

33
25



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELACION Y PREDICCION MEDIANTE
REDES FUNCIONALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A I

RUSLAN

GOMEZ

NESTERKIN



FACULTAD DE CIENCIAS
REGION ESCOLAR

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Modelación y Predicción mediante Redes Funcionales

realizado por Ruslán Gómez Nesterkín

con número de cuenta 8824565-4 , pasante de la carrera de Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis	
Propietario	Dr. Fernando Brambila Paz
Propietario	Dr. Pedro Eduardo Miramontes Vidal
Propietario	Dr. Raimundo Bautista Ramos
Suplente	Dr. Jesus López Estrada
Suplente	H.C. Lourdes Esteva Peralta

Consejo Departamental de Matemáticas

TESIS

MODELACIÓN Y PREDICCIÓN MEDIANTE REDES FUNCIONALES

Ruslán Gómez Nesterkin

AGRADECIMIENTOS

Agradezco por su interés e invaluable colaboración, así mismo, por sus comentarios y valiosas sugerencias a:

**Dr. Raimundo Bautista Ramos,
Dr. Fernando Brambila Paz,
M. en C. Lourdes Esteva Peralta,
M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz,
Dr. Jesús López Estrada,
Dr. Pedro Eduardo Miramontes Vidal,**

sin los cuales no hubiera sido posible el logro de este proyecto.

Así mismo amerita un enorme agradecimiento el esfuerzo de toda mi familia, la cual me ha apoyado incondicionalmente e incluso sin medida, sin olvidar a mis amigos y amigas por su apoyo moral.

Contenido

1 ANTECEDENTES	3
1.1 Introducción	3
1.2 Red Neuronal	4
1.2.1 Estructura biológica de la Red Neuronal (Neurofisiología)	4
1.2.2 Modelación de la Red Neuronal (Red Neuronal Artificial)	10
2 REDES FUNCIONALES	14
2.1 Proceso Especifico	14
2.2 Concepto de Red Funcional	16
2.2.1 Red Funcional Discreta	19
2.2.2 Planteamiento de la Red Funcional Continua	20
2.3 Modelación con Redes Funcionales	
Discretas	22
2.3.1 Análisis del caso 1	22
2.3.2 Análisis del caso 2	25
2.3.3 Análisis del caso 3	28
2.4 Algebra con Redes Funcionales	29
2.5 Solución de la Modelación con Redes Funcionales usando su Desarrollo en Series de Potencias	32
2.5.1 Desarrollo en Series de Potencias de la Red Funcional Serial	32
2.5.2 Desarrollo en Series de Potencias de la Red Funcional Secuencial	35
2.6 Modelación de Operadores Mediante Redes Funcionales	37
2.7 Predicción	38
3 CONCLUSIONES	40
4 ANEXO 1	
Ecuaciones Funcionales	42
4.1 Ecuación Funcional	42
4.2 Ecuación Funcional de Translación	43
4.3 Ecuación Funcional de Abel	44

5 ANEXO 2	
Desarrollo en Series de Potencias y Matriz de Vandermonde	52
5.1 Análisis de las soluciones del sistema de ecuaciones lineales de Vandermonde	52
6 ANEXO 3	
Ejemplos	61
6.1 Red Neuronal Artificial (Suma Binaria)	61
6.2 Red Funcional Discreta (Modelación del Operador Suma en \mathbb{Z}_2) .	65

Capítulo 1

ANTECEDENTES

El analizar un proceso determinado es en muchos casos un problema con gran cantidad de dificultades. Una idea para la modelación de un proceso determinado consiste en intentar la adaptación del modelo propuesto a dicho proceso, de forma tal que podamos lograr que el modelo tenga en todo momento el mismo comportamiento que el proceso en estudio.

1.1 Introducción

Lo que se pretende en esta tesis es la creación de una estructura que permita la modelación matemática de alguna situación determinada de antemano (proceso específico).

Es cierto que existen muchos y muy variados tipos de procesos en la naturaleza, que al intentar matematizarlos se ha optado comúnmente por modelarlos mediante un análisis de sus características.

La idea de que ya existen en la naturaleza seres con la capacidad de adaptarse a un ambiente (o problema específico) de modo que pueden discernir entre decisiones complejas en un momento dado gracias a dicha capacidad es el enfoque que aquí se pretende adoptar.

Relacionado directamente con la reacción a una situación determinada se encuentra el sistema nervioso animal, el cual a su vez están constituido fisiológicamente hablando de una red de células nerviosas entrelazadas, denominado *sistema nervioso* (o *red neuronal* en los modelos matemáticos).

La red neuronal consta de una serie de neuronas (células nerviosas) interconectadas unas con otras de modo que mediante estímulos procedentes del exterior se transmiten señales eléctricas por muy diversas ramas de interconexión con base en reacciones bioelectroquímicas generalmente repercutiendo en alguna(s) reacción(es) observables, siendo la más usual de tipo muscular.

Al considerar esta estructura nerviosa como base, surge la posibilidad de

creación de un modelo teórico, con características similares a dicha estructura nerviosa que le permita, en un momento dado, adaptarse a ambientes o procesos específicos representados por el problema a estudiar.

Es de esta manera que en la presente tesis se define un nuevo concepto que se basa en la estructura nerviosa animal (red neuronal) y que con algunos cambios denomino "Red Funcional". Cabe mencionar que el proceso a modelar con esta nueva metodología no se basa en un análisis minucioso del problema en sí, sino en la "adaptación" de nuestro modelo de Red Funcional a dicho problema. Además, es importante mencionar que el propósito no es considerar a las Redes Neuronales Artificiales como modelo sino como pauta para una nueva estructura teórica adaptable.

1.2 Red Neuronal

Para los neurólogos la unidad funcional del sistema nervioso es la neurona, siendo dichas neuronas células excitables del sistema nervioso conductoras de impulsos eléctricos.

Esta es la definición propuesta por Waldeyer en 1891 (ver referencia [18]). De esto se desprende que al conjunto de dichas neuronas por sus interconexión transmiten impulsos eléctricos.

Las Redes Neuronales Artificiales son (entre otras cosas) modelos matemáticos del comportamiento de una red neuronal biológica.

Para comenzar entendamos la estructura de las Redes Neuronales biológicas, para ello veamos algo de su estructura :

1.2.1 Estructura biológica de la Red Neuronal (Neurofisiología)

Primeramente hay que mencionar que las redes Neuronales son estructuras de varias neuronas que funcionan cada una de ellas dependiendo de las demás por sus interconexiones, conocidas como axones y dendritas (ver figura 1.1).

Cada neurona puede ser vista como una célula animal, la cual tiene, como toda célula, una estructura compleja pero cuyas funciones en este caso se pueden reducir a simples reglas, ya que su funcionamiento consiste en la transferencia de un impulso eléctrico a través del axón dependiendo de que la cantidad de corriente eléctrica almacenada por la neurona rebase o no un cierto límite o umbral eléctrico.

En los animales vertebrados existen distintos tipos de neuronas, siendo clasificadas en base a distintos criterios (ver referencia [18]) :

1. Según su morfología o apariencia.
2. Según su ubicación anatómica.

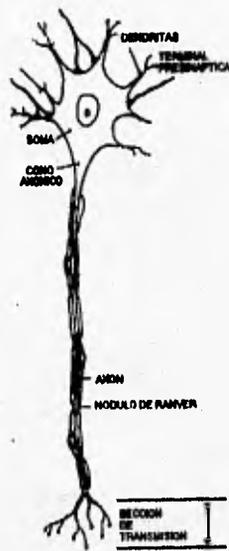


Figura 1.1:

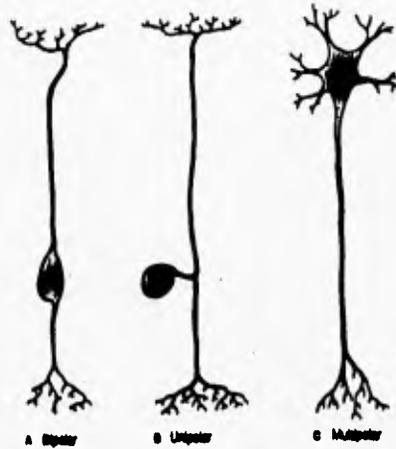


Figura 1.2:

3. Según sean sensoras (que reciben un impulso del exterior) o motoras (que causan el movimiento de algún músculo).
4. Según su velocidad de conducción de la corriente eléctrica.
5. Según el diámetro de sus fibras.
6. Según sean o no mielinizadas (cubiertas por una célula llamada de Schwann, la cual se enrolla alrededor del axón) sus fibras.

Centrémonos en una sola de estas clasificaciones, ya que para los propósitos perseguidos basta con tener una idea del funcionamiento del sistema neuronal.

Considerando entonces el punto de vista morfológico, tenemos que las neuronas son células individuales compuestas de un cuerpo celular llamado soma y un número variable de prolongaciones dirigidas hacia el exterior denominadas neuritas.

Las neuronas adultas (ya que pasan por proceso de crecimiento), se les clasifica como *monopolares*, *bipolares* o *multipolares* dependiendo del número de neuritas (ver figura 1.2).

Cuando llegan suficientes impulsos eléctricos a un número adecuado de terminaciones presinápticas, se libera suficiente neurotransmisor para estimular a

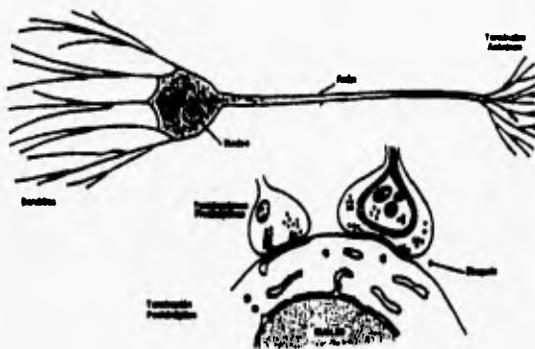


Figura 1.3:

la neurona postsináptica, hasta llegar en esta última a un umbral de excitación, cuando esto ocurre en la membrana de la neurona postsináptica sucede un cambio rápido en la corriente eléctrica denominado "Potencial de Acción".

Una vez que se ha iniciado este proceso, el potencial de acción genera una pequeña corriente local que a su vez inicia un segundo potencial de acción en el segmento de membrana adyacente. La corriente local de ese potencial de acción desencadenará un tercero y así sucesivamente, de modo que va transmitiéndose un impulso eléctrico y a la vez filtrándose con base en haber rebasado el potencial de acción respectivo en cada una de las neuronas, hasta así llegar a las ramas finales de la estructura nerviosa.

Es importante mencionar que en el axón, el mecanismo mediante el cual se propaga el impulso eléctrico se debe al flujo de iones de potasio (K^+) y sodio (Na^+) a través de la membrana del axón (membrana axónica).

A su vez existe cierta resistencia por parte de los líquidos extracelulares del axón e intracelulares del axón (llamado axoplasma) y a su vez una resistencia que ofrece la membrana axónica al flujo de iones.

Como la membrana axónica semipermeable, esta a su vez funge como una capa aislante, causando una capacitancia, lo que provoca el umbral en el potencial de acción.

Es esta la manera en que un impulso eléctrico se convierte en un proceso electroquímico con un flujo de corriente que se somete a una cierta resistencia y otra cierta capacitancia.

De esta manera un impulso eléctrico proveniente de una neurona (pudiendo

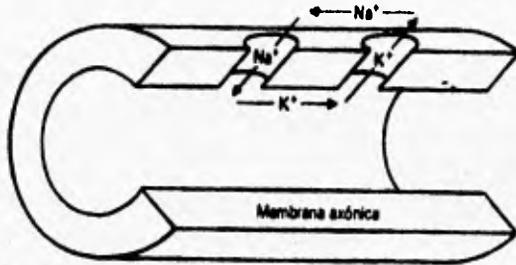


Figura 1.4:

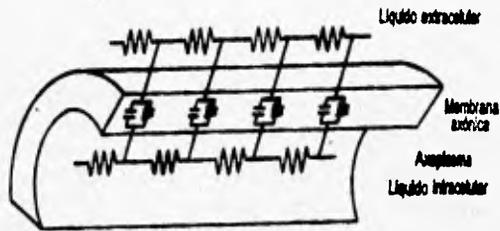


Figura 1.5:

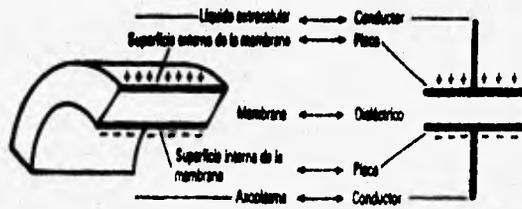


Figura 1.6:

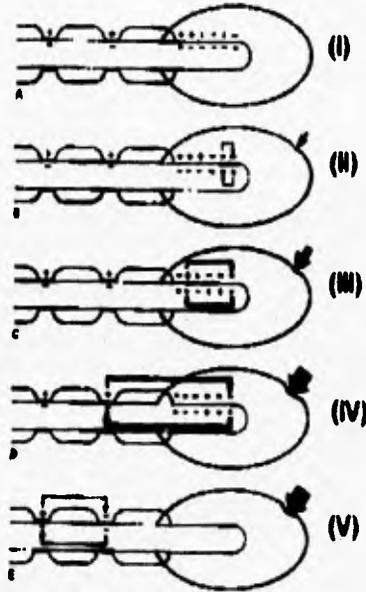


Figura 1.7: (I) No hay estímulo, (II) Aparece un estímulo que ocasiona la transmisión de la señal eléctrica, (III) Continúa el estímulo, (IV) El impulso se continúa recorriendo, (V) El impulso inicial se desplaza hacia otras conexiones.

ser esta sensora como las que tenemos en la retina del ojo) activa el proceso de flujo de corriente eléctrica (ver figura 1.7)

Cuando una receptor (neurona) es estimulado en forma intensa se establece en la fibra nerviosa un índice de activación inicial elevado, el cual disminuye un poco con el tiempo, y aunque el estímulo sea aplicado en forma continua y con la misma intensidad, la cantidad de impulsos disminuye a los pocos segundos.

A esta disminución de la generación de impulsos, aun con estimulación continua, se le denomina *ADAPTACION* (ver referencia [9], ver figura 1.7).

Todos los receptores se adaptan hasta cierto punto (con la posible excepción de los receptores del dolor), Algunos receptores se adaptan en forma muy rápida mientras que otros en forma lenta y a un grado limitado.

El potencial de acción disminuye en ambos casos, a veces por debajo del

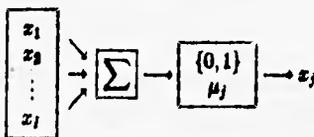
umbral de excitación.

Esta última característica nos permite considerar variables de adaptación en el modelo matemático de la Red Neuronal (ver las siguientes referencias: [9],[13],[14],[15],[18]).

1.2.2 Modelación de la Red Neuronal (Red Neuronal Artificial)

Con base en lo visto referente al sistema nervioso y en particular en cuanto a su estructura y funcionamiento, se comenzaron a hacer modelos matemáticos que describieran dicho funcionamiento. Nacieron así las *Redes Neuronales Artificiales*, las cuales se inspiran en la estructura fisiológica ya descrita (siendo una simplificación de la situación real en la totalidad de los casos).

