

62
25'



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**SUCESIONES BERNOULLI Y SERIES DE
RADEMACHER**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
A C T U A R I O
P R E S E N T A,
ALBERTO MOLINA ESCOBAR



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

" SUCESIONES BERNOULLI Y SERIES DE RADEMACHER "

realizado por ALBERTO MOLINA ESCOBAR

con número de cuenta 8421753-0 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

DRA.
Directora de Tesis
Propietario

MARIA EMILIA CABALLERO ACOSTA

Maria Emilia Caballero Acosta

MAT.
Propietario
DR.
Propietario

LUIS ALBERTO BRISEÑO AGUIRRE

Luis Alberto Briseño Aguirre

RAUL RUEDA DIAZ DEL CAMPO

Raul Rueda Diaz del Campo

DR.
Suplente

SALVADOR PEREZ ESTEVA

Salvador Perez Esteva

DR.
Suplente

JAVIER PAEZ CARDENAS

Javier Paez Cardenas

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA
Consejo Departamental de Matemáticas

DEDICATORIA

A mis padres por su ejemplo, unión y cariño.

A mis hermanos Alejandra, Edgar, Aída, Víctor, Jesús,
Martha y Ma. Elena por su apoyo.

A Rosalía por su amor.

*Esta mujer cabe en mis manos, y en mis manos la
llevaría como una cesta de magnolias.*

*Esta mujer cabe en mis ojos. La envuelven mis
miradas, mis miradas que nada ven cuando la envuelven.*

*Y mis manos y mis ojos le guardan entera su caricia
porque sólo ella, sólo ella cabe en mi corazón.*

Alherto.

AGRADECIMIENTOS

A María Emilia, Luis Briseño, Javier Páez y
Guillermo Gravinsky por toda la enseñanza que mi brindaron.

A mis *grandes* amigos Cuco, Jorge García "el bueno",
Jorge Rivera " el malo" y Carlos por hacer divertido esto.

Contenido

Introducción	1
1 Sucesiones Bernoulli.	3
1.1 Construcción del modelo.	3
1.2 Extensión del modelo.	12
1.3 Funciones de Rademacher.	19
1.4 Propiedades de las funciones Rademacher.	24
2 Distribución de la serie de Rademacher.	39
2.1 Notación.	39
2.2 Normas en espacios de Banach.	43
2.3 Algunas desigualdades.	53
2.4 Resultado principal.	57
Bibliografía	61

Lista de Figuras

1.1	Intervalos diádicos	6
1.2	Gráfica de $d_1(\omega)$ y $d_2(\omega)$	7
1.3	Funciones de Rademacher	20
1.4	Función $-\text{sen}(4\pi\omega)$	30
2.1	Diagrama de Gagliardo	45

Introducción

Se sabe que la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente pero no absolutamente, de manera que una serie como $\sum \frac{1}{n}$ que no era convergente, se logró transformar en una convergente mediante cierta distribución de signos + y - en la sucesión que forma el término general de la serie. Una pregunta interesante es si se puede cambiar el modo de distribuir los signos + y - y obtener todavía una serie convergente.

Un resultado de cierta generalidad es que si $\{x_n\} \in l_2$ y se toma la sucesión de funciones de Rademacher $\{r_n\}$ entonces $\sum r_n x_n = \sum \pm x_n$ converge.

El estudio de la función de distribución de la variable aleatoria $\sum r_n x_n$ tiene por sí misma interés. Al estudiarla se hallan cotas como

$$\mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > t \|x\|_2 \right) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$$

donde $t > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > \lambda \|x\|_2 \right) \geq \frac{1}{6} (1 - \lambda^2)^2$$

con $0 < \lambda < 1$ y

$$\mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > \|x\|_1 \right) = 0$$

si $x \in l_1$; que son demostradas en este trabajo. Nótese que en estas cotas intervienen las magnitudes $t \|x\|_2$ y $\|x\|_1$. En el segundo capítulo de la tesis se introduce la norma $K_{1,2}$ de interpolación, que relaciona a estas magnitudes. De hecho se observa durante el trabajo que para ciertos valores de t se comporta como $t \|x\|_2$ y para otros valores como $\|x\|_1$ de manera que actúa "interpolando" a estas cantidades.

Se ha incluido al inicio una construcción detallada de las funciones de Rademacher a partir de las sucesiones Bernoulli, cuya construcción también se da a detalle. Pero una parte importante del trabajo toma la idea del

artículo de Montgomery-Smith S.J. titulado *The Distribution of Rademacher sums* [9].

En este artículo se hallan cotas para $\mathbb{P}(\sum r_n x_n > t)$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales en l_2 .

Luego de introducir ciertas normas para el espacio de sucesiones l_2 y de usar las relaciones que estas normas guardan con la norma $K_{1,2}$, se hallan desigualdades cruciales para el objetivo final.

Capítulo 1

Sucesiones Bernoulli.

La intención es construir un modelo analítico que represente una sucesión infinita de lanzamientos de una moneda honesta, donde por honesta se entiende que la moneda tiene la misma oportunidad de que aparezca sol o águila en cualquiera de los lanzamientos. A estas sucesiones de volados se les llama sucesiones Bernoulli. También se definen las funciones de Rademacher incluyendo algunas propiedades y ejemplos donde aparezcan éstas; las funciones de Rademacher son utilizadas a lo largo de todo el trabajo.

1.1 Construcción del modelo.

Primero se construye este modelo hasta donde sea posible sin usar herramienta de teoría de probabilidad, para después darlo de manera final utilizando teoremas importantes como el de Extensión de Carathéodory.

Empecemos dando algunas definiciones y notaciones que utilizaremos en todo el trabajo.

Ω denotará al intervalo semiabierto unitario $(0, 1]$ y ω será un punto genérico de Ω . Sea

$$B = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]$$

en donde los intervalos $(a_i, b_i]$ son disjuntos y están contenidos en Ω , definimos a $\lambda(B)$ como

$$\lambda(B) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad (1.1)$$

que es la suma de las longitudes de los intervalos que integran a B .

Ahora, para cada número $\omega \in \Omega$ consideremos su expansión diádica o binaria infinita

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(\omega)}{2^n} = 0.d_1d_2d_3\dots$$

en donde cada $d_n(\omega) = 0$ ó 1 para $n = 1, 2, 3, \dots$

Los dígitos $d_n(\omega)$ pueden ser vistos de dos maneras: fijando a n y dejando variar a ω se tiene una función real que toma los valores cero o uno sobre el intervalo unitario, o fijando un punto ω y dejando variar a n se tiene una sucesión de ceros y unos.

Como los dígitos $d_n(\omega)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ determinan a ω , introducimos la notación

$$(d_1(\omega), d_2(\omega), d_3(\omega), \dots) \quad (1.2)$$

que representa la sucesión de dígitos binarios en la expansión de ω .

Esta expansión es única excepto cuando ω es un número racional diádico, es decir, ω es de la forma $\frac{m}{2^n}$ con m un entero tal que $0 < m < 2^n$ y $n \in \mathbb{N}$. En estos casos para asegurar unicidad en la expansión, se agrega la condición de que la expansión contenga una infinidad de unos, es decir, una terminación en unos.

Así, por ejemplo, se elige la primera de las dos expansiones siguientes:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \dots$$

Por esta razón excluimos al número cero de Ω ; al 1 le asignamos la expansión diádica 0.111...

Siguiendo con la construcción de este modelo, consideremos $\{u_i : 1 \leq i\}$ una sucesión de ceros y unos ya preestablecida. Entonces

$$\{\omega \in \Omega : d_i(\omega) = u_i, 1 \leq i \leq n\} = \bigcap_{i=1}^n \{\omega \in \Omega : d_i(\omega) = u_i\} \quad (1.3)$$

es el conjunto de números ω cuyos primeros n dígitos son las u_i dadas. De esta manera un punto está en (1.3) si

$$\omega = 0.u_1 u_2 \dots u_n d_{n+1} d_{n+2} \dots$$

con los dígitos desde el $n+1$ en adelante completamente arbitrarios.

Podemos ver que tales ω 's satisfacen las dos desigualdades siguientes:

$$\sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i} < \omega \leq \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

esto porque los valores extremos de ω en el lado izquierdo de la desigualdad corresponden al caso $d_i(\omega) = 0$ para $i > n$, es decir $\omega = 0.u_1 u_2 \dots u_n 00 \dots$ y para el lado derecho corresponden al caso $d_i(\omega) = 1$ para $i > n$, esto es $\omega = 0.u_1 u_2 \dots u_n 11 \dots$, entonces

$$\{\omega : d_i(\omega) = u_i, 1 \leq i \leq n\} = \left\{ \omega : \omega \in \left(\sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i}, \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \right) \right\} \quad (1.4)$$

aquí el intervalo es abierto por la izquierda y cerrado por la derecha precisamente porque la expansión de ω es la que tiene terminación en unos. Entonces para una sucesión fija $\{u_i\}_{i=1}^n$ obtenemos un intervalo cuya longitud es $\frac{1}{2^n}$.

Los intervalos como

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i}, \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \right)$$

serán llamados intervalos diádicos; los extremos de estos intervalos son racionales diádicos adyacentes con el mismo denominador y n será el orden o rango del intervalo.

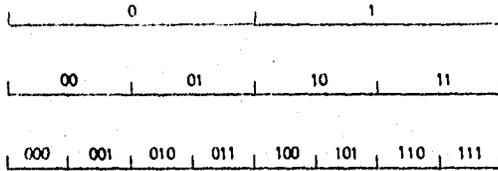


Figura 1.1: Intervalos diádicos

Si fijamos n y variamos todas las posibles elecciones de ceros y unos de $\{u_i\}_{i=1}^n$ obtenemos 2^n intervalos diádicos de orden n todos ajenos cuya unión es el intervalo $(0, 1]$, es decir, para cada n tenemos 2^n intervalos diádicos de rango n que particionan a Ω . Véase la figura 1.1.

Cabe hacer mención que para cada sucesión fija $\{u_i\}_{i=1}^n$ tenemos la siguiente igualdad

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i}, \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \right) = \left(\frac{l-1}{2^n}, \frac{l}{2^n} \right]$$

donde

$$l = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot 2^{n-i}) + 1$$

ahora, si variamos todos los valores de $\{u_i\}_{i=1}^n$ tenemos que $l = 1, 2, 3, \dots, 2^n$.

Para tener un mejor manejo de los intervalos diádicos adoptaremos la siguiente notación

$$J_l = \left(\frac{l-1}{2^n}, \frac{l}{2^n} \right]$$

con $l = 1, 2, 3, \dots, 2^n$, de donde

$$(0, 1] = \bigcup_{l=1}^{2^n} J_l$$

y $J_l \cap J_k = \emptyset$ si $k \neq l$.

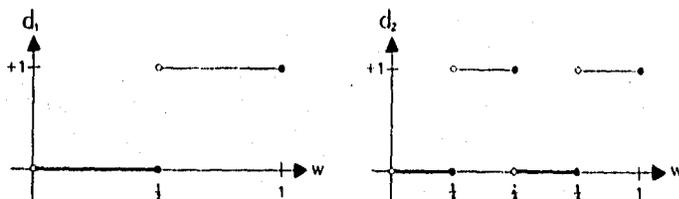


Figura 1.2: Gráfica de $d_1(\omega)$ y $d_2(\omega)$

Si deseamos obtener los intervalos diádicos de rango $n + 1$ teniendo los de rango n , únicamente dividimos en dos partes de igual longitud cada intervalo de rango n , una mitad izquierda sobre la cual $d_{n+1}(\omega)$ es cero y una mitad derecha sobre la cual $d_{n+1}(\omega)$ es uno. Para $u = 0$ y para $u = 1$ el conjunto $\{\omega : d_{n+1}(\omega) = u\}$ es una unión de 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Observemos que sobre cada intervalo diádico de rango i , $d_i(\omega)$ es constante, más aún

$$d_i(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{sobre } J_l \text{ si } l = 1, 3, \dots, 2^i - 1 \\ 1 & \text{sobre } J_l \text{ si } l = 2, 4, \dots, 2^i \end{cases}$$

y para $n > i$ cada intervalo diádico de orden n está contenido completamente en un intervalo de orden i . Por tanto $d_i(\omega)$ es constante sobre cada intervalo diádico de orden n si $i \leq n$.

La gráfica de $d_1(\omega)$ y $d_2(\omega)$ se muestran en la figura 1.2 .

Todas estas definiciones y observaciones son el punto inicial para la representación matemática de las sucesiones Bernoulli.

Una sucesión Bernoulli se puede representar por una cadena de A 's y S 's, en donde A simboliza la obtención de águila y S la obtención de sol en el lanzamiento de una moneda honesta. Entonces una posible sucesión Bernoulli puede ser simbolizada como

AASASASSSAAS... (1.5)

Sea β la colección de todas las posibles sucesiones Bernoulli; como se verá en el Teorema 1.1.1, el conjunto β se puede poner en biyección con el intervalo $(0,1]$ y como consecuencia β es un conjunto no numerable.

