

46
Rej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"TERMODINAMICA DE CONFIGURACIONES ESFERICAS DE FLUIDOS PERFECTOS EN RELATIVIDAD GENERAL"

T E S I S
Que para obtener el Título de
F I S I C O
p r e s e n t a

JUAN ANTONIO VALIENTE KROON



México, D. F.

1996

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "TERMODINAMICA DE CONFIGURACIONES ESFERICAS DE FLUIDOS PERFECTOS EN RELATIVIDAD GENERAL"

realizado por JUAN ANTONIO VALIENTE KROON

con número de cuenta 9150758-1 , pasante de la carrera de FISICA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario DR. ROBERTO ALLAN SUSSMAN LIVOVSKY 

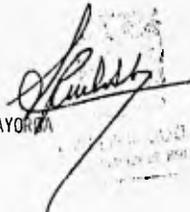
Propietario DR. SHAHEN HACYAN SALERYAN 

Propietario DR. ANTONIO SARMIENTO GALAN 

Suplente DR. DARIO NUÑEZ ZUÑIGA 

Suplente DRA. HILDA NOEMI NUÑEZ YEPEZ 

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura 

Termodinámica de Configuraciones Esféricas
de Fluidos Perfectos en Relatividad General.

Juan Antonio Valiente Kroon.

Dedicatoria:

A mi familia...

Agradecimientos:

**Al Dr. Roberto Sussman
por su valioso apoyo
en la realización de
esta tesis.**

113



Albert Einstein.
(1879-1955)

Contenido

1	Fundamentos conceptuales de la Relatividad General.	11
1.1	Principio de Equivalencia.	11
1.1.1	4-velocidad y sistemas de referencia inerciales comóviles instantáneos.	13
1.1.2	¿Cómo se construyen las leyes físicas en la Relatividad General?	13
1.2	Ecuaciones de campo de Einstein.	15
2	Fluidos perfectos en la Relatividad Especial.	19
2.1	Polvo	19
2.2	Tensor energía-momento del polvo.	21
2.3	Tensores de energía momento más generales	23
2.3.1	Componentes espaciales T^{ij}	23
2.3.2	Simetría de T^{ij}	24
2.3.3	Leyes de conservación.	24
2.3.4	Conservación de partículas.	26
2.4	Fluidos.	26
2.4.1	Fluidos perfectos.	26
2.5	Termodinámica en la relatividad especial.	27
2.5.1	Primera ley de la Termodinámica.	28
3	Los fluidos perfectos en Relatividad General.	33
3.1	El tensor energía-momento para un fluido perfecto en Relatividad.	33
3.1.1	Ecuaciones de conservación.	33
3.2	Termodinámica en Relatividad General.	34

4 Soluciones con simetría esférica cuyas fuentes son fluidos perfectos.	37
4.1 Coordenadas esféricas en el espacio plano.	37
4.2 2-esferas en el espacio curvo.	38
4.2.1 Geometrías estáticas con simetría esférica.	39
4.3 Métrica de Schwarzschild y el teorema de Birkhoff.	40
4.4 Condiciones de empalme en la frontera de dos métricas.	42
4.4.1 El tensor curvatura extrínseca.	43
4.4.2 El empalme.	43
5 Soluciones exactas sin corte.	47
5.1 Descomposición invariante de u_{ij}	47
5.1.1 Ecuación de Raychaudhuri.	49
5.1.2 Posibles elecciones de coordenadas dependiendo de los valores de los parámetros dinámicos.	50
5.2 Ecuaciones de campo para fluidos perfectos con simetría esférica.	50
5.3 Soluciones con expansión y sin corte.	52
5.4 Una clase general de soluciones.	53
5.4.1 Universos Esféricos de Stephani.	54
5.4.2 Los Universos Esféricos de Stephani como generalización de la métrica de Friedman-Robertson-Walker.	55
6 Termodinámica de los Universos Esféricos de Stephani.	57
6.1 Libertad de elección del sistema de coordenadas.	57
6.2 Empalme de los Universos Esféricos de Stephani con la métrica de Schwarzschild.	59
6.2.1 Cálculo de la presión en el interior de la distribución de materia.	62
6.3 Determinación completa de la métrica.	63
6.3.1 Cálculo del número de partículas.	66
6.3.2 Cálculo de la temperatura.	67
6.3.3 Evolución cinemática del fluido.	69
7 Aplicación al caso particular de la ecuación de estado: $p_c = (\gamma - 1)\rho$.	73
7.1 Ecuación de estado adiabática.	73
7.2 Discusión de la ecuación de estado adiabática.	74

7.2.1	Termodinámica de los UES en el caso en que $p_c = (\gamma - 1)\rho$.	75
7.3	Expresiones para N y S.	76
7.4	Tiempo propio de los centros de simetría.	78
8	Aplicación a sistemas de interés.	79
8.1	Distribución de las partículas en el sistema.	79
8.2	Evaluación de las constantes indeterminadas.	82
8.3	Ecuación de estado de radiación.	83
8.4	Ecuación de estado de un gas ideal monoatómico.	85
8.5	Expansión del sistema y tiempo propio de colapso.	98
9	Conclusiones.	101

Introducción.

El presente trabajo se encuentra enmarcado en el ámbito de la Teoría General de la Relatividad. Su objetivo es el de estudiar la termodinámica de ciertas soluciones a las ecuaciones de Einstein (ecuaciones del Campo Gravitacional), suponiendo que la fuente de dichos campos es un fluido perfecto con simetría esférica, y a partir de ellas construir un modelo estelar.

Las soluciones a estudiarse se conocen como los *Universos Esféricos de Stephani*. Éstas tienen la propiedad de que existe un sistema de coordenadas en el que el tensor métrico se puede escribir como una función escalar por el tensor de Minkowski (tensor métrico en Relatividad Especial).

Así pues, primeramente se procede al estudio de los fluidos perfectos en el marco de la Teoría Especial de la Relatividad. Se discute la llamada regla de "transcripción" que nos permite formular las leyes de la Física en la Relatividad General una vez conocidas las expresiones correspondientes en forma tensorial de la Relatividad Especial. A partir de lo anterior, se procede a la obtención de las ecuaciones que describen a los fluidos perfectos en el ámbito de la Relatividad General. En el capítulo 4 se estudia el significado de la simetría esférica en Relatividad General. Se destaca que la única solución con simetría esférica en el vacío a las ecuaciones de Einstein es la llamada solución de Schwarzschild; este hecho constituye lo que se venido a llamar el *Teorema de Birkhoff*. En nuestro interés está el desarrollar un modelo estelar por lo que tendremos que analizar las condiciones de empalme entre la solución de Schwarzschild (vacío) y una solución interior con simetría esférica.

Seguidamente, se procede a la derivación de los *Universos Esféricos de Stephani*. Se comienza a estudiar la termodinámica de sus fuentes, y en particular se destaca el hecho que la densidad de materia-energía para los *Universos de Stephani* sólo depende del tiempo coordinado (densidad homogénea). Al aplicar las condiciones de empalme, se obtienen condiciones a la frontera que serán de gran importancia en los capítulos 7 y 8; de ellas resulta el que la presión en la frontera del sistema debe de valer cero. En los siguientes capítulos se procede a la determinación completa de la métrica y de otras las principales variables termodinámicas. Se resalta el hecho de que las soluciones estudiadas, bajo una adecuada elección de coordenadas se puede considerar como una generalización de la métrica de Friedman-Robertson-Walker. Al determinar completamente la métrica, se dejan las distintas cantidades termodinámicas de interés en términos de una presión central que sea sólo función de la densidad. En particular, se escoge como

ecuación de estado en el centro la ecuación de estado politrópica.

Dos casos particulares de esta ecuación de estado, resultan ser la ecuación de estado de la radiación y la de un gas monoatómico ideal. En el capítulo 8 se analiza la posibilidad de que el modelo estelar construido pueda describir adecuadamente el comportamiento de 4 distintos sistemas.

Notación.

Índices griegos: $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1..3$.

Índices latinos: $i, j, k, \dots = 0..3$.

Signatura: $(-, +, +, +)$.

Tensor métrico: g_{ij} .

Tensor de Minkowsky: η_{ij} .

Tensor de Ricci: R^j_i .

Escalar de Curvatura: R .

Tensor de Einstein: G^j_i .

Derivada parcial: $V_{,i} = \frac{\partial V}{\partial x^i}$.

Derivada covariante: $V_{;a}$.

Densidad de partículas: n .

4-vector de corriente de partículas: N^i, \vec{N} .

4-vector de momento: \vec{p} .

Tensor energía momento: T^{ij} .

Presión: p .

Densidad de masa-energía: ρ .

Tensor curvatura extrínseca: K_{ij} .

Vector normal: \vec{n} .

Temperatura: T .

Entropía por partícula (barión): S .

Tiempo propio: τ .

Velocidad de la luz: c .

Constante de Gravitación Universal: G , $\kappa = 8\pi G$.

Proyector espacial: $h_{ij} = g_{ij} + u_i u_j$.

4-velocidad: u_i .

Expansión: $\Theta = u_{i;i}$

Rotación: ω_{ij}

Corte: σ_{ij} .

CAPÍTULO 1

Fundamentos conceptuales de la Relatividad General.

La Teoría General de la Relatividad es esencialmente una teoría relativista de la Gravitación. En este primer capítulo se discuten de manera breve sus principales fundamentos conceptuales.

1.1 Principio de Equivalencia.

El campo gravitacional tiene la propiedad fundamental de que todos los cuerpos se mueven en él de la misma manera, independientemente de su masa, con tal de que las condiciones iniciales sean las mismas. Por ejemplo, las leyes de la caída libre en el campo gravitatorio terrestre son las mismas para todos los cuerpos; todos sufren la misma aceleración.

Esta propiedad de los campos gravitacionales hace posible establecer una analogía entre el movimiento de los cuerpos en un campo gravitatorio y el movimiento de los cuerpos que no están ubicados en ningún campo externo pero que se consideran desde el punto de vista de un sistema de referencia no inercial. En efecto, en un sistema de referencia inercial, el movimiento libre de todos los cuerpos es uniforme y rectilíneo y sí, por ejemplo en el instante inicial sus velocidades eran todas las mismas, seguirán siendo las mismas en cualquier instante. Es claro que si consideramos este movimiento desde un sistema de referencia no inercial dado, también respecto de este sistema todos los cuerpos se moverán de la misma manera.

Las propiedades de movimiento en un sistema no inercial son, por con-

12CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS CONCEPTUALES DE LA RELATIVIDAD

siguiente, las mismas que en un sistema de referencia inercial cuando existe un campo gravitacional. En otras palabras, todos los efectos de un campo gravitacional uniforme son idénticos a los efectos de una aceleración uniforme del sistema de coordenadas. Este es el llamado *principio de equivalencia*. [1, 5, 12]

Consideremos, por ejemplo el movimiento de un sistema de referencia uniformemente acelerado. Un cuerpo de masa arbitraria que se mueve libremente posee, en dicho sistema, una aceleración que es constante e igual pero en sentido opuesto a la aceleración del propio sistema. Lo mismo vale para el movimiento en un campo gravitatorio constante y uniforme, como el campo gravitatorio de la tierra (en regiones pequeñas). Así, un sistema de referencia uniformemente acelerado equivale a un campo externo uniforme y constante. Un caso algo más general es el de un sistema de referencia en movimiento rectilíneo no uniformemente acelerado, que equivale a un campo gravitatorio uniforme pero variable en el tiempo.

Sin embargo, los campos a los que equivalen los sistemas de referencia no inerciales no son por completo idénticos a los campos gravitatorios reales que encontramos también en los sistemas inerciales. En efecto, existe una diferencia esencial entre su comportamiento al infinito. A distancia infinita de los cuerpos aislados que producen el campo, un campo gravitatorio real tiende siempre a cero. Por el contrario, los campos a los que equivalen los sistemas de referencia no inerciales aumentarán sin cota en el infinito, o en el mejor de los casos conservarán un valor no nulo. Así, por ejemplo, la fuerza centrífuga que aparece en un sistema de referencia en rotación aumenta sin límites cuando nos apartamos del eje de rotación; el campo que equivale a un sistema de referencia en movimiento rectilíneo acelerado es el mismo en todo el espacio, incluido el punto al infinito.

Los campos a los que equivalen los sistemas no inerciales se anulan en el momento en que pasamos a un sistema inercial. En cambio, los campos gravitatorios reales no se pueden eliminar globalmente (aunque localmente si sea posible) sea cual sea la elección que se haga del sistema de referencia. Esto es claro por lo dicho antes acerca de la diferencia entre las condiciones al infinito para los campos gravitacionales reales y los campos gravitacionales a los que equivalen los sistemas no inerciales. Dado que éstos últimos no tienden a cero en el infinito, es claro que, cualquiera que sea el sistema de referencia elegido, es imposible cancelar un campo "real", puesto que éste se anula en el infinito.

Todo lo que cabe hacer mediante una elección adecuada del sistema de

referencia, es "anular" el campo gravitacional en una región dada del espacio, suficientemente pequeña para que el campo se pueda considerar uniforme en ella; ésto es posible eligiendo un sistema en movimiento acelerado, cuya aceleración sea igual a la que hubiera adquirido una partícula colocada en la región del campo que estamos considerando.

1.1.1 4-velocidad y sistemas de referencia inerciales comóviles instantáneos.

En la teoría galileana tridimensional, la velocidad de una partícula es un vector tangente a su trayectoria.

Así, por analogía, en la teoría General de la Relatividad que es una teoría tetradimensional, se define a la 4-velocidad de una partícula (\vec{u}) no como un vector tangente a la trayectoria de la partícula, sino tangente a su línea de universo.

Si aplicamos esta definición para una partícula con movimiento rectilíneo uniforme en el sistema inercial en el que dicha partícula se halla en reposo, tendremos que la 4-velocidad apuntará paralelamente al eje temporal.

Ahora, una partícula acelerada no tiene un sistema inercial en el que se encuentre siempre en reposo. A pesar de ello, hay siempre un sistema de referencia que instantaneamente tiene la misma velocidad de la partícula, pero que un momento después ya no se mueve con él. A este sistema se le conoce como *sistema de referencia inercial comóvil instantáneo* (SICI por sus siglas). De hecho, notemos que en realidad para una partícula acelerada en un evento dado, existen una infinidad de dichos sistemas de referencia, los cuales se pueden obtener unos de otros por medio de rotaciones espaciales en torno al eje temporal.

1.1.2 ¿Cómo se construyen las leyes físicas en la Relatividad General?

Antes de discutir como la materia existente en el Universo determina la estructura del espacio tiempo, abordaremos brevemente la cuestión de cómo se comportan las leyes físicas en el espacio tiempo curvo; ésto es, cómo el campo gravitacional afecta a otros procesos físicos. ¿Cómo se puede transcribir una ecuación básica de la Física, formulada en el espacio-tiempo plano

14CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS CONCEPTUALES DE LA RELATIVIDAD

sin tomar en cuenta el campo gravitacional, a un espacio-tiempo curvo en el que se tienen que tomar en cuenta los efectos del campo gravitacional?

En este contexto la palabra "transcribir" se debe entender como la generalización de las antiguas leyes físicas a nuevas versiones que de alguna manera deben ser bastante similares a las antiguas. La nueva forma de las leyes físicas no debe ser sugerida por consideraciones matemáticas, sino a través de la observación y del experimento. En la búsqueda de una regla de transcripción deseamos que nuestra experiencia se plasme de la manera más sencilla posible [6].

En la historia de la Teoría de la Relatividad, el principio de covariancia desempeña un importante papel en este sentido [6]. No existe una única y clara formulación de este principio; la opinión de los diversos autores es muy variada en este sentido. De una forma general, el principio de covariancia expresa el hecho de que las leyes físicas se deben escribir de manera covariante, por medio de tensores, para asegurar en principio, la equivalencia de todos los sistemas de coordenadas. Muchas críticas se han hecho a este principio, afirmando que no es un principio físico, y que tampoco asegura la autenticidad de las ecuaciones obtenidas. Un ejemplo de relatividad especial aclarará el punto. La ecuación potencial:

$$\Delta V = \eta^{\alpha\beta} V_{,\alpha\beta} \quad ,$$

ciertamente no es invariante ante transformaciones de Lorentz; pero se puede volver introduciendo un campo auxiliar u^i que en un sistema de referencia particular (en el que se satisface (1.1)), tiene la forma $(c, 0, 0, 0)$. Así:

$$\Delta V = (\eta^{ij} + u^i u^j / c^2) V_{,ij} = 0, \quad (1.1)$$

es ciertamente invariante ante transformaciones de Lorentz (covariante), pero definitivamente es falsa pues sugiere una propagación instantánea. La ecuación (1.2) se debe descartar pues el campo introducido *ad hoc* privilegia a un sistema de referencia en particular.

Resulta ilustrativo comparar el ejemplo anterior con la transcripción de la siguiente ecuación invariante ante transformaciones de Lorentz,

$$\square V = \eta^{ij} V_{,ij} = 0, \quad (1.2)$$

al caso covariante más general:

$$\square V = g^{ij} V_{,ij} = 0. \quad (1.3)$$

Aquí en lugar de u^i se introdujo g^{ij} que también determina un sistema particular de referencia. ¿Cómo saber que (1.4) es correcta? La diferencia fundamental entre (1.2) y (1.4) es que g^{ij} a diferencia de u^i posee un significado físico; la métrica describe la influencia del campo gravitacional. Así se puede entender el requisito de que las ecuaciones físicas sean covariantes, y que todas las cantidades métricas introducidas para garantizar la covariancia deben corresponder a propiedades métricas. [6]

1.2 Ecuaciones de campo de Einstein.

La idea fundamental de la teoría de la Gravitación de Einstein consiste en la geometrización de las fuerzas gravitacionales. Los campos gravitacionales son producidos por una distribución de energía; así pues, es natural preguntarse cuales son las propiedades del espacio-tiempo, para una distribución dada.

Así pues, el problema es el siguiente: obtener una ley que dada una distribución de materia, nos permita calcular sus efectos sobre la geometría del espacio-tiempo (el tensor métrico, el de curvatura, etc). Por supuesto no podemos deducir lógicamente la nueva ley fundamental a partir de las leyes ya conocidas; aunque es posible realizar una serie de afirmaciones bastante plausibles. Los siguientes requisitos para la nueva ley parecen ser bastante razonables:

(a) Las ecuaciones de campo deben ser ecuaciones tensoriales (las leyes de la naturaleza son independientes del sistema de coordenadas).

(b) Como las otras ecuaciones de campo de la Física, las nuevas ecuaciones deben de ser ecuaciones diferenciales de a lo más segundo orden en las funciones a determinarse (las componentes del tensor métrico g_{ij}); y además ser lineales en las derivadas de orden superior.

(c) Deberían (en el límite apropiado) reducirse a la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (1.4)$$

(d) Dado que el tensor de energía y momento T^{ij} es el análogo en relatividad especial a la densidad de masa y de momento, entonces este tensor deberá ser la fuente del campo gravitacional.

(e) Si el espacio es plano, entonces T^{ij} debe de valer cero.

Veamos a que nos lleven las anteriores condiciones. Por (a), requerimos de un tensor que contenga derivadas de la métrica hasta segundo orden (ver (b)). Denotemos por G_{ij} dicho tensor, que debe de construirse a partir del tensor de curvatura, y de la métrica misma. La condición (d) implica que las ecuaciones de campo tienen la estructura:

$$G_{ij} = \kappa T_{ij}, \quad (1.5)$$

donde κ es una constante a determinarse. La anterior ecuación será consistente con la simetría y la divergencia nula del tensor de energía-momento si:

$$G^{ij}{}_{;j} = 0, \text{ y } G_{ij} = G_{ji}. \quad (1.6)$$

Se puede probar que sólo hay un tensor que es lineal en las componentes del tensor de curvatura y que satisface lo anterior; éste es:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + \Lambda g^{ij}, \quad (1.7)$$

donde Λ es una constante conocida como *constante cosmológica*. Así propon-dremos que:

$$G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R + \Lambda g^{ij}. \quad (1.8)$$

Si $\Lambda \neq 0$, un espacio sin materia estaría siempre curvado, en contradicción con la condición (e). La condición (e) es difícil de justificar, y sólo se podría discernir por medio de observaciones cosmológicas. Se supondrá en el presente trabajo que $\Lambda = 0$. Así, definimos el tensor de Einstein como:

$$G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R. \quad (1.9)$$

Esta ecuación fue obtenida por Einstein en 1915 tras diez años de investigación [12]. Las ecuaciones de campo constituyen un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales para determinar las 10 funciones de la métrica: g_{ij} . Pero aún para condiciones iniciales bien determinadas es además posible realizar un cambio de coordenadas arbitrario. De hecho, precisamente esta subdeterminación del sistema de ecuaciones de campo está garantizada por la existencia de las identidades de Bianchi contraídas:

$$G^{ij}{}_{;j} = \kappa T^{ij}{}_{;j} = 0. \quad (1.10)$$

Estas identidades expresan que las diez ecuaciones de campo no son completamente independientes unas de otras.

En el capítulo 2 se abordarán los fluidos perfectos en el marco de la Relatividad Especial, lo cual nos llevará a determinar un tipo particular de tensor de energía-momento.

CAPÍTULO 2

Fluidos perfectos en la Relatividad Especial.

Un fluido perfecto se define como aquél en el que todas las fuerzas de fricción (viscosidades) son cero, y en el que la única fuerza entre elementos vecinos de fluido se debe a la presión. Estos fluidos perfectos se caracterizan por tener una evolución adiabática, por carecer de viscosidad, y porque en ellos no existe flujo de calor. ¿Por qué interesarnos en el estudio de los fluidos perfectos? Muchos sistemas físicos de interés en la Relatividad (especial y general) tales como estrellas, galaxias y aún el mismo Universo son sistemas discretos compuestos por “partículas” (bariones en el caso de estrellas; estrellas en el caso de galaxias, etc.). La experiencia muestra que en ocasiones el modelarlos como un medio continuo puede ser adecuado. Entre los medios continuos a nuestra disposición tenemos a los fluidos perfectos, que por su sencillez resultan de gran relevancia en los distintos modelos.

2.1 Polvo

Motivaremos en un principio nuestra descripción relativista de fluidos por medio del análisis de un sistema compuesto de una colección de partículas, que se encuentran en reposo respecto a un determinado sistema de referencia lorentziano. A este sistema se le conoce como polvo.

Una primera y muy natural pregunta que nos podemos hacer respecto a este sistema es la relativa al número de partículas por unidad de volumen. Si nos encontramos en el sistema de reposo instantáneo al sistema, la respuesta

20CAPÍTULO 2. FLUIDOS PERFECTOS EN LA RELATIVIDAD ESPECIAL.

resulta ser muy sencilla. Simplemente contamos las partículas, y después dividimos por el volumen propio ocupado por ellas.