Un modelo simplificado de neurona propuesto es verla a esta como unidad binaria. El funcionamiento según el modelo consiste en que la neurona en cuestión recibe estímulos de otras neuronas (mediante las dendritas consideradas en el modelo como conexiones) que son sumados después algebraicamente (ya que se considera que son corrientes eléctricas, por lo cual cumplen esta propiedad) y considerando las resistencias de los canales de enlace (axones y dendritas), quedando el modelo como:



esto es:

$$x_j(t+1) = f\left(\sum_{vi} w_{i,j} \cdot x_i(t) - \mu_j(t)\right)$$

donde:

$x_j(t)$: Corresponde al estado de transmisión (de corriente eléctrica) de la j -ésima neurona al tiempo t , siendo sus posibles estados 0 (no hay transmisión) ó 1 (si hay transmisión), i.e. $x_j(t) \in \{0, 1\}$.

$\mu_j(t)$: Corresponde al umbral de la neurona j , siendo considerada como una constante

f : Función real que representa a las capacitancias axónicas así como a las transferencia sináptica que se suscita de las neuronas presinápticas a la neurona en cuestión. Generalmente considerada ésta, la función signo:

$$f(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$$

$w_{i,j}$: Representan en forma de pesos las inhibiciones o activaciones ofrecidas por la capa axónica de las neuronas presinápticas (correspondientes al índice i) así como por los neurotransmisores que se conectan con la neurona j .

t : Tiempo durante el cual se realiza el análisis de la neurona en cuestión, considerado de tipo discreto ($t = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_s\}$).

Este modelo recaba el concepto de que la neurona j emite un impulso eléctrico si el umbral μ_j es rebasado por dicha neurona.

Es importante notar que los pesos $w_{i,j}$ son ajustes para que la red neuronal artificial se adapte al proceso indicado o proceso a modelar mediante algún algoritmo basado en la búsqueda de minimizar la diferencia entre el resultado obtenido de la red neuronal y el resultado deseado.

Algunas de las características de las redes neuronales reales omitidas mediante esta modelación son:

1. El umbral de las neuronas como se mencionó en la sección anterior, no es una constante, sino que cambia dinámicamente en forma continua.
2. Las células neuronales reales realizan sumas no lineales de los impulsos eléctricos que recibe.
3. Una neurona real produce una sucesión de pulsos eléctricos, no un nivel de salida eléctrico único.
4. Las neuronas no tienen lapsos de espera fijos en el tiempo de procesamiento $t \mapsto t + 1$, siendo estos lapsos distintos de neurona a neurona.
5. La cantidad de substancias neurotransmisoras usadas en la sinapsis puede variar de forma impredecible.

Es así que un modelo que intente contemplar estas diferencias para resultar mejorado en cuanto a su acercamiento a las redes neuronales reales sería el siguiente:

$$x_j = f\left(\sum_i w_{i,j} \cdot x_i - \mu_j\right) \quad (1.1)$$

donde:

x_j es evaluada en forma continua y

f es una función no lineal llamada función de activación o función de transferencia sináptica.

Hay que recordar que el objetivo de una Red Neuronal Artificial está enfocado generalmente a las habilidades de cómputo de los modelos de redes que puede proporcionarnos, y no a su directa aplicabilidad a la modelación biológica.

Dada una red neuronal artificial, lo que queda es crear una topología o estructura de interconexiones entre las neuronas artificiales y buscar los pesos $w_{i,j}$ que permitan realizar la modelación de un problema específico. A dicha búsqueda de pesos se le denomina *Regla de Aprendizaje de la Red Neuronal Artificial*.

Una generalización importante que se hace en las redes neuronales es el uso de funciones de transferencia (f) distintas de la función signo, pero con la restricción: a mayor potencial de acción en la presinapsis ocurre un mayor potencial de acción en la postsinapsis, entonces se infiere que dicha función f debe ser no decreciente.

Estas son las funciones de transferencia más empleadas:

1. Función signo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

2. Función de paso ($f'(0) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ dependiendo de como sea definida de antemano):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ f'(0) & , x = 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

3. Función logística:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

4. Función tangente hiperbólica:

$$f(x) = \tanh(x)$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+e^x} & , x \geq 0 \\ \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 & , x < 0 \end{cases}$$

7. Función de umbral exponencial ($c \in \mathbf{R}$ predefinida de antemano):

$$f(x) = \min\{1, e^{c \cdot x}\}$$

8. Función radio polinomial ($c, n \in \mathbb{R}$ predefinidos de antemano con $n > 1$):

$$f(x) = \max\left\{0, \frac{x^n}{c+x^n}\right\}$$

Capítulo 2

REDES FUNCIONALES

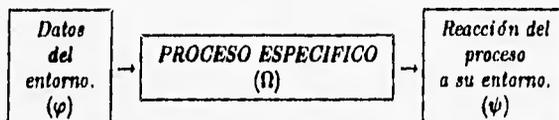
Antes que nada es conveniente aclarar que se considerarán dos conceptos importantes que son:

1. El uso de un conjunto de índices para determinar el nodo del modelo.
2. El uso de un conjunto de índices especial (denominado *estadio de tiempo*) que caracteriza al tiempo en el cual se efectúan los muestreos de datos.

2.1 Proceso Específico

Consideremos un proceso a modelar al cual llamaremos *Proceso Específico*. A dicho proceso específico intentaremos que se "adapte" un modelo matemático (*Red Funcional*) que más adelante definiremos.

Estas son las partes que integran a un proceso específico:



Donde cada una de las partes de dicho proceso son las siguientes:

Definición 1 (ESTADIO DE TIEMPO) Definimos un Estadio de Tiempo (I) como un conjunto de índices (de cardinalidad numerable o no numerable).

La idea de *estadio de tiempo* corresponde al espacio de tiempo durante el cual se realizan los muestreos o tomas de los datos del entorno y por ende de las reacciones del proceso a su entorno.

Nota 1 Entenderemos que un estado de tiempo I es discreto (i.e. de cardinalidad numerable) a menos que se especifique lo contrario.

Definición 2 (DATOS DEL ENTORNO) Sea I un estado de tiempo. Definimos a los Datos del Entorno (φ) durante el estado de tiempo I como un conjunto de valores $(\varphi_i \in \mathbb{R}, i \in I)$ los cuales representan a los distintos estados del entorno recabados que afectan al proceso en estudio en cada estado de tiempo i ($\varphi = \{\varphi_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$).

Definición 3 (REACCION DEL PROCESO A SU ENTORNO) Sea I un estado de tiempo. Definimos la Reacción del Proceso a su Entorno (ψ) durante el Estado de tiempo I como los correspondientes valores $(\psi_i \in \mathbb{R}, i \in I)$ obtenidos por la reacción del proceso a su entorno en cada estado de tiempo i ($\psi = \{\psi_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$).

Definición 4 (PROCESO ESPECIFICO) Sea I un estado de tiempo, φ los datos del entorno y ψ la reacción del proceso a su entorno. Definimos el Proceso Especifico (Ω) como la situación que deseamos analizar mediante la modelación. Podemos ver al Proceso específico como una transformación $\Omega: \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$, dada por $\varphi \xrightarrow{\Omega} \psi$.

Definición 5 (VECTOR DE DATOS DEL ENTORNO) Sea I un estado de tiempo y sean $(\varphi)_1, (\varphi)_2, \dots, (\varphi)_l$ datos del entorno sobre I . Definimos a un vector de datos del entorno como el conjunto ordenado $\vec{\varphi} = ((\varphi)_1, (\varphi)_2, \dots, (\varphi)_l)$, donde $(\varphi)_i = \{\varphi_j \in \mathbb{R} \mid j \in I\} \forall i = 1, 2, \dots, l$.

Nota 2 Si $\vec{\varphi}$ es un vector de datos del entorno, podemos representar a $(\varphi)_j \in \vec{\varphi}$ como $\varphi_{j,i}$, i.e. $\vec{\varphi} = \{\varphi_{j,i} \mid j \in I, i \in \{1, 2, \dots, l\}\}$.

Nota 3 Podemos considerar al conjunto $\{1, 2, \dots, l\}$ como un subconjunto de un conjunto de índice.

Definición 6 (INTERVALO DE DATOS DEL ENTORNO) Sean I_1 conjunto de índices e I_2 estado de tiempo. $\forall j \in I_1$ sean $(\varphi)_j$ los distintos datos del entorno. Definimos un Intervalo de Datos del Entorno ($\vec{\varphi}$) como el conjunto:

$$\vec{\varphi} = \{\varphi_{j,i} \in \mathbb{R} \mid i \in I_1, j \in I_2\}$$

o lo que es lo mismo:

$$\vec{\varphi} = \{(\varphi)_j = \{\varphi_{j,i} \in \mathbb{R} \mid j \in I_2\} \mid i \in I_1\}$$

Ejemplo 1 Supongamos que $I_1 = [a, b] \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices, $I_2 = \{1, l\} \subset \mathbb{R}$ estado de tiempo. Entonces el intervalo de datos del entorno correspondiente a I_1 e I_2 sería:

$$\vec{\varphi} = \{\varphi_{x,y} \in \mathbb{R} \mid y \in I_1, x \in I_2\}.$$

Nota 4 Un intervalo de datos del entorno $\bar{\varphi}$ sobre I_1 e I_2 es posible caracterizarlo en términos de una familia de funciones de la siguiente manera: $\bar{\varphi} \in \{\varphi : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Es de esta manera que un problema particular lo podemos caracterizar por una transformación del conjunto de datos de entrada (φ) en el conjunto de datos de salida (ψ) de dicho proceso.

Esta manera de ver el problema específico nos permite extraerle la acción que ejerce el medio y su reacción en cierto estado de tiempo t .

En este caso, al hacer referencia a un proceso específico se trata de determinar un tipo de situación a modelar en la cual podamos separarla en las tres partes ya definidas que integran al proceso específico, siendo el proceso específico un proceso bien caracterizado mediante los datos que fluyen a este (datos del entorno) y aquellas reacciones que tiene dicho proceso específico, siendo denominadas reacciones del proceso a su entorno.

Es importante notar que el intervalo de tiempo puede ser de tipo discreto o continuo, siendo esto importante ya que este será un intervalo de entrenamiento (o aprendizaje) al que someteremos a nuestra estructura modeladora (Red Funcional).

2.2 Concepto de Red Funcional

Con base en la forma como funciona el sistema nervioso neuronal en los animales y como es llevado dicho proceso a un modelo mediante Redes Neuronales Artificiales, la intención es crear una estructura tal que permita conservar las características de modelación de las Redes Neuronales Artificiales, pero que a su vez tenga la libertad de permitirnos mejorar sus capacidades adaptativas de modelación.

De esta manera surgen las siguientes definiciones:

Sea $M_{I \times I}(\mathbb{K}) = \{M : I \times I \rightarrow \mathbb{K}\}$, donde I conjunto de índices y \mathbb{K} un campo completo ordenado (usaré el conjunto de los números reales \mathbb{R} como campo en lo subsiguiente).

Si $M \in M_{I \times I}(\mathbb{K})$ entonces $M = \{w_{i,j} \in \mathbb{K} \mid i, j \in I\}$

Definición 7 Sea I un conjunto de índices, $\mathcal{W} \in M_{I \times I}(\mathbb{R})$, $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$. Definimos $\mathcal{W} : M_{I \times I}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{I}^2$ como $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{W}) = \{(i, j) \in I \times I \mid w_{i,j} \neq 0\}$.

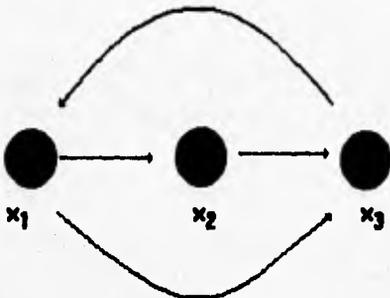
Nota 5 Si $I = \{1, 2, \dots, n\}$ con $\mathcal{W} \in M_{I \times I}(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{W}(\mathcal{W}) = \{(i, j) \mid w_{i,j} \neq 0\}$

Definición 8 Sean I un conjunto de índices, $\mathcal{X} = \{x_t \in \mathbb{R} \mid t \in I\}$, $\mathcal{W} \in M_{I \times I}(\mathbb{R})$. Entonces definimos $\dot{\mathcal{X}}: M_{I \times I}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$ como $\dot{\mathcal{X}} = \dot{\mathcal{X}}(\mathcal{W}, \mathcal{X}) = \{\dot{x}_t = \delta_t x_t \mid \delta_t = \begin{cases} 1 & , \exists j \in I \text{ tal que } (j, t) \in \mathcal{W}(\mathcal{W}) \\ 0 & , \forall j \in I \text{ tal que } (j, t) \in \mathcal{W}(\mathcal{W}) \end{cases}, t \in I\}$

Nota 6 Si $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\mathcal{W} = (w_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}$ entonces $\dot{\mathcal{X}}: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\dot{\mathcal{X}}(\mathcal{W}, \mathcal{X}) = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$, $\dot{x}_t = \begin{cases} x_t & , \exists w_{i,j} \neq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ 0 & , \forall j, w_{j,i} = 0 \end{cases}$

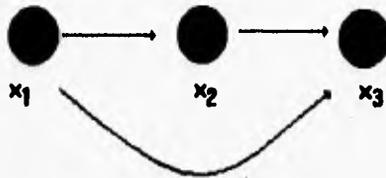
Ejemplo 2 Supongamos lo siguiente: $I = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Entonces como $w_{1,2} \neq 0$, $w_{2,3} \neq 0$ y $w_{3,1} \neq 0$ se tiene que $\dot{\mathcal{X}}(\mathcal{W}, \mathcal{X}) = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathcal{W}(\mathcal{W}) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$.



Ejemplo 3 Supongamos lo siguiente: $I = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Entonces como $w_{1,2} \neq 0$ y $w_{2,3} \neq 0$ se tiene que $\dot{\mathcal{X}}(\mathcal{W}, \mathcal{X}) = \{x_1, x_2, 0\}$, $\mathcal{W}(\mathcal{W}) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.



Definición 9 (RED FUNCIONAL) Sean $\vec{\varphi}, \vec{\psi}$ respectivamente un vector de datos del entorno y un vector de reacción del proceso a su entorno durante el estado de tiempo I_0 y sea I un conjunto de índices. Definimos una Red Funcional (RF) en $\vec{\varphi}$ como el conjunto dado por la terna $RF \equiv \langle \mathcal{X}, \mathcal{W}, \mathcal{F} \rangle$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 \cup \mathcal{X}_3$, con $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j = \emptyset \forall i \neq j$.

Sean $\inf(I), I, J, O \in I$ índices tales que: $\inf(I) < I < J < O = \sup(I)$.

$\mathcal{X}_1 = \{x_i \mid t \in [\inf(I), I] \subset \mathbb{R}\} \neq \emptyset \quad \equiv$ "Capa de entrada con datos $\vec{\varphi}$ "

$\mathcal{X}_2 = \{x_i \mid t \in (I, I+J) \subset \mathbb{R}\} \quad \equiv$ "Capa intermedia"

$\mathcal{X}_3 = \{x_i \mid t \in (I+J, I+J+O) \subset \mathbb{R}\} \neq \emptyset \quad \equiv$ "Capa de salida con datos $\vec{\psi}$ "

2. $\mathcal{W} \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$.

