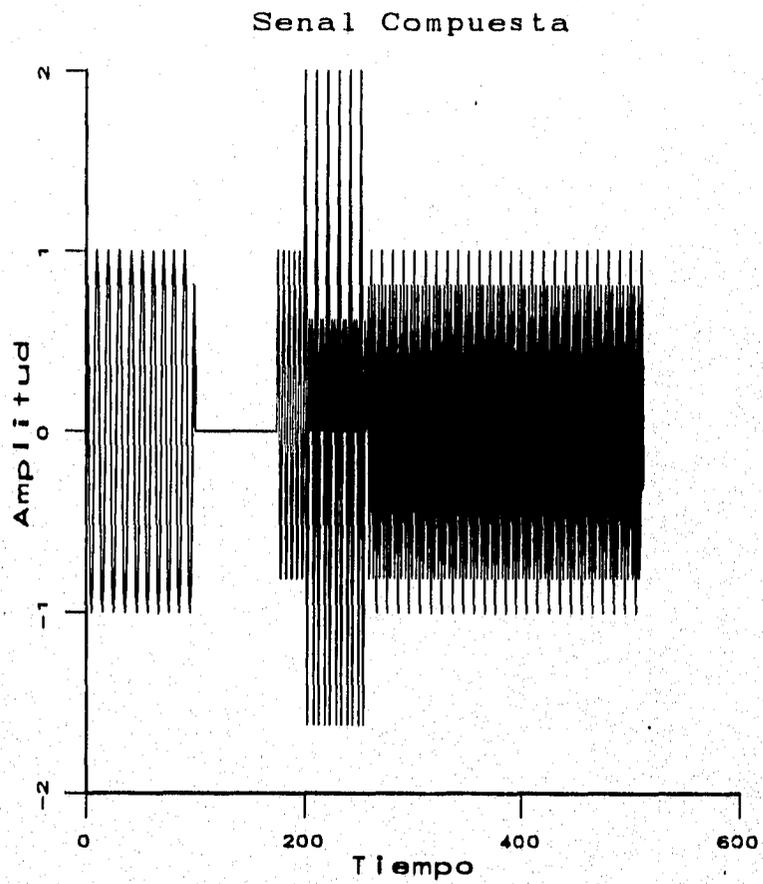


Figura 4.45: Señal Compuesta (longitud de 512 muestras).

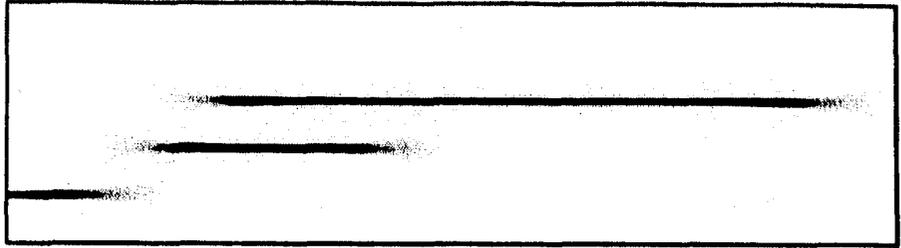


Figura 4.46: Espectrograma de la Señal Compuesta ($vt=127$)

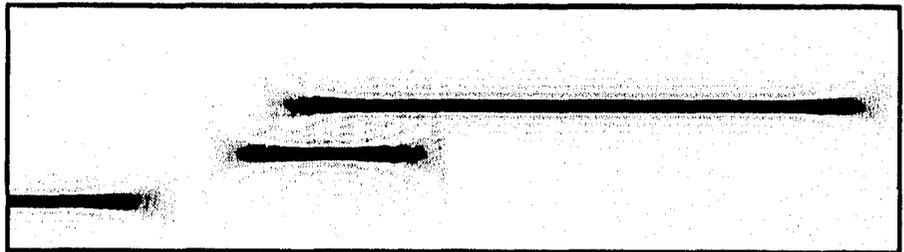


Figura 4.47: Espectrograma de la Señal Compuesta ($vt=63$)



Figura 4.48: Distribución Wigner Ville de la Señal Compuesta ($vt=127$)

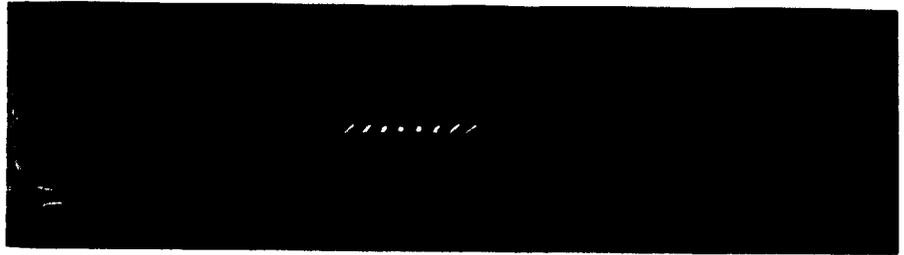


Figura 4.49: Distribución Wigner Ville de la Señal Compuesta ($vt=63$)

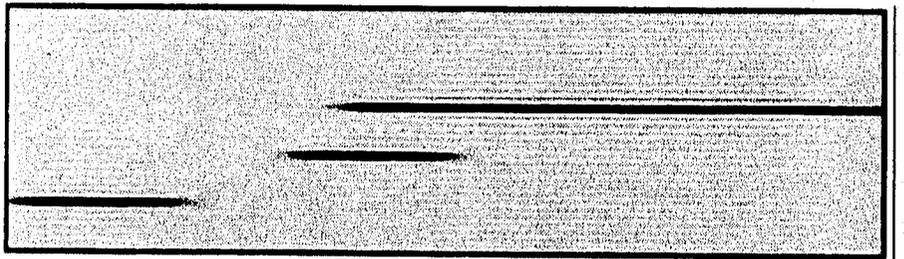


Figura 4.50: Distribución Pseudo Wigner Ville Suavizada de la Señal Compuesta ($vt=63$, $vf=63$)

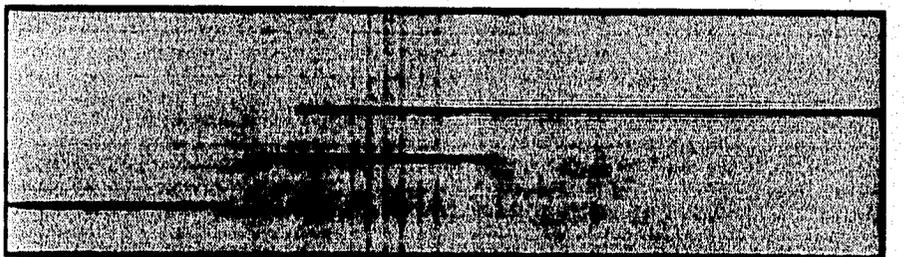


Figura 4.51: Distribución Choi Williams de la Señal Compuesta ($vt=101$, $vf=127$, $\sigma = 1$)

Para intentar eliminar el artefacto que permanece en la gráfica de la DWV, podemos hacer uso de la PWVL, donde se atenúa el artefacto, a costa de hacer un poco más ancho el espectro de la señal, figura 4.50. Con Choi Williams, figura 4.51 se atenúan casi completamente, pero se presenta otro fenómeno que es efecto resultante cuando dos o más señales ocurren al mismo tiempo, y ese efecto se manifiesta en forma de rayas verticales, ya descrito anteriormente.

Otra simulación con señales compuestas es la que incluye cambios bruscos de frecuencia y un silencio. Los parámetros que se utilizaron en dicha simulación se muestran en la tabla 3.3:

Tabla 3.3

Parámetros de Simulación NPF=128, NPT=512			
Distribución	vt	vf	Figura
Espectrograma	63		4.52
Espectrograma	127		4.53
Wigner Ville	63		4.54
Wigner Ville	127		4.55
Pseudo Wigner Ville	63	63	4.56
Pseudo Wigner Ville	63	127	4.57
Pseudo Wigner Ville	31	127	4.58
Choi Williams	63	63	$\sigma = 1,4.59$
Choi Williams	63	127	$\sigma = 1,4.60$
Choi Williams	31	127	$\sigma = 1,4.61$

En este grupo de simulaciones, tanto el espectrograma como la DWV con una ventana de 63 puntos, figuras 4.52 y 4.54 respectivamente, detectan bien tanto la localización de la señal como la región donde existe el silencio, aunque el espectro del espectrograma es más ancho que la DWV y esta última presenta artefactos entre los espectros. Si cambiamos la longitud de la ventana a 127 puntos, mejora la resolución en frecuencia, pero el espectrograma ya no detecta tan bien la región en donde se localiza el silencio, figura 4.53, mientras que en la DWV se presenta un pequeño artefacto en esta región, figura 4.55.

Los artefactos se eliminan fácilmente con PWVL o CW con longitudes de 63 puntos temporales y 63 puntos frecuenciales, figuras 4.56 y 4.59 respectivamente, aunque la resolución frecuencial no es la mejor. Si aumentamos la longitud de las ventanas frecuenciales a 127 puntos, sin variar la ventana temporal, sí se mejora la resolución frecuencial para ambas distribuciones, a costa de que se empieza a generar un artefacto en la región del silencio, figuras 4.57 y 4.59. Pero aunque se observa un cambio brusco en la frecuencia, la resolución temporal mejora al disminuir la ventana temporal a tan solo 31 puntos, figuras 4.58 y 4.61. Con ello, se obtiene una mejor resolución en el instante en que se efectúa el cambio frecuencial.

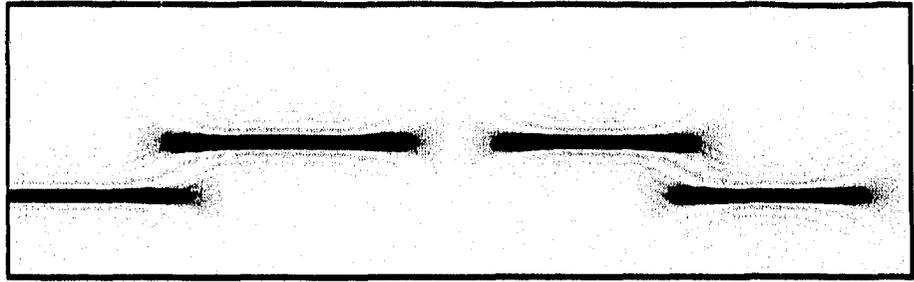


Figura 4.52: Espectrograma de una Señal ($vt = 63$)

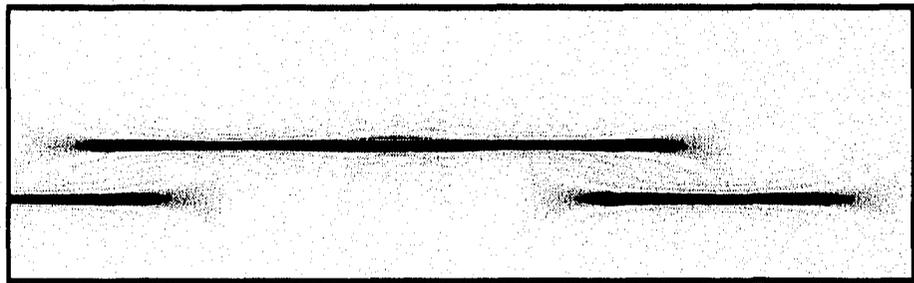


Figura 4.53: Espectrograma de una señal ($vt = 127$)

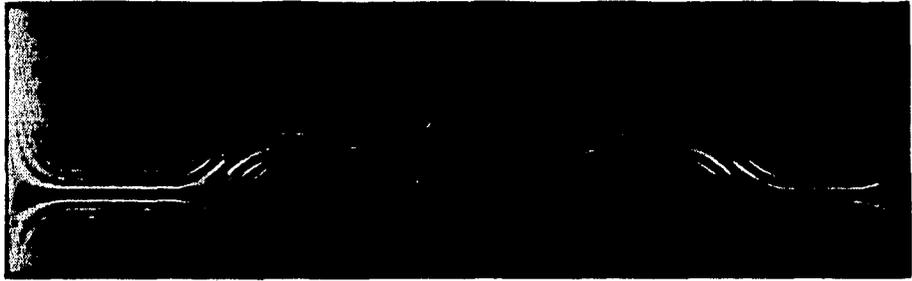


Figura 4.54: Distribución Wigner Ville de una Señal ($vt = 63$)



Figura 4.55: Distribución Wigner Ville de una señal ($vt = 127$)

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

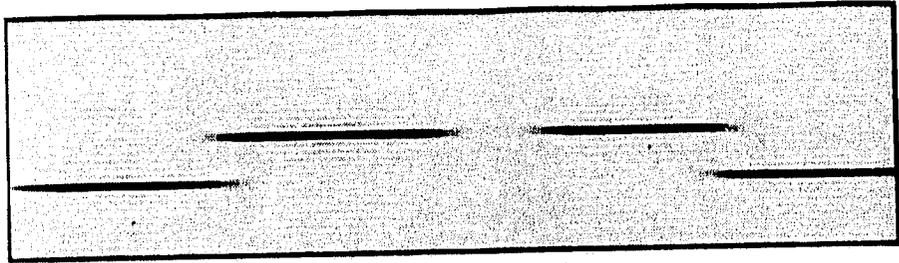


Figura 4.56: Distribución PWVL de una Señal ($vt=63$, $vf=63$)

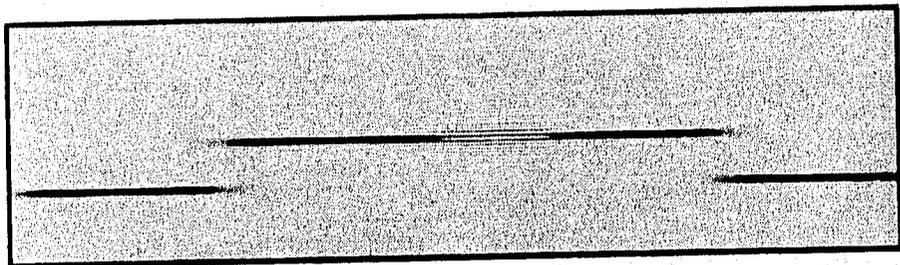


Figura 4.57: Distribución PWVL de una Señal ($vt=63$, $vf=127$)

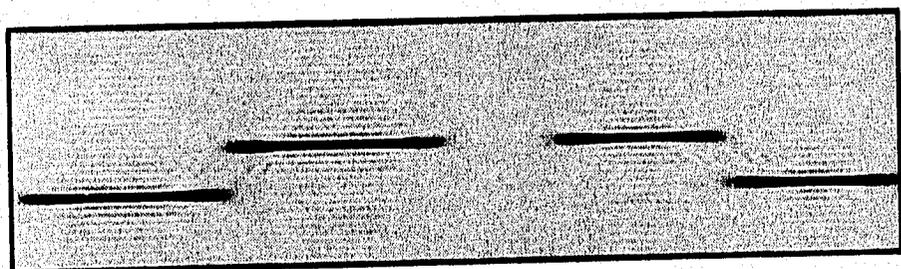


Figura 4.58: Distribución PWVL de una Señal ($vt=31$, $vf=127$)