Teorema 1.1.1 *Existe una biyección entre $\Omega = (0,1]$ y β , las sucesiones Bernoulli.*

DEMOSTRACIÓN.

Para la demostración del Teorema, se construye una función biyectiva de $\Omega = (0,1]$ a β , suprimiendo de éste último un conjunto numerable.

Primeramente imaginemos una moneda con caras etiquetadas 1 y 0 en lugar de las usuales águila y sol respectivamente, así por ejemplo, la sucesión Bernoulli en (1.5) sería

110101000110...

Con esta interpretación, si ω es extraído aleatoriamente de Ω , (1.2) se vería como si resultara de una sucesión infinita de lanzamientos de una moneda. De este hecho tenemos entonces una correspondiente sucesión Bernoulli que es única, en donde la unicidad se garantiza porque restringimos a ω a tener una representación diádica única. Entonces ya tenemos una función inyectiva de Ω a β y por lo tanto podemos afirmar que β , las sucesiones Bernoulli, son un conjunto no numerable.

Hasta ahora sólo hemos demostrado la inyectividad de dicha función, faltaría mostrar la suprayectividad, pero aquí falla para aquellas sucesiones Bernoulli que a partir de cierto volado aparecen únicamente soles, ya que para ningún punto ω tenemos la sucesión $(u_1, u_2, \dots, u_n, 0, 0, \dots)$, por la restricción en la expansión de ω .

Este tipo de sucesiones son el conjunto que descartaremos de las sucesiones Bernoulli.

Sea β_{deg} la colección de las sucesiones Bernoulli que después de cierto volado aparecen en los subsecuentes lanzamientos únicamente soles.

Afirmamos que estas sucesiones son un conjunto numerable.

Sea β_{deg}^k la colección de las sucesiones Bernoulli que tienen únicamente soles a partir del k -ésimo volado. Como β_{deg}^k es finito; de hecho su cardinalidad es

$$\#\beta_{deg}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 2^{k-2} & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

entonces

$$\beta_{deg} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \beta_{deg}^k$$

resulta ser una unión numerable de conjuntos finitos, por tanto β_{deg} es numerable.

Como β_{deg} es un subconjunto numerable del conjunto β no numerable, β_{deg} es descartado de los elementos de β , que sigue siendo no numerable y por consiguiente tenemos ya la sobreyectividad y por tanto una biyección entre Ω y β . ■

• Observación.

A partir de este momento consideraremos exclusivamente como sucesiones Bernoulli a aquellas sucesiones que no tengan únicamente soles a partir de cierto lanzamiento. Con este resultado podemos identificar a β con $(0,1]$, ya que a cada sucesión Bernoulli le asignamos un y sólo un punto de Ω .

Con ayuda del Teorema anterior y el Principio de Borel calcularemos algunos eventos probabilísticos. Recordemos el principio de Borel.

• Principio de Borel.

Supongamos que E es el evento probabilístico que ocurre en cierta sucesión Bernoulli, sea β_E el subconjunto correspondiente de β para el cual el evento E ocurre. Ahora B_E será el correspondiente subconjunto de Ω que se puede encontrar gracias al Teorema 1.1.1. Supongamos que B_E es una unión finita

de intervalos diádicos. Entonces la probabilidad de que E ocurra es igual a $\lambda(B_E)$, como se definió en (1.1).

Ejemplo 1.1.1 E es el evento que águila se obtiene en el primer volado.

$$\begin{aligned} B_E &= \{\omega \in \Omega : \omega = 0.1d_2(\omega)d_3(\omega)\dots\} \\ &= \{\omega \in \Omega : d_1(\omega) = 1\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : \omega \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por (1.4), entonces

$$\lambda(B_E) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 1.1.2 E es el evento que en los primeros n lanzamientos aparece una sucesión ya preestablecida de águilas y soles.

$$\begin{aligned} B_E &= \{\omega \in \Omega : \omega = 0.u_1u_2\dots u_nd_{n+1}d_{n+2}\dots\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : \omega \in \left(\sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i}, \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \right] \right\} \end{aligned}$$

esto último por (1.4), entonces

$$\lambda(B_E) = \frac{1}{2^n}.$$

Ejemplo 1.1.3 E es el evento que águila se obtiene en el n -ésimo lanzamiento.

$$B_E = \{\omega \in \Omega : \omega = 0.d_1d_2\dots d_{n-1}1d_{n+1}\dots\}$$

Fijando en particular un punto $\eta = 0.u_1u_2\dots u_{n-1}1d_{n+1}\dots$ entonces B_E contiene al intervalo $(\eta, \eta + \frac{1}{2^n}]$, se puede elegir a u_1, u_2, \dots, u_{n-1} de 2^{n-1} maneras distintas y cada una de ellas da un intervalo diádico ajeno de los demás.

Así, se tiene una unión finita y ajena de intervalos, por tanto

$$\lambda(B_E) = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 1.1.4 E es el evento que en n lanzamientos exactamente k águilas aparecieron.

$$B_E = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{i=1}^n d_i(\omega) = k \right\} \quad \text{para } 0 \leq k \leq n.$$

Este conjunto es la unión de intervalos diádicos correspondientes a una sucesión u_1, u_2, \dots, u_n que contenga k unos y $n - k$ ceros, cada uno de estos intervalos tiene longitud $\frac{1}{2^n}$ y hay $\binom{n}{k}$ de éstos y todos ajenos. Así se tiene una unión ajena y finita de intervalos, por tanto

$$\lambda(B_E) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

Ejemplo 1.1.5 Sea E el evento que a partir de cierto lanzamiento aparecen en forma consecutiva k soles, donde $k \in \mathbb{N}$.

Definamos a $l_n(\omega)$ como la longitud de las rachas de ceros iniciada en $d_n(\omega)$, es decir

$$l_n(\omega) = \begin{cases} k & \text{si } d_n(\omega) = \dots = d_{n+(k-1)}(\omega) = 0 \text{ y } d_{n+k}(\omega) = 1 \\ 0 & \text{si } d_n(\omega) = 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

de aquí

$$B_E = \{ \omega \in \Omega : l_n(\omega) = k \}$$

fijando un punto

$$\eta = 0.u_1u_2\dots u_{n-1}00\dots 01d_{n+k+1}d_{n+k+2}\dots$$

entonces B_E contiene al intervalo $(\eta, \eta + \frac{1}{2^{n+k}}]$ y hay 2^{n-1} intervalos de estos y todos ajenos que están en B_E ; por tanto

$$\lambda(B_E) = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

1.2 Extensión del modelo.

En todos los ejemplos anteriores, calculamos, gracias a la definición (1.1), probabilidades a eventos que son uniones finitas de intervalos; además de que el Principio de Borel se restringió a uniones finitas de intervalos para medir dichos eventos; es natural tratar de ir más allá y asignar probabilidades de una manera sistemática a otros conjuntos, además de uniones finitas de intervalos.

Empezamos en este modelo considerando a las uniones ajenas finitas de subintervalos cerrados por la derecha y abiertos por la izquierda de $\Omega = (0, 1]$; denotemos por \mathcal{F}_0 a la familia de dichos subintervalos, un primer resultado es el siguiente.

Proposición 1.2.1 \mathcal{F}_0 es un álgebra sobre $(0, 1]$.

DEMOSTRACIÓN.

i. $\Omega \in \mathcal{F}_0$

ii. Si $A \in \mathcal{F}_0$ con $A = \bigcup_{i=1}^m (a_i, a'_i]$ entonces

$$A^c = (0, a_1] \cup (a'_1, a_2] \cup \dots \cup (a'_{m-1}, a_m] \cup (a'_m, 1]$$

que es una unión disjunta; así $A^c \in \mathcal{F}_0$.

iii. Sea $B \in \mathcal{F}_0$, es decir, $B = \bigcup_{j=1}^n (b_j, b'_j]$ entonces

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n \{(a_i, a'_i] \cap (b_j, b'_j]\}$$

donde cada intersección es un intervalo o es el conjunto vacío, y la unión es disjunta, de aquí que $A \cap B \in \mathcal{F}_0$. ■

En (1.1) se definió a λ para uniones ajenas finitas de intervalos. Con los siguientes lemas se verá que se pueden tomar uniones numerables.

Lema 1.2.1 Si $\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \subset (a, b]$ donde los intervalos $(a_k, b_k]$ son disjuntos, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \leq b - a.$$

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos primero que se tiene un número finito de intervalos, digamos n . El resultado es obvio si $n = 1$. Asumamos que se cumple para $n - 1$, es decir

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} (a_k, b_k] \subset (a, a_n] \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - a_k) \leq a_n - a$$

de aquí que

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \leq (a_n - a) + (b_n - a_n) \leq b - a$$

que se cumple para cualquier n , es decir $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)$ está acotado por $(b - a)$ para toda n , entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \leq b - a.$$

■

Lema 1.2.2 Si $(a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k]$ con $a_1 \leq a$, donde los intervalos $(a_k, b_k]$ pueden ser no disjuntos, entonces $b - a \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$.

DEMOSTRACIÓN.

Demostremoslo para un número finito n ; para $n = 1$ es claro, asumamos que se da para $n - 1$ intervalos, esto es

$$(a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} (a_k, b_k] \quad \text{y} \quad b - a \leq \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - a_k)$$

y que $(a, b) \subset \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k]$ en donde $a_n < b \leq b_n$.

Si $a_n \leq a$, el resultado es directo ya que $b - a \leq b_n - a_n$. Si $a < a_n$ entonces

$$(a, a_n] \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} (a_k, b_k]$$

así por hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - a_k) \geq a_n - a$$

y de aquí

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \geq (a_n - a) + (b_n - a_n) \geq b - a$$

Ahora supongamos que $(a, b) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k]$. Si $0 < \epsilon < b - a$ los intervalos abiertos $(a_k, b_k + \epsilon \cdot 2^{-k})$ cubren al intervalo cerrado $[a + \epsilon, b]$ y se sigue por el Teorema de Heine-Borel que

$$[a + \epsilon, b] \subset \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k + \epsilon \cdot 2^{-k})$$

para algún n .

Entonces

$$(a + \epsilon, b) \subset \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k + \epsilon \cdot 2^{-k})$$

y por lo demostrado para el caso finito

$$b - a - \epsilon \leq \sum_{k=1}^n (b_k + \epsilon \cdot 2^{-k} - a_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) + \epsilon$$

como ϵ es arbitrario entonces

$$b - a \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$$

Lema 1.2.3 Si $(a, b] = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k]$ y los intervalos $(a_k, b_k]$ son disjuntos, entonces $b - a = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$.

DEMOSTRACIÓN.

Se sigue directamente de los Lemas 1.2.1 y 1.2.2. ■

Ahora mostremos que λ está bien definida sobre \mathcal{F}_0 .

Sea $A \in \mathcal{F}_0$ donde $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$ y también $A = \bigcup_{j=1}^m J_j$ con $J_j \neq I_i$ hay que ver que la medida asociada a A es única.

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^n \lambda(I_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^m \lambda(J_j) = \lambda(A)$$

es decir λ está bien definida.

Todo lo anterior se resume diciendo que λ es una medida de probabilidad sobre \mathcal{F}_0 , lo cual se expone en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.2 λ es una medida de probabilidad σ -aditiva sobre (Ω, \mathcal{F}_0) .

DEMOSTRACIÓN.

i. $\lambda((0, 1]) = 1$

ii. Si $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \in \mathcal{F}_0$ entonces $0 \leq \lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) \leq 1$

iii. Supongamos que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, donde A y A_k son elementos de \mathcal{F}_0 con $A_k \cap A_l = \emptyset$ si $k \neq l$, entonces $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$ y $A_k = \bigcup_{j=1}^{m_k} J_{kj}$ son uniones ajenas de intervalos, por lo tanto usando el Lema 1.2.3

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^n \lambda(I_i) = \sum_{i=1}^n \lambda\left(I_i \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_i \cap A_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \left(I_i \cap \bigcup_{j=1}^{m_k} J_{k_j} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \lambda(I_i \cap J_{k_j}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \lambda(J_{k_j}) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)
 \end{aligned}$$

es decir λ define una medida de probabilidad sobre \mathcal{F}_0 . ■

Para extender esta medida sobre la σ -álgebra generada por \mathcal{F}_0 , y así asignar probabilidades a una clase de conjuntos más grandes usamos el Teorema de Extensión de Carathéodory.