3. $\mathcal{F} = \{h: M_{1 \times 1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}\}$

4. Para cada $j \in I_0$:

$$\begin{cases} \forall i \in I \text{ tal que } x_i \in \mathcal{X}_1 \Rightarrow x_i = \varphi_{j,i} \\ \forall i \in I \text{ tal que } x_i \in \mathcal{X}_3 \Rightarrow x_i = \psi_{j,i} \\ \forall i \in I \text{ tal que } x_i \in \mathcal{X}_2 \cup \mathcal{X}_3 \Rightarrow x_i = F(\mathcal{W}, \mathcal{X}, i) = f(g(\mathcal{X}(\mathcal{W}, \mathcal{X}), i)) \end{cases}$$

con $F \in \mathcal{F}$, $g: \mathbb{R}^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2.2.1 Red Funcional Discreta

Como anteriormente se mencionó, necesitamos que el *Proceso Especifico* quede adaptado por la *Red Funcional (RF)* propuesta, lo que implicaría una equivalencia entre el *Proceso* en estudio y la *RF* de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} \vec{\varphi} & \rightarrow & \boxed{\Omega} \rightarrow \vec{\psi} \\ & & \downarrow \\ \vec{\varphi} & \rightarrow & \boxed{RF} \rightarrow \vec{\psi} \end{array} \quad (2.1)$$

Donde la primera línea de (2.1) corresponde a información propia del *Proceso Especifico* (o sea del proceso a modelar), mientras que la segunda línea corresponde a lo que debe cumplir el modelo (en este caso la *Red Funcional*), para tener el mismo comportamiento que el proceso especifico Ω .

Nota 7 Sea Γ una *Red Funcional* dada por $\langle \mathcal{X}, \mathcal{W}, \mathcal{F} \rangle$ en $\vec{\varphi}$, se cumple lo siguiente:

1. $\vec{\varphi} = \varphi \in \mathbf{R} \iff \#\mathcal{X}_1 = 1$
2. $\vec{\psi} = \psi \in \mathbf{R} \iff \#\mathcal{X}_3 = 1$

donde $\#\mathcal{X}$ corresponde a la cardinalidad o número de elementos del conjunto \mathcal{X} .

Definición 10 (EQUIVALENCIA) Sea I un estado de tiempo, $\vec{\varphi}$ un vector de datos del entorno sobre I . Decimos que un *Proceso Especifico* es equivalente en el estado de tiempo I a una *Red Funcional* en $\vec{\varphi}$ (Notación: **Proceso Especifico** \longleftrightarrow **RF**) $\iff \forall \varphi_{j,i} \in \vec{\varphi}, \forall \psi_{j,i} \in \vec{\psi}$ se cumple que:

$$\text{Proceso Especifico}(\varphi_{j,i}) = \psi_{j,i} \implies \text{RF}(\varphi_{j,i}) = \psi_{j,i} \\ j \in I, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Definición 11 (ADAPTACION) Decimos que una *Red Funcional* (Γ) se adapta a un *Proceso Especifico* (Ω) en el entorno $\vec{\varphi}$ (con los datos del entorno $\vec{\varphi}$) $\iff \Gamma \longleftrightarrow \Omega$.

Proposición 1 Una *Red Neuronal Artificial (RNA)* es una *Red Funcional* ($\Gamma = \langle \mathcal{X}, \mathcal{W}, \mathcal{F} \rangle$) con la peculiaridad de que si $F \in \mathcal{F}$ debe ser una función predefinida no decreciente y $g[\dot{\mathcal{X}}(\mathcal{W}, \mathcal{X}), i] = \hat{e}_i \cdot \left(\dot{\mathcal{X}} \cdot \mathcal{W} \right)^i$, con $\hat{e}_i = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{i-1 \text{ ceros}}, 1, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-i \text{ ceros}}$:

$$F(\mathcal{W}, \mathcal{X}, i) = f(g[\dot{\mathcal{X}}(\mathcal{W}, \mathcal{X}), i]) = f\left(\sum_j w_{j,i} \cdot x_j\right) \\ w_{j,i} \in \mathcal{W}$$

Definición 12 (RED FUNCIONAL DISCRETA) Sea Γ una Red Funcional en \mathcal{F} sobre el estado de tiempo I_0 de la forma $\Gamma = \langle X, W, F \rangle$ y sea I un conjunto de índices. Decimos que Γ es una Red Funcional Discreta $\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{F}, \varphi = \{\varphi_{j,i} \in \mathbb{R} \mid j \in I_0, i \in I, I \text{ de cardinalidad a lo mas infinita numerable}\}$

Los conceptos anteriores pueden ser generalizados a casos en los cuales los datos del entorno no sean muestras discretas, sino que tengan la posibilidad de considerarse conjuntos de datos continuos (o por lo menos no discretos).

De esta manera se tiene que la reacción del proceso específico a su entorno también heredará la característica de ser no discreta.

2.2.2 Planteamiento de la Red Funcional Continua

Definición 13 (DATOS DEL ENTORNO DURANTE UN ESTADIO DE TIEMPO)

Sean I_1, I_2 estados de tiempo y φ, ψ los datos del entorno y la reacción del proceso respectivamente. Denotamos a $\varphi|_{I_1}$ como los datos del entorno durante el estado de tiempo I_1 y a $\psi|_{I_2}$ como la reacción del proceso durante el estado de tiempo I_2 .

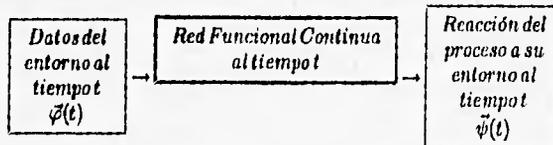
Ejemplo 4 Si $I_1 = \{1, 2, 3\}$, $I_2 = \{6, 7, 4\}$ entonces $\varphi|_{I_1} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, $\psi|_{I_2} = \{\psi_4, \psi_6, \psi_7\}$.

Nota 8 Podemos considerar a $\varphi|_{I_1}$ como una función de la forma $\varphi(t)$ con $t \in I_1$, y de la misma manera a $\psi|_{I_2}$ como la función $\psi(t)$ con $t \in I_2$, donde $\varphi: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

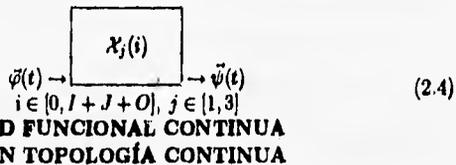
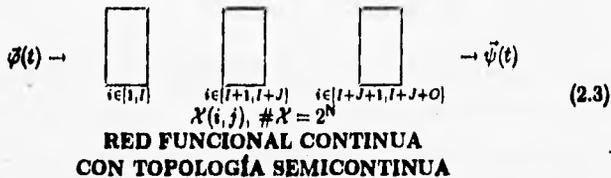
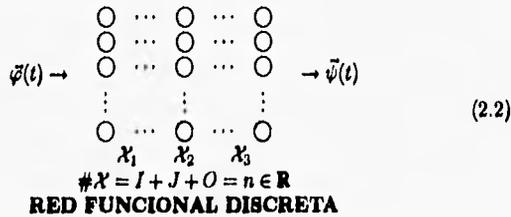
Definición 14 (RED FUNCIONAL CONTINUA) Sea Γ una Red Funcional en \mathcal{F} sobre el estado de tiempo I_0 de la forma $\Gamma = \langle X, W, F \rangle$ y sea I un conjunto de índices. Decimos que Γ es una Red Funcional Continua $\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{F}, \varphi = \{\varphi_{j,i} \in \mathbb{R} \mid j \in I_0, i \in I, I \text{ de cardinalidad infinita no numerable}\}$

Nota 9 Dados I (un estado de tiempo no numerable), Γ (una Red Funcional Continua sobre $\varphi|_I$) y dado un proceso específico Ω de $\varphi|_I$ en ψ tenemos entonces que $\psi = \{\psi_i \mid i \in I, I \text{ no numerable}\}$, (i.e. $\varphi|_I \xrightarrow{\Omega} \psi|_I$).

Esta definición nos permite trabajar con la misma estructura de Red Neuronal Artificial que hasta ahora hemos usado, pero con la peculiaridad de que el proceso al que se adapte dicho modelo se encuentre en un "medio continuo" (ver siguiente figura).



Ahora bien, podríamos crear una generalización de este concepto en lo que respecta a la topología de la Red Funcional, considerando en vez de neuronas "grupos no numerables de neuronas" unidas, formando barras (ver figura 2.3).



En los casos anteriores consideramos capas de transferencia de neuronas a neuronas (o de nodos a nodos). De esta forma obtenemos las siguientes definiciones:

Definición 15 (RED FUNCIONAL CONTINUA CON TOPOLOGIA SEMI-CONTINUA) Sea φ un intervalo de datos del entorno sobre el estado de tiempo I_0 y el conjunto de índices I , Γ una Red Funcional Continua en φ . Decimos que Γ es una RF Continua en φ con Topología Semicontinua $\Leftrightarrow \Gamma = \langle W, X, F \rangle$ cumple lo siguiente:

$$1. I = [1, I] \cup [I + 1, I + J] \cup [I + J + 1, I + J + O] \subset \mathbb{R}$$

$$2. \forall i \in I_0 :$$

$$a) \forall t \in I \text{ tal que } x_t \in X_1 \Rightarrow x_t = \varphi_{i,t}$$

$$b) \forall t \in I \text{ tal que } x_t \in X_2 \cup X_3 \Rightarrow x_t = F(W, X, t)$$

$$c) \forall t \in I \text{ tal que } x_t \in X_3 \Rightarrow x_t = \psi_{i,t}$$

Definición 16 (RED FUNCIONAL CONTINUA CON TOPOLOGIA CONTINUA) Sea $\bar{\varphi}$ un intervalo de datos del entorno sobre el estado de tiempo I_0 y el conjunto de índices I, Γ una Red Funcional Continua en $\bar{\varphi}$. Decimos que Γ es una Red Funcional Continua en $\bar{\varphi}$ con Topología Continua $\Leftrightarrow \Gamma = \langle W, X, F \rangle$ cumple lo siguiente

$$1. I = [1, I + J + O] \times [1, 3] \subset \mathbb{C}$$

$$2. \forall i \in I_0 :$$

$$a) \forall t \in I \text{ tal que } x_t \in X_1 \Rightarrow x_t = \varphi_{i,t}$$

$$b) \forall t \in I \text{ tal que } x_t \in X_2 \cup X_3 \Rightarrow x_t = F(W, X, t)$$

$$c) \forall t \in I \text{ tal que } x_t \in X_3 \Rightarrow x_t = \psi_{i,t}$$

2.3 Modelación con Redes Funcionales Discretas

Para obtener una red funcional discreta adaptada a un proceso específico, considérense los siguientes tres tipos de estructura de la Red Funcional Discreta:

1. de TIPO SERIAL.
2. de TIPO SECUENCIAL.
3. de TIPO GENERAL.

De modo que para cada uno de estos tres casos se prescinde de un análisis por separado.

2.3.1 Análisis del caso 1

Definición 17 (RED FUNCIONAL DISCRETA SERIAL) Una red funcional $(\Gamma = \langle X, W, F \rangle)$ es de tipo serial $\Leftrightarrow W = (w_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}$ está dada como:

$$W = \begin{cases} w_{i,j} & j = i + 1, i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora bien, sea Ω un proceso específico caracterizado por:

$$\begin{aligned} \text{Datos del Entorno} &\equiv \varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\} \\ \text{Reacción del Proceso a su Entorno} &\equiv \psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots\} \end{aligned}$$

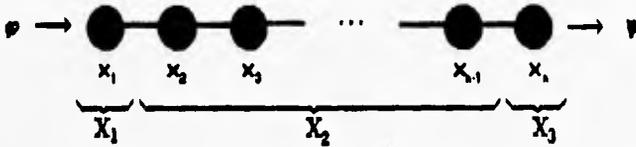


Figura 2.1:

Sea Γ una Red Funcional de tipo serial discreta, entonces si deseamos que Γ modele a Ω ($\Gamma \xleftrightarrow{\varphi} \Omega$), esta debe cumplir lo siguiente:

1. Interconexiones (topología) de Γ , obtenida mediante \mathcal{W} :

En este caso como Γ es de tipo serial, sabemos que tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{W} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & w_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{2,3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

con $w_{i,j} \in \mathbb{R}$; $\forall i$, con $j = i + 1$, por lo que el conjunto de índices de nodos a considerar está determinado por: $\mathcal{W}(\mathcal{W}) = \{(i, j) \mid j = i + 1, i = 1, 2, \dots, n - 1\}$ (ver figura 2.1)

2. Por la definición de *RF Discreta* se debe cumplir que

$$\forall x_i \in \mathcal{X}_2 \cup \mathcal{X}_3 \Rightarrow x_i = F(\mathcal{W}, \mathcal{X}, i) = f(g[\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{W}, \mathcal{X}), i]) \quad (2.5)$$

$$= f(g[(0, \dots, 0, x_{i-1}, 0, \dots, 0), i]) = f(x_{i-1}) \quad (2.6)$$

$$\therefore \forall s \in I, x_s = f(x_{s-1})$$

Resultando $g(\mathcal{W}, \mathcal{X}, i) = x_{i-1}$ y \mathcal{W} utilizada únicamente para especificar la topología de la Red Funcional Discreta. Es de esta manera que la función

f , queda dada mediante la solución al siguiente sistema de ecuaciones funcionales en f :

$$\begin{cases} x_1 = \varphi \\ x_2 = f(x_1) = f(\varphi) \\ x_3 = f(x_2) = f^2(\varphi) \\ \vdots \\ x_k = f(x_{k-1}) = f^{(k-1)}(\varphi) \\ \vdots \\ \begin{cases} x_n = f(x_{n-1}) = f^{(n-1)}(\varphi) \\ x_n = \psi \end{cases} \end{cases} \quad (2.7)$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi \\ x_n = \psi \\ x_k = f(x_{k-1}), \quad k = 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.8)$$

Pudiéndose interpretar esto como una ecuación funcional en f con valores a la frontera φ y ψ . Esto nos lleva al caso en que se tienen un conjunto s de datos del entorno:

$$\begin{cases} \psi_1 = f^{n-1}(\varphi_1) \\ \psi_2 = f^{n-1}(\varphi_2) \\ \vdots \\ \psi_s = f^{n-1}(\varphi_s) \end{cases} \quad (2.9)$$

Correspondiendo a un sistema de ecuaciones funcionales iterativo en f teniendo como una posible solución (ver capítulo 4):

$$f(\varphi) = \frac{\log(\lim_{n \rightarrow \infty} s^{-n} g^n(\varphi))}{\log(s)}$$

$$s = g'(0)$$

$$\psi(\varphi) = g(\varphi)$$

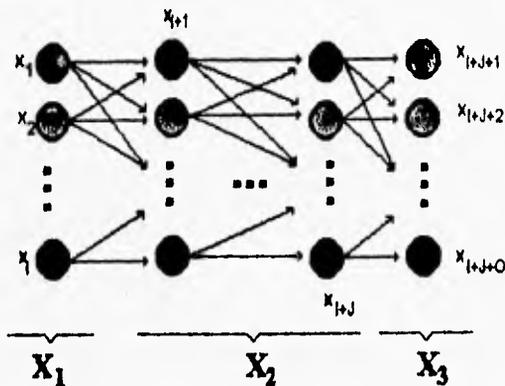


Figura 2.2:

2.3.2 Análisis del caso 2

Definición 18 (RED FUNCIONAL DISCRETA SECUENCIAL) Decimos que una Red Funcional discreta es de tipo secuencial $\Leftrightarrow \mathcal{W} = (w_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ esta dada como:

$$\mathcal{W} = \begin{cases} w_{i,j} & , i < j \\ 0 & , i \geq j \end{cases}$$

En este caso la estructura queda gráficamente caracterizada por la figura (2.2)