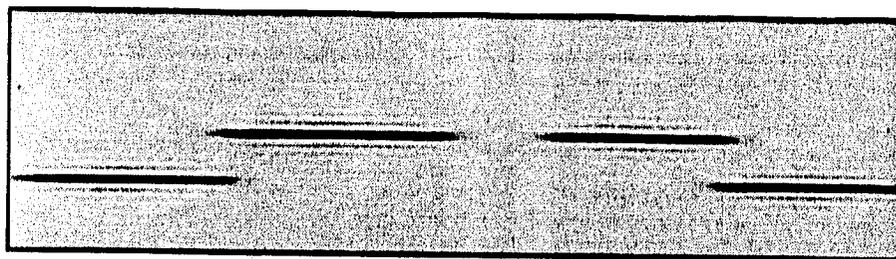


Figura 4.59: Distribución Choi Williams de una Señal ($vt= 63, vf=63, \sigma = 1$)

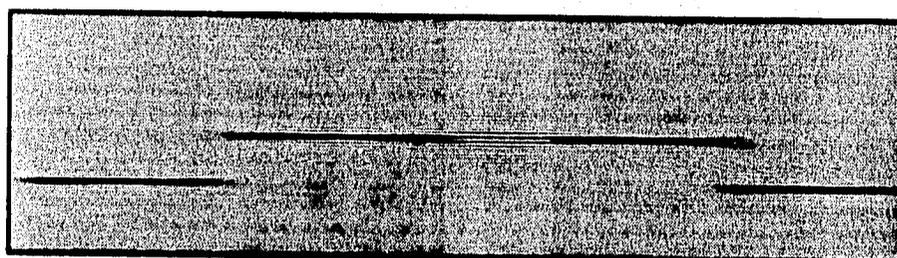


Figura 4.60: Distribución Choi Williams de una Señal ($vt= 63, vf=127, \sigma = 1$)

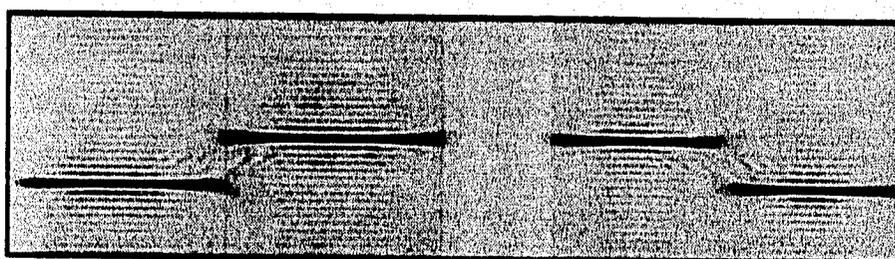


Figura 4.61: Distribución Choi Williams de una Señal ($vt= 31, vf=127, \sigma = 1$)

• Simulaciones con Chirps

Finalizamos esta primera sección con algunas simulaciones en donde utilizamos señales moduladas en frecuencia conocidas como "chirp". Este primer chirp es una señal cuya frecuencia comienza en 0.3 y se va incrementando linealmente. Calculando el espectrograma con los parámetros mostrados en la tabla 3.4, se obtiene la figura 4.62. En esta gráfica se observa como se va incrementando la frecuencia de la señal linealmente. Pero si calculamos la DWV, figura 4.63, la gráfica resultante presenta una mejor resolución frecuencial. Esta es una de las señales para la cual la distribución Wigner Ville es una de las mejores herramientas de análisis.

Tabla 3.4

Parámetros de las Simulación con un Chirp NPF=128, NPT=512		
Representación	vt	Figura
Espectrograma	63	4.62
Wigner Ville	63	4.63
Wigner Ville	63	4.64

Para evaluar el desempeño de las otras TFR's no paramétricas, sumaremos a la señal chirp ascendente del ejemplo anterior un chirp descendente, cuya DWV se muestra en la figura 4.64, donde se observa una señal que comienza con una frecuencia alta, en este caso 0.6 y se decremента linealmente. Con esto entonces, la señal a analizar será la suma de un chirp ascendente y un chirp descendente, y los parámetros que se utilizaron para estas simulaciones se encuentran en la tabla 3.5.

Tabla 3.5

Parámetros de las Simulaciones con Dos Chirps NPF=128, NPT=512			
Representación	vt	vf	Figura
Espectrograma	63		4.65
Wigner Ville	63		4.66
Pseudo Wigner Ville	63	63	4.67
Choi Williams	63	127	$\sigma = 1,4.68$

Como se observa en las gráficas, figuras 4.65-4.68, todos estos métodos detectan bien la localización de los chirps dentro del plano tiempo-frecuencia, aunque se presentan artefactos en la DWV, figura 4.66, que son eliminados fácilmente con el uso de las distribuciones PWVL o CW, figuras 4.67 y 4.68. El espectrograma, figura 4.65, muestra un espectro más ancho a comparación de las otras distribuciones, mientras que Choi Williams elimina los artefactos, pero presenta otros problemas, que son unas rayas verticales en el plano, figura 4.68.

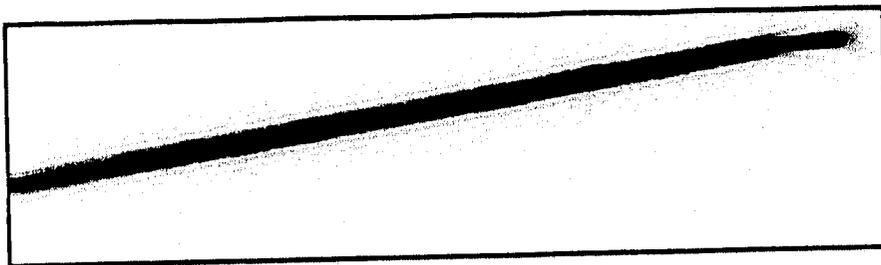


Figura 4.62: Espectrograma de un Chirp ($vt = 63$)

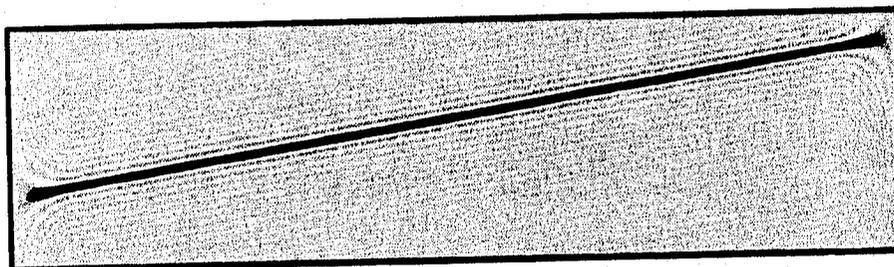


Figura 4.63: Distribución Wigner Ville de un Chirp ($vt = 63$)

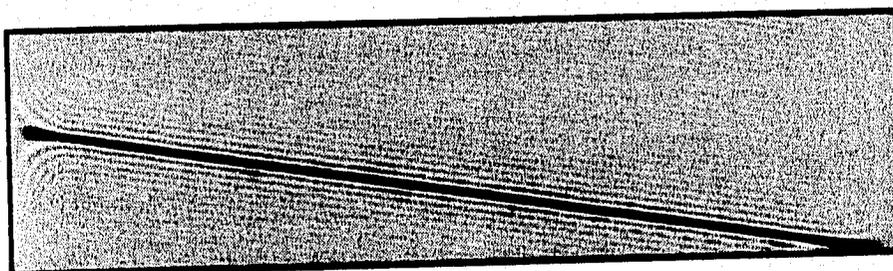


Figura 4.64: Distribución Wigner Ville de una Chirp ($vt = 63$)

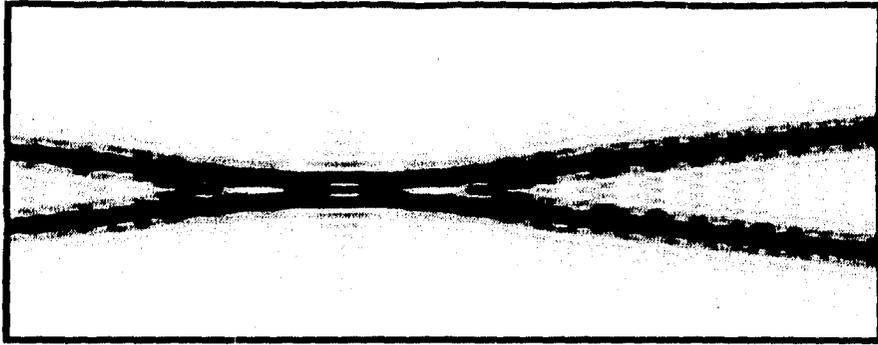


Figura 4.65: Espectrograma de la Suma de Dos Chirps ($vt = 63$)

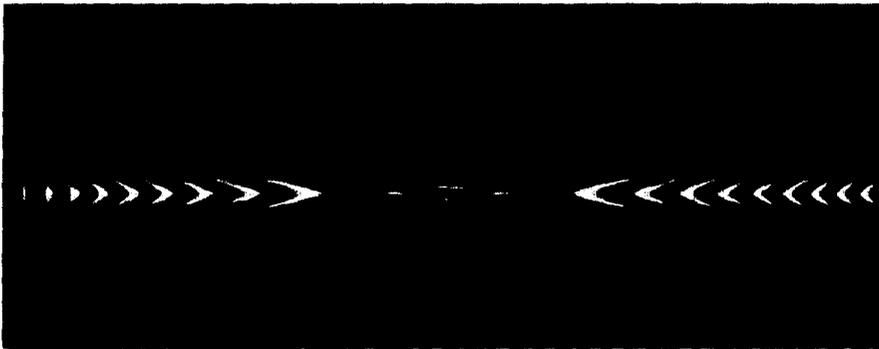


Figura 4.66: Distribución Wigner Ville de la Suma de Dos Chirps ($vt = 63$)

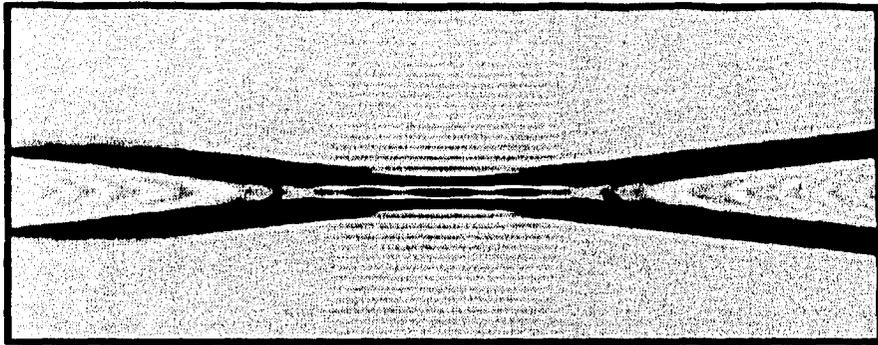


Figura 4.67: Distribución PWVL del a Suma de Dos Chirps ($v_t = 63$, $v_f = 63$)

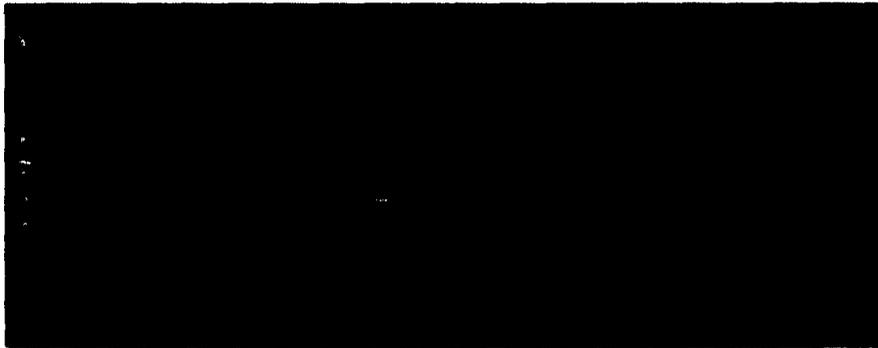


Figura 4.68: Distribución Choi Williams de la Suma de Dos Chirps ($v_t = 63$, $v_f = 127$, $\sigma = 1$)

Vemos entonces como para señales de este tipo, el espectrograma es el que tiene menor resolución frecuencial, y en cuanto a los artefactos, el uso de cualquiera de las dos distribuciones que los eliminan queda a discreción del usuario.

Hasta este punto, estas simulaciones realizadas tienen como característica común el haberse efectuado con señales que carecían de ruido. A continuación se presentan las simulaciones que se efectuaron con señales sintéticas a las que se les agregó un ruido blanco gaussiano.

• Señales con Ruido

Comenzaremos el análisis de los métodos tiempo-frecuencia no paramétricos para una señal con ruido, con una señal senoidal con frecuencia de 0.5 a la cual se le ha sumado un ruido blanco gaussiano de media cero y con varianza $\sigma = 1$. Los parámetros utilizados para cada representación se encuentran en la tabla 3.6.

Tabla 3.6

Parámetros de la Simulación de una Señal con Ruido NPF=128, NPT=128			
Representación	vt	vf	Figura
Espectrograma	127		4.69
Wigner Ville	127		4.70
Pseudo Wigner Ville	127	127	4.71
Choi Williams	127	127	$\sigma = 1, 4.72$

De las gráficas que se obtienen para cada representación, todos los métodos detectan bien la localización de la frecuencia. Las variaciones entre estos métodos radican en el ancho del espectro y la cantidad de ruido presente en la distribución. Por ejemplo, la DWV, figura 4.70, tiene buena resolución frecuencial, pero tiene mucho ruido alrededor del espectro. En cambio, las distribuciones PWVL y CW, figuras 4.71 y 4.72 respectivamente, presentan menos ruido que la DWV, siendo la distribución PWVL la que muestra una mejor resolución frecuencial y prácticamente sin ruido.

Consideremos ahora el chirp ascendente que utilizamos en una simulación anterior, al cual le sumaremos ruido gaussiano con varianza de 0.5. Las características de las simulaciones se encuentran en la tabla 3.7.