Teorema 1.2.1 (Extensión de Carathéodory) *Sea S un conjunto no vacío, sea ρ_0 una álgebra sobre S y sea ρ la σ -álgebra generada por ρ_0 . Si μ_0 es una función aditiva numerable $\mu_0 : \rho_0 \rightarrow [0, 1]$ entonces existe una medida μ sobre (S, ρ) tal que $\mu = \mu_0$ sobre ρ_0 ; si $\mu_0(S) < \infty$ entonces esta extensión es única.*

Para nuestro caso $S = \Omega$ y $\sigma(\mathcal{F}_0)$, la σ -álgebra generada por \mathcal{F}_0 , es igual a $\mathcal{B}_{(0,1]}$ que es la σ -álgebra de Borel sobre el intervalo $(0, 1]$. Como λ es una medida sobre (Ω, \mathcal{F}_0) y $\lambda(\Omega) < \infty$, entonces por el Teorema 1.2.1 λ se extiende de manera única a $\mathcal{B}_{(0,1]}$; a la extensión $\mu = \mathbb{P}$ se le conoce como la medida de Lebesgue sobre el intervalo unitario y a los elementos de $\mathcal{B}_{(0,1]}$ como conjuntos Borel o Borelianos.

Hagamos algunos ejemplos en donde manejemos conjuntos que no sean uniones finitas de intervalos y usemos la medida \mathbb{P} de probabilidad.

Ejemplo 1.2.1 *Sea E el evento que las rachas de soles en una sucesión de lanzamientos, sean mayores o iguales a r donde $r \in \mathbb{N}$.*

Con ayuda de la función $l_n(\omega)$, definida en (1.6), calculemos esta probabilidad. Sea E_k el evento que $l_n(\omega) = k$, donde $k \geq r$; entonces

$$\begin{aligned}
 B_{E_k} &= \{\omega \in \Omega : d_n(\omega) = \dots = d_{n+k-1}(\omega) = 0 \text{ y } d_{n+k}(\omega) = 1\} \\
 &= \{\omega \in \Omega : d_i(\omega) = 0, \quad n \leq i < n+k \text{ y } d_{n+k}(\omega) = 1\}
 \end{aligned}$$

de aquí

$$B_E = \bigcup_{k=r}^{\infty} B_{E_k}$$

resulta ser un conjunto Borel porque B_{E_k} es un elemento de $\mathcal{B}_{(0,1]}$; notemos que B_E es una unión ajena entonces por el ejemplo 1.1.5

$$\mathbb{P}(B_E) = \sum_{k=r}^{\infty} 2^{-k-1} = 2^{-r}$$

Ejemplo 1.2.2 Tomemos una sucesión de números reales r_1, r_2, \dots donde $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{r_n} < \infty$. Sea E_n el evento que $l_n(\omega) \geq r_n$ donde $l_n(\omega)$ es como en (1.6). Calculemos el evento $E = \{E_n \text{ i.o.}\} = \limsup E_n$.

Denotemos por B_{E_n} al subconjunto de $(0, 1]$ correspondiente a E_n , entonces

$$B_{E_n} = \{\omega \in \Omega : d_i(\omega) = 0, \quad n \leq i < n + r_n \quad \text{y} \quad d_{[n+r_n]}(\omega) = 1\}$$

y por definición de $\limsup B_{E_n}$

$$B_E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} B_{E_n}$$

que resulta ser un conjunto Borel, ahora por el ejemplo anterior

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : l_n(\omega) \geq r_n\}) = 2^{-s_n}$$

donde s_n es el menor entero mayor o igual que r_n , como $2^{-s_n} \leq 2^{-r_n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-r_n} < \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-s_n} < \infty$; usando el 1^{er} Lema de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}(B_E) = 0$$

en particular si $r_n = (1 + \varepsilon) \log_2 n$ con $\varepsilon > 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{r_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

converge; así

$$\mathbb{P}(\{\omega : l_n(\omega) \geq (1 + \varepsilon) \log_2 n \text{ i.o.}\}) = 0.$$

Hasta este momento ya tenemos un espacio de probabilidad el cual será considerado para lo que resta de la tesis: el espacio de probabilidad en el intervalo unitario $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \mathbb{P})$. Se puede hablar ahora ya de variables aleatorias, distribuciones e independencia. Analicemos con esta herramienta lo hecho hasta el momento.

Proposición 1.2.3 *Sea $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, entonces los dígitos $d_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$, son variables aleatorias independientes con la misma distribución sobre $(0, 1]$.*

DEMOSTRACIÓN.

Son variables aleatorias sobre el intervalo unitario, ya que para cualquier n los conjuntos $\{\omega \in \Omega : d_n(\omega) = 0\}$ y $\{\omega \in \Omega : d_n(\omega) = 1\}$ son uniones finitas de subintervalos, de aquí que estén en $\mathcal{B}_{(0,1]}$. Ahora por ejemplo 1.1.3

$$\mathbb{P}(\{\omega : d_n(\omega) = 1\}) = \mathbb{P}(\{\omega : d_n(\omega) = 0\}) = \frac{1}{2}$$

con $n = 1, 2, \dots$, es decir son variables aleatorias con la misma distribución.

La independencia se debe a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{\omega : d_i(\omega) = u_i\}\right) &= \mathbb{P}(\{\omega : d_i(\omega) = u_i, 1 \leq i \leq n\}) \\ &= \frac{1}{2^n} \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{\omega : d_i(\omega) = u_i\}) \end{aligned}$$

que se cumple para cualquier elección de valores de $\{u_i, i \geq 1\}$. ■

Cuando se tengan variables aleatorias como $\{d_n(\omega)\}_{n \geq 1}$ que son independientes idénticamente distribuidas, se abreviará esto diciendo que $\{d_n(\omega)\}_{n \geq 1}$ son v.a.i.i.d.

Como consecuencia de la Proposición 1.2.3 tenemos que $\sum_{i=1}^n d_i(\omega)$ y $l_n(\omega)$ son variables aleatorias.

Concluyendo, nuestro modelo probabilístico de las sucesiones Bernoulli considera a $\Omega = (0, 1]$ como el espacio muestral, la σ -álgebra a la de los borelianos en $(0, 1]$, a la medida de probabilidad como la medida de Lebesgue en $(0, 1]$ y el n -ésimo lanzamiento de la moneda es representado por el dígito $d_n(\omega)$ en la expansión binaria infinita de $\omega \in \Omega$.

1.3 Funciones de Rademacher.

Una vez que hemos construido el modelo de las sucesiones Bernoulli, pasamos a definir las funciones de Rademacher, ya que a partir de las Bernoulli éstas últimas se definen.

Definición 1.3.1 *La k -ésima función de Rademacher se define como*

$$r_k(\omega) = 2d_k - 1$$

para $k = 1, 2, \dots$ donde $\omega = 0.d_1d_2\dots d_k\dots$

Observemos que

$$r_k(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{si } d_k = 0 \\ 1 & \text{si } d_k = 1 \end{cases}$$

y por lo tanto

$$r_k^2(\omega) = 1$$

para $k = 1, 2, \dots$. La figura 1.3 muestra a las funciones $r_1(\omega)$ y $r_2(\omega)$.

Dado que las funciones de Rademacher están definidas en términos de los dígitos $d_k(\omega)$, $k \geq 1$ obtenemos la siguiente proposición.

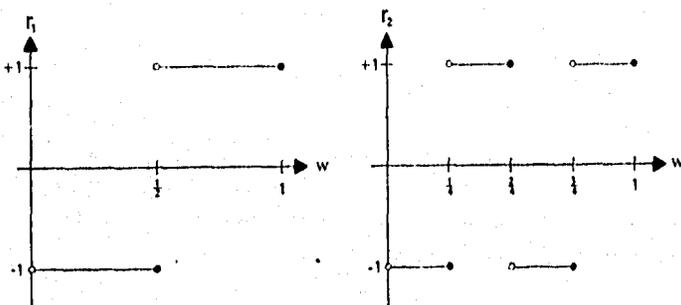


Figura 1.3: Funciones de Rademacher

Proposición 1.3.1 La sucesión $\{r_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias simétricas independientes con la misma distribución sobre el espacio de probabilidad $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1)}, \mathbb{P})$.

DEMOSTRACIÓN.

Que sean v.a.i.i.d. se desprende del hecho de que $\{d_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ lo sea, ya que si observamos se tiene

$$\{\omega \in \Omega : r_n(\omega) = -1\} = \{\omega \in \Omega : d_n(\omega) = 0\}$$

y

$$\{\omega \in \Omega : r_n(\omega) = 1\} = \{\omega \in \Omega : d_n(\omega) = 1\}$$

para cualquier n .

La demostración de que $\{r_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias simétricas se debe a que

$$\mathbb{P}(\{\omega : r_n(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}(\{\omega : r_n(\omega) \geq -x\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

para $n = 1, 2, \dots$ ■

• Observación.

Una caracterización de variables aleatorias simétricas es que la función característica solo es real, en nuestro caso la función característica de $r_n(\omega)$ lo es, ya que $r_n(\omega)$ es simétrica, de hecho su función característica es

$$\Psi_{r_n}(t) = \mathbb{E}(e^{itr_n}) = \sum_{x \in \{-1,1\}} e^{itx} \mathbb{P}(r_n = x) = \cos t$$

de donde se desprende que $\sum r_n(\omega)x_n$ sea una variable aleatoria simétrica, ya que es el producto de funciones características reales, donde $\{x_n\}_{n \geq 1}$.

Construyamos una nueva variable aleatoria, la suma parcial de las primeras n funciones de Rademacher

$$S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n r_i(\omega)$$

esta nueva función junto con las funciones de Rademacher tienen por sí mismas un significado propio, enmarcadas en el contexto de caminatas aleatorias, así como en juegos de apuestas.

Si una moneda es lanzada sucesivamente y si una partícula inicia en el origen una caminata aleatoria sobre la recta real, moviéndose sucesivamente una unidad en dirección positiva o negativa de acuerdo a lo que obtengamos en cada lanzamiento, entonces $r_i(\omega)$ representa si el movimiento fue realizado hacia adelante o hacia atrás en el i -ésimo paso y $S_n(\omega)$ representa la posición después de n pasos.

Con respecto a la segunda interpretación, si un jugador apuesta un peso sobre cada lanzamiento de una moneda, $r_i(\omega)$ representa si gana o pierde en el i -ésimo lanzamiento y $S_n(\omega)$ representa entonces su ganancia o pérdida acumulada hasta el n -ésimo lanzamiento.

Utilizando a las funciones $S_n(\omega)$ y $r_k(\omega)$ veamos que los siguientes eventos son conjuntos Borel.

Ejemplo 1.3.1 Sea E el evento que representa la pérdida de la fortuna inicial de un apostador, es decir, el apostador tiene una fortuna inicial de a pesos, apuesta sobre una sucesión de lanzamientos de una moneda en donde

en cada lanzamiento gana un peso si se obtuvo águila y pierde un peso si se obtuvo sol.

Usando el principio de Borel, podemos describir el evento B_E correspondiente; primero consideremos el evento B_{E_k} que representa la pérdida de la fortuna inicial en el k -ésimo volado; ahora bien $S_k(\omega)$ representa la fortuna total ganada o pérdida en la etapa k -ésima del juego. Entonces

$$B_{E_k} = \{\omega \in \Omega : S_l(\omega) > -a, l < k \text{ y } S_k(\omega) = -a\}$$

de aquí

$$B_E = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{E_k}$$

resulta ser un conjunto Borel ya que $B_{E_k} \in \mathcal{B}_{(0,1)}$.

Ejemplo 1.3.2 Sea E el evento que un patrón finito ya preestablecido, por ejemplo ASSA, ocurre una infinidad de veces en una sucesión Bernoulli.

Para describir al evento B_E , tomemos primeramente a E_n que representa el siguiente evento: el patrón ASSA ocurre al inicio del n -ésimo lanzamiento. Sea B_n el subconjunto de $(0, 1)$ que corresponde a E_n , así

$$B_n = \{\omega \in \Omega : r_n(\omega) = 1, r_{n+1}(\omega) = -1, r_{n+2}(\omega) = -1, r_{n+3}(\omega) = 1\}$$

Como B_n está descrito con un número finito de condiciones sobre las funciones de Rademacher entonces B_n es una unión finita de intervalos. entonces

$$B_E = \{B_n \text{ i.o.}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} B_n$$

es un conjunto Borel.

Ejemplo 1.3.3 Sea E el evento que una sucesión Bernoulli obedece la ley de los grandes números.

$$\text{Con } S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n r_i(\omega)$$

$$B_E = \left\{ \omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty \right\}.$$

Describamos a B_E como un conjunto Borel, recordando que

$$\frac{S_n(\omega)}{n} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty$$

se entiende que para cada $r > 0$, existe una $k > 0$ tal que

$$\left| \frac{S_n(\omega)}{n} \right| < \frac{1}{r} \text{ siempre y cuando } n \geq k.$$

Si denotamos

$$A_{n,r} = \left\{ \omega \in \Omega : \left| \frac{S_n(\omega)}{n} \right| < \frac{1}{r} \right\}$$

podemos escribir

$$B_E = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq k} A_{n,r}$$

que es un conjunto Borel por que cada $A_{n,r} \in \mathcal{B}_{(0,1)}$

Ejemplo 1.3.4 Sea E el evento que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(\omega)}{n}$ converge.