Denotemos por n esta densidad de partículas en el SICI. La densidad n , podría naturalmente depender de la posición, pero no del tiempo medido en el SICI pues en él, todas las partículas se hallan en reposo; sabemos que para otros sistemas inerciales, y debido a las transformaciones de Lorentz, puede aparecer una dependencia en el tiempo t' .

Para calcular la densidad de partículas en otro sistema de referencia inercial O' (el cual se mueve con velocidad v respecto al SICI) basta aplicar de manera adecuada las transformaciones de Lorentz. Evidentemente, en O' todas las partículas se moverán con la misma velocidad v , y por conservación de materia, el número de partículas involucradas será el mismo. Pero ahora, no ocuparán el mismo volumen. Si suponemos que el polvo se halla inicialmente confinado a un volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, la contracción de Lorentz lo reducirá a:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \sqrt{1 - v^2}, \quad (2.1)$$

por lo tanto:

$$\frac{n}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (2.2)$$

es la densidad de partículas en un sistema en el cual las partículas tienen velocidad v .

Otra pregunta que es natural formularse, es ¿cuál es el número de partículas cruzando un área unitaria por unidad de tiempo? (flujo de partículas a través un área determinada). Este concepto depende claramente del sistema de referencia del que estemos hablando. Por ejemplo, en el SICI, el flujo es cero para cualquier superficie. Ahora, si nos colocamos en O' , por argumentos ya conocidos, obtendremos por ejemplo, que el flujo a través de superficies con $x' = cte$ viene dado por:

$$(\text{flujo})^{x'} = \frac{nv^x}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (2.3)$$

y análogamente para las otras direcciones. Así pues, resulta conveniente definir el siguiente 4-vector (corriente de partículas):

$$N^i = nu^i, \quad (2.4)$$

donde u^i es el 4-vector velocidad de las partículas para el caso particular del polvo. En un contexto más general ya no tendrá que ver con la 4-velocidad de cada partícula, sino con la 4-velocidad que describe el movimiento en grupo de las partículas. Así:

$$\vec{N} = \left(\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^z}{\sqrt{1-v^2}} \right); \quad (2.5)$$

por lo que en un sistema de referencia dado la componente temporal de N^i suministra la densidad de partículas, mientras que las componentes espaciales dan el flujo de partículas en la dirección de los ejes. Finalmente, notemos que $N^i N_i = -n^2$.

2.2 Tensor energía-momento del polvo.

Hasta el momento, solamente hemos hablado de flujos y densidad de partículas. Pero recordemos que cada partícula de nuestro sistema transporta momento y energía. Surge así la cuestión de como representar dentro del marco de la Teoría Especial de la Relatividad dicho transporte de momento y energía. Supondremos en lo sucesivo que todas las partículas del polvo tienen la misma masa en reposo m . Así en el SICI, la energía de cada partícula (ya que se hallan en reposo) es mc^2 (por conveniencia usaremos unidades en las que $c = 1$), con lo cual la energía por unidad de volumen viene dada por mn . Denotemos por ρ a dicha densidad de energía medida en el SICI. Por argumentos conocidos, la densidad de energía medida en el sistema O' resulta ser:

$$\frac{\rho}{1-v^2} = \frac{n}{\sqrt{1-v^2}} \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (2.6)$$

A partir de este último hecho surge la posibilidad de que la densidad de energía no sea la componente de un 4-vector, debido a que el primer factor en el lado derecho de la ecuación anterior ya es de por sí una componente de un 4-vector.

Ahora, sabemos que una densidad (por ejemplo, la del número de partículas por unidad de volumen) se puede interpretar como un flujo de tipo temporal (es decir, a través una superficie caracterizada por $t = cte$). Cuando queremos definir una energía, se requiere de una 1-forma para poder seleccionar la componente t del 4-vector energía-momento; si además queremos calcular

la densidad de energía, nuevamente requeriremos de otra 1-forma pues como mencionamos, la densidad es un flujo de tipo temporal. Análogamente, el flujo de energía requiere de dos 1-formas, una para obtener la energía, y otra para definir la superficie a través de la cual ocurre el flujo.

Como se ve, el definir todas las cantidades anteriores requiere de dos 1-formas. Así, debe de existir un objeto (**T**) llamado tensor energía-momento que contenga a todas las cantidades mencionadas anteriormente cuando se le contrae de la manera adecuada.

La forma más adecuada para definir este objeto es a través de sus componentes en un sistema de referencia arbitrario:

$$\mathbf{T}(\tilde{dx}^i, \tilde{dx}^j) = T^{ij} : \text{flujo de } i\text{-momento a través una superficie de } x^j = \text{cte.} \quad (2.7)$$

Considérese por ejemplo T^{00} ; por definición, resulta ser el flujo de 0-momento (energía) a través de la superficie $t = \text{cte}$, es decir, simplemente la densidad de energía.

Análogamente, tenemos que:

$T^{0\alpha}$: flujo de energía a través de la superficie $x^\alpha = \text{cte}$ ($\alpha = 1, 2, 3$).

$T^{\alpha 0}$: densidad de α -momento.

$T^{\alpha\beta}$: flujo de α -momento a través de la superficie $x^\beta = \text{cte}$.

Obviamente, para un sistema dado, al suministrar las componentes de **T** en él, se le ha definido por completo. Para el polvo, las componentes en el SICI son particularmente sencillas. Como las partículas no se mueven, todo el α -momento es cero, y por lo tanto, también su flujo:

$$(T^{00})_{SICI} = \rho = mn, \quad (2.8)$$

$$(T^{\alpha 0})_{SICI} = (T^{0\alpha})_{SICI} = (T^{\alpha\beta})_{SICI} = 0. \quad (2.9)$$

En el SICI se puede con facilidad ver que lo anterior corresponde al tensor:

$$(\vec{p} \otimes \vec{N})_{SICI}, \quad (2.10)$$

donde \vec{N} es el vector de corriente de las partículas y \vec{p} es el 4-vector momento de las mismas ($\vec{p} = m\vec{u}$). Por lo tanto:

$$\mathbf{T}_{polvo} = \vec{p} \otimes \vec{N} = mn \vec{u} \otimes \vec{u} = \rho \vec{u} \otimes \vec{u}, \quad (2.11)$$

es el tensor de energía-momento del polvo (en forma invariante). Si queremos las componentes de dicho tensor en cierto sistema de referencia entonces tenemos que:

$$T^{ij} = T(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j) = \rho \tilde{u}^i(\tilde{\omega}^i) \tilde{u}^j(\tilde{\omega}^j) = \rho u^i u^j, \quad (2.12)$$

donde $\tilde{\omega}^j$ son las 1-formas de la base para nuestro sistema de referencia en el que queremos conocer las componentes.

Así en el sistema O' donde $\tilde{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v^\alpha}{\sqrt{1-v^2}} \right)$ tendremos que T es de la forma:

$$T^{00} = \rho u^0 u^0 = \frac{\rho}{1-v^2}, \quad (2.13)$$

$$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0} = \rho u^0 u^\alpha = \frac{\rho v^\alpha}{1-v^2}, \quad (2.14)$$

$$\text{y } T^{\alpha\beta} = \frac{\rho v^\alpha v^\beta}{1-v^2}. \quad (2.15)$$

2.3 Tensores de energía momento más generales.

La definición del tensor energía-momento es completamente general, pudiéndose aplicar sin ningún problema a un fluido. Para analizar este caso, refirámonos al SICI del elemento de fluido. Allí:

- i) T^{00} = (densidad de energía) = ρ .
- ii) $T^{0\alpha}$ = (flujo de energía). Como el elemento de fluido está en reposo en el SICI, estos términos se asocian a flujos de calor exclusivamente.
- iii) $T^{\alpha 0}$ = (densidad de momento). Las partículas no poseen momento, pero si existe transmisión de calor, entonces la energía transportará momento (de hecho $T^{\alpha 0} = T^{0\alpha}$).
- iv) $T^{\alpha\beta}$ = (flujo de momento o esfuerzos).

2.3.1 Componentes espaciales $T^{\alpha\beta}$.

Por definición, $T^{\alpha\beta}$ es el flujo de α -momento a través de la superficie $x^\beta = \text{cte}$. Consideremos elementos de fluido de forma cúbica adyacentes.

24CAPÍTULO 2. FLUIDOS PERFECTOS EN LA RELATIVIDAD ESPECIAL.

En general, ejercerán fuerzas uno sobre el otro. La fuerza resulta ser, por definición, igual a la razón de cambio del momento (recordemos que estamos trabajando en el SIC1 del fluido). Entonces el elemento **A** transfiere momento a **B** a una razón F por unidad de tiempo.

Por supuesto, **B** no necesariamente se acelera debido a tal transferencia de momento; el que se acelere depende de cuanto momento transfieren a **B** sus otros vecinos. Así, existirá un flujo de momento de **A** a **B** a través de la superficie \mathcal{S} de contacto entre ambos en la razón \mathcal{F} . Si \mathcal{S} tiene un área \mathcal{A} , entonces el flujo a través de \mathcal{S} es: $\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{A}}$. Si \mathcal{S} es una superficie con $x^j = cte$, entonces T^{ij} para el elemento de fluido vale $\frac{F^i}{A}$. Lo anterior expresa con claridad el significado de $T^{\alpha\beta}$; éste representa la fuerza entre elementos de fluido adyacentes. Si las fuerzas son perpendiculares a las interfaces entonces $T^{\alpha\beta}$ será cero salvo cuando $\alpha = \beta$.

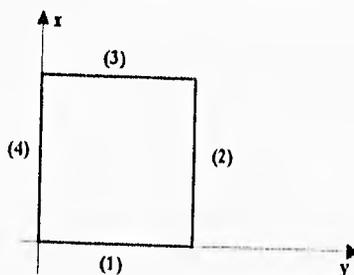
2.3.2 Simetría de T^{ij} .

Se puede probar que $T^{\alpha\beta}$ es simétrico; para ello basta trabajar en el SIC1. Esta simetría del tensor energía-momento nos muestra que el flujo de energía y la densidad de momento son esencialmente lo mismo. Este hecho, debería de ser patente desde antes pues, un flujo de energía equivale a la energía por la velocidad a la que ésta fluye. Como energía y masa son esencialmente lo mismo, lo anterior resulta ser también la densidad de masa por la velocidad a la que se mueve, es decir densidad de momento. (Ver [11], 103ff)

2.3.3 Leyes de conservación.

T representa el contenido de energía y de momento de un sistema. Así, es natural pensar que T está involucrado con alguna expresión que manifieste la conservación de energía. Consideremos un elemento de fluido cúbico. En la figura 2.1 se muestra sólomente una sección transversal de él.

La energía puede fluir a través de cada una de las caras del cubo. La tasa de flujo de energía a través de (4) es $l^2 T^{0x}|_{x=0}$ y en (2) $-l^2 T^{0x}|_{x=l}$, donde l es la longitud de las aristas del cubo. El segundo término tiene signo negativo pues T^{0x} representa al flujo de energía en dirección positiva que sale del volumen por (2). De igual forma, la energía fluyendo en la dirección y es:



Corte transversal del elemento de fluido.

Figura 2.1:

$$l^2 T^{0y} \Big|_{y=0} - l^2 T^{0y} \Big|_{y=l} \quad (2.16)$$

Y una expresión similar se obtiene para la dirección z . La suma de sus transportes de energía debe de ser igual a la tasa de cambio de la energía en el interior del volumen: $\frac{\partial(T^{00}l^3)}{\partial t}$. Lo anterior es simplemente la postulación de la conservación de la energía. Por lo tanto:

$$\frac{\partial(T^{00}l^3)}{\partial t} = l^2 [T^{0x} \Big|_{x=0} - T^{0x} \Big|_{x=l} + T^{0y} \Big|_{y=0} - T^{0y} \Big|_{y=l} + T^{0z} \Big|_{z=0} - T^{0z} \Big|_{z=l}]. \quad (2.17)$$

Si finalmente dividimos por l^3 y hacemos $l \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} = -\frac{\partial T^{0x}}{\partial x} - \frac{\partial T^{0y}}{\partial y} - \frac{\partial T^{0z}}{\partial z}, \quad (2.18)$$

o de una manera más breve

$$T^{00}_{,0} + T^{0x}_{,x} + T^{0y}_{,y} + T^{0z}_{,z} = T^{0i}_{,i} = 0. \quad (2.19)$$

Si en la ecuación 2.19 sustituimos el índice 0 (temporal) por cualquier índice espacial lo que obtendremos será la conservación del momento para dicha componente. Así en general la ley de conservación del 4-momento se expresa en la forma compacta:

$$T^{ij}_{;j} = 0. \quad (2.20)$$

2.3.4 Conservación de partículas.

Se puede esperar bajo ciertas circunstancias que el número de partículas del sistema no cambie. Esta ley de conservación se deriva y expresa de manera totalmente análoga a la de la conservación de la energía. Así pues,

$$N^i_{;i} = 0 = (nu^i)_{;i}. \quad (2.21)$$

2.4 Fluidos.

Si deseamos generalizar partiendo del caso del polvo al estudio de un fluido, habrá que considerar primero que además del movimiento en bloque de las partículas del fluido, existe también cierto tipo de movimiento aleatorio. Además, podría existir una cierta interacción entre los elementos del fluido.

Para la descripción del fluido es necesario definir ciertas cantidades macroscópicas. De aquí en adelante trabajaremos en el SICI de la partícula de fluido estudiada a menos de que se especifique lo contrario. Todas las cantidades escalares asociadas con un elemento de fluido en relatividad se definen en términos de sus valores en el SICI. Denotaremos con T a la temperatura (en el SICI), por p a la presión, y por S a la entropía específica.

2.4.1 Fluidos perfectos.

Un fluido perfecto se define como aquel fluido sin viscosidad y sin conducción de calor en el SICI. El suponer perfecto a un fluido es una hipótesis muy fuerte que simplifica tremendamente la estructura de su tensor energía momento [11]. Como no hay conducción de calor, entonces en el SICI $T^{0i} = T^{i0} = 0$. La energía fluye sólo si las partículas fluyen. Por lo tanto, en un fluido perfecto se tiene la conservación del número de partículas.

Ausencia de viscosidad.

La viscosidad es una fuerza paralela a las interfaces de las partículas. El que no exista viscosidad significa que las fuerzas son siempre perpendiculares a las caras del elemento de fluido.

$$\Rightarrow T^{\alpha\beta} = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta; \quad (2.22)$$

este resultado, será entonces válido para todos los SICI. Por lo tanto:

$$T^{\alpha\beta} = p\delta^{\alpha\beta}, \quad (2.23)$$

así de acuerdo a nuestra argumentación, en el SICI T toma la forma siguiente:

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

o en forma de componentes:

$$T^{ij} = (\rho + p)u^i u^j + p\eta^{ij}. \quad (2.25)$$

Lo anterior debido a que $(u^i)_{SICI} = (1, 0, 0, 0)$. Con ello, es sencillo obtener una fórmula invariante respecto a cambio de coordenadas:

$$\mathbf{T} = (p + \rho)\vec{u} \otimes \vec{u} + p\eta. \quad (2.26)$$

Si comparamos la expresión del tensor de energía momento del polvo (ec. (2.11)) y la expresión para el fluido perfecto (ec. (2.26)), notaremos que el polvo es simplemente un fluido perfecto sin presión. En otras palabras, un fluido carecerá de presión cuando sus partículas carezcan de movimiento aleatorio [11].

2.5 Termodinámica en la relatividad especial.

Para la descripción completa de los fluidos en la Teoría Especial de la Relatividad (así como clásicamente) requerimos de la información termodinámica suministrada por las ecuaciones de estado y las ecuaciones constitutivas del fluido estudiado.

Para establecer las relaciones termodinámicas básicas, primero tenemos que referirnos al SIC1 del elemento de volumen en consideración, y considerar este elemento de volumen como un sistema en equilibrio (por supuesto que este elemento interacciona con sus alrededores, de manera que probablemente el sistema completo no esté en equilibrio); así es posible introducir para este elemento de volumen particular las variables de estado termodinámicas fundamentales. Por ejemplo:

- n : densidad de partículas,
- ρ : densidad de masa-energía,
- T : temperatura,
- S : entropía por partícula (barión).

Por densidad debe entenderse "por unidad de volumen tridimensional en el SIC1".

2.5.1 Primera ley de la Termodinámica.

Como sabemos, la primera ley es un postulado de la conservación de la energía. En principio, un elemento de fluido sólo puede intercambiar energía con los alrededores a través de la conducción de calor (ΔQ) o por medio de trabajo realizado sobre el sistema. Sea E la energía total del elemento, entonces como ΔQ es la energía ganada y $p\Delta V$ la energía perdida, podemos decir que:

$$\Delta E = \Delta Q - p\Delta V \text{ o que } \Delta Q = \Delta E + p\Delta V. \quad (2.27)$$

Si el elemento de fluido tiene un total de N partículas, y si tal número no cambia, entonces tenemos que:

$$V = \frac{N}{n} \Rightarrow \Delta V = -\frac{N}{n^2}\Delta n, \quad (2.28)$$

y por la definición de ρ ($E = \rho V = \rho \frac{N}{n}$):

$$\Delta E = \rho\Delta V + V\Delta\rho, \quad (2.29)$$

$$\Rightarrow \Delta Q = \frac{N}{n}\Delta\rho - N(\rho + p)\frac{\Delta n}{n^2}. \quad (2.30)$$

Sea $q = \frac{Q}{N}$ el calor absorbido por partícula, entonces:

$$n\Delta q = \Delta\rho - \frac{\rho + p}{n}\Delta n. \quad (2.31)$$

Ahora, el estado termodinámico de un fluido puede ser descrito por dos variables independientes (ρ y T , ρ y n). Si elegimos como variables independientes a ρ y a n entonces el lado derecho de (2.31) se transforma en: $d\rho - (\rho + p)\frac{dn}{n}$. Esta expresión en diferenciales siempre posee un factor integrante.

\Rightarrow existen $A = A(\rho, n)$, $B = B(\rho, n)$ tales que:

$$d\rho - (\rho + p)\frac{dn}{n} = AdB. \quad (2.32)$$

Por costumbre, en Termodinámica, lo anterior se escribe como [1]:

$$d\rho - (\rho + p)\frac{dn}{n} = nTdS, \text{ por lo que } \Delta q = T\Delta S. \quad (2.33)$$

Ahora, dividiendo la anterior expresión entre n y agrupando diferenciales obtenemos la llamada *relación de Gibbs-Duhem*:

$$TdS = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.34)$$

Conservación de la entropía en un fluido perfecto.

Regresemos a las leyes de conservación. En el caso muy particular de un fluido perfecto tendremos:

$$T^{ij}{}_{;j} = [(\rho + p)u^i u^j + p\eta^{ij}]_{;j} = 0; \quad (2.35)$$

como la ley de conservación de partículas es válida, entonces $(nu^i)_{;i} = 0$.

$$\Rightarrow [(\rho + p)u^i u^j]_{;j} = \left[\frac{(\rho + p)}{n}u^i(nu^j)\right]_{;j} = nu^j \left(\frac{(\rho + p)}{n}u^i\right)_{;j}. \quad (2.36)$$

De hecho, como η^{ij} es una matriz constante entonces $\eta^{ij}{}_{;k} = 0 \Rightarrow u^i{}_{;j} u_i = 0$. Con esta identidad, la ley de conservación se transforma en:

$$nu^j \left(\frac{\rho + p}{n} u^i \right)_{,j} + p_{,j} \eta^{ij} = 0. \quad (2.37)$$

Si multiplicamos la expresión anterior por u_i y sumamos:

$$nu^j u_i \left(\frac{\rho + p}{n} \right)_{,j} + p_{,j} u^j = 0, \quad (2.38)$$

pero, $p_{,j} u^j = \frac{dp}{d\tau}$ (regla de la cadena) así que:

$$u^\mu \left[-n \left(\frac{\rho + p}{n} \right)_{,j} + p_{,j} \right] = 0, \quad (2.39)$$

$$\text{ó } \frac{dp}{d\tau} - \frac{\rho + p}{n} \frac{dn}{d\tau} = 0. \quad (2.40)$$

Ahora, por la Primera Ley de la Termodinámica, $d\rho - (\rho + p) \frac{dn}{n} = nT dS$, resulta que:

$$nT \frac{dS}{d\tau} = 0 \Rightarrow u^i S_{,i} = \frac{dS}{d\tau} = 0. \quad (2.41)$$

Por lo tanto, un fluido perfecto que conserva el número de partículas también conserva su entropía específica, es decir, es adiabático [11].

Se debe de recalcar fuertemente que el que $\frac{dS}{d\tau} \equiv \dot{S} = 0$ no implica que $S_{,i} = 0$. Esto es más claro si nos remitimos al SIC1 donde $\vec{u} = (u_0, 0, 0, 0)$. Así, si $\dot{S} = u^i S_{,i} = 0$ entonces ello implicará que $S_{,t} = 0$, pero en principio puede ocurrir que $S_{,i} \neq 0$. Concluyendo, en Relatividad Especial (y como veremos en Relatividad General), a diferencia del caso clásico, la adiabaticidad no implica $dS = 0$; pero evidentemente, $dS = 0$ si implica la adiabaticidad.

Ecuación de Euler.

Retomemos nuevamente la ecuación (2.37), y limitémonos al análisis de las componentes espaciales ($\alpha = 1, 2, 3$). Si nos referimos al SIC1 donde tenemos que $u^\alpha = 0$, pero $u^\alpha_{,j} \neq 0$, entonces:

$$nu^j \left(\frac{\rho + p}{n} u^\alpha \right)_{,j} + p_{,j} \eta^{\alpha j} = 0, \quad (2.42)$$

pero como $u^\alpha = 0$ entonces:

$$(\rho + p) u^\alpha{}_{,j} u^j + p_{,j} \eta^{\alpha j} = 0. \quad (2.43)$$

Si bajamos los índices, de la expresión anterior, se podrá leer con mayor facilidad:

$$(\rho + p) u_{\alpha,j} u^j + p_{,\alpha} = 0. \quad (2.44)$$

Por la regla de la cadena, $u_{\alpha,j} u^j$, son las componentes temporales de la 4-aceleración. Por lo tanto:

$$(\rho + p) a_\alpha + p_{,\alpha} = 0; \quad (2.45)$$

comparando con su análogo clásico, veremos la gran similitud:

$$\rho \vec{a} + \nabla p = 0, \text{ donde } \vec{a} = \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} / T. \quad (2.46)$$

En el siguiente capítulo se procederá a la generalización de los anteriores resultados en el ámbito de la Relatividad General.

CAPÍTULO 3

Los fluidos perfectos en Relatividad General.