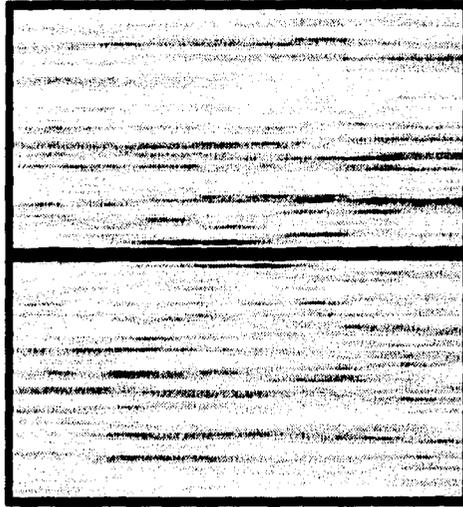


Figura 4.69: Espectrograma de una Señal Senoidal con Ruido ($vt = 127$)

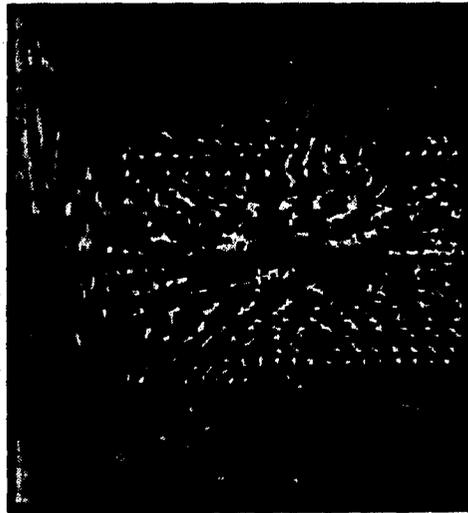


Figura 4.70: Distribución Wigner Ville de una Señal Senoidal con Ruido ($vt = 127$)

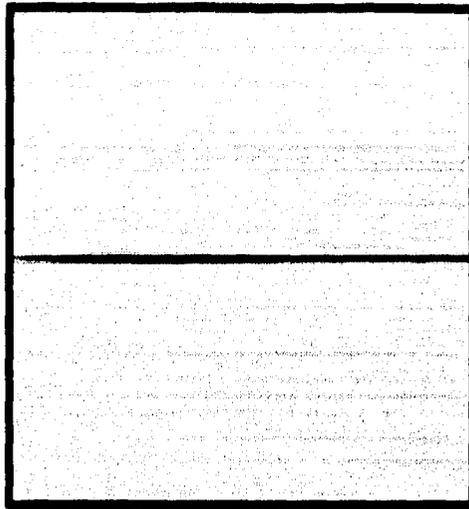


Figura 4.71: Distribución PWVL de una Señal Senoidal con Ruido ($vt = 127$, $vf = 127$)

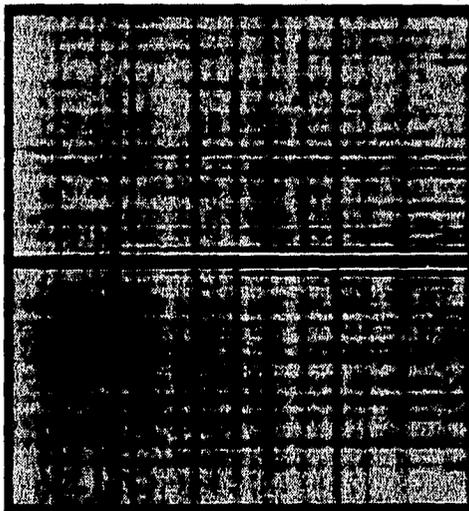


Figura 4.72: Distribución Choi Williams de una Señal Senoidal con Ruido ($vt=127$, $vf=127$)

Tabla 3.7

Parámetros de la Simulación de la Suma de un Chirp con Ruido NPF=128, NPT=128			
Representación	vt	vf	Figura
Espectrograma	63		4.73
Wigner Ville	127		4.74
Pseudo Wigner Ville	25	63	4.75
Choi Williams	25	63	$\sigma = 1,4.76$

Nuevamente se observa que todos los métodos detectan la señal, y que sus diferencias son con respecto a la resolución que presenta cada método y la cantidad de ruido presente. El espectrograma, figura 4.73, es el que presenta menor resolución, y los otros tres métodos restantes tienen muy buena resolución frecuencial, aunque con CW, figura 4.76, se presenta un efecto de rayas verticales. En cuanto a la eliminación de ruido, se observan mejores resultados con la PWVL, figura 4.75. Si disminuimos la varianza del ruido, también se muestran resultados semejantes a los obtenidos en esta simulación, la única diferencia es que se atenúa más el ruido en todas las distribuciones.

Hasta este punto, hemos presentado simulaciones con señales sintéticas con la finalidad de familiarizarnos con el desempeño de los algoritmos tiempo-frecuencia no paramétricos. Como resultado de estas observaciones es importante mencionar que en la mayoría de los casos, los resultados de las distribuciones Wigner Ville, Pseudo Wigner Ville "Suavizada" y Choi Williams presentan una mejor resolución del plano tiempo-frecuencia en general, aunque no podemos descartar el uso del espectrograma completamente. Uno de los inconvenientes que presenta la DWV con respecto al espectrograma es la generación de artefactos en la TFR. Sin embargo, a pesar de este problema, tiene una mejor resolución temporal y frecuencial que el espectrograma. La ventaja principal del espectrograma es que la distribución tiempo-frecuencia obtenida es siempre positiva, cosa que no siempre sucede con las otras TFR's. La única excepción a este caso es cuando la señal de entrada es un chirp, para la cual la DWV es positiva. Una última observación referente a las TFR's que eliminan los artefactos es que el largo de las ventanas temporal y frecuencial determinan el grado de atenuación de los artefactos así como la resolución de la gráfica. Con una ventana temporal de menor longitud que una ventana frecuencial se obtiene una mejor resolución tanto temporal como frecuencial. Respecto a la Distribución Choi Williams, el parámetro σ es el que ayuda a disminuir los artefactos, y se obtiene una mayor atenuación de ellos cuando su valor es 1, y conforme se aumenta este valor, se decrementa el grado de atenuación de los artefactos. Una desventaja que presenta esta distribución es un efecto de rayas verticales muy leve.

Con estas simulaciones, ya se tiene una idea de como es el desempeño de estos algoritmos, con lo cual ahora para comparar su desempeño con los algoritmos paramétricos, se procede a efectuar las mismas simulaciones pero con dichos algoritmos.

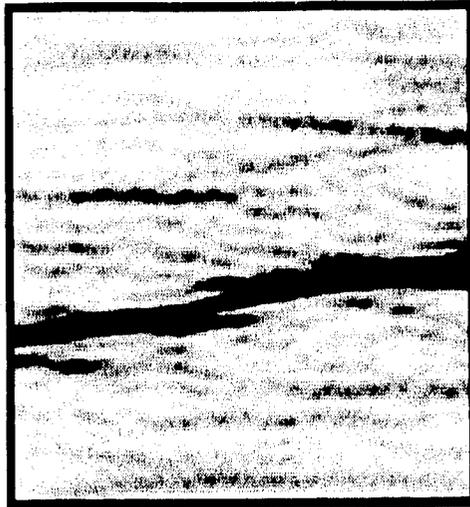


Figura 4.73: Espectrograma de un Chirp con Ruido ($vt = 63$)



Figura 4.74: Distribución Wigner Ville de un Chirp con Ruido ($vt = 127$)

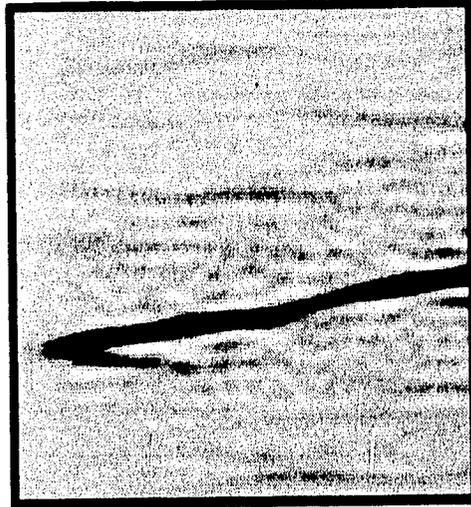


Figura 4.75: Distribución PWVL de un Chirp con Ruido ($vt = 25$, $vf = 63$)



Figura 4.76: Distribución Choi Williams de un Chirp con Ruido ($vt = 65$, $vf = 63$, $\sigma = 1$)

• Algoritmos Adaptables: Simulaciones con Señales Sintéticas

◦ Señales Senoidales

Siguiendo el mismo orden que en las simulaciones anteriores, comenzaremos con la detección de una señal senoidal con frecuencia de 0.5 con los algoritmos adaptables. Los parámetros de las simulaciones efectuadas se muestran en la tabla 3.8:

Tabla 3.8

Parámetros de Simulación			
Modelo de orden 2, NPF=128, NPT=512			
Algoritmo	δ	λ	Figura
Tradicional	.001	0.99	4.77
Rápido	0.001	1	
Rápido	0.01	0.98	

Se muestra en la figura 4.77 como es que estos algoritmos detectan la señal. Las figuras de las otras simulaciones que se indican en la tabla correspondiente no se muestran por ser redundantes, y lo único que varía en ellas es el instante en que se detecta la señal. La señal se detecta más rápidamente con los parámetros de $\delta = 0.001$ y $\lambda = 1$, correspondientes a la figura mostrada. De las simulaciones efectuadas se observa que la señal no se detecta tan rápidamente como con los métodos anteriormente descritos, aunque en la figura 4.77 se constata que este método presenta una muy buena resolución frecuencial y que efectivamente, localiza la señal en la posición correcta. Se observó además que al variar los parámetros de λ y δ , varía la rapidez de detección de la señal así como las variaciones de amplitud del espectro. Visualmente se comprobó que con los parámetros de la simulación mostrada, la amplitud del espectro es más estable que para los otros casos.

◦ Suma de Señales Senoidales

Para esta simulación con una suma de dos señales senoidales de frecuencia 0.3 y 0.4, se efectuaron dos simulaciones de orden cuatro: la primera con el algoritmo tradicional y los mismos parámetros que se usaron en la simulación anterior con este algoritmo, es decir, $\delta = 0.001$ y $\lambda = 0.99$. La segunda simulación se efectuó con el algoritmo rápido con parámetros $\delta = 0.001$ y $\lambda = 0.96$. El propósito de utilizar los mismos parámetros para el algoritmo tradicional es el demostrar que los parámetros que funcionan para una señal no siempre sirven para otra aunque ésta sea similar. Se muestra la gráfica obtenida con el algoritmo rápido, figura 4.78, ya que con esos parámetros se logró una detección más rápida de las señales que con el algoritmo tradicional. En comparación con los métodos tiempo-frecuencia no paramétricos, las gráficas de la PWVL y CW, figuras 4.32 y 4.43, se observa una mejor resolución de los algoritmos adaptables.

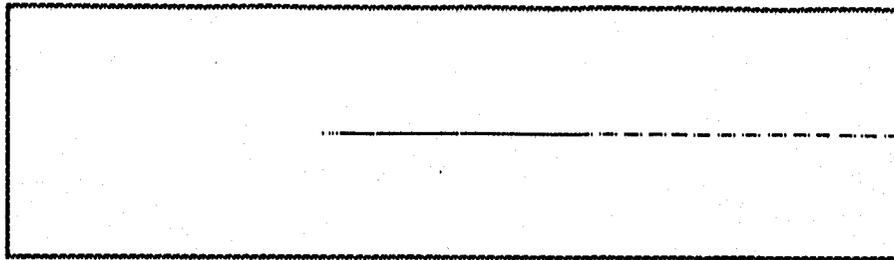


Figura 4.77: Detección de una Señal Senoidal con un Algoritmo Adaptable, (algoritmo rápido de orden 2, $\delta = 0.001$, $\lambda = 1$)

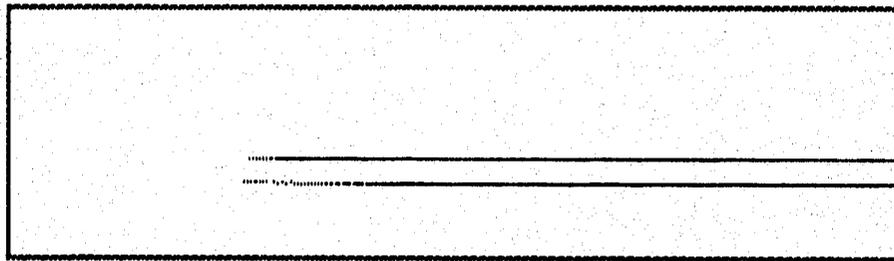


Figura 4.78: Detección de Dos Señales Senoidales con un Algoritmo Adaptable Rápido, de orden 4, $\delta = 0.001$, $\lambda = 0.96$

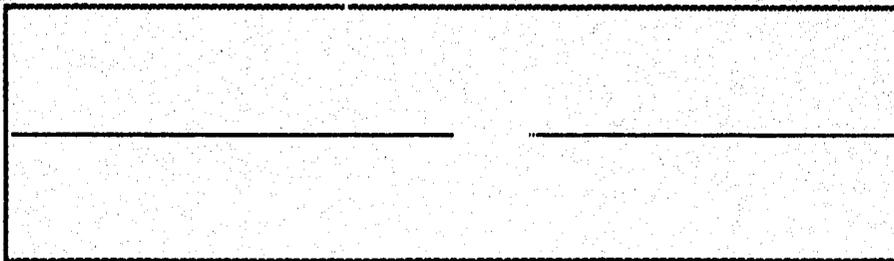


Figura 4.79: Detección del Cambio de Fase en una Señal con un Algoritmo Adaptable Rápido de orden 2, $\delta = 0.001$, $\lambda = 0.96$

◦ Salto de Fase en una Señal Senoidal y Suma de Señales Senoidales con Diferente Fase

Para cuando las dos señales tienen diferente fase, no se muestra ningún cambio en la gráfica, por lo que estos algoritmos no detectan una diferencia de fase entre señales. Sin embargo, cuando existe un cambio de fase muy brusco en una sola señal, que para este caso es de 180 grados como se efectuó en las simulaciones anteriores, sí lo detecta, como se muestra en la gráfica 4.79 obtenida al procesar la señal con el algoritmo rápido con parámetros $\delta = 0.001$ y de $\lambda = 0.96$. Se observa que el espectro es un poco más ancho con respecto a los que se han obtenido con gráficas anteriores, la razón es que se hizo un recorte de los picos de la señal para poder apreciar como es que el algoritmo detecta el cambio de fase. La razón de efectuar este corte de picos es debido a que los valores que se obtienen con este algoritmo tienden a dispararse muy fácilmente. Otra observación a partir de esta gráfica es que se puede apreciar que en realidad los algoritmos no tardan tanto en detectar la señal como se ha apreciado en las gráficas anteriores, sino que tardan un poco en estabilizarse. Este efecto no se presenta en los métodos tiempo-frecuencia no paramétricos.

◦ Simulaciones con Chirps

Al procesar los chirps, los algoritmos adaptables sí detectan bien la señal para un chirp ascendente como se muestra en la gráfica 4.80 obtenida con el algoritmo rápido con un orden 2 y parámetros: $\delta = 0.001$ y $\lambda = 0.96$. Para la suma de chirps, los parámetros $\delta = 0.01$ y $\lambda = 0.98$, con un modelo de orden 4. Se obtiene una gráfica donde apenas son visibles las señales, sobre todo al inicio de la gráfica, por lo que se le aplicó un corte de los picos con lo que se produce la imagen 4.81 que permite apreciar mejor el espectro de las señales.

Comparando estas gráficas con los resultados obtenidos con los métodos tiempo-frecuencia no paramétricos, se muestra que la WVD detecta con mejor resolución al chirp ascendente, y que para la suma de chirps, la ventaja que presentan el algoritmo adaptable es que no genera artefactos, la única limitante es que al dispararse los valores resultantes, se debe ajustar la gráfica.

◦ Señales Compuestas

Al procesar la señal que se utilizó para ejemplificar cambios bruscos en frecuencia y zonas de silencio, el método matricial tradicional muestra en la figura 4.82 que efectivamente sí detecta los cambios de frecuencia en la señal (parámetros de simulación: modelo de orden 2, $\delta = 0.001$, $\lambda = 0.98$). Si se cortan los picos de señal, (figura 4.83) se observa que sí se detecta el cambio en la muestra en que ocurre este fenómeno, aunque tarda en alcanzar la nueva frecuencia a la que se encuentra el segmento de la señal. En la zona de silencio, se observa que la amplitud del espectro disminuye levemente. Nuevamente, se obtienen mejores resultados con las representaciones tiempo-frecuencia descritas anteriormente.