Definamos

$$T_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{r_k(\omega)}{k}$$

entonces la condición de Cauchy para series, nos dice que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(\omega)}{n}$ converge si y solo si para cualquier entero $r > 0$, existe un $k > 0$ tal que

$$|T_n(\omega) - T_m(\omega)| < \frac{1}{r} \text{ para todo } m, n \geq k.$$

Denotemos

$$A_{m,n,r} = \left\{ \omega \in \Omega : |T_n(\omega) - T_m(\omega)| < \frac{1}{r} \right\}$$

entonces tenemos que

$$B_E = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n,m \geq k} A_{m,n,r}$$

es un conjunto Borel, por que $A_{m,n,r}$ es un Boreliano.

1.4 Propiedades de las funciones Rademacher.

A continuación daremos algunas proposiciones que involucran a las funciones de Rademacher, los resultados obtenidos en esta sección tendrán gran relevancia en el capítulo 2.

Como hicimos mención en la sección 1.2, las sucesiones de Rademacher heredan muchas propiedades de las que tienen los dígitos d_n en la expansión de ω ; debido a esta estrecha relación obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.4.1 *Sea $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, entonces*

$$\int_0^1 r_i(\omega) d\omega = 0$$

para $i = 1, 2, \dots$

DEMOSTRACIÓN.

Descompongamos al intervalo $(0, 1]$ en intervalos diádicos de orden $i - 1$, es decir

$$(0, 1] = \bigcup_{l=1}^{2^{i-1}} J_l$$

en donde los J_l son los intervalos diádicos de orden $i - 1$; gracias a la propiedad de que el dígito $d_i(\omega)$ toma los valores cero y uno sobre la mitad izquierda y derecha respectivamente sobre cualquier intervalo de orden $i - 1$, tenemos que

$$\int_{J_l} r_i(\omega) d\omega = (-1 + 1) = 0 \quad (1.7)$$

y como se cumple para $l = 1, 2, \dots, 2^{i-1}$, entonces

$$\int_0^1 r_i(\omega) d\omega = 0$$

■

Observemos que $r_i(\omega) = -1$ sobre un conjunto de intervalos ajenos de longitud total $\frac{1}{2}$ y $r_i(\omega) = 1$ sobre un conjunto de intervalos ajenos de longitud total $\frac{1}{2}$ para $i = 1, 2, \dots$.

Una consecuencia inmediata de la proposición 1.4.1 es

$$\int_0^1 S_n(\omega) d\omega = 0$$

ya que

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_n(\omega) d\omega &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n r_i(\omega) d\omega \\ &= \int_0^1 r_1(\omega) d\omega + \int_0^1 r_2(\omega) d\omega + \dots + \int_0^1 r_n(\omega) d\omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

Este resultado lo podemos interpretar, viendo a la integral como el valor esperado, que la posición media (fortuna promedio) después de n -pasos (jugadas) en una caminata aleatoria (juego de apuestas) es cero.

Otra importante característica que tienen las sucesiones de Rademacher es que forman una familia de funciones ortonormales.

Proposición 1.4.2 Sea $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, entonces $\{r_i(\omega), i \geq 1\}$ satisface

$$\int_0^1 r_u(\omega) \cdot r_v(\omega) d\omega = \delta_{uv}$$

donde

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{si } u = v \\ 0 & \text{si } u \neq v \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.

La demostración cuando $u = v$, se basa en el hecho de que $r_i^2(\omega) = 1$ para $i = 1, 2, \dots$, entonces si $u = v$

$$\int_0^1 r_u(\omega) \cdot r_v(\omega) d\omega = \int_0^1 r_u^2(\omega) d\omega = 1 \cdot \int_0^1 d\omega = 1.$$

Para el caso en que $u \neq v$ supongamos sin perder generalidad que $u < v$; descompongamos al intervalo $(0, 1]$ en intervalos diádicos de orden $v - 1$, es decir

$$(0, 1] = \bigcup_{l=1}^{2^{v-1}} J_l$$

donde los J_l son los intervalos diádicos de rango $v - 1$. Por la misma característica que tienen los dígitos en la expansión de ω , $r_u(\omega)$ es constante en J_l y por (1.7) $r_v(\omega)$ toma los valores -1 y 1 sobre J_l , entonces

$$\begin{aligned} \int_{J_l} r_u(\omega) \cdot r_v(\omega) d\omega &= r_u \cdot \int_{J_l} r_v(\omega) d\omega \\ &= r_u \cdot (-1 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

como se cumple para cualquier J_l de rango $v - 1$, concluimos

$$\int_0^1 r_u(\omega) \cdot r_v(\omega) d\omega = 0$$

si $u \neq v$. ■

Podemos generalizar la proposición anterior, si en lugar de tener únicamente el producto de dos, tenemos el producto de n funciones de Rademacher, obteniendo resultados similares.

Proposición 1.4.3 Sea $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1)}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, entonces

$$\int_0^1 \prod_{j=1}^n r_{i_j}(\omega) d\omega = \begin{cases} 0 & \text{si } i_1 < i_2 < \dots < i_n \\ 1 & \text{si } i_1 = i_2 = i_3 = \dots = i_{n-1} = i_n \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.

La primera igualdad se obtiene tomando intervalos diádicos de rango $i_n - 1$, es decir

$$(0, 1] = \bigcup_{l=1}^{2^{i_n-1}} J_l$$

ahora bien, como $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ entonces sobre J_l las funciones $r_{i_1}(\omega)$, $r_{i_2}(\omega), \dots, r_{i_{n-1}}(\omega)$ son constantes para todo $l = 1, 2, \dots, 2^{i_n-1}$ y

$$r_{i_n}(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{sobre la mitad izquierda de } J_l \\ 1 & \text{sobre la mitad derecha de } J_l \end{cases}$$

de esta manera

$$\begin{aligned} \int_0^1 \prod_{j=1}^n r_{i_j}(\omega) d\omega &= \int_{J_1} \prod_{j=1}^n r_{i_j}(\omega) d\omega + \dots + \int_{J_{2^{i_n-1}}} \prod_{j=1}^n r_{i_j}(\omega) d\omega \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} r_{i_j} \cdot \int_{J_1} r_{i_n}(\omega) d\omega + \dots + \prod_{j=1}^{n-1} r_{i_j} \cdot \int_{J_{2^{i_n-1}}} r_{i_n}(\omega) d\omega \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} r_{i_j} \cdot (-1 + 1) + \dots + \prod_{j=1}^{n-1} r_{i_j} \cdot (-1 + 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para demostrar la segunda igualdad, tenemos que $r_i^2(\omega) = 1$, $i = 1, 2, \dots$, en este caso

$$r_{i_k}(\omega) = r_{i_{k+1}}(\omega) \quad \text{para } k = 1, 3, \dots, n-1$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \prod_{j=1}^n r_{i_j}(\omega) d\omega &= \int_0^1 (1)^{\frac{n}{2}} d\omega \\ &= 1 \cdot \int_0^1 d\omega \\ &= 1 \end{aligned}$$

• **Observación.**

Un resultado que se desprende de esta última proposición es el siguiente:

Si $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ y $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ es una sucesión de enteros no negativos

$$\int_0^1 r_{i_1}^{\alpha_1}(\omega) \cdot r_{i_2}^{\alpha_2}(\omega) \cdots r_{i_n}^{\alpha_n}(\omega) d\omega = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\alpha_i\}_{i=1}^n \text{ son todos pares} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.8)$$

Porque $r_k^{2m}(\omega) = 1$ para todo k y si al menos uno de los α_i es impar, por la proposición 1.4.3, sería cero esta integral.

Las funciones de Rademacher estan definidas inicialmente en el intervalo $(0, 1]$, pero se pueden definir sobre todos los reales, pidiéndole a la extensión que sea una función periódica de periodo 1.

Definición 1.4.1 Definimos la extensión de las funciones de Rademacher, sobre toda la recta real de la siguiente manera

$$r_k(\omega) = r_k(\omega + 1)$$

donde $\omega \in (0, 1]$.

Gracias a esta definición obtenemos la proposición siguiente

Proposición 1.4.4 Sea $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, siguiendo la extensión sobre los reales de las funciones de Rademacher obtenemos

$$r_{k+1}(\omega) = r_k(2 \cdot \omega)$$

y más aún

$$r_n(\omega) = r_1(2^{n-1} \cdot \omega)$$

DEMOSTRACIÓN.

Para la primera afirmación; sea $\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\omega)}{2^k}$ entonces

$$\begin{aligned} 2 \cdot \omega &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\omega)}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\omega)}{2^{k-1}} \\ &= d_1(\omega) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k(\omega)}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

en donde $d_1(\omega) = 0$ ó 1 .

De la definición 1.4.1 tenemos

$$\begin{aligned} r_k(2 \cdot \omega) &= r_k \left(d_1(\omega) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k(\omega)}{2^{k-1}} \right) \\ &= r_k \left(\frac{d_2(\omega)}{2} + \frac{d_3(\omega)}{2^2} + \dots \right) \\ &= r_{k+1}(\omega) \end{aligned}$$

por tanto

$$r_k(2 \cdot \omega) = r_{k+1}(\omega) \quad (1.9)$$

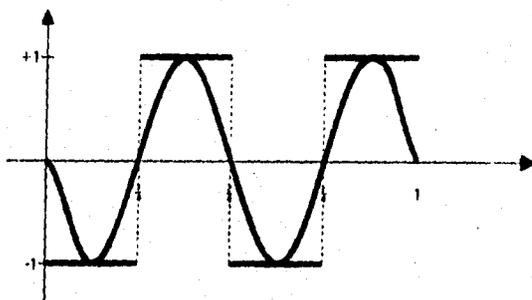
Para demostrar que $r_n(\omega) = r_1(2^{n-1} \cdot \omega)$ lo hacemos inductivamente.

Es claro que se cumple para $n = 1$, $r_1(\omega) = r_1(2^{1-1} \cdot \omega)$. Supongamos válido para n ; hay que demostrarlo para $n + 1$. Se tiene por la definición 1.4.1 y (1.9) que

$$\begin{aligned} r_{n+1}(\omega) &= r_n(2 \cdot \omega) \\ &= r_1(2^{n-1} \cdot 2 \cdot \omega) \\ &= r_1(2^n \cdot \omega) \end{aligned}$$

por tanto

$$r_{n+1}(\omega) = r_1(2^n \cdot \omega)$$

Figura 1.4: Función $-\text{sen}(4\pi\omega)$

La figura 1.4 muestra que puede existir una analogía entre la función $-\text{sen}(x)$ y las funciones de Rademacher; la siguiente proposición nos da esta relación.

Proposición 1.4.5 Sea $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, la siguiente igualdad se da, excepto para un número finito de puntos.

$$r_n(\omega) = -\text{sgn} \text{sen}(2\pi \cdot 2^{n-1} \cdot \omega)$$

en donde

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.

La demostración se hace inductivamente. Para $n = 1$ tenemos

$$r_1(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{si } d_1(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega \in (0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } d_1(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ahora bien, si $\omega \in (0, \frac{1}{2}]$ entonces $2\pi\omega \in (0, \pi]$ de aquí $\text{sen}(2\pi\omega) \geq 0$ y si $\omega \in (\frac{1}{2}, 1]$, entonces $2\pi\omega \in (\pi, 2\pi]$ de aquí $\text{sen}(2\pi\omega) \leq 0$, por tanto

$$-\text{sgn} \text{sen}(2\pi\omega) = \begin{cases} -1 & \text{si } \omega \in (0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } \omega \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

que coincide con $r_1(\omega)$ salvo en el punto $\omega = \frac{1}{2}$.

Asumamos que se da para n , hay que demostrarlo para $n + 1$.

Por (1.9)

$$\begin{aligned} r_{n+1}(\omega) &= r_n(2 \cdot \omega) \\ &= -\operatorname{sgn} \operatorname{sen}(2\pi \cdot 2^{n-1} \cdot 2 \cdot \omega) \\ &= -\operatorname{sgn} \operatorname{sen}(2\pi \cdot 2^n \cdot \omega) \end{aligned}$$

por tanto se cumple que

$$r_n(\omega) = -\operatorname{sgn} \operatorname{sen}(2\pi \cdot 2^{n-1} \cdot \omega), \quad n = 1, 2, \dots$$

excepto para los puntos $\omega = \frac{i}{2^n}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2^n - 1$, por la manera en que esta definida la función $\operatorname{sgn}(t)$. ■

Otra propiedad importante de las funciones de Rademacher es la siguiente.

Proposición 1.4.6 Sea $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, entonces las funciones de Rademacher satisfacen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(\omega)}{2^k} = 2 \cdot \omega - 1$$

y si definimos a $Y(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(\omega)}{2^k}$ entonces $Y(\omega)$ se distribuye uniformemente sobre $[-1, 1]$.