Ahora bien, sea Ω un proceso específico caracterizado por :

Vector de Datos del Entorno $\equiv \vec{\varphi} = \{(\varphi)_1, (\varphi)_2, \dots, (\varphi)_s, \dots\}$
Vector de Reacción del Proceso a su Entorno $\equiv \vec{\psi} = \{(\psi)_1, (\psi)_2, \dots, (\psi)_s, \dots\}$

y tomemos a Γ como una RF Discreta de Tipo Secuencial con la cual deseamos modelar a Ω , por lo tanto tenemos que Γ debe cumplir lo siguiente:

1. Interconexiones o Topología de Γ :

Como Γ es secuencial tenemos que

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w_{1,2} & \cdots & w_{1,n-1} & w_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & w_{2,n-1} & w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & w_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo cual el conjunto de índices de nodos a considerar queda determinado por: $\mathcal{W}(W) = \{(i, j) \mid i < j\}$ (ver figura 2.2)

2. Para determinar la función $F \in \mathcal{F}$ tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$x_i = \begin{cases} (\varphi_i)_k & x_i \in \mathcal{X}_1 \\ (\psi_{i-j})_k & x_i \in \mathcal{X}_2 \\ F(W, \mathcal{X}, i) & x_i \in \mathcal{X}_2 \cup \mathcal{X}_3 \\ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

donde:

$$F(W, \mathcal{X}, i) = f(g[\dot{\mathcal{X}}(W, \mathcal{X}), i]) = f(g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, 0), i)$$

Desglosando el sistema de ecuaciones funcionales en F obtenemos las siguientes expresiones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = (\varphi_1)_k \\ x_2 = (\varphi_2)_k \\ \vdots \\ x_I = (\varphi_I)_k \\ x_{I+1} = F(W, \mathcal{X}, I+1) \\ x_{I+2} = F(W, \mathcal{X}, I+2) \\ \vdots \\ x_{I+J} = F(W, \mathcal{X}, I+J) \\ x_{I+J+1} = F(W, \mathcal{X}, I+J+1) \\ \vdots \\ x_{I+J+O} = F(W, \mathcal{X}, I+J+O) \\ x_{I+J+1} = (\psi_1)_k \\ x_{I+J+2} = (\psi_2)_k \\ \vdots \\ x_{I+J+O} = (\psi_O)_k \end{array} \right.$$

desprendiéndose de lo anterior que:

$$\forall x_i \in \mathcal{X}_2 \cup \mathcal{X}_3 \Rightarrow x_i = F(\mathcal{W}, \mathcal{X}, i) = f(g((x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, 0), i)) \quad (2.10)$$

siendo este un proceso iterativo de la misma forma que en el caso ya analizado de tipo 1.

Consideremos para este caso que $g((x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, 0), i) = \hat{e}_i \cdot \mathcal{X} = \sum_{j=1}^n x_j$, de forma similar a como sucede con las Redes Neuronales Artificiales, donde $\hat{e}_i = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésimo elemento}}, 0, \dots, 0)$.

Tenemos que nuestro sistema de ecuaciones funcionales en f de tipo iterativo nos queda como:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = (\varphi_1)_k \\ x_2 = (\varphi_2)_k \\ \vdots \\ x_l = (\varphi_l)_k \\ x_{l+1} = f\left(\sum_{j=1}^l x_j\right) = f(\gamma) \\ x_{l+2} = f\left(\sum_{j=1}^{l+1} x_j\right) = f(\gamma + x_{l+1}) = f(\gamma + f(\gamma)) \\ x_{l+3} = f\left(\sum_{j=1}^{l+2} x_j\right) = f(\gamma + f(\gamma) + x_{l+2}) = f(\gamma + f(\gamma) + f(\gamma + f(\gamma))) \\ \vdots \\ x_{l+j+1} = (\psi_1)_k \\ x_{l+j+2} = (\psi_2)_k \\ \vdots \\ x_{l+j+o} = (\psi_o)_k \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$$\text{con } \gamma = \sum_{j=1}^l x_j.$$

Haciendo $\lambda_k = x_{l+k}$ tenemos que el sistema de ecuaciones nos queda como:

$$\begin{cases} \lambda_1 = f(\gamma) = f(T_0) \\ \lambda_2 = f(\gamma + f(\gamma)) = f(T_1) \\ \lambda_3 = f(T_1 + f(T_1)) = f(T_2) \\ \vdots \\ \lambda_k = f(T_{k-1}) \end{cases}$$

siendo

$$\begin{cases} T_0 = \gamma \\ T_k = T_{k-1} + f(T_{k-1}) \end{cases}$$

$\therefore T$ cumple con la ecuación funcional de translación, ya que $T_n(T_m(\gamma)) = T_{m+n}(\gamma)$, que tiene como posible solución:

$$\begin{cases} T_k(\gamma) = \sigma(\sigma^{-1}(\gamma) + k) \\ T_0(\gamma) = \gamma \end{cases}$$

Esta última ecuación nos lleva a la ecuación funcional de Abel, siendo una posible solución la siguiente (ver capítulo 4):

$$\sigma(\gamma) = \frac{\log(\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{-n} T_1^n(\gamma))}{\log(s)} \\ s = T_1'(0)$$

2.3.3 Análisis del caso 3

Definición 10 (RED FUNCIONAL DISCRETA GENERAL) Una Red Funcional Discreta General es una Red Funcional Discreta con la característica de que $\mathcal{W} = (w_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, $w_{i,j} \in \mathbb{R}$.

En este caso contemplamos que la topología de la redes es arbitraria, lo que implica que:

$$\mathcal{W} = (w_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,n} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & w_{n,2} & \cdots & w_{n,n} \end{pmatrix}$$

En lo que respecta al sistema de ecuaciones funcionales en F , este quedaría como:

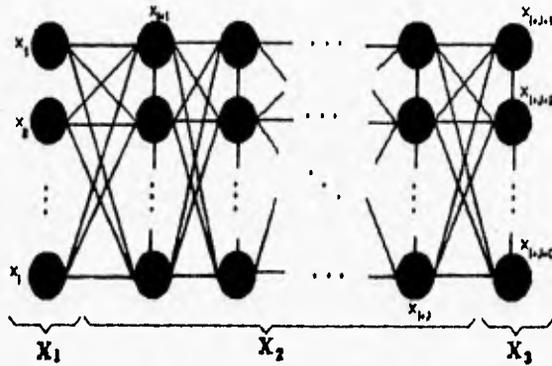


Figura 2.3:

$$x_i = \begin{cases} (\varphi_i)_k & , x_i \in X_1 \\ (\psi_i)_k & , x_i \in X_3 \\ F(W, X, i) & , x_i \in X_2 \cup X_3 \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}$$

Ver figura 2.3

2.4 Algebra con Redes Funcionales

Una primera impresión respecto al potencial obtenible al manejar una Red Funcional adaptada a un proceso específico, es que dicha Red Funcional se encuentra adaptada durante un estado de tiempo específico, lo cual nos hace pensar que al extender dicho estado de tiempo a uno mayor podemos analizar lo que sucede en el estado de tiempo ampliado, que en si corresponde a información aun no conocida del comportamiento del proceso específico.

Definición 20 (EXTENSION DE ESTADO DE TIEMPO) Sea I_0 un estado de tiempo. Decimos que I_1 es una Extensión del Estado de Tiempo $I_0 \iff I_0 \subset I_1$

Hasta el momento, el análisis hecho ha correspondido a la adaptación de una *RF* a un proceso específico. Es común en muchos casos que un problema (en nuestro caso un proceso específico) sea partido en subproblemas mas sencillos para intentar así resolver cada uno de estos subproblemas.

Esto en sí no es nuevo, ya que es parte de la metodología ampliamente utilizada por el científico, pero en nuestro análisis sobre *RF*, si regresamos momentáneamente al origen de éstas, desde el punto de vista neurofisiológico tendríamos que dividir todo el sistema nervioso animal en subsistemas nerviosos (por ejemplo el correspondiente a la vista en particular, o al tacto o al olfato, etc.) considerados usualmente como sentidos. De esta manera es notable que son en gran medida independientes estos subsistemas o sentidos unos de otros, que a su vez unidos forman el sistema nervioso del animal (siendo esta la cualidad que caracteriza a un sistema).

De esta misma forma, consideremos que el sistema nervioso es nuestro proceso específico, de este es posible entresacar subprocesos específicos los cuales unidos conforman al proceso específico.

Definición 21 (PROCESOS ESPECÍFICOS INDEPENDIENTES) Sean I_1 e I_2 estadíos de tiempo y sean Ω_1, Ω_2 procesos específicos sobre $\varphi_1|_{I_1}$ y $\varphi_2|_{I_2}$, respectivamente. Decimos que Ω_1 y Ω_2 son Procesos Específicos Independientes $\Leftrightarrow \tilde{\psi}_1 \neq \tilde{\psi}_2$.

Definición 22 (PROCESOS ESPECÍFICOS AJENOS) Sean I_1 e I_2 estadíos de tiempo y sean Ω_1, Ω_2 procesos específicos sobre $\varphi_1|_{I_1}$ y $\varphi_2|_{I_2}$, respectivamente. Decimos que Ω_1 y Ω_2 son Procesos Específicos Ajenos $\Leftrightarrow I_1 \neq I_2$ (i.e. $\exists x \in I_1 \cup I_2$ tal que $x \notin I_1 \cap I_2$).

Definición 23 (SUBPROCESO ESPECÍFICO) Definimos a un Subproceso Específico Ω_0 de un Proceso Específico Ω como aquel que cumple con $\varphi_0|_{I_0} \subset \varphi|_I$, donde φ_0 son los datos del entorno de Ω_0 y φ son los datos del entorno de Ω .

Teorema 1 Sean Ω_1, Ω_2 procesos específicos sobre $\varphi_1|_{I_1}$ y $\varphi_2|_{I_2}$, respectivamente $\Rightarrow \exists \Omega$ proceso específico sobre $\varphi|_I$ tal que Ω_1 y Ω_2 son procesos específicos de Ω y además $\varphi|_I = (\varphi_1|_{I_1} \cup \varphi_2|_{I_2})$ con $I = I_1 \cup I_2$.

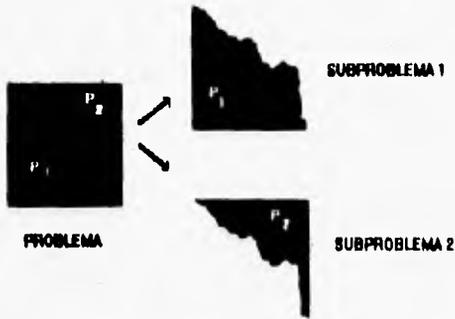
Demostración :

Sea Ω un proceso específico sobre $\varphi|_I$ tal que $\varphi|_I = \varphi_1|_{I_1} \cup \varphi_2|_{I_2}$, entonces $\varphi_1|_{I_1} \subset \varphi|_I$ y $\varphi_2|_{I_2} \subset \varphi|_I$.

$\therefore \Omega_1, \Omega_2$ son subprocesos específicos de Ω , donde $I = I_1 \cup I_2$.

■

Este último teorema nos dice que para cualquier par de procesos específicos, siempre existe un proceso específico que los englobe como subprocesos específicos.



De este modo podemos ver a los procesos específicos como sistemas compuestos de subsistemas.

Teorema 2 Sean $\Gamma_1 \xleftrightarrow{\varphi_1} \Omega_1$ y $\Gamma_2 \xleftrightarrow{\varphi_2} \Omega_2$, con Ω_1, Ω_2 subproceso específicos independientes y sea Ω un problema específico compuesto por Ω_1 y Ω_2 . Entonces $\exists \Gamma$ Red Funcional tal que $\Gamma_1 \subset \Gamma$ y $\Gamma_2 \subset \Gamma$.

Demostración:

Sean $\Gamma_1 = \langle \mathcal{X}^{(\Gamma_1)}, \mathcal{W}^{(\Gamma_1)}, \mathcal{F}^{(\Gamma_1)} \rangle$, $\Gamma_2 = \langle \mathcal{X}^{(\Gamma_2)}, \mathcal{W}^{(\Gamma_2)}, \mathcal{F}^{(\Gamma_2)} \rangle$.

Como $\Gamma_1 \xleftrightarrow{\varphi_1} \Omega_1$ entonces $\forall x \in \varphi_1 \Rightarrow \exists! y \in \vec{\psi}_1$ tal que $\Omega_1(x) = y = \Gamma_1(x)$

y en forma análoga como $\Gamma_2 \xleftrightarrow{\varphi_2} \Omega_2$, entonces $\forall x \in \varphi_2 \Rightarrow \exists! y \in \vec{\psi}_2$ tal que $\Omega_2(x) = y = \Gamma_2(x)$. Además como Ω_1, Ω_2 subproceso específicos independientes de Ω entonces $\varphi_1 \subset \varphi$ y $\varphi_2 \subset \varphi$ por lo cual si tomamos a $\Gamma = \langle \mathcal{X}, \mathcal{W}, \mathcal{F} \rangle$ tal que:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^{(\Gamma_1)} \cup \mathcal{X}^{(\Gamma_2)}$$

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}^{(\Gamma_1)} & \mathcal{W}^{(\Gamma_2)} \\ 0 & \mathcal{W}^{(\Gamma_2)} \end{pmatrix} \text{ con } \mathcal{W}^{(\Gamma_i)} = (w_{i,j}) \neq 0 \forall i, j$$

$$\boxed{\varphi_1 \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \vec{\psi}_1} \quad \boxed{\varphi_2 \rightarrow \Gamma_2 \rightarrow \vec{\psi}_2}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\vec{\varphi} = \begin{bmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_2 \end{bmatrix} = \vec{\psi}}$$

tomando a $F \in \mathcal{F}$ tal que $F(\mathcal{W}, \mathcal{X}, i) = \begin{cases} F^{(\Gamma_1)}(\mathcal{W}^{(\Gamma_1)}, \mathcal{X}^{(\Gamma_1)}, i), & \text{cuando } x \in \mathcal{X}^{(\Gamma_1)} \\ F^{(\Gamma_2)}(\mathcal{W}^{(\Gamma_2)}, \mathcal{X}^{(\Gamma_2)}, i), & \text{cuando } x \in \mathcal{X}^{(\Gamma_2)} \end{cases}$

por lo tanto se presentó $\Gamma = \langle \mathcal{X}, \mathcal{W}, \mathcal{F} \rangle$ Red Funcional .

Notemos que toda la estructura de la Red Funcional integrada por subredes funcionales implica conservar la independencia entre las sub redes funcionales.

Definición 24 (UNIÓN DE SUBPROCESOS ESPECÍFICOS) Sea el operador \vee dado como la unión de subprocesos específicos y sea $\underline{\vee}$ el operador unión de sub redes funcionales dados mediante:

$$\vee : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega$$

$$\underline{\vee} : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow \Gamma$$

Donde Ω_1 y Ω_2 son subprocesos específicos del proceso específico Ω , Γ_1 y Γ_2 son subredes funcionales de la red funcional Γ .