3.1 El tensor energía-momento para un fluido perfecto en Relatividad.

La obtención del tensor energía momento para un fluido perfecto en Relatividad General es una aplicación directa de la "regla de transcripción" (véase el capítulo 1). En el capítulo 2 habíamos obtenido la siguiente expresión en Relatividad Especial para el tensor de energía-momento (ec. (2.26)) de un fluido perfecto:

$$T^{ij} = (\rho + p)u^i u^j + p\eta^{ij}, \quad (3.1)$$

nsí, en Relatividad General, la expresión anterior tomará la forma:

$$\begin{aligned} T^{ij} &= (\rho + p)u^i u^j + pg^{ij}, \\ \mathbf{T} &= (\rho + p) \vec{u} \otimes \vec{u} + pg. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.1.1 Ecuaciones de conservación.

Las ecuaciones de conservación también se siguen directamente de la "regla de transcripción":

$$T^{ij}_{;j} = 0 \longrightarrow T^{ij}_{;j} = 0, \quad (3.3)$$

$$(nu^i)_{;i} = 0 \longrightarrow (nu^i)_{;i} = 0, \quad (3.4)$$

$$(nSu^i)_{;i} = 0 \longrightarrow (nSu^i)_{;i} = 0. \quad (3.5)$$

Relaciones importantes se obtienen proyectando la ecuación de conservación para el tensor energía-momento con u_i y con el proyector espacial $h_{ij} = g_{ij} + u_i u_j$ ($u^i h_{ij} = 0$):

$$\begin{aligned} u_i T^{ij}{}_{;j} &= 0, \\ \text{así } u^i \rho_{;i} + (\rho + p) u^i{}_{;i} &= 0, \\ \text{ó } \rho + (\rho + p) \Theta &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde a $\Theta = u^i{}_{;i}$ se le conoce como la expansión (divergencia de \vec{u}). Y en el otro caso tenemos que:

$$\begin{aligned} h_{ik} T^{ij}{}_{;j} &= 0, \\ \text{por lo que } p_{;k} + p_{;j} u^j u_k + (\rho + p) u_{k;j} u^j &= 0, \\ \text{ó de otra forma } p_{;k} + \dot{p} u_k + (\rho + p) \dot{u}_k &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2 Termodinámica en Relatividad General.

La termodinámica del fluido perfecto en Relatividad General se desarrolla haciendo uso de la regla de transcripción en los resultados obtenidos para la Relatividad Especial. El punto de partida es la relación de Gibbs-Duhem (ec. (2.34)):

$$dS = \frac{1}{T} \left[d \left(\frac{\rho}{n} \right) + p d \left(\frac{1}{n} \right) \right],$$

junto con la ecuación de conservación de partículas y la condición de no producción de entropía (ecs. (3.4) y (3.5)):

$$(nu^i)_{;i} = 0, \quad (3.8)$$

$$(nSu^i)_{;i} = 0. \quad (3.9)$$

Si tratamos con fluidos simples cuyas partículas tengan una masa en reposo m_0 , la energía interna específica (\bar{U}) se relaciona con ρ a través de la expresión:

$$\rho = n (\bar{U} + m_0), \quad (3.10)$$

en la cual se explicita la descomposición de la densidad de materia-energía, en un término que es simplemente la masa en reposo, y otro asociado a las demás formas de energía.

Para fluidos perfectos con simetría esférica, la relación de Gibbs-Duhem (ec. (2.34)) siempre se puede integrar (ver [6, 11]). La condición de integrabilidad se da a través una de sus relaciones de Maxwell. Ahora, en la relación de Gibbs-Duhem se escriben todos los potenciales termodinámicos en función de ρ y n . Pero, para propósitos de esta tesis resultará más conveniente usar la pareja (ρ, S) como variables termodinámicas independientes, lo cual nos lleva a [3]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{n} \right) \right]_{\rho} = \frac{T}{\rho + p}, \quad (3.11)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{n} \right) \right]_S = \frac{-1}{n(\rho + p)}. \quad (3.12)$$

Así, la condición de integrabilidad de (2.4) dada por:

$$\left(\frac{1}{n} \right)_{,\rho,S} - \left(\frac{1}{n} \right)_{,S,\rho} = 0, \quad (3.13)$$

toma la forma:

$$\frac{T_{,\rho}}{T} - \frac{1}{\rho + p} \left[p_{,\rho} + \frac{p_{,S}}{nT} \right] = 0, \quad (3.14)$$

donde $n = n(\rho, S)$, $p = p(\rho, S)$, y $T = T(\rho, S)$. De esta última relación, podemos, una vez dadas las ecuaciones de estado para n y p , obtener una expresión para la temperatura [3].

CAPÍTULO 4

Soluciones con simetría esférica cuyas fuentes son fluidos perfectos.

4.1 Coordenadas esféricas en el espacio plano.

Consideremos un espacio-tiempo plano en el cual es válida la métrica de Minkowski con las coordenadas esféricas usuales (r, θ, φ) . Bajo estas coordenadas el elemento de línea de Minkowski toma la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (4.1)$$

Dada esta métrica, las superficies de t y r constantes resultan ser esferas bidimensionales (2-esferas). La distancia entre dos puntos confinados a tales esferas se obtiene midiendo longitudes a lo largo de curvas caracterizadas por $dt = dr = 0$, así:

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) = r^2 d\Omega^2. \quad (4.2)$$

En este espacio plano el área de las esferas resulta ser $4\pi r^2$ y el perímetro del círculo máximo es simplemente $2\pi r$. Realizando el razonamiento anterior al revés, entonces cualquier superficie con elemento de línea de la forma (4.2) puede pensarse poseedora de una geometría intrínsecamente esférica [1, 5, 6, 11].

4.2 2-esferas en el espacio curvo.

El argumento anterior será de gran utilidad para extender la noción de simetría esférica a espacios con curvatura. Por ejemplo, consideremos una superficie en este espacio tal que la distancia entre dos puntos sobre ella viene dada por:

$$dl^2 = f(r, t)^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2); \quad (4.3)$$

si θ varía en el intervalo de $[0, \pi]$ y φ en $[0, 2\pi)$ tendremos que el área de la superficie es $4\pi f(r, t)^2$. De esta manera tendremos que las superficies con $r = \text{cte}$, $t = \text{cte}$ son tales que su área es $4\pi f(r, t)^2$ y existen curvas máximas de longitud $2\pi f(r, t)$. Así, $f(r, t)$ se debe ver como el radio de nuestras superficies esféricas.

Es importante hacer notar que r no se debe identificar con la distancia propia del centro de la esfera a la superficie. La idea atrás de esta argumentación es la de encontrar una definición de esfericidad o simetría esférica en el espacio tiempo usando propiedades globales de la esfera en un espacio plano. Notemos que en estos argumentos no se hace uso del centro de la superficie. Ahora, existe un conjunto de eventos cuya caracterización invariante es muy sencilla y que será muy útil en discusiones posteriores: aquéllos donde $r = 0$ (centros de simetría).

Consideremos ahora esferas etiquetadas por las coordenadas r y $r + dr$. Cada una de ellas posee su propio sistema de coordenadas (θ, φ) . En principio podríamos pensar que cada uno tiene una orientación distinta. Ahora, una curva con $\theta, \varphi = \text{cte}$ será ortogonal a ambas superficies. Sea \widehat{e}_r el vector directriz de tal recta. Por definición, los vectores \widehat{e}_θ y \widehat{e}_φ se encuentran confinados a la superficie. De ellos requerimos que: $\widehat{e}_r \cdot \widehat{e}_\theta = \widehat{e}_r \cdot \widehat{e}_\varphi = 0$. Esto implicará que $g_{r\theta} = g_{r\varphi} = 0$ pues $\vec{A} \cdot \vec{B} = g_{ij} A_i B_j$. Con esto, la métrica se restringe a:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}drdt + 2g_{t\theta}d\theta dt + 2g_{t\varphi}d\varphi dt + g_{rr}dr^2 + f^2(r, t)d\Omega^2. \quad (4.4)$$

Como no solamente los espacios con $t = \text{cte}$ poseen simetría esférica, sino también (trivialmente), el espacio completo, entonces una curva con $r = \text{cte}$, $\theta = \text{cte}$, $\varphi = \text{cte}$ debe de ser ortogonal a las dos esferas. De otra manera esto implicaría la existencia de direcciones privilegiadas en el espacio-tiempo. Entonces:

$$\widehat{e}_t \perp \widehat{e}_\rho, \widehat{e}_t \perp \widehat{e}_\theta \Rightarrow g_{t\rho} = g_{t\theta} = 0; \quad (4.5)$$

por lo que la métrica se reduce a:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}drdt + g_{rr}dr^2 + f^2(r,t)d\Omega^2. \quad (4.6)$$

Esta última expresión es una de las posibles formas de escribir a la métrica más general con simetría esférica. Posteriormente, se puede usar la libertad de elección de los sistemas de coordenadas de manera que g_{tt}, g_{tr}, g_{rr} dependan solamente de r y t .

Finalmente mencionaremos que resulta conveniente escribir las componentes tt y rr del tensor métrico en la forma:

$$g_{tt} = -e^{2\Phi(t,r)}, g_{rr} = e^{2\Lambda(t,r)}; \quad (4.7)$$

además de elegir las coordenadas de manera que $g_{\theta r}$ se anule.

4.2.1 Geometrías estáticas con simetría esférica.

Una geometría estática es tal que:

- i) Todas las componentes de la métrica son independientes de t .
- ii) La geometría se conserva si se realiza la transformación $t \rightarrow -t$.

Si planteamos por ejemplo la descripción de una estrella esférica rotante, entonces encontraremos que (i) no implica (ii). La condición (ii) tiene efectos muy fuertes sobre la forma de la métrica. La transformación de coordenadas $(t, r, \theta, \varphi) \rightarrow (-t, r, \theta, \varphi)$, que es de Lorentz, tiene $\Lambda_t^t = -1, \Lambda_j^j = \delta_j^j$. Así:

$$g_{t't'} = (\Lambda_{t'}^t) (\Lambda_t^t) g_{tt} = g_{tt}, \quad (4.8)$$

$$g_{t'r'} = (\Lambda_{t'}^t) (\Lambda_{r'}^r) g_{tr} = -g_{tr}, \quad (4.9)$$

$$g_{r'r'} = (\Lambda_{r'}^r) (\Lambda_r^r) g_{rr} = g_{rr}. \quad (4.10)$$

Como la geometría no debe de alterarse, entonces $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha'\beta'} \Rightarrow g_{tr} = 0$. Ahora, podemos hacer uso de la libertad de elección del sistema de coordenadas y hacer $f(r) = r$, de forma que la métrica se parezca más a la de

40CAPÍTULO 4. SOLUCIONES CON SIMETRÍA ESFÉRICA

Minkowski (ec. (4.1)). Con ello, es razonable escribir la métrica para una geometría estática con simetría esférica en la peculiar forma:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (4.11)$$

Para la métrica estática, el tensor de Einstein tiene las siguientes componentes no nulas:

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2}e^{2\Phi(r)}\frac{d}{dr}\left(r\left(1 - e^{-2\Lambda(r)}\right)\right), \quad (4.12)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\Lambda(r)}\left(1 - e^{-2\Lambda(r)}\right) + \frac{2}{r}\Phi'(r), \quad (4.13)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2e^{-2\Lambda(r)}\left[\Phi''(r) + (\Phi'(r))^2 + \frac{1}{r}\Phi'(r) - \Phi'(r)\Lambda'(r) - \frac{1}{r}\Lambda'(r)\right], \quad (4.14)$$

$$G_{\varphi\varphi} = \text{sen}^2\theta G_{\theta\theta}. \quad (4.15)$$

En esta tesis nos enfocaremos al estudio de métricas no estáticas, aunque a continuación abordaremos el caso de una métrica estática de gran importancia.

4.3 Métrica de Schwarzschild y el teorema de Birkhoff.

Las ecuaciones de campo de Einstein se integran fácilmente en el caso de un campo central con simetría esférica en el vacío, es decir, fuera de las distribuciones de masa que producen al campo [1, 8, 9]. Debido a la discusión anterior la métrica tomará la forma:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(t,r)}dt^2 + e^{2\Lambda(t,r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (4.16)$$

Calculando el tensor de Einstein para esta métrica, tendremos que las ecuaciones de campo son:

$$G_{tt} = r^{-2}\left(1 - e^{-2\Lambda(t,r)}\right) + 2(\Lambda_r(t,r)/r)e^{-2\Lambda(t,r)} = 0, \quad (4.17)$$

4.3. MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD Y EL TEOREMA DE BIRKHOFF.41

$$G_{tr} = G_{rt} = 2(\Lambda_{,t}(t, r)/r) e^{-\Lambda(t,r)+\Phi(t,r)} = 0, \quad (4.18)$$

$$G_{rr} = 2(\Phi_{,r}(t, r)/r) e^{-2\Lambda(t,r)} + r^{-2}(e^{-2\Lambda(t,r)} - 1) = 0, \quad (4.19)$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} = [\Phi_{,rr}(t, r) + \Phi^2_{,r}(t, r) - \Phi_{,r}(t, r)\Lambda_{,r}(t, r)] e^{-2\Lambda(t,r)}, \quad (4.20)$$

$$+ \Phi_{,r}(t, r)/r - \Lambda_{,r}(t, r)/r] e^{-2\Lambda(t,r)}. \quad (4.21)$$

La ecuación 4.19 garantiza el que Λ sea una función sólo de r ; así a partir de la ecuación 4.20 resulta que Λ tiene la forma:

$$\Lambda(r) = -\frac{1}{2} \ln |1 - C/r|, \quad (4.22)$$

donde C es una constante de integración. Así, las ecuaciones 4.20 y 4.21 se vuelven equivalentes debido a la identidad de Bianchi ($\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$), cuya solución es:

$$\Phi(t, r) = \frac{1}{2} \ln |1 - C/r| + f(t), \quad (4.23)$$

$(\Phi_{,rr}(t, r) + \Phi^2_{,r}(t, r) - \Phi_{,r}(t, r)\Lambda_{,r}(t, r))$ donde f es una función arbitraria de t . Substituyendo lo anterior en el elemento de línea, obtenemos:

$$ds^2 = -e^{2f(t)} \left(1 - \frac{C}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{C}{r}} + r^2 d\Omega^2. \quad (4.24)$$

Pero todavía es posible redefinir el tiempo coordinado:

$$t_{\text{nuevo}} = \int e^{f(t)} dt. \quad (4.25)$$

Así pues obtenemos el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{C}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{C}{r}} + r^2 d\Omega^2. \quad (4.26)$$

Si imponemos la condición de que a grandes distancias de las fuentes, donde el campo es débil, sea válida la Ley de gravitación de Newton, tendremos entonces que $C = 2M$ (radio de Schwarzschild) donde M es la masa

del cuerpo que produce el campo. Por lo que tendremos la expresión definitiva para el elemento de línea:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2. \quad (4.27)$$

A la anterior expresión se le conoce como *Métrica de Schwarzschild*. Nótese que es una métrica estática pues no existe en ella dependencia alguna del tiempo coordinado (t). Además, vemos que cuando el espacio tiempo que rodea a cualquier objeto tiene simetría esférica y está libre de carga, masa o cualquier otro campo distinto al gravitatorio, entonces uno puede introducir un sistema de coordenadas en el cual la métrica es la de Schwarzschild. Así pues, la solución de Schwarzschild es la única solución con simetría esférica y asintóticamente plana a las ecuaciones de Einstein, aún si suponemos de entrada que la métrica no es estática. A este hecho se le conoce por el nombre de *Teorema de Birkhoff*. Lo anterior seguirá siendo cierto aún cuando la estrella gire o pulse (siempre conservando la simetría esférica). Consecuencia directa de lo anterior es que los sistemas esféricos pulsaciones del mismo tipo no generan ondas gravitacionales.

4.4 Condiciones de empalme en la frontera de dos métricas.

Al resolver las ecuaciones de campo, con frecuencia nos enfrentamos al problema de empalmar las métricas de dos regiones distintas del espacio-tiempo; por ejemplo, podemos querer empalmar una solución de las ecuaciones de campo ($R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \kappa T_{ij}$) válida en el interior de una estrella con la solución en el vacío ($R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = 0$) [6, 14].

Supongamos que la superficie de empalme (Σ) viene dada por una ecuación de la forma $x^4 = cte$ (donde x^4 es cualquiera de las 4 posibles coordenadas), y que esta superficie es no nula. Supongamos además que la métrica a cada lado de la superficie se puede poner en la forma:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + \varepsilon N^2 (dx^4)^2, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (4.28)$$

Sea n_i el vector normal unitario a la superficie de empalme:

$$\vec{n} = (0, 0, 0, \varepsilon N); \quad (4.29)$$

como la superficie es no nula entonces:

$$n_i n^i = \varepsilon = \pm 1. \quad (4.30)$$

4.4.1 El tensor curvatura extrínseca.

Definimos el tensor curvatura extrínseca de la superficie de empalme como:

$$K_{ij} = -n_{i,j} + \varepsilon n_i n_j. \quad (4.31)$$

K_{ij} es un tensor simétrico que carece de componentes en la dirección normal a la superficie [6]:

$$K_{ij} = K_{ji}, \quad K_{ij} n^i = 0. \quad (4.32)$$

El tensor K_{ij} tiene un significado geométrico bastante claro; bajo una translación del vector normal sobre la superficie tenemos que:

$$\Delta n_i = n_{i,j} \Delta x^j = -K_{ij} \Delta x^j. \quad (4.33)$$

Por lo tanto K_{ij} es una medida de la curvatura extrínseca de la superficie de empalme, esto es, de la curvatura en relación con el espacio en que se encuentra sumergida (véase la figura (4.1)).

Se puede probar [6] que bajo las coordenadas de (4.28):

$$K_{\alpha\beta} = \frac{-g_{\alpha\beta A}}{2N}, \quad (4.34)$$

donde α y β son tales que $x^\alpha \neq x^4$ y $x^\beta \neq x^4$.

4.4.2 El empalme.

Supongamos que las métricas que vamos a empalmar se pueden poner en la forma dada por (4.28) en cada lado de la superficie de empalme $x^4 = \text{etc}$. En principio, las componentes del tensor energía momento no serán todas continuas en la superficie que sirva de frontera entre las dos métricas. Si ciertas componentes del tensor energía-momento son discontinuas, entonces por las ecuaciones de campo tendremos que las componentes del tensor de

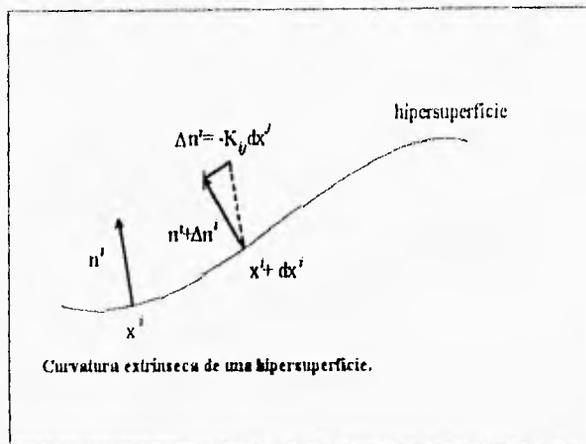


Figura 4.1:

curvatura son en el peor de los casos discontinuas. Ahora, si las derivadas segundas de la métrica son en el peor de los casos discontinuas, entonces las componentes de la métrica y sus primeras derivadas serán continuas. La superficie de empalme debe de exhibir las mismas propiedades métricas ya sea que nos aproximemos a ella por dentro o por fuera. Notemos por otra parte que una elección inadecuada de las coordenadas puede producir discontinuidades "artificiales" en la métrica. Por lo tanto, para evitar singularidades innecesarias adoptaremos el mismo sistema de coordenadas a ambos lados de la superficie, es decir, pediremos que:

$$[g_{\alpha\beta}]_{\Sigma} = g_{\alpha\beta}^{(I)} - g_{\alpha\beta}^{(II)} = 0. \quad (4.35)$$

Así se tiene que todas las derivadas $g_{\alpha\beta,\mu\nu}$ de esta métrica deberán ser continuas en la superficie. Por otra parte, se puede mostrar [6] que las derivadas segundas de la métrica están contenidas únicamente en las componentes $R^{\lambda}_{\beta\mu\nu}$ del tensor de curvatura. Separando convenientemente estos términos en el tensor de Einstein [6] tenemos que:

4.4. CONDICIONES DE EMPALME EN LA FRONTERA DE DOS MÉTRICAS. 45

$$\bar{G}_\beta^\alpha = \frac{\varepsilon}{N} (K_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha K_\nu^\nu) + \tilde{G}_\beta^\alpha (K_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\lambda}, K_{\mu\nu,\lambda}, N, N_{,\lambda}, \dots) = \kappa T_\beta^\alpha. \quad (4.36)$$

Por la discusión anterior ni T_β^α ni \tilde{G}_β^α serán singulares en la frontera; por lo tanto $K_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha K_\nu^\nu$, y $K_{\alpha\beta}$ deberán ser continuos:

$$[K_{\alpha\beta}] = K_{\alpha\beta}^{(I)} - K_{\alpha\beta}^{(II)} = 0. \quad (4.37)$$

Concluyendo, si en la superficie de empalme ($x^4 = \text{cte}$) entre dos métricas de la forma (4.28) el tensor energía momento es a lo más discontinuo, entonces la métrica restringida a la superficie ($g_{\alpha\beta}$) y la curvatura extrínseca ($K_{\alpha\beta} = \frac{-g_{\alpha\beta,4}}{2N}$) de la superficie así como las componentes $T_4^4 = \kappa p$ y $NT_\alpha^4 = \varepsilon n_i T_\alpha^i$ del tensor energía-momento deben de ser continuos en ella.

CAPÍTULO 5

Soluciones exactas sin corte.

5.1 Descomposición invariante de $u_{i;j}$.

En el estudio de la Teoría General de la Relatividad surgen con frecuencia campos vectoriales que destacan por sus propiedades. Su origen bien puede hallarse en cuestiones de tipo físico (como el campo de velocidades de una distribución de materia, la dirección de la propagación de rayos de luz), o bien en cuestiones de naturaleza más matemática (v.gr. los vectores propios del tensor de Weyl). El conocimiento de las propiedades de dichos campos vectoriales puede servir para clasificar a las distintas soluciones a las ecuaciones de Einstein, o también para simplificar ciertos cálculos por medio de la adopción de un sistema más adecuado de coordenadas [6, 7].