DEMOSTRACIÓN.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(\omega)}{2^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot 2d_k(\omega) - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\omega)}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= 2 \cdot \omega - 1. \end{aligned}$$

Ahora si $Y(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(\omega)}{2^k}$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}((2 \cdot \omega - 1) \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(\omega \leq \frac{x+1}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \end{aligned}$$

por lo tanto $Y(\omega)$ se distribuye uniformemente en $[-1, 1]$. ■

Entre las propiedades más importantes que se utilizan en el capítulo dos son las siguientes.

Proposición 1.4.7 Sea $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, si $\{t_k\}_{k=1}^n$ es una sucesión de escalares, entonces

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^n t_k \cdot r_k(\omega)\right\}\right) \equiv \int_0^1 \exp\left\{\sum_{k=1}^n t_k \cdot r_k(\omega)\right\} d\omega = \prod_{k=1}^n \cosh(t_k)$$

DEMOSTRACIÓN.

La demostración se reduce a mostrar únicamente que

$$\int_0^1 e^{t_k \cdot r_k(\omega)} d\omega = \cosh(t_k) \quad (1.10)$$

para $k = 1, 2, \dots$ ya que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp\left\{\sum_{k=1}^n t_k \cdot r_k(\omega)\right\} &= \int_0^1 e^{t_1 \cdot r_1(\omega)} \cdot e^{t_2 \cdot r_2(\omega)} \dots e^{t_n \cdot r_n(\omega)} d\omega \\ &= \int_0^1 e^{t_1 \cdot r_1(\omega)} d\omega \cdot \int_0^1 e^{t_2 \cdot r_2(\omega)} d\omega \dots \int_0^1 e^{t_n \cdot r_n(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

por independencia de las funciones de Rademacher; así entonces demostramos (1.10).

Descompongamos al intervalo $(0, 1]$ en intervalos diádicos de orden k , es decir

$$(0, 1] = \bigcup_{l=1}^{2^k} J_l$$

con $J_l = (\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{t_k \cdot r_k(\omega)} d\omega &= \int_{J_1} e^{t_k \cdot r_k(\omega)} d\omega + \int_{J_2} e^{t_k \cdot r_k(\omega)} d\omega + \dots + \int_{J_{2^k}} e^{t_k \cdot r_k(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2^k} (e^{-t_k} + e^{t_k}) + \frac{1}{2^k} (e^{-t_k} + e^{t_k}) + \dots + \frac{1}{2^k} (e^{-t_k} + e^{t_k}) \\ &= \frac{1}{2^k} \cdot (2^{k-1} \cdot e^{-t_k} + 2^{k-1} \cdot e^{t_k}) \\ &= \left(\frac{e^{-t_k} + e^{t_k}}{2} \right) \\ &= \cosh(t_k) \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \dots, n$, por tanto

$$\int_0^1 \exp \left\{ \sum_{k=1}^n t_k \cdot r_k(\omega) \right\} d\omega = \prod_{k=1}^n \cosh(t_k)$$

• Observación.

Como consecuencia de esta proposición tenemos que si $t_k = t$ para $k = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\int_0^1 \exp \left\{ \sum_{k=1}^n t \cdot r_k(\omega) \right\} d\omega = (\cosh(t))^n$$

de igual modo

$$\int_0^1 \exp \left\{ i \cdot \sum_{k=1}^n t_k \cdot r_k(\omega) \right\} d\omega = \prod_{k=1}^n \cos(t_k)$$

donde $t^2 = -1$; esto porque (1.10) se transforma en

$$\int_0^1 e^{i \cdot t_k \cdot r_k(\omega)} d\omega = \left(\frac{e^{i t_k} + e^{-i t_k}}{2} \right) = \cos(t_k)$$

igualmente si $t_k = t$ para $k = 1, \dots, n$, entonces

$$\int_0^1 \exp \left\{ i \cdot \sum_{k=1}^n t \cdot r_k(\omega) \right\} d\omega = (\cos(t))^n$$

Proposición 1.4.8 Sea $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1)}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, entonces

$$\int_0^1 S_n(\omega)^k d\omega = \left. \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \right|_{t=0}$$

con $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN.

De las observaciones hechas después de la proposición 1.4.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n &= (\cosh(t))^n \\ &= \int_0^1 \exp \{ t \cdot S_n(\omega) \} d\omega \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^n \right|_{t=0} &= \left. \frac{d^k}{dt^k} \left(\int_0^1 e^{t S_n(\omega)} d\omega \right) \right|_{t=0} \\ &= \int_0^1 \left\{ \left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(e^{t S_n(\omega)} \right) \right|_{t=0} \right\} d\omega \\ &= \int_0^1 \left\{ S_n(\omega)^k \cdot e^{t S_n(\omega)} \right|_{t=0} \right\} d\omega \\ &= \int_0^1 S_n(\omega)^k d\omega \end{aligned}$$

La desigualdad mostrada aquí es la que nos permitira obtener los resultados buscados. ■

Proposición 1.4.9 Sea $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, sea λ un número no negativo, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales, entonces

$$\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \lambda \cdot \sum_{i=1}^{\infty} r_i(\omega) \cdot \alpha_i \right\} \right) \leq \exp \left\{ \frac{\lambda^2}{2} \cdot \|\alpha\|_2^2 \right\}$$

donde $\|\alpha\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$, es decir $\alpha \in l_2$.

DEMOSTRACIÓN.

Utilizando la independencia de las funciones de Rademacher y la proposición 1.4.7

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \lambda \cdot \sum_{i=1}^{\infty} r_i(\omega) \cdot \alpha_i \right\} \right) &= \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} (\exp \{ \lambda r_i(\omega) \cdot \alpha_i \}) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \cosh(\lambda \cdot \alpha_i) \end{aligned}$$

Ahora expresamos las dos siguientes funciones como series de Taylor

$$\exp \left\{ \frac{\lambda^2 \cdot \alpha_i^2}{2} \right\} = 1 + \frac{\left(\frac{\lambda^2 \alpha_i^2}{2}\right)}{1!} + \dots + \frac{\left(\frac{\lambda^2 \alpha_i^2}{2}\right)^n}{n!} + \dots \quad (*)$$

y

$$\cosh(\lambda \cdot \alpha_i) = 1 + \frac{(\lambda \alpha_i)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda \alpha_i)^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (**)$$

Si demostramos que término a término $(**) \leq (*)$ ya habremos terminado porque

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \lambda \cdot \sum_{i=1}^{\infty} r_i(\omega) \cdot \alpha_i \right\} \right) &= \prod_{i=1}^{\infty} \cosh(\lambda \cdot \alpha_i) \\ &\leq \prod_{i=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{\lambda^2 \alpha_i^2}{2} \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\lambda^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\lambda^2}{2} \cdot \|\alpha\|_2^2 \right\} \end{aligned}$$

Demostremos entonces la desigualdad $(**) \leq (*)$, ésta se reduce a demostrar que $(2n)! \geq n! \cdot 2^n$ para n un entero positivo, ya que

$$\frac{\left(\frac{\lambda^2 \alpha_i^2}{2}\right)^n}{n!} \geq \frac{(\lambda \cdot \alpha_i)^{2n}}{(2n)!} \quad \text{si y sólo si} \quad (2n)! \geq n! \cdot 2^n.$$

Para $n = 1$ es claro, $(2 \cdot 1)! \geq 1! \cdot 2!$, supongamos que se cumple para n , demostremoslo para $n + 1$.

Como $n > 0$ entonces $(2n + 2) \cdot (2n + 1) \geq 2(n + 1)$ y de aquí

$$(2n)! \cdot (2n + 2) \cdot (2n + 1) \geq n! \cdot 2^n \cdot 2(n + 1) \quad \Leftrightarrow \quad (2n + 2)! \geq (n + 1)! \cdot 2^{n+1}$$

por tanto

$$(2(n + 1))! \geq (n + 1)! \cdot 2^{n+1}.$$

Teorema 1.4.1 (Desigualdad de Khintchine) Sea $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \mathbb{P})$ el espacio de probabilidad del intervalo unitario, sea $\{r_i(\omega), i \geq 1\}$ la sucesión de las funciones de Rademacher, entonces para cada $1 \leq p < \infty$ existen constantes finitas A_p y B_p tales que

$$A_p \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^m a_n \cdot r_n(\omega) \right|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

para cualquier elección finita de escalares $\{a_n\}_{n=1}^m$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f(\omega) = \sum_{n=1}^m a_n \cdot r_n(\omega)$ y $\|f(\omega)\|_p = \mathbb{E}(|f(\omega)|^p)^{\frac{1}{p}}$, como $\|f(\omega)\|_p$ es creciente con respecto a p , (esto se demostrará en el capítulo 2), entonces $\|f(\omega)\|_p \geq \|f(\omega)\|_2$ para $p \geq 2$, de aquí $A_p = 1$ para $p \geq 2$.

Supongamos inicialmente que $p = 2k$ donde k es un entero positivo, entonces

$$\mathbb{E} \left(f(\omega)^{2k} \right) = \sum \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) a_{n_1}^{\alpha_1} a_{n_2}^{\alpha_2} \dots a_{n_s}^{\alpha_s} \mathbb{E} \left(r_{n_1}^{\alpha_1}(\omega) r_{n_2}^{\alpha_2}(\omega) \dots r_{n_s}^{\alpha_s}(\omega) \right)$$

donde la suma se toma sobre todos los distintos enteros n_1, n_2, \dots, n_s entre $[1, m]$ y todas las elecciones de enteros positivos $\{\alpha_i\}_{i=1}^s$ tales que $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 2k$.

La forma explícita de $\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_s!}$.

Por (1.8) $\mathbb{E}(r_{n_1}^{\alpha_1}(\omega) r_{n_2}^{\alpha_2}(\omega) \dots r_{n_s}^{\alpha_s}(\omega)) = 1$ sólo cuando $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ son todos pares y cero en otro caso, entonces

$$\mathbb{E}(f(\omega)^{2k}) = \sum \gamma(2\beta_1, 2\beta_2, \dots, 2\beta_s) a_{n_1}^{2\beta_1} a_{n_2}^{2\beta_2} \dots a_{n_s}^{2\beta_s}$$

con $\{\beta_i\}_{i=1}^s$ enteros positivos tales que $\sum_{i=1}^s \beta_i = k$. De aquí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(\omega)^{2k}) &= \sum \frac{\gamma(2\beta_1, \dots, 2\beta_s)}{\gamma(\beta_1, \dots, \beta_s)} \cdot \gamma(\beta_1, \dots, \beta_s) a_{n_1}^{2\beta_1} \dots a_{n_s}^{2\beta_s} \\ &\leq B_{2k}^{2k} \cdot s_m^{2k} \end{aligned}$$

donde $s_m^2 = \sum_{n=1}^m a_n^2$ y

$$\begin{aligned} B_{2k}^{2k} &= \sup \frac{\gamma(2\beta_1, \dots, 2\beta_s)}{\gamma(\beta_1, \dots, \beta_s)} \\ &= \sup \frac{(2k)!}{(2\beta_1)! \dots (2\beta_s)!} \cdot \frac{\beta_1! \dots \beta_s!}{k!} \\ &\leq \sup \frac{2k(2k-1) \dots (k+1)}{\prod_{i=1}^s 2\beta_i(2\beta_i-1) \dots (\beta_i+1)} \\ &\leq \frac{2k(2k-1) \dots (k+1)}{2^{\beta_1 + \dots + \beta_s}} \\ &= \frac{2k(2k-1) \dots (k+1)}{2^k} \\ &\leq k^k. \end{aligned}$$

Así cuando $p = 2k$ la cota superior de (1.11) se da con $B_{2k} \leq k^{\frac{1}{2}}$. Como $\|f(\omega)\|_p$ es creciente en p , $\|f(\omega)\|_p \leq \|f(\omega)\|_{2k} \leq B_{2k} \cdot s_m$ para $p \leq 2k$, de donde la cota superior se obtiene con $B_p \leq k^{\frac{1}{2}}$, donde k es el menor entero mayor o igual a $\frac{p}{2}$.

Para la cota inferior de (1.11), utilizamos la desigualdad de Hölder (que se verá en el siguiente capítulo en el caso discreto).

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(\omega)|^2 d\omega &= \int_0^1 |f(\omega)|^{\frac{2}{3}} \cdot |f(\omega)|^{\frac{4}{3}} d\omega \\ &\leq \left(\int_0^1 |f(\omega)| d\omega \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\int_0^1 |f(\omega)|^4 d\omega \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\leq \left(\int_0^1 |f(\omega)| d\omega \right)^{\frac{2}{3}} \cdot B_4^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\int_0^1 |f(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

entonces

$$B_4^{-2} \left(\int_0^1 |f(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 |f(\omega)| d\omega$$

$$\text{y } A_1 = B_4^{-2}$$

■

Capítulo 2

Distribución de la serie de Rademacher.