2.5 Solución de la Modelación con Redes Funcionales usando su Desarrollo en Series de Potencias

2.5.1 Desarrollo en Series de Potencias de la Red Funcional Serial

Supongamos que la función f de la ecuación (2.9) cumple ser $C_{\mathbb{R}}^{\infty}$, entonces podemos tomar como base (β) del espacio $C_{\mathbb{R}}^{\infty}$ a la serie formal de potencias en x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f \in C_{\mathbb{R}}^{\infty} \implies f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \alpha \cdot \beta$$

$$\alpha = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}; a_i \in \mathbb{R} \text{ coeficientes.} \quad (2.12)$$

$$\beta = \{\hat{e}_1 x^0, \hat{e}_2 x^1, \hat{e}_3 x^2, \dots\} \quad (2.13)$$

Siendo α una sucesión de reales, el problema de determinar la función f queda entonces en términos de encontrar la sucesión de coeficientes reales $\{\alpha_i\}_{i=0,1,\dots}$.

Tenemos entonces que si f lo tomamos en su desarrollo en series de potencias, el sistema de ecuaciones funcionales en f (2.9) nos queda como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} \alpha_{i_{n-1}} \left(\sum_{i_{n-2}=0}^{\infty} \alpha_{i_{n-2}} \left(\dots \sum_{i_2=0}^{\infty} \alpha_{i_2} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} \alpha_{i_1} \cdot \varphi_0^{i_1} \right)^{i_2} \dots \right)^{i_{n-2}} \right)^{i_{n-1}} \\ \psi_1 = \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} \alpha_{i_{n-1}} \left(\sum_{i_{n-2}=0}^{\infty} \alpha_{i_{n-2}} \left(\dots \sum_{i_2=0}^{\infty} \alpha_{i_2} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} \alpha_{i_1} \cdot \varphi_1^{i_1} \right)^{i_2} \dots \right)^{i_{n-2}} \right)^{i_{n-1}} \\ \vdots \\ \psi_s = \sum_{i_{n-1}=0}^{\infty} \alpha_{i_{n-1}} \left(\sum_{i_{n-2}=0}^{\infty} \alpha_{i_{n-2}} \left(\dots \sum_{i_2=0}^{\infty} \alpha_{i_2} \left(\sum_{i_1=0}^{\infty} \alpha_{i_1} \cdot \varphi_s^{i_1} \right)^{i_2} \dots \right)^{i_{n-2}} \right)^{i_{n-1}} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Solución mediante linealización

Ahora bien, si consideramos a la función $g(x) \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}$, dada por $g(x) = f^{n-1}(x)$, entonces el sistema de ecuaciones funcionales en f descrito en (2.9) lo podemos reescribir como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot \varphi_0^i \\ \psi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot \varphi_1^i \\ \vdots \\ \psi_s = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot \varphi_s^i \\ \vdots \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Siendo ahora $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot x^i$.

$$\text{Haciendo } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_0 & \varphi_0^2 & \dots & \varphi_0^s & \dots \\ 1 & \varphi_1 & \varphi_1^2 & \dots & \varphi_1^s & \dots \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_2^2 & \dots & \varphi_2^s & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \varphi_s & \varphi_s^2 & \dots & \varphi_s^s & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_s \\ \vdots \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \\ \vdots \end{pmatrix}$$

tenemos que (2.15) nos queda como un sistema de ecuaciones algebraicas de la forma:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2.16)$$

el cual es un sistema de ecuaciones lineales infinito en \mathbf{X} .

Es importante mencionar que el índice s corresponde a la cantidad de *datos del entorno del proceso específico* Ω , mientras que el índice r representa la precisión de la aproximación en series de potencias de la función g .

Aproximación de la función por un polinomio de grado r

Es ahora necesario resolver este sistema, para ello supongamos que estamos trabajando en Ω , teniendo una cantidad finita de *datos del entorno*, por lo cual $\# \varphi = s$, implicándonos que la función g quede como:

$$g(x) = \sum_{i=0}^r \alpha_i \cdot x^i \quad (2.17)$$

por lo que el sistema de ecuaciones correspondiente (2.15) resulta de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_0 & \varphi_0^2 & \cdots & \varphi_0^r & \cdots \\ 1 & \varphi_1 & \varphi_1^2 & \cdots & \varphi_1^r & \cdots \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_2^r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \varphi_s & \varphi_s^2 & \cdots & \varphi_s^r & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Con lo cual basta con tomar una r finita tal que este sistema tenga solución analítica, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_0 & \varphi_0^2 & \cdots & \varphi_0^r \\ 1 & \varphi_1 & \varphi_1^2 & \cdots & \varphi_1^r \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_2^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_s & \varphi_s^2 & \cdots & \varphi_s^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}$$

Con la peculiaridad de que la matriz que nos queda en este sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & \varphi_0 & \varphi_0^2 & \cdots & \varphi_0^r \\ 1 & \varphi_1 & \varphi_1^2 & \cdots & \varphi_1^r \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_2^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_s & \varphi_s^2 & \cdots & \varphi_s^r \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

resulta ser *Vandermonde* (ver capítulo: 5).

Por lo tanto la solución del sistema 2.16 donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_0 & \varphi_0^2 & \dots & \varphi_0^r \\ 1 & \varphi_1 & \varphi_1^2 & \dots & \varphi_1^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_s & \varphi_s^2 & \dots & \varphi_s^r \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_s \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix},$$

es obtenida mediante $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, siendo \mathbf{A}^{-1} como en (5.1).

$$\text{Entonces } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{s+1} (a_{1,i}^{-1})(\psi_i) \\ \sum_{i=1}^{s+1} (a_{2,i}^{-1})(\psi_i) \\ \sum_{i=1}^{s+1} (a_{3,i}^{-1})(\psi_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{s+1} (a_{s+1,i}^{-1})(\psi_i) \end{pmatrix}$$

Con base en la suposición (2.17) concluimos que como

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{s+1} (a_{1,i}^{-1})(\psi_i) \\ \sum_{i=1}^{s+1} (a_{2,i}^{-1})(\psi_i) \\ \sum_{i=1}^{s+1} (a_{3,i}^{-1})(\psi_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{s+1} (a_{s+1,i}^{-1})(\psi_i) \end{pmatrix}$$

entonces:

$$g(x) = \sum_{i=0}^r \alpha_i \cdot x^i = \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=1}^{s+1} (a_{j+1,i}^{-1})(\psi_i) \right) \cdot x^j \quad (2.20)$$

2.5.2 Desarrollo en Series de Potencias de la Red Funcional Secuencial

En el caso de la Red Funcional Secuencial, ésta queda determinada por el sistema de ecuaciones funcionales en f (ver 2.11):

$$\begin{cases} x_i = \begin{cases} (\varphi_k)_i & i \in \mathcal{X}_1, k \in \mathbb{N} \\ (\varphi_k)_{i-j-1} & i \in \mathcal{X}_3, k \in \mathbb{N} \end{cases} \\ x_i = f\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right), & i \in \mathcal{X}_2 \cup \mathcal{X}_3 \end{cases}$$

Con lo cual se obtiene el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = (\varphi_k)_1 \\ x_2 = (\varphi_k)_2 \\ \vdots \\ x_l = (\varphi_k)_l \\ x_{l+1} = f\left(\sum_{j=1}^l x_j\right) = f(\gamma) \\ x_{l+2} = f(\gamma + x_{l+1}) = f(\gamma + f(\gamma)) \\ x_{l+3} = f(\gamma + f(\gamma) + x_{l+2}) = f(\gamma + f(\gamma) + f(\gamma + f(\gamma))) \\ \vdots \\ x_{l+j+1} = (\psi_1)_k \\ x_{l+j+2} = (\psi_2)_k \\ \vdots \\ x_{l+j+0} = (\psi_0)_k \end{array} \right. \quad \gamma = \sum_{j=1}^l x_j$$

Si hacemos el cambio de variable $\lambda_k = x_{l+k}$ entonces el sistema de ecuaciones funcionales anterior queda en términos de λ como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = f(\gamma) \\ \lambda_2 = f(\gamma + f(\gamma)) = f(T_1) \\ \lambda_3 = f(T_1 + f(T_1)) = f(T_2) \\ \lambda_4 = f(T_1 + f(T_1) + f(T_1 + f(T_1))) = f(T_2 + f(T_2)) = f(T_3) \\ \vdots \\ \lambda_k = f(T_{k-1}) \end{array} \right.$$

con

$$\begin{cases} T_0 = \gamma \\ T_k = T_{k-1} + f(T_{k-1}) \end{cases}$$

Entonces haciendo $\phi(\gamma, k) = T_k(\gamma)$ obtenemos la propiedad de que nuestra función T cumple:

$$T_n(T_m(\gamma)) = T_{m+n}(\gamma) \iff \phi(\phi(\gamma, m), n) = \phi(\gamma, m+n)$$

lo que significa que ϕ satisface la ecuación funcional de translación. Por lo tanto :

$$\begin{cases} \phi(\gamma, k) = \sigma[\sigma^{-1}(\gamma) + k] \\ \phi(\gamma, 1) = F(\gamma) + \gamma \end{cases}$$

Que es la ecuación funcional de Abel en σ .

2.6 Modelación de Operadores Mediante Redes Funcionales

A continuación son enumeradas algunas definiciones sobre operadores, con las cuales se pretende establecer una relación entre un proceso específico y dichos operadores, intentando así modelarlos mediante redes funcionales.

Definición 25 (OPERADOR) Sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ dos conjuntos. Decimos que \oplus es un operador de \mathcal{V}_1 en \mathcal{V}_2 dado como $\oplus(f) = g$, donde $f \in \mathcal{V}_1, g \in \mathcal{V}_2$.

Ejemplo 5 Como ejemplo de operadores podemos considerar al "Operador Suma" en el conjunto $\mathcal{Z}_2 = \{0, 1\}$ definido como:

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

entonces vemos que queda bien definido \oplus como operador suma de $\mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_2$ en \mathcal{Z}_2 ya que $\forall f \in \mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_2 \exists g \in \mathcal{Z}_2$ tal que $\oplus(f) = g$:

$$\begin{aligned} f = (0, 0) &\Rightarrow \oplus(f) = 0 = g \in \mathcal{Z}_2 \\ f = (0, 1) &\Rightarrow \oplus(f) = 1 = g \in \mathcal{Z}_2 \\ f = (1, 0) &\Rightarrow \oplus(f) = 1 = g \in \mathcal{Z}_2 \\ f = (1, 1) &\Rightarrow \oplus(f) = 0 = g \in \mathcal{Z}_2 \end{aligned}$$

Veamos ahora algo sobre operadores lineales.

Definición 26 (OPERADOR LINEAL) Sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ espacios vectoriales sobre el campo \mathbb{K} . Decimos que el operador $\oplus : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ es lineal \iff para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}; f, g \in \mathcal{V}_1$ entonces $\oplus(\alpha f + \beta g) = \alpha \oplus(f) + \beta \oplus(g)$.

Cabe mencionar que existe una subclasificación de operadores lineales dada por operadores acotados y operadores cerrados.

Proposición 2 Sea Ω un proceso específico y Γ una red funcional tal que $\Omega \longleftrightarrow \Gamma$, entonces Ω y Γ son operadores y además el mismo operador.

Demostración :

Como Ω es un proceso específico, este queda por definición determinado por φ y ψ (datos del entorno y respuesta del proceso al entorno respectivamente).

Asimismo sabemos que Ω es un operador de φ en ψ , ya que $\forall \varphi_i \in \varphi \exists \psi_i \in \psi$ tal que $\Omega : \varphi \rightarrow \psi$

Por lo tanto como $\Omega \leftrightarrow \Gamma$, entonces se cumple en particular que $\Omega \leftrightarrow \Gamma$.

Entonces por definición de equivalencia entre *Proceso Especifico* y *RF* sabemos que $\forall \varphi_i \in \varphi$ con $\Omega(\varphi_i) = \psi_i \in \psi$ luego $\Gamma(\varphi_i) = \psi_i$.

Por lo tanto Γ es también operador y a su vez el mismo operador que Ω ya que $\Omega(\varphi_i) = \psi_i = \Gamma(\varphi_i) \Rightarrow \Omega(\varphi_i) = \Gamma(\varphi_i) \forall \varphi_i \in \varphi$.

Ejemplo 6 Sea \oplus un operador lineal, $\oplus : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$, con $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ espacios vectoriales sobre \mathbb{R} . Tenemos entonces que $\forall x, y \in \mathcal{V}_1, \alpha \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente:

$$\oplus(\alpha x + y) = \alpha \oplus(x) + \oplus(y)$$

por lo que si tomamos $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ Redes Funcionales tales que cumplan:

$$\Gamma_1 : \mathcal{X}_1 = \{\alpha x + y\}, \mathcal{X}_2 = F(\mathcal{W}, \mathcal{X}, i), \mathcal{X}_3 = \{\oplus(\alpha x + y)\}$$

$$\Gamma_2 : \mathcal{X}_1 = \{\alpha x\}, \mathcal{X}_2 = F(\mathcal{W}, \mathcal{X}, i), \mathcal{X}_3 = \{\alpha \oplus(x)\}$$

$$\Gamma_3 : \mathcal{X}_1 = \{y\}, \mathcal{X}_2 = F(\mathcal{W}, \mathcal{X}, i), \mathcal{X}_3 = \{\oplus(y)\}$$

De tal modo que se tiene que satisfacer la ecuación entre Redes Funcionales siguiente:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 + \Gamma_3 \quad (2.21)$$

De esta forma, tenemos que $\oplus \leftrightarrow \Gamma$ ($= \Gamma_1 = \Gamma_2 + \Gamma_3$) si se cumple la ecuación 2.21.

2.7 Predicción

En cuanto a la predicción, como ya fue mencionado antes, es posible encontrarse en una de las siguientes situaciones

1. Conocemos los datos del entorno (φ), el proceso específico (Ω), pero desconocemos la reacción del proceso a su entorno (ψ). Esto lo podemos denotar como sigue:

$$\langle \varphi|_I, \Omega \rangle \xrightarrow{\Gamma} \psi|_I$$

donde lo que esto representa que conociendo $\Gamma \leftrightarrow \Omega$, entonces podemos determinar ψ durante el estado de tiempo I (I extensión del estado de tiempo I_0) mediante Γ Red Funcional.

2. Conocemos los datos del entorno (φ), desconocemos proceso específico (Ω), conociendo la reacción del proceso a su entorno (ψ). Esto lo podemos denotar como sigue:

$$\langle \varphi|_I, \psi|_I \rangle \xrightarrow{\Gamma} \Omega$$

donde lo que esto representa que conociendo $\Gamma \xleftrightarrow{\varphi|_{I_0}} \Omega$, entonces podemos determinar Ω durante el estado de tiempo I (I extensión del estado de tiempo I_0) mediante Γ Red Funcional.

3. Desconocemos los datos del entorno (φ), conociendo de antemano el proceso específico (Ω), así como la reacción del proceso a su entorno (ψ). Esto lo podemos denotar como sigue:

$$\langle \Omega, \psi|_I \rangle \xrightarrow{\Gamma} \varphi|_I$$

donde lo que esto representa que conociendo $\Gamma \xleftrightarrow{\psi|_{I_0}} \Omega$, entonces podemos determinar $\varphi|_I$ durante el estado de tiempo I (I extensión del estado de tiempo I_0) mediante Γ Red Funcional.

Capítulo 3

CONCLUSIONES

Creo importante considerar que este trabajo apenas es un primer intento de generalización de modelos procedentes de estructuras biológicas (en este caso se considera únicamente a las neuronas) ya existentes. El potencial de modelación que encierran las estructuras biológicas y su análisis teórico resulta sumamente atractivo para intentar su aplicación teórica en otras áreas del conocimiento.