Uno de los ejemplos más importantes de campo vectorial de tipo temporal es *el campo de velocidades* $u^i(x^n)$ de una distribución de materia; por ejemplo la de materia en el interior de una estrella. Las propiedades de este campo de velocidades se destacan más fácilmente a través del estudio de su derivada covariante $u_{i;m}$. La idea consiste esencialmente en descomponer esta derivada covariante en una parte que es perpendicular a la 4-velocidad u^i , específicamente la cantidad $u_{i,m}u^m u_n/c^2$ (nótese que de $u_i u^i = -c^2$ se sigue que $u^i u_{i;n} = 0$), en su parte antisimétrica, en su parte simétrica sin traza, y en la traza misma [6, 7, 15]:

$$u_{i;n} = -\dot{u}_i u_n/c^2 + \omega_{in} + \sigma_{in} + \Theta h_{in}/3, \quad (5.1)$$

donde:

$$\dot{u}_i = u_{i;n} u^n = \frac{Du_i}{D\tau}, \quad \dot{u}_i u^i = 0, \quad (5.2)$$

$$\omega_{in} = u_{[i;n]} + \dot{u}_{[i} u_{n]}/c^2, \quad \omega_{in} u^n = 0, \quad (5.3)$$

$$\sigma_m = u_{(i;n)} + \dot{u}_{(i} u_{n)}/c^2 - \Theta h_{in}/3, \quad (5.4)$$

$$\Theta = u^i_{;i}, \quad (5.5)$$

$$h_{in} = g_{in} + u_i u_n/c^2, \quad h_{in} u^n = 0. \quad (5.6)$$

Esta descomposición se puede verificar simplemente por desarrollo y sustitución de cada uno de los términos en la expresión (5.1). Ahora, dado que esta descomposición es covariante, las componentes caracterizan al campo de manera invariante. Se acostumbra además dar los siguientes nombres a cada componente (*parámetros cinemáticos*):

\dot{u}_i : aceleración.

ω_{in} : rotación (velocidad de rotación).

σ_{in} : corte, sisayadura.

Θ : expansión, divergencia.

h_{in} : proyector espacial.

Sobre cada uno de estos términos se puede probar que ([6], pp 175-177):

(a) La expansión Θ conduce a un campo vectorial radial cuya magnitud es independiente de la dirección; así, un elemento de volumen aumenta ($\Theta > 0$) o disminuye ($\Theta < 0$) su tamaño, pero conservando su forma.

(b) El vector antisimétrico ω_{mi} puede ser mapeado al vector de vorticidad ω^a a través de:

$$\omega^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abmi} u_b \omega_{mi}, \quad \omega_{mi} = \epsilon_{miab} \omega^a u^b. \quad (5.7)$$

Así, se puede ver que la velocidad es perpendicular al vector de vorticidad ω^a , y por lo tanto tenemos una rotación en torno al eje definido por ω^a .

(c) El tensor simétrico σ_{in} de corte da lugar a un campo de velocidades dependiente de la dirección, el cual provoca la deformación de una esfera en un elipsoide del mismo volumen. Así pues, da lugar a un cambio de forma a volumen constante.

5.1.1 Ecuación de Raychaudhuri.

Sea a_i un campo vectorial. Entonces se puede demostrar [7] que satisface la siguiente relación (*identidad de Ricci*):

$$2a_{i[jk]} = a_l R_{ijk}^l. \quad (5.8)$$

Tomando a a_i como la 4-velocidad, y desarrollando tenemos que:

$$u_{i[jk]} - u_{i,kj} = R_{ijk}^l u_l; \quad (5.9)$$

ahora, usando la descomposición dada por la ecuación (5.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R_{ijk}^l u_l &= -\dot{u}_i (\omega_{jk} - \dot{u}_{[j} u_{k]}) - \dot{u}_{i[k} u_{j]} + \omega_{i[jk]} + \sigma_{i[jk]} + \frac{1}{3} \Theta_{[k} h_{j]}, \\ &+ \frac{\Theta}{3} \left[u_i \omega_{jk} - u_i \dot{u}_{[j} u_{k]} + \omega_{i[k} u_{j]} + \sigma_{i[k} u_{j]} + \frac{\Theta}{3} h_{i[k} u_{j]} \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

De la anterior ecuación, contrayendo y/o multiplicando por u^j obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$R_{ij}^k u_i = \dot{u}^i \omega_{ij} - \dot{u}_{[i}^j u_{j]} - \dot{u}^i \sigma_{ij} + \omega_{j,i}^i + \sigma_{j,i}^i - \frac{2}{3} \Theta_{,j} + \frac{\Theta}{3} u_j + \frac{\Theta^2}{3} u_j, \quad (5.11)$$

$$R_{ijk}^l u_l u^j = \dot{u}_i \dot{u}_k - \omega_{ij} \omega_k^j - \left(\frac{\Theta}{3} + \frac{\Theta^2}{9} \right) h_{ki} - \sigma_{ij} \sigma_k^j - \frac{2}{3} \Theta \sigma_{ik} + h_i^l h_k^m (\dot{u}_{(l,m)} - \dot{\sigma}_{lm}), \quad (5.12)$$

$$R_{ij}^k u_i u^j = \dot{u}_{,i}^i + \omega_{ij} \omega^{ij} - \sigma_{ij} \sigma^{ij} - \dot{\Theta} - \frac{\Theta^2}{3}. \quad (5.13)$$

La última ecuación (ec. (5.13)) se conoce como la *ecuación de Raychaudhuri* (1955). Las ecuaciones anteriores (ecs. (5.11) a (5.13)) se pueden considerar como ecuaciones que gobiernan la variación temporal de u^i , σ_{ij} , y Θ .

Ahora, en el contexto de las soluciones exactas a las Ecuaciones de Campo de Einstein, es preferible interpretarlas como ecuaciones que determinan ciertas componentes del tensor de curvatura cuando determinadas propiedades de la 4-velocidad se conocen (v.gr. el campo no tiene corte ni rotación, o carece de expansión).

5.1.2 Posibles elecciones de coordenadas dependiendo de los valores de los parámetros dinámicos.

Para llevar a cabo cálculos, normalmente se adopta un sistema de coordenadas comóvil:

$$u^i \rightarrow (u^0, 0, 0, 0); \quad (5.14)$$

si tenemos que la rotación ω_{mi} vale cero, entonces la métrica se puede llevar a la forma [6, 7]:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^i) dx^\alpha dx^\beta - u_0^2 dt^2. \quad (5.15)$$

Escribiendo la derivada covariante $u_{i,j}$ explícitamente en esta métrica, y comparando con la descomposición (5.1), entonces se puede mostrar que:

(a) Para $\omega_{mi} = 0$ y $\sigma_{mi} = 0$, la parte temporal de la métrica ($g_{\alpha\beta}$) contiene al tiempo en un factor común a todos los elementos:

$$g_{\alpha\beta}(x^i) = V^2(x^\nu, t) \bar{g}_{\alpha\beta}(x^\mu). \quad (5.16)$$

(b) Cuando $\omega_{mi} = 0$ y $\Theta = 0$ el determinante de la 3-métrica $g_{\alpha\beta}$ no depende del tiempo.

(c) Si la expansión y el corte valen cero, pero no la rotación, entonces para el observador comóvil la distancia entre él y la materia cercana no cambia, por lo que estamos en el caso de una rotación rígida.

5.2 Ecuaciones de campo para fluidos perfectos con simetría esférica.

Como ya se ha mencionado, cuando se trabaja con soluciones de fluidos perfectos con simetría esférica y dependencia del tiempo (soluciones no

5.2. ECUACIONES DE CAMPO PARA FLUIDOS PERFECTOS CON SIMETRÍA ESFÉRICA 51

estáticas), lo más común es la elección de un sistema de referencia comóvil. Así, $u^i \rightarrow (e^{-\nu}0, 0, 0)$, y la métrica viene dada por:

$$ds^2 = Y^2(r, t)d\Omega^2 + e^{2\lambda(r, t)}dr^2 - e^{2\nu(r, t)}dt^2. \quad (5.17)$$

En tal sistema, las ecuaciones de Einstein toman la forma:

$$\kappa\rho = \frac{1}{Y^2} - \frac{2}{Y}e^{-2\lambda} \left(Y'' - Y'\lambda' + \frac{Y'^2}{2Y} \right) + \frac{2}{Y}e^{-2\nu} \left(\dot{Y}\dot{\lambda} + \frac{\dot{Y}^2}{2Y} \right), \quad (5.18)$$

$$\kappa p = -\frac{1}{Y^2} + \frac{2}{Y}e^{-2\lambda} \left(Y'\nu' + \frac{Y'^2}{2Y} \right) - \frac{2}{Y}e^{-2\nu} \left(\dot{Y} - \dot{Y}\dot{\nu} + \frac{\dot{Y}^2}{2Y} \right), \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \kappa p Y &= e^{-2\lambda} \left[(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda')Y + Y'' + Y'\nu' - Y'\lambda' \right] \\ &\quad - e^{-2\nu} \left[(\dot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\nu})Y + \dot{Y} - \dot{Y}\dot{\nu} + \dot{Y}\dot{\lambda} \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$0 = \dot{Y}' - \dot{Y}\nu' - Y'\dot{\lambda}. \quad (5.21)$$

Por otro lado, las ecuaciones de conservación ($T^{ij}_{;j} = 0$) dan:

$$p' = -(\rho + p)\nu', \text{ y } \dot{p} = -(\rho + p) \left(\dot{\lambda} + 2\frac{\dot{Y}}{Y} \right). \quad (5.22)$$

Se ha visto ya que la simetría esférica implica que $\omega_{ij} = 0$. Además, el campo de velocidades será ortogonal a las hipersuperficies espaciales. De esta forma en el sistema de referencia comóvil:

$$\dot{u}_i \rightarrow (0, 0, \nu', 0), \quad (5.23)$$

$$\Theta = e^{-\nu} \left(\dot{\lambda} + 2\frac{\dot{Y}}{Y} \right), \quad (5.24)$$

$$\sigma_1^1 = \sigma_2^2 = -\frac{1}{2}\sigma_3^3 = \frac{1}{3}e^{-\nu} \left(\frac{\dot{Y}}{Y} - \dot{\lambda} \right). \quad (5.25)$$

Razón: ya se ha visto que $\dot{u}_i = (\ln e^\nu)_{;a} \delta_i^a = \nu_{;a} \delta_i^a = \nu_r \delta_i^r$.

Un caso particular de importancia para nosotros es cuando el corte se anula; entonces (5.25) implica que:

$$\frac{Y'}{Y} = \dot{\lambda} \Rightarrow Y = e^{\lambda} g(r). \quad (5.26)$$

Así, por medio de un cambio de coordenadas, se puede hacer que la métrica tome la forma:

$$ds^2 = e^{2\lambda(r,t)} (r^2 d\Omega^2 + dr^2) - e^{2\nu(r,t)} dt^2, \quad (5.27)$$

es decir, se ha introducido un sistema de coordenadas comóvil e isotrópico.

Las coordenadas en (5.27) están definidas hasta una transformación del tipo: $\hat{r} = \frac{1}{r}$, $e^{2\hat{\lambda}} = e^{2\lambda} r^4$. Aún en el caso de que el corte no sea cero, todavía es posible introducir coordenadas isotrópicas, pero éstas ya no serán comóviles.

5.3 Soluciones con expansión y sin corte.

Para $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ y $\Theta \neq 0$ se sigue que (por las ecs (5.25)) $\dot{\lambda}$ debe ser distinto de cero. Entonces: $Y' - Y \nu' - Y \dot{\lambda} = 0$, con lo que $\dot{\lambda}' = \dot{\lambda} \nu'$, pues $Y = r e^{\lambda}$ de (5.19) ($\frac{Y'}{Y} = \dot{\lambda}$). Así integrando: $\nu = \ln \dot{\lambda} - f(t)$. Y la métrica toma la forma:

$$ds^2 = e^{2\lambda(r,t)} (r^2 d\Omega^2 + dr^2) - \dot{\lambda}^2 e^{-2f(t)} dt^2, \quad (5.28)$$

$$\Theta = 3e^{f(t)}. \quad (5.29)$$

Las ecuaciones de campo se pueden escribir como:

$$\kappa p = 3e^{2f} - e^{-2\lambda} \left(2\lambda'' + \lambda'^2 + 4\frac{\lambda'}{r} \right), \quad (5.30)$$

$$\kappa p \dot{\lambda} = e^{-3\lambda} \partial_t \left[e^{\lambda} \left(\lambda'^2 + 2\frac{\lambda'}{r} \right) - e^{3\lambda+2f} \right], \quad (5.31)$$

$$\kappa p \dot{\lambda} = e^{-3\lambda} \partial_t \left[e^{\lambda} \left(\lambda'' + \frac{\lambda'}{r} \right) - e^{3\lambda+2f} \right]. \quad (5.32)$$

Eliminando p de (5.31) y (5.32):

$$\partial_t \left[e^\lambda \left(\lambda'^2 + \frac{\lambda'}{r} - \lambda'' \right) \right] = 0, \quad (5.33)$$

$$\text{y así: } e^\lambda \left(\lambda'' - \lambda'^2 - \frac{\lambda'}{r} \right) = -\tilde{F}(r). \quad (5.34)$$

(Condición de isotropía)

Ahora, realicemos las siguientes definiciones: $L \equiv e^{-\lambda}$, $x \equiv r^2$, $F(x) \equiv 4r^2 \tilde{F}(r)$ con lo que la condición de isotropía se transforma en:

$$L_{,xx} = L^2 F(x). \quad (5.35)$$

Para obtener la métrica completa, se debe de suministrar $f(t)$ y $F(r^2)$, y encontrar una solución a la anterior ecuación diferencial (5.35) que contendrá en general dos soluciones arbitrarias del tiempo. Finalmente, a partir de (5.30) y (5.31) se podrán calcular p y ρ .

5.4 Una clase general de soluciones.

En 1948 Kustaanheimo y Qvist (ver [13]) propusieron la siguiente forma para F :

$$F(x) = (ax^2 + 2bx + c)^{-\frac{5}{2}}. \quad (5.36)$$

Con esta elección la ecuación (5.35) toma la siguiente forma:

$$(ax^2 + 2bx + c)^2 u_{,xx} + 2(ax + b)(ax^2 + 2bx + c) u_{,x} + (ac - b^2)u = u^2, \quad (5.37)$$

donde $u = L(ax^2 + 2bx + c)^{-\frac{1}{2}}$. La anterior ecuación se puede integrar, con lo que obtenemos:

$$\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{3}u^3 + (b^2 - ac)u^2 + A(t)}} = \int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} + B(t). \quad (5.38)$$

De esta forma, la función $u = u(x) = u(r^2)$, que en principio puede escribirse en términos de funciones elípticas suministra $e^{-\lambda} = L$ via las anteriores relaciones; una vez dada $f(t)$, obtendremos la métrica completa.

5.4.1 Universos Esféricos de Stephani.

Las soluciones particulares a estudiarse en la presente tesis serán aquellas en que $F \equiv 0$. A estas soluciones se les conoce por el nombre de *Universos Esféricos de Stephani*. Para ellas tenemos que:

$$e^{-\lambda} = L = A(t)r^2 + B(t), \quad (5.39)$$

$$\text{por lo que: } \lambda = -\ln(A(t)r^2 + B(t)), \quad (5.40)$$

$$\text{y con ello } \dot{\lambda} = -\partial_t(A(t)r^2 + B(t)) = -\frac{(\dot{A}r^2 + \dot{B})}{A(t)r^2 + B(t)}. \quad (5.41)$$

Así, tenemos que la métrica toma la forma:

$$ds^2 = \frac{1}{A(t)r^2 + B(t)} (r^2 d\Omega^2 + dr^2) - \frac{(\dot{A}r^2 + \dot{B})^2}{(A(t)r^2 + B(t))^2} e^{-2f(t)} dt^2. \quad (5.42)$$

Estas soluciones pertenecen a la familia de las soluciones conformalmente planas debido a que su tensor de Weyl es idénticamente cero:

$$W_{ijkl} \equiv 0. \quad (5.43)$$

Este hecho implica que existe un sistema de coordenadas en las que $g_{ij} = \phi(x^0, x^1, x^2, x^3)\eta_{ij}$. Esta forma particular del tensor métrico se puede obtener exigiendo que:

$$e^{2f(t)} = \frac{(\dot{A}r^2 + \dot{B})^2}{(A(t)r^2 + B(t))}. \quad (5.44)$$

La presión y la densidad se calculan usando las fórmulas (5.30) y (5.31). Así:

$$\kappa\rho = 3e^{2f(t)} + 12A(t)B(t), \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \kappa p = & \frac{1}{\dot{A}r^2 + \dot{B}} \{-8AB\dot{B} + 4\dot{A}B^2 - 3e^{2f}\dot{B} + 2e^{2f}B\dot{f} \\ & + r^2[-8AB\dot{A} + 4A^2\dot{B} - 3e^{2f}\dot{A} + 2e^{2f}\dot{f}B]\}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Por otro lado, sabemos que $\nu = \ln \lambda - f(t)$, con lo que:

$$\nu = \ln \left[-\frac{\dot{A} r^2 + \dot{B}}{Ar^2 + B} \right] - f(t). \quad (5.47)$$

Además,

$$\dot{u}_r \rightarrow (0, 0, \nu', 0), \quad (5.48)$$

donde:

$$\nu' = \frac{2r (\dot{A} B - A \dot{B})}{(\dot{A} r^2 + \dot{B})(Ar^2 + B)}. \quad (5.49)$$

Y que:

$$\sigma_{ij} = 0, \text{ por hipótesis.} \quad (5.50)$$

Finalmente encontramos que la expansión es una función sólo del tiempo:

$$\Theta = 3e^{f(t)}. \quad (5.51)$$

5.4.2 Los Universos Esféricos de Stephani como generalización de la métrica de Friedman-Robertson-Walker.

Como hemos visto en la sección anterior la métrica para los UES, viene dada por:

$$ds^2 = \frac{1}{(Ar^2 + B)^2} (r^2 d\Omega^2 + dr^2) - \left[\frac{(\ln(Ar^2 + B))_{,t}}{(\Theta/3)} \right]^2 dt^2. \quad (5.52)$$

En el próximo capítulo se planteará la posibilidad de considerar a lo UES como una generalización a la métrica de Friedman-Robertson-Walker, con escalar de curvatura no constante. De hecho, se mostrará una posible elección de coordenadas donde este hecho será todavía más patente. De momento, nos limitaremos a renombrar los parámetros de los UES, para hacer que esta métrica se asemeje a la de FRW. La métrica de Friedman-Robertson-Walker sabemos que viene dada por:

$$ds^2 = L^2 (r^2 d\Omega^2 + dr^2) - \left[\frac{(\ln L)_{,t}}{(\Theta/3)} \right]^2 dt^2, \quad (5.53)$$

donde $L = \frac{R(t)}{1 + \frac{1}{4}Kr^2}$. Pero,

$$\frac{1}{(Ar^2 + B)} = \frac{1}{B \left(1 + \frac{A}{B}r^2\right)} = \frac{(1/B)}{\left(1 + \frac{A}{B}r^2\right)}. \quad (5.54)$$

Por lo tanto se sugieren los siguientes cambios de variables:

$$R(t) = \frac{1}{B(t)}, \text{ y } \frac{1}{4}K(t) = \frac{A(t)}{B(t)}. \quad (5.55)$$

Con ello la densidad de materia-energía se escribe como:

$$\kappa\rho(t) = \frac{\Theta^2}{3} + 3\frac{K}{R^2}, \quad (5.56)$$

y además, tendremos que:

$$\frac{L_{,t}}{L} = (\ln L)_{,t} = \frac{R_{,t}}{R} \left[\frac{1 + \frac{1}{4} \left(K - K_{,t} \frac{R}{R_{,t}} \right) r^2}{1 + \frac{1}{4} Kr^2} \right]. \quad (5.57)$$

CAPÍTULO 6

Termodinámica de los Universos Esféricos de Stephani.

En el capítulo anterior se vió que el elemento de línea para los Universos Esféricos de Stephani (UES) se puede escribir en una forma que asemejaba a la métrica de Friedman-Robertson-Walker:

$$ds^2 = \frac{R^2(t)}{(1 + \frac{1}{4}Kr^2)^2} (r^2 d\Omega^2 + dr^2) - \left[\frac{1}{(\Theta/3)} \frac{R_{,t}}{R} \left[\frac{1 + \frac{1}{4} \left(K - K_{,t} \frac{R}{R_{,t}} \right) r^2}{1 + \frac{1}{4}Kr^2} \right] \right]^2 dt^2. \quad (6.1)$$

A continuación estudiaremos la Termodinámica de esta métrica, y usaremos los resultados obtenidos para construir un modelo estelar en el que la métrica en el interior de la distribución de materia sea precisamente la de los Universos de Stephani.

6.1 Libertad de elección del sistema de coordenadas.

Sabemos que en Relatividad General existe una libertad en la elección del sistema de coordenadas. Esta libertad puede ser usada con la intención

58CAPÍTULO 6. TERMODINÁMICA DE LOS UNIVERSOS ESFÉRICOS

de simplificar y hacer más evidentes ciertas partes de las ecuaciones que se están usando. En el caso de los UES consideraremos las opciones siguientes:

1) Hacer $\frac{\Theta}{3} = \frac{R_{,t}}{R}$. Con ello:

$$ds^2 = \frac{R^2}{\left(1 + \frac{1}{4}Kr^2\right)^2} \left(r^2 d\Omega^2 + dr^2\right) - \left[\frac{1 + \frac{1}{4}\left(K - K_{,t}\frac{R}{R_{,t}}\right)r^2}{1 + \frac{1}{4}Kr^2} \right]^2 dt^2. \quad (6.2)$$

Y tendremos que:

$$\frac{1}{3}\kappa\rho = \left(\frac{R_{,t}}{R}\right)^2 + \frac{K}{R^2}. \quad (6.3)$$

Notemos que si $K \rightarrow K_0 = 0, \pm 1$ obtenemos la métrica de F.R.W. De lo anterior se desprende que esta elección de coordenadas es adecuada para hacer analogías con modelos cosmológicos.

2) Otra opción para las coordenadas es hacer $R(t) = t$. Es decir, tomar a R como coordenada temporal. Así,

$$\frac{L_{,t}}{L} = \frac{1}{t} \left[\frac{1 + \frac{1}{4}(K - tK_{,t})r^2}{1 + \frac{1}{4}Kr^2} \right]. \quad (6.4)$$

Por lo que:

$$ds^2 = \frac{t^2}{\left(1 + \frac{1}{4}Kr^2\right)^2} \left(r^2 d\Omega^2 + dr^2\right) - \frac{1}{t^2} \left[\frac{1}{\Theta/3} \left(\frac{1 + \frac{1}{4}(K - tK_{,t})r^2}{1 + \frac{1}{4}Kr^2} \right) \right]^2 dt^2, \quad (6.5)$$

quedando la métrica sólo en términos de Θ y K . Además:

$$\frac{1}{3}\kappa\rho = \frac{\Theta^2}{9} + \frac{K}{t^2}. \quad (6.6)$$

Esta elección de coordenadas será la que en lo sucesivo se adopte para el presente trabajo. Así, $R(t) = t$.

3) Otra posibilidad poco explorada es la de tomar a la densidad como coordenada temporal ($\rho = t$). Esta alternativa no se usará en el presente trabajo, pues de hecho ya se tiene que $\rho = \rho(t)$.