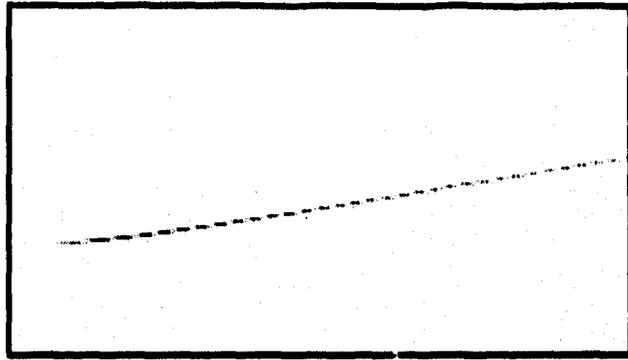


Figura 4.80: Detección de un Chirp con un Algoritmo Adaptable Rápido de orden 2, $\delta = 0.001, \lambda = 0.96$



Figura 4.81: Detección de un Chirp con un Algoritmo Adaptable Rápido de orden 4, $\delta = 0.001, \lambda = 0.98$

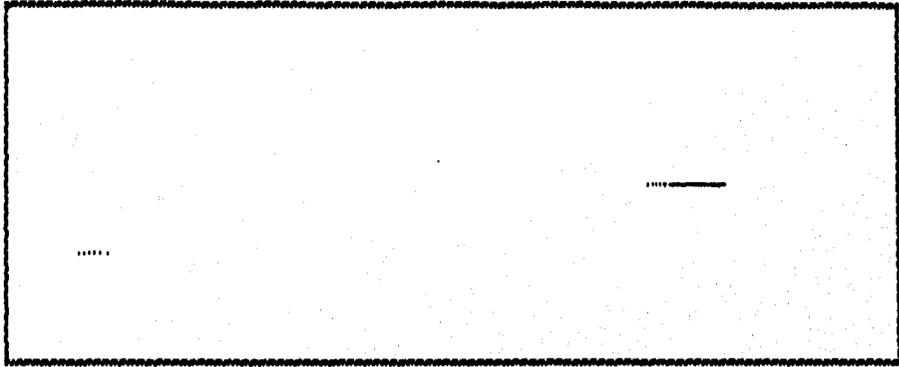


Figura 4.82: Detección de una Señal con Cambios Bruscos de Frecuencia (Método Matricial, orden 2, $\delta = 0.001$, $\lambda = 0.98$)

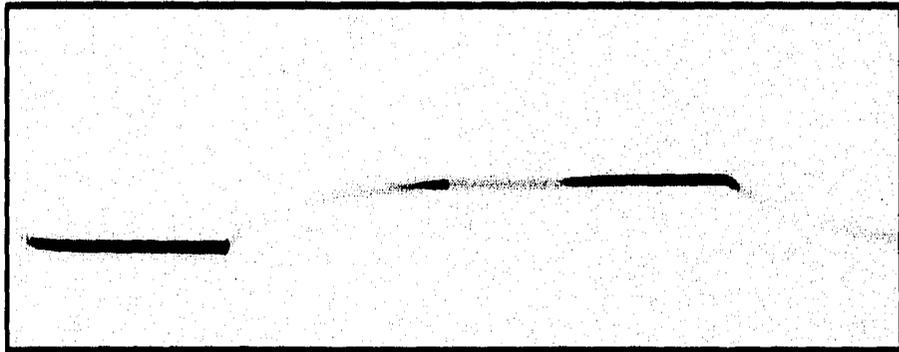


Figura 4.83: Detección de una Señal con Cambios Bruscos de Frecuencia (Método Matricial, orden 2, $\delta = 0.001$, $\lambda = 0.98$)

o Señales con Ruido

Una prueba con señales ruidosas muestra que cuando a una señal senoidal con frecuencia de 0.5 se le agrega ruido gaussiano con varianza $\sigma = 1$, se necesita utilizar un orden mayor para poder detectar la señal. En este caso, para el algoritmo matricial tradicional con parámetros de orden 6, $\lambda = 0.98$ y $\delta = 0.01$ la señal apenas es visible (figura 4.84). Un corte de picos muestra que sí detecta la señal (gráfica 4.85) y que existen variaciones en la amplitud del espectro. En este caso, los métodos descritos en el inciso anterior, presentan mejor resolución que los métodos adaptables. Sin embargo, si a esta señal le aplicamos el método de Leroux con un orden 8, se observa que aunque la resolución frecuencial se pierde, se detecta la señal, figura 4.86.

Para el caso de chirps con ruido, se presentan dos simulaciones: cuando el ruido tiene una varianza de 0.5 y otra con varianza de 0.1. En el primer caso, el método tradicional detecta la señal levemente y sigue los cambios de frecuencia de la señal, como se muestra en la figura 4.87. Si se hace este análisis con un modelo de orden 4 con el algoritmo de Leroux, figura 4.88 el espectro es más marcado, pero no está detectado en la frecuencia correcta. Para cuando la varianza del ruido disminuye a 0.1, se procesa la señal con el algoritmo rápido de orden 4, con parámetros $\delta = 0.001$ y $\lambda = 0.96$, figura 4.89. La señal se detecta mejor que en el caso anterior. Para esta simulación, el desempeño de los algoritmos tiempo-frecuencia no paramétricos presenta mejores resultados en general que los algoritmos adaptables.

Tabla 3.9

Parámetros de Simulación para Chirps con Ruido				
NPF=128, NPT=256				
Varianza del Ruido = 0.5				
Algoritmo	Orden	δ	λ	Figura
Tradicional	6	0.01	0.98	4.87
Leroux	4			4.88
Varianza del Ruido = 0.1				
Algoritmo	Orden	δ	λ	Figura
Rápido	4	0.001	0.96	4.89

De las simulaciones efectuadas, se observa que los algoritmos adaptables son muy sensibles a los valores de los parámetros δ y λ . La ventaja que presentan sobre los métodos tiempo-frecuencia no paramétricos es el mostrar una representación tiempo-frecuencia del espectro sin artefactos, muchas veces con mejor resolución, dependiendo del tipo de señal.

Hasta este punto se han efectuado simulaciones con señales sintéticas para los dos tipos de métodos tiempo-frecuencia. En el siguiente inciso se presentan los resultados obtenidos con señales reales, en donde nuevamente se efectúan comparaciones entre los métodos ya utilizados anteriormente.

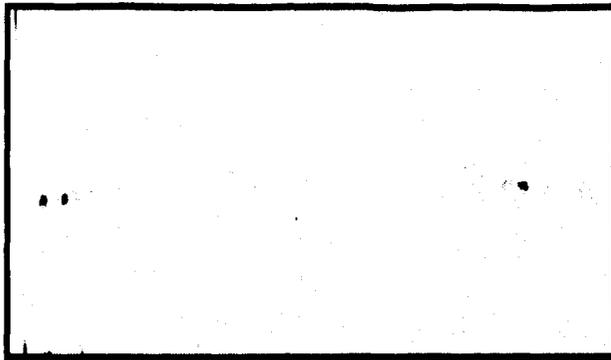


Figura 4.84: Detección de una Señal Senoidal en Presencia de Ruido (algoritmo matricial, orden 6, $\delta = 0.01$, $\lambda = 0.98$)

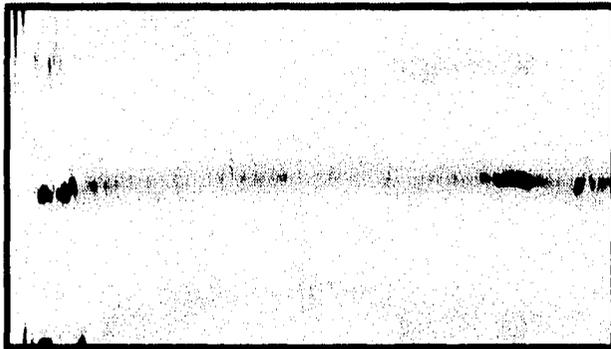


Figura 4.85: Detección de una Señal Senoidal en Presencia de Ruido (algoritmo matricial, orden 6, $\delta = 0.01$, $\lambda = 0.98$)

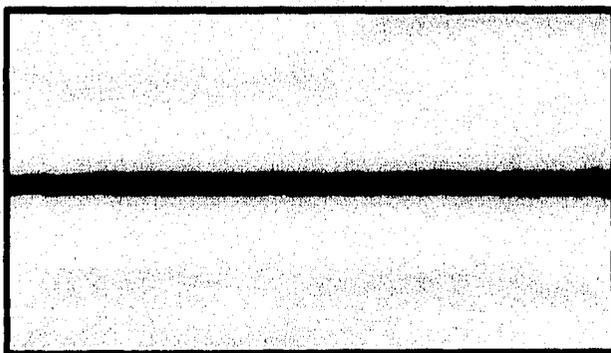


Figura 4.86: Detección de una Señal Senoidal en Presencia de Ruido (algoritmo de Leroux, orden 8)



Figura 4.87: Detección de un Chirp con Ruido (algoritmo matricial, orden 6, $\delta = 0.01$, $\lambda = 0.98$)



Figura 4.88: Detección de un Chirp con Ruido (algoritmo Leroux, orden 4)

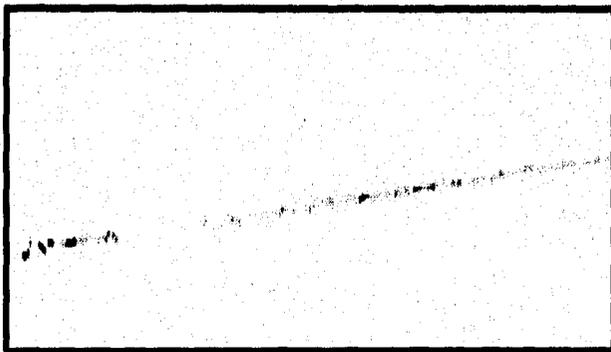


Figura 4.89: Detección de un Chirp con Ruido (algoritmo rápido, orden 4, $\delta = 0.001$, $\delta = 0.93$)

4.3.2 Simulaciones con Señales Reales

• Señales Electroencefalográficas (EEG)

Otra manera de evaluar el desempeño de los diferentes métodos tiempo-frecuencia es aplicarlos a señales reales. En este caso, se presentan dos tipos de señales: electroencefalográficas (también conocidas como EEG) y de voz. La primera señal que se analiza es un segmento de una señal EEG, que en este caso tiene una longitud de 1024 muestras.

Tabla 3.10

Parámetros de Simulación para Señales EEG NPF=128, NPT=512			
Representación	vt	vf	Figura
Espectrograma	63		4.90
Wigner Ville	67		4.91
Pseudo Wigner Ville	67	67	4.92
Choi Williams	67	71	$\sigma = 1,4.93$
Algoritmo	Orden		Figura
Leroux	16		4.94
Leroux	20		4.95

Las señales EEG se caracterizan por estar concentradas en bajas frecuencias [ZEP95], como se muestra en el espectrograma de la figura 4.90 donde se observan componentes frecuenciales concentrados en la parte baja de la gráfica. ¿Cuales de estos componentes son reales? Aplicando la DWV a la señal se obtiene la figura 4.91. Se observa que efectivamente, existen muchos componentes frecuenciales, pero éstos a su vez generan una gran cantidad de artefactos, haciendo la gráfica poco legible. Eliminando los artefactos con PWVL o con CW, figuras 4.92 y 4.93, se obtiene una versión filtrada del espectrograma, donde se distinguen mejor los componentes de la señal. Para los métodos de estimación espectral paramétrica se utiliza un orden de 16 para estimar este tipo de señales. Efectuando una comparación con el algoritmo de Leroux con modelos de orden 16 y 20, figuras 4.94 y 4.95 respectivamente, se obtienen gráficas tiempo-frecuencia más claras que las anteriores, en donde se observan dos componentes bien definidos, y en la figura 4.95, se detecta un posible tercer componente.

La información que presentan los métodos tiempo frecuencia para esta señal es muy parecida en todos los casos. La diferencia es que en algunos casos, la imagen obtenida contiene más ruido que en otros, por ejemplo en el espectrograma, en donde algunos efectos causados por la ventana o por ruido, se podrían interpretar como señal. Cabe mencionar que no se presentan las simulaciones efectuadas con los algoritmos adaptables ya que no tienen un buen desempeño con estas señales.

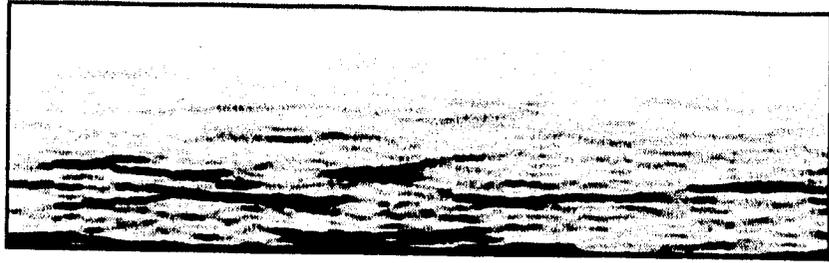


Figura 4.90: Espectrograma de una Señal EEG ($vt = 63$)



Figura 4.91: Distribución Wigner Ville de una Señal EEG ($vt = 67$)

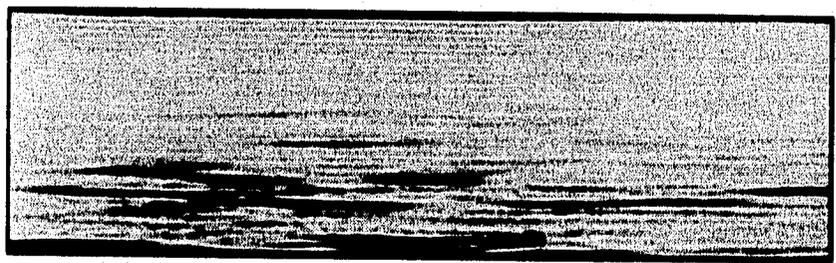


Figura 4.92: Distribución Pseudo Wigner Ville de una Señal EEG ($vt = 67, vf = 67$)

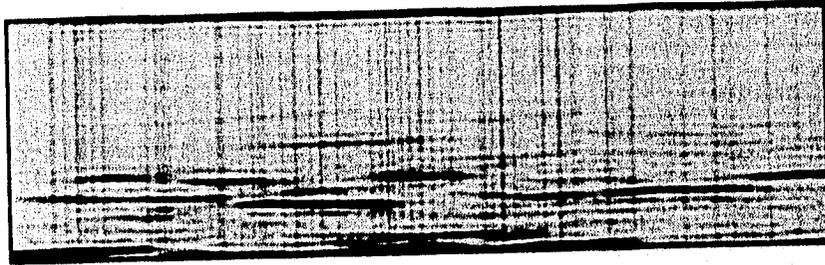


Figura 4.93: Distribución Choi Williams de una Señal EEG ($vt = 67$, $vf = 71$, $\sigma = 1$)

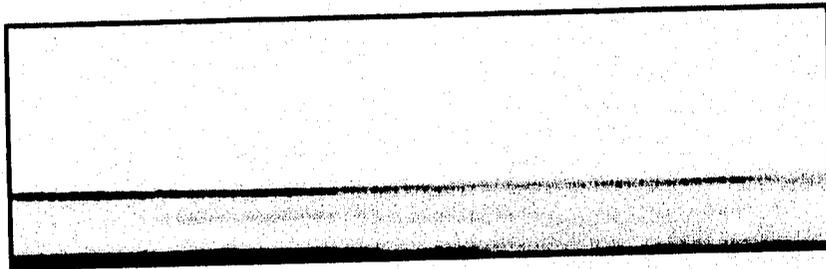


Figura 4.94: Estimación de una Señal EEG por el Método de Leroux (orden 16)

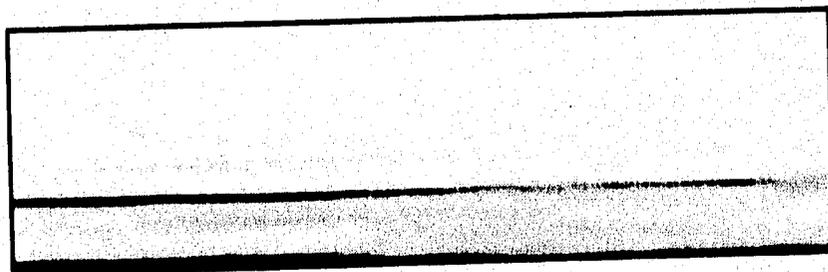


Figura 4.95: Estimación de una Señal EEG por el Método de Leroux (orden 20)

• Señales de Voz

Un resultado similar se obtiene para las señales de voz, para las cuales se grabaron dos segmentos: la palabra "uno" y la palabra "dos", muestreadas a una frecuencia de 8 KHz. Los parámetros de simulación utilizados en los análisis de cada palabra se muestran en las tablas 3.11 y 3.12.