Los resultados obtenidos por el esquema de modelación aquí presentado muestran que existen enormes posibilidades encerradas en las Redes Funcionales, en cuanto a su posibilidad para analizar lo que sucede en estructuras que pueden ser mucho más complejas.

Es importante notar que existe una amplia gama de posibles desarrollos y a su vez un gran necesidad por realizar un análisis en dichas estructuras.

Posibles vías de investigación futura son las Redes Funcionales Discretas Generales (en particular sus soluciones) así como las Redes Funcionales Continuas (en especial aquellas con Topología Continua) ya que al parecer presentan situaciones de gran complejidad y de una dinámica extraordinaria.

Así mismo considero que las ecuaciones funcionales son una herramienta sumamente potente, mediante la cual es posible continuar analizando los problemas que surgen de estas estructuras, pudiéndose relacionar con sistemas dinámicos; de esta forma puede tenerse una base para continuar con el desarrollo de las Redes Funcionales.

Una segunda dirección de investigación esta relacionada con la adaptación de las redes funcionales a procesos específicos que tengan un comportamiento aleatorio (probabilístico con ciertas distribuciones preestablecidas), o incluso sistemas dinámicos que presenten comportamientos de tipo caótico.

Una tercera posible dirección de investigación puede consistir en un análisis de sensibilidad de las Redes Funcionales ya adaptadas a un proceso específico por medio de perturbaciones durante el estado de tiempo en el que se efectuó la adaptación.

Finalmente hay que considerar que las Redes Funcionales son solo modelos matemáticos que intentan generalizar la idea de Redes Neuronales Artificiales, de manera que el origen biológico queda separado de los modelos propuestos.

Considerando a las Redes Funcionales como modelo Ampliado de las Redes Neuronales Artificiales, es importante tener en cuenta la posibilidad de obtener soluciones que no se presentaban en las Redes Neuronales Artificiales, pero las cuales al ser analizadas mediante Redes Funcionales resulten soluciones no consideradas previamente (la idea no es nueva, es parecida a la ampliación hecha al conjunto de los números reales con los números complejos).

De esta manera considero que las Redes Funcionales son una creación cuyo valor radica en ser nuevas estructuras de modelación, proporcionando una base para el análisis formal del problema analizado.

Capítulo 4

ANEXO 1

Ecuaciones Funcionales

4.1 Ecuación Funcional

A continuación se presentan diversos métodos intentando resolver los sistemas de ecuaciones funcionales a los que lleva la modelación con Redes Funcionales.

Definición 27 (TÉRMINOS) Un término queda definido por las siguientes condiciones:

1. Las variables independientes son términos.
2. Si t_1, t_2, \dots, t_p son términos y $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ es una función de p variables, entonces $f(t_1, t_2, \dots, t_p)$ es también un término.
3. No existen otro tipo de términos.

Definición 28 (VARIABLE DEPENDIENTE) Una variable dependiente es aquella variable que se expresa en términos de otra variable.

Definición 29 (ECUACIÓN FUNCIONAL) Una ecuación funcional es una ecuación entre dos términos, los cuales tienen por lo menos una función incógnita y un número finito de variables independientes.

Consideremos en lo sucesivo $A \subseteq \mathbb{R}$.

Nota 10 (ECUACIÓN FUNCIONAL DE TRANSLACIÓN) Una ecuación funcional de translación en $F: A^2 \rightarrow A$, es aquella que cumple lo siguiente:

$$F[F[x, u], v] = F[x, u + v], \text{ con } x, u, v \text{ términos}$$

Nota 11 (ECUACIÓN FUNCIONAL DE ABEL) Una ecuación funcional de Abel en $f : A \rightarrow A$ es aquella que cumple:

$$f(h(x, u)) = f(x) + u \quad (4.1)$$

con $h : A^2 \rightarrow A, u \in A$.

4.2 Ecuación Funcional de Traducción

Teorema 3 Sean $\xi \in C_{\mathbb{R}}$ arbitraria y estrictamente monótona; $x, F[x, u] \in (a, b) \subset \mathbb{R}; u, v \in \mathbb{R}$.

Una solución a la ecuación funcional de traducción:

$$F[F[x, u], v] = F[x, u + v]$$

queda dada por:

$$F[x, u] = \xi(\xi^{-1}(x) + u) \quad (4.2)$$

con:

- La condición de que $F[x, u]$ sea estrictamente monótona respecto a u y para un conjunto numerable de valores de u respecto a x .

o

- Se satisfaga que $\forall u \in \mathbb{R}, F[u, x] \in C_{(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ y $F[x, u] \in C_{(x_0, \mathbb{R})}$ y no constante para x_0 fijo.

Demostración :

Sustituyendo tenemos:

$$\begin{aligned} F[F[x, u], v] &= \xi\{\xi^{-1}(F[x, u]) + v\} \\ &= \xi\{\underbrace{\xi^{-1}[\xi(\xi^{-1}(x) + u)]}_{\xi^{-1}(x) + u} + v\} = \xi\{(\xi^{-1}(x) + u) + v\} \\ &= \xi\{\xi^{-1}(x) + u + v\} = F[x, u + v] \\ \therefore F[F[x, u], v] &= F[x, u + v] \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que el resolver una ecuación funcional de traducción es lo mismo que resolver una ecuación funcional de Abel ya que:

$$F[x, u] = \xi\{\xi^{-1}(x) + u\} \Rightarrow \xi^{-1}(F[x, u]) = \xi^{-1}(x) + u$$

donde la incógnita funcional es en este caso ξ (o ξ^{-1}).

4.3 Ecuación Funcional de Abel

Consideremos a continuación la ecuación funcional en ξ^{-1} :

$$\xi^{-1}[g^m(x)] = \xi^{-1}(x) + n + m - 1 \quad (4.3)$$

con $n \geq 1$ y $m \geq 1$

como ecuación de trabajo. Tomando el caso particular de $m = 1$ obtenemos la ecuación funcional de Abel (4.1), siendo $\xi^{-1}(x) = f(x)$ y $g^m(x) = F(x, m)$. Consideremos a la función $g : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ para definir una relación de equivalencia de la siguiente manera:

Definición 30 (EQUIVALENCIA DE LA FUNCIÓN $g : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$) Sea \mathbf{A} un conjunto tal que $g : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, y sean $x, y \in \mathbf{A}$. Decimos que x es equivalente a y relativo a la función g (cuya notación es $x \sim_g y$) $\iff \exists n, m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ tal que $g^m(x) = g^n(y)$.

Proposición 3 Si $g : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$; $x, y \in \mathbf{A}$ y $x \sim_g y \implies$ define una relación de equivalencia.

Demostración :

Sean $x, y, z \in \mathbf{A}$, entonces:

1. (REFLEXIVIDAD)

$$x \sim_g x \text{ ya que } g^m(x) = g^n(x) \text{ para } n = m.$$

2. (SIMETRÍA)

$$x \sim_g y \implies g^n(x) = g^m(y) \implies g^m(y) = g^n(x) \implies y \sim_g x$$

3. (TRANSITIVIDAD)

Si $x \sim_g y$ y $y \sim_g z$ entonces $x \sim_g z$ ya que:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} g^n(x) = g^m(y) \\ g^r(y) = g^s(z) \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} g^{n-m}(x) = 1 \\ 1 = g^{s-r}(z) \end{array} \right. \implies g^{n-m}(x) = 1 = g^{s-r}(z) \\ &\implies g^n(x) = g^s(z) \implies x \sim_g z. \end{aligned}$$

■

Definición 31 (PUNTOS FIJOS) Sea \mathbf{A} un conjunto no vacío, $g : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$. Definimos un punto fijo de la función g como aquel $x_0 \in \mathbf{A}$ tal que cumple una de las siguientes dos condiciones:

- **SER UN PUNTO ATRAYENTE:** Si $\exists V$ vecindad de x_0 tal que $\forall x \in V$, la sucesión de iteradas $\{g^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0 .

- **SER UN PUNTO REPULSIVO:** Si $\exists V$ vecindad de x_0 tal que $\forall x \in V$ con $x \neq x_0$ tenemos que $g^n(x) \notin V$ a partir de alguna n .

Definición 32 (CICLOS) Sea A un conjunto no vacío, $g: A \rightarrow A$. Definimos $x_0 \in A$ produce un ciclo de orden n de la función g si se cumple que $f^n(x_0) = x_0$ y $f^i(x_0) \neq x_0$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Teorema 4 La ecuación funcional (4.3) tiene solución $\iff g$ no tiene ciclos ni puntos fijos.

Demostración:

1. Supongamos que g tiene un ciclo de orden $k \geq 1$ generado por un punto y , entonces

$$\xi^{-1}[g^k(y)] = \xi^{-1}(y) + k + n - 1$$

y como $g^k(y) = y$ por ser ciclo entonces

$$\xi^{-1}[g^k(y)] = \xi^{-1}(y)$$

por lo que

$$\xi^{-1}(y) + k + n - 1 = \xi^{-1}(y) \Rightarrow k + n - 1 = 0 \Rightarrow k + n = 1$$

cosa que no puede suceder ya que $k \geq 1$ y $n \geq 1$, por lo que $k + n \geq 2$, por lo tanto g no tiene ciclos.

2. Ahora bien, supongamos que y es un punto fijo, entonces:

- **EN CASO DE SER PUNTO ATRAYENTE:**

Sea V una vecindad de y tal que $\forall x \in V \Rightarrow \{g^n(x)\}_{n=m}^{\infty} \rightarrow y$ entonces

$$\begin{aligned} \xi^{-1}[\{g^n(x)\}_{n=m}^{\infty}] &\rightarrow \xi^{-1}(y) \\ &\text{y a la vez} \\ \xi^{-1}[\{g^n(x)\}_{n=m}^{\infty}] &= \xi^{-1}(x) + n + m - 1 \end{aligned}$$

\therefore como $\xi^{-1}(y) = \xi^{-1}(x) + n + m - 1$ entonces en particular para $x = y$ tenemos que $\xi^{-1}(y) = \xi^{-1}(y) + n + m - 1$ que resulta ser una contradicción ya que $n + m = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} m = 0 \\ \text{ó} \\ n = 0 \end{cases} \text{ que es una contradicción,}$$

por lo tanto y no puede ser punto atrayente ya que no existe dicha vecindad V .

• EN CASO DE SER PUNTO REPULSIVO:

Sea \mathcal{V} una vecindad de y tal que $\forall x \in \mathcal{V}$ con $x \neq y$ tenemos que a partir de alguna k se cumple que $g^k(x) \notin \mathcal{V}$, entonces:

$$\xi^{-1}[g^k(x)] = \xi^{-1}[x] + k + n - 1$$

como $g^k(x) \notin \mathcal{V}$ y $x \in \mathcal{V}$ entonces $\xi^{-1}[g^k(x)] \neq \xi^{-1}[x]$ de modo que si consideramos los siguientes dos casos:

$$(a) \quad k + n - 1 \in \mathcal{V} \Rightarrow \underbrace{\xi^{-1}[g^k(x)]}_{\in \mathcal{V}} = \underbrace{\xi^{-1}[x]}_{\notin \mathcal{V}} + \underbrace{k + n - 1}_{\in \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}} \Rightarrow$$

$\mathcal{V} = \mathcal{V}^c \cup \mathcal{V}_1$ (que no se cumple en término de conjuntos a menos que $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}$, que no es el caso ya que $v = k + n - 1 \in \mathcal{V}_1$ es una constante)

$$(b) \quad k + n - 1 \notin \mathcal{V} \Rightarrow \underbrace{\xi^{-1}[g^k(x)]}_{\in \mathcal{V}} = \underbrace{\xi^{-1}[x]}_{\notin \mathcal{V}} + \underbrace{k + n - 1}_{\in \mathcal{V}_2 \notin \mathcal{V}} \Rightarrow$$

$\mathcal{V} = \mathcal{V}^c \cup \mathcal{V}_2 \Rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{V}^c$ (que no se cumple en término de conjuntos)

Por lo tanto g no es punto atractor.

Concluimos que g no es punto repulsivo. Por lo tanto g no es punto fijo.



Definición 33 (CONJUNTO DE LOS ELEMENTOS EQUIVALENTES) Sea $x \in \mathbf{A}$, definimos al conjunto de todos los elementos equivalentes a x como:

$$\Phi_g(x) \equiv \Phi(x) = \{y \mid x \sim_g y\}$$

Denominado también como Órbita de x .

Proposición 4 Sea $g: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, entonces Φ_g define una partición del conjunto \mathbf{A} .

Demostración:

Sea $x \in \mathbf{A}$ tal que $x \in \Phi_g(x)$, entonces se pueden definir dos conjuntos que son los que producen una partición del conjunto \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_1 = \{y \mid \Phi_g(x) = \Phi_g(y)\}$$

$$\mathbf{A}_2 = \{y \mid \Phi_g(x) \neq \Phi_g(y)\}$$

por lo tanto $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 = \emptyset$ por lo que \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 inducen a una partición del conjunto \mathbf{A} .



Teorema 5 Sean $x_0, y_0 \in A, \xi^{-1}(x_0) = y_0; k, n, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entonces $\forall z \in \Phi(x_0)$, se cumple que la solución de la ecuación funcional de Abel (4.3) es:

$$\boxed{\xi^{-1}(z) = y_0 + s - k} \quad (4.4)$$

Demostración :

Tenemos que como $z, x_0 \in \Phi(x_0)$ entonces para algunos $k, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se cumple que $g^k(z) = g^s(x_0)$ entonces, usando la expresión (4.3) obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\xi^{-1}(g^k(z))} & = & \boxed{\xi^{-1}(g^s(x_0))} \\ \parallel & & \parallel \\ \boxed{\xi^{-1}(z) + (n-1) + k} & & \boxed{\xi^{-1}(x_0) + (n-1) + s} = \boxed{y_0 + (n-1) + s} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore \xi^{-1}(g^k(z)) &= \xi^{-1}(g^s(x_0)) \\ \Rightarrow \xi^{-1}(z) + (n-1) + k &= \xi^{-1}(x_0) + (n-1) + s \\ \Rightarrow \xi^{-1}(z) + (n-1) + k &= y_0 + (n-1) + s \\ \Rightarrow \xi^{-1}(z) + k &= y_0 + s \\ \Rightarrow \xi^{-1}(z) &= y_0 + s - k. \end{aligned}$$

■
Ahora bien, consideremos otras posibles soluciones de la ecuación funcional de Abel:

Proposición 5 Sean $f : A \rightarrow A, g : A \rightarrow A_1$ tal que $h(x) = g(f[g^{-1}(x)])$. Si $\beta(x)$ es solución de la ecuación funcional $\beta[h(x)] = \beta(x) + c$ en A_1 entonces $\alpha(x) = \beta[g(x)]$ satisface la ecuación funcional:

$$\boxed{\alpha[f(x)] = \alpha(x) + c, c \neq 0} \quad (4.5)$$

Demostración :

Sea $x = g(u)$ entonces

$$\begin{aligned} \alpha[f(x)] &= \beta[g(f[x])] \\ &= \beta[g(f[g^{-1}(u)])] \\ &= \beta[h(u)] \\ &= \beta(u) + c \\ &= \alpha[g^{-1}(u)] + c \\ &= \alpha(x) + c \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha[f(x)] = \alpha(x) + c$$

ya que

$$\alpha(x) = \beta[g(x)] \iff \alpha[g^{-1}(u)] = \beta[g(g^{-1}(u))] \iff \alpha[g^{-1}(u)] = \beta(u)$$

Proposición 6 Supóngase que $\exists f'(x) \neq 0 \forall x \in I \subset \mathbb{A}$. Sean $\varphi(x)$ tal que $\varphi[f(x)] = \frac{1}{\gamma} \varphi(x) \forall x \in I$ tal que $\int_{f(x_0)}^{f(x)} \varphi(t) dt \neq 0, \xi$ una constante aditiva. Entonces $\exists \alpha(x)$ solución de la ecuación (4.5) $\forall x \in I$ que cumple $\alpha'(x) = \xi \varphi(x)$.

Demostración :

Sea $x_1 \in I$ tal que

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_{x_1}^{f(x)} \varphi(t) dt \\ & \text{y} \\ \alpha(x) &= \frac{c}{\gamma} \int_{x_0}^{f(x)} \varphi(t) dt \\ & \text{con} \\ x_0 &= f(x_1), \forall x \in I \end{aligned}$$

entonces usando el cambio de variable $\begin{cases} t = f(u) \\ dt = f'(u) du \end{cases} = 1 \Rightarrow f'(u) du = dt$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha[f(x)] &= \frac{c}{\gamma} \int_{x_0}^{f(x)} \varphi(t) dt = \frac{c}{\gamma} \int_{f^{-1}(x_0)}^x \varphi[f(u)] f'(u) du \\ &= \frac{c}{\gamma} \int_{x_1}^x \varphi[f(u)] df(u) = \frac{c}{\gamma} \int_{x_1}^x \varphi(u) du \\ &= \frac{c}{\gamma} \left[\int_{x_1}^{x_0} \varphi(u) du + \int_{x_0}^x \varphi(u) du \right] \\ &= \frac{c}{\gamma} \gamma + \alpha(x) + c \end{aligned}$$

De modo que $\alpha'(x) = \frac{x}{\gamma} \varphi(x)$, por lo tanto $\xi = \frac{x}{\gamma} = \frac{c}{\int_{a_1}^{x_1} \varphi(t) dt}$

$$\therefore \alpha[f(x)] = \alpha(x) + c \iff \varphi[f(x)] = \frac{1}{f'(x)} \varphi(x)$$

Teorema 6 (PRINCIPAL SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN (4.5)) Sea $f : I \subset \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ y $\{d_n\}$ sucesión que cumple que $\forall x \in I \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n+1}(x) - f^n(x)}{d_n} = c$. Entonces $\forall x_0 \in I$ se cumple que:

$$\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - f^n(x_0)}{d_n} \quad (4.6)$$

satisface la ecuación (4.5).

Demostración :

$$\begin{aligned} \alpha[f(x)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n+1}(x) - f^n(x_0)}{d_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x) - f^n(x_0)}{d_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{n+1}(x) - f^n(x)}{d_n} \\ &= \alpha(x) + c \end{aligned}$$

Teorema 7 Bajo las siguientes hipótesis:

1. $X \subset \mathbb{C}$ en una vecindad del origen,
2. $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ función analítica
3. $f(0) = 0, s = f'(0)$
4. $0 < |s| < 1$

se cumple que la ecuación funcional de Abel:

$$\alpha(f(x)) = \alpha(x) + 1$$

tiene única familia un parámetro de soluciones, α definida en una vecindad del origen dada por:

$$\alpha(x) = \frac{\log \sigma(x)}{\log s}$$

con $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} s^{-n} f^n(x)$.

Demostración :
 Ver [20], pag. 168.

Programa 1 /* Programa que soluciona la ecuación funcional de Abel numéricamente */

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
double EPS;
int NITER;
/*****
Se soluciona la ecuacion funcional de Abel:
 $g(\alpha(z)) = \alpha(z+1)$ 
con la funcion dada como:
 $s = g'(0)$   $\alpha(z) = \log | \ln(g'(z)/s^z) |$ ,  $n > \text{INFINITO} / \log |s|$ 
*****/
double g(x)
double z;
return(z/S);
double sigma(z,s)
double z,s;
{
double g0, g1, L0, L1, s1, cerca, g(double);
int iter=0;
g0=z, s1=1, L0=z;
do
{
g1=g(g0), s1*=s;
L1=g1/s1;
cerca=fabs(L1/L0-1);
g0=g1, L0=L1;
iter++;
printf("Iteraciones: %i \t Epsilon: %f \n", iter, cerca);
} while(cerca > EPS || iter > NITER);
return(L1);
}
/*****
Datos de entrada:
x -> Argumento de la función  $\alpha$ .
EPS -> Tolerancia numérica.
NITER -> Número máximo de iteraciones.
tipo -> Tipo de función  $g$ 
(considerando el espacio de funciones  $G = g: A \rightarrow A \mid 0 < |g'(0)| < 1, g(0) = 0$ ):

```

```

tipo=1 (default): g(x)=x/5; s=1/5;
tipo=2: g(x)=sin(x/2); s=1/2; tipo=3: g(x)=sin(x/3); s=1/3;
*****/
double main(uno, dos)
int uno;
char *dos[40];
{
double x, s, tmp, g(double), sigma(double,double);
(uno>1)?(x=atof(dos[1])):(x=1); (uno>2)?(s=atof(dos[2])):(s=.2);
(uno>3)?(EPS=atof(dos[3])):(EPS=.001);
(uno>4)?(NITER=atoi(dos[4])):(NITER=1000);
tmp=sigma(x,s);
printf("El límite de sigma es: %f\n",tmp);
tmp=log(tmp)/log(s);
printf("El límite es: %f\n",tmp);
return(tmp);
}

```

Capítulo 5

ANEXO 2

Desarrollo en Series de Potencias y Matriz de Vandermonde

Es importante notar que en cierto momento al requerir la obtención de soluciones numéricas de la modelación de alguna Red Funcional, se tiene a la mano el uso de series de potencias como método para dicha implementación.

Lo que resulta de implementar el desarrollo en series de potencias en una red funcional es lo siguiente:

5.1 Análisis de las soluciones del sistema de ecuaciones lineales de Vandermonde

Teorema 8 Sea $A \in M_{s+1 \times s+1}(\mathbb{R})$ una matriz de Vandermonde. El determinante de A queda dado por la fórmula:

$$\det(A) = \prod_{0 \leq k < i \leq s} (x_i - x_k)$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^s \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^s \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_s & x_s^2 & \cdots & x_s^s \end{pmatrix}$$

Demostración :

Tomemos el caso de A matriz de Vandermonde de 2×2 ($s = 1$):

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_0 = \prod_{0 \leq k < i \leq s} (x_i - x_k)$$

Tomemos ahora el caso de A matriz de Vandermonde de 3×3 ($s = 2$):

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 \\ x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} - x_0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^2 \\ 1 & x_2^2 \end{pmatrix} + x_0^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2) - x_0 (x_2^2 - x_1^2) + x_0^2 (x_2 - x_1) \\ &= x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 + x_1^2 x_0 - x_0 x_2^2 + x_0^2 x_2 - x_0^2 x_1 \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &= \prod_{0 \leq k < i \leq s} (x_i - x_k) \end{aligned}$$

(HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN) Tomemos ahora el caso general de A matriz de Vandermonde de $n \times n$ ($s = n - 1$) suponiendo que es válido el caso de la matriz de Vandermonde de $n - 1 \times n - 1$ ($s = n - 2$):

Tenemos entonces que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-2} & x_{n-2}^2 & \cdots & x_{n-2}^{n-2} \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq k < i \leq n-2} (x_i - x_k)$$

entonces multiplicando cada columna por $-x_0$ y sumandosela a la columna de la derecha comenzando por la penúltima columna hacia la primera obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-2} & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-2} & x_{n-2}^2 & \dots & x_{n-2}^{n-2} & x_{n-2}^{n-1} \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \dots & x_1^{n-2} - x_0 x_1^{n-3} & x_1^{n-1} - x_0 x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0 x_2 & \dots & x_2^{n-2} - x_0 x_2^{n-3} & x_2^{n-1} - x_0 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-2} - x_0 & x_{n-2}^2 - x_0 x_{n-2} & \dots & x_{n-2}^{n-2} - x_0 x_{n-2}^{n-3} & x_{n-2}^{n-1} - x_0 x_{n-2}^{n-2} \\ 1 & x_{n-1} - x_0 & x_{n-1}^2 - x_0 x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-2} - x_0 x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-1} - x_0 x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

de esta manera resulta que:

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \dots & x_1^{n-2} - x_0 x_1^{n-3} & x_1^{n-1} - x_0 x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0 x_2 & \dots & x_2^{n-2} - x_0 x_2^{n-3} & x_2^{n-1} - x_0 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-2} - x_0 & x_{n-2}^2 - x_0 x_{n-2} & \dots & x_{n-2}^{n-2} - x_0 x_{n-2}^{n-3} & x_{n-2}^{n-1} - x_0 x_{n-2}^{n-2} \\ 1 & x_{n-1} - x_0 & x_{n-1}^2 - x_0 x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-2} - x_0 x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-1} - x_0 x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \dots & x_1^{n-2} - x_0 x_1^{n-3} & x_1^{n-1} - x_0 x_1^{n-2} \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0 x_2 & \dots & x_2^{n-2} - x_0 x_2^{n-3} & x_2^{n-1} - x_0 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2} - x_0 & x_{n-2}^2 - x_0 x_{n-2} & \dots & x_{n-2}^{n-2} - x_0 x_{n-2}^{n-3} & x_{n-2}^{n-1} - x_0 x_{n-2}^{n-2} \\ x_{n-1} - x_0 & x_{n-1}^2 - x_0 x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-2} - x_0 x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-1} - x_0 x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} (x_1 - x_0) & (x_1 - x_0) x_1 & \dots & (x_1 - x_0) x_1^{n-3} & (x_1 - x_0) x_1^{n-2} \\ (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0) x_2 & \dots & (x_2 - x_0) x_2^{n-3} & (x_2 - x_0) x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_{n-2} - x_0) & (x_{n-2} - x_0) x_{n-2} & \dots & (x_{n-2} - x_0) x_{n-2}^{n-3} & (x_{n-2} - x_0) x_{n-2}^{n-2} \\ (x_{n-1} - x_0) & (x_{n-1} - x_0) x_{n-1} & \dots & (x_{n-1} - x_0) x_{n-1}^{n-3} & (x_{n-1} - x_0) x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \\
 &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \dots (x_{n-1} - x_1)(x_{n-1} - x_0) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} (x_j - x_0) \prod_{1 \leq k < i \leq n-1} (x_i - x_k) = \prod_{0 \leq k < i \leq n-1} (x_i - x_k)$$

∴ es válida la hipótesis de inducción, por lo cual queda esta fórmula demostrada por inducción.

Corolario 1 Si $A \in M_{s+1 \times s+1}$ es una matriz de Vandermonde, entonces $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \exists k < i$ tal que $x_i = x_k$

Demostración :

Como $\det(A) = \prod_{0 \leq k < i \leq s} (x_i - x_k)$ por el teorema (8), entonces

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \prod_{0 \leq k < i \leq s} (x_i - x_k) = 0 \Leftrightarrow \exists k < i \text{ tal que } x_i - x_k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\exists 0 \leq k < i \leq s+1 \text{ tal que } x_i = x_k$$

Programa 2 /* Función propuesta para determinar si existe

(regresa 0) la solución de una ... */

/* matriz de Vandermonde. */

/* Código en lenguaje C */

/* m = Dimensión de la Matriz de Vandermonde menos uno */

int det_Vandermonde(m, *x)

int m;

double *x;

{

int det, i, k;

det = 1;

for(i=1; i<=m; i++)

{

for (k=0; k<i; k++) { if (x[i] == x[k]) det=0, i=m, k=i-1 }

}

if(det==0) printf("El determinante es igual a cero. \n");

else printf("El determinante es distinto de cero. \n");

return (det);

}

Corolario 2 Si $\exists k \neq i$ tal que $\varphi_k = \varphi_i$ entonces la solución al problema simplificado (2.19) de la RF no existe.

Demostración :

Para que el sistema (2.19) tenga solución, es condición necesaria y suficiente que:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \varphi_0 & \varphi_0^2 & \cdots & \varphi_0^s \\ 1 & \varphi_1 & \varphi_1^2 & \cdots & \varphi_1^s \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_2^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_s & \varphi_s^2 & \cdots & \varphi_s^s \end{pmatrix} \neq 0$$

Entonces, analizando el determinante de la matriz de Vandermonde:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \varphi_0 & \varphi_0^2 & \cdots & \varphi_0^s \\ 1 & \varphi_1 & \varphi_1^2 & \cdots & \varphi_1^s \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_2^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_s & \varphi_s^2 & \cdots & \varphi_s^s \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \varphi_0 & \varphi_0^2 & \cdots & \varphi_0^s \\ 1 & \varphi_1 & \varphi_1^2 & \cdots & \varphi_1^s \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_2^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_{k_0} & \varphi_{k_0}^2 & \cdots & \varphi_{k_0}^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_{i_0} & \varphi_{i_0}^2 & \cdots & \varphi_{i_0}^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_s & \varphi_s^2 & \cdots & \varphi_s^s \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq k < i \leq s} (\varphi_k - \varphi_i)$$

Por el corolario 1 tenemos que si \exists 'n k_0, i_0 con $k_0 < i_0$ tales que $\varphi_{k_0} = \varphi_{i_0}$ entonces:

$$\prod_{0 \leq k < i \leq s} (\varphi_k - \varphi_i) = (\varphi_{k_0} - \varphi_{i_0}) \prod_{\substack{0 \leq k < i \leq s \\ k \neq k_0 \\ i \neq i_0}} (\varphi_k - \varphi_i) = 0$$

por lo que $\det \begin{pmatrix} 1 & \varphi_0 & \varphi_0^2 & \cdots & \varphi_0^s \\ 1 & \varphi_1 & \varphi_1^2 & \cdots & \varphi_1^s \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_2^2 & \cdots & \varphi_2^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_s & \varphi_s^2 & \cdots & \varphi_s^s \end{pmatrix} = 0$

Por lo tanto no existe solución del sistema (2.19).
■

Teorema 9 Sea $A \in M_{s+1 \times s+1}(\mathbb{R})$ una matriz de Vandermonde de la forma (2.19). A^{-1} existe siempre que $\forall k, i \in \{0, 1, \dots, s\}$, $k < i \Rightarrow \varphi_k \neq \varphi_i$

Demostración :

Sabemos que como A es una matriz cuadrada entonces podemos obtener su determinante, que en particular se reduce a $\prod_{0 \leq k < i \leq s} (\varphi_k - \varphi_i)$ por ser A matriz de Vandermonde.

Entonces $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \prod_{0 \leq k < i \leq s} (\varphi_k - \varphi_i) \neq 0$ entonces $\forall i, k$ con $k < i$

$\Rightarrow \varphi_k \neq \varphi_i$

Por lo tanto $\exists A^{-1}$.

■

Teorema 10 Si $A \in M_{s \times s}(\mathbb{R})$ es una matriz de Vandermonde de la forma (2.19), entonces si $\exists A^{-1}$, esta tiene la siguiente estructura:

$$A^{-1} = (a_{y,s}^{-1})_{y,s=1,\dots,s} = \begin{cases} (-1)^{s-y+1} \frac{\sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{s-y} \leq s-1} \prod_{j=1}^{s-y} \varphi_{i_j}}{\prod_{i=0}^{s-1} (\varphi_i - \varphi_{s-1})} & , \text{ si } y \in \{1, 2, \dots, s-1\} \\ \frac{-1}{\prod_{i=0}^{s-1} (\varphi_i - \varphi_{s-1})} & , \text{ si } y = s \end{cases} \quad (5.1)$$

con $x, y \in \{1, 2, \dots, s\}$ (5.2)

Programa 3 /*****

**SIMULACION DE LA ADAPTACION DE UNA RED FUNCIONAL
A UN OPERADOR DETERMINISTICO Y PROBABILISTICO.**

*****/

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <malloc.h>
#define MAMEX 1000
```

```
double *tmp;
/*****
```

Resuelve el sistema lineal de Vandermonde en (a_0, \dots, a_n) :

$$V(x_0, \dots, x_n) \cdot (a_0, \dots, a_n) = (f_0, \dots, f_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

ALGORITMO 5.6-1, PAG. 121

MATRIX COMPUTATIONS, GENE H. GOLUB,
THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY PRESS, 1983.