4) También se puede parametrizar en términos del tiempo propio para un conjunto de observadores etiquetados por $r = r_1$, constante pero arbitraria. Nótese que la elección (1) da el tiempo propio (τ) para un observador con $r = 0$. También es posible definir t tal que coincida con el tiempo propio para el caso en que $r \neq 0$. Esto es más complicado (en términos de los cálculos matemáticos involucrados), y no se hará en este trabajo.

6.2 Empalme de los Universos Esféricos de Stephani con la métrica de Schwarzschild.

Comenzaremos ahora la construcción de un modelo estelar basado en los UES. Al querer construir un modelo estelar, restringiremos la validez de la métrica de los UES a una región del espacio con simetría esférica. Fuera de ella tendremos un vacío clásico, en el que por el Teorema de Birkhoff la geometría será descrita por la métrica de Schwarzschild. Así pues, deberemos empalmar las dos métricas anteriormente mencionadas sobre una superficie Σ que a partir de ahora consideraremos como la frontera de nuestro sistema. Para hacer lo anterior echaremos mano de las condiciones de empalme de estudiadas en el capítulo 4.

Así pues, en el interior (región I) tendremos la métrica dada por (6.5), mientras que en el exterior (región II) tendremos la métrica de Schwarzschild (ec.4.28):

$$ds^2 = -(1 - 2M/Y)dT^2 + Y^2 d\Omega^2 + (1 - 2M/Y)^{-1} dY^2. \quad (6.7)$$

Esta métrica usa coordenadas estáticas, por lo que debe de ser transformada a las coordenadas comóviles. Consideremos así, la transformación:

$$T = \psi(r, t), \quad Y = \eta(r, t), \quad \theta = \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad (6.8)$$

que lleva a la solución de Schwarzschild a coordenadas comóviles (el que esta solución es la adecuada está garantizado por las condiciones de empalme (ec. (4.34)). Así, la métrica de Schwarzschild en coordenadas comóviles viene dada por:

$$ds^2 = \left[e^{-\alpha} \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2 - e^{-\alpha} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 \right] dr^2 + \eta^2(t, r) d\Omega^2$$

60CAPÍTULO 6. TERMODINÁMICA DE LOS UNIVERSOS ESFÉRICOS

$$\begin{aligned}
 & +2 \left[e^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial t} - e^{-\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] dr dt \\
 & - \left[e^\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - e^{-\alpha} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right] dt^2,
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

donde $e^\alpha = 1 - 2M/R$. Por lo tanto podemos poner la solución exterior en la forma:

$$ds^2 = X dt^2 + 2W dr dt + Z dr^2 + \eta^2 d\Omega^2, \tag{6.10}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 X(t, r) &= - \left[e^\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - e^{-\alpha} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right], \\
 W(t, r) &= \left[e^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial t} - e^{-\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right], \\
 Z(t, r) &= \left[e^{-\alpha} \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2 - e^{-\alpha} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Como queremos construir un modelo estelar con simetría esférica, entonces la superficie de empalme vendrá descrita por $x^4 = r = r_0$. Los vectores normales a la superficie vienen dados por:

$$\vec{n}^{(t)} = (0, \frac{t}{1 + \frac{1}{4}Kr^2}, 0, 0), \quad \vec{n}^{(r)} = (0, \sqrt{Z}, 0, 0). \tag{6.12}$$

Mientras que las componentes no nulas de los tensores de curvatura extrínseca son:

$$\begin{aligned}
 K_{tt}^{(t)} &= \frac{1 + \frac{1}{4}Kr^2}{2t} \left(\frac{1}{t^2} \left[\frac{1}{\Theta/3} \left(\frac{1 + \frac{1}{4}(K - tK_{,t})r^2}{1 + \frac{1}{4}Kr^2} \right) \right]^2 \right)_{,r}, \\
 K_{\theta\theta}^{(t)} &= -\frac{1 + \frac{1}{4}Kr^2}{2t} \left(\frac{r^2 t^2}{(1 + \frac{1}{4}Kr^2)^2} \right)_{,r}, \\
 K_{\varphi\varphi}^{(t)} &= \text{sen}^2 \theta K_{\theta\theta}^{(t)},
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.2. EMPALME DE LOS UNIVERSOS ESFÉRICOS DE STEPHANI

$$\begin{aligned} K_{tt}^{(II)} &= \frac{1}{2\sqrt{Z}} X_{,r}, \\ K_{\theta\theta}^{(II)} &= \left[-\frac{1}{2\sqrt{Z}} (\eta)_{,r} \right], \\ K_{\varphi\varphi}^{(II)} &= \text{sen}^2\theta K_{\theta\theta}^{(II)}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Así, la condición de continuidad en la métrica restringida a la superficie $([g_{\alpha\beta}]_{\Sigma} = 0)$ viene dada por:

$$X(t, r_0) = \frac{1}{t^2} \left[\frac{1}{\Theta/3} \left(\frac{1 + \frac{1}{4}(K - tK_{,t})r_0^2}{1 + \frac{1}{4}Kr_0^2} \right) \right]^2, \quad (6.15)$$

$$W(t, r_0) = 0, \quad (6.16)$$

$$\eta^2(t, r_0) = \frac{r_0^2 t^2}{(1 + \frac{1}{4}Kr_0^2)^2}, \quad (6.17)$$

$$Z(t, r_0) = \frac{r_0^2 t^2}{(1 + \frac{1}{4}Kr_0^2)^2}. \quad (6.18)$$

Mientras que la condición de continuidad del tensor de curvatura extrínseca $([K_{\alpha\beta}]_{\Sigma} = 0)$ establece que:

$$\frac{1 + \frac{1}{4}Kr^2}{2t} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{t^2} \left[\frac{1}{\Theta/3} \left(\frac{1 + \frac{1}{4}(K - tK_{,t})r^2}{1 + \frac{1}{4}Kr^2} \right) \right]^2 \right)_{r=r_0} = \left[\frac{1}{2\sqrt{Z}} X_{,r} \right]_{r=r_0}, \quad (6.19)$$

$$-\frac{1 + \frac{1}{4}Kr^2}{2t} \left(\frac{r^2 t^2}{(1 + \frac{1}{4}Kr^2)^2} \right)_{,r} = \left[-\frac{1}{2\sqrt{Z}} (\eta)_{,r} \right]_{r=r_0}. \quad (6.20)$$

Al resolver las ecuaciones anteriores se obtienen expresiones para $\eta(r_0, t)$, $(\Theta/3)^2$, $\partial\psi(r_0, t)/\partial t$, y $\partial\psi(r_0, t)/\partial r$. En particular tenemos que:

$$\eta(r_0, t) = \frac{r_0 t}{(1 + \frac{1}{4}Kr_0^2)}, \quad (6.21)$$

$$\text{y } (\Theta/3)^2 = \frac{C_1 t^2 - \eta^3(r_0, t)K(t)}{\eta^3(r_0, t)t^2}. \quad (6.22)$$

Así, substituyendo en la ec. (6.7) que relaciona a la expansión y a la densidad, obtenemos que:

$$\frac{1}{3}\kappa\rho = C_1 \frac{\left(1 + \frac{1}{4}K(t)r_0^2\right)^3}{t^3 r_0^3}. \quad (6.23)$$

Aquí hay una hecho que vale la pena resaltar. Como hemos visto en el capítulo 4, la coordenada radial de Schwarzschild es igual a η ($Y = \eta(r, t)$); así pues $\eta(r_0, t)$ describe la evolución de la frontera del sistema. Además, para la métrica de Schwarzschild, el volumen en el interior de la frontera viene dada por:

$$\frac{4}{3}\pi Y^3 = \frac{r_0^3 t^3}{\left(1 + \frac{1}{4}K r_0^2\right)^3}; \quad (6.24)$$

por otra parte, ya se ha visto que el sistema tiene una densidad homogénea ($\rho = \rho(t)$), por lo que resulta natural pensar que la densidad del sistema es inversamente proporcional al volumen del sistema:

$$\rho \propto \frac{1}{\eta(r_0, t)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{4}K r_0^2\right)^3}{r_0^3 t^3}. \quad (6.25)$$

6.2.1 Cálculo de la presión en el interior de la distribución de materia.

Para el cálculo de la presión en el interior de la distribución de materia, recurriremos a la identidad de Bianchi contraída para el tensor energíamomento:

$$u_i T^{ij};_j = 0. \quad (6.26)$$

Desarrollando esta expresión obtenemos:

$$u^i \rho_{;i} + (\rho + p)u^i{}_{;i} = 0. \quad (6.27)$$

En el caso que nos ocupa,

$$u^i \rho_{;i} = \left(\sqrt{-g^{tt}}\delta_i^i\right) \rho_{;i} = \frac{(\Theta/3)}{(L_{;t}/L)} \rho_{;i}; \quad (6.28)$$

así, podemos resolver para p y obtener la siguiente relación:

$$p = -\rho - \frac{\rho_{,t}}{3(L_{,t}/L)}. \quad (6.29)$$

Si substituímos la forma para $L_{,t}/L$ tendremos que:

$$p = -\rho - \frac{\rho_{,t}R}{3R_{,t}} \frac{1 + \frac{1}{4}Kr^2}{1 + \frac{1}{4}(K - K_{,t}t)r^2}; \quad (6.30)$$

y al substituir la forma obtenida para ρ obtenemos:

$$p = C_2 \frac{\left(1 + \frac{1}{4}Kr_0^2\right)^2 K_{,t} (r^2 - r_0^2)}{t^2 \left(1 + \frac{1}{4}r^2(K - tK_{,t})\right)}. \quad (6.31)$$

Evaluando en $r = r_0$ obtendremos que $p|_{r=r_0} = 0$. Esto es, las condiciones de empalme obligan a que la presión en la frontera de la distribución de materia (superficie de empalme Σ) valga cero.

Esta última expresión para p resulta interesante pues establece restricciones a los posibles valores de K . Concentrémonos en el caso de interés obvio (interior del sistema esférico) $r \leq r_0$. Entonces $K_{,t}$ debe tener signo contrario al de $\left(1 + \frac{1}{4}r^2(K - tK_{,t})\right)$ con la idea de que $p > 0$. Otra manera de abordar las restricciones sería pidiendo que $p_{,r} < 0$ y $p(r=0) > 0$ [3].

Definamos la presión central:

$$p_c = p(t, 0) = -C_2 r_0^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{4}Kr_0^2\right)^2}{t^2} K_{,t}, \quad (6.32)$$

así, tenemos que:

$$p = \frac{p_c \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}r^2(K - tK_{,t})\right)}. \quad (6.33)$$

6.3 Determinación completa de la métrica.

Sabemos que:

$$p = -\rho - \frac{1}{3}t\rho_{,t} \frac{1 + \frac{1}{4}Kr^2}{1 + \frac{1}{4}r^2(K - tK_{,t})}. \quad (6.34)$$

64CAPÍTULO 6. TERMODINÁMICA DE LOS UNIVERSOS ESFÉRICOS

Evaluando en $r = 0$ obtenemos $p_c = -\rho - \frac{1}{3}t\rho_{,t}$, debido a que como hemos visto, ρ no depende de r . Reescribiéndola adecuadamente, obtenemos la útil fórmula $-\frac{1}{3}t\rho_{,t} = p_c + \rho$. Integrando, y llamando a la constante de integración α_c :

$$\frac{1}{3} \int \frac{\rho_{,t}}{p_c + \rho} dt = - \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln \frac{t}{\alpha_c} = - \int \frac{d\rho}{p_c + \rho}. \quad (6.35)$$

Obteniendo común denominador en nuestra expresión para la presión:

$$p = \frac{\overbrace{\left(1 + \frac{1}{4}Kr^2\right)}^{p_c} \left(-\rho - \frac{1}{3}t\rho_{,t}\right) + \frac{1}{4}\rho tr^2 K_{,t}}{1 + \frac{1}{4}r^2 (K - tK_{,t})}, \quad (6.36)$$

entonces:

$$p = \frac{\left(1 + \frac{1}{4}Kr^2\right) p_c + \frac{1}{4}\rho tr^2 K_{,t}}{1 + \frac{1}{4}r^2 (K - tK_{,t})}. \quad (6.37)$$

Ahora introduciremos la condición en $r = r_0$: $p(t, r_0) = 0$. Es decir,

$$p(t, r_0) = \frac{\left(1 + \frac{1}{4}Kr_0^2\right) p_c + \frac{1}{4}\rho tr_0^2 K_{,t}}{1 + \frac{1}{4}r_0^2 (K - tK_{,t})} = 0. \quad (6.38)$$

De aquí podemos resolver para $K_{,t}$:

$$\frac{p_c}{\rho} = - \frac{\frac{1}{4}tr_0^2 K_{,t}}{1 + \frac{1}{4}Kr_0^2}. \quad (6.39)$$

Como $t\rho_{,t} = -3(\rho + p_c)$, entonces usando la regla de la cadena:

$$tK_{,t} = tK_{,r} \rho_{,t} = -3(\rho + p_c)K_{,r}, \quad (6.40)$$

y al substituir en la ecuación (6.32):

$$\frac{p_c}{\rho} + \frac{\frac{1}{4}r_0^2 [-3(\rho + p_c)K_{,r}]}{1 + \frac{1}{4}Kr_0^2} = 0. \quad (6.41)$$

Integrando:

$$\int \frac{p_c}{\rho(p_c + \rho)} d\rho - \frac{3}{4}r_0^2 \int \frac{K_{,r}}{1 + \frac{1}{4}Kr_0^2} d\rho = 0, \quad (6.42)$$

por lo que:

$$-\frac{1}{3} \int \frac{p_c}{\rho(p_c + \rho)} d\rho + \ln \left(1 + \frac{1}{4} K r_0^2 \right) = \ln \alpha_0. \quad (6.43)$$

Ahora, usando fracciones parciales:

$$\int \frac{p_c}{\rho(p_c + \rho)} d\rho = - \int \frac{d\rho}{p_c + \rho} + \int \frac{d\rho}{\rho} = - \int \frac{d\rho}{p_c + \rho} + \ln \rho, \quad (6.44)$$

y así al integrar:

$$\ln \frac{1}{\alpha_0} \left(1 + \frac{1}{4} K r_0^2 \right) = \frac{1}{3} \ln \rho - \frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{p_c + \rho}. \quad (6.45)$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{\alpha_0} \left(1 + \frac{1}{4} K r_0^2 \right) = \rho^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{p_c + \rho}}. \quad (6.46)$$

Así, resulta natural definir:

$$G_c \equiv e^{\frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{p_c + \rho}}. \quad (6.47)$$

Con estas definiciones la ecuación (6.46) se transforma en:

$$\frac{1}{\alpha_0} \left(1 + \frac{1}{4} K r_0^2 \right) = \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{G_c}. \quad (6.48)$$

Despejando K de ella obtenemos:

$$K = \frac{4}{r_0^2} \left[\alpha_0 \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{G_c} - 1 \right], \text{ y } K_{,p} = \frac{4\alpha_0}{3r_0^2} \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{G_c} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{p_c + \rho} \right]. \quad (6.49)$$

Así, substituyendo los resultados en la ecuación (6.33):

$$p = p_c \frac{\rho G_c \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)}{\rho G_c \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + \frac{r^2}{r_0^2} (p_c + \rho) \alpha_0 \rho^{\frac{1}{3}}}. \quad (6.50)$$

Por consideraciones físicas bien comprensibles descaremos que p sea no negativa, siendo condiciones suficientes en $r = 0$ el que [3, 4]:

$$\rho > 0, \alpha_0 \geq 0, \quad (6.51)$$

$$\text{y } p_c + \rho > 0. \quad (6.52)$$

Pues si examinamos el gradiente de presiones:

$$p_{,r} = -p_c \frac{2\rho^{\frac{4}{3}} G_c (p_c + \rho) \alpha_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)}{\left(\rho G_c \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + \frac{r^2}{r_0^2} (p_c + \rho) \alpha_0 \rho^{\frac{1}{3}}\right)^2}, \quad (6.53)$$

vemos que si $p_c + \rho > 0$, $\rho > 0$, y $\alpha_0 \geq 0$ entonces el gradiente de presiones es negativo, y por las condiciones en $r = 0$ se cumple necesariamente que $0 \leq p \leq p_c$ para $0 \leq r \leq r_0$.

6.3.1 Cálculo del número de partículas.

Comencemos con la ecuación de conservación $(nu^i)_{;i} = 0$. Entonces:

$$\sqrt{-g^t} n_{,t} + n\Theta = 0, \text{ donde } \Theta = u^i_{;i}. \quad (6.54)$$

Pero,

$$\sqrt{-g^t} = \frac{\Theta/3}{L_{,t}/L}, \text{ con lo que } n_{,t} \frac{1}{L_{,t}/L} + 3n = 0. \quad (6.55)$$

Integrando obtenemos:

$$-\frac{1}{3} \int \frac{n_{,t}}{n} dt = \int \frac{L_{,t}}{L} dt. \quad (6.56)$$

Por lo tanto: $-\frac{1}{3} \ln(n) = \ln(L) + \ln(F(r))$, donde $F(r)$ es una función sólo de r . Así, $n = \left(\frac{1}{LF}\right)^3$, pero $L = \frac{t}{1 + \frac{1}{4}Kr^2}$; y si definimos $N(r) \equiv \frac{1}{F^3}$, obtenemos que:

$$n = \frac{N(r)}{t^3} \left(1 + \frac{1}{4}Kr^2\right)^3; \quad (6.57)$$

y substituyendo la expresión para $K(\rho)$ resulta:

$$n(\rho, r) = N(r) \left[\frac{G_c}{\alpha_c} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha_0}{\alpha_c} \rho^{\frac{1}{3}} \frac{r^2}{r_0^2} \right]^3. \quad (6.58)$$

Esto conduce directamente a la siguiente forma de la energía interna :

$$U = N(r) \bar{U} = \frac{\rho t^3}{(1 + Kr^2)^3} - N(r) m_0, \quad (6.59)$$

o de otra forma:

$$U(\rho, r) = \frac{\rho}{\left[\frac{G_c}{\alpha_c} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha_0}{\alpha_c} \rho^{\frac{1}{3}} \frac{r^2}{r_0^2} \right]^3} - N(r) m_0, \quad (6.60)$$

donde m_0 es la masa en reposo de cada una de las partículas que componen al fluido. Esta última expresión da a entender que dada una distribución de materia arbitraria $N(r)$, la energía interna se encarga de balancear a la masa en reposo de forma que la ρ quede siempre independiente del tiempo. Esto parece ser un hecho artificioso de la clase de soluciones estudiadas pues da a entender que a priori es posible introducir en nuestro cuerpo masivo cualquier distribución de materia, siempre y cuando preservemos la simetría esférica.

6.3.2 Cálculo de la temperatura.

En este punto, surge naturalmente la idea de calcular la temperatura para distintos puntos del sistema. Para ello, recurrimos a la relación de Gibbs-Duhem:

$$T dS = d \left(\frac{\rho}{n} \right) + p d \left(\frac{1}{n} \right), \text{ pero } dS = S_{,t} dt + S_{,r} dr, \quad (6.61)$$

$$\text{así que } TS_{,t} = \left(\frac{\rho}{n} \right)_{,t} + p \left(\frac{1}{n} \right)_{,t} = \frac{\rho_{,t}}{n} + (p + \rho) \frac{3L_{,t}}{nL} \quad (6.62)$$

$$= \frac{1}{n} \left[\rho_{,t} + (p + \rho) \frac{3L_{,t}}{L} \right] = 0. \quad (6.63)$$

De esta forma:

$$S_{,t} = 0 \Leftrightarrow \dot{S} = 0. \quad (6.64)$$

68CAPÍTULO 6. TERMODINÁMICA DE LOS UNIVERSOS ESFÉRICOS

Pero además, $\rho_{,r} = 0$, con lo que:

$$TS_{,r} = (p + \rho) \left(\frac{1}{n} \right)_{,r}. \quad (6.65)$$

Por lo tanto:

$$T = (p + \rho) \frac{1}{S_{,r}} \left[\frac{t^3}{N \left(1 + \frac{1}{4} Kr^2 \right)^3} \right]_{,r}, \quad (6.66)$$

o de otra manera:

$$T = \frac{t^3 (p + \rho)}{\left(1 + \frac{1}{4} Kr^2 \right)^4} \frac{N_{,r} \left(1 + \frac{1}{4} Kr^2 \right) + \frac{3}{2} rKN}{(-N^2 S_{,r})}. \quad (6.67)$$

Para obtener una temperatura consistente ($T > 0$) se impondrá la condición $N_{,r} < 0$. Así, en principio sólo faltará suministrar una relación termodinámica entre las variables N, S . Según lo visto anteriormente resulta que:

$$n^{-\frac{4}{3}} = \frac{t^4}{N^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{1}{4} Kr^2 \right)^4}. \quad (6.68)$$

Así, usaremos esta y otras relaciones con la idea de substituir las variables geométricas por las termodinámicas. Con ellas obtenemos:

$$T = \frac{p + \rho}{n^{\frac{4}{3}}} \left[\frac{-N_{,r} n^{\frac{1}{3}}}{NS_{,r}} - \frac{3}{2} \frac{N^{\frac{1}{3}} r}{S_{,r} t} \right], \quad (6.69)$$

donde t viene dada por $t = \alpha_c e^{-\frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\rho + p_c}}$.

Ahora, si substituímos la expresión calculada para $n(\rho, r)$ obtenemos:

$$T(\rho, r) = \frac{(\rho + p_c) \left[\rho^{\frac{1}{3}} \frac{\alpha_0}{\alpha_c} X(r) - \frac{G_c}{\alpha_c} Y(r) \right]}{\left[\rho^{\frac{2}{3}} \frac{G_c}{\alpha_c} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha_0}{\alpha_c} (\rho + p) \frac{r^2}{r_0^2} \right] \left[\frac{G_c}{\alpha_c} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + \frac{\alpha_0}{\alpha_c} \rho^{\frac{1}{3}} \frac{r^2}{r_0^2} \right]^3}, \quad (6.70)$$

$$X(r) \equiv \frac{6rN + r^2 N_{,r}}{-r_0^3 S_{,r} N^2}, \quad (6.71)$$

$$Y(r) \equiv \frac{6rN - (r_0^2 - r^2) N_{,r}}{-r_0^3 S_{,r} N^2}. \quad (6.72)$$

Evaluando en la frontera y en el centro del sistema ($r = r_0$ y $r = 0$) tenemos las siguientes expresiones para las temperaturas:

$$T_c(\rho) = \frac{\alpha_c^3(\rho + p_c)}{G_c^3} \left[\rho^{\frac{1}{3}} \frac{\alpha_0}{G_c} X_c - Y_c \right], \quad (6.73)$$

$$T_0(\rho) = \frac{\alpha_c^3}{\alpha_0^3} \left[X_0 - \frac{G_c Y_0}{\alpha_0 \rho^{\frac{1}{3}}} \right]. \quad (6.74)$$

Ahora, como $p_{,s} = 0$ en $r = 0$ y $r = r_0$ entonces por la condición de integrabilidad analizada en el capítulo 3 ($\frac{T_{,\rho}}{T} - \frac{1}{\rho + p} \left[p_{,\rho} + \frac{p_{,s}}{nT} \right] = 0$, ec. (3.15)), tenemos al substituir T_c que:

$$X_c = X(0) = 0, \quad (6.75)$$

por lo que necesariamente $Y_c < 0$ para que tengamos una temperatura positiva. Análogamente, en el caso de T_0 tenemos que la condición integrabilidad implica:

$$Y_0 = Y(r_0) = 0, \quad (6.76)$$

por lo que $X_0 = 0$ para que la temperatura en la frontera del sistema sea cero. Esto es deseable porque en el exterior tendremos un vacío clásico (no hay fluctuaciones de energía, ni formación de partículas virtuales, etc.). Al hacer $T_0(\rho) \equiv 0$ garantizamos el empalme suave de esta variable termodinámica, de forma semejante a como se hizo para la presión.

6.3.3 Evolución cinemática del fluido.

La evolución dinámica del fluido, como sabemos viene descrita por su expansión:

$$\frac{1}{3} \kappa \rho = \left(\frac{\Theta}{3} \right)^2 + \frac{K}{t^2}, \quad (6.77)$$

70CAPÍTULO 6. TERMODINÁMICA DE LOS UNIVERSOS ESFÉRICOS

que a la luz de los resultados anteriores viene dada en términos de ρ por:

$$\left(\frac{\Theta(\rho)}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}\kappa\rho - \left(\frac{G_c}{\alpha_0}\right)^2 \frac{4}{r_0^2} \left[\alpha_0 \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{G_c} - 1\right]. \quad (6.78)$$

Cuando $\Theta = 0$, tendremos cambios en el sentido de la oscilación de las esferas de materia. Ahora, recordemos que si $\Theta = 0$ tendremos una singularidad en nuestras coordenadas, por lo que en realidad sólo podremos describir las distintas "ramas" del movimiento del fluido. Los puntos donde $\Theta \neq 0$ serán las distintas ramas de la evolución del fluido donde se podrá utilizar el sistema de coordenadas en cuestión, pues claramente cuando $\Theta = 0$ la métrica es singular. Sea t' tal que $\Theta(t') = 0$, entonces:

$$\frac{1}{3}\kappa\rho(t') = \frac{K}{t'^2}, \text{ o } K = \kappa \frac{1}{3}\rho(t')t'^2, \quad (6.79)$$

$$\text{por lo que } K_{,t'} = \frac{1}{3}\kappa\rho_{,t}(t')t'^2 + \frac{2}{3}\kappa\rho(t')t'. \quad (6.80)$$

Evaluando en la presión:

$$p(r, t') = -\rho - t\rho_{,t} \frac{1 + \frac{1}{12}r^2t'^2\rho(t')}{1 - \frac{r^2t'^2}{12}(\rho(t') + t\rho_{,t}(t'))}; \quad (6.81)$$

así, habrá una singularidad física cuando $\Theta = 0$ si:

$$1 = \frac{r^2t'^2}{12}(\rho(t') + t\rho_{,t}(t')). \quad (6.82)$$

Ahora, recordemos que $t\rho_{,t} = -3(\rho + p_c)$; entonces:

$$1 = \frac{r^2t'^2}{12}(-2\rho - 3p_c), \quad (6.83)$$

pero por las condiciones de energía: $\rho > 0$ y $p_c > 0$, por lo que el lado derecho de la última ecuación es siempre negativo. En consecuencia, no hay singularidades físicas cuando $\Theta = 0$.

Ahora, hablamos de singularidades físicas en nuestro sistema cuando ρ y/o $p \rightarrow \infty$. En nuestro caso tenemos que ρ diverge si $\Theta \rightarrow \infty$. También, dependiendo de la forma de K es probable que haya otra singularidad ($\rho \rightarrow \infty$, y $\Theta \rightarrow \infty$) cuando $t \rightarrow 0$. Por otra parte p divergirá si ρ lo hace; también

6.3. DETERMINACIÓN COMPLETA DE LA MÉTRICA.

71

existe la posibilidad de que $p \rightarrow \infty$ para ρ finito cuando $1 + \frac{1}{4}(K - tK_{,t})r^2 = 0$. Para mayores detalles referirse a [4].

CAPÍTULO 7

Aplicación al caso particular de la ecuación de estado:

$$p_c = (\gamma - 1) \rho .$$

7.1 Ecuación de estado adiabática.

Como sabemos, un gas clásico que se encuentra sujeto a una expansión adiabática satisface una relación de la forma:

$$pv^{-\gamma} = cte, \quad (7.1)$$

donde v es el volumen ocupado por el gas, y γ es el llamado índice adiabático.

Por lo analizado en el capítulo anterior, y en particular por la forma de la presión y la densidad de número de partículas, una ecuación de estado de esta forma para todo nuestro cuerpo masivo es incompatible con las soluciones a las ecuaciones de Einstein estudiadas. A pesar de ello, todavía es posible imponer tal ecuación de estado en los centros de las esferas. Así pues tendremos que:

$$p_c \propto \left(\frac{n_c}{N_c} \right)^\gamma, \quad (7.2)$$

donde $\left(\frac{N_c}{n_c} \right) (N_c = N(r_0), \text{ y } n_c = n(r_0))$ viene a jugar el papel del análogo relativista del volumen. Ahora, por lo visto en el capítulo anterior (cap. 6), tenemos que:

74CAPÍTULO 7. APLICACIÓN AL CASO PARTICULAR

$$\frac{n_c}{N_c} = \frac{1}{t^3}; \quad (7.3)$$

pero como $t = \alpha_c e^{-\frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\rho + p_c}} = \frac{\alpha_c}{G_c}$ entonces:

$$\frac{n_c}{N_c} = \left(\frac{G_c}{\alpha_c}\right)^3; \quad (7.4)$$

así, $p_c = (\gamma - 1)\rho$. El índice γ debe de cumplir la restricción $1 \leq \gamma \leq 2$ para que las condiciones de energía discutidas en el capítulo anterior sean válidas. Dos casos particulares de gran interés físico son el de radiación (o materia ultrarrelativista, $\gamma = \frac{4}{3}$) y el de gas monoatómico ideal ($\gamma = \frac{5}{3}$).

7.2 Discusión de la ecuación de estado adiabática.

Substituyendo las ecuaciones de estado locales $p_c = (\gamma - 1)\rho$ y $p_0 = 0$, en las expresiones obtenidas en el capítulo 6 resulta que:

$$G_c = \rho^{\frac{1}{3\gamma}}, \quad (7.5)$$

$$p = \frac{(\gamma - 1)\rho \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)}{\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + \frac{r^2}{r_0^2} \gamma \alpha_0 \rho^{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)}}, \quad (7.6)$$

$$n = \frac{N(r)}{\alpha_c^3} \rho^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} \left[\alpha_0 \rho^{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)} - 1\right]\right)^3, \quad (7.7)$$

$$U(\rho, r) = \frac{\alpha_c^3 \rho^{1 - \frac{1}{\gamma}}}{\left[1 + \left(\alpha_0 \rho^{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)} - 1\right) \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^3} - Nm_0, \quad (7.8)$$

$$\left(\frac{\Theta(\rho)}{3}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{\rho^{2/3\gamma}}{\alpha_c^2 r_0^2} \left[\alpha_0 \rho^{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)} - 1\right]. \quad (7.9)$$

Y en el caso de la temperatura obtenemos:

$$T = \left[\frac{N'}{N(-S')} \right] \frac{\rho + p}{n} + \left[\frac{3}{2} \frac{N^{\frac{1}{3}} r}{(-S')} \right] \frac{(\rho + p) K(\rho) \rho^{\frac{1}{3\gamma}}}{\alpha_c n^{\frac{4}{3}}}, \quad (7.10)$$

donde $K(\rho) = \frac{4}{r_0^2} \alpha_0 \left(\rho^{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)} - 1 \right)$. O de otra forma:

$$T(\rho, r) = \gamma \alpha_c^3 \rho^{1 - \frac{1}{\gamma}} \frac{\alpha_0 \rho^{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)} X - Y}{\left[1 + \left(\gamma \alpha_0 \rho^{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)} - 1 \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\alpha_0 \rho^{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)} - 1 \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^3}. \quad (7.11)$$

Como se observa, en el caso de que $r \neq 0, r_0$ las ecuaciones no coinciden con las correspondientes al caso adiabático.

7.2.1 Termodinámica de los UES en el caso en que $p_c = (\gamma - 1) \rho$.

La termodinámica impone restricciones sobre las relaciones entre las distintas variables termodinámicas en el centro de la estrella. Evaluando la temperatura en el centro de la estrella obtenemos la siguiente expresión:

$$T_c = \left[\frac{N'}{N(-S')} \right]_c \frac{\gamma \rho}{n_c} + \left[\frac{3}{2} \frac{N^{\frac{1}{3}} r}{(-S')} \right]_c \frac{\gamma^{1 + \frac{1}{3\gamma}} K(\rho)}{\alpha_c n_c^{\frac{4}{3}}}, \quad (7.12)$$

con $n_c = \frac{N_c}{\alpha_c^3} \rho^{\frac{1}{\gamma}}$. De anteriores argumentos termodinámicos (véase el capítulo 3) sabemos que:

$$S_u = \left[\left(\frac{\rho}{n} \right) u + p \left(\frac{1}{n} \right) u \right] \frac{1}{T} = 0, \quad (7.13)$$

$$y S' = S_r \left[\left(\frac{\rho}{n} \right)' + p \left(\frac{1}{n} \right)' \right] \frac{1}{T}. \quad (7.14)$$

Así, por continuidad:

$$S_{,r,t} = S_{,t,r}, \quad (7.15)$$

$$\text{por lo que: } -\frac{T_{,r}}{T^2}(S_{,t}T) + \frac{1}{T}p_{,r}\left(\frac{1}{n}\right)_{,t} + \frac{T_{,t}}{T^2}(S_{,r}T) - \frac{1}{T}p_{,t}\left(\frac{1}{n}\right)_{,r} = 0. \quad (7.16)$$

Pero,

$$S_{,t} = 0, \text{ y } \left(\frac{\rho}{n}\right)_{,t} = -p\left(\frac{1}{n}\right)_{,t};$$

agrupando obtenemos:

$$\frac{p_{,r}}{T}\left(\frac{1}{n}\right)_{,t} + \left(\frac{1}{n}\right)_{,r}\left[\frac{(\rho+p)}{T^2}T_{,t} - \frac{p_{,t}}{T}\right] = 0. \quad (7.17)$$

Si consideramos el caso de una ecuación de estado barotrópica entonces:

$$\frac{-p_{,r}\rho_{,t}}{\rho+p} + \frac{T_{,t}}{T} = 0, \quad (7.18)$$

$$\text{y así, } \ln\left(T\rho^{-(1-\frac{1}{\gamma})}\right) = \text{cte.} \quad (7.19)$$

Por lo que en particular:

$$T_c \sim \rho^{1-\frac{1}{\gamma}}. \quad (7.20)$$

Comparando con nuestra anterior expresión para T_c tenemos la siguiente relación entre variables termodinámicas:

$$\left[\frac{3}{2}\frac{N^{\frac{1}{3}}r}{(-S')}\right]_c = 0 \quad (7.21)$$

7.3 Expresiones para N y S.

Hasta el momento, tanto N como S han permanecido sin determinar. Hemos visto con anterioridad que ambas funciones deben satisfacer las ecuaciones (6.70) y (6.71) (condiciones de frontera), además de cumplir $(N_{,r})_c = 0$ y $(S_{,r})_c = 0$ (isotropía). Una forma particular para ambas funciones es la siguiente [3]:

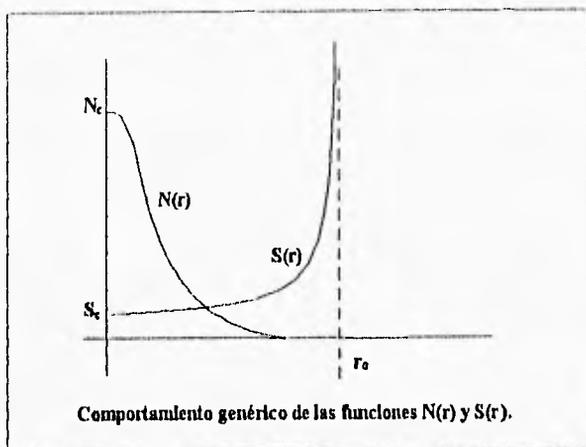


Figura 7.1:

$$N(r) = N_c \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^q \right]^b, \quad (7.22)$$

$$S(r) = \frac{S_c}{\left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^q \right]^{b+1}}, \quad (7.23)$$

donde $1 < q < 2$ (véase la figura (7.1)). Así pues esta elección garantiza que $T_0 = 0$ para cualquier densidad.

Además de satisfacer las condiciones de frontera impuestas, la simetría esférica del sistema obliga a que no exista gradiente de temperatura en el centro de simetría. La existencia de un gradiente de T en el centro de simetría daría lugar a la existencia de direcciones privilegiadas, lo cual contravendría a la isotropía que esperada.

Las anteriores formas de $S(r)$ y de $N(r)$ tienen el problema de no garantizar la isotropía del gradiente de la temperatura en el centro de simetría, esto es, $T_{,r}|_{r=0} \neq 0$. Aparentemente, la imposibilidad de hallar funciones

$S(r)$ y $N(r)$ que garanticen lo anterior y además las condiciones de frontera impuestas es una característica del tipo de soluciones estudiadas.

7.4 Tiempo propio de los centros de simetría.

Como sabemos, el tiempo coordenado en Relatividad General carece de un verdadero significado físico, y resulta ser, como su nombre lo indica una mera etiqueta. Para una determinada línea de universo, la cantidad relevante resulta ser el tiempo propio. El tiempo propio de un sistema es la métrica evaluada sobre su línea de universo. Ya hemos visto que en el tipo de sistemas con los que hemos trabajado, los puntos cuya caracterización resulta ser más sencilla son aquellos que conforman los centros de simetría. Así, para ellos tendremos que:

$$d\Omega^2 = dr^2 = 0, \text{ y } r = 0. \quad (7.24)$$

Por lo tanto, tendremos que:

$$d\tau^2 = -\frac{c^2}{t^2 (\Theta/3)^2} dt^2. \quad (7.25)$$

Como $t = \alpha_c \rho^{-\frac{1}{3\gamma}}$ entonces podemos hacer un cambio de variables, con lo que:

$$d\tau^2 = -\frac{c^2}{\Theta^2 \gamma^2 \rho^2} d\rho^2; \quad (7.26)$$

esta fórmula será de gran utilidad en el siguiente capítulo para calcular el tiempo de colapso de los UES (visto desde los centros de simetría) a partir de una configuración preestablecida.

En el siguiente capítulo aplicaremos estos resultados generales a distintos casos de interés.

CAPÍTULO 8

Aplicación a sistemas de interés.

Hasta el momento el estudio de los Universos Esféricos de Stephani ha sido completamente general. Desgraciadamente esta generalidad no nos permite saber si existe o no un sistema físico que pueda ser modelado a través de los UES. En este capítulo veremos que ocurre cuando se intenta introducir la geometría de los UES a una amplia gama de sistemas.

8.1 Distribución de las partículas en el sistema.

En el capítulo anterior se propusieron las siguientes expresiones para el número de partículas por unidad de volumen, y para la entropía por partícula:

$$N = N_c \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^q \right]^b, \quad (8.1)$$

$$S = S_0 + \frac{S_1}{\left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^q \right]^{b+1}}. \quad (8.2)$$

Es interesante analizar con cuidado la forma particular de N . Si graficamos $\left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^q \right]^b$ para distintos valores de b , dejando q ($q = 1.001$) fija tendremos que:

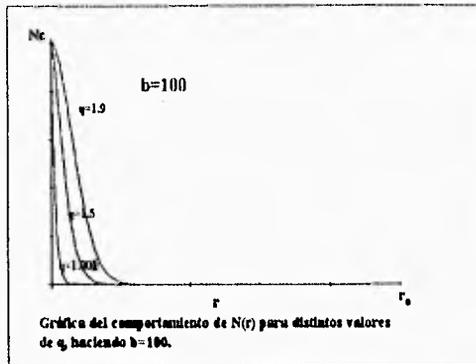


Figura 8.1:

Obsérvese que cuanto más grande es b , tanto más picuda es la curva. Ahora, fijemos b ($b = 100$), y grafiquemos la misma función para distintos valores de q (ver fig. (8.2)).

Nuevamente, vemos que para valores de q cercanos a 1, la curva es más picuda. Un estudio detenido revela que la elección de $q = 1.001$ y $b = 100$ permite tener valores de la temperatura positivos un rango de densidades de interés (10^{-10} a 10^{40} ergs).

Usando las anteriores distribuciones obtenemos al integrar sobre el sistema completo el número total de partículas en él:

$$\begin{aligned}
 N_T &= \iiint_V n d^3x = \iiint_V \frac{N(1 + \frac{1}{4}Kr^2)^3}{t^3} \sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}} dr d\theta d\varphi \\
 &= 4\pi N_c \int_0^{r_0} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^q\right]^b r^2 dr = 4\pi N_c r_0^3 \frac{1}{q} B\left(\frac{3}{q}, b+1\right), \quad (8.3)
 \end{aligned}$$

donde:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (8.4)$$

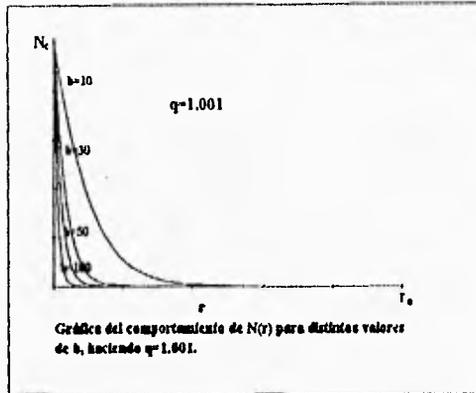


Figura 8.2:

es la función Beta. A partir de la relación (8.3) podemos resolver para N_c con lo que tenemos:

$$N_c = \frac{qN_T}{4\pi r_0^3 B\left(\frac{3}{q}, b+1\right)}. \tag{8.5}$$

Así pues, podemos determinar N_T a partir de N_c . En el caso de la entropía, no es posible obtener una expresión cerrada:

$$S_T = \iiint \sigma d^3x = 4\pi \int_0^{r_0} \left[\frac{S_1}{\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^q\right]^{b+1}} \right] r^2 dr = \dots,$$

donde $\sigma = \frac{\tilde{S}}{(g_{rr})^{3/2}} = \tilde{S} \frac{(1 + \frac{1}{4}Kr^2)^3}{t^3},$

y $\tilde{S} = N(r)S(r).$ (8.6)

Los sistemas que consideraremos en el análisis del presente capítulo son un objeto del tamaño y masa igual a la del sol, un objeto de la masa del sol pero con un radio de 10 km (dimensiones de una estrella de neutrones), un cuerpo de las características de una condensación interestelar (masa de

Jans), y una galaxia de las dimensiones de la Vía Láctea, pero con simetría esférica. Un resumen de las propiedades de tales sistemas se presenta en la siguiente tabla [2]:

Objeto	Masa	Radio	Densidad
Sol	$1M_{\odot}$	10^{11} cm	$5 \times 10^{20} \text{ ergs/cm}^3$
Objeto compacto	$1M_{\odot}$	10^6 cm	$5 \times 10^{35} \text{ ergs/cm}^3$
Condensación interestelar	$10^5 M_{\odot}$	$\sim 10^{19} \text{ cm}$	$\sim 50 \text{ ergs/cm}^3$
Galaxia	$10^{11} M_{\odot}$	$\sim 10^{21} \text{ cm}$	$\sim 5 \times 10^{-8} \text{ ergs/cm}^3$

Usando la ecuación (8.5) para estos datos obtenemos:

Objeto	N_c	# de bariones
Sol	0.42×10^{29}	10^{57}
Objeto compacto	0.42×10^{44}	10^{57}
Condensación interestelar	0.42×10^{10}	10^{62}
Galaxia	0.42×10^7	10^{68}

8.2 Evaluación de las constantes indeterminadas.

En capítulos anteriores, hemos impuesto en el centro de la configuración esférica la ecuación de estado politrópica ($p_c = (\gamma - 1)\rho$), esto hace que automáticamente se satisfaga la ecuación de estado del gas ideal:

$$p_c = n_c k T_c. \quad (8.7)$$

Haciendo uso de ella, evaluaremos las constantes indeterminadas del problema (α_c, α_0). Así, substituyendo las relaciones mostradas en la sección anterior, tenemos que:

$$n_c T_c = \frac{N_c}{\alpha_c^3} \rho^{1/\gamma} \frac{\gamma \alpha_c^3}{S_c} \rho^{1-1/\gamma} = \frac{\gamma}{S_c} \rho = \frac{p_c}{k} = \frac{(\gamma - 1)}{k} \rho, \quad (8.8)$$

donde $k \approx 1.4 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$ es la constante de Boltzmann. Por tanto, resulta que:

$$S_c = \frac{\gamma k}{\gamma - 1}. \quad (8.9)$$

En lo sucesivo, nos limitaremos al estudio de dos casos particulares de importancia: el de radiación o materia ultrarrelativista ($\gamma = \frac{4}{3}$), y el de un gas ideal monoatómico ($\gamma = \frac{5}{3}$).