En este segundo capítulo se trabaja el artículo *The Distribution of Rademacher*. El resultado que éste artículo presenta es el de cotas superiores e inferiores a $\mathbf{P}(\sum \pm x_n > t)$, donde $\{x_n\}$ es una sucesión en l_2 . Como los resultados se expresan en términos de la norma $K_{1,2}$ de la teoría de interpolación de espacios de Banach, que resulta ser una norma en l_2 , damos algunas definiciones de normas en l_2 y las relaciones que guardan con la norma $K_{1,2}$. También se trabajan algunas desigualdades, las cuales son parte fundamental en la demostración del teorema principal del artículo.

2.1 Notación.

Antes de presentar los resultados de este capítulo, necesitamos introducir alguna notación y algunas desigualdades conocidas como la de Hölder para series, ya que sobre este espacio trabajamos.

Se denotará como $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ a una sucesión de números reales; para cada sucesión x se dirá que $x \in l_p$ si $\|x\|_p < \infty$ donde

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

con $1 \leq p < \infty$, si $p = \infty$ entonces $\|x\|_{\infty} = \max_n \{x_n\}$;

40 CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIÓN DE LA SERIE DE RADEMACHER.

$[r]$ será el mayor entero menor que r , es decir, $r - 1 \leq [r] \leq r$.
 $\lceil r \rceil$ denotará al menor entero mayor que r , es decir $r \leq \lceil r \rceil \leq r + 1$.

Como primer resultado tenemos que si $r \geq 1$ entonces $1 + r \leq 2r$ por tanto $\lceil r \rceil^2 \leq (1 + r)^2 \leq 4r^2$.

Trabajaremos con la siguiente desigualdad.

Teorema 2.1.1 (Desigualdad de Hölder) Sean p y q números reales tales que $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces para cualquier entero positivo n y números x_1, \dots, x_n y y_1, \dots, y_n tenemos

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

cuando $p = \infty$ la relación $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se sustituye por $q = 1$ y $\left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$ se interpreta como $\max\{|x_i|\}$.

DEMOSTRACIÓN.

Caso 1. Si $x_i = y_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$, el resultado es inmediato.

Caso 2. Con $p = 1$ y $q = \infty$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \max_i \{|y_i|\}$$

Caso 3. Cuando $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ y no todas las x_i, y_i son ceros. Si demostramos que

$$x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda)y \quad \dots (*)$$

con $x \geq 0, y \geq 0, 0 < \lambda < 1$, ya terminaríamos, porque eligiendo

$$x = \frac{|x_i|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \quad y = \frac{|y_i|^q}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{1}{p}$$

entonces

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q} \right)$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

Demostremos pues ... (*).

Sea $r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $r(t) = t^\lambda - \lambda t$ con $0 < \lambda < 1$ entonces $r(t)$ alcanza su máximo en $t = 1$ de donde $r(t) \leq r(1)$ para toda $t \in [0, \infty)$, es decir

$$t^\lambda \leq \lambda t + (1 - \lambda)$$

eligiendo $t = \frac{x}{y}$ obtenemos

$$x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + y(1 - \lambda)$$

Como la Desigualdad de Hölder se cumple para toda n entonces se da también

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

En el caso particular en que en la Desigualdad de Hölder $p = q = 2$ se le llama Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Proposición 2.1.1 Sea $1 \leq p < q \leq \infty$ entonces $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ y por tanto $l_p \subset l_q$.

DEMOSTRACIÓN.

Sean $1 \leq p < q < \infty$ y $h_n = |x_n|^p$. Recordemos que

$$\|(y_1, y_2, \dots, y_m)\|_\lambda = \left(\sum_{n=1}^m |y_n|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

42 CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIÓN DE LA SERIE DE RADEMACHER.

es una norma en \mathbb{R}^m para toda $\lambda \in [1, \infty)$. Utilizando este hecho tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^m b_n^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} &= \| (b_1, b_2, \dots, b_m) \|_\lambda \\ &= \| (b_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, b_m) \|_\lambda \\ &\leq \| (b_1, 0, \dots, 0) \|_\lambda + \dots + \| (0, \dots, 0, b_m) \|_\lambda \\ &= b_1 + \dots + b_m \\ &= \sum_{n=1}^m b_n \end{aligned}$$

entonces

$$\left(\sum_{n=1}^m b_n^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \sum_{n=1}^m b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

para $m = 1, 2, \dots$; así

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$$

por tanto

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p\lambda} \right)^{\frac{1}{p\lambda}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Como $1 \leq p < q$, entonces existe $r > 1$ tal que $q = rp$, si tomamos $\lambda = r$ en la desigualdad anterior entonces

$$\|x\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{rp} \right)^{\frac{1}{rp}} \leq \|x\|_p$$

de esta forma si $x \in l_p$ entonces $x \in l_q$.

Observemos que si $x \in l_p$ con $1 \leq p < \infty$ entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ debe ser una sucesión acotada (de hecho converge a cero) y de aquí $x \in l_\infty$. Esto es, $l_p \subset l_\infty$ para toda $p \in [1, \infty)$. ■

2.2 Normas en espacios de Banach.

En seguida daremos definiciones de algunas normas en espacios de Banach, resaltando las propiedades y relaciones entre éstas que se utilizarán en todo el capítulo.

La norma que tiene más importancia en esta tesis es la que en seguida definiremos ya que en base a ésta expresaremos los resultados obtenidos.

Definición 2.2.1 Sea $a \in l_2$, para $t > 0$ definimos la norma K de interpolación como

$$K(a, t, l_1, l_2) = \inf \{ \|a_1\|_1 + t \|a_2\|_2 : a = a_1 + a_2, a_i \in l_i \}$$

Para comprimir la notación la denotamos por $K_{1,2}(a, t)$.

Como se verá en el transcurso del trabajo, esta norma se comporta como $t\|x\|_2$ para ciertos valores de t y como $\|x\|_1$ para otros.

La proposición siguiente da algunas características que tiene esta norma.

Proposición 2.2.1 Para cada $y \in l_2$, $K_{1,2}(y, t)$ es positiva, cóncava y creciente con respecto a t sobre $(0, \infty)$. En particular si $s > 0$

$$K_{1,2}(y, t) \leq \max \left\{ 1, \frac{t}{s} \right\} K_{1,2}(y, s).$$

DEMOSTRACIÓN.

Sean $t > 0$ y $y \in l_2$ con $y = y_1 + y_2$ donde $y_i \in l_i$ para $i = 1, 2$.

Que $K_{1,2}(y, t)$ sea positiva es claro ya que

$$\|y_1\|_1 + t \|y_2\|_2 \geq 0$$

de aquí entonces

$$K_{1,2}(y, t) \geq 0.$$

44 CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIÓN DE LA SERIE DE RADEMACHER.

Para establecer que $K_{1,2}(y, t)$ es cóncava, supongamos que $t_1, t_2 > 0$ y t es la combinación convexa $t = (\alpha)t_1 + (1 - \alpha)t_2$, donde $1 > \alpha > 0$. Para cada descomposición $y = y_1 + y_2$ tenemos

$$\alpha K_{1,2}(y, t_1) \leq \alpha (\|y_1\|_1 + t_1 \|y_2\|_2)$$

y

$$(1 - \alpha) K_{1,2}(y, t_2) \leq (1 - \alpha) (\|y_1\|_1 + t_2 \|y_2\|_2)$$

de donde

$$\begin{aligned} \alpha K_{1,2}(y, t_1) + (1 - \alpha) K_{1,2}(y, t_2) &\leq (\alpha + (1 - \alpha)) \|y_1\|_1 + (\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \|y_2\|_2 \\ &= \|y_1\|_1 + t \|y_2\|_2 \end{aligned}$$

Tomando el ínfimo sobre todas las descomposiciones $y_1 + y_2$ de y , obtenemos

$$\alpha K_{1,2}(y, t_1) + (1 - \alpha) K_{1,2}(y, t_2) \leq K_{1,2}(y, t)$$

de aquí $t \mapsto K_{1,2}(y, t)$ es una función cóncava.

Ahora, sea $t < s$ y $y = y_1 + y_2$ entonces

$$\|y_1\|_1 + t \|y_2\|_2 \leq \|y_1\|_1 + s \|y_2\|_2$$

al tomar ínfimos de ambos lados

$$K_{1,2}(y, t) \leq K_{1,2}(y, s) \tag{2.1}$$

por tanto la norma K es creciente.

Para la última desigualdad, sea $s > 0$ de donde se desprenden dos casos:

Si $s \geq t$ entonces $\max\{1, \frac{t}{s}\} = 1$ y por (2.1) obtenemos

$$K_{1,2}(y, t) < \max\left\{1, \frac{t}{s}\right\} K_{1,2}(y, s).$$

si $t > s$ entonces

$$s (\|y_1\|_1 + t \|y_2\|_2) \leq t (\|y_1\|_1 + s \|y_2\|_2)$$

y tomando ínfimos de ambos lados y viendo que $\max\{1, \frac{t}{s}\} = \frac{t}{s}$ entonces $K_{1,2}(y, t) < \max\{1, \frac{t}{s}\} K_{1,2}(y, s)$. ■

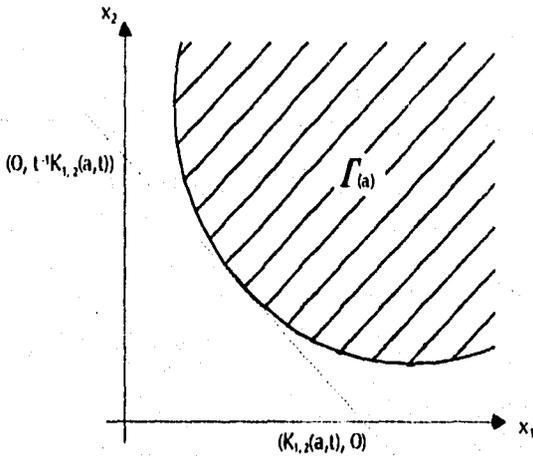


Figura 2.1: Diagrama de Gagliardo

El siguiente teorema da cotas para

$$\sum_{k=1}^{\lfloor t^2 \rfloor} x_k^* + t \left(\sum_{k > \lfloor t^2 \rfloor} (x_k^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

en términos de la norma $K_{1,2}(x, t)$ y constantes que no dependen de x_n^* ó t donde (x_n^*) es la sucesión $(|x_n|)_{n \geq 1}$ reordenada de manera decreciente.

Teorema 2.2.1 (Fórmula de Holmstedt) Para cada $x \in l_2$ y para cualquier $t > 0$ la norma de interpolación $K_{1,2}(x, t)$ satisface

$$K_{1,2}(x, t) \leq \sum_{n=1}^{\lfloor t^2 \rfloor} x_n^* + t \left(\sum_{n=\lfloor t^2 \rfloor+1}^{\infty} (x_n^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c K_{1,2}(x, t)$$

aquí $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ denota a la sucesión $(|x_n|)_{n=1}^{\infty}$ ordenada en forma decreciente, y c es una constante universal.

La demostración de este resultado no se dará, porque involucra conceptos de espacios de Banach que están fuera del contexto del trabajo, una demostración de la fórmula de Holmstedt se puede encontrar en [2] o en [3].

• Observación.

Con el teorema 2.2.1 se tiene que para t 's "pequeñas", esta norma se ve como $t \|x\|_2$, y para t 's "muy grande" se empieza a ver más como $\|x\|_1$.

Una idea geométrica de esta observación está dada por el diagrama de Gagliardo, figura 2.1 que es el siguiente:

Consideremos al conjunto

$$\Gamma(a) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists a_1 + a_2 = a, a_i \in I_i, i = 0, 1, \|a_i\|_i \leq x_i\}$$

este conjunto es convexo en \mathbb{R}^2 y

$$\begin{aligned} K_{1,2}(a, t) &= \inf_{y \in \Gamma(a)} (x_1 + tx_2) \\ &= \inf_{x \in \partial\Gamma(a)} (x_1 + tx_2) \end{aligned}$$

de donde $K_{1,2}(a, t)$ es la intersección con el eje x_1 de la recta con pendiente $-t^{-1}$ tangente a la frontera ($\partial\Gamma(a)$) de $\Gamma(a)$

Se dijo que para t 's "grandes" la norma $K_{1,2}$ era equivalente a la norma $t\|x\|_2$, el siguiente resultado dice que tan grande es t . El resultado es una consecuencia de la fórmula de Holmstedt.

Corolario 2.2.1 *Existe una constante c tal que si $x \in l_2$ y $0 < t \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty}$ entonces*

$$K_{1,2}(x, t) \leq t \|x\|_2 \leq c K_{1,2}(x, t)$$

donde $\|x\|_\infty = \max_n \{x_n\}$.

DEMOSTRACIÓN.

En el caso de la desigualdad del lado izquierdo, como $x \in l_2$ y $(0)_{n \geq 1} \in l_1$ tenemos la representación trivial $x = 0 + x$ de un miembro de $l_1 + l_2$, se sigue inmediatamente que

$$K_{1,2}(x, t) \leq t \|x\|_2$$

ahora con la desigualdad

$$t \|x\|_2 \leq cK_{1,2}(x, t) \quad (2.2)$$

lo hacemos por casos:

Si $0 < t < 1$ entonces $0 < t^2 < 1$ por tanto $[t^2] = 0$ y por el teorema 2.2.1

$$t \|x\|_2 = t \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq cK_{1,2}(x, t)$$

ya que $x \in l_2$.

En el caso en que $1 \leq t \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_{\infty}}$, sea $\alpha = \|x\|_{\infty}$ que es diferente de cero, (si no es así no habría nada que demostrar), y sea $y_n = \frac{x_n}{\alpha}$, observemos que $y_n \leq 1$ para $n = 1, 2, \dots$, entonces

$$\|y\|_2 = \frac{\|x\|_2}{\alpha}$$

de aquí que la hipótesis se traduce ahora en pedir $1 \leq t \leq \|y\|_2$; demostraremos la desigualdad derecha únicamente para los valores extremos de t , es decir $t = 1$ y $t = \|y\|_2$.

Para $t = 1$ tenemos

$$\|x\|_2^2 \leq \|x^*\|_2^2 + 2x_1^* \left(\sum_{n=2}^{\infty} (x_n^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es decir

$$\|x\|_2^2 \leq \left(x_1^* + \left(\sum_{n=2}^{\infty} (x_n^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

por tanto

$$t \|x\|_2 \leq cK_{1,2}(x, t)$$

esto por la fórmula de Holmstedt.

48 CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIÓN DE LA SERIE DE RADEMACHER.

Ahora si $t = \|y\|_2$ entonces

$$\begin{aligned} t \|y\|_2 &= \|y\|_2^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\lfloor t^2 \rfloor} y_n^2 + \sum_{n=\lfloor t^2 \rfloor+1}^{\infty} y_n^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\lfloor t^2 \rfloor} y_n + \sum_{n=\lfloor t^2 \rfloor+1}^{\infty} y_n^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\lfloor t^2 \rfloor} y_n + t \left(\sum_{n=\lfloor t^2 \rfloor+1}^{\infty} y_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

en donde solo bastaría probar la última desigualdad, es decir

$$\sum_{n=\lfloor t^2 \rfloor+1}^{\infty} y_n^2 \leq t \left(\sum_{n=\lfloor t^2 \rfloor+1}^{\infty} y_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pero esto es cierto, porque se cumple

$$\left(\sum_{n=\lfloor t^2 \rfloor+1}^{\infty} y_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq t = \|y\|_2$$

por tanto

$$t \|x\|_2 \leq cK_{1,2}(x, t).$$

por la fórmula de Holmstedt.

Como se satisface (2.2) para los valores extremos de t y por la concavidad de $K_{1,2}(x, t)$, vista como función de t , entonces (2.2) se cumple ahora ya para $1 \leq t \leq \|y\|_2$.

Por lo tanto $t \|x\|_2 \leq cK_{1,2}(x, t)$ si $0 < t \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_{\infty}}$. ■

Como se vio, en el resultado anterior, son normas equivalentes $t\|x\|_2$ y $K_{1,2}(x, t)$, entonces la idea a seguir es la de dar normas en l_2 o normas equivalentes a ésta para después encontrar la equivalencia con la norma $K_{1,2}(x, t)$.

Definamos ahora una nueva norma.

Definición 2.2.2 Para $x \in l_2$ y $t > 0$ se define la norma

$$J(x, t, l_\infty, l_2) = J_{\infty,2}(x, t) = \max \{ \|x\|_\infty, t \|x\|_2 \}$$

La relación que guarda esta norma con la norma $K_{1,2}(x, t)$ es la siguiente.

Teorema 2.2.2 Para $t > 0$ y $x \in l_2$ tenemos

$$K_{1,2}(x, t) = \sup \left\{ \sum x_n y_n : y \in l_2, J_{\infty,2}(y, t^{-1}) \leq 1 \right\}$$

La demostración no se dará en este trabajo ya que involucra conceptos de espacios de Banach y dualidad que están fuera del contexto de este trabajo, este resultado se puede encontrar [2].

Ahora daremos la definición de otra norma en l_2 que es equivalente a la norma $\|x\|_2$ que se utiliza en este trabajo y es la siguiente.

Definición 2.2.3 Para $x \in l_2$ y $t \in \mathbb{N}$ se define la norma

$$\|x\|_{P(t)} = \sup \left\{ \sum_{m=1}^t \left(\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas, B_1, \dots, B_t de los enteros positivos.

Veamos la relación o equivalencia que esta nueva norma tiene con las normas $\|x\|_1$ y $\|x\|_2$, estas relaciones que se den se utilizarán más adelante.

Proposición 2.2.2 Sea $x \in l_1$ y $t^2 \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_{P(t^2)} \leq t \|x\|_2$$

y

$$\|x\|_{P(t^2)} \leq \|x\|_1$$

DEMOSTRACIÓN.

50 CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIÓN DE LA SERIE DE RADEMACHER.

La segunda desigualdad se obtiene partiendo de que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$, lo cual es válido para cualquier subconjunto $B_m \subseteq \mathbb{N}$, entonces

$$\left(\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n \in B_m} |x_n| \right)$$

Si tomamos una partición de \mathbb{N} de la siguiente manera, $\mathbb{N} = \bigcup_{m=1}^{t^2} B_m$ con $B_m \cap B_n = \emptyset$ para $n \neq m$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n \in B_m} |x_n| \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\ &= \|x\|_1 \end{aligned}$$

por tanto

$$\|x\|_{P(t^2)} = \sup \left\{ \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \leq \|x\|_1$$

Para la primera equivalencia hacemos lo siguiente.

Sea $\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 = a_m$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{m=1}^{t^2} \sqrt{a_m} \\ &= \sum_{m=1}^{t^2} 1 \cdot \sqrt{a_m} \\ &\leq \left(\sum_{m=1}^{t^2} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{m=1}^{t^2} a_m \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= t \left(\sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= t \|x\|_2
 \end{aligned}$$

en donde la desigualdad se da por Cauchy-Schwarz; entonces hemos demostrado

$$\|x\|_{P(t^2)} \leq t \|x\|_2$$

Ahora, como se puede tomar la partición $B_1 = \mathbb{N}$ y $B_m = \emptyset$ para $m = 2, \dots, t^2$ entonces

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_{P(t^2)}$$

Una vez ya encontrada la equivalencia con la norma $t\|x\|_2$ se tiene entonces una relación con la norma $K_{1,2}(x, t)$. La relación se da en seguida.

Teorema 2.2.3 Si $x \in l_2$ y $t^2 \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|x\|_{P(t^2)} \leq K_{1,2}(x, t) \leq \sqrt{2} \|x\|_{P(t^2)}$$

DEMOSTRACIÓN.

Para obtener la desigualdad izquierda escribimos a x como $x_1 + x_2$ con $x_i \in l_i$; hacemos uso de la proposición 2.2.2 y de la desigualdad del triángulo, obteniendo

$$\begin{aligned}
 \|x\|_{P(t^2)} &= \|x_1 + x_2\|_{P(t^2)} \\
 &\leq \inf \{ \|x_1\|_{P(t^2)} + \|x_2\|_{P(t^2)}; x = x_1 + x_2 \} \\
 &\leq \inf \{ \|x_1\|_1 + t \|x_2\|_2; x = x_1 + x_2 \} \\
 &= K_{1,2}(x, t)
 \end{aligned}$$

Para ver que $K_{1,2}(x, t) \leq \sqrt{2} \|x\|_{P(t^2)}$ usamos el Teorema 2.2.2. Sea $\delta > 0$ y $y \in l_2$ tal que

$$(1 + \delta) K_{1,2}(x, t) \leq \sum x_n y_n \quad \text{y} \quad J_{\infty, 2}(y, t^{-1}) \leq 1$$

52 CAPTULO 2. DISTRIBUCIÓN DE LA SERIE DE RADEMACHER.

donde ésta última condición implica que

$$t^{-1} \|y\|_2 \leq 1 \quad y \quad \|y\|_\infty = \max_n \{|y_n|\} \leq 1$$

Elijamos inductivamente $n_0, n_1, \dots, n_{l^2} \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ de la siguiente manera, $n_0 = 0$ y $n_{m+1} = 1 + v_{m+1}$ donde

$$v_{m+1} = \sup \left\{ v : \sum_{n=n_m+1}^v |y_n|^2 \leq 1 \right\}$$

de esta construcción $n_0 < n_1 < \dots < n_{m+1} < \dots$

Como resultado de la construcción de $\{n_k\}_{k \geq 1}$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_m+1}^{n_{m+1}} |y_n|^2 &= \sum_{n=n_m+1}^{n_{m+1}-1} |y_n|^2 + |y_{n_{m+1}}|^2 \\ &= \sum_{n=n_m+1}^{v_{m+1}} |y_n|^2 + |y_{n_{m+1}}|^2 \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

ya que $\max_n \{|y_n|\} \leq 1$.

Ahora como $t^{-1} \|y\|_2 \leq 1$, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \leq t^2 < \infty$, tenemos que existe una $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\{ v : \sum_{n=n_{m-1}+1}^v |y_n|^2 \leq 1 \right\} = \{n_{m-1} + 1, n_{m-1}, \dots, \infty\}$$

entonces

$$\sup \left\{ v : \sum_{n=n_{m-1}+1}^v |y_n|^2 \leq 1 \right\} = \infty$$

Sea $t^2 = m$, de aquí entonces $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_{l^2} = \infty$.

Recapitulando todo lo anterior y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
 (1 - \delta)K_{1,2}(x, t) &\leq \sum x_n y_n \\
 &= \sum_{m=1}^{t^2} \sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} y_n x_n \\
 &\leq \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} |y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \sqrt{2} \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \sqrt{2} \|x\|_{p(t^2)}
 \end{aligned}$$

y tomando $\delta \rightarrow 0$ obtenemos

$$K_{1,2}(x, t) \leq \sqrt{2} \|x\|_{p(t^2)}$$

2.3 Algunas desigualdades.

Trabajaremos algunas desigualdades que serán importantes en la siguiente sección. De hecho daremos las demostraciones de las cotas ya antes conocidas para $\mathbb{P}(\sum r_n x_n)$ que dan pie a las nuevas cotas.

Proposición 2.3.1 Sea X una variable aleatoria tal que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ y $0 < \lambda < 1$ entonces

$$\mathbb{P}(\{X > \lambda \mathbb{E}(X)\}) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbb{E}^2(X)}{\mathbb{E}(X^2)}$$

DEMOSTRACIÓN.

Para trabajar con más comodidad la demostración, adoptamos la siguiente notación $u = \mathbb{E}(X)$ y $z = \mathbb{E}(X^2)$.

Sea

$$X'(\omega) = I_{\{X > \lambda u\}}(\omega) \cdot X(\omega)$$

54 CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIÓN DE LA SERIE DE RADEMACHER.

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X'(\omega)) &= \int_{\Omega} I_{\{X > \lambda u\}}(\omega) \cdot X d\mathbf{P} \\ &\leq z^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{E} \left(I_{\{X > \lambda u\}}^2(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= z^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{P}(\{X > \lambda u\})^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (*)$$

y también

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X(\omega)) &= \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P} \\ &= \int_{\{X > \lambda u\}} X(\omega) d\mathbf{P} + \int_{\{X \leq \lambda u\}} X(\omega) d\mathbf{P} \\ &= \int_{\Omega} I_{\{X > \lambda u\}}(\omega) \cdot X d\mathbf{P} + \int_{\Omega} I_{\{X \leq \lambda u\}}(\omega) \cdot X d\mathbf{P} \\ &\leq \mathbf{E}(X'(\omega)) + \lambda u \end{aligned} \quad (**)$$

Juntando los resultados de (*) y (**) tenemos

$$(1 - \lambda) u \leq z^{\frac{1}{2}} \mathbf{P}(\{X > \lambda u\})^{\frac{1}{2}}$$

por tanto

$$\mathbf{P}(\{X > \lambda u\}) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{u^2}{z} = (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbf{E}^2(X)}{\mathbf{E}(X^2)} \quad (2.3)$$

Proposición 2.3.2 Sea Z una variable aleatoria positiva con $\mathbf{E}(Z) < \infty$, entonces

$$\mathbf{E}(Z) \geq \mathbf{P}(Z > 1)$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z) &= \int_{\Omega} Z(\omega) d\mathbf{P} \\ &= \int_{Z > 1} Z(\omega) d\mathbf{P} + \int_{Z \leq 1} Z(\omega) d\mathbf{P} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_{Z \leq 1} Z(\omega) d\mathbb{P} + \mathbb{P}(Z > 1) \\ &\geq \mathbb{P}(Z > 1) \end{aligned}$$

■

Teorema 2.3.1 (Paley-Zygmund) Si $x \in l_2$, entonces dado $0 < \lambda < 1$ tenemos

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} r_n x_n > \lambda \|x\|_2\right) \geq \frac{1}{6}(1 - \lambda^2)^2$$

DEMOSTRACIÓN.

Por la proposición 1.4.2 y tomando como $X = (\sum r_n x_n)^2$ en la proposición anterior tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(\sum r_n x_n\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\sum x_n^2 + \sum_{m \neq n} r_n x_n \cdot r_m x_m\right) \\ &= \sum x_n^2 \end{aligned}$$

Entonces $\mathbb{E}^2(X) = \sum x_n^4 + \sum_{m \neq n} x_n^2 x_m^2$ en donde hay n términos de x_n^4 y $n(n-1)$ de $x_n^2 x_m^2$. Ahora

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\left(\sum r_n x_n\right)^4\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum x_n^4 + \sum_{m \neq n} r_n x_n^3 r_m x_m + \sum_{n \neq m \neq l} x_n^2 r_m x_m r_l x_l + \sum_{n \neq m} x_n^2 x_m^2\right) \\ &= \sum x_n^4 + \sum_{m \neq n} x_n^2 x_m^2 \end{aligned}$$

aquí hay n términos de x_n^4 y $3n(n-1)$ términos de $x_n^2 x_m^2$. De donde obtenemos que $3 \cdot \mathbb{E}^2(X) \geq \mathbb{E}(X^2)^2$.

Si $0 < \lambda < 1$ también $0 < \lambda^2 < 1$, sustituyendo en (2.3) todo lo anterior

$$\mathbb{P}\left(\left(\sum r_n x_n\right)^2 > \lambda^2 \left(\sum x_n^2\right)\right) \geq \frac{1}{3}(1 - \lambda^2)^2$$

pero

$$\mathbf{IP} \left(\left(\sum r_n x_n \right)^2 > \lambda^2 \left(\sum x_n^2 \right) \right) = \mathbf{IP} \left(\left| \sum r_n x_n \right| > \lambda \|x\|_2 \right)$$

por igualdad de conjuntos y

$$\begin{aligned} \mathbf{IP} \left(\left| \sum r_n x_n \right| > \lambda \|x\|_2 \right) &= \mathbf{IP} \left(\sum r_n x_n > \lambda \|x\|_2 \right) + \\ &\quad \mathbf{IP} \left(-\sum r_n x_n > \lambda \|x\|_2 \right) \\ &= 2 \cdot \mathbf{IP} \left(\sum r_n x_n > \lambda \|x\|_2 \right) \end{aligned}$$

por simetría de $\sum r_n x_n$.

Así entonces

$$2 \cdot \mathbf{IP} \left(\sum r_n x_n > \lambda \|x\|_2 \right) \geq \frac{1}{3} (1 - \lambda^2)^2$$

llegando al resultado. ■

Teorema 2.3.2 Si $x \in l_2$ entonces

$$\mathbf{IP} \left(\sum r_n x_n > t \|x\|_2 \right) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} &\mathbf{IP} \left(\sum r_n x_n > t \|x\|_2 \right) \\ &= \mathbf{IP} \left(\frac{\sum r_n x_n}{\|x\|_2} > t \right) \\ &\leq \inf_{\lambda > 0} \mathbf{IP} \left(\exp \left\{ \frac{\lambda \sum r_n x_n}{\|x\|_2} \right\} > \exp\{\lambda t\} \right) \\ &= \inf_{\lambda > 0} \mathbf{IP} \left(\exp \left\{ \frac{\lambda \sum r_n x_n}{\|x\|_2} \right\} \exp\{-\lambda t\} > 1 \right) \\ &\leq \inf_{\lambda > 0} \mathbf{IE} \left(\exp \left\{ \frac{\lambda \sum r_n x_n}{\|x\|_2} \right\} \exp\{-\lambda t\} \right) \\ &= \inf_{\lambda > 0} \left\{ \exp\{-\lambda t\} \mathbf{IE} \left(\exp \left\{ \frac{\lambda \sum r_n x_n}{\|x\|_2} \right\} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \inf_{\lambda > 0} \left\{ \exp\{-\lambda t\} \prod_n \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \frac{\lambda r_n x_n}{\|x\|_2} \right\} \right) \right\} \\
&\leq \inf_{\lambda > 0} \left\{ \exp\{-\lambda t\} \prod_n \exp \left\{ \frac{\lambda^2 x_n^2}{2 \|x\|_2^2} \right\} \right\} \\
&= \inf_{\lambda > 0} \left\{ \exp \left\{ \frac{\lambda^2}{2} - \lambda t \right\} \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{-t^2}{2} \right\} \cdot \inf_{\lambda > 0} \left\{ \exp \left\{ \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\} \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\}
\end{aligned}$$

la última desigualdad es por la proposición 1.4.9

Teorema 2.3.3 Si $x \in l_1$ entonces

$$\mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > \|x\|_1 \right) = 0$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > \|x\|_1 \right) &= \mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > \sum |x_n| \right) \\
&= 1 - \mathbb{P} \left(\sum r_n x_n \leq \sum |x_n| \right) \\
&= 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

por que $r_n x_n = \pm x_n \leq |x_n|$ para $n = 1, 2, \dots$

2.4 Resultado principal.

El siguiente teorema es la conclusión de nuestro trabajo, esto es, damos las cotas a $\mathbb{P}(r_n x_n > t)$ donde intervienen la norma $K_{1,2}$.

Teorema 2.4.1 Existe una constante c tal que para toda $x \in l_2$ y $t > 0$

$$\mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > K_{1,2}(x, t) \right) \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$$

y

$$\mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > c^{-1} K_{1,2}(x, t) \right) \geq c^{-1} e^{-ct^2}$$

58 CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIÓN DE LA SERIE DE RADEMACHER.

DEMOSTRACIÓN.

Para la primer parte del teorema, sean $\delta > 0$ y $x \in l_2$ tal que $x = x^1 + x^2$ con $x^i \in l_i$ entonces

$$(1 + \delta) K_{1,2}(x, t) > \|x^1\|_1 + t \|x^2\|_2$$

observemos que

$$\left\{ \omega : \sum r_n x_n > K_{1,2}(x, t)(1 + \delta) \right\} \subseteq \left\{ \omega : \sum r_n x_n > \|x^1\|_1 + t \|x^2\|_2 \right\}$$

de aquí entonces

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\sum r_n x_n > K_{1,2}(x, t)(1 + \delta)) \\ & \leq \mathbf{P}(\sum r_n x_n > \|x^1\|_1 + t \|x^2\|_2) \\ & = \mathbf{P}(\sum r_n (x_n^1 + x_n^2) > \|x^1\|_1 + t \|x^2\|_2) \\ & = \mathbf{P}(\sum r_n x_n^1 + \sum r_n x_n^2 > \|x^1\|_1 + t \|x^2\|_2) \\ & \leq \mathbf{P}(\left\{ \sum r_n x_n^1 > \|x^1\|_1 \right\} \cup \left\{ \sum r_n x_n^2 > t \|x^2\|_2 \right\}) \\ & \leq \mathbf{P}(\sum r_n x_n^1 > \|x^1\|_1) + \mathbf{P}(\sum r_n x_n^2 > t \|x^2\|_2) \\ & \leq 0 + e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

y tomando $\delta \rightarrow 0$ obtenemos el resultado.

Para la segunda parte, supongamos que $t^2 \in \mathbf{N}$. Entonces dada $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \delta) \leq 1$ existe $B_1, B_2, \dots, B_{t^2} \subseteq \mathbf{N}$ ajenos tales que $\bigcup_{m=1}^{t^2} B_m = \mathbf{N}$ y cumplen que

$$\|x\|_{P(t^2)} \leq (1 + \delta) \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando el Teorema 2.2.3

$$\frac{1}{2} K_{1,2}(x, t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|x\|_{P(t^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \delta) \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > \frac{1}{2} K_{1,2}(x, t) \right) \\
 & \geq \mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > \frac{1}{\sqrt{2}} \|x\|_{P(t)} \right) \\
 & \geq \mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \delta) \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 & = \mathbb{P} \left(\sum_{m=1}^{t^2} \sum_{n \in B_m} r_n x_n > \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \delta) \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 & \geq \prod_{m=1}^{t^2} \mathbb{P} \left(\sum_{n \in B_m} r_n x_n > \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \delta) \left(\sum_{n \in B_m} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 & \geq \prod_{m=1}^{t^2} \left(\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2} (1 + \delta)^2 \right)^2 \right) \\
 & = \left(\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2} (1 + \delta)^2 \right)^2 \right)^{t^2}
 \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue por Paley-Zygmund, entonces tomando $\delta \rightarrow 0$

$$\mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > \frac{1}{2} K_{1,2}(x, t) \right) \geq \exp\{-t^2 \log(24)\}$$

y de aquí el resultado se sigue con $c = \log(24)$. Ya que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > c^{-1} K_{1,2}(x, t) \right) & \geq \mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > \frac{1}{2} K_{1,2}(x, t) \right) \\
 & \geq \exp\{-\log(24)t^2\} \\
 & \geq c^{-1} \exp\{-ct^2\}
 \end{aligned}$$

para $t^2 \in \mathbb{N}$.

Si $t \geq 1$, sabemos que $[t]^2 \leq 4t^2$, y además $K_{1,2}(x, t) \leq K_{1,2}(x, [t])$ por ser creciente la norma $K_{1,2}(x, t)$, ahora utilizando lo obtenido para $t^2 \in \mathbb{N}$ concluimos que para $c^* = 4 \log(24)$ se llega al resultado ya que

$$\mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > (c^*)^{-1} K_{1,2}(x, t) \right) \geq \mathbb{P} \left(\sum r_n x_n > c^{-1} K_{1,2}(x, t) \right)$$

60 CAPÍTULO 2. DISTRIBUCIÓN DE LA SERIE DE RADEMACHER.

$$\begin{aligned}
 &\geq \mathbb{P}\left(\sum r_n x_n > c^{-1} K_{1,2}(x, [t])\right) \\
 &\geq c^{-1} \exp\{-c[t]^2\} \\
 &\geq (c^*)^{-1} \exp\{-c[t]^2\} \\
 &\geq (c^*)^{-1} \exp\{-c^* t^2\}
 \end{aligned}$$

Para $0 < t < 1$ el resultado se sigue de la fórmula de Holmsted y de la desigualdad de Paley-Zygmund, ya que $[t^2] = 0$ de donde

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\sum r_n x_n > K_{1,2}(x, t)\right) &\geq \mathbb{P}\left(\sum r_n x_n > t \|x\|_2\right) \\
 &\geq \frac{1}{6} (1 - t^2)^2
 \end{aligned}$$

de aquí que

$$\mathbb{P}\left(\sum r_n x_n > c^{-1} K_{1,2}(x, t)\right) \geq c^{-1} e^{-ct^2}$$

con $c = \log 6$. ■

Corolario 2.4.1 *Existe una constante c tal que para toda $x \in l_2$ y $0 < t \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty}$ tenemos*

$$\mathbb{P}\left(\sum r_n x_n > c^{-2} t \|x\|_2\right) \geq c^{-1} e^{-ct^2}$$

DEMOSTRACIÓN.

Usando el Corolario 2.2.1 obtenemos

$$c^{-2} t \|x\|_2 \leq c^{-1} K_{1,2}(x, t)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\sum r_n x_n > c^{-2} t \|x\|_2\right) &\geq \mathbb{P}\left(\sum r_n x_n > c^{-1} K_{1,2}(x, t)\right) \\
 &\geq c^{-1} e^{-ct^2}
 \end{aligned}$$
■

Bibliografía

- [1] Adams M. y Guillemin V. *Measure Theory and Probability* Wadsworth & Books /Cole Advanced Books and Software 1986.
- [2] Bennet C. y Sharpley R. *Interpolation of Operators* . Academic Press, New York 1988.
- [3] Bergh J. y Löfström J. *Interpolation Spaces: An Introduction* . Springer-Verlag, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics **223**, 1976.
- [4] Billingsley P. *Probability and Measure* . John Wiley & Sons, 3ª edición, New York 1995.
- [5] Kac M. *Statistical Independence in Probability Analysis and Number Theory*. (Carus Mathematical Monograph **19**), Wiley New York, 1959.
- [6] Kahane J.P *Some Random Series of Functions* Cambridge Stud. Adv. Math. **5** , 2ª edición, 1985.
- [7] Ledoux M. y Talagrand M. *Probability in Banach Spaces* . Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**. 1991.
- [8] Meyer P. A. *Martingales and Stochastic Integrals I* . Springer-Verlag **284**, 1972.
- [9] Montgomery-Smith S.J. (1990) *The Distribution of Rademacher Sums* . Pro. Amer. Math. Soc. **109** 517-522.