*****/

```

double* SolveVM(x,f,n)
double *x, *f;
int n;
{
int k, i;
for(k=0; k<=n-1; k++)
{
for(i=n; i>=k+1; i-) { f[i]=(f[i]-f[i-1])/(x[i]-x[i-k-1]); }
for(k=n-1; k>=0; k-)
{
for(i=k; i<=n-1; i++)
{
f[i]=f[i]-f[i+1]*x[k];
}
}
return( f );
}
/*****
Muestra los datos del sistema de ecuaciones de
Vandermonde a resolver (x,f)
*****/
void muestra_datos(x,f,n)
double *x, *f;
int n;
{
int i,j;
printf("DATOS:\n");
for(i=0; i<=n; i++)
{
printf("x[%i]=%f\t f[%i]=%f\n",i,x[i],i,f[i]);
}
/*****
Muestra el sistema de ecuaciones de Vandermonde a resolver
*****/
void muestra_sistema(x,f,n)
double *x, *f;
int n;
{
int i,j;
printf("SISTEMA:\n");
for(i=0; i<=n; i++)
{

```

```

printf("\n");
for(j=0; j<=n; j++) { printf("%f ",pow(x[i],(double)(j))); }
printf("\n");
printf(" |a(%i)| = |%f|\n",i,f[i]);
}
/*****
Muestra las soluciones del sistema de ecuaciones.
*****/
void muestra_solucion(a,n)
double *a;
int n;
{
int i;
printf("SOLUCION:\n");
for(i=0; i<=n; i++) printf("a(%i) = %f\n",i,a[i]);
}
/*****
Generador de datos determinísticos
(OPERADOR DETERMINISTICO) f(t)=.5*t+5
*****/
double *genera_datos.determ(n)
int n;
{
int i;
for(i=0; i<=n; i++) tmp[i]=.5*i+5;
return(tmp);
}
/*****
Generador de datos probablisticos
(OPERADOR PROBABILISTICO)
*****/
double *genera_datos.proba(n)
int n;
{
int i;
randomize();
for(i=0; i<=n; i++) tmp[i]=(double)(random(100));
return(tmp);
}
/*****
PROGRAMA PRINCIPAL
f -> Pst
x -> Ft

```

```

a -> alfa
DATOS INICIALES:
param1: tamaño de matriz de Vandermonde
param2:
1->para datos determinísticos
2->para datos probabilísticos
param3:
1->para imprimir el sistema.
2->no imprime el sistema de ec.
...../
void main(uno,dos)
int uno;
char *dos[40];
{
double *x, *f, *a;
int i, n, tipo, muestra_sis;
tmp=malloc(sizeof(double)*MAMEX);
x=malloc(sizeof(double)*MAMEX);
f=malloc(sizeof(double)*MAMEX);
a=malloc(sizeof(double)*MAMEX);
/* (ejemplo) : n=3;
for(i=0; i<=n; i++) x[i]=i+1; f[0]=10.0, f[1]=26.0,
f[2]=58.0, f[3]=112.0; */
/* DATOS INICIALES */
(uno>1)?(n=atoi(dos[1])):(n=3);
(uno>2)?(tipo=atoi(dos[2])):(tipo=1);
(uno>3)?(muestra_sis=atoi(dos[3])):(muestra_sis=1);
/*(x0,...,xn) :*/
for(i=0; i<=n; i++) x[i]=i+1;
/*(f0,...,fn) :*/
(tipo==1)?(f=genera_datos_determ(n)):(f=genera_datos_proba(n));
f[n+1]=0, a[n+1]=0, x[n+1]=0;
/* FIN DATOS INICIALES */
if(muestra_sis==1) muestra_sistema(x,f,n);
muestra_datos(x,f,n);
/*(f0,...,fn) :*/
a=SolveVM(x,f,n);
muestra_solucion(a,n);
free(a);
free(f);
free(x);
free(tmp);
}

```

Capítulo 6

ANEXO 3

Ejemplos

6.1 Red Neuronal Artificial (Suma Binaria)

Sea $\Gamma = \langle \mathcal{X}, \mathcal{W}, \mathcal{F} \rangle$ una RNA con las siguientes características:

1. $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 \cup \mathcal{X}_3 = \{x_1, x_2, \dots, x_I\} \cup \{x_{I+1}, x_{I+2}, \dots, x_{I+J}\} \cup \{x_{I+J+1}, x_{I+J+2}, \dots, x_{I+J+O}\}$
2. \mathcal{W} triangular superior con ceros en la diagonal.

$$3. \begin{cases} x_i = \varphi_i \\ x_i = \psi_i \\ x_i = f\left(\sum_{j=1}^n w_{j,i} x_j\right) \\ f \text{ función no decreciente} \end{cases}$$

Si consideramos $I = 2, J = 0$ y $O = 1$ entonces el número de neuronas que utilizamos es en este caso igual a $n = I + J + O = 3$, $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_{1,3} \\ 0 & 0 & w_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y el proceso específico Ω queda determinado por $\vec{\varphi}$ y ψ dados como:

$(\varphi_1)_1$	$(\varphi_1)_2$	ψ	GRAFICAMENTE
0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	

quedando como :

Ω	0	1
0	0	1
1	1	0

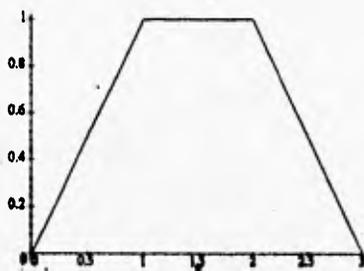
(6.1)

Lo que corresponde a la suma booleana. Con estas características lo que representa Ω es al operador suma booleano.

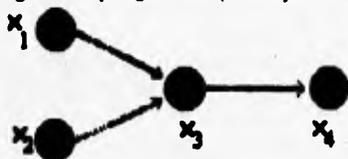
Haciendo un análisis de todos los posibles casos del modelo Γ propuesto en búsqueda de la modelación de Ω tenemos la siguiente tabla:

x_1	x_2	x_3	$x_3 = f\left(\sum_{i=1}^2 w_{i,3}x_i\right)$
0	0	0	$0 = f(0)$
1	0	1	$1 = f(w_{1,3})$
0	1	1	$1 = f(w_{2,3})$
1	1	0	$0 = f(w_{1,3} + w_{2,3})$

Por lo tanto, el problema consiste en encontrar f función que satisfaga las ecuaciones de la tabla anterior. Es así que como fue definida una red neuronal, la función f es no decreciente, por lo que para toda $w_{1,3} \neq w_{2,3} \neq 0$ \exists solución para la función f .



Ahora bien, para este mismo problema consideremos a Γ , pero ahora con la siguiente topología: $I = 2, J = 1$ y $O = 1$,



$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & w_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y el proceso específico } \Omega \text{ queda determinado}$$

por φ y ψ dados como:

$(\varphi_1)_1$	$(\varphi_1)_2$	ψ	GRAFICAMENTE
0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	

Representando así las propiedades de Ω expuestas en la tabla (6.1) con la peculiaridad que ahora se tiene una neurona libre. Tenemos entonces la siguiente tabla:

x_1	x_2	$x_3 = f(\sum_{i=1}^2 w_{i,3}x_i)$	x_4	$x_4 = f(\sum_{i=1}^3 w_{i,4}x_i)$
0	0	$f(0)$	0	$0 = f(0 + 0 + w_{3,4}f(0))$
1	0	$f(w_{1,3})$	1	$1 = f(w_{1,3} + w_{3,4}f(w_{1,3}))$
0	1	$f(w_{2,3})$	1	$1 = f(w_{2,3} + w_{3,4}f(w_{2,3}))$
1	1	$f(w_{1,3} + w_{2,3})$	0	$0 = f(w_{1,3} + w_{2,3} + w_{3,4}f(w_{1,3} + w_{2,3}))$

Tomando como función $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ se tiene que:

$$\begin{cases} w_{1,3} < 0 \\ w_{2,3} < 0 \\ w_{3,4} > 0 \\ w_{1,3} + w_{3,4} > 0 \\ w_{2,3} + w_{3,4} > 0 \\ w_{1,3} + w_{2,3} + w_{3,4} \leq 0 \end{cases}$$

lo podemos ver como el conjunto de posibles soluciones de la red neuronal artificial aquí propuesta ya que:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(w_{1,3} + w_{3,4}f(w_{1,3})) &= f(w_{1,3} + w_{3,4}) = 1 \\ f(w_{2,3} + w_{3,4}f(w_{2,3})) &= f(w_{2,3} + w_{3,4}) = 1 \\ f(w_{1,3} + w_{2,3} + w_{3,4}f(w_{1,3} + w_{2,3})) &= f(w_{1,3} + w_{2,3} + w_{3,4}) = 0 \end{aligned}$$

6.2 Red Funcional Discreta (Modelación del Operador Suma en Z_2)

En este ejemplo se intenta modelar las propiedades de la suma booleana de dos elementos a, b .

Sea $RF = \langle \mathcal{X}, \mathcal{W}, \mathcal{F} \rangle$ dado como sigue:

- $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $x_i \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_{1,3} \\ 0 & 0 & w_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathcal{X}}(\mathcal{W}, \mathcal{X}) = \{x_1, x_2, 0\}$
- $\mathcal{F} = \{h: M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}\}$,
 $F \in \mathcal{F}$,
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $g: \mathbb{R}^3 \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Las restricciones dadas por el proceso específico (el operador suma en Z_2 que deseamos modelar representado por \oplus) son:

$$\begin{cases} \oplus(0, 0) = 0 \\ \oplus(1, 0) = 1 \\ \oplus(0, 1) = 1 \\ \oplus(1, 1) = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

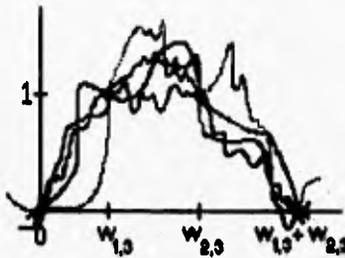


Figura 6.1: Posibles soluciones a la ecuación funcional del problema de modulación del operador suma (\oplus) en Z_2 .

De esta manera se tiene que $X_1 = \{x_1, x_2\}, X_2 = \emptyset, X_3 = \{x_3\}$, así mismo:

$$x_3 = f(g((x_1, x_2, 0), 3)) = f(w_{1,3}x_1 + w_{2,3}x_2)$$

considerando $g((x_1, x_2, 0), i) = \varepsilon_i \cdot (\dot{X} \cdot \mathcal{W})^i$, como en el caso de las redes neuronales.

Entonces se tiene que:

x_1	x_2	x_3	$f(w_{1,3}x_1 + w_{2,3}x_2)$
0	0	0	$f(0)$
1	0	1	$f(w_{1,3})$
0	1	1	$f(w_{2,3})$
1	1	0	$f(w_{1,3} + w_{2,3})$

$$\text{Siendo sus soluciones } f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x = w_{1,3} \\ 1, & x = w_{2,3} \\ 0, & x = w_{1,3} + w_{2,3} \\ a, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \text{con } w_{1,3}, w_{2,3} \text{ reales}$$

distintos de cero.

Bibliografía

- [1] Kolmogorov, S. V. Fomín:
Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, Ed.
Mir-Moscú 1975.
- [2] Marek Kuczma, Bogdan Choczewski, Roman Ger:
Iterative Functional Equations (Volume 32), Cambridge University Press,
1990.
- [3] Enrique Castillo, Reyes Ruiz:
Ecuaciones Funcionales, Curso de Magister y Doctorado, Departamento de
Matemáticas Aplicadas y C. C., mayo de 1993.
- [4] Eric Gole and Servet Martínez:
Neural and Automata Networks, Dynamical Behavior and Applications,
Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [5] Norbert Wiener, Armand Siegel, Bayard Rankin, William Ted
Martin:
Differential Space, Quantum Systems, and Prediction. The M.I.T. Press,
1966.
- [6] G. P. Pielyuj, A.N. Sharkovskii:
Vvidienle v Teoriju Funkcionalnij Uravnienie, Ed. Naukova Dumka, Kiev
1974.
- [7] A. G. Kurosch:
Curso de Álgebra Superior, ed. Mir, Moscú 1968.
- [8] Smítal, Jaroslav:
On Function and Functional Equations, IOP Publishings, Czechoslovakia
1988.

- [9] Marilyn McCord Nelson:
A Practical Guide to Neural Nets. Addison Wesley Publishing, 1991.
- [10] Adam Blum:
Neural Networks in C++, An Object-Oriented Framework for Building
Connectionist Systems. Jhon Wiley & Sons Inc., 1992.
- [11] V. Hutson, J.S. Pym :
Applications of Functional Analysis and Operator Theory. Mathematics in
Sciences and Engineering, Vol. 146. Academic Press, 1980. Sciences and
Engineering, Vol. 146. Academic Press, 1980.
- [12] Paolo Antognetti, Veljko Milutinovic:
Neural Networks and Implementations , Vol. II Prentice Hall, 1991
- [13] M. V. Volokenshtein:
Biofisica, Ed. Mir, 1985.
- [14] Alejandro V. Engel:
Elementos de Biomatemática, Monografía No. 20, Secretaría
General de la Organización de los Estados Americanos. Programa Regional
de Desarrollo Científico y Tecnológico. Washington D.C. 1978.
- [15] R. Eckert, D. Randall, G. Augustine:
Fisiología Animal, Mecanismos y Adaptaciones. 3a. Edición,
McGraw-Hill International, 1990.
- [16] S.H. Fridberg, A.J. Insel, L.E. Spence:
Algebra Lineal. Publicaciones Cultura S.A. Primera Edición. México
1982.
- [17] James L. Buchanan, Peter R. Turner:
Numerical Methods and Analysis. McGraw-Hill Inc. 1992.
- [18] Donald B. Stratton:
Neurofisiología. Editorial LIMUSA 1984.
- [19] Smital, Jaroslav:
On Functions and Functional Equations. IOP Publishing Ltd., Checoslo-
vakia,
1988.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

- [20] Marek Kuczma:
Functional Equations in a Single Variable. Hafner Publishing Company,
Poland
1968.
- [21] Richard Bellman:
Introducción al Análisis Matricial, ed. Reverté, 1965.
- [22] Gilbert Strang:
Álgebra Lineal y sus Aplicaciones, Fondo Educativo Interamericano, 1982.