8.3 Ecuación de estado de radiación.

Primeramente analizaremos el caso en que $\gamma = \frac{4}{3}$, para el cual la presión central viene dada por $p_c = \frac{1}{3}\rho$. Esto corresponde al caso de radiación o de materia ultrarrelativista, en la cual la masa de las partículas que lo conforman resulta despreciable respecto a su energía cinética. Bajo tales circunstancias esperamos que se satisfaga la ley de Stephan-Boltzmann:

$$\rho = aT_c^4, \quad (8.10)$$

$$\text{donde } a \approx 7.5 * 10^{-15} (\text{erg}/\text{cm}^3 \text{K}^4); \quad (8.11)$$

esto implica que:

$$a^{1/4} = \frac{3N_c k}{4\alpha_c^3}, \quad (8.12)$$

$$\text{ó, } \alpha_c^3 = \frac{3N_c k}{4a^{1/4}} \approx (0.35 * 10^{-12}) N_c [(erg \cdot cm)^{3/4}]. \quad (8.13)$$

Además, como estamos hablando de radiación (o materia en condiciones ultrarrelativistas, por los que la masa en reposo es despreciable respecto a la energía total de la partícula) entonces $m_0 = 0$, así:

$$U_c = \frac{3k}{4a^{1/4}} N_c \rho^{1/4} \approx (0.35 * 10^{-12}) N_c \rho^{1/4} [erg], \quad (8.14)$$

$$n_c = \frac{4a^{1/4}}{3k} \rho^{3/4} \approx 0.28 * 10^{13} \rho^{3/4} [cm^{-3}]. \quad (8.15)$$

Con ello, la otra constante se calcula fácilmente:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_c}{(\bar{M})^{1/3}},$$

$$\text{donde } \bar{M} = \frac{3Mc^2}{4\pi r_0^3}; \quad (8.16)$$

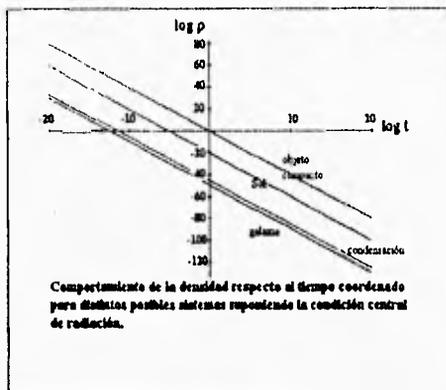


Figura 8.3:

así:

$$\alpha_0 = r_0 \left(\frac{\pi N_c k}{M c^2 a^{3/4}} \right) \approx (0.8 * 10^{-11}) \left(\frac{\pi N_c}{M} \right)^{1/3} r_0 [(cm)^{1/4} / (erg)^{1/12}]. \quad (8.17)$$

Evaluando para los sistemas propuestos obtenemos que:

Objeto	$\alpha_c^3(\text{radiación})$	$\alpha_0(\text{radiación})$
Sol	0.15×10^{17}	0.19×10^{-12}
Objeto compacto	0.15×10^{32}	0.19×10^{-7}
Condensación interestelar	0.15×10^{-2}	0.19×10^{-20}
Galaxia	0.15×10^{-5}	0.19×10^{-23}

Con los anteriores datos a la mano podemos graficar la densidad de materia-energía como función del tiempo para los anteriores sistemas (ver la figura 8.3).

De ella se desprende que a medida que t aumenta, todos los sistemas se vuelven cada vez más densos, $\rho \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow 0$; y se deduce que el intervalo de tiempo para el cual la condición central de radiación resulta ser un buen modelo para alguno de los sistemas sugeridos será breve. Lo anterior se

8.4. ECUACIÓN DE ESTADO DE UN GAS IDEAL MONOATÓMICO. 85

corroborará posteriormente al momento de realizar el estudio de la expansión (†).

Un paso más en la dirección de saber que sistemas pueden ser descritos a través de este modelo se da al graficar T respecto a la densidad (ρ), para distintos radios (véanse las figuras (8.4) a (8.11)).

El primer hecho que se desprende del análisis de las gráficas son los elevados valores de la temperatura que se observan para los valores de la densidad en los que esperaríamos encontrar a cada sistema. Claramente, estos valores están fuera de toda realidad física (valores del orden de 10^{20} a $10^{60} K$). Además observamos que el comportamiento de la temperatura respecto a la densidad difiere mucho del comportamiento que sería natural esperar (elevados valores de la temperatura en el centro, y descenso de la misma al irnos acercando a la frontera del sistema). De hecho, se observa claramente en las gráficas que si la densidad es lo suficientemente baja, el comportamiento es al revés, esto es, la temperatura cerca de la frontera es mucho más elevada que en el centro, siendo que en esta región, el número de partículas es prácticamente cero. En la figura (8.7) se presenta el comportamiento de la temperatura ahora respecto a la coordenada radial para distintos valores de la densidad, para el sistema que hemos denominado objeto compacto. En la gráfica se observa claramente que al haber anclado la temperatura en la frontera a cero, se producen violentos gradientes en la temperatura cerca de $r = r_0$. Esta circunstancia destierra completamente la posibilidad de que nuestro modelo estelar con la condición central de radiación pueda representar a algún sistema real.

8.4 Ecuación de estado de un gas ideal monoatómico.

Esta situación parece ser un poco más apegada a la realidad, pues consideraremos que las partículas tienen masa (igual a la masa de un neutrón: $m_{\text{neutrón}} \approx 1.7 \times 10^{-24} g \approx 1.5 \times 10^{-3} \text{ ergs}$). Para el gas monoatómico, la determinación de las constantes α_c y α_0 será un poco distinta a lo hecho en el caso de la radiación pues aquí no tendremos la ley de Stephan-Boltzmann.

Como hemos visto, para un gas ideal monoatómico, tenemos que:

$$\gamma = \frac{5}{3}, \quad (8.18)$$

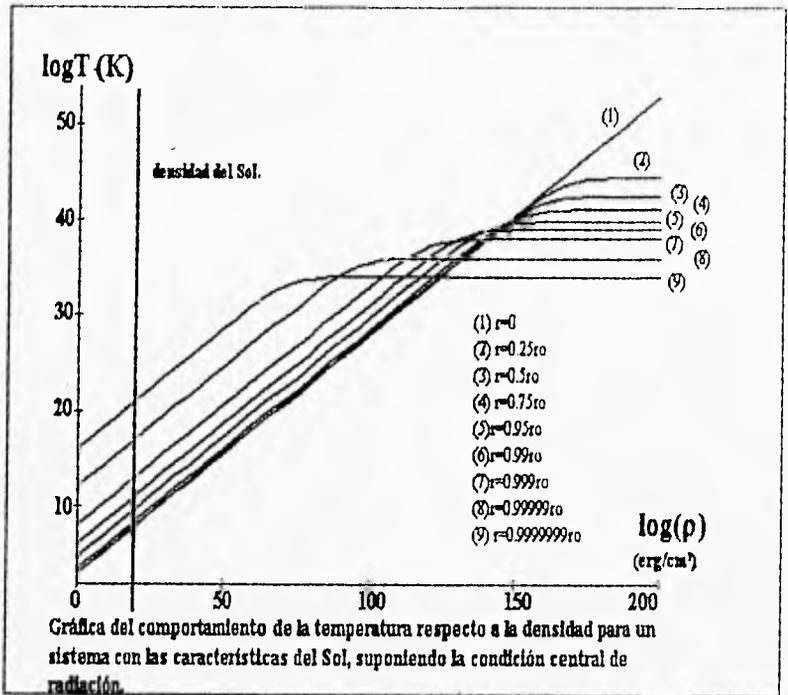


Figura 8.4:

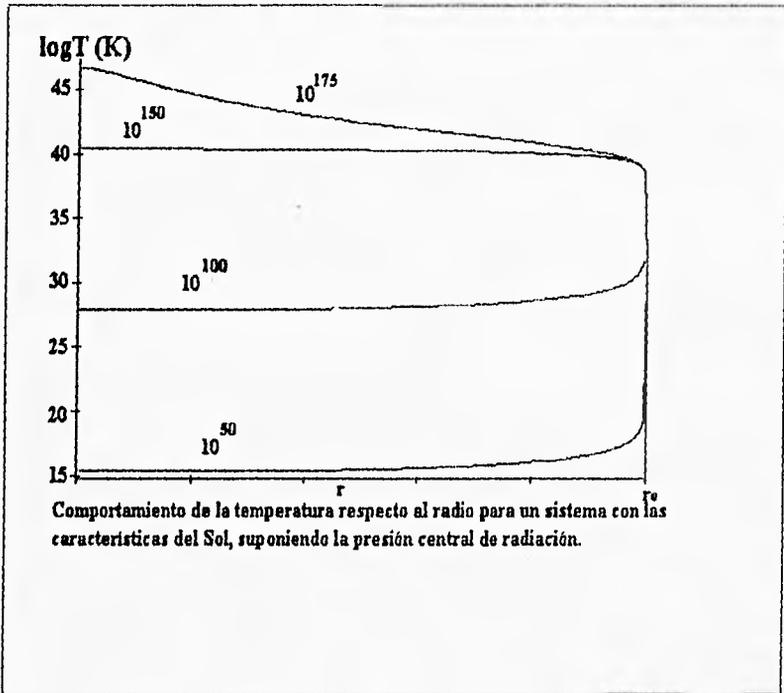


Figura 8.5:

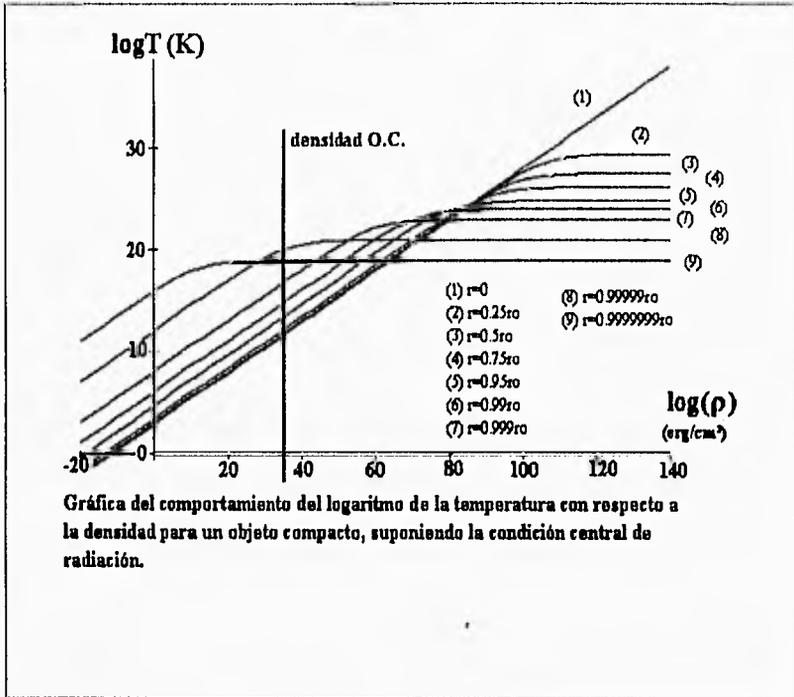


Figura 8.6:

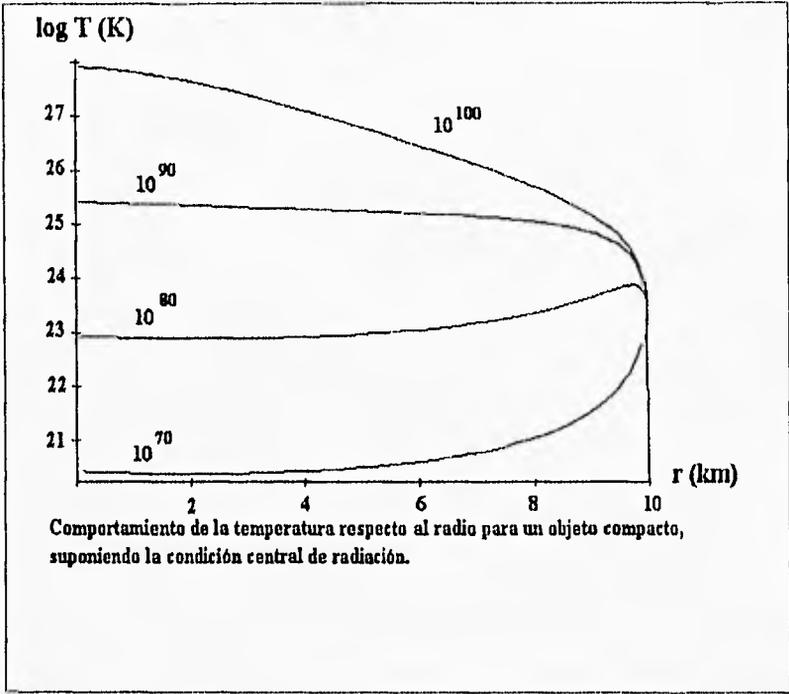


Figura 8.7:

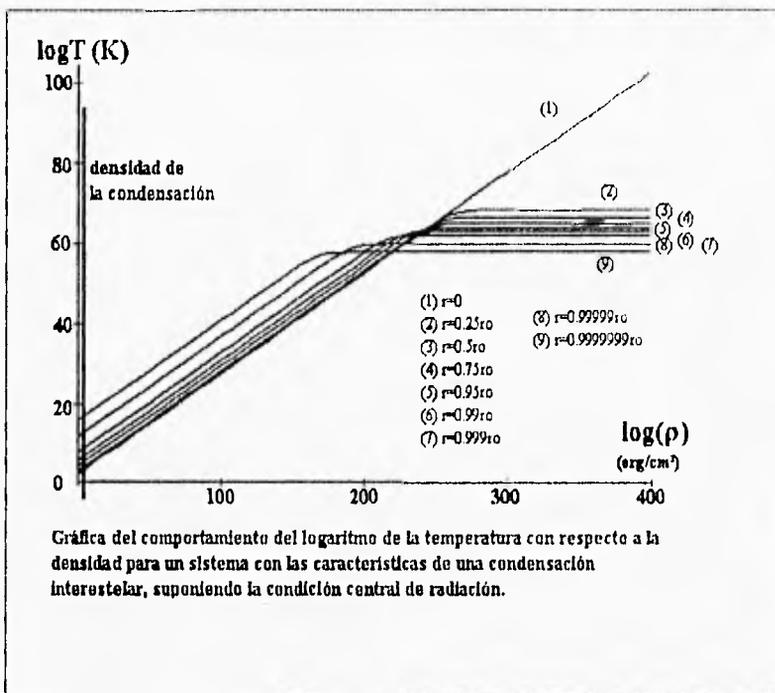


Figura 8.8:

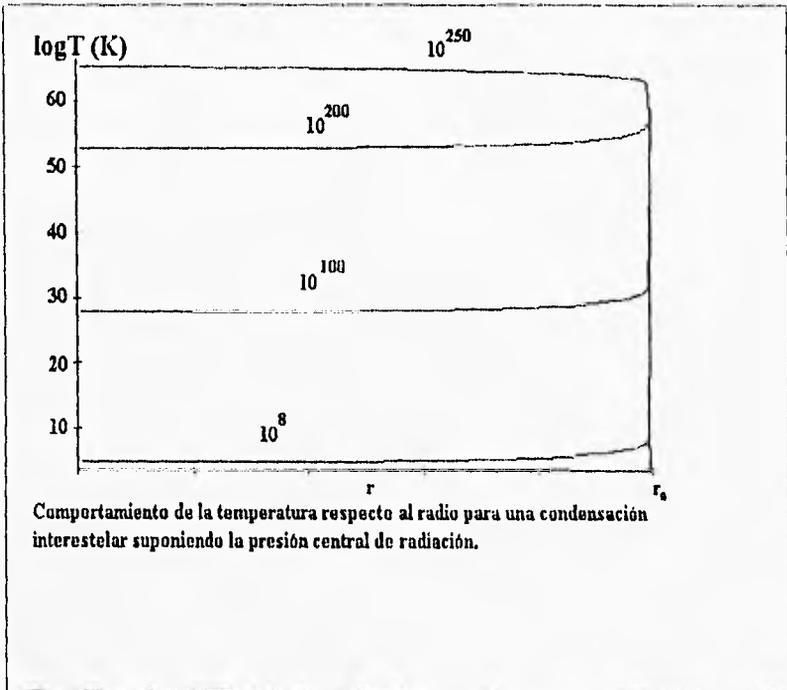


Figura 8.9:

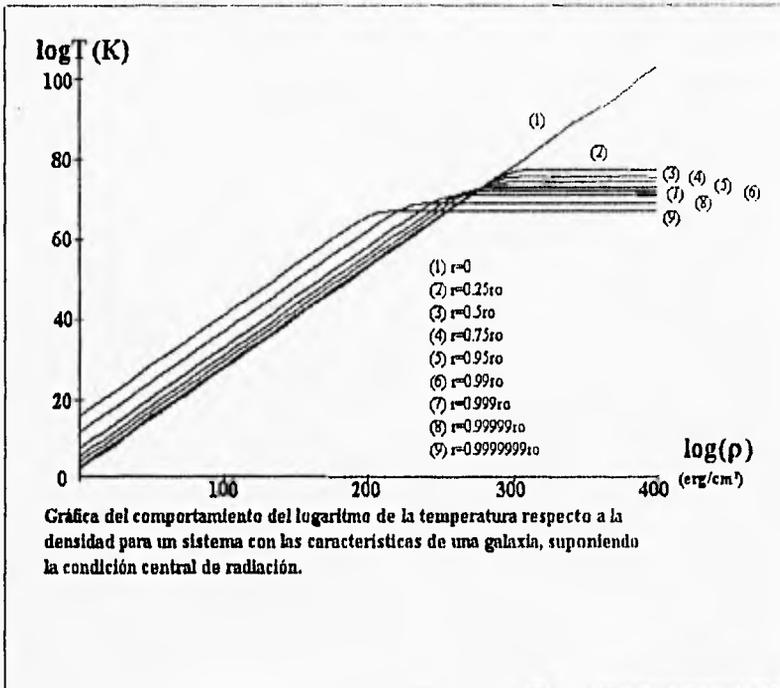


Figura 8.10:

8.4. ECUACIÓN DE ESTADO DE UN GAS IDEAL MONOATÓMICO.93

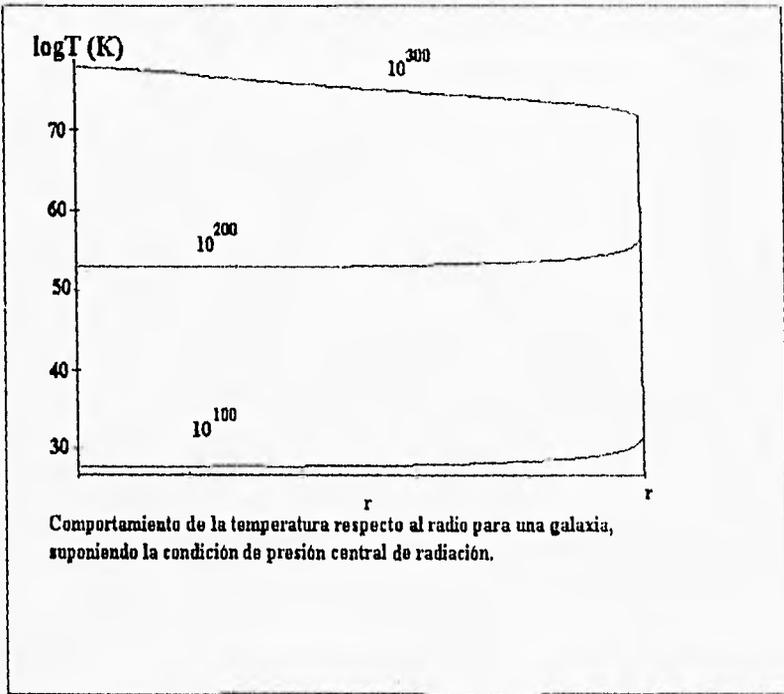


Figura 8.11:

$$\text{y además que: } k = \frac{2}{5}S_c. \quad (8.19)$$

Con ello, tenemos que se satisfacen las siguientes relaciones en el centro de simetría:

$$T_c = \frac{2\alpha_c}{3N_c k} \rho^{2/5}, \quad (8.20)$$

$$n_c = \frac{N_c}{\alpha_c} \rho^{3/5}, \quad (8.21)$$

$$U_c = \alpha_c \rho^{2/5} - N_c m_0, \quad (8.22)$$

$$p_c = \frac{2}{3} \rho. \quad (8.23)$$

Por otra parte, tenemos que en el centro se satisface además:

$$kn_c T_c = \frac{2}{3} \rho, \quad (8.24)$$

y sabemos que:

$$ct = \frac{\alpha_c}{\rho^{1/5}},$$

$$\text{por lo que: } \alpha_c = \rho_0^{1/5}(ct_0), \quad (8.25)$$

donde ρ_0 es la densidad a un tiempo coordinado arbitrario t_0 . Como en $t = 0$ tenemos una singularidad, lo que haremos será tomar $t_0 = 1$, como instante inicial:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_c}{(\tilde{M})^{1/3}} = \frac{\rho_0^{1/5}(ct_0)}{\left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}\right)^{1/3}}. \quad (8.26)$$

Así, podemos construir la siguiente tabla de constantes.

Objeto	$\alpha_{c(gas)}^3$	$\alpha_{0(gas)}$
Sol	0.71×10^{44}	0.00032
Objeto compacto	0.71×10^{50}	0.032
Condensación interestelar	0.28×10^{33}	0.52×10^{-7}
Galaxia	0.11×10^{28}	0.19×10^{-9}

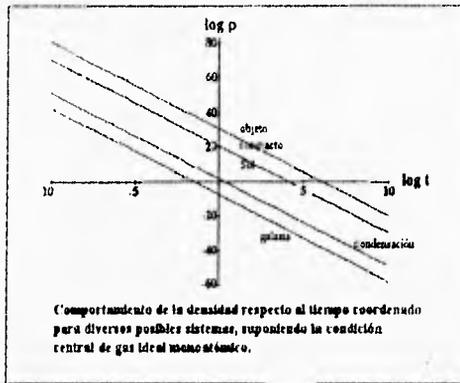


Figura 8.12:

Nuevamente, con la anterior información nos es posible graficar a la densidad como función del tiempo coordenado; otra vez observamos que los sistemas aumentan de forma vertiginosa su densidad (respecto al tiempo coordenado). Se observa que existe una singularidad física ($\rho \rightarrow \infty$) si $t \rightarrow 0$.

De igual manera, también ya es posible graficar la temperatura como función de la densidad, para algunos radios seleccionados.

Nuevamente del análisis de las anteriores gráficas se desprende que los valores de la temperatura están alejados de toda realidad física. De igual forma, el comportamiento de la temperatura respecto al radio (como se ve en la figura (8.15), para el objeto compacto) se aleja de lo que sería razonable esperar. Las gráficas vuelven a mostrar la existencia de un violento gradiente de temperatura cerca de la frontera de los sistemas. La aparición de tal gradiente está relacionada a que hemos fijado la temperatura en la frontera a cero.

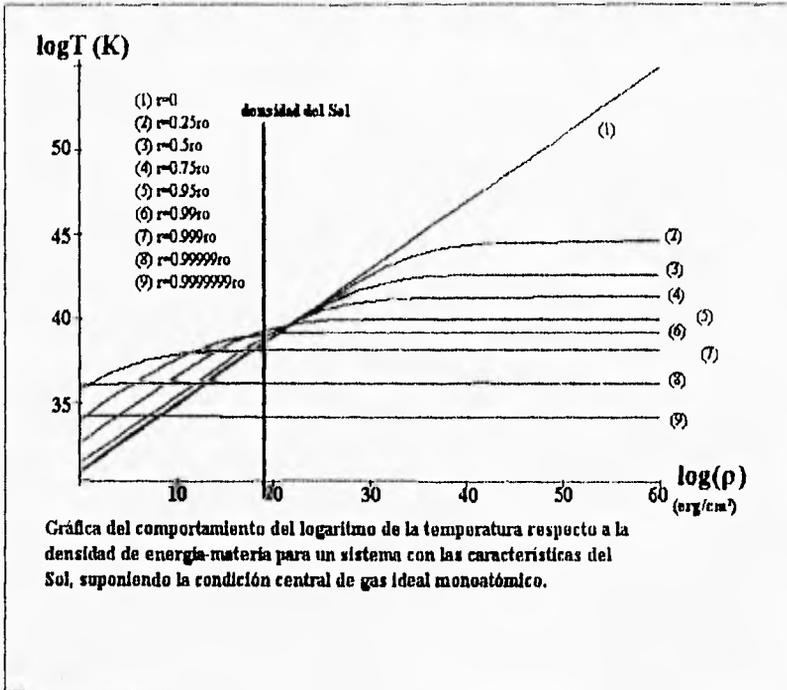


Figura 8.13:

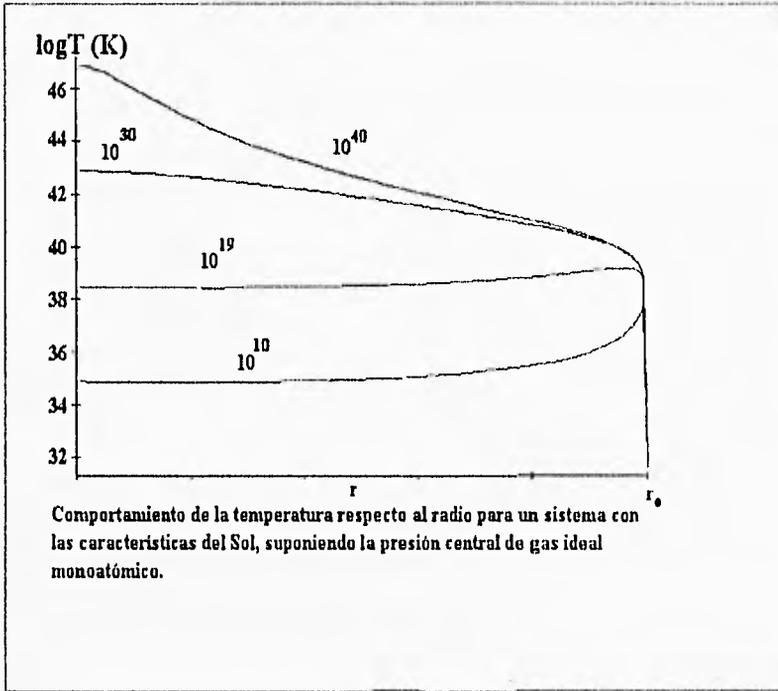


Figura 8.14:

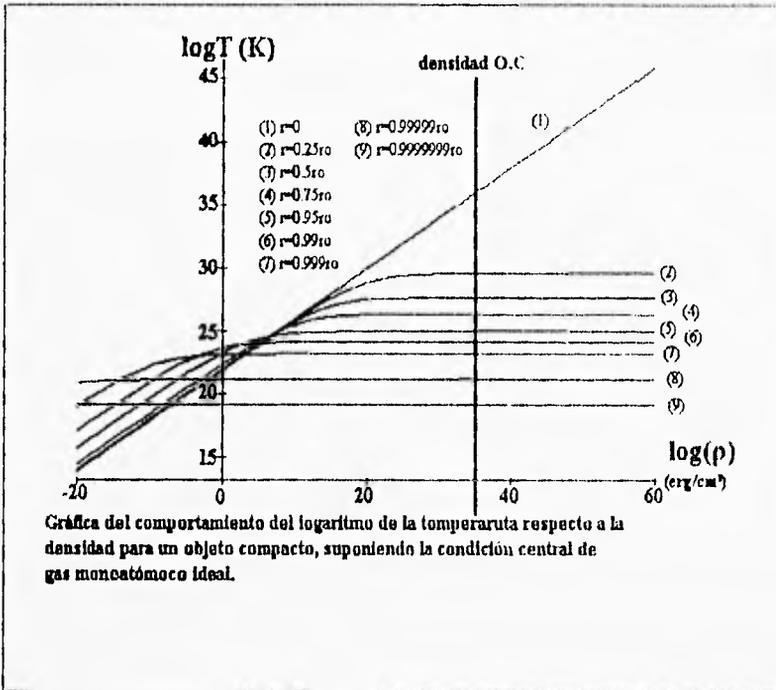


Figura 8.15:

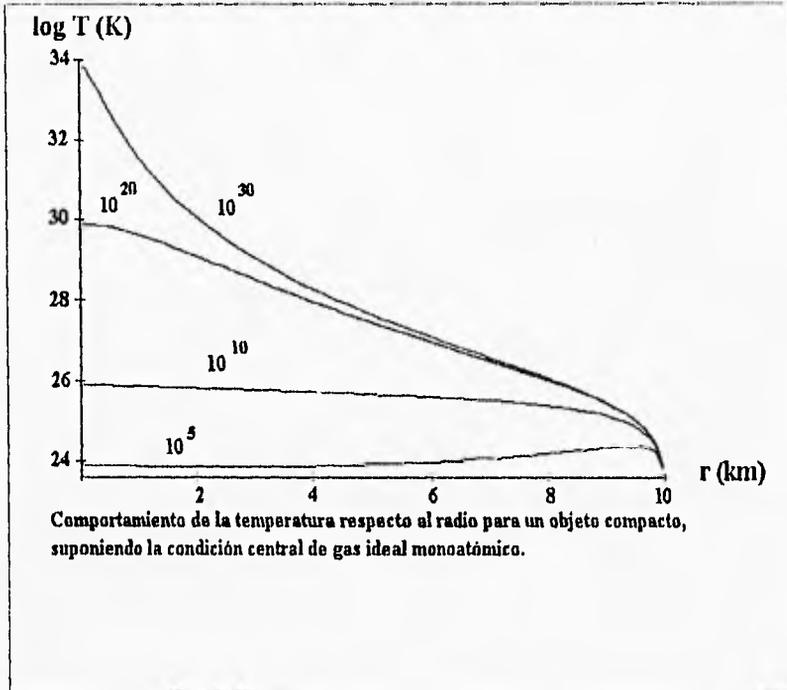


Figura 8.16:

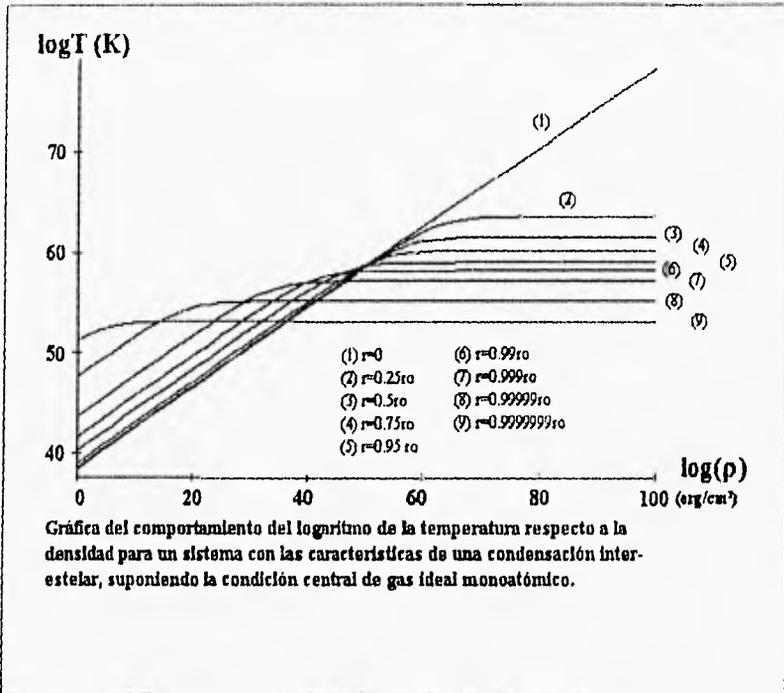


Figura 8.17:

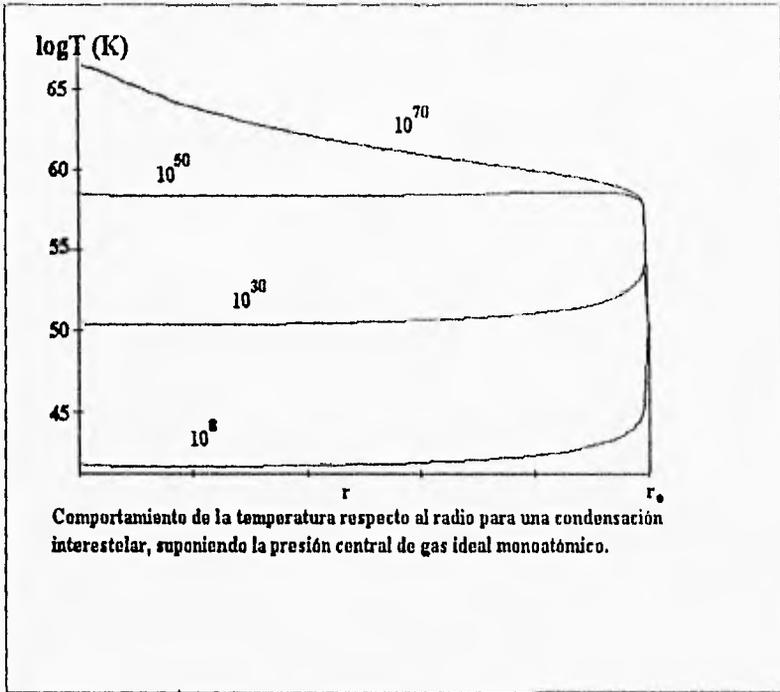


Figura 8.18:

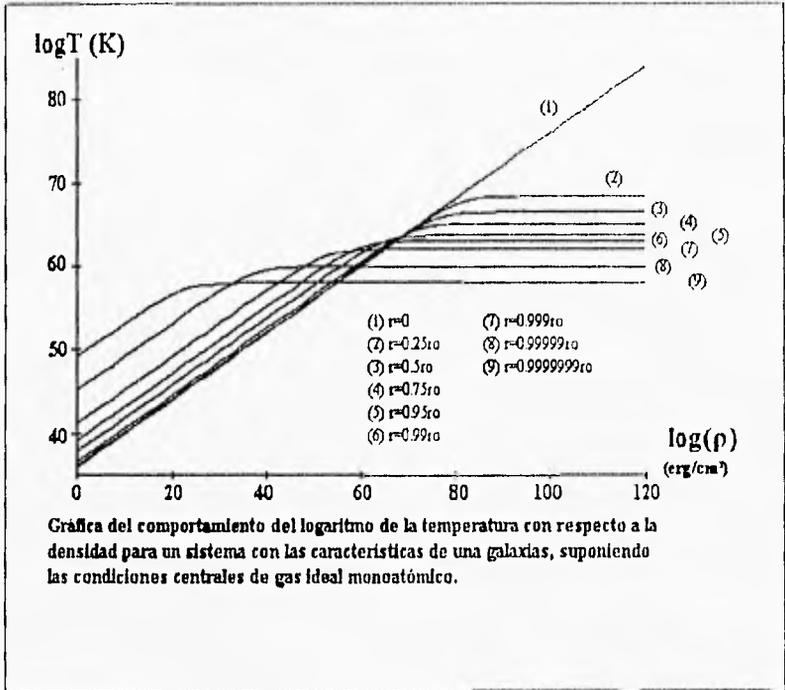


Figura 8.19:

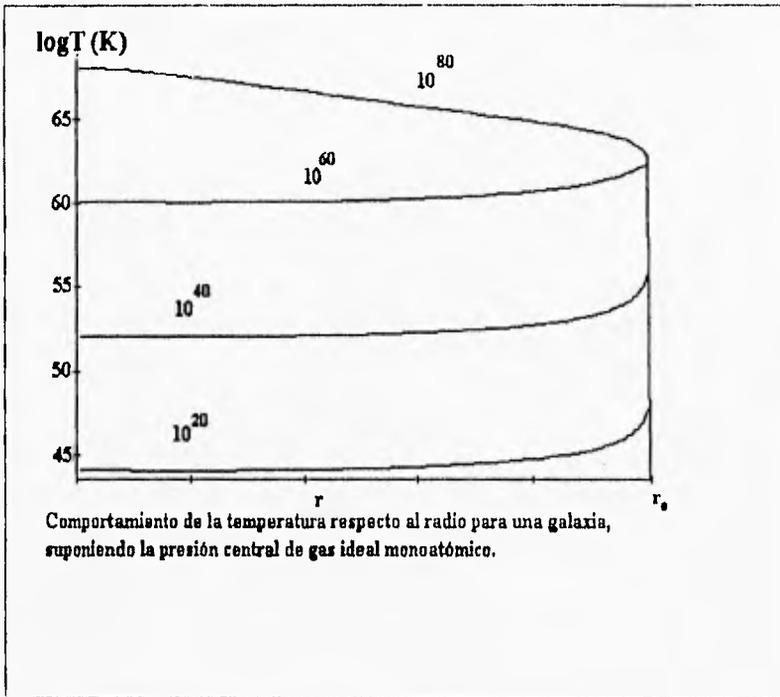


Figura 8.20:

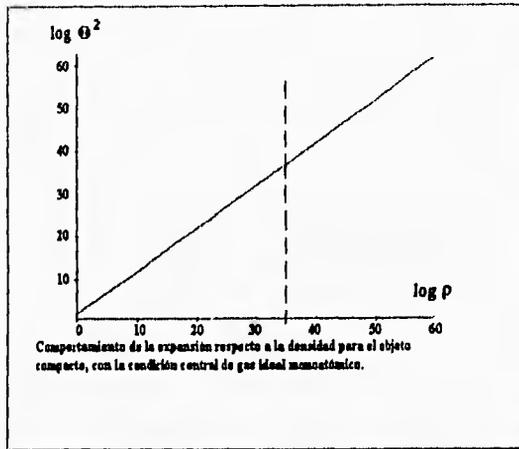


Figura 8.21:

8.5 Expansión del sistema y tiempo propio de colapso.

Una pregunta interesante sobre nuestros sistemas es la siguiente: ¿colapsarán, o permanecerán estáticos? Y si colapsan, ¿que tan rápido ocurre el colapso?

Que el sistema colapse resulta ser claro pues, si analizamos el comportamiento de la expansión, para el caso de relevancia física (el objeto compacto) tendremos que claramente $\Theta^2 \rightarrow \infty$ si $\rho \rightarrow \infty$.

En anteriores capítulos hemos visto que la singularidad de la densidad ocurre cuando $t = 0$. Así pues, para conocer el tiempo propio de colapso (según el centro de simetría), necesitamos evaluar en la fórmula para el tiempo propio obtenida en el Capítulo 7. En la siguiente tabla se muestran los tiempos propios de colapso (respecto a los centros de los sistemas) para los distintos sistemas estudiados:

8.5. EXPANSIÓN DEL SISTEMA Y TIEMPO PROPIO DE COLAPSO. 105

	$\gamma = \frac{1}{3}$	$\gamma = \frac{5}{3}$
Sol	33 min	26.7 min
Objeto compacto	0.0006 seg	0.0005 seg
Condensación	6.5 años	5.07 años
Galaxia	$\sim 10^{10}$ años	$\sim 10^{10}$ años

De la anterior gráfica se observa que para sistemas relativamente densos el sistema se colapsa violentamente, mientras que si resultan ser bastante difusos (galaxia) entonces el tiempo de colapso es del orden de la edad del Universo.

CAPÍTULO 9

Conclusiones.

En el presente capítulo sintetizaremos y discutiremos los resultados obtenidos a lo largo de los últimos 5 capítulos.

En el capítulo 4 se estudió el sentido de la simetría esférica en el ámbito de la Relatividad General; se obtuvieron las ecuaciones de Einstein para el caso de la simetría esférica, se estudió la solución en el vacío y además se especificaron las condiciones de empalme. Posteriormente, en el capítulo 5 a través de los parámetros invariantes se caracterizó el tipo de soluciones a las ecuaciones de campo a estudiarse (Universos Esféricos de Stephani); se vio que un tipo adecuado de sistemas de coordenadas para analizar a los UES son aquellos de tipo comóvil, y finalmente se estableció que éstos pueden ser vistos como una generalización de la métrica de Friedman-Robertson-Walker. En el siguiente capítulo, el 6, se estudió en forma general la termodinámica de los UES, determinándose de forma completa la métrica, y obteniéndose importantes expresiones para la temperatura, presión y densidad de energía-materia. Aquí es importante destacar que las condiciones de empalme producen una presión que se anula justo en la frontera del sistema. Por otra parte, tenemos que consideraciones de carácter físico sugieren el que la temperatura se comporte de manera semejante. En el capítulo 7 se particularizaron los resultados anteriores al caso de una presión central de tipo politrópico.

Finalmente, en el capítulo 8 se analizan dos casos particulares de presión central politrópica: la presión de radiación, y la de un gas ideal monoatómico. Se ensayaron las expresiones obtenidas en los anteriores capítulos en distintas configuraciones, y a través del análisis del comportamiento de la temperatura a distintos radios y densidades, se desecharon las distintas posibilidades.

En el capítulo anterior se encontró que el modelo estelar propuesto, difícilmente puede representar a algún sistema real. En primer lugar tenemos que los valores de la temperatura son extremadamente elevados y alejados de toda realidad física para el tipo de sistemas considerados. Además el comportamiento de la temperatura respecto a la coordenada radial y la densidad no se puede conciliar con lo que la experiencia y la intuición marcan (temperatura elevada en el centro de simetría, que va disminuyendo al acercarnos a la frontera, hasta valer cero justo en ella).

Como hemos visto, al fijar la temperatura de la frontera igual a cero hemos provocado violentos gradientes de temperatura para $r \simeq r_0$. Ya se comentó con anterioridad que este último hecho termina desterrando completamente la posibilidad de describir alguno de los sistemas propuestos a través del mencionado modelo. Podemos concluir entonces que un modelo estelar en que el supongamos que la materia se comporta como un fluido perfecto que produce la métrica de los UES (ecuación (6.1)) no describe a ningún tipo de materia conocida.

Ahora, tratemos de detectar los motivos de la falla. En mi opinión, la limitación más grande de este tipo de modelos es su densidad de energía homogénea. Como se vió en el capítulo 5, una de las propiedades más importantes de los UES es el hecho de que su densidad de energía sólo depende del tiempo coordinado ($\rho = \rho(t)$). Intuitivamente, este hecho es incompatible con la distribución de las partículas en el sistema (véanse las figuras (8.1) y (8.2)). El tipo de distribución es tal que en las capas exteriores prácticamente tenemos un vacío. Pero a la vez la densidad debe de permanecer homogénea en todo el sistema. Esto bien puede ser el motivo de que tengamos temperaturas más elevadas en las capas exteriores que en el mismo centro de simetría del sistema para ciertos valores de la densidad. Bajo ciertas circunstancias el anterior fenómeno puede ser explicado recordando que la densidad se puede descomponer en una parte asociada a la energía en reposo de las partículas, y en otra asociada a la energía interna ($\rho = m_0 n + U$). En las capas exteriores del sistema tenemos que $\rho \approx U$ (pues prácticamente tenemos un vacío). Como para t fija la densidad debe ser uniforme en todo el sistema entonces las pocas partículas de las capas exteriores deberán tener una enorme energía cinética, explicándose de esta manera las elevadas temperaturas externas.

Por otra parte, los violentos gradientes de temperatura que observamos cerca de la frontera se deben claramente a haber pedido que la temperatura

valga cero en $r = r_0$ ($T_0 = T(r_0) = 0$). Ahora, el hacer esto último se justifica por el hecho de que en el exterior del sistema tenemos un vacío clásico en el que no podemos definir la temperatura. De la misma forma, hicimos que la presión y el número de partículas valiesen cero justo en la frontera. En contraste, la densidad de energía (ρ) tiene una discontinuidad justo en la frontera (un escalón). Este es un problema insalvable en nuestro modelo, pues como ya hemos mencionado, el que la densidad no dependa de r es una propiedad del tipo de soluciones consideradas. Es importante hacer notar que el hecho anterior no invalida el empalme realizado. Como se vió en el capítulo 6, la densidad homogénea de los UES es completamente compatible con el empalme con la solución de Schwarzschild; de hecho, la forma particular de ρ se obtiene de las condiciones de empalme.

En el caso de sistemas reales, sabemos que ρ se va diluyendo en el medio interestelar poco a poco, por medio de procesos de radiación. Así, una posible alternativa intentar salvar este tipo de modelos puede ser el tratar de empalmar los UES con una solución que permitiese procesos de radiación (solución de Vaydia).

El colapso de los sistemas es también un punto interesante. Cuanto más denso es el sistema, tanto más rápido es el colapso de éste. En el caso del objeto compacto como se puede ver en la tabla correspondiente el tiempo resulta ser del orden de diezmilésimas de segundo para tanto para el caso de la materia ultrarrelativista como para el caso del gas ideal monoatómico. En el otro extremo tenemos el caso de la galaxia. Como se puede ver, desde una configuración inicial semejante a la de la Vía Láctea, tardaría un tiempo del orden de 10^{10} años en colapsar (un intervalo de tiempo comparable a la edad del Universo!). Desgraciadamente, el modelo describe un sistema fuertemente concentrado en torno al centro, pero con temperaturas más elevadas en el exterior que en su centro. Lo anterior muestra cómo es posible construir un modelo estelar (o galáctico en este caso) que se comporte adecuadamente en el sentido dinámico, pero no en el aspecto termodinámico.

Bibliografía

- [1] Misner, Charles W.; Thorne, Kip S.; Wheeler, John Archibald. **Gravitation**. W. H. Freeman and Company. Estados Unidos, 1973.
- [2] Shapiro, Stuart L.; Teukolsky, Saul A.. **Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars**. John Wiley & Sons. Estados Unidos, 1983.
- [3] Sussman, R. A. **Thermodynamics of Perfect Fluid Spheres with Homogeneous Density**. x, xx, xxx, (1995).
- [4] Sussman, R. A. **On spherically symmetric shear-free perfect fluid configurations (neutral and charged). II. Equation of state and singularities**. *J. Math. Phys.*, **29**, 945, (1988). Secciones VI-VII.
- [5] Landau L. D.; Lifshitz. **Teoría Clásica de los Campos**. Editorial Reverté. España, 1992.
- [6] Stephani, Hans. **General Relativity**. Cambridge University Press. Inglaterra, 1990.
- [7] Krammer, D.; Stephani, H.; Herlt, E.; MacCallum, M.; Schutz, E.. **Exact Solutions of Einstein's Field Equations**. Cambridge University Press. Inglaterra, 1980.
- [8] Schwarzschild, K. **Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie**. *Sitzber Deut. Akad. Wiss. Berlin*. pp 189-196, (1916).
- [9] Schwarzschild, K. **Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie**. *Sitzber Deut. Akad. Wiss. Berlin*. pp 424-434, (1916).