Observando los resultados obtenidos para ambos segmentos de señal, figuras 4.96 - 4.109, nuevamente se observa que los componentes frecuenciales están ubicados en la parte baja del plano tiempo-frecuencia, es decir, son de baja frecuencia. Analizando las gráficas obtenidas para la palabra "uno", el espectrograma, figura 4.96, es muy claro, aunque presenta un poco de ruido. La DWV, figura 4.97 muestra los mismos componentes solo que nuevamente se generan varios artefactos que hacen un poco ilegible la distribución. Un análisis con métodos de estimación paramétrica muestra que conforme se aumenta el orden del estimador, se crea un mayor número de componentes, lo que puede generar un poco de confusión al momento de interpretar las gráficas. Tomando como referencia el orden 10 que es el que normalmente se utiliza para señales de voz, figura 4.100, se observa entonces que aparentemente solo existen dos componentes, aunque con modelos de orden mayor (16 y 20, mostrados en las figuras 4.101 y 4.102 respectivamente) se aprecia que algunos componentes no son en realidad uno solo sino dos. Al procesarla con PWVL o CW, figuras 4.98 y 4.99, se muestra un mejor resultado. La imagen obtenida muestra un tipo de espectrograma filtrado, en el cual se eliminan algunos efectos causados por la ventana en el espectrograma. Resultados similares se obtienen de las simulaciones efectuadas con la palabra "dos".

Tabla 3.11

Parámetros de Simulación para Señales Voz			
Palabra Digitalizada: "Uno"			
NPF=128, NPT=4000			
Representación	vt	vf	Figura
Espectrograma	127		4.96
Wigner Ville	127		4.97
Pseudo Wigner Ville	127	127	4.98
Choi Williams	127	127	$\sigma = 1,4.99$
Algoritmo	Orden		Figura
Leroux	10		4.100
Leroux	16		4.101
Leroux	20		4.102

Tabla 3.12

Parámetros de Simulación para Señales Voz Palabra Digitalizada: "Dos" NPF=128, NPT=4000			
Representación	vt	vf	Figura
Espectrograma	127		4.103
Wigner Ville	127		4.104
Pseudo Wigner Ville	127	127	4.105
Choi Williams	127	127	$\sigma = 1,4.106$
Algoritmo	Orden		Figura
Leroux	10		4.107
Leroux	16		4.108
Leroux	20		4.109

Nuevamente en estas simulaciones con señales voz se constata que todos los métodos tiempo-frecuencia muestran información similar, algunos con más resolución frecuencial que otros, pero el contenido básico de información se preserva. De estas simulaciones, la distribución Wigner Ville es la más difícil de interpretar debido a la cantidad de artefactos que se generan. Probablemente con la ayuda de alguna herramienta de despliegue con mayor resolución se pueda mejorar la gráfica y su interpretación.

Damos por concluido la sección correspondiente a las simulaciones con señales. Se han efectuado comparaciones entre los diferentes resultados obtenidos con las herramientas vistas en este documento y con esto nos damos cuenta que dependiendo del tipo de señal se debe de escoger el método a aplicar. Por ejemplo, a una señal con muchos componentes no es muy recomendable aplicarles una DWV a menos que estén lo suficientemente separados como para que la gráfica resultante sea legible. Uno de los métodos con los que se obtiene una mejor resolución son los métodos paramétricos, pero una desventaja que tienen es que son muy difíciles de ajustar. Otra ventaja que tienen es que con sólo guardar los coeficientes para cada instante de tiempo, se puede reconstruir la distribución tiempo-frecuencia, por lo que la cantidad de datos a almacenar es menor que almacenar toda el plano generado con alguno de los métodos no paramétricos. Sin embargo, no siempre tienen un buen desempeño con todas las señales, como se ha demostrado para algunas señales, pero esto no significa que esta herramienta sea imprecisa o que no pueda aplicarse a otros tipos de señales, simplemente que es un algoritmo más sensible a las variaciones de la señal por lo que se debe tener cuidado al ajustar sus parámetros.

A continuación, en la siguiente sección se muestran algunas de las áreas en que se están aplicando estos algoritmos. Continuamente surgen nuevas aplicaciones por lo que sería difícil citarlas todas, razón por la cual solo se incluyeron algunos ejemplos representativos de las aplicaciones.

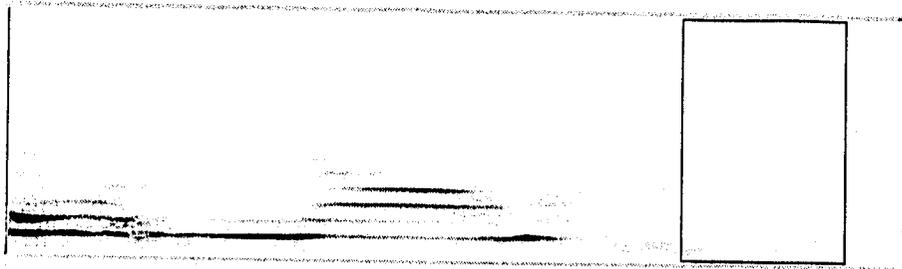


Figura 4.96: Espectrograma de la Palabra "uno" ($vt = 127$)

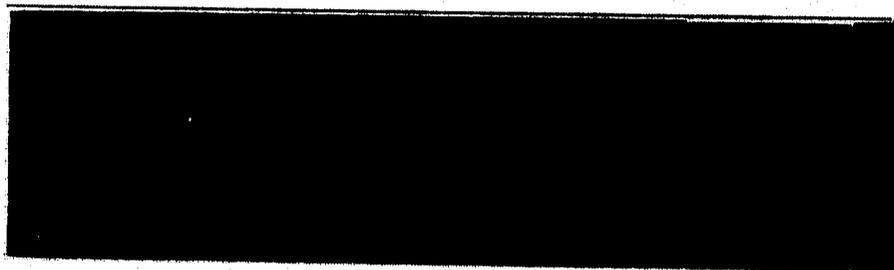


Figura 4.97: Distribución Wigner Ville de la Palabra "uno" ($vt = 127$)

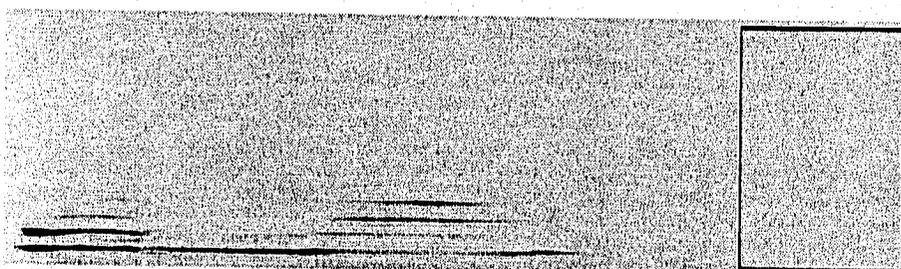


Figura 4.98: Distribución Pseudo Wigner Ville de la Palabra "uno" ($vt = 127, vf = 127$)



Figura 4.99: Distribución Choi Williams de la Palabra "uno" ($vt = 127, vf = 127, \sigma = 1$)



Figura 4.100: Estimación Paramétrica de la Palabra "uno" con un Modelo de Orden 10 (algoritmo de Leroux)

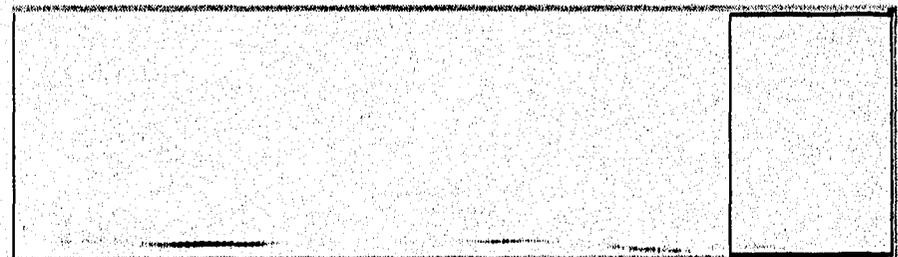


Figura 4.101: Estimación Paramétrica de la Palabra "uno" con un Modelo de Orden 16 (algoritmo de Leroux)



Figura 4.102: Estimación Paramétrica de la Palabra "uno" con un Modelo de Orden 20 (algoritmo de Leroux)



Figura 4.103: Espectrograma de la Palabra "dos" ($vt = 127$)

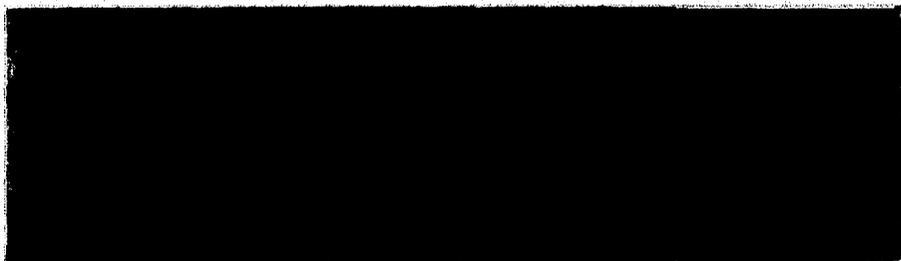


Figura 4.104: Distribución Pseudo Wigner Ville de la Palabra "dos" ($vt = 127$)

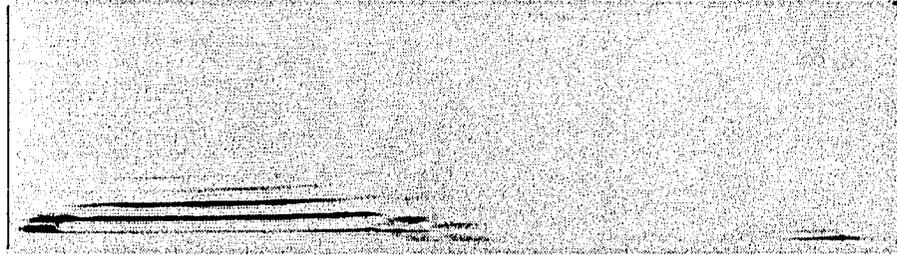


Figura 4.105: Distribución Pseudo Wigner Ville de la Palabra "dos" ($vt = 127, vf = 127$)

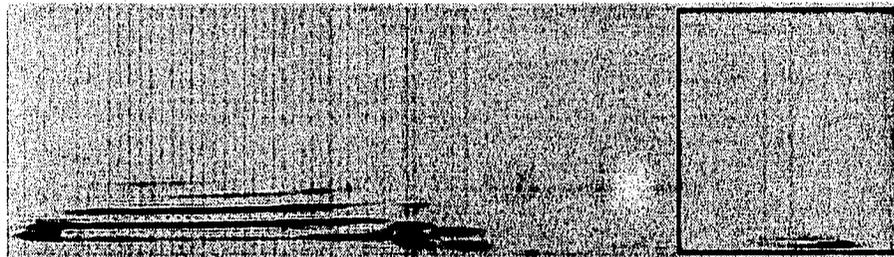


Figura 4.106: Distribución Choi Williams de la Palabra "dos" ($vt = 127, vf = 127, \sigma = 1$)

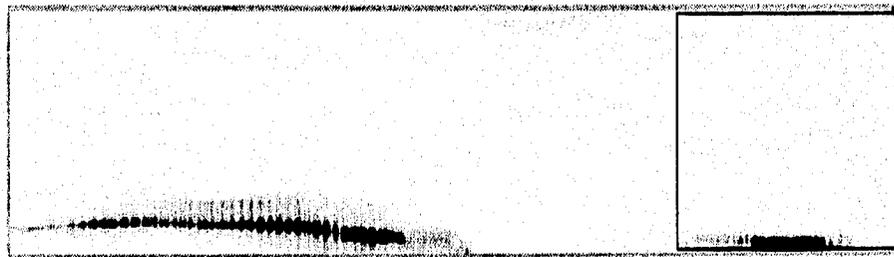


Figura 4.107: Estimación Paramétrica de la Palabra "dos" con un Modelo de Orden 10 (algoritmo de Leroux)

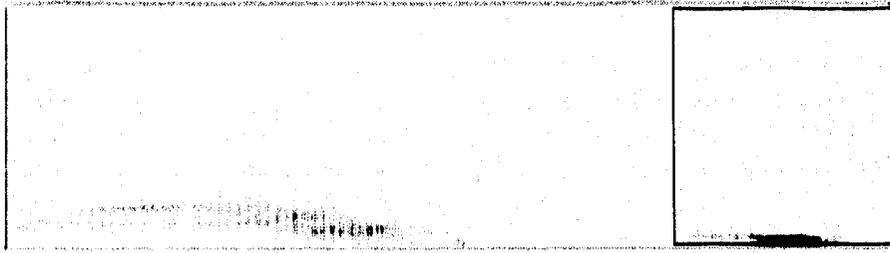


Figura 4.108: Estimación Paramétrica de la Palabra "dos" con un Modelo de Orden 16 (algoritmo de Leroux)

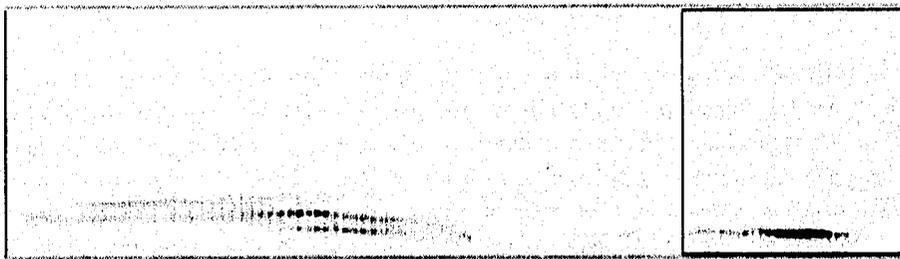


Figura 4.109: Estimación Paramétrica de la Palabra "dos" con un Modelo de Orden 20 (algoritmo de Leroux)

4.4 Aplicaciones

Las distribuciones tiempo-frecuencia se han aplicado a casi todos los campos en donde existen señales estacionarias [COH89]. El propósito de las aplicaciones varía considerablemente: desde la simple representación gráfica de resultados en busca de obtención de una mayor información, hasta la manipulación sofisticada de la distribución. Generalmente las aplicaciones se pueden categorizar en tres metodologías:

- Cálculo de la distribución, para observar si revela más información que otras herramientas.
- Uso de una propiedad particular de la distribución que represente de una manera robusta y clara el contenido tiempo-frecuencia para esta propiedad, por ejemplo, correlacionar la frecuencia instantánea con alguna cantidad física que se desea obtener.
- Utilizar la distribución como un portador de la información de la señal, sin importar si la distribución en realidad representa la densidad de energía en el plano tiempo-frecuencia.

Muchas de las aplicaciones no están dentro de algunas de las categorías descritas anteriormente, pero siempre es importante recordarlo ya que el éxito o fracaso del uso de una distribución en una aplicación en particular no implica el mismo resultado en otra. Un claro ejemplo de esto es la DWV en el análisis de voz, en el cual es difícil de interpretar, pero puede ser útil en otras áreas. A manera de ejemplo, presentamos a continuación algunas de las aplicaciones en donde se están utilizando métodos tiempo-frecuencia.

• Biomedicina

- Señales Electroencefalográficas (EEG)

Uno de los ejemplos de aplicación de estas representaciones tiempo-frecuencia se está utilizando para estudiar la información no estacionaria en señales EEG como ayuda en la determinación del grado de profundidad de anestesia. Aunque existen indicios que le indican al anestesista el grado de profundidad de la anestesia del paciente (como el pulso, la cantidad de transpiración, la presión sanguínea, etc.), muchos de estos signos son inconstantes con respecto a la profundidad de anestesia. El uso de otras sustancias como son los vasodilatadores y bloqueadores neuromusculares disminuyen estos signos. Además, muchas veces aunque se presentan estos signos, el paciente no está completamente dormido, y puede presentarse un fenómeno conocido como "awareness" que indica que el paciente se conscientiza mientras se efectúa la intervención quirúrgica, con lo que se pueden presentar efectos posteriores traumáticos de largo plazo. Se han trabajado con señales obtenidas de perros con diferentes grados de anestesia, en cuyo caso se clasificaron las señales de grado 0 en caso de que éstos respondieran a un estímulo y de grado 1 en caso de no obtener dicha respuesta. El grado de profundidad cero se localiza dentro de las frecuencias 1-3.5 Hz y de 3.5 a 7.5 Hz). Se demuestra que bajo ciertas condiciones de anestesia las representaciones tiempo-frecuencia muestran un mejor desempeño que la transformada de

Fourier de tiempo corto [NAY94].

– **Obstrucción de Arterias**

Estudios previos muestran que las arterias parcialmente obstruidas producen cierto sonido debido a turbulencias en el flujo sanguíneo. Si se pudieran detectar estos sonidos de las arterias coronarias externamente, se podría efectuar una detección del grado de oclusión de una manera simple. El procedimiento común es la inserción de un catéter a través de una vena (generalmente la femoral) que llega hasta el corazón, donde se libera una tintura para observar las estructuras cardiacas. Se ha mostrado que las arterias obstruidas presentan una mayor cantidad de energía en el rango de frecuencias de 200 y 800 Hz. Existe un experimento efectuado con arterias femorales de perros parcialmente ocluidas, con los cuales se trató de detectar el grado de estenosis, procesando las señales obtenidas a través de la Transformada de Fourier y métodos de estimación paramétrica. Se muestra en [AKA94] que los métodos de estimación paramétrica nos proporcionan mayor información que el simple uso de la Transformada de Fourier, sobre todo cuando el grado de estenosis supera el 85% .

– **Contracción Muscular**

Cuando se contrae un músculo, se produce un sonido que no se debe a la vibración del músculo como una cuerda simple. Se ha desarrollado un trabajo consistente en correlacionar las propiedades del sonido con las características del músculo. Si algún experto puede interpretar los cambios que se presentan en las gráficas de resultados, también se podría utilizar como herramienta de diagnóstico. Un ejemplo más concreto son los estudios que se han efectuado cuando un músculo se contrae o está distendido. Se pueden reproducir las características generales de un músculo a otro y reflejar algunas características de contracción muscular [COH89].

• **Radar**

El radar de apertura sintética inversa o ISAR (Inverse Synthetic Aperture Radar) es un radar de imágenes que utiliza el movimiento del objeto o blanco para generar imágenes en un plano. Tradicionalmente se utiliza la FFT para generar dichas imágenes pero su calidad se degrada ya que la imagen se filtra. Una forma de mejorar la resolución es utilizando la Distribución Wigner Ville, con lo que se obtienen gráficas más nítidas [CHE95].

Otra aplicación en este campo es la caracterización de las señales de eco de aviones comerciales, en donde se buscan sus características invariantes en las TFR's para extraer una firma frecuencial que permita identificar el tipo de avión. También se pretende efectuar una relación entre algunos de los parámetros obtenidos con las TFR's y asociarlos a fenómenos físicos generados por el avión, como son la aceleración [CUO93]. Una razón más para el uso de este análisis ha sido el poder extraer

información más precisa que con los métodos tradicionales, ya que la señal con que se trabaja está submuestreada (a una frecuencia de 1 KHz), una limitante de estos sistemas. [CUO95].

- **Oceanografía**

Las señales oceanográficas son no estacionarias, por lo que no pueden analizarse por medio de las técnicas tradicionales de Fourier, que tienden a perder resolución espacial. Ejemplos de este tipo de señales se obtienen cuando, en un intento de determinar la turbulencia en un cuerpo, se hacen mediciones de microestructuras del gradiente de temperatura (temperature-gradient microstructure). Se calculan las frecuencias instantáneas locales y máximas de las señales en función de la profundidad, y estas frecuencias están relacionadas entonces a la disipación de energía cinética turbulenta [COH92].

- **Voz**

La voz es una de las señales no estacionarias más complejas y aplicación natural de este tipo de distribuciones. Como se observó en las simulaciones, la distribución Wigner Ville es muy difícil de utilizar para cuestiones de interpretación con respecto al espectrograma, pero con la versión suavizada se pueden detectar y extraer los parámetros relevantes, con lo que se puede desplegar la estructura de formantes de voz y es además, un buen clarificador de sonidos de voz [COH89].

- **Reconocimiento de patrones**

Aunque se utiliza la distribución como una representación bidimensional, en este caso no representa necesariamente el plano tiempo-frecuencia. La interpretación que se le asocia comúnmente (representación de la energía de una señal) no se requiere en esta aplicación, ya que en este caso se considera el problema de detección binaria, en donde se debe tomar una decisión acerca de la existencia o no de una señal, en el caso particular de [COH89], una señal con ruido aditivo [COH89].

- **Sonar**

Otra aplicación que se le ha dado a las representaciones tiempo-frecuencia es el análisis de los sistemas activos de eco-localización de sonar utilizados por murciélagos. Estos emiten señales AM-FM de diferentes tipos para las fases de caza, aproximación, persecución y captura de una presa. Se muestra que cada fase presenta características frecuenciales diferentes: en la fase de caza, el murciélago emite señales de frecuencia baja; en la primera parte de la señal de caza, existe una señal FM que decrece su frecuencia instantánea rápidamente para estimar la posición, la segunda parte es una frecuencia semiconstate que permite estimar su velocidad. Ya que se ha localizado la presa, emite una sucesión de señales de aproximación que se caracterizan por el decremento gradual de la duración de la señal obtenida al disminuir el componente de frecuencia semiconstante de la señal de caza. Con el

uso de representaciones tiempo-frecuencia, se estima la frecuencia instantánea de la señal. Muchas de ellas tienen un eco que se traslapa en el tiempo con la señal del murciélago, generando desviaciones en la frecuencia instantánea de la señal. Para aislar el término de interés se multiplica la representación tiempo-frecuencia utilizada (en este caso la PWVL) con una máscara tiempo-frecuencia. Como en el plano tiempo-frecuencia los ecos no llegan a encimarse significativamente con la señal de interés, la máscara es capaz de eliminar los ecos que corrompen a la señal [HLA92].

• Otros

- **Identificación de Objetos** En muchas situaciones de localización, como en las aplicaciones sísmicas, de radar, sonar y de eco, la identificación del blanco activo se efectúa al comparar una señal conocida que ha sido emitida con la señal reflejada por el objeto. Se han utilizado la PWVL para analizar el campo acústico disperso inducido por una esfera delgada inmersa en agua. Las ondas que regresan dependen de las propiedades físicas y de la geometría del objeto. Adicionalmente al eco inicial, existen otras ondas acústicas que viajan alrededor de la superficie de la esfera una o más veces antes de que sean reflejadas. Este tipo de ondas son dispersas (indica que tiene componentes de diferentes frecuencias que viajan a diferente velocidad de propagación). Los métodos clásicos solo efectúan el análisis en un dominio, ya sea el dominio temporal o espectral. Las técnicas de análisis temporal se utilizan, por ejemplo, para analizar el tiempo inicial de llegada del eco. Desafortunadamente, la atenuación de las frecuencias altas y la naturaleza dispersiva de las ondas causan que los ecos individuales cambien de forma y se traslapen. Esto dificulta la estimación del tiempo de llegada de los ecos. Las técnicas espectrales se utilizan para analizar frecuencias de resonancia inducidas al blanco, pero no se pueden tomar en cuenta los ecos de naturaleza dispersa, ya que la señal está compuesta por un gran número de componentes individuales que se superponen tanto en tiempo como en frecuencia. El plano tiempo-frecuencia permite el análisis de la señal en ambos dominios. Además de proporcionar toda la información que se puede obtener con un análisis de la señal en cada dominio, se obtiene otras características que varían con el tiempo, como la velocidad. Basándose en una PWVL de la señal, se construyó una firma tiempo-frecuencia que indica claramente el tiempo de llegada del eco, la naturaleza dispersiva de las ondas y varias frecuencias de resonancia, que pueden ser útiles para la identificación del objeto y su caracterización [HLA92].

- **Firmas Frecuenciales**

En el ejemplo anterior, se encontró una firma frecuencial para caracterizar a un determinado objeto. En este tipo de aplicaciones se trata de encontrar características que permita diferenciar a un objeto entre otros similares. Por ejemplo, se han hecho estudios con señales de dos cilindros de una máquina diesel, para tratar de diferenciar uno de otro con solo observar la señal [BOA91].

4.5 Conclusiones

Hemos visto en este capítulo algunas sugerencias de implementación de los algoritmos tiempo-frecuencia no paramétricos, cuya ventaja es que al ser su estructura muy similar para todos ellos, es fácil programar el básico (la distribución Wigner Ville por ejemplo) y que sirva como base para programar e implementar el resto. Como su estructura hace uso de la Transformada Rápida de Fourier (FFT), se espera obtener resultados semejantes al procesar las señales con estos algoritmos. Prueba de ellos se muestra en las simulaciones efectuadas, ya que las gráficas resultantes son muy parecidas entre sí. La información general es congruente, es decir, con todos los métodos se detectan las señales, aunque en algunos casos, algún método, ya sea paramétrico o no, se desempeña mejor que los demás. Esto indica que se debe aplicar un método dependiendo del tipo de señal que se quiera procesar. Una observación es que los parámetros de los métodos adaptables necesitan ser ajustados para cada tipo de señal que se quiera procesar, ya que los parámetros que sean adecuados a una señal en particular no aseguran que funcionen para otra señal similar, como se constata en las simulaciones de este capítulo. El buen desempeño de estas técnicas ha logrado crear un interés cada vez mayor en la búsqueda de nuevas aplicaciones en diferentes áreas de trabajo, así como el diseño de herramientas que permitan mejorar su resolución, o nuevas TFR's cuyo desempeño supere a las existentes.

Capítulo 5

Resultados y Conclusiones

Hemos presentado algunos de los métodos tiempo-frecuencia más utilizados, tanto paramétricos como los no paramétricos. Se ha insistido un poco más en los métodos no paramétricos debido al auge que han tomado recientemente, y por ello se consideró necesario realizar un estudio de las características de estas herramientas para evaluar el por qué han retomado tanta importancia en la actualidad.

De los resultados obtenidos, no se puede decir que una distribución en particular sea la mejor para aplicarla a todas las señales. Tampoco se puede descartar alguna de ellas, por ejemplo el espectrograma, porque siempre nos servirá como una referencia mientras no seamos capaces de comprender e interpretar completamente la información que nos proporcionan estas herramientas tiempo-frecuencia no paramétricas. Lo que sí se puede afirmar es que dependiendo del tipo de señal que se va a procesar, se debe elegir la distribución tiempo-frecuencia a utilizar. Como ejemplo, describimos algunas situaciones:

- **Detección de señales con ruido :**

Todos los métodos utilizados detectan las señales en presencia de ruido, aunque algunos de ellos tienen mejor desempeño que otros. En caso de que la señal esté compuesta por múltiples componentes, lo mejor es evitar el uso de la Distribución Wigner Ville y utilizar alguna de las Distribuciones que suavizan los efectos de los artefactos, como son la Distribución Pseudo Wigner Ville "Suavizada" o la Choi Williams. Otra opción es el uso de uno de los métodos paramétricos.

- **Detección de cambio de fase en una señal :**

Este efecto solo es visible en algoritmos como el adaptable y en la Distribución Wigner Ville. En un espectrograma, este efecto no se aprecia.

- Diferencia de fase entre dos señales :

Esta información la proporcionan los artefactos existentes en la Distribución Wigner Ville, por lo que en este caso se recomienda utilizar dicho método tiempo-frecuencia. Ni el espectrograma ni alguno de los métodos paramétricos detectan este fenómeno.

- Señales tipo "Chirp" :

Si se está trabajando con señales de este tipo, el espectrograma es el que presenta menor resolución frecuencial con respecto a los otros métodos evaluados. Los algoritmos adaptables también detectan una señal chirp aunque se observan leves variaciones en la amplitud del espectro, pero la mejor resolución frecuencial para un solo chirp se obtiene con la Distribución Wigner Ville. En cuanto a la suma de chirps, se puede decir que es difícil eliminar el problema de los artefactos con las TFR's no paramétricas, pero se obtienen resultados aceptables. Una posible solución puede ser trabajar en la búsqueda de parámetros estables para los algoritmos adaptables para obtener una distribución tiempo-frecuencia sin artefactos.

- Resolución temporal y frecuencial:

Tal vez muchos de los algoritmos mejoren su desempeño con el uso de ventanas diferentes a las rectangulares, efecto con el que no se experimentó durante la realización de este trabajo, ya que siempre se tuvo como objetivo principal el mostrar las generalidades acerca del desempeño de estas herramientas tiempo-frecuencia. Lo que sí podemos decir acerca de su funcionamiento es que en general, mientras más pequeña sea la ventana temporal se obtendrá una mejor resolución temporal, y mientras más grande sea la ventana frecuencial, la resolución frecuencial será mejor, es decir que la resolución temporal se mejora cuando la longitud de la ventana temporal es mucho menor con respecto a la frecuencial pero hasta un cierto límite. Es importante recordar que la longitud de la ventana temporal tiene un límite inferior establecido por la desigualdad de Heisenberg-Gabor. Si dicho límite no se cumple, se generan distorsiones en la representación tiempo-frecuencia. Una observación importante sobre el espectrograma es que efectivamente, no existe una buena resolución temporal y en cuanto a la resolución frecuencial, en los casos de señales como el chirp, está en función del largo de la ventana. El tamaño óptimo se puede encontrar siempre que se cuente con el parámetro de modulación de dicha señal antes de efectuar el análisis de la señal, algo que difícilmente sucede.

Para los algoritmos adaptables sucede un fenómeno diferente: poseen muy buena resolución frecuencial, solo que es difícil que sigan a la señal cuando esta tiene múltiples componentes frecuenciales, ya que al variar el número de componentes de la señal con respecto al paso del tiempo, es posible que exista una incongruencia entre la cantidad de componentes existentes en ese segmento y el orden del modelo

que se está utilizando para dicha señal, fenómeno que se presentó con las señales reales y compuestas. Una solución puede ser el uso de algoritmos adaptables por segmentos, que permitan un mejor seguimiento de la señal a modelar.

- Implementación:

Aparentemente, los métodos no paramétricos son más fáciles de implementar, debido a la facilidad de programación con respecto a los métodos paramétricos. En estos últimos, la cantidad de ecuaciones pueden generar errores de cálculo, que repercuten en el desempeño general del algoritmo y en algunos casos, lo hacen inestable y es posible que no llegue a converger. También se puede afirmar que este tipo de algoritmos son muy sensibles al cambio de parámetros y necesitan ajustarse. Los parámetros que pueden funcionar a una señal no son los mismos que le servirán a otras y por ende, hay que conocer muy bien el tipo de señales con que se está trabajando para poder escoger los parámetros adecuadamente.

Para los métodos no paramétricos, la única diferencia es el kernel propio a cada distribución. El algoritmo más sencillo de implementar es el Espectrograma. Le siguen en complejidad las Distribuciones Wigner Ville, Pseudo Wigner Ville y Choi Williams. La facilidad de estas distribuciones es que el uso de la FFT hace más rápido el cálculo. Existen algunos trabajos en donde se estudia la posibilidad de aumentar la rapidez de cálculo de estas distribuciones.

Otra observación concerniente a los métodos no paramétricos es que el número de muestras de la señal es el mismo cuando se utiliza la señal analítica o la señal real. La razón es que si se muestrea al doble de la frecuencia de Nyquist, se tendría el doble de muestras de la señal real mientras que si se utiliza la señal analítica se tendrá el mismo número de muestras de la señal, pero como es compleja, son dos datos por cada muestra por lo que es lo mismo en cantidad de localidades de memoria una u otra opción. En cuanto a los métodos paramétricos, la cantidad de datos que se necesitan son pocos, ya que solo dependen del número de parámetros que se quieran calcular.

Uno de los objetivos de esta tesis fue el lograr la implementación de los algoritmos bajo un programa que permita el procesamiento de señales de una manera sencilla de utilizar para el usuario, como lo es el paquete Khoros. La ventaja que se tiene al tener estas rutinas instaladas como utilerías adicionales, es que ya no se necesita programar el algoritmo y se puede interactuar fácilmente con los parámetros de cada una de las TFR's programadas. Con la ayuda de este documento introductorio en el tema y las rutinas instaladas, se cuenta con una base para empezar a familiarizarse con el desempeño de estos métodos de análisis y entonces dedicarse a la aplicación de estas herramientas a las señales con las cuales se desee trabajar.

Estas nuevas tendencias en métodos tiempo-frecuencia aún no han sido explotadas al máximo. Alguna de las razones puede ser la dificultad de interpretación que puede surgir

al principio, cuando aún no se han familiarizado con las distribuciones. Existen muchos campos en que se pueden aplicar, sin embargo, para poder utilizarlos al máximo es necesario que haya una mayor comunicación interdisciplinaria para poder interpretar correctamente los resultados que se están obteniendo, y tal vez, extraer la mayor cantidad de información posible de los mismos. En la actualidad, el uso de estos métodos es más frecuente ya que están siendo implementados en algunos dispositivos en tiempo real, con lo que su uso se extenderá notablemente, que es una razón más para familiarizarse con estos métodos. Algunas de las áreas en que se están trabajando actualmente son:

- Diseño de representaciones tiempo-frecuencia con kernel adaptable a la señal para tener un mejor seguimiento de la señal [JON95].
- Análisis multicomponente de señales moduladas linealmente en frecuencia con una técnica combinada de transformadas Hough y Wigner, para detección de formas (no solo líneas) y detección de señales con frecuencias lineales y no lineales [BAR95].
- Nuevos métodos para el cálculo e implementación eficientes de la Distribución Wigner Ville eliminando los términos cruzados [STA94].
- Distribuciones Wigner Ville polinomiales para estimación de la frecuencia instantánea en señales FM polinomiales [BOA94].
- Como efectuar mejoras a las gráficas resultantes con estos métodos a través del método de reasignación [AUG95].

Con esto nos damos cuenta que hay mucho trabajo que realizar en esta área, ya sea desarrollando nuevas TFR's o buscando nuevas aplicaciones de ellas. Esto indica que es un área de trabajo en donde aún hay muchas posibilidades de buscar y proponer nuevas alternativas en todos los niveles.

Apendice A

La Señal Analítica

A.1 Introducción

El concepto de señal analítica no es nuevo y se ha utilizado en el área de sistemas de comunicación. La importancia de este tipo de señal para las Representaciones Tiempo-Frecuencia (TFR's) es el que permite eliminar el espectro simétrico y algunos artefactos que se generan cuando se aplica una TFR a una señal real. Pero no es la única razón para utilizarla, sino que también con la señal analítica se puede calcular la frecuencia instantánea de la señal para un instante determinado, que puede ser de utilidad sobre todo si se tiene que trabajar con señales no estacionarias cuya frecuencia varía rápidamente con el tiempo [FLA93], [KOO92], [RAB75], [VIL48]. En esta sección, se observa el por qué surge la necesidad de definir una señal analítica y como obtenerla a partir de una señal real.

A.2 Representación de las Señales

Sabemos que al enviar información a través de cualquier canal de comunicación, dicha información se transmite en forma de energía. Esta energía puede representarse de dos formas: la primera es como una señal que varía en función del tiempo, con lo que se obtiene una curva representativa de como varía la energía con respecto al tiempo. Este enfoque es factible para una señal de tipo telegráfico, mientras que para señales acústicas esta representación no es la más apropiada [VIL48].

El segundo enfoque es considerar la señal como una suma de funciones senoidales superpuestas con diferente amplitud y fase, por ejemplo a través de su representación por series de Fourier. Desde este punto de vista se pueden efectuar estudios de distorsión, ya que si se transmite la señal a través de un sistema distorsionador que suprima ciertos componentes senoidales, existirá una pérdida de información. Con este enfoque se puede evaluar dicha pérdida así como la máxima cantidad de información que se puede transmitir por un medio de comunicación [VIL48].

Y aunque estos enfoques caracterizan a la mayoría de las señales, en la actualidad ya no son suficientes. Una de las aplicaciones en donde no tienen un buen desempeño es

con señales no estacionarias, como la música. Con las representaciones antes mencionadas sólo podemos observar como varía la señal en el tiempo, sin saber su contenido frecuencial, y con el segundo enfoque sabemos cual es su contenido frecuencial pero no en que momento se generan ciertos sonidos. La única forma de presentar dichas características en un solo diagrama se obtiene al adoptar una definición mixta, como la propuesta por Gabor [VIL48]: "a cada instante se presenta un cierto número de frecuencias con la intensidad y frecuencia del sonido que escuchamos; a cada frecuencia está asociada una cierta repartición dentro del tiempo, que definen los intervalos durante los cuales se emite dicha frecuencia". Esto conduce a la definición de un espectro instantáneo en función del tiempo dada la estructura de una señal temporal en un instante dado. Para obtener el espectro de la señal durante toda el tiempo que dura, basta con acumular todos los espectros instantáneos que se obtienen en dicha representación que a partir de este momento la llamaremos tiempo-frecuencia. Si por el contrario, se integran las reparticiones de frecuencias en el tiempo, se reconstruirá la señal temporal. Se sabe que para analizar la señal se le deben aplicar ciertos operadores, ya sea en tiempo o en frecuencia, y esto repercutirá en ciertas deformaciones en la señal. Es por esto que el cálculo de un espectro instantáneo no se puede efectuar con los enfoques ya vistos, por lo que es necesario introducir ciertos conceptos aún no definidos [VIL48].

A.3 La Frecuencia Instantánea

Sabemos que existen dificultades para definir la frecuencia instantánea de una señal. Una de ellas es que una señal senoidal no está definida rigurosamente mas que en el caso en que su duración es infinita (indefinida). En la teoría clásica no es susceptible de definirse ni el espectro instantáneo asociado a un instante t , ni la frecuencia instantánea, por lo que se deben aplicar nociones intuitivas [VIL48].

Por ejemplo, sea $s(t)$ una señal temporal:

$$s(t) = a \cos w_0 t \quad (\text{A.1})$$

donde a y w_0 son constantes y representan la amplitud y frecuencia de dicha señal respectivamente. En este caso, es muy fácil determinar la frecuencia de la señal derivando su argumento [FLA93] [VIL48]:

$$w = \frac{d}{dt} (w_0 t) = w_0 \quad (\text{A.2})$$

Podemos plantear ahora una situación evolutiva y hacer que la amplitud y la derivada del argumento de la señal coseno sean dependientes del tiempo, en cuyo caso reescribiremos $s(t)$ como [FLA93]:

$$s(t) = a(t) \cos \phi(t) \quad (\text{A.3})$$

El problema de esta señal es que a diferencia de la señal A.1 cuya definición es única, existen diferentes formas de expresar la señal de A.3, por ejemplo, basta con definir una función arbitraria $b(t)$ tal que $0 < b(t) < 1$, y reescribiendo A.3 [FLA93]:

$$s(t) = a(t) \cos \phi(t) = \frac{a(t)}{b(t)} b(t) \cos \phi(t) \quad (\text{A.4})$$

$$= a'(t) \cos \phi'(t) \quad (\text{A.5})$$

donde $a'(t) = \frac{a(t)}{b(t)}$ y $\phi'(t) = \arccos(b(t) \cos \phi(t))$.

Para poder definir una señal de una manera única, retomamos la señal real de A.1, que puede interpretarse como la parte real de una exponencial compleja con módulo constante [FLA93]:

$$s(t) = a \cos \omega_0 t = \text{Re}\{ae^{j\omega_0 t}\} \quad (\text{A.6})$$

La amplitud y frecuencia de la señal son el módulo y la derivada de la fase de la exponencial respectivamente. La parte compleja de dicha señal, $\hat{s} = a \text{sen } \omega_0 t$, se puede deducir a partir de la parte real con un defasamiento de $\pi/2$, con lo que se puede afirmar que la parte real e imaginaria de esta señal están en cuadratura [FLA93].

Asociando a la señal real $s(t)$ su parte compleja $\hat{s}(t)$ se define una nueva señal [FLA93]:

$$\psi_s(t) \triangleq s(t) + j \hat{s}(t) \quad (\text{A.7})$$

La ecuación A.7 define a la señal analítica, cuya amplitud y frecuencia instantánea se calculan respectivamente como [FLA93]:

$$a_s(t) \triangleq |\psi_s(t)| \quad (\text{A.8})$$

$$w_x \triangleq \frac{d}{dt} \arg \psi_s(t) \quad (\text{A.9})$$

La mayoría de los autores utilizan esta definición como la definición de frecuencia instantánea, tal como fue definida en [VIL48], pero de acuerdo con [KOO92] se han presentado algunas irregularidades al tratar de calcular dicha frecuencia cuando se tiene una señal cuyo índice de modulación es grande. Además si se da el caso de tener dos señales FM dentro de un canal de comunicaciones, se observa que existirán dos frecuencias instantáneas al mismo tiempo, y dicho estimador solo calcula un valor único. Con esta base, la derivada de la señal analítica es un buen estimador de la frecuencia instantánea para el caso continuo, [KOO92] propone una forma de calcular dicha frecuencia instantánea para el caso discreto.

Otra forma de interpretar la señal analítica es visualizarla en su forma polar, es decir algo similar a $\psi_s(t) = a e^{j\omega_0 t}$, e interpretarla como un vector. Su módulo y velocidad puede ser variables o constantes con respecto al tiempo. En este caso, la señal tiene un módulo constante a , lo que equivale a tener amplitud constante en la señal y su velocidad de rotación o frecuencia ω_0 también es constante. Cuando la velocidad de rotación es variable con el transcurso del tiempo es cuando se define una frecuencia y amplitud instantánea para dicha señal [FLA93].

Se observa entonces que la señal analítica es una señal compleja. Sabemos que en la naturaleza no existen las señales complejas, pero podemos crearlas a partir de las señales

reales. Una herramienta que puede ser de utilidad para la definición de señales complejas es la transformada Hilbert.

A.4 La transformada Hilbert

Sea $s(t)$ una señal temporal cuya transformada de Fourier sea nula para las frecuencias negativas, es decir:

$$S(w) = 0, \quad w < 0$$

Como el espectro de una señal real es simétrico, es decir :

$$S(-w) = S^*(w)$$

Se observa que $s(t)$ es una señal compleja, porque únicamente la mitad de su espectro tiene valor. En la sección anterior se estableció que la parte real de la señal analítica y su parte compleja están en cuadratura. Entonces, para obtener la parte compleja de la señal analítica se puede aplicar la transformada Hilbert a la señal real, ya que con ella se obtiene una señal en cuadratura. Se define la transformada Hilbert como:

$$\hat{s}(t) = \mathcal{H}\{s(t)\} \triangleq -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau) d\tau}{\tau - t} \quad (\text{A.10})$$

donde la señal $\hat{s}(t)$ es la parte compleja de la señal analítica definida en A.7. De manera recíproca, para obtener la parte real de la señal analítica, $s(t)$ a partir de su parte imaginaria:

$$s(t) = \mathcal{H}^{-1}\{\hat{s}(t)\} \triangleq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{s}(\tau) d\tau}{\tau - t} \quad (\text{A.11})$$

Las ecuaciones A.10 y A.11 se les conoce con el nombre de transformada Hilbert en su forma continua [POU94], [VIL48].

Otra manera de calcular la señal en cuadratura es la siguiente:

$$\hat{s}(t) = \mathcal{H}\{s(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau) d\tau}{\tau - t} = s(t) * h(t) \quad (\text{A.12})$$

en donde:

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

y como

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j \operatorname{sgn} w$$

la Transformada de Fourier de $\hat{s}(t)$ será [POU94]:

$$\hat{S}(w) = \mathcal{F}\{\hat{s}(t)\} = \mathcal{F}\{s(t) * h(t)\} = -j S(w) \operatorname{sgn} w$$

Esta última ecuación nos muestra que se puede obtener la transformada Hilbert al pasar la señal $s(t)$ real por un filtro ideal con fase 90 grados. A este filtro se le conoce como

filtro de cuadratura ya que si a la entrada se le aplica una señal cosenoidal, a la salida se obtiene una señal senoidal [POU94].

Hemos visto que existen diferentes formas de calcular la señal analítica, por lo que a continuación se presenta un breve resumen de como calcular dicha señal tanto para en el caso continuo como para el discreto.

A.5 Cálculo de la Señal Analítica

A.5.1 Caso Continuo

Sea el espectro de la señal analítica:

$$S_a(w) = S(w) + j \hat{S}(w)$$

donde $S(w)$ representa el espectro para las frecuencias positivas y $\hat{S}(w)$ el espectro para las frecuencias negativas. Aplicándole la ecuación A.4 tenemos que [RAB75]:

$$S_a(w) = S(w) + j(-j \operatorname{sgn} w)S(w)$$

donde:

$$S_a(w) = \begin{cases} 2S(w) & w > 0 \\ S(w) & w = 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases}$$

Con este resultado, se observa que se puede calcular la señal analítica utilizando la transformada de Fourier. Entonces, la señal analítica puede obtenerse de dos formas diferentes:

1. Por fórmula: la parte imaginaria se calcula con la transformada de Hilbert:

$$\hat{s}(t) = \mathcal{H}\{s(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau) d\tau}{\tau - t} = s(t) * h(t) \quad (\text{A.13})$$

2. Por transformada de Fourier: se le aplica la transformada de Fourier a la señal real, se eliminan las frecuencias negativas efectuando $S(w) = 0$, $w < 0$; se duplica la energía para el espectro positivo y se le aplica la transformada de Fourier Inversa [BAS92].

A.5.2 Caso Discreto

A su vez, para el caso de señales discretas, también existen dos formas de calcular la señal analítica. Ambas dan el mismo resultado, pero la diferencia en el tiempo de procesamiento es notable, siendo la segunda opción la más rápida. Dichas opciones son:

1. Por fórmula: la parte imaginaria se calcula como [SUN89]:

$$\hat{x}[k] = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(k-i)m}{N}\right)$$

2. Por transformada de Fourier: se le aplica la transformada de Fourier a la señal real, se eliminan las frecuencias negativas efectuando $S(w) = 0, w < 0$; se duplica la energía para el espectro positivo y se le aplica la transformada de Fourier inversa [BAS92].

Apendice B

Propiedades de las Representaciones Tiempo Frecuencia

La ecuación que define a la Clase de Cohen [COH89] , [COH92]:

$$TFR_C(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi v(u-t)} g(v, \tau) x^*(u - \frac{\tau}{2}) x(u + \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} dv d\tau$$

define una familia de transformadas tiempo-frecuencia cuadráticas, en donde la única diferencia entre ellas es el kernel $g(v, \tau)$ que define a la Representación Tiempo-Frecuencia (o TFR por sus siglas en inglés). Dependiendo de como se defina este kernel serán las características que presente la TFR . A continuación mencionamos algunas de las propiedades ideales que deberían tener dichas TFR, y las características que debe tener el kernel para cumplir con dichas propiedades.

Sea $TFR_x(t, f)$ una representación tiempo-frecuencia de la señal $x(t)$. Las propiedades que idealmente debería cumplir esta representación son las siguientes:

1. **Valor Real para todo Tiempo y Frecuencia ("Real Valued")**, la distribución tiene valores reales para todos los valores de t y f y, por lo tanto, puede representar las variaciones en energía [HLA92]:

$$TFR_x(t, f) = TFR_x^*(t, f)$$

Para que la representación tiempo-frecuencia pueda presentar esta característica, la función $g(v, \tau)$ debe cumplir con [CLA80c]:

$$g(v, \tau) = g^*(-v, -\tau)$$

También sería deseable que las distribuciones sean positivas para todo t y f , porque podrían interpretarse como una distribución de energía en el plano (t, f) . Pero una interpretación tal aun puede ser cuestionada, como se verá posteriormente [CLA80c].

2. Invarianza a Desplazamientos en Tiempo y en Frecuencia:

- Invarianza a corrimientos en tiempo:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x(t - t_0) \\ TFR_{\tilde{x}} &= TFR_x(t - t_0, f)\end{aligned}$$

Para que esto se cumpla, la función $g(v, \tau)$ no debe de depender de la variable t [CLA80c],[HLA92].

- Invarianza a corrimientos en frecuencia:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x(t) e^{j2\pi f_0 t} \\ TFR_{\tilde{x}} &= TFR_x(t, f - f_0)\end{aligned}$$

Para que esto se cumpla, la función $g(v, \tau)$ no debe de depender de la variable f [CLA80c],[HLA92].

Ambas propiedades son esenciales si se desea que las variables t y f de la representación tiempo frecuencia correspondan a las de la señal y su espectro respectivamente [CLA80c].

3. Marginales

- Marginal Temporal (" Time Marginal "),

$$\int_f TFR_x(t, f) df = |x(t)|^2$$

Restricciones:

$$g(v, 0) = 1 \quad \forall v$$

- Marginal Frecuencial (" Frequency Marginal "),

$$\int_t TFR_x(t, f) dt = |X(f)|^2$$

Restricciones:

$$g(0, \tau) = 1 \quad \forall \tau$$

Si alguna de las dos marginales anteriores se satisface, la integral sobre todo el plano (t, f) es igual a la energía de la señal [CLA80c],[HLA92]:

$$\iint TFR_x(v, \tau) d\tau dv = \|x\|^2$$

4. Escalamiento Tiempo-Frecuencia, Sea $\tilde{x}(t) = \sqrt{|a|} x(at)$, $a \neq 0$, entonces [HLA92]:

$$TFR_{\tilde{x}} = TFR_x(at, \frac{f}{a})$$

5. **Frecuencia Instantánea**, Esta propiedad nos indica que al obtener el primer momento con respecto a la frecuencia, el resultado se puede interpretar como la frecuencia promedio de la señal en el tiempo dado. Pero se demuestra que para señales complejas, o para la señal analítica, la frecuencia promedio es igual a la frecuencia instantánea $f_{x(t)}$ de la señal de la señal [CLA80c].

$$\frac{\int_f f TFR_x(t, f) df}{\int_f TFR_x(t, f) df} = f_{x(t)} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg|x(t)|$$

Restricciones para el kernel [CLA80c] :

$$\begin{aligned} g(v, 0) &= 1 \quad \forall v \\ \frac{d}{d\tau} g(v, \tau) |_{\tau=0} &= 0 \quad \forall v \end{aligned}$$

6. **Retraso de Grupo ("Group Delay")**, Tomando un concepto similar al de la propiedad anterior, el primer momento con respecto al tiempo se puede interpretar como el tiempo promedio $t_{x(f)}$ de la señal en una frecuencia determinada, y para señales complejas, será igual al retraso de grupo o "group delay" [CLA80c] :

$$\frac{\int_t t TFR_x(t, f) dt}{\int_t TFR_x(t, f) dt} = t_{x(f)} = - \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \arg|x(f)|$$

Las condiciones para que esto se cumpla son [CLA80c] :

$$\begin{aligned} g(0, \tau) &= 1 \quad \forall \tau \\ \frac{d}{dv} g(v, \tau) |_{v=0} &= 0 \quad \forall \tau \end{aligned}$$

7. **Soporte Finito en Tiempo**, para todo t que no pertenezca al intervalo $[t_1, t_2]$, y si $x(t) = 0$ fuera del mismo intervalo:

$$TFR_x(t, f) = 0 \quad \forall t \notin [t_1, t_2]$$

Restricción: $g(v, \tau)$ debe ser una función entera de v de tipo exponencial.

Se había comentado en la propiedad uno que una característica deseable para toda TFR es que sea real para todos los valores de tiempo y frecuencia. Pero al analizar las propiedades 6 y 7 nos damos cuenta que son incompatibles con este requisito. Como ejemplo, si consideramos una señal causal, la propiedad 7 indica que la TFR de dicha señal tendrá un valor de cero para un $t < 0$. De la propiedad 6 se observa que para dicha señal, el "group delay" deberá ser no negativo para todas las frecuencias. Esto contradice el hecho de que las señales causales tienen un "group delay" negativo [CLA80c].

8. **Soporte Finito en Frecuencia**, para toda f que no pertenezca al intervalo $[f_1, f_2]$, y si $X(f) = 0$ fuera del mismo intervalo:

$$TFR_x(t, f) = 0 \quad \forall f \notin [f_1, f_2]$$

Restricción: $g(v, \tau)$ debe ser una función entera de τ de tipo exponencial.

De manera similar a la contradicción que se comenta en el inciso anterior, las propiedades 5 y 8 no se pueden mantener para que una Representación Tiempo-Frecuencia no sea negativa. La frecuencia instantánea de las señales analíticas pueden tener valores negativos durante ciertos períodos de tiempo [CLA80c].

9. **Fórmula de Moyal**, se puede considerar como la contraparte del teorema de Parseval (p.e. para dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, dicho teorema se puede expresar bajo la siguiente notación: $(x_1, x_2) = (X_1, X_2)$). Entonces, para dos representaciones tiempo-frecuencia se tiene [CLA80c], [FLA93]:

$$\int \int TFR_{x_1, y_1}(t, f) TFR_{x_2, y_2}^*(t, f) dt df = (x_1, x_2)(y_1, y_2)^*$$

Hemos presentado algunas de las propiedades más importantes de las Representaciones Tiempo-Frecuencia. Existen otras propiedades tan importantes como las mencionadas aquí, dichas propiedades pueden ser consultadas en [CLA80c], [HLA92], [FLA93]. Para finalizar este apéndice, se muestra en la tabla B.1 las propiedades de las TFR's utilizadas dentro de este documento.

Tabla B.1
Propiedades de las Distribuciones Tiempo-Frecuencia

Propiedades	SP	WVD	PWVL	CW
Realidad	x	x	x	x
Positividad	x			
Invarianza a Corrimientos				
En tiempo	x	x	x	x
En Frecuencia	x	x	x	x
Marginal en Tiempo		x		x
Marginal en Frecuencia		x		x
Escalamiento				
Tiempo-Frecuencia		x		
Frecuencia Instantánea		x		x
Retraso de Grupo		x		x
Soporte Finito en Tiempo		x		
Soporte Finito en Frecuencia		x		
Fórmula Moyal		x		

Bibliografía

- [AKA94] AKAY, M.Y., AKAY, M., WELKOWITZ, W., LEWKOWICZ, S., PALTI, Y. Dynamics of the sounds caused by partially occluded femoral arteries in dogs. *Annals of Biomedical Engineering*, 22:493-500, 1994.
- [ALC86] ALCANTARA, R. *Implantation d'algorithmes Rapides sur des Processeurs de Traitement du Signal*. PhD thesis, ENST, Septembre 1986.
- [ALC92] ALCANTARA, R. Notas de procesamiento digital de señales. DEPFI, UNAM, México, D.F., Marzo 1992.
- [ALC96] ALCANTARA, R., CORLAY, M. Guía para la programación bajo ambiente khoros de algoritmos para procesamiento digital. DEPFI, UNAM, México, D.F., 1996.
- [ARG91] ARGIRO, D., GAGE, C. Khoros programmer's manual. Technical Report ver. 1.0, University of New Mexico, New Mexico, Mayo 9 1991.
- [AUG95] AUGER, F., FLANDRIN, P. Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(5):1068-1089, May 1995.
- [BAR95] BARBAROSSA, S. Analysis of multicomponent lfm signals by a combined wigner-hough transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(6):1511-1515, June 1995.
- [BAS92] BASSEVILLE, M., FLANDRIN, P., MARTIN, N., (editorial by). Méthodes temps-fréquence. *Traitement du Signal*, 9(Suplemento del número 1):79-112, 1992.
- [BOA87] BOASHASH, B., BLACK, P. An efficient real-time implementation of the wigner-ville distribution. In *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, volume ASSP 35, pages 1611-1618, 1987.
- [BOA91] BOASHASH, B. Time-frequency signal analysis. In Simon Haykin, editor, *Advances in Spectrum Analysis and Array Processing*, pages 418-517. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [BOA94] BOASHASH, B., O'SHEA, P. Polynomial wigner-ville distribution and their relationship to time-varying high order spectra. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(1):216-220, January 1994.

- [BRA78] BRACEWELL, R. *The Fourier Transforms and its Applications*. McGraw Hill, 1978.
- [CHE95] CHEN, V.C., QIAN, S. Reconstruction of isar image by joint time-frequency transformation. *ISSSE*, 35(3):217-250, 1995.
- [CLA80a] CLAASEN, T.A.C.M., MECKLENBRÄUKER, W.F.G. The wigner distribution - a tool for time-frequency signal analysis - part i: Continuous-time signals. *Philips J. Res*, 35(3):217-250, 1980.
- [CLA80b] CLAASEN, T.A.C.M., MECKLENBRÄUKER, W.F.G. The wigner distribution - a tool for time-frequency signal analysis - part ii: Discrete-time signals. *Philips J. Res*, 35(4/5):276-300, 1980.
- [CLA80c] CLAASEN, T.A.C.M., MECKLENBRÄUKER, W.F.G. The wigner distribution - a tool for time-frequency signal analysis - part iii: Relations with other time-frequency signal transformations. *Philips J. Res*, 35(6):372-389, 1980.
- [COH89] COHEN, L. Time-frequency distributions: A review. In *Proc. of the IEEE*, volume 77, pages 941-981, July 1989.
- [COH92] COHEN, L. Introduction: A primer on time frequency analysis. In B. Boashash, editor, *Time-Frequency Signal Analysis: Methods and Applications*, pages 3-42. Longman Cheshire, 1992.
- [CUO93] CUOMO, S., PELLEGRINI, P.F., PIAZZA, E. An application of the time-frequency representation for radar signal analysis. *Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing, Nicosia, Cyprus*, 1, May 1993.
- [CUO95] CUOMO, S., MARCONI, M., PELLEGRINI, P.F., PIAZZA, E. Time frequency representation for atc primary radar signal analysis. *Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing, Ymassol, Cyprus*, 2, June 1995.
- [FLA93] FLANDRIN, P. *Temps-Fréquence*. Hermès, Paris, 1993.
- [HLA92] HLAWATSCH, F., BOUDREAUX-BARTELS, G.F. Linear and quadratic time frequency signal representations. *IEEE SP Magazine*, pages 21-67, April 1992.
- [JON95] JONES, D.L., BARANIUK, R.G. An adaptive optimal-kernel time-frequency representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(10):2361-2371, October 1995.
- [KAY88] KAY, S.M. *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*. Prentice Hall, 1988.
- [KOO92] KOOTSOOKOS, P.J., LOVELL, B.C., BOASHASH, B. A unified approach to the stft, tfd's, and instantaneous frequency. *IEEE Transactions on Signal Processing*, pages 1971-1982, August 1992.

- [LE 76] LE ROUX, J. Optimisation du calcul des coefficients de corrélation partielle. *7^{ème} Journées d'Etude sur la Parole*, pages 359-373, Mai 1976.
- [NAY94] NAYAK, A., ROY, R.B., SHARMA, A. Time-frequency spectral representation of the eeg as an aid in the detection of depth of anesthesia. *Annals of Biomedical Engineering*, 22:501-513, 1994.
- [OPP75] OPPENHEIM, A.V., SCHAFER, R.W. *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [PEY86] PEYRIN, F., PROST, R. A unified definition for the discrete-time, discrete-frequency, and discrete-time/frequency wigner distributions. In *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, volume ASSP-34, pages 858-866, August 1986.
- [POU94] POULARIKAS, A.D., SEELY, S. *Signals and Systems*. Krieger, 1994.
- [PRO88] PROAKIS, J.G., MANOLAKIS, D.G.. *Introduction to Digital Signal Processing*. Macmillan Publishing Company, N.Y., 1988.
- [RAB75] RABINER, L., GOLD, B. *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Prentice Hall Inc, 1975.
- [RAS91] RASURE, J., ARGIRO, D. Khoros user's manual. Technical Report ver. 1.0, University of New Mexico, New Mexico, Diciembre 16 1991.
- [STA94] STANKOVIĆ, L. A method for time-frequency analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(1):225-229, January 1994.
- [SUN89] SUN, M., LI, C., SEKHAR, L.N. SCLABASSI, R.J. Efficient computation of discrete pseudo-wigner distribution. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(11):1735-1742, 1989.
- [VIL48] VILLE, J. Théorie et applications de la notion de signal analytique. *Cables et Transmission*, 2A:61-74, 1948.
- [WIG32] WIGNER, E. On the quantum correction for the thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, (40):749-759, 1932.
- [ZEP95] ZEPEDA, C. Sistema de clasificación de señales eeg utilizando el ambiente de programación visual khoros. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Colegio de Computación, Puebla, Pue., México., Junio, 1995. Tesis de Licenciatura.