UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

DESARROLLO DEL CALCULO ACTUARIAL POR FUNCIONES DE DISTRIBUCION Y SU APLICACION EN MEXICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A N :

IRMA MEDINA LOPEZ

DANIEL IGNACIO PEREGRINO GOMEZ

NAUCALPAN, EDO. DE MEXICO 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA
PROGRAMA DE ACTUARIA Y M.A.C.

UNIVERSIDAD NACIONAL AVENMA DE MEXICO

SRITA. IRMA MEDINA LOPEZ
SR. DANIEL IGNACIO PEREGRINO GOMEZ
Alumnos de la carrera de Actuaría
P r e s e n t e s .

Por acuerdo a su solicitud presentada con fecha 14 de fefrero de 1994, me complace notificarles que esta Jefatura tuvo a bien asignarle el siguiente tema de Tesis: "DESARROLLO DEL CALCULO ACTUARIAL POR FUNCIONES DE DISTRIBUCION Y SU APLICACION EN MEXICO", el cual se desarrollará como sigue:

INTRODUCCION
CAP. I Medición de la Supervivencia.
CAP. II Función de valor presente "Z".
CAP. III Función de distribución de "Z"
CAP. IV Función de densidad de "Z".
CAP. V Primas netas y reservas.
CONCLUSIONES.

Asimismo, fue asignado como Asesor de Tesis: ACT. MARIO ARRIAGA PARRA.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberán presentar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar Examen Profesional, así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escoalr en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la misma.

ENEP ACATLAN

A T E N T A M E N T E
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Acatlán, Edo. Méx. enero 19 de 1996.

JEFATURA DEL PROGRAMA DE ACTUARIA Y MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

ACT. LAURA MA. RIVERA BECERRA
Jefe del Programa de Actuaría
y M.A.C.

cg'

Gracias a ustedes que siempre han estado a mi lado, con quienes crecí, aprendí, lloré, luche, reí, a quienes no tengo palabras para decirles cuanto los amo. A tí, papá, mamá, Roberto y Dalia.

Con todo el cariño, amor y agradecimiento a mis padres: María Elena,Eufemia y José Ignacio por todos los valores, principios, conocimientos y sentimientos que recibí de ellos. A mis hermanos: Adrian, Gabriel, Brenda, Jazmín y Erick por su apoyo, cariño y amistad.
Y a ti, Irma.

CAPITULO 5
PRIMAS NETAS Y RESERVAS

El uso de conceptos de probabilidad en textos clásicos de cálculo actuarial, tales como funciones de distribución, densidad, generatriz de momentos o varianza, no han sido estudiados con mayor profundidad. La mayoría de los resultados de la teoría tradicional son obtenidos sólo considerando el valor esperado de las funciones definidas. En 1986, Bowers y Gerber fortalecen éstos usando variables aleatorias que dependen del tiempo futuro de vida. Una aportación importante de este estudio es el cálculo de la varianza de las funciones actuariales. Esto proporciona una medida del riesgo de pérdida por parte de la compañía aseguradora, como se verá más adelante.

Aunado a lo anterior, se propone el uso de una expresión general de beneficios y obligaciones, para los planes de seguros y anualidades más comunes; así como el desarrollo de sus funciones de distribución y densidad, con éstos se llegará al cálculo de primas únicas, primas netas niveladas y reservas, que son conceptos fundamentales para la elaboración de cualquier plan de seguros.

Para lograr lo anterior, será utilizado como base el estudio de la medición de supervivencia y todos los conceptos desarrollados derivados de ella como lo son : variable aleatoria del tiempo futuro de vida y sus funciones de distribución y densidad.

A continuación se definirá la expresión general, con la que se pretende obtener una forma que se adapte a los tipos de seguros más usados en nuestro país. De esta forma, se busca parametrizarlos de acuerdo a las condiciones de cada uno lo que permitirá facilitar su manejo, utilizando la misma base de cálculo para todos los planes.

Posteriormente, se calculará y demostrará la función de distribución y densidad de la expresión general de valor presente. Con el uso de estas funciones y los parámetros obtenidos con anterioridad se llegará a las funciones particulares para cada plan, buscando siempre simplificar el uso y desarrollo de éstos.

Finalmente, se obtendrán las primas netas únicas, primas netas niveladas y reservas, basándonos en la función de valor presente de beneficios. A partir de este momento, será necesario introducir nuevos conceptos. Para definir la prima neta única será utilizado el cálculo de la esperanza del valor presente de los beneficios. Posteriormente, mediante la aplicación del Principio de Equivalencia sobre el pago de beneficios y obligaciones de un seguro, se obtendrán las primas netas niveladas. Con el transcurso del tiempo este principio sufre un desequilibrio, lo que nos conduce a la creación de una reserva.

Por medio de ejemplos numéricos podremos observar el uso de la teoría desarrollada a lo largo de este trabajo y con estos algunas aplicaciones posibles.

INTRODUCCION.

El propósito de este capítulo es el desarrollar un conjunto de ideas que nos permitan definir y entender la variable aleatoria "tiempo hasta la muerte T", y sus funciones de distribución y densidad de probabilidad.

Para introducir la medición de supervivencia, inicialmente se sentarán las bases con el manejo de probabilidades condicionales para una función sencilla como lo es S(x), que significa la probabilidad de que una persona de edad 0 sobreviva a edad x. A partir de esta función se pretenden obtener conceptos básicos dentro del Cálculo Actuarial para facilitar la comprensión y desarrollo de la variable aleatoria T.

La función de supervivencia S(x), puede ser de tipo continuo o discreto. dependiendo de la información con la que se cuenta, o el uso que se le quiera dar. Cuando esta sea puntual, es decir, se maneje para edades enteras, será necesario el uso de la variable aleatoria discreta "K" que se definirá en este capítulo de forma análoga a "T".

Estos conceptos serán empleados para la construcción de tablas de mortalidad, ya que éstas son herramientas actuariales básicas, necesarias para el cálculo de un seguro.

Un modelo de supervivencia es una función de distribución de probabilidad para un tipo especial de variable aleatoria.

Casos tratados con patrones de supervivencia humana, sobre todo los estudiados por actuarios, generalmente están relacionados con la edad cronológica de las personas. Por ejemplo, los seguros y planes de pensiones, ya que la supervivencia es una función de edad. Existen dos versiones de modelos de supervivencia actuariales: el *modelo de selección* y el *modelo agregado,* siendo este último el que estudiaremos en el presente capítulo.

MODELO DE SELECCION.

Considerando una cobertura de seguro a edad x de personas seleccionadas, se toma la emisión del seguro como $t=0$ (evento inicial) y se espera obtener la probabilidad de que estas personas mantengan con vida en el tiempo t en general llamada *[S(t)].* Estamos de acuerdo en que *S(0)* ó la probabilidad de sobrevivir al tiempo $t=0$, tendría un valor distinto en el caso de que x fuera igual a 20 años, a una de 60 años. Es por esto, que se necesitaría un modelo de la siguiente manera: $S(t;x)$. De esta forma se relizaría un separación de $S(t)$ de cada valor de x.

La edad de selección no es la única variable conconminante, ya que existen otros factores que pueden afectar en el valor de la probabilidad, por ejemplo el sexo o si la persona es fumadora o no, etc.. Con esto para este caso podemos proponer una función que dependa de estos cuatro factores: $S(t,x,m,f)$ para una variable de tiempo apropiada para una persona de sexo masculino fumador que tenga edad x al tiempo de selección.

MODELO AGREGADO

Ahora se considerará el caso en que el tiempo $t=0$ es el nacimiento de una persona, de tal manera que $x=0$ y su probabilidad de supervivencia será $S(t)=0$ --en la notación actuarial la probabilidad de sobrevivir x años o a edad x, desde edad 0 se denota como ${}_xp_0$, que es igual a escribir $S(x)$--. Podemos observar que cuando $t=0$; $x=0$ también. En este caso resultan idénticos los dos tipos de notación, ya sea $S(t)$ ó $S(x)$.

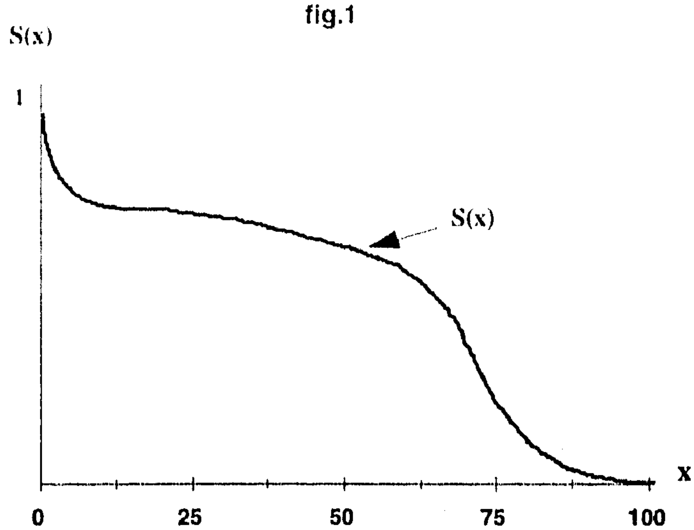
Consideramos el caso en que el tiempo $x=0$ es el nacimiento de una persona, de tal manera que su probabilidad de supervivencia será $S(x) = 1$, --en la notación actuarial la probabilidad de sobrevivir x años o a edad x, desde el nacimiento se denota como ${}_x\, p_0$, que es igual a escribir $S(x)$ --. Estas probabilidades de supervivencia serán dadas por $S(x)$, con $x \geq 0$, $S(0)=1$ y $S(x)=0$ cuando $x \to \infty$. En este caso la variable aleatoria X es la edad de muerte al tiempo de vida futura.

FUNCION DE DISTRIBUCION DE SUPERVIVENCIA.

La función de distribución de supervivencia $S(x)$ se representa por $P(X>x)$, donde X es la variable aleatoria edad de muerte.

El modelo de supervivencia se puede describir de la siguiente manera: con alta mortalidad en el primer año de vida, posteriormente disminuye para la niñez, aumenta para la adolescencia y adulto; y finalmente crece en forma acelerada en la vejez. Por esto, la función de supervivencia será decreciente, ya que es menos probable alcanzar la edad 60 que la 30.

fig.1



LA FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULATIVA.

La función de distribución acumulativa de X es $F(x)$ que es la probabilidad de que la variable aleatoria X o edad de muerte, asumirá un valor menor igual a x (edad), esto es:

$$F(x) = Pr\ (X \leq x)$$

De otra forma, esto significa que un recién nacido (de edad $x=0$) muera antes o a edad x, que se denota como ${}_x q_0$.

En el caso de la variable aleatoria X, $F(x)$ nos proporciona la probabilidad de que la muerte ocurra antes o al tiempo x. Esto es:

$$F(x) = 1 - S(x) = 1 - {}_x p_0$$

se puede observar que cuando $x = 0$;

$$F(x) = 1 - S(0) = 0$$

y cuando $x \rightarrow \infty$

$$F(x) = 1 - S(\infty) = 1$$

1.1.- PROBABILIDADES Y DENSIDADES CONDICIONALES.

Hasta el momento hemos considerado casos en los cuales la probabilidad de supervivencia es tomada a partir de la edad $x=0$ en particular, estas probabilidades son incondicionales, ya que conocíamos que la persona se encontraba viva a edad $x=0$.

En adelante tomaremos el caso de una persona que vive a edad $x > 0$, para desarrollar las probabilidades de supervivencia , edad de muerte y otras medidas.

Sean A y B dos eventos cualesquiera, la probabilidad condicional denotada por $P(B \mid A)$, representa la probabilidad de que el evento B se presente sabiendo que el A ha ocurrido anteriormente.

La probabilidad condicional de que un recién nacido muera entre las edades x y $x+n$ suponiendo que sobrevive a x años es igual a:

$$P[\, x < X \leq x+n \mid X > x] = \frac{P[\, x < X < x+n]}{P[\, X > x\,]} =$$

$$= \frac{F(x+n) - F(x)}{1 - F(x)} =$$

$$= \frac{S(x) - S(x+n)}{S(x)} =$$

$$= \frac{{}_{x}p_{0} - {}_{x+n}p_{0}}{{}_{x}p_{0}} =$$

$$= 1 - \frac{{}_{x+n}p_0}{{}_x p_0}$$

¿ Cuál es la probabilidad de que una persona, sabiendo que vive a edad x, esté con vida n años después (a la edad $x+n$) ?

Buscamos Pr [Sobrevivir a la edad $x+n$, dado que sobrevive a la edad x]

$${}_n p_x = P[X > x+n \mid X > x] =$$

$$= \frac{P(X > x+n)}{P(X > x)} =$$

$$= \frac{1 - F(x+n)}{1 - F(x)} =$$

$$= \frac{S(x+n)}{S(x)} =$$

$$= {}_{x+n} p_0 \; / \; {}_x p_0$$

Si multiplicamos esta probabilidad condicional por la probabilidad de obtener la condición, que es $S(x)$, obtendremos la probabilidad incondicional de supervivencia a la edad $x+n$, que es $S(x+n)$:

Sabemos que :

$$S(x) = {}_x p_0$$

$$\frac{S(x+n)}{S(x)} S(x) = S(x+n)$$

$$\therefore \quad {}_n p_x \; {}_x p_0 = {}_{n+x} p_0$$

Así la probabilidad condicional de que muera antes de alcanzar la edad $x+n$ dado que vive a edad x se denota como ${}_n q_x$:

$$
\begin{aligned}
{}_nq_x &= P\,[\,X < x+n \mid X > x\,] = \\
&= \frac{P\,(\,x < X < x+n\,)}{P\,(\,x < X\,)} = \\
&= \frac{F\,(\,x+n\,) - F(\,x\,)}{1 - F\,(\,x\,)} = \\
&= \frac{S(\,x\,) - S(\,x+n\,)}{S\,(\,x\,)} = \\
&= 1 - \frac{S(x+n)}{S\,(\,x\,)} = \\
&= 1 - {}_np_x
\end{aligned}
$$

En cualquiera de los dos casos anteriores de ${}_np_x$ y ${}_nq_x$, si $n=1$ se puede omitir su escritura en la notación actuarial. Esta se refiere a que la persona de edad x sobreviva a un período de 1 año, o muera en el intervalo de 1 año y se denota p_x y q_x, respectivamente.

A q_x se le llama también tasa anual de mortalidad , ya que es la mortalidad de 1 año de la edad x a la $x+1$.

Definiendo $T(x)$, como el tiempo futuro de vida de una persona de edad x, y se obtiene de restar la edad de muerte a la actual, es decir $X - x$.

Podemos expresar los conceptos anteriores, ${}_np_x$ y ${}_nq_x$ como la probabilidad de una persona que ha vivido a edad x, muera dentro de un intervalo de tiempo de n años. Es equivalente también a que el tiempo futuro de vida sea menor o igual que el intervalo de tiempo de n años y se denota de la siguiente manera:

$$F(t) = {}_nq_x = Pr\,[\;T(x) \leq n\;] \qquad n \geq 0$$

De igual forma interpretamos ${}_np_x$ como la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva un intervalo de tiempo de n años; o que es lo mismo, el tiempo futuro de vida sea mayor que n años y que podemos expresar como:

$${}_{n}p_x = 1 - {}_{n}q_x = Pr\,[\ T(x) > n\ ] \quad \text{para} \quad n \geq 0$$

Por otro lado, existe en el Cálculo Actuarial un concepto más relacionado con q_x y p_x que denotamos de la siguiente manera ${}_{t\,|\,u}q_x$ y que significa la probabilidad que tiene una persona de edad x a sobrevivir t años y muera en el siguiente intervalo de u años.

Tomando en cuenta las probabilidades condicionales llegamos a :

$${}_{t\,|\,u}q_x = Pr\,(\,x+t < X \leq x+t+u \mid X > x\,) =$$

$$= \frac{-\,S\,(\,x+t+u\,) \;\; + S\,(\,x+t\,)}{S\,(\,x\,)} =$$

$$= \frac{S\,(\,x) - S\,(\,x+t+u\,) - S\,(\,x\,) + S\,(\,x+t\,)}{S\,(\,x\,)} =$$

$$= {}_{t+u}q_x - {}_{t}q_x =$$

$$= F\,(\,x+t+u \mid X > x\,) - F\,(\,x+t \mid X > x\,)$$

En otra forma:

$${}_{t|\,u}q_x = \frac{S\,(\,x+t\,) - S\,(\,x+t+u\,)}{S\,(\,x\,)} =$$

$$= \frac{S\,(\,x+t\,)}{S\,(\,x\,)} \cdot \frac{S\,(\,x+t\,) - S\,(\,x+t+u\,)}{S\,(\,x+t\,)} = {}_{t}p_x \;\; {}_{u}q_{x+t}$$

Así también a t podemos llamarla tiempo de diferimiento. ${}_{n\,|\,u}q_x$ la podemos también expresar en función de $T\,(x)$ [tiempo futuro de vida de una persona de edad x]. ${}_{n\,|\,u}q_x$ es la probabilidad de que $T(x)$ sea mayor que n y menor o igual que $n+u$, es decir, que muera en el intervalo (n , $n+u$].

$$ {}_{n\,|\,u}q_x = Pr[\ n < T(x) \le n+u\ ] = $$

$$ = Pr[\ T(x) \le n+u\ ] - Pr[\ T(x) \le n\ ] = $$

$$ = {}_{n+u}q_x - {}_nq_x = $$

$$ = {}_{n+u}q_x - 1 - {}_nq_x + 1 = $$

$$ = {}_np_x - {}_{n+u}p_x $$

Ahora llamaremos U al tiempo futuro de vida de una persona de edad x+t. Así, la probabilidad de que muera entre las edades x+t y x+t+u está dada por:

$$ F(u) = P(x+t < X < x+t+u \mid X > x+t) = \frac{P(\ x+t < X \le x+t+u\ )}{P(X > x+t)} $$

$$ = \frac{F(x+t+u) - F(x+t)}{1 - F(x+t)} = \frac{{}_{t+u}q_x - {}_tq_x}{{}_tp_x} = $$

$$ = \frac{1 - {}_{t+u}p_x - 1 + {}_tp_x}{{}_tp_x} = \frac{1 - {}_{t+u}p_x}{{}_tp_x} = $$

$$ = 1 - {}_up_{x+t} = {}_uq_{x+t} $$

Podemos obtener el tiempo futuro de vida de una persona de edad x+t que sea menor o igual a u:

$$ {}_uq_{x+t} = P(\ U(x) \le u\ ) \qquad u \ge 0 $$

LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

Sea $f(x)$, la función de densidad de probabilidad de X definida como la derivada de la función de distribución acumulativa $F(x)$, o bien:

$$f(x) = d/dx\, F(x) = d/dx\, [1 - S(x)] = -d/dx\, S(x) \qquad x \geq 0$$
$$F(x) = \int_0^x f(y)\, dy$$

$$S(x) = 1 - F(x) = 1 - \int_0^x f(y)\, dy$$

como:

$$\int_0^\infty f(y)\, dy = 1$$

$$1 - \int_0^x f(y)\, dy = \int_0^\infty f(y)\, dy - \int_0^x f(y)\, dy$$

$$\therefore \quad S(x) = \int_x^\infty f(y)\, dy$$

Anteriormente, definimos la función de densidad $f(x)$ al tiempo de muerte, ahora lo haremos con la densidad condicional de edad de muerte al alcanzar la edad x , dado la supervivencia a esa edad, o en otras palabras llegar a edad x y morir.

Estas son medidas instantáneas de la densidad de muerte a edad x, llamada también *fuerza de mortalidad*, denotada como: μ_x.

Se define de la siguiente manera:

$$\mu_x = f(x) \;/\; S(x)$$

La derivada de $S(x)$ es la pendiente de la misma, que evaluada en una cierta edad, obtendremos la proporción de decrecimiento de la probabilidad de supervivencia.

$$f(x) = -dS(x) \;/\; dx$$

Como $S(x)$ es de naturaleza decreciente la derivada será negativa. Pero como lo que buscamos es una tasa, es necesario dividirla entre $S(x)$. De esta forma:

$$\mu_x = -S'(x) \;/\; S(x) =$$

$$= -d\,/dx\, \ln S(x)$$

Integrando:

$$\int_0^x \mu(y)\ dy = -\ln S(x)$$

ó

$$S(x) = \exp\left[- \int_0^x \mu(y)\, dy \right] = {}_x p_0$$

A continuación se desarrollará la equivalencia de la expresión anterior a la obtenida con probabilidades condicionales:

$${}_n p_x \quad \mu_{x+n} = \frac{S(x+n)}{S(x)} \ \frac{f(x+n)}{S(x+n)} =$$

$$= \frac{f(x+n)}{S(x)}$$

De la definición de la función de distribución acumulativa podemos observar que ${}_n q_x$ es la función de densidad de $T(x)$, el tiempo futuro de vida.

[1] $$d/dn\ {}_n q_x = d/dn\ [1 - S(x+n) / S(n)] =$$

$$= - S'(x+n) / S(x) =$$

$$= [-S'(x+n) / S(x+n)][S(x+n) / S(x)] =$$

$$= {}_n p_x \quad \mu_{x+n} \qquad n \geq 0$$

y de igual forma observamos que :

$$d/dn\ (1 - {}_n p_x) = -d/dn\ {}_n p_x = {}_n p_x\ \mu_{x+n}$$

Ahora enunciamos la función de densidad:

[1] $d/dn\ {}_n q_x$ denota la derivada de ${}_n q_x$ con respecto a n

$$^{2}F'(u) = D_u \frac{(F(x+t+u) - F(x+t))}{1 - F(t)} = D_u \frac{S(x+t) - S(x+t+u)}{S(x+t)} =$$

$$= \frac{-S'(x+t+u)}{S(x+t)} = \frac{-S'(x+t+u)}{S(x+t+u)} \cdot \frac{S(x+t+u)}{S(x+t)} =$$

$$= \mu_{x+t+u} \cdot {}_u p_{x+t} = f(u)$$

Por otro lado, podemos ver que cuando $n \to 0$ en ${}_n q_x / n$ tenemos que:

$$lim_{n\to 0}\ {}_n q_x / n = lim_{n\to 0} \frac{S(x) - S(x+n)}{n\,S(x)} =$$

$$= [1 / S(x)]\ lim_{n\to 0} \frac{S(x) - S(x+n)}{n} =$$

$$= [1 / S(x)]\ - \frac{d\,S(x)}{dx} = \mu_x$$

$$\int_x^{x+n} - \mu_y\,dy = ln\ [S(y)]\ \Big|_x^{x+n} =$$

$$= [ln\ S(x+n) - ln\ S(x)] =$$

$$= ln\ \frac{S(x+n)}{S(x)}$$

obteniendo exponenciales:

$$exp\left[- \int_x^{x+n} \mu_y\,dy \right] = \frac{S(x+n)}{S(x)} = {}_n p_x$$

[2] D_u F(x+u) denota la derivada de F(x+u) con respecto a u

con un cambio de variable:

$$s = y - x \qquad \Rightarrow \qquad x = y - s$$

$$exp\,[\, - \int_0^n \mu_{x+s}\; ds] \; = \; {}_n p_x$$

A su vez tenemos que:

$$\mu_y = -\frac{S\,'(\,y\,)}{S\;(\;y\,)}$$

y si integramos:

$$\int_x^{x+n} \mu_y\, S\,(\,y\,)\, dy \; = \; - \int_x^{x+n} S\,'\,(\,y\,)\, dy \; =$$

$$= \; - \, S\,(\,y\,)\, \Big|_x^{x+n} \; =$$

$$= \; S\,(\,x\,) \, - \, S\;(\,x+n\,)$$

Dividiendo entre $S\,(\,x\,)$ tenemos:

$$\frac{S\,(\,x\,) \, - \, S\,(\,x+n\,)}{S\,(\,x\,)} \; = \; {}_nq_x$$

$$\therefore \quad {}_nq_x \; = \; \frac{\int_x^{x+n} \mu_y \; S\,(\,y\,)\; dy}{S\,(\,x\,)}$$

Realizando un cambio de variable:

$$t = \; y \; - \; x \qquad \Rightarrow \qquad y \; = \; x \; + \; t$$

$${}_nq_x = \frac{\int_0^n \mu_{x+t}\; S\,(\,x+t\,)\; dt}{S\,(\,x\,)} \; =$$

$$= \int_0^n \; {}_t p_x \; \mu_{x+t} \; dt$$

Al igual tenemos que:

$${}_{n|m} q_x = {}_{n+m} q_x - {}_n q_x =$$

$$= \int_0^{n+m} {}_t p_x \; \mu_{x+t} \; dt - \int_0^n {}_t p_x \; \mu_{x+t} \, dt =$$

$$= \int_n^m {}_t p_x \; \mu_{x+t} \; dt$$

Podemos pensar también en la fuerza de mortalidad en el caso de una persona que sobreviva a edad x y tendríamos la siguiente expresión:

$$\mu (y \mid X > x) = \frac{f (y \mid X > x)}{S (y \mid X > x)} = \frac{f (y) \; / \; S (x)}{S (y) \; / \; S (x)} = \frac{f (y)}{S (y)}$$

$$= \mu_y$$

1.2. CASO DISCRETO

Visto ya el caso continuo de la variable aleatoria $T (x)$, tocaremos otro concepto específico del anterior, que es el de una variable discreta asociada con el tiempo futuro de vida.

Se define $K (x)$ como el número de años futuros completados por x (una persona de edad x), que tiene la siguiente función de probabilidad.

$$f (k) = Pr [K (x) = k] = Pr [k \leq T (x) < k+1] =$$

$$= Pr [k < T (x) \leq k+1] =$$

$$= \quad {}_{k}p_x \; - \; {}_{k+1}p_x \quad =$$

$$= \quad {}_{k}p_x \quad q_{x+k} \quad =$$

$$= \quad {}_{k\,|}\,q_x \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Se observa que estas densidades se desarrollaron anteriormente en el caso continuo, por lo cual no se tocan con mayor profundidad.

Es importante mencionar que k es un entero no negativo. Sea a un número no negativo:

$$F(a) = f(0) + f(1) + \ldots + f([a])$$

$[a]$ donde los corchetes denotan el mayor entero menor o igual que a.

$$\Rightarrow F(a) = \Sigma_{y \leq [a]} f(y) =$$

$$= \Sigma_{y \leq [a]} \; {}_{y}p_x \; - \; {}_{x+1}p_x =$$

$$= {}_{0}p_x - {}_{1}p_x + {}_{1}p_x - {}_{2}p_x + \ldots + {}_{[a]}p_x - {}_{[a+1]}p_x =$$

$$= 1 - {}_{[a+1]}p_x =$$

$$= {}_{[a+1]}q_x$$

$$Pr\,[K < a] = Pr\,(k = 0) + Pr\,(k = 1) + \ldots + Pr\,(k =]a-1[\,)$$

donde $]a\text{-}1[$ denota el entero mayor o igual que $a - 1$.

$$Pr\,(K < a) = {}_{0}p_x - p_x + p_x - {}_{2}p_x + \ldots + {}_{]a-1[}p_x - {}_{]a[}p_x =$$

$$= 1 - {}_{]a[}p_x = {}_{]a[}\,q_x$$

$$ {}_{n}p_{k} = Pr\,(X > k+n \mid X > k) = $$

$$ = \frac{Pr\,(X > k+n)}{Pr\,(X > k)} = $$

$$ = \frac{1 - F\,(k+n)}{1 - F\,(k)} = $$

$$ = \frac{S\,(k+n)}{S\,(k)} = \frac{{}_{k+n}p_{0}}{{}_{k}p_{0}} $$

$$ {}_{n}p_{k}\ {}_{k}p_{0} = {}_{n+k}p_{0} $$

$$ {}_{n}q_{x} = 1 - {}_{n}p_{x} $$

$$ {}_{n|u}q_{k} = {}_{n+u}q_{k} - {}_{n}q_{k} = $$

$$ = {}_{n}p_{k} - {}_{n+u}p_{k} $$

donde k es un entero no negativo.

$$ \sum_{n=0}^{k} {}_{n|}q_{x} = {}_{k+1}q_{x} \qquad k = 0,1,2,\ldots $$

Definimos $J\,(x)$ como la variable aleatoria discreta del tiempo futuro de vida de $(x+k)$, donde x y k son enteros no negativos. Con función de probabilidad:

$$ f(j) = P\,(J = j) = P\,(j \leq U(x) < j+1) = $$

$$ = P\,(j < U(x) \leq j+1) = $$

$$ = P\,(U(x) \leq j+1) - P\,(U(x) \leq j) = $$

$$= {}_{j+1}q_{x+k} - {}_{j}q_{x-k} =$$

$$= {}_{j}p_{x+k} - {}_{j+1}p_{x+k} =$$

$$= {}_{j}p_{x+k} \cdot q_{x+k+j} = {}_{j}|\, q_{x+k} =$$

$$= \frac{{}_{k+j}p_{x} \cdot q_{x+k+j}}{{}_{k}p_{x}}$$

donde j y k son enteros no negativos

La función de distribución de $J(x)$ v.a.d. de tiempo futuro de vida de $x+k$ para un número real no negativo es:

$$F(a) = \sum y \leq [a]\; f(y) =$$

$$= \sum_{y \leq [a]} {}_{y}p_{x+k} \quad {}_{y+1}p_{x+k} =$$

$$= 1 - {}_{[a+1]}p_{x+k} = {}_{[a+1]}q_{x+k}$$

En $[a]$ los corchetes denotan el mayor entero menor o igual que a.

Por lo anterior observamos las siguientes igualdades:

$$S(k) = Pr(T > t) = {}_{k}p_{0}$$

$$F(k) = Pr(X \leq k) = {}_{k}q_{0}$$

$$F(k) = 1 - S(k) = 1 - {}_{k}p_{0}$$

1.3. TABLAS DE MORTALIDAD

Las tablas de mortalidad fueron desarrolladas mucho antes que la teoría estadística para modelos de supervivencia. En estas tabulaciones generalmente se muestra la edad, número de sobrevivientes a cada edad, número de muertes entre edades consecutivas , probabilidad de morir y sobrevivir.

Podemos definir una tabla de mortalidad para valores enteros de la siguiente manera:

x	$S(x)$
0	1
.	.
.	.
ω	0

$x = 0, 1, 2, 3..\omega$

tomando ω como el primer valor para el cual la función de supervivencia es igual a cero, es decir que la probabilidad de que un recién nacido sobreviva a edad ω es nula. Es claro que para $y \geq \omega$, $S(y) = 0$ y $\omega - 1$, $S(\omega - 1) > 0$.

En las tablas de vida o muerte en vez de encontrar $S(x)$ generalmente encontramos este valor multiplicando por un múltiplo de 10, llamado radix y denotado por lo que significa personas vivientes a la edad 0.

Así nuestra columna $S(x)$ cambia por l_x teniendo una interpretación determinística que es el número de personas vivas a edad x, ya no la probabilidad de sobrevivir.

Para la tabla de mortalidad se toma un grupo inicial de personas vivas a edad cero cuya única salida es la muerte. Entonces cada valor l_x representa los sobrevivientes de ese grupo a edad x. Ejemplo:

x	$l(x)$
0	$100,000$
1	$99,292$
.	.
ω	0

Podemos ahora definir:

$l_x = l_0 \, S\,(x)$ donde l_0 es el radix

$d_x = l_x - l_{x+1}$

d_x es el número de personas que mueren entre las edades x y $x+1$.

En forma más general definimos:

${}_nd_x = l_x - l_{x+n}$

dado que l_x representa el número de vivos de edad x en un grupo cerrado entonces ${}_nd_x$ da el número de personas que muere entre las edades x y $x+n$.

Podemos ver que:

$${}_n p_x = S\,(x+n) \;/\; S\,(x)$$

multiplicando por l_0:

$${}_n p_x = \frac{S\,(x+n) \quad l_0}{S\,(x) \quad l_0} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (a)$$

por la igualdad de:

$${}_nq_x = 1 - {}_n p_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} =$$

$$= \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{{}_nd_x}{l_x}$$

o bien:

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \sum_{y=x}^{x+n-1} d_y$$

y así obtuvimos las probabilidades condicionantes de ${}_n p_x$ dado que está vivo a edad x sobreviva a edad $x+n$ y ${}_n q_x$ dado que vive a edad x muera antes de alcanzar la edad $x+n$.

Ahora podemos usar p_x y q_x en términos de l_x cuando $n = 1$ y así completar la tabla de mortalidad.

Otros casos que nos son útiles:

$${}_{t\,|\,u} q_x = {}_{t+u} q_x - {}_t q_x =$$

$$= \frac{l_x - l_{x+t+u} - (l_x - l_{x+t})}{l_x} =$$

$$= \frac{l_{x+t} - l_{x+t+u}}{l_x} = \frac{{}_u d_{x+t}}{l_x}$$

Nota: Tomamos valores l_y o $S\,(y)$ donde $y = 0, 1, 2, \ldots$, es decir x, t, u, n son enteros.

En diversas ocasiones la tabla es preparada con el propósito de no usar edades pequeñas, ya que la los planes de seguro de vida individual de nuestro país no cubren a personas menores de 15 años, por ejemplo a partir de esta edad en adelante, se inicia una tabla con esa l_x al que se llama radix.

Cuando las tablas de mortalidad son construidas de esta forma no es frecuente encontrar una expresión para $S\,(x)$, sin embargo debemos tener en mente si existe una función continuna $S\,(x)$ para aquellas edades que no se encuentran en la tabla.

Para derivar las siguientes funciones de l_x, asumiremos que l_x es una función continua diferenciable y decreciente.

La fuerza de mortalidad es interpretada de la misma manera que cuando se encontraba en función de $S(x)$ con la diferencia que ya no hablamos de probabilidad de supervivencia sino de personas vivas.

Por lo que tenemos que:

$$\mu_x = \frac{-d/dx \; l_x}{l_x} = -D \log l_x$$

por la igualdad de $l_0 S(x) = l_x$

podemos ver que es análoga a:

$$\mu_x = \frac{-d/dx \; S(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{S(x)}$$

de la igualdad de:

$$S(x) = exp\left(-\int_0^x \mu_y \, dy\right)$$

tenemos:

$$l_x = l_0 S(x) = l_0 \, exp\left(-\int_0^x \mu_y \, dy\right)$$

puede ser expresado como un factor que reduce el tamaño de l_x a edad x.

De las igualdades de $S(x)$ del capítulo anterior y (a) obtenemos:

$$_nq_x = \int_0^n {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt =$$

$$= \int_0^n (l_{x+t} / l_x) \, \mu_{x+t} \, dt$$

$$_{n|m}q_x = \int_n^m {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt =$$

$$= \int_n^m (l_{x+t} / l_x) \, \mu_{x+t} \, dt$$

Estas 2 últimas pueden ser interpretadas de la siguiente manera:

${}_t p_x \, \mu_{x+t}$ es la probabilidad de sobrevivir t años y morir instantáneamente al cumplir la edad $x+t$, cuando integramos sobre un intervalo de la probabilidad de morir dentro de éste.

CONCLUSIONES.

El desarrollo de la variable aleatoria continua T y la variable aleatoria discreta K, servirán como base para los siguientes capítulos, así como sus funciones de densidad y distribución.

Para definir y obtener una función general de beneficios, es necesario basarse en estas variables aleatorias, ya que la cobertura principalmente está relacionada con la supervivencia de los asegurados.

La probabilidad de que una persona de edad 0 sobreviva a edad x, S(x) es un concepto importante para definir la variable aleatoria T y K, ya que es la base de la medición de la supervivencia.

Es posible observar la relación estrecha que guardan estas variables con la función de supervivencia la cual nos ayuda a comprender este concepto y diferentes interpretaciones que tiene. Por ejemplo, el uso de la probabilidad condicional en S(x) es equivalente a la función de distribución T.

Al definir los parámetros anteriores quedarán sentadas las bases para la construcción de tablas de mortalidad, utilizando el desarrollo de S(x) y el radix o número de personas vivas al iniciar la tabla.

INTRODUCCION.

Conocido el comportamiento de la variable aleatoria T o tiempo futuro de vida, se propone el uso de una función general de beneficios para seguros y anualidades, que depende de dicha variable aleatoria.

Con esta función se pretende obtener una forma que se adapte a los planes de seguros más usados actualmente, con la que sea posible parametrizarlos facilitando el procedimiento de obtención de obligaciones y beneficios. Este proceso se llevará a cabo mediante la división en intervalos de tiempo total de la cobertura, según el beneficio que otorgue el plan.

En este capítulo se manejarán y se definirán por separado tanto el caso continuo, como el caso discreto, al igual que en el capítulo anterior.

Definida esta función, se analizarán cada plan de seguros y anualidades, demostrando que ésta es aplicable a cada uno de ellos.

Por simplicidad, la tasa de interés utilizada en los cálculos, se mantendrá constante a lo largo de todo el trabajo.

2.1. CASO CONTINUO.

En la siguiente sección hablaremos de los distintos tipos de seguros y anualidades de tipo continuo para una persona de edad x, la cual estará denotada por (x). Para estos se ha encontrado una función general, en la que se expresa el valor presente de los beneficios que otorgan en el tiempo futuro de vida para cada persona.

La función de beneficios general de seguros y anualidades es una combinación lineal de variables descrita de la siguiente forma:

$$Z = \sum a_i + b_i\, v^T \qquad m_{i-1} \leq T < m_i \qquad i = 1,..,n$$

donde a_i y b_i $\forall\ i = 1,..,n$ son números reales y m_i $\forall\ i = 0,..,n$ que son enteros no negativos que satisfacen la siguiente condición:

$$0 \leq m_0 < m_1 < \dots < \infty$$

y υ es el valor presente definido como:

$$\upsilon = \frac{1}{1+i}$$

donde i es la tasa de interés técnica usada, que se comporta constante a lo largo de este trabajo.

Para el desarrollo de la función de valor presente y para los siguientes capítulos usaremos las siguientes igualdades financieras:

$\delta = ln\ (1+i)$ Fuerza de interés

$\bar{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{1 - \upsilon^n}{\delta}$ Valor presente de una anualidad cierta de una unidad pagadera continuamente durante n años.

Seguro ordinario de vida pagadero al momento que la muerte ocurra $\bar{A}_x$.

Este seguro paga una unidad monetaria en el momento que ocurra la muerte del asegurado de edad x.

El intervalo que cubre este seguro será a partir del momento en que se contrata la póliza, es decir , del tiempo futuro de vida $T = 0$, y no habrá límite final.

La función de valor presente del beneficio, Z, será una unidad monetaria traída a valor presente T años. Dicho de otra manera es la unidad traída a valor presente desde el momento en que ocurra la muerte, o el tiempo futuro de vida de esa persona.

Paga el beneficio si muere

$T = 0$

$$Z = \upsilon^T \qquad 0 \leq T < \infty$$

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

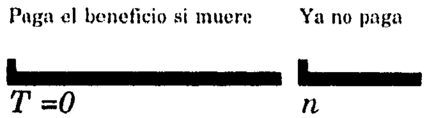
$$Z = \sum a_i + b_i \upsilon^T \quad m_{(i-1)} \leq T < m_i$$

tenemos que $i=1$ y $a_1 = 0$ $b_1=1$ $m_0 = 0$ $m_1=\infty$.

Seguro de vida temporal a n años pagadero al momento de la muerte $\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}$.

Paga una unidad al momento en que ocurra la muerte de (x), siempre y cuando ésta ocurra dentro de los siguientes n años , a partir de la contratación del seguro, es decir, empieza a cubrir desde el tiempo futuro de vida (T) cero hasta $T < n$.

Por lo que Z está dado por el valor presente de una unidad T años, cuando T es igual o mayor que cero, hasta T menor que n.



$$Z = v^T \qquad 0 \leq T < n$$

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^T \quad m_{(i-1)} \leq T < m_i$$

tenemos que para $i=1 : a_1= 0 \;\; b_1=1 \;\; m_0= 0 \;\; m_1=n.$

$$i=2 : a_2= 0 \;\; b_2=0 \;\; m_1= n \;\; m_2=\infty.$$

Seguro ordinario de_vida (vitalicio) diferido m años pagadero al momento de la muerte $_{m|}A_x$.

Paga un peso si la persona de edad x fallece de la edad $x+m$ en adelante. Por lo cual, si el tiempo futuro de vida es menor a m, el seguro no pagará, pero si el tiempo futuro de vida es mayor o igual a m , el seguro pagará una unidad.

La función Z, es el valor presente de una unidad durante el tiempo futuro de vida, mientras éste se encuentre en el intervalo $[m,\infty)$.

No paga Paga el beneficio si muere

$T = 0$ m

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^T \quad m_{(i-1)} \leq T < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $0 \qquad 0 \leq T < m \qquad a_1=0 \quad b_1=0 \quad m_0=0 \quad m_1=m$

2) $v^T \qquad m \leq T < \infty \qquad a_2=0 \quad b_2=1 \quad m_1=m \quad m_2=\infty$

Seguro de vida temporal a n años diferido m pagadero en el momento en que ocurra la muerte $m|A'_{x:\overline{n}|}$

Cubrirá si la muerte de (x) ocurre entre las edades $x+m$ y $x+m+n$, pagando un peso en el momento que suceda, es decir, para un tiempo futuro de vida menor a que m, el seguro no pagará (pagará cero pesos), si el tiempo futuro de vida está desde m años hasta $m+n$, pagará un peso; más si el tiempo futuro de vida es de $m+n$ en adelante, el seguro no pagará.

No paga Paga una unidad si muere No paga

$T = 0$ m $m+n$

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^T \quad m_{(i-1)} \leq T < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

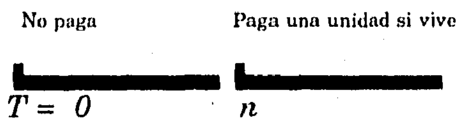
1) 0 $\quad 0 \leq T < m \quad a_1=0 \;\; b_1=0 \;\; m_0=0 \;\; m_1=m$

2) v^T $\quad m \leq T < m+n \quad a_2=0 \;\; b_2=1 \;\; m_1=m \;\; m_2=m+n$

3) 0 $\quad m+n \leq T \quad a_3=0 \;\; b_3=0 \;\; m_2=m+n \;\; m_3=\infty$

Seguro dotal puro a n años $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ o ${}_nE_x$

Provee el pago de una unidad si el asegurado sobrevive por lo menos n años, a partir de que es emitido el seguro, es decir, cuando el tiempo futuro de vida $T \geq n$ se pagará el beneficio. En caso contrario, no se otorgará el beneficio. De esta manera denotaremos la función del valor presente del beneficio Z, como el valor presente a n años de un peso.



En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^T \quad m_{(i-1)} \leq T < m_i$$

Tenemos:

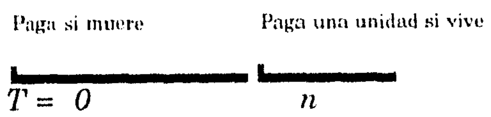
$Z =$

1) 0 $\quad 0 \leq T < n \quad a_1=0 \;\; b_1=0 \;\; m_0=0 \;\; m_1=n$

2) v^n $\quad n \leq T \quad a_2=v^n \;\; b_2=0 \;\; m_1=n \;\; m_2=\infty$

Seguro dotal a n años $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$

Provee el pago en el momento de la muerte siempre y cuando ésta ocurra antes de transcurrir n años o al sobrevivir el asegurado este periodo, lo que ocurra primero. Así pagará por muerte cuando el tiempo futuro de vida $T < n$; o por supervivencia si $T \geq n$, es decir:



En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^T \qquad m_{(i-1)} \leq T < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $v^T \qquad 0 \leq T < n \qquad a_1=0 \;\; b_1=1 \;\; m_0=0 \quad m_1=n$

2) $v^n \qquad n \leq T \qquad a_2=v^n \;\; b_2=0 \;\; m_1=n \quad m_2=\infty$

o bien:

$Z =$

1) $v^T \qquad 0 \leq T \leq n \qquad a_1=0 \;\; b_1=1 \;\; m_0=0 \quad m_1=n$

2) $v^n \qquad n < T \qquad a_2=v^n \;\; b_2=0 \;\; m_1=n \quad m_2=\infty$

Seguro dotal a n años diferido m años $_{m|}A_{x:\overline{n|}}$

Provee el beneficio de muerte si ésta se presenta después de transcurrido el período de diferimiento m, y antes de $m+n$ años; o por supervivencia de los $m+n$ años. En términos del valor presente de este beneficio tenemos que no otorga beneficio por muerte para $0 \leq T < m$; pagará una unidad traída a valor presente al ocurrir la muerte mientras el tiempo futuro de vida cumpla $m \leq T < m+n$; y por supervivencia pagará un peso traído a valor presente desde $m+n$ años si $T \geq m+n$.

No Paga si muere	Paga si muere	Paga si sobrrevive
$T = 0$	m	$m+n$

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^T \qquad m_{(i-1)} \leq T < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $0 \qquad 0 \leq T < m \qquad a_1=0 \quad b_1=0 \quad m_0=0 \quad m_1=m$

2) $v^T \qquad m \leq T < m+n \qquad a_2=0 \quad b_2=1 \quad m_1=m \quad m_2=m+n$

3) $v^{m+n} \qquad m+n \leq T \qquad a_3=v^{m+n} \quad b_3=0 \quad m_2=m+n \quad m_3=\infty$

DIFERENTES TIPOS DE ANUALIDADES

Anualidad de vida entera $\bar{a}_x$

Esta anualidad de una unidad por año pagadero continuamente mientras (x) sobreviva. En este caso se pagará una anualidad continuamente durante el tiempo futuro de vida, es decir:

$$\bar{a}_{\overline{T|}} \quad \text{para} \quad 0 \leq T$$

Paga si vive

$T = 0$

Para ajustarla a nuestra forma general tenemos que:

$$\bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1 - v^T}{\delta} = \frac{1}{\delta} - \frac{v^T}{\delta}$$

siendo δ =

En donde sustituyendo Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^T \qquad m_{(i-1)} \leq T < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $\frac{1 - v^T}{\delta}$ $\quad 0 \leq T < \infty \quad a_1 = 1/\delta \quad b_1 = -1/\delta \quad m_0 = 0 \quad m_1 = \infty$

2) 0 en otro caso.

Anualidad temporal a n años de vida $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$

En este tipo de anualidad se pagará un peso por año, en forma continua durante n años mientras que (x) sobreviva. Esto es, se pagará una anualidad continua durante el tiempo futuro de vida T mientras sea menor que n. Por lo que la función Z es el valor presente de dicha anualidad.

$$\bar{a}_{\overline{T}|} \quad \text{para} \quad 0 \leq T < n$$

y si el tiempo futuro de vida $T \geq n$, solo se pagará una anualidad por n años. Es decir, a lo más se le pagará una anualidad por n años, por lo que Z será :

$$\bar{a}_{\overline{n}|} \quad \text{para} \quad n \leq T$$

Paga si vive No paga

$T = 0$ n

Para ajustarla a nuestra forma general tenemos que:

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - v^T}{\delta} = \frac{1}{\delta} - \frac{v^T}{\delta}$$

En donde sustituyendo Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^T \qquad m_{(i-1)} \leq T < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $\bar{a}_{\overline{T}|}$ $\quad 0 \leq T < n \quad a_1 = 1/\delta \quad b_1 = -1/\delta \quad m_0 = 0 \quad m_1 = n$

2) $\bar{a}_{\overline{n}|}$ $\quad n \leq T < \infty \quad a_2 = \bar{a}_{\overline{n}|} \quad b_2 = 0 \quad m_1 = n \quad m_2 = \infty$

Anualidad de vida entera diferida m años $_{m|}\bar{a}_x$

Anualidad de un peso por año pagadero continuamente, mientras que (x) sobreviva a partir de $x+m$. Si el tiempo futuro de vida $T < m$ no se pagará el beneficio. En el caso de que $T \geq m$, se otorgará un beneficio igual al de una anualidad de vida pero restándole la anualidad que será pagada durante el diferimiento, o que es lo mismo:

$$\bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{m}|} \quad \text{para} \quad T \geq m$$

No paga Paga si vive

$T = 0$ m

Para ajustarla a nuestra forma general tenemos que:

$$\bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{m}|} = \frac{1 - v^T}{\delta} - \frac{1 - v^m}{\delta} = \frac{v^m}{\delta} - \frac{v^T}{\delta}$$

En donde sustituyendo Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^T \qquad m_{(i-1)} \leq T < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $0 \qquad 0 \leq T < m \qquad a_1=0 \quad b_1=0 \quad m_0=0 \quad m_1=m$

2) $\bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{m}|} \qquad m \leq T < \infty \qquad a_2=v^m/\delta \quad b_2=-1/\delta \quad m_1=m \quad m_2=\infty$

Anualidad temporal a n años diferida m años $_{m|}\bar{a}_{x:\overline{n}|}$

Esta anualidad paga un peso al año en forma continua a partir de que el asegurado tenga edad $x+m$ hasta edad $x+m+n$ siempre y cuando se mantenga con vida. Por lo cual, si $T < n$, el beneficio será igual a cero. En caso de que se encuentre entre $x+m$ y $x+m+n$ se otorgará un beneficio en forma de vida entera restándole una anualidad por el período de diferimiento (su valor presente $\bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{m}|}$). Y por último, si $T \geq m+n$ se proveerá un beneficio de una anualidad por n años diferida m .

No Paga | Paga anualidad si vive | A lo más habra pagado $_{m|}\bar{a}_{\overline{n}|}$

$T = 0$ | m | $m+n$

Para ajustarlo a nuestra forma general:

$$\bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{m}|} = \frac{1 - v^T}{\delta} - \frac{1 - v^m}{\delta} = \frac{v^T - v^m}{\delta}$$

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^T \qquad m_{(i-1)} \leq T < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) 0 $\quad 0 \leq T < m \quad a_1=0 \quad b_1=0 \quad m_0=0 \quad m_1=m$

2) $\bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{m}|}$ $\quad m \leq T < m+n \quad a_2=v^m \quad b_2=-1/\delta \quad m_1=m \quad m_2=m+n$

3) $v^m\bar{a}_{\overline{n}|}$ $\quad m+n \leq T \quad a_3=v^m\bar{a}_{\overline{n}|} \quad b_3=0 \quad m_2=m+n \quad m_3=\infty$

2.2 CASO DISCRETO.

En la siguiente sección hablaremos de los distintos tipos de seguros y anualidades de tipo discreto para una persona de edad x, la cual estará denotada por (x). Para estos se ha encontrado una función general, en la que se expresa el valor presente de los beneficios que otorgan en el tiempo futuro de vida para cada persona.

La función de beneficios general de seguros y anualidades es una combinación lineal de variables bajo las condiciones descritas en el capítulo número 1 en el caso discreto y que podemos describir de la siguiente forma:

$$Z = \sum a_i + b_i\, v^{K+1} \qquad m(\,i\text{-}1\,) \leq K < m\,(\,i\,) \qquad i = 1,..,n$$

$$\text{donde } K = 0,\ 1,\ 2,..$$

donde a_i y b_i $\forall\ i = 1,..,n$ que son números reales y $m(\,i\,)$ $\forall$ $i = 0,..,n$ que son enteros no negativos que satisfacen la siguiente condición:

$$0 \leq m(\,0\,) < m(\,1\,) < \ldots \leq \infty$$

y v es el valor presente definido como:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

donde i es la tasa de interés técnico usado, que se comporta constante a lo largo de este trabajo.

Para el desarrollo de la función de valor presente y para los siguientes capítulos usaremos las siguientes igualdades financieras:

$d \;= 1\text{-}v$	tasa de descuento
$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert} = (\,1 - v^n)/d$	Valor presente de anualidad anticipada de una unidad al año durante n años.
$a_{\overline{n}\rvert} = (\,1 - v^n)/i$	Valor presente de anualidad vencida de una unidad al año durante n años.

Seguro ordinario de vida pagadero al final del año en que ocurra la muerte A_x.

Este seguro paga el valor presente de una unidad monetaria al final del año en ocurra la muerte del asegurado de edad x.

El intervalo que cubre este seguro será a partir del momento en que se contrata la póliza, es decir, del tiempo futuro de vida $K = 0$, y no habrá límite final.

La función de valor presente del beneficio Z, será una unidad monetaria traída a valor presente K años. Dicho de otra manera es la unidad traída a valor presente desde el momento en que ocurra la muerte, o el tiempo futuro de vida de esa persona.

Paga el beneficio si muere

$K = 0$

$$Z = v^{K+1} \qquad 0 \leq K < \infty \qquad (2.1.)$$

donde $K = 0, 1, 2, ..$

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i\, v^{K+1} \quad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

tenemos que $i=1$ y $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $m_0 = 0$, $m_1 = \infty$.

Seguro de vida temporal a n años pagadero al final del año en que ocurra la muerte $A_{x:\overline{n|}}^{1}$.

Representa el valor presente de una unidad al final del año en que ocurra la muerte de (x), siempre y cuando ésta ocurra dentro de los siguientes n años, a partir de la contratación del seguro.

Es decir, este tipo de seguro empieza a cubrir desde el tiempo futuro de vida (K) cero hasta $K < n$.

Por lo que Z esta dado por el valor presente de una unidad K años cuando K es igual o mayor que cero, hasta K menor que n.

Paga el beneficio si muere — Ya no paga

$K = 0$ — n

$$Z = v^{K+1} \qquad 0 \leq K < n$$

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

Z =

1) v^{K+1} $\quad 0 \leq K < n \quad a_1=0 \quad b_1=1 \quad m_0=0 \quad m_1=n$

2) 0 $\quad n \leq K < \infty \quad a_2=0 \quad b_2=0 \quad m_1=n \quad m_2=\infty$

Seguro ordinario de vida (vitalicio) diferido m años $_{m|}A_x$.

Paga un peso si la persona de edad (x) fallece de la edad $x+m$ en adelante indefinidamente. Por lo cual, si el tiempo futuro de vida es menor a m, el seguro no procederá, pero si el tiempo futuro de vida es mayor o igual a m, el seguro pagará el valor presente de una unidad.

La función Z, es el valor presente de la unidad el tiempo futuro de vida, mientras éste se encuentre en el intervalo $[m,\infty)$.

No paga Paga el beneficio si muere

$K = 0$ m

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i\, v^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $0 \qquad 0 \leq K < m \qquad a_1=0 \quad b_1=0 \quad m_0=0 \quad m_1=m$

2) $v^{K+1} \qquad m \leq K < \infty \qquad a_2=0 \quad b_2=1 \quad m_1=m \quad m_2=\infty$

Seguro de vida temporal a n años diferido m, $_{m|}A_{x:\overline{n}|}$

Cubrirá si la muerte de (x) ocurre entre las edades $x+m$ y $x+m+n$, pagando un peso al final del año en que suceda.

Es decir, para un tiempo futuro de vida menor que m, el seguro no pagará (pagará cero pesos), si el tiempo futuro de vida está desde m años hasta $m+n$, pagará un peso; más si el tiempo futuro de vida es de $m+n$ en adelante, el seguro no pagará.

No paga Paga una unidad si muere No paga

$K = 0$ m $m+n$

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

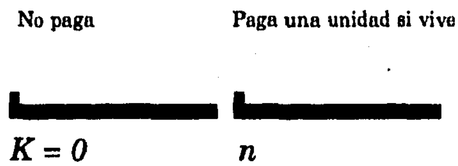
$$Z = \sum a_i + b_i\, v^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

$$
Z = \begin{array}{llllll}
1)\ 0 & 0 \le K < m & a_1=0 & b_1=0 & m_0=0 & m_1=m \\
2)\ v^{K+1} & m \le K < m+n & a_2=0 & b_2=1 & m_1=m & m_2=m+n \\
3)\ 0 & m+n \le K & a_3=0 & b_3=0 & m_2=m+n & m_3=\infty
\end{array}
$$

Seguro dotal puro a n años $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$ o ${}_nE_x$

Provee el pago de una unidad si el asegurado sobrevive por lo menos n años, a partir de que es emitido el seguro, es decir , cuando el tiempo futuro de vida $K \geq n$ se pagará el beneficio. En caso contrario , no se otorgará el beneficio. De esta manera denotaremos la función del valor presente del beneficio Z, como el valor presente a n años de un peso.



En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z= \sum a_i + b_i\, v^{k+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

$$
Z = \begin{array}{llllll}
1)\ 0 & 0 \le K < n & a_1=0 & b_1=0 & m_0=0 & m_1=n \\
2)\ v^n & n \le K & a_2=v^n & b_2=0 & m_1=n & m_2=\infty
\end{array}
$$

Seguro dotal a n años $A_{x:\overline{n}|}$

Provee el pago al final del año de la muerte siempre y cuando esta ocurra antes de transcurrir n años o al sobrevivir el asegurado este período, lo que ocurra primero.

Así, pagará por muerte cuando el tiempo futuro de vida $K < n$; o por supervivencia si $K \geq n$, es decir:

Paga si muere | Paga una unidad si vive

$K = 0$ | n

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i\, v^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $v^{K+1} \qquad 0 \leq K < n \qquad a_1=0 \quad b_1=1 \quad m_0=0 \quad m_1=n$

2) $v^{n} \qquad n \leq K \qquad a_2=v^{n} \quad b_2=0 \quad m_1=n \quad m_2=\infty$

Seguro dotal a n años diferido m años ${}_{m|}A_{x:\overline{n}|}$

Provee el beneficio de muerte si ésta se presenta después de transcurrido el período de diferimiento m, y antes de $m+n$ años; o por supervivencia después de los $m+n$ años. En términos del valor presente de este beneficio tenemos que no se otorga beneficio por muerte para $0 \leq K < m$; pagará una unidad traída a valor presente al final del año en que ocurra la muerte mientras el tiempo futuro de vida cumpla $m \leq K < m+n$; y por supervivencia pagará un peso traído a valor presente desde $m+n$ años si $K \geq m+n$.

No Paga | **Paga si muere** | **Paga si sobrevive**

$K = 0$ | m | $m+n$

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i\, v^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $0 \qquad 0 \leq k < m \qquad a_1 = 0 \quad b_1 = 0 \quad m_0 = 0 \quad m_1 = m$

2) $v^{K+1} \qquad m \leq K < m+n \qquad a_1 = 0 \quad b_1 = 1 \quad m_0 = m \quad m_1 = m+n$

2) $v^{m+n} \qquad m+n \leq T \qquad a_2 = v^{m+n} \quad b_2 = 0 \quad m_1 = m+n \quad m_2 = \infty$

DIFERENTES TIPOS DE ANUALIDADES

Anualidad anticipada de vida entera $\ddot{a}\, x$

Esta anualidad paga una unidad monetaria por año al principio del año mientras (x) sobreviva. En este caso se pagará una anualidad durante el tiempo futuro de vida, es decir:

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} \quad \text{para} \quad 0 \leq K \quad (K \text{ enteros})$$

Paga si vive

$K = 0$

Para ajustarla a nuestra forma general tenemos que:

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \frac{1 - v^{K+1}}{d} = \frac{1}{d} - \frac{v^{K+1}}{d}$$

siendo d=

En donde sustituyendo Z:

$$Z = \sum a_i + b_i\, v^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$ $\quad 0 \leq K < \infty \quad a_1 = 1/d \quad b_1 = -1/d \quad m_0 = 0 \quad m_1 = \infty$

2) 0 $\quad$ en otro caso.

Anualidad vencida de vida entera a_x

Esta anualidad de una unidad monetaria por año pagadero al final del año mientras (x) sobreviva. En este caso se pagará una anualidad durante el tiempo futuro de vida, es decir:

$a_{\overline{K}|}$ para $0 \leq K$ (K enteros)

Paga si vive

$K = 1$

Para ajustarla a nuestra forma general tenemos que:

$$a_{\overline{K}|} = \frac{1}{i} - \frac{v^{K+1}}{d} = \frac{1}{i} - \frac{v^K}{i} = \frac{1 - v^K}{i}$$

En donde sustituyendo Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $a_{\overline{K}|}$ $\quad 0 \leq K < \infty \quad a_1 = 1/i \quad b_1 = -1/d \quad m_0 = 0 \quad m_1 = \infty$

2) 0 $\quad$ en otro caso.

Anualidad temporal anticipada a n años $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

En este tipo de anualidad se pagará un peso por año, en forma anticipada durante n años mientras que (x) sobreviva. Esto es, se pagará una anualidad anticipada durante el tiempo futuro de vida K mientras sea menor que n. Por lo que la función Z es el valor presente de dicha anualidad.

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} \quad \text{para} \quad 0 \leq K < n \quad (\, K \text{ enteros}\,)$$

y si el tiempo futuro de vida $K \geq n$, sólo se pagará una anualidad por n años. Es decir, a lo más se le pagará una anualidad por n años, por lo que Z será :

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} \quad \text{para} \quad n \leq K$$

Paga si vive Paga a lo más $\ddot{a}_{\overline{n}|}$

$K = 0$ n

Para ajustarla a nuestra forma general tenemos que:

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \frac{1 - v^{K+1}}{d} = \frac{1}{d} - \frac{v^{K+1}}{d}$$

En donde sustituyendo Z:

$$Z = \sum a_i + b_i\, v^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$ $\quad 0 \leq K < n \quad a_1 = 1/d \quad b_1 = -1/d \quad m_0 = 0 \quad m_1 = n$

2) $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ $\quad n \leq K < \infty \quad a_1 = \ddot{a}_{\overline{n}|} \quad b_1 = 0 \quad m_1 = n \quad m_2 = \infty$

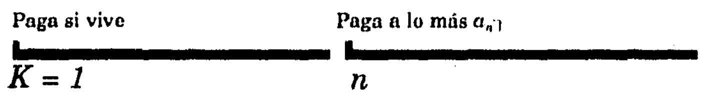
Anualidad temporal vencida a n años $a_{x:\overline{n}|}$

En este tipo de anualidad se pagará un peso por año, en forma vencida durante n años mientras que (x) sobreviva. Esto es, se pagará una anualidad vencida durante el tiempo futuro de vida K mientras sea menor que n. Por lo que la función Z es el valor presente de dicha anualidad.

$$a_{\overline{K}|} \quad \text{para} \quad 0 \le K < n \quad (\,K \text{ enteros}\,)$$

y si el tiempo futuro de vida $K \ge n$, solo se pagará una anualidad por n años. Es decir, a lo más se le pagará una anualidad por n años, por lo que Z será :

$$a_{\overline{K}|} \quad \text{para} \quad n \le K$$



Para ajustarla a nuestra forma general tenemos que:

$$a_{\overline{K}|} = \frac{1}{i} - \frac{v^{K+1}}{d} = \frac{1}{i} - \frac{v^{K}}{i}$$

En donde sustituyendo Z:

$$Z = \sum a_i + b_i\, v^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \le K < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $a_{\overline{K}|} \qquad 0 \le K < n \qquad a_1 = 1/i \qquad b_1 = -1/d \qquad m_0 = 0 \qquad m_1 = n$

2) $a_{\overline{n}|} \qquad n \le K < \infty \qquad a_2 = a_{\overline{n}|} \qquad b_2 = 0 \qquad m_1 = n \qquad m_2 = \infty$

Anualidad anticipada de vida entera diferida m años $_{m|}\ddot{a}_x$

Anualidad de un peso por año pagadero al principio del año, mientras que (x) sobreviva a partir de $x+m$.

Si el tiempo futuro de vida $K < m$ no se pagará el beneficio. En el caso de que $K \geq m$, se otorgará un beneficio igual al de una anualidad anticipada de vida entera pero restándole la anualidad anticipada que será pagada durante el diferimiento, o que es lo mismo:

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|} \quad \text{para } K \geq m$$

No paga Paga $\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}$

$K = 0$ m

Para ajustarla a nuestra forma general tenemos que:

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|} = \frac{1 - v^{K+1}}{d} - \frac{1 - v^{m}}{d} = \frac{v^m}{d} - \frac{v^{K+1}}{d}$$

En donde sustituyendo Z:

$$Z = \sum a_i + b_i\, v^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) $0 \qquad 0 \leq K < m \qquad a_1=0 \qquad b_1=0 \qquad m_0=0 \quad m_1=m$

2) $\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|} \qquad m \leq K < \infty \qquad a_2=v^m/d \qquad b_2=-1/d \qquad m_1=m \qquad m_2=\infty$

Anualidad vencida de vida entera diferida m años $_{m|}a_x$

Anualidad de un peso por año pagadero al final del año, mientras que (x) sobreviva a partir de $x+m$.

Si el tiempo futuro de vida $K < m$ no se pagará el beneficio. En el caso de que $K \geq m$, se otorgará un beneficio igual al de una anualidad de vida entera pero restándole la anualidad que será pagada durante el diferimiento, o que es lo mismo:

$$a_{\overline{K}|} - a_{\overline{m}|} \quad \text{para } K \geq m$$

No paga Paga $\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}$

$K = 0$ m

Para ajustarla a nuestra forma general tenemos que:

$$a_{\overline{K+1}|} - a_{\overline{m}|} = \frac{v^m}{i} - \frac{v^{K+1}}{d}$$

En donde sustituyendo Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

Z =

1) 0 $\quad 0 \leq K < m \quad a_1=0 \quad b_1=0 \quad m_0=0 \quad m_1=m$

2) $a_{\overline{K}|} - a_{\overline{m}|}$ $\quad m \leq K < \infty \quad a_2=v^m/i \quad b_2=-1/d \quad m_1=m \quad m_2=\infty$

Anualidad temporal anticipada a n años diferida m años ${}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

Esta anualidad paga un peso al año en forma anticipada a partir de que el asegurado tenga edad $x+m$ hasta edad $x+m+n$ siempre y cuando se mantenga con vida. Por lo cual, el beneficio será igual a cero si $K < m$. En caso de que se encuentre entre $x+m$ y $x+m+n$ se otorgará un beneficio en forma de vida entera restándole una anualidad por el período de diferimiento (su valor presente $a_{\overline{K+1}|} - a_{\overline{m}|}$). Y por último, si $K \geq m+n$ se proveerá un beneficio de una anualidad anticipada a n años diferida m. Las dos anteriores expresiones las podemos enunciar de la siguiente forma:

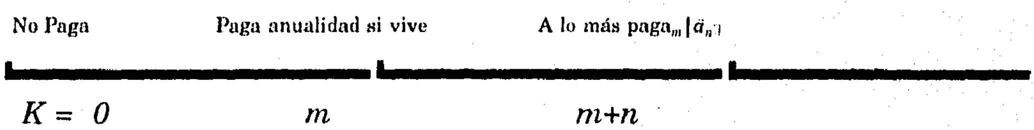
para $m \leq K < m+n$

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|} = \frac{1 - v^{K+1}}{d} - \frac{1 - v^{m}}{d} = \frac{v^{m}}{d} - \frac{v^{K+1}}{d}$$

para $K \geq m+n$

$${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|} = \frac{1 - v^{m+n}}{d} - \frac{1 - v^{m}}{d} = \frac{v^{m} - v^{m+n}}{d} =$$

$$= \frac{v^{m}(1 - v^{n})}{d} = v^{m}\,\ddot{a}_{\overline{n}|}$$



En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i v^{K+1} \quad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) 0	$0 \leq K < m$	$a_1=0$	$b_1=0$	$m_0=0$	$m_1=m$	
2) $\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil} - \ddot{a}_{\overline{m}\rceil}$	$m \leq K < m+n$	$a_1=v^m/d$	$b_1=-1/d$	$m_0=m$	$m_1=m+n$	
3) $v^m \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$m+n \leq K$	$a_2=v^m \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$b_2=0$	$m_1=m+n$	$m_2=\infty$	

Anualidad temporal vencida a n años diferida m años $_{m|}a_{x:\overline{n}\rceil}$

Esta anualidad paga un peso al año en forma vencida a partir de que el asegurado tenga edad $x+m$ hasta edad $x+m+n$ siempre y cuando se mantenga con vida. Por lo cual, si $K<m$, el beneficio será igual a cero. En caso de que se encuentre entre $x+m$ y $x+m+n$ se otorgará un beneficio en forma de vida entera restándole una anualidad por el período de diferimiento (su valor presente $a_{\overline{K}\rceil} - a_{\overline{m}\rceil}$). Y por último, si $K \geq m+n$ se proveerá un beneficio de una anualidad a n años diferida m. Estas dos expresiones las podemos enunciar de la siguiente forma:

para $m \leq K < m+n$

$$a_{\overline{K}\rceil} - a_{\overline{m}\rceil} = \frac{1 - v^K}{d} - \frac{1 - v^m}{i} = \frac{v^m}{i} - \frac{v^K}{d}$$

para $K \geq m+n$

$$_{m|}a_{\overline{n}\rceil} = = v^m \, a_{\overline{n}\rceil}$$

No Paga | Paga anualidad si vive | A lo más paga $_{m|}a_{\overline{n}\rceil}$

$K = 0$ | $m+1$ | $m+n$

En donde sustituyendo de la forma general de Z:

$$Z = \sum a_i + b_i\, \upsilon^{K+1} \qquad m_{(i-1)} \leq K < m_i$$

Tenemos:

$Z =$

1) 0	$0 \leq K < m$	$a_1=0$	$b_1=0$	$m_0=0$	$m_1=m$
1) $a_{\overline{K}|} - a_{\overline{m}|}$	$m \leq K < m+n$	$a_2=\upsilon^m / i$	$b_2=-1/d$	$m_1=m$	$m_2=m+n$
2) $\upsilon^m a_{\overline{n}|}$	$m+n \leq K$	$a_3=\upsilon^m a_{\overline{n}|}$	$b_3=0$	$m_2=m+n$	$m_3=\infty$
3) 0	en otro caso.				

CONCLUSIONES.

1) Analizando cada uno de los tipos de seguros y anualidades, es posible observar que nuestra función general de beneficios se adapta a cada uno de ellos.

2) De la misma forma, notamos que para los planes que otorgan beneficios exclusivamente por muerte, se podría omitir el uso del parámetro a_i en la fórmula propuesta, es decir, $Z = \sum b_i \upsilon^T$ ya que éste es necesario sólo para beneficios otorgados por supervivencia.

3) Dado que nuestro objetivo es la creación de una fórmula general para diferentes beneficios, se decidió mantener la expresión completa en todos los tipos de plan.

4) Con este análisis, se obtuvieron los parámetros de cada seguro y anualidad que serán de gran utilidad para cualquier desarrollo posterior que se le haga a esta función general.

INTRODUCCION.

Habiendo definido una variable aleatoria Z, el objetivo en este capítulo será obtener su función de distribución general. Con ella y usando los parámetros obtenidos en el capítulo anterior, se obtendrá la función de distribución particular para cada plan. Con esta función general se pretende facilitar el desarrollo para cada tipo de seguro y anualidad.

La obtención de esta función de distribución general se basará en la división por intervalos del espacio muestral definido anteriormente con la función Z valor presente de beneficios. Se partirá de la función de distribución de K o T, de acuerdo al tipo de seguro, discreto o continuo .

Posteriormente, por medio de métodos algebraicos y principios probabilísticos se obtendrá la función de distribución general.

Serán desarrollados los dos casos usados a lo largo de nuestro trabajo: continuo y discreto con el objetivo de calcular los seguros pagaderos al momento de la muerte, así como los que se pagan al final del año en que ocurra el siniestro.

3.1. CASO CONTINUO.

Teorema:

La función de distribución de la variable aleatoria Z está definida por la siguiente función:

$$F_Z(z) = \sum H_i(z)$$

para i = 1,2,...,n

donde $H_i\ (z)$ toma los siguientes valores:

$H_i(z)=$

a) ${}_{m(i)}q_x - {}_{max\{r(i),\, m(i-1)\}}q_x$	Para $b_i>0,\ a_i<z$
b) ${}_{min\{r(i),\, m(i)\}}q_x - {}_{m(i-1)}q_x$	Para $b_i<0,\ z<a_i$
c) ${}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x$	Para $b_i<0,\ a_i\leq z$
d) ${}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x$	Para $b_i=0,\ a_i\leq z$
e) 0	otro caso

donde $r(i) = -\dfrac{1}{\delta}\, ln\, \dfrac{(z - a_i)}{b_i}$

Demostración.

Podemos escribir $F(z)$ como:

$$
\begin{aligned}
F(z) &= P(\ Z(T) \leq z\ ) = P(\ Z(T) \leq z\ \cap \Omega^{*}\ ) \\
&= P\{\ Z(T) \leq z\ \cap\ (\cup_{i=1}^{n}\ [\ m(i-1),m(i)\ ]\ )\ \} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} P[\ (a_i+b_i\, v^T \leq z) \cap\ m(i-1) \leq T < m(i)\ ] = \sum_{i=1}^{n} H_i(z)^{**} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ya que $0 \leq m(0) < m(1) < m(2) < \ldots < m(n) \leq \infty$ y

$[\ m(0),m(1)\ ) \cup [\ m(1), m(2)\ ) \cup \ldots \cup [\ m(n-1), m(n)\ )$ = espacio muestral, es decir el recorrido completo de la variable aleatoria T.

$[\ m(0), m(1)\ ) \cap [\ m(1),m(2)\ ) \cap \ldots \cap [\ m(n-1),m(n)\ ) = \Phi$ (conjunto vacío)

i) Si $b_i>0$ y $a_i < z$

* Ω denota el espacio muestral.

** Se define $Hi(z) = P[\ a_i + b_i\, v^t \leq z \cap m(i-1) \leq T < m(i)\ ]$

De {1} tenemos :

$$H_i(z) = P[\, a_i + b_i\, \upsilon^T \leq z \sqcap m(i-1) \leq T < m(i)]$$

$$= P\left(\upsilon^T \leq \frac{z - a_i}{b_i} \sqcap [m(i-1) \leq T < m(i)]\right)$$

$$= P\left(T \geq (-1/\delta)\, ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right) \sqcap [m(i-1) \leq T < m(i)] \right)$$

$$= P\left[\, ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right) (-1/\delta) \right] \leq T \;\; \& \;\; (m(i-1) \leq T < m(i)) \,]$$

$$= P\left[\, max\left\{ (-1/\delta) ln \frac{z - a_i}{b_i}, m(i-1) \right\} \leq T < m(i) \right]$$

y como habíamos visto:

$$F_T(t) = prob(T \leq t) = {}_t q_x \qquad \text{para } t \geq 0$$

$$\therefore \quad H_i = {}_{m(i)}q_x - {}_{max\{r(i),\, m(i-1)\}}q_x \qquad \text{Para } b_i > 0, a_i < z \qquad \{2\}$$

donde $r(i) = -\dfrac{1}{\delta}\, ln\left(\dfrac{z - a_i}{b_i}\right)$

ii) Si $b_i > 0$ y $a_i \geq z$

Como $b_i > 0 \Rightarrow b_i \upsilon^T > 0$

y $a_i \geq z \;\Rightarrow\; a_i + b_i \upsilon^T > z$ de {1}

$$H_i(z) = P[\, a_i + b_i\, \upsilon^T \leq z \;\sqcap\; m(i-1) \leq T < m(i)]$$

$$\Rightarrow \quad H_i(z) = P[\, \Phi \sqcap m(i-1) \leq T < m(i)]$$

$$= P[\Phi] = 0 \qquad \{3\}$$

iii) Si $b_i<0$ y $z<a_i$

De (1) tenemos :

$$H_i(z) = P[\, a_i+b_i\, v^T \leq z \cap m(i-1) \leq T < m(i)]$$

$$= P[\, v^T \geq \frac{z-a_i}{b_i} \cap (m(i-1) \leq T < m(i))]$$

$$= P[\, T \leq (-1/\delta)\ln(\frac{z-a_i}{b_i})\,] \cap [m(i-1) \leq T < m(i)]$$

$$= P[\, m(i-1) \leq T < \min\{(-1/\delta)\ln \frac{z-a_i}{b_i}, m(i)\}\,]$$

y como habíamos visto:

$$F_T(t) = prob(\,T \leq t\,) = {}_t q_x \qquad \textbf{para } t\geq 0$$

$$\therefore \quad H_i = {}_{\min\{r(i),\, m(i)\}}q_x - {}_{m(i-1)}q_x \qquad \textbf{Para } b_i<0, z<a_i \qquad \textbf{(4)}$$

donde $r(i) = -\frac{1}{\delta}\ln\frac{(z-a_i)}{b_i}$

IV) Si $b_i<0,\ z \geq a_i$

Como $b_i<0 \Rightarrow b_i\, v^T < 0$

y $\quad a_i \leq z \Rightarrow a_i+b_i v^T < z$

de (1) $\quad H_i(z) = P[\, a_i+b_i\, v^T \leq z \cap m(i-1) \leq T < m(i)]$

$$\Rightarrow \quad H_i(z) = P[\, \Omega \cap m(i-1) \leq T < m(i)\,]$$

$$H_i(z) = P[\, m(i-1) \leq T < m(i)]$$

$$\therefore \quad H_i = {}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x \qquad \textbf{Para } b_i< 0,\ z \geq a_i \qquad \textbf{(5)}$$

V) Si $b_i=0 \quad z<a_i$

Como $b_i=0 \Rightarrow b_i v^T = 0$

$y \;\; z < a_i \Rightarrow a_i+b_i v^T > z$

de (1) $\qquad H_i(z)= P[\, a_i+b_i\, v^T \leq z \sqcap m(i-1) \leq T < m(i)]$

$\Rightarrow \qquad H_i(z)= P[\, \Phi \sqcap m(i-1) \leq T < m(i)] = P[\Phi\,] = 0$

$\therefore\;\; H_i(z)= 0$ $\qquad$ Para $b_i=0 \;\; z<a_i$ $\qquad$ **(6)**

VI) Si $b_i=0,\; z \geq a_i$

Como $b_i=0 \Rightarrow b_i v^T = 0$

y $\qquad a_i \leq z \;\Rightarrow\; a_i+b_i v^T < z$

de (1) $\;\; H_i(z)= P[\, a_i+b_i\, v^T \leq z \sqcap m(i-1) \leq T < m(i)]$

$\Rightarrow \qquad H_i(z)= P[\, \Omega \sqcap m(i-1) \leq T < m(i)]$

$\therefore\; H_i(z)= P[\, m(i-1) \leq T < m(i)]$ $\qquad$ Para $b_i=0,\; z \geq a_i$ $\qquad$ **(7)**

Por:(1), (2), (4), (5), (6) y (7) queda demostrado el teorema.

Seguro de vida entera pagadero al momento de la muerte $\bar{A}x$

$Z = v^T \qquad 0 \leq T \qquad a_1 = 0,\ b_1=1\ \ m_0=0\ \ m_1=\infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H(z) = {}_{m(i)}q_x - {}_{max\{r(1),\, m(0)\}}\, q_x$ Para $b_1>0, a_1<z$

Donde $r(1) = \frac{-1}{\delta}\ ln \frac{(z-a_i)}{b_1}$

Sustituyendo

$H_1(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{max\{r(1),\, 0\}}\, q_x$ Para $b_1>0, a_1 = 0 < z$

Donde $r(1) = \frac{-1}{\delta}\ ln\ (z)$

1) Para $b_1>0, 0<z$

a) Si $max = \{ \frac{-1}{\delta} ln(z), 0 \} = \frac{-1}{\delta} ln(z)$ tenemos:

$$\frac{-1}{\delta} ln(z) > 0$$

$$ln(z)<0$$

$$\therefore\ z<1 \text{ y como } 0<z \Rightarrow$$

$H_{1a}(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{r(1)}q_x = 1 - {}_{r(1)}q_x = {}_{r(1)}p_x$ para $0 < z < 1$

b) Si $max = \left| -\frac{1}{\delta} \ln(z), 0 \right| = 0$ tenemos:

$$-\frac{1}{\delta} \ln(z) \leq 0$$

$$\ln(z) \geq 0$$

$$\therefore \quad z \geq 1 \quad \Rightarrow$$

$$H_{1b}(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{0}q_x = 1 - 0 = 1 \qquad \text{para } z \geq 1$$

Concluímos:

$$H_{1a}(z) = {}_{r(1)}p_x \qquad \text{para } 0 < z < 1$$

$$H_{1b}(z) = 1 \qquad \text{para } z \geq 1$$

Lo que podemos expresar:

$F(z)=$

a) 0 $\quad z=0$

b) ${}_{r(i)}p_x$ $\quad 0 < z < 1$ $\quad$ donde $r(1) = \frac{-1}{\delta} \ln z$

c) 1 $\quad z \geq 1$

Seguro temporal a n años pagadero al momento de la muerte $\bar{A}x^1{:}\overline{n|}$

$Z =$

a) v^T $\quad 0 \leq T < n$ $\qquad a_1=0,\ b_1=1,\ m_1=n$

c) 0 $\quad n \leq T$ $\qquad a_2=0,\ b_2=0,\ m_1=n,\ m_2=\infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{\max\{r(1),\, m(0)\}}q_x$ $\qquad$ Para $b_1 > 0,\ a_1 < z$

Para $r(1) = \dfrac{-1}{\delta} \ln \dfrac{(z - a_1)}{b_1}$

$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$ $\qquad$ Para $b_2=0,\ a_2 \leq z$

Sustituyendo:

i) Para $b_1>0,\ a_1 = 0 < z$

$H_1(z) = {}_nq_x - {}_{\max\{r(1),\, 0\}}q_x$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta} \ln (z)$

Como $T < n$ tenemos:

$z = v^T > v^n$

a) Si $max = \left\{ \frac{-1}{\delta} ln(z), 0 \right\} = \frac{-1}{\delta} ln(z)$ tenemos:

$$\frac{-1}{\delta} ln(z) > 0$$

$$ln(z) < 0$$

$\therefore \quad z < 1$ y como $\upsilon^n < z \quad \Rightarrow$

$$H_{1a}(z) = {}_nq_x - {}_{r(1)}q_x \qquad \text{para } \upsilon^n < z < 1$$

b) Si $max = \left\{ \frac{-1}{\delta} ln(z), 0 \right\} = 0$ tenemos:

$$\frac{-1}{\delta} ln(z) \leq 0$$

$$ln(z) \geq 0$$

$\therefore \quad z \geq 1 \quad \Rightarrow$

$$H_{1b}(z) = {}_n q_x - {}_0 q_x = {}_n q_x - 0 = {}_n q_x \qquad \text{para } 1 \leq z$$

$$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x = {}_\infty q_x - {}_n q_x = 1 - {}_n q_x \qquad \text{para } b_2 = 0,\ 0 \leq z$$

Por lo tanto, tenemos:

$H_{1a}(z) = {}_n q_x - {}_{r(1)}q_x$	Para $\upsilon^n \leq z < 1$
$H_{1b}(z) = {}_n q_x$	Para $1 \leq z$
$H_2(z) = 1 - {}_n q_x$	Para $0 \leq z$

Lo podemos expresar:

$F_Z(z)=$

a) ${}_{n}p_x$ para $0 \leq z < v^n$

b) ${}_{r(1)}p_x$ para $v^n < z < 1$

c) 1 para $1 \leq z$

Donde $r(1) = \frac{-1}{\delta} \ln (z)$

Seguro dotal (mixto) a n años $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$

$Z =$

a) v^T $0 \leq T \leq n$ $a_1=0$ $b_1=1$ $m_0=0$ $m_1=n$

b) v^n $n < T$ $a_2=v^n$ $b_2=0$ $m_1=n$ $m_2=\infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{\max\{r(1),\, m(0)\}}q_x$ Para $b_1>0$, $a_1< z$

Para $r(1) = \frac{-1}{\delta} \ln \frac{(z - a_1)}{b_1}$

$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2=0$, $a_2 \leq z$

Sustituyendo:

1) $H_1(z) = {}_nq_x - {}_{max\{r(1),0\}}q_x$ Para $b_1 = 1 > 0$, $a_1 = 0 < z$

Para $r(1) = \frac{-1}{\delta}\ ln\ (z)$

Como $T < n$ tenemos:

$z = v^T > v^n$

a) Si $max = \left\{ \frac{-1}{\delta} ln(z),\ 0 \right\} = \frac{-1}{\delta} ln(\ z\ )$ tenemos:

$\frac{-1}{\delta} ln(z) > 0$

$ln(z) < 0$

$z < 1$

$\therefore$ $z < 1$ y como $z > v^n$ por lo tanto:

1a) $H_{1a}(z) = {}_nq_x - {}_{r(1)}q_x$ para $v^n \leq z < 1$

b) Si $max = \left\{ \frac{-1}{\delta} ln(z),\ 0 \right\} = 0$ tenemos:

$\frac{-1}{\delta} ln(z) \leq 0$

$ln(z) \geq 0$

$z \geq 1$

Por lo tanto :

$$H_{1b}(z) = {}_nq_x - {}_0q_x = {}_nq_x \qquad \text{Para} \quad 1 \leq z$$

2) Para $b_2=0,\ a_2 = v^n \leq z$

$$H_2(z) = {}_\infty q_x - {}_nq_x = 1 - {}_nq_x = {}_np_x$$

Concluímos:

$$H_{1a}(z) = {}_nq_x - {}_{r(1)}q_x \qquad \text{Para} \quad v^n < z < 1$$

$$H_{1b}(z) = {}_nq_x \qquad \text{Para} \quad 1 \leq z$$

$$H_2(z) = {}_np_x \qquad \text{Para} \quad v^n \leq z$$

Lo que podemos escribir:

$F(z) =$

a) 0 Para $0 \leq z < v^n$

b) ${}_{r(1)}\,p_x$ Para $v^n \leq z < 1$

c) 1 Para $1 \leq z$

Para $v^n = z$, $r(i) = n$ $\therefore$ ${}_nq_x - {}_{n}q_x = 0$

Anualidad vitalicia $\bar{a}_x$

$Z =$

$\bar{a}_{T}$ $0 \leq T$ $a_1 = 1/\delta,\ b_1 = -1/\delta,\ m_0 = 0,\ m_1 = \infty$

Aplicando el teorema tenemos:

1) Para $b_1 < 0,\ z < a_1$

$H_1 = {}_{\min\{r(1),\, m(0)\}}q_x - {}_{m(1)}q_x$

Donde $r(1) = \frac{-1}{\delta}\ ln\ \frac{(z - a_1)}{b_1}$

1c) Para $b_1 < 0,\ a_1 \leq z$

$H_{1c} = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$

Sustituyendo:

$H_1 = {}_{\min\{r(1),\, 0\}}q_x - {}_{\infty}q_x$ Para $b_1 = -1/\delta < 0,\ z < 1/\delta$

Para $r(1) = \frac{-1}{\delta}\ ln\ \frac{(z - 1/\delta)}{-1/\delta} = \frac{-1}{\delta}\ ln\ (1 - \delta z)$

1a) El $min = \{ \frac{-1}{\delta} ln(1 - \delta z),\ \infty \} = \frac{-1}{\delta} ln(1 - \delta z)$ tenemos:

$$-\frac{1}{\delta}\, ln(1 - \delta z) < \infty$$

$$ln(1 - \delta z) > -\delta\, \infty = ln\ v^{\infty}$$

$$1 - \delta z > v^{\infty} = 0$$

$$-\delta z > -1$$

$z<1/\delta$ y como por hipótesis $z < 1/\delta$

$H_{1a}(z) = {}_{r(1)}q_x - {}_{0}q_x = {}_{r(1)}q_x$ para $z < 1/\delta$

1c) $H_{1c} = {}_{\infty}q_x - {}_{0}q_x = 1 - 0 = 1$ Para $b_{1c} < 0,\ a = 1/\delta \leq z$

Concluímos que

1a) $H_{1a}(z) = {}_{r(1)}q_x$ Para $z < 1/\delta$

1c) $H_{1c} = 1$ Para $1/\delta \leq z$

Por lo tanto

$F(z) =$

a) ${}_{r(1)}q_x$ $0 \leq z < 1/\delta$

b) 1 $1/\delta \leq z$

donde $r\ (1) = -\ 1\ /\ \delta\ ln\ (\ 1 - \delta z\ )$

Anualidad a n años $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$

$Z =$

$\bar{a}_{\overline{T}|}$	$0 \leq T < n$	$a_1 = 1/\delta,\ \ b_1 = -1/\delta,\ \ m_0 = 0,\ m_1 = n$
$\bar{a}_{\overline{n}|}$	$n \leq T$	$a_2 = a_{\overline{n}|},\ \ b_2 = 0,\ \ m_1 = n,\ \ m_2 = \infty$

Aplicando el teorema tenemos:

1) Para $b_1 < 0,\ \ a_1 = 1/\delta > z$

$$H_1 = {}_{\min\{r(1),\, m(0)\}}q_x - {}_{m(1)}q_x$$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta}\ \ln \dfrac{(z - a_1)}{b_1}$

1c) Para $b_1 < 0,\ \ a_1 \leq z$

$$H_1 = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$$

2) Para $b_2 = 0 \quad a_2 \leq z$

$$H_2 = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$$

Sustituyendo:

$H_1 = {}_{\min\{r(1),\, 0\}}q_x - {}_{\infty}q_x$ Para $b_1 = -1/\delta < 0,\ \ a_1 = 1/\delta > z$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta}\ \ln \dfrac{(z - 1/\delta)}{-1/\delta} = -\dfrac{1}{\delta}\ \ln (1 - \delta z)$

1a) Si $min = \left\{ -\frac{1}{\delta} ln(1 - \delta z),\ n \right\} = -\frac{1}{\delta} ln(1 - \delta z)$ tenemos:

$$-\frac{1}{\delta} ln(1-\delta z) < n$$

$$ln(1 - \delta z) > -\delta n = ln\ v^n$$

$$1- \delta z > v^n$$

$$-\delta z > v^n-1$$

$$z < (1 - v^n)/\delta = \bar{a}_{\overline{n}|}$$ y como $z<\bar{a}_{\overline{n}|} < 1/\delta$

cumple con la hipótesis de $z < 1/\delta \Rightarrow$

1a) $H_1(z) = {}_{r(1)}q_x - {}_0\, q_x = {}_{r(1)}q_x$ Para $z<a_{\overline{n}|}$

1b) Si $min = \left\{ -\frac{1}{\delta} ln(1 - \delta z),\ n \right\} = n$ tenemos:

$$-\frac{1}{\delta} ln(1 - \delta z) \geq n$$

$$ln(1 - \delta z) \leq -\delta\ n = ln\ v^n$$

$$1 - \delta z \leq v^n$$

$$-\delta z \leq v^n-1$$

$z \geq (1 - v^n) / \delta = a_{\overline{n|}}$ y como $z < 1/\delta$ por hipótesis $\Rightarrow$

$\bar{a}_{\overline{n|}} < z \leq 1/\delta$

1b) $H_{1b}(z) = {}_nq_x - {}_0q_x = {}_nq_x$ Para $b_1 < 0$, $\bar{a}_{\overline{n|}} < z \leq 1/\delta$

1c) $H_{1c} = {}_nq_x - {}_0q_x = {}_nq_x$ Para $b_1 < 0$, $1/\delta \leq z$

2) $H_2(z) = {}_\infty q_x - {}_nq_x = 1 - {}_nq_x$ Para $b_2 = 0$, $a_2 = \bar{a}_{\overline{n|}} \leq z$

Por lo tanto tenemos:

1a) $H_{1a}(z) = {}_{r(1)}q_x$ Para $z < \bar{a}_{\overline{n|}}$

1b) $H_{1b}(z) = {}_nq_x$ Para $\bar{a}_{\overline{n|}} < z \leq 1/\delta$

1c) $H_{1c} = {}_nq_x$ Para $1/\delta \leq z$

2) $H_2(z) = {}_np_x$ Para $\bar{a}_{\overline{n|}} \leq z$

$F(z) =$

a) ${}_{r(1)}q_x$ Para $0 \leq z < a_{\overline{n|}}$

b) 1 Para $a_{\overline{n|}} \leq z$

donde $r(1) = -\dfrac{1}{\delta} \ln(1 - \delta z)$

El desarrollo de las funciones de distribución de los planes faltantes se pueden encontrar en el apéndice no. 1.

Seguro	Z		F(z)	
Vida entera	v^T	$T \geq 0$	${}_{r(1)}p_x$	$0 < z < 1$
$\bar{A}x$			1	$z \geq 1$
			0	$z = 0$
Temporal n años	v^T	$0 \leq T < n$	${}_{n}p_x$	$0 \leq z \leq v^n$
$\bar{A}x^1{:}n\rceil$	0	$T \geq n$	${}_{r(1)}p_x$	$v^n < z < 1$
			1	$z \geq 1$
Vitalicio diferido m años	0	$0 \leq T < m$	${}_{m}q_x$	$z = 0$
	v^T	$T \geq m$	${}_{m}q_x + {}_{r(1)}p_x$	$0 < z < v^m$
$m\|\bar{A}x$			1	$z \geq v^m$
Temporal m diferido n años	0	$0 \leq T < m$	${}_{m}q_x + {}_{m+n}\,p_x$	$0 \leq z \leq v^{m+n}$
	v^T	$m \leq T < m+n$	${}_{m}q_x + {}_{r(1)}p_x$	$v^{m+n} < z \leq v^m$
$m\|\bar{A}x^1{:}n\rceil$	0	$T \geq m+n$	1	$z \geq v^m$

Seguro	Z		F(z)	
Dotal puro a n años	0	$0 \le T < n$	${}_nq_x$	$0 \le z < v^n$
	v^n	$T \ge n$	1	$z \ge v^n$
$\bar{A}x{:}n\rceil$ o nEx				
Dotal a n años	v^T	$0 \le T < n$	0	$0 \le z < v^n$
	v^n	$T \ge n$	${}_{r(1)}p_x$	$v^n \le z < 1$
$\bar{A}x{:}n\rceil$			1	$z \ge 1$
Dotal n años diferido m años.	0	$0 \le T < m$	${}_mq_x$	$0 \le z < v^{m+n}$
	v^T	$m \le T < m+n$	${}_mq_x + {}_{r(1)}p_x$	$v^{m+n} \le z < v^m$
$m\vert \bar{A}x{:}n\rceil$	v^{m+n}	$T \ge m+n$	1	$z \ge 1$
Anualidad	**Z**		**F(z)**	
Vitalicia $\bar{a}x$	$\bar{a}_{T\rceil}$	$T \ge 0$	${}_{r(2)}q_x$	$0 \le z < 1/\delta$
			1	$z \ge 1/\delta$
n años	$\bar{a}_{T\rceil}$	$T \ge 0$	${}_{r(2)}q_x$	$0 \le z < \bar{a}_{n\rceil}$
$\bar{a}_{x:n\rceil}$	$\bar{a}_{n\rceil}$	$T \ge n$	1	$z \ge \bar{a}_{n\rceil}$
Vitalicia diferida m años $m\vert \bar{a}x$	0	$0 \le T < m$	${}_{r(3)}q_x$	$0 \le z < v^m/\delta$
	$\bar{a}_{T\rceil} - \bar{a}_{m\rceil}$	$T \ge m$	1	$z \ge v^m/\delta$

Anualidad	Z		F(z)	
n años diferida m $m\mid \bar{a}_{x:\overline{n}\mid}$	0	$0 \leq T < m$	$_{r(3)}q_x$	$0 \leq z < v^m \bar{a}_{\overline{n}\mid}$
	$\bar{a}_{\overline{T}\mid} - \bar{a}_{\overline{m}\mid}$	$m \leq T < m+n$		
	$v^m \bar{a}_{\overline{n}\mid}$	$T \geq m+n$	1	$z \geq v^m \bar{a}_{\overline{n}\mid}$

$r(1) = -1/\delta \ln z$

$r(2) = -1/\delta \ln (1 - \delta z)$

$r(3) = -1/\delta \ln (v^m - \delta z)$

3.2. CASO DISCRETO

Teorema:

La función de distribución de la variable aleatoria Z está definida por la siguiente función:

$$F_Z(z) = \sum H_i(z)$$

para $i = 1,2,\ldots,n$

donde $H_i\ (z)$ toma los siguientes valores:

$H_i(z)=$

a) ${}_{m(i)}q_x - {}_{\max\{]r(i)-1[,\ m(i-1)\}}q_x$	Para $b_i>0, a_i<z$
b) ${}_{\min\{[r(i)],\ m(i)\}}q_x - {}_{m(i-1)}q_x$	Para $b_i<0, z<a_i$
c) ${}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x$	Para $b_i<0, a_i \leq z$
d) ${}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x$	Para $b_i=0$
e) 0	Otro caso

donde $r(i) = -\dfrac{1}{\delta} \ln \dfrac{(z - a_i)}{b_i}$

Nota: Para un real x,]x[denota el el menor entero mayor o igual que x
Para un real x, [x] denota el el mayor entero menor o igual que x

Demostración.

Podemos escribir $F(z)$ como:

$$F(z) = P(Z(T) \leq z) = P(Z(T) \leq z \cap \Omega)$$

$$= P[Z(T) \leq z \cap (\cup_{i=1}^{n} [m(i-1), m(i)))]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P[a_i + b_i \upsilon^{K+1} \leq z \cap m(i-1) \leq K < m(i)] = \sum_{i=1}^{n} H_i(z) \quad \{1\}$$

ya que $0 \leq m(0) < m(1) < m(2) < \ldots < m(n) \leq \infty$ y

$[m(0), m(1)) \cup [m(1), m(2)) \cup \ldots \cup [m(n-1), m(n))$ = espacio muestral, es decir el recorrido completo de la variable aleatoria K.

$[m(0), m(1)) \cap [m(1), m(2)) \cap \ldots \cap [m(n-1), m(n)) = \Phi$ (conjunto vacio)

i) Si $b_i > 0$ y $a_i < z$

De {1} tenemos :

$$H_i(z) = P[a_i + b_i \upsilon^{K+1} \leq z \cap m(i-1) \leq K < m(i)]$$

$$= P\left(\upsilon^{K+1} \leq \frac{z - a_i}{b_i} \cap (m(i-1) \leq K < m(i))\right)$$

$$= P\left(K+1 \geq (-1/\delta) \ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right) \cap (m(i-1) \leq K < m(i))\right)$$

$$= P\left((-1/\delta) \ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right) - 1 \leq K \cap (m(i-1) \leq K < m(i))\right)$$

$$= P\left(\max\left\{(-1/\delta) \ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right) - 1, m(i-1)\right\} \leq K < m(i)\right)$$

$$= P\left(K<m(i) \right) - P\left(K < max \left\{ (-1/\delta) \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) - 1 , m(i-1) \right\} \right)$$

Tomando la definición de función de distribución para el caso discreto del cápitulo 1 tenemos:

$$\therefore \; H_i(z) = {}_{m(i)}q_x - {}_{max\{[r(i)-1], m(i-1)\}}q_x$$

Para $b_i > 0,\ a_i < z$ **{2}**

donde $r(i) = -\frac{1}{\delta} \ln \frac{(z - a_i)}{b_i}$

ii) Si $\boldsymbol{b_i > 0}$ y $\boldsymbol{a_i \geq z}$

Como $b_i > 0 \Rightarrow b_i\, v^{K+1} > 0$

y $\quad a_i \geq z \;\Rightarrow\; a_i + b_i\, v^{K+1} > z$

de {1}

$$H_i(z) = P\left[\, a_i + b_i\, v^{K+1} \leq z \;\cap\; m(i-1) \leq K < m(i) \right]$$

$$\Rightarrow \quad H_i(z) = P\left[\, \Phi \cap\; m(i-1) \leq K < m(i) \right]$$

$$= P[\Phi] = 0$$

$\therefore\; H_i(z) = 0 \qquad$ Para $b_i > 0$ y $a_i \geq z$ **{3}**

iii) Si $\boldsymbol{b_i < 0}$ y $\boldsymbol{z < a_i}$

De {1} tenemos :

$$H_i(z) = P\left[\, a_i + b_i\, v^{K+1} \leq z \cap m(i-1) \leq K < m(i) \right]$$

$$= P\left[\, \upsilon^{K+1} \geq \frac{z - a_i}{b_i} \cap (m(i-1) \leq K < m(i))\right]$$

$$= P\left[\, K+1 \leq (-1/\delta)\, ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right)\right] \cap [m(i-1) \leq K < m(i)]$$

$$= P\left[\, K \leq (-1/\delta)\, ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right) - 1\right] \cap [m(i-1) \leq K < m(i)]$$

$$= P\left[m(i-1) \leq K \leq (-1/\delta)\, ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right) - 1\right] \cap [\, K < m(i)]$$

$$= {}_{min\{[r(i)],\, m(i)\}}q_x - {}_{m(i-1)}q_x$$

$\therefore\ H_i = {}_{min\{[r(i)],\, m(i)\}}q_x - {}_{m(i-1)}q_x$ Para $b_i < 0,\ z < a_i$ **(4)**

donde $r(i) = \frac{-1}{\delta}\, ln \left(\frac{z - a_i}{b_i}\right)$

IV) Si $b_i<0\ z\geq a_i$

Como $b_i<0 \Rightarrow b_i\upsilon^{k+1} < 0$

y $a_i \leq z \Rightarrow a_i+b_i\upsilon^{k+1}< z$

de **(1)** $H_i(z)= P[\, a_i+b_i\, \upsilon^{k+1} \leq z \cap m(i-1) \leq K < m(i)]$

$\Rightarrow\ H_i(z)= P[\, \Omega \cap m(i-1) \leq K < m(i)]$

$H_i(z)= P[\, m(i-1) \leq K < m(i)]$

$\therefore\ H_i = {}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x$ Para $b_i<0,z<a_i$ **(5)**

V) Si $b_i=0$ $z < a_i$

Como $b_i=0 \Rightarrow b_i\, v^{K+1} = 0$

y $z<a_i \Rightarrow a_i+b_i\, v^{K+1} > z$

de {1} $H_i(z)= P[\, a_i+b_i\, v^{K+1} \leq z \cap m(i-1) \leq K < m(i)]$

$\Rightarrow H_i(z)= P[\, \Phi \cap m(i-1) \leq K < m(i)] = P[\Phi\,] = 0$

$\therefore H_i(z)= 0$ Para $b_i=0$ $z<a_i$ {6}

VI) Si $b_i=0$ $z \geq a_i$

Como $b_i=0 \Rightarrow b_i\, v^{K+1} = 0$

y $a_i \leq z \Rightarrow a_i+b_i\, v^{K+1}< z$

de {1} $H_i(z)= P[\, a_i+b_i\, v^{K+1} \leq z \cap m(i-1) \leq K < m(i)]$

$\Rightarrow H_i(z)= P[\, \Omega \cap m(i-1) \leq K < m(i)]$

$H_i(z)= P[\, m(i-1) \leq K < m(i)]$

$\therefore H_i= {}_{m(i)}q_x - {}_{m(i-1)}q_x$ Para $b_i=0,\ z \geq a_i$ {7}

Por: {1}, {2}, {4}, {5}, {6} y {7} queda demostrado el teorema.

Seguro de vida entera pagadero al final del año Ax

$Z = v^{K+1} \qquad 0 \leq K \qquad K$ entero

donde $a_1 = 0,\ b_1=1 \quad m_0=0\ m_1=\infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{max\{]r(1)-1[,\ m(0)\}}q_x$ Para $b_1>0, a_1<z$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta}\ ln\ \dfrac{(z - a_1)}{b_1}$

Sustituyendo

$H_1(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{max\{]r(1)-1[,\ 0\}}q_x$ Para $b_1>0, a_1 = 0 <z$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta}\ ln\ (z)$

1) Para $b_1 > 0,\ 0 < z$

a) Si $max = \{\ ]\ \dfrac{-1}{\delta}\ ln(z) - 1[\ ,\ 0\} \ = \ ]\ \dfrac{-1}{\delta}\ ln(z) - 1\ [$ tenemos:

$$]-\frac{1}{\delta}\ ln(z) - 1\ [\ > 0$$ [1]

$$\frac{-1}{\delta}\ ln\ (\ z\ ) - 1 > 0$$

[1] Si b es entero b<]a[→ b< a
a≤]a[si]a[≤b → a ≤ b

$$\ln(z) < -\delta = v$$

$$\therefore \quad z < v$$

$H_{Ia}(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{[n(i)+1]}q_x = 1 - {}_{[n(i)+1]}q_x = {}_{[n(i)+1]}p_x$ Para $0 < z < v$

b) Si $max = \{[1 - \frac{1}{\delta}\ln(z) - 1], 0\} = 0$ tenemos:

$$[1 - \frac{1}{\delta}\ln(z) - 1] \le 0$$

$$-\frac{1}{\delta}\ln(z) - 1 \le 0$$

$$\ln(z) \ge -\delta = \ln(1+i)^{-1}$$

$$\therefore \quad z \ge v$$

$H_{Ib}(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{0}q_x = 1 - 0 = 1$ para $v \le z$

Concluimos:

$H_{Ia}(z) = {}_{[n(i)+1]}p_x$ Para $0 < z < v$

$H_{Ib}(z) = 1$ Para $v \le z$

Lo que podemos expresar:

$F(z)=$

a) 0 $\quad z=0$

b) ${}_{[r(1)+1]}p_x$ $\quad 0<z<v$

c) 1 $\quad z\geq v$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta}\ ln\ (z)$

Seguro temporal a n años pagadero al final del año en que ocurra la muerte $A^1_{x:\overline{n}|}$

$Z =$

a) v^{K+1} $\quad 0 \leq K<n$ $\quad a_1=0,\ b_1=1,\ m_0=0,\ m_1=n$

b) 0 $\quad n\leq K$ $\quad a_2=0,\ b_2=0,\ m_1=n,\ m_2=\infty$

K enteros no negativos

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{\max\{[r(1)-1],\, m(0)\}}q_x$ Para $b_1 > 0,\ a_1< z$

Para $r(1) = \frac{-1}{\delta} \ln \frac{(z-a_1)}{b_1}$

$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2=0, a_2 \leq z$

Sustituyendo:

i) Para $b_1>0, a_1 = 0 < z$

$$H_1(z) = {}_nq_x - {}_{\max\{\,]\, r(1)-1\, [,\ m(0)\, \}}q_x$$

Donde $r(1) = \frac{-1}{\delta} \ln(z)$

Como $K \leq n-1$ y $0 \leq K$ tenemos:

$$K+1 \leq n$$

$$z = v^{K+1} \geq v^{n}$$

Por lo tanto $v^n \leq z$

ii) Para $b_1 > 0,\ 0 < z$

a) Si $\max = \{\,]\, \frac{-1}{\delta} \ln(z) - 1\, [,\ 0 \,\} =]\, \frac{-1}{\delta} \ln(z) - 1\, [$ tenemos:

$$]\, \frac{-1}{\delta} \ln(z) - 1\, [\ > 0$$

$$\frac{-1}{\delta} \ln(z) - 1 \ > 0$$

$$\frac{-1}{\delta} \ln(z) \ > 1$$

$$ln(z) < -\delta$$

$$\therefore \quad z < v \quad \text{y como} \quad v'' \leq z \quad \Rightarrow$$

$$H_{1a}(z) = {}_{n}q_x - {}_{]n(1)-1[}q_x \qquad \text{para} \quad v'' \leq z < v$$

b) Si $max = \left\{ \left] \frac{-1}{\delta} \ln(z) - 1 \right[,\ 0 \right\} = 0$ tenemos:

$$\left] \frac{-1}{\delta} \ln(z) - 1 \right[\leq 0$$

$$\frac{-1}{\delta} \ln(z) - 1 \leq 0$$

$$\ln(z) \geq -\delta$$

$$\therefore \quad z \geq v \quad \Rightarrow$$

$$H_{1b}(z) = {}_{n}q_x - {}_{0}q_x = {}_{n}q_x \qquad \text{Para } z \geq v$$

$$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x = {}_{\infty}q_x - {}_{n}q_x = 1 - {}_{n}q_x \qquad \text{Para } b_2=0,\ 0 \leq z$$

Por lo tanto, tenemos:

$$H_{1a}(z) = {}_{n}q_x - {}_{]n(1)-1[}q_x \qquad \text{Para } v'' \leq z < v$$

$$H_{1b}(z) = {}_{n}q_x \qquad \text{Para } z \geq v$$

$$H_2(z) = 1 - {}_{n}q_x \qquad \text{Para } 0 \leq z$$

Lo podemos expresar:

$F_Z(z) =$

a) ${}_n p_x$ Para $0 \leq z < v^n$

b) ${}_{[r(1)+1]}p_x$ Para $v^n < z < v$

c) 1 Para $v \leq z$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta} \ln(z)$

Seguro dotal (mixto) a n. Ax:n⌉

$Z =$

a) v^{K+1} $0 \leq K < n$ $a_1=0$ $b_1=1$ $m_0=0$ $m_1=n$

b) v^n $n \leq K$ $a_2=v^n$ $b_2=0$ $m_1=n$ $m_2=\infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{\max\{]r(1)-1[,\, m(0)\}}q_x$ Para $b_1>0, a_1< z$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta}\ ln\ \dfrac{(z - a_1)}{b_1}$

$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2=0, a_2\leq z$

Sustituyendo:

1) $H_1(z) = {}_{n}q_x - {}_{\max\{]r(1)-1[,\, 0\}}q_x$ Para $b_1 =1>0,\ a_1=0 <z$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta}\ ln\ (z)$

Como $K+1 \leq n$ tenemos:

$$z = v^{K+1} \geq v^n$$

a) Si $max = \{\,]\dfrac{-1}{\delta} ln(z) -1 [\,,\ 0 \} = \ ]-\dfrac{1}{\delta} ln(z) - 1[$ tenemos:

$$]\dfrac{-1}{\delta} ln(z) - 1 [> 0$$

$$\dfrac{-1}{\delta} ln(z) > 1$$

$$ln(z)< -\delta$$

$$z< v$$

$\therefore$ $z<v$ y como $v^n\leq z$ por lo tanto:

1a) $H_1(z) = {}_{n}q_x - {}_{]r(1)-1[}q_x$ Para $v^n \leq z < v$

b) Si $max = \left\{ \left] -\frac{1}{\delta} ln(z) - 1 \right[, 0 \right\} = 0$ tenemos:

$$\left] -\frac{1}{\delta} ln(z) - 1 \right[\leq 0$$

$$-\frac{1}{\delta} ln(z) - 1 \quad \leq 0$$

$$ln(z) \geq -\delta$$

$$z \geq \upsilon$$

Por lo tanto :

$H_{1b}(z) = {}_nq_x - {}_0q_x = {}_nq_x$ **Para** $\upsilon \leq z$

2) **Para** $b_2 = 0, a_2 = \upsilon^n \leq z$

$H_2(z) = {}_\infty q_x - {}_nq_x = 1 - {}_nq_x = {}_n p_x$

Concluimos:

$H_1(z) = {}_nq_x - {}_{]r(1)-1[}\, q_x$ **Para** $\upsilon^n \leq z < \upsilon$

$H_1(z) = {}_nq_x$ **Para** $\upsilon \leq z$

$H_2(z) = {}_n p_x$ **Para** $\upsilon^n \leq z$

Lo que podemos escribir:

$F(z) =$

a) 0 Para $0 \leq z < \upsilon^n$

b) ${}_{|r(1)\cdot 1|}\, p_x$ Para $\upsilon^n \leq z < \upsilon$

c) 1 Para $\upsilon \leq z$

Donde $r(1) = \frac{-1}{\delta}\ ln\ (z)$

Anualidad vitalicia anticipada $\ddot{a}_x$

$Z =$

$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$ $\quad 0 \leq K \quad a_1 = 1/d \quad b_1 = -1/d \quad m_0 = 0 \quad m_1 = \infty$

Aplicando el teorema tenemos:

1) Para $b_1 < 0,\ z < a_1$

$H_1 = {}_{min\,\{[r(1)],\ m(1)\}}\, q_x - {}_{m(0)}q_x$

Donde $r(1) = \frac{-1}{\delta}\ ln\ \frac{(z - a_1)}{b_1}$

1c) Para $b_1 < 0,\ a_1 \leq z$

$H_{1c} = {}_{m(1)}\, q_x - {}_{m(0)}q_x$

Sustituyendo:

$H_1 = {}_{min\,\{[r(1)],\ 0\}}\ q_x - {}_{\infty}q_x$ Para $b_1 = -1/d < 0,\ z < 1/d$

Donde $r(1) = \frac{-1}{\delta} \ ln \frac{(z - 1/d)}{-1/d} = -\frac{1}{\delta} \ ln(1 - dz)$

1a) Si $min = \{ [-\frac{1}{\delta} \ ln(1 - dz)], \infty \} = [-\frac{1}{\delta} \ ln(1 - dz)]$ tenemos:

$$[-\frac{1}{\delta} ln(1 - dz)] < \infty$$ [1]

$$ln(1 - dz) > -\delta \infty = ln \ v^{\infty}$$

$$1 - dz > v^{\infty} = 0$$

$$-dz > -1$$

$z < 1/d$ y como por hipótesis $z < 1/d$

$H_{1a}(z) = {}_{[r(1)]}q_x - {}_0q_x = {}_{[r(1)]}q_x$ para $z < 1/d$

1c) $H_{1c} = {}_{\infty}q_x - {}_0q_x = 1 - 0 = 1$ Para $b_{1c} < 0, \ a = 1/d \leq z$

Concluimos que

1a) $H_{1a}(z) = {}_{[r(1)]}q_x$ Para $z < 1/d$

1c) $H_{1c}(z) = 1$ Para $1/d \leq z$

Por lo tanto

---

[1] Si b es entero:
i) Como [a] ≤ a
Si b≤[a] → b≤a

ii) Si [a]<b → a<b

$F(z) =$

a) ${}_{[r(1)]}q_x \qquad 0 \leq z < 1/d$

b) $1 \qquad 1/d \leq z$

Donde $r(1) = -1/\delta\ (1 - dz)$

Anualidad vitalicia vencida a_x

$Z =$

$a_{\overline{K}|} \qquad 0 \leq K \qquad a_1 = 1/i \quad b_1 = -1/d \quad m_0 = 0 \quad m_1 = \infty$

Aplicando el teorema tenemos:

1) Para $b_1 < 0,\ z < a_1$

$H_1 = {}_{min\{[r(1)],\, m(1)\}}q_x - {}_{m(0)}q_x$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta} \ln \dfrac{(z - a_1)}{b_1}$

1c) Para $b_1 < 0,\ a_1 \leq z$

$H_{1c} = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$

Sustituyendo:

$H_1 = {}_{min\{[r(1)],\infty\}}q_x - {}_0q_x \qquad$ Para $b_1 = -1/d < 0,\ z < 1/i$

Donde $r(1) = \frac{-1}{\delta} \ln \frac{(z - 1/i)}{-1/d} = \frac{1}{\delta} \ln (1/i - z) d =$

$$= -\frac{1}{\delta} \ln (v - dz)$$

1a) Si $min = \dashv [-\frac{1}{\delta} \ln(v - dz)], \infty \vdash = [-\frac{1}{\delta} \ln(v - dz)]$ tenemos:

$$[-\frac{1}{\delta} \ln(v - dz)] < \infty$$

$$\ln (v - dz) > -\delta \infty = \ln v^{\infty}$$

$$v - dz > v^{\infty} = 0$$

$$-dz > -v$$

$z < v / d = 1 / i$ y como por hipótesis $z < 1 / i$

$H_{1a}(z) = {}_{[r(1)]}q_x - {}_0q_x = {}_{[r(1)]}q_x$ para $z < 1 / i$

1c) $H_{1c} = {}_{\infty}q_x - {}_0q_x = 1 - 0 = 1$ Para $a_1 = 1 / i \leq z$

Concluimos que

1a) $H_{1a}(z) = {}_{[r(1)]}q_x$ Para $z < 1/i$

1c) $H_{1c}(z) = {}_{\infty}q_x - {}_0q_x = 1 - 0 = 1$ Para $1/i \leq z$

Por lo tanto:

$F(z) =$

a) ${}_{[r(1)]}q_x$ $\quad 0 \leq z < 1/i$

b) 1 $\quad 1/i \leq z$

Donde $r(1) = -\frac{1}{\delta} \ln(v - dz)$

Anualidad anticipada temporal a n años $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

$Z =$

$\ddot{a}_{\overline{K+1|}}$	$0 \leq K < n$	$a_1 = 1/d$	$b_1 = -1/d$	$m_0 = 0$	$m_1 = n$
$\ddot{a}_{\overline{n|}}$	$n \leq K$	$a_2 = \ddot{a}_{\overline{n|}}$	$b_2 = 0$	$m_1 = n$	$m_2 = \infty$

Aplicando el teorema tenemos:

1) Para $b_1 < 0, \quad a_1 = 1 / d > z$

$$H_1 = {}_{\min\{[r(1)],\ m(1)\}}q_x - {}_{m(0)}q_x$$

Donde $r(1) = \frac{-1}{\delta} \ln \frac{(z - a_1)}{b_1}$

1c) Para $b_1 < 0, \quad a_1 \leq z$

$$H_{1c} = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$$

2) Para $b_2 = 0 \quad a_2 \leq z$

$$H_2 = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$$

Sustituyendo:

$H_1 = {}_{min\{[r(1)],\infty\}}q_x - {}_0 q_x$ Para $b_1 = -1/d < 0, \quad a_1 = 1/d > z$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta} \ln \dfrac{(z - 1/d)}{-1/d} = \dfrac{1}{\delta} \ln(1 - dz)$

1a) Si $min = \{[\dfrac{-1}{\delta} \ln(1 - dz)], n\} = [\dfrac{-1}{\delta} \ln(1 - dz)]$ tenemos:

$$[\frac{-1}{\delta} \ln(1 - dz)] < n$$

$$\frac{-1}{\delta} \ln(1 - dz) < n$$

$$\ln(1 - dz) > -\delta n = \ln v^n$$

$$1 - dz > v^n$$

$$-dz > v^n - 1$$

$z < (1 - v^n) / d = \ddot{a}_{\overline{n|}}$ y como $z < \ddot{a}_{\overline{n|}} < 1/d$

cumple con la hipótesis de $z < 1/d \Rightarrow$

1a) $H_1(z) = {}_{[r(1)]}q_x - {}_0q_x = {}_{[r(1)]}q_x$ Para $z < \ddot{a}_{\overline{n|}}$

1b) Si $min = \{[\dfrac{-1}{\delta} \ln(1 - dz)], n\} = n$ tenemos:

$$\left[-\frac{1}{\delta} \ln(1 - dz) \right] \geq n$$

$$\ln(1 - dz) \leq -\delta\, n = \ln v^n$$

$$1 - dz \leq v^n$$

$$-dz \leq v^n - 1$$

$z \geq (1 - v^n) / d = \ddot{a}_{\overline{n|}}$ y para $\ddot{a}_{\overline{n|}} < z \leq 1/d$

cumple con la hipótesis de $z < 1/d \Rightarrow$

1b) $H_{1b}(z) = {}_n q_x - {}_0 q_x$ Para $b_1<0$, $\ddot{a}_{\overline{n|}} < z \leq 1/d$

1c) $H_{1c} = {}_n q_x - {}_0 q_x$ Para $b_1<0$, $1/d \leq z$

2) $H_2(z) = {}_\infty q_x - {}_n q_x$ Para $b_2=0, a_2 = \ddot{a}_{\overline{n|}} \leq z$

Por lo tanto tenemos:

1a) $H_{1a}(z) = {}_{[r(1)]} q_x$ **Para** $z < \ddot{a}_{\overline{n|}}$

1b) $H_{1b}(z) = {}_n q_x$ **Para** $\ddot{a}_{\overline{n|}} < z \leq 1/d$

1c) $H_{1c} = {}_n q_x$ **Para** $1/d \leq z$

2) $H_2(z) = 1 - {}_n q_x$ **Para** $\ddot{a}_{\overline{n|}} \leq z$

$F(z) =$

a) ${}_{[r(1)]} q_x$ Para $0 \leq z < \ddot{a}_{\overline{n|}}$

b) 1 Para $\ddot{a}_{\overline{n|}} \leq z$

Donde $r(1) = -1/\delta \ln (1 - dz)$

Los desarrollos de las funciones de distribución de los planes faltantes se encontrarán en el apéndice no. 2.

Seguro	Z	F(z) [2]
Vida entera A_x	v^{K+1} $\quad K = 0,1,\ldots$	$0 \quad z = 0$ ${}_{]r(1)-1[}\,p_x \quad 0 < z < v$ $1 \quad z \geq v$
Temporal n años $A_{x:\overline{n}\rceil}$	$v^{K+1} \quad K = 0,1,\ldots,n-1$ $0 \quad K = n, n+1,\ldots$	${}_{n}p_x \quad 0 \leq z < v^n$ ${}_{]r(1)-1[}\,p_x \quad v^n \leq z < v$ $1 \quad z \geq v$
Vitalicio diferido m años $m\|A_x$	$0 \quad K = 0,1,\ldots,m-1$ $v^{K+1} \quad K = m, m+1,\ldots$	${}_{m}q_x \quad z = 0$ ${}_{m}q_x + {}_{]r(1)-1[}p_x \quad 0 < z < v^m$ $1 \quad z \geq v^m$
Temporal m diferido n años $m\|A_{x:\overline{n}\rceil}^{1}$	$0 \quad K = 0,1,\ldots,m-1$ $v^{K+1} \quad K = m, m+1,\ldots,m+n-1$ $0 \quad K = m+n, m+n+1,\ldots$	${}_{m}q_x + {}_{m+n}\,p_x \quad 0 \leq z \leq v^{m+n}$ ${}_{m}q_x + {}_{]r(1)-1[}p_x \quad v^{m+n} < z \leq v^{m+1}$ $1 \quad z \geq v^{m+1}$

[2]

* $]x[$ denota el menor entero mayor que x

** $r(1) = (-1/\delta)\ln z$

Los desarrollos de las funciones de distribución de los planes faltantes se encontrarán en el apéndice no. 2.

Seguro	Z	F(z) [2]
Vida entera Ax	v^{K+1} $K = 0,1,...$	0 $z = 0$ ${}_{]r(1)-1[}\,p_x$ $0 < z < v$ 1 $z \geq v$
Temporal n años $A^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	v^{K+1} $K = 0,1,...,n-1$ 0 $K = n, n+1,...$	${}_{n}p_x$ $0 \leq z < v^{n}$ ${}_{]r(1)-1[}\,p_x$ $v^{n} \leq z < v$ 1 $z \geq v$
Vitalicio diferido m años $m\|Ax$	0 $K = 0,1,...,m-1$ v^{K+1} $K = m, m+1,...$	${}_{m}q_x$ $z = 0$ ${}_{m}q_x + {}_{]r(1)-1[}p_x$ $0 < z < v^{m}$ 1 $z \geq v^{m}$
Temporal m diferido n años $m\|Ax':n\rceil$	0 $K = 0,1,...,m-1$ v^{K+1} $K = m, m+1,...,m+n-1$ 0 $K = m+n, m+n+1,...$	${}_{m}q_x + {}_{m+n}\,p_x$ $0 \leq z \leq v^{m+n}$ ${}_{m}q_x + {}_{]r(1)-1[}p_x$ $v^{m+n} < z \leq v^{m+1}$ 1 $z \geq v^{m+1}$

2

* $]x[$ denota el menor entero mayor que x
** $r(1) = (-1/\delta)\ln z$

Seguro	Z	F(z) [3]
Dotal puro a n años $A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ o $_nE_x$	0 K = 0,1,...,n-1 v^n K = n, n+1	$_nq_x$ $0 \le z < v^n$ 1 $z \ge v^n$
Dotal a n años $A_{x:\overline{n}|}$	v^{K+1} K = 0,1,...,n-1 v^n K = n, n+1,...	0 $0\le z < v^n$ $_{]r(1)-1[}p_x$ $v^n < z \le v$ 1 $z \ge v$
Dotal n años diferido m años. $m\,|\,A_{x:\overline{n}|}$	0 K = 0,1,...,m-1 v^{K+1} K = m, m+1,...,m+n-1 v^{m+n} K = m+n,m+n+1,...	$_mq_x$ $0\le z < v^{m+n}$ $_mq_x + {}_{]r(1)-1[}p_x$ $v^{m+n} \le z < v^{m+1}$ 1 $z \ge v^{m+1}$
Anualidad	**Z**	**F(z)**
Anticipada vitalicia $\ddot{a}_x$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$ **K = 0,1,...**	$_{[r(2)]}q_x$ $0 \le z < 1/d$ **1** $z \ge 1/d$
Anticipada a n años $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$ **K = 0,1,...,n-1** $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ **K = n+1,...**	$_{[r(2)]}q_x$ $0 \le z < \ddot{a}_{\overline{n}|}$ **1** $z \ge \ddot{a}_{\overline{n}|}$

3

*]x[denota el menor entero mayor que x
** [x] denota el mayor entero menor que x
*** r(1) = (-1/δ)ln z
**** r(2) = (-1/δ)ln (1-dz)

Anualidad	Z	F(z)[4]
Anticipada vitalicia diferida m años $m \mid \ddot{a}x$	0 K = 0,1,...,m-1 $\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil} - \ddot{a}_{\overline{m}\rceil}$ K = m,m+1,...	$_{[r(3)]}q_x$ $0 \leq z < v^m/d$ 1 $z \geq v^m/d$
Anticipada a n años diferida m $m \mid \ddot{a}x{:}\overline{n}\rceil$	0 K = 0,1,...,m-1 $\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil} - \ddot{a}_{\overline{m}\rceil}$ K= m,...,m+n-1 $v^m \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$ K= m+n,m+n+1,...	$_{[r(3)]}q_x$ $0 \leq z < v^m \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$ 1 $z \geq v^m \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$
Anualidad vitalicia ax	$a_{\overline{K}\rceil}$ K = 0,1,...	$_{[r(4)]}q_x$ $0 \leq z < 1/i$ 1 $z \geq 1/i$
Anualidad a n años $ax{:}\overline{n}\rceil$	$a_{\overline{K}\rceil}$ K = 0,1,...,n-1 $a_{\overline{n}\rceil}$ K = n+1,...	$_{[r(4)]}q_x$ $0 \leq z < a\overline{n}\rceil$ 1 $z \geq a\overline{n}\rceil$
Anualidad vitalicia diferida m años $m \mid ax$	0 K = 0,1,...,m-1 $a_{\overline{K}\rceil} - a_{\overline{m}\rceil}$ K = m,m+1,...	$_{[r(5)]}q_x$ $0 \leq z < v^m/i$ 1 $z \geq v^m/i$
Anualidad a n años diferida m $m \mid ax{:}\overline{n}\rceil$	0 K = 0,1,...,m-1 $a_{\overline{K}\rceil} - a_{\overline{m}\rceil}$ K= m,...,m+n-1 $v^m a_{\overline{n}\rceil}$ K= m+n,m+n+1,...	$_{[r(5)]}q_x$ $0 \leq z < v^m a_{\overline{n}\rceil}$ 1 $z \geq v^m a_{\overline{n}\rceil}$

4

* [x] denota el mayor entero menor que x
** $r(3) = (-1/\delta)\ln(v^m - dz)$
*** $r(4) = (-1/\delta)\ln(v - dz)$
**** $r(5) = (-1/\delta)\ln(v^{m+1} - dz)$

CONCLUSIONES.

1) Tomando como base la función Z y la función de distribución T mediante métodos algebraicos y principios probabilísticos, se obtuvo la función general de distribución.

2) Se observa que el uso de esta forma general, se cumple para todos los tipos de seguros y anualidad expuestos en este trabajo, así como la adecuación de los parámetros de cada uno ellos obtenidos en el capítulo anterior.

INTRODUCCION

Utilizando el desarrollo de la variable aleatoria Z del capítulo dos, se pretende desarrollar una función de densidad general para esta variable.

Para el caso continuo se ocupará la función de distribución de la variable aleatoria T y mediante métodos matemáticos se obtendrá la función de densidad. En el caso discreto se retomarán conceptos de la función masa de probabilidad de K definida en el capítulo uno, respetando los intervalos definidos para la función Z.

Similar al capítulo anterior, se aplicará esta función de densidad para cada seguro y anualidad, utilizando sus diferentes parámetros.

4.1. CASO CONTINUO.

La función de densidad de la variable aleatoria Z está definida por la siguiente función:

$$f_Z(z) = \sum G_i(z)$$

para $i = 1,2,...,n$

$$G_i(z) =$$

a) $\Delta(z - a_i)\ ({}_{m(i-1)}p_x - {}_{m(i)}p_x)$ para $b_i = 0$

b) ${}_{r(i)}p_x\,\mu_{x+r(i)} / \delta(z - a_i)$ para $b_i > 0$ y

$$a_i + b_i v^{m(i)} < z \leq a_i + b_i v^{m(i-1)}$$

c) ${}_{r(i)}p_x\,\mu_{x+r(i)} / \delta(a_i - z)$ para $b_i < 0$ y

$$a_i + b_i v^{m(i-1)} \leq z < a_i + b_i v^{m(i)}$$

Donde :

$r(i) = -1/\delta \ln [(z - a_i)/b_i]$ para $(z - a_i)/b_i > 0.$

Cabe aclarar que δ, la función de impulso, será denotada por Δ para no confundirla con δ fuerza de interés.

En el apéndice 3 se explicará la función de impulso.

Demostración.

Podemos escribir $f(z)$ como:

$$f(z) = f(Z(T) \leq z) = f(Z(T) \leq z \cap \Omega)$$

$$= P(Z(T) \leq z \cap (\cup_{i=1}^{n} [m(i-1),m(i)))) = \Sigma_{i=1}^{n} G_i(z)$$

$$= \Sigma_{i=1}^{n} f[z \mid m(i-1) \leq T < m(i)]\, Prob[m(i-1) \leq T < m(i)] \quad \{1\}$$

ya que $0 \leq m(0) < m(1) < m(2) < ... < m(n) \leq \infty$ **y**

$[m(0),m(1)) \cup [m(1),m(2)) \cup ... \cup [m(n-1),m(n))$ **es el espacio muestral, es decir el recorrido completo de la variable aleatoria** T.

$$[m(0),m(1)) \cap [m(1),m(2)) \cap ... \cap [m(n-1),m(n)) = \Phi$$

Como hemos observado en los capítulos anteriores:

$$Prob[m(i-1) \leq T < m(i)] = {}_{m(i-1)}p_x - {}_{m(i)}p_x \quad \{2\}$$

Partiendo de que $Z = a_i + b_i v^T$ **tenemos que:**

I) **Para** $b_i = 0 \Rightarrow z = a_i$

$$\Rightarrow f[z \mid m(i-1) \leq T < m(i)] = \frac{f(z)}{P[m(i-1) \leq T < m(i)]} \quad \{3\}$$

Considerando el denominador de {3}, obtenemos lo siguiente:

$$P\,[m(i-1) \leq T < m(i)] = p\,(a_i \leq z < a_i) =$$

$$= p\,(z = a_i) \quad \{4\}$$

En el Papuolis[1] se define una función de densidad de tipo discreto como:

$$f(x) = \Sigma\, k_i\, \Delta\,(x - x_i)\ .^2$$

Entonces tenemos:

$$\Delta\,(z - a_i) = \frac{f(z)}{k_i} \quad \{5\}$$

Por lo tanto, de {1} ,{2}, {3}, {4}, {5}

$$G_i(z) = \Delta\,(z - a_i)\,({}_{m(i-1)}\,p_x - {}_{m(i)}\,p_x) \quad para\ b_i = 0 \quad \{6\}$$

II) Para $b_i \neq 0$

$$F_z\,(z \mid m(i-1) \leq T < m(i))\,P\,(m(i-1) \leq T < m(i)) = F_z\,(z)$$

para $m\,(i-1) \leq T < m\,(i)$

$$F_z(z) = P(Z \leq z) = P(a_i + b_i v^T \leq z) \quad \{7\}$$

A) Para $b_i > 0$ tenemos que a partir de la ecuación, obtener el valor de T:

$$a_i + b_i v^T \leq z$$

$$v^T \leq \frac{z - a_i}{b_i}$$

---

1 Papoulis Athanasios; "Probability, random variables and stochastic processes"; International student edition; Mc Graw Hill; Kogakusha; 1965.

2 Ver apéndice 3

$$T \ln v \leq \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right)$$

y de la igualdad $\ln v = -\delta$

$$T \geq -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \qquad (8)$$

De (7) y (8)

$$F_z(z) = P\,(a_i + b_i\, v^T \leq z) =$$

$$= P\left[T \geq -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] =$$

$$= 1 - P\left[T < -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right]$$

$$= 1 - F_T\left[-\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right]$$

derivando:

$$G_i\,(z) = F_i'\,(z) = f_i\,(z) =$$

$$= -f_z\left[\frac{-1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] * \frac{d}{dz}\left[\frac{-1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right]$$

$$= -f_z\left[\frac{-1}{\delta} \ln \left(\frac{z - a_i}{b_i} \right) \right] \left[-\frac{1}{\delta(z - a_i)} \right]$$

$$= -f_z\,[\, r(i)] \left[-\frac{1}{\delta(z - a_i)} \right]$$

$$= f_z\,[\, r(i)] \left[\frac{1}{\delta(z - a_i)} \right] \qquad (9)$$

para $r(i) = -1/\delta \ln [(z - a_i)/b_i]$ para $(z - a_i)/b_i > 0.$ (10)

Ya que $0 \leq T < \infty \Rightarrow v^T > 0$ y como $v^T = (z - a_i)/b_i$

Donde z toma los siguientes valores:

$$m(i-1) \leq T < m(i) \Rightarrow a_i + bv^{m(i)} < a_i + bv^T = z \leq a_i + bv^{m(i-1)}$$

Como habíamos visto en los capítulos anteriores:

$$f_T(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} \qquad [11]$$

concluímos por:

$$G_i(z) = \frac{1}{\delta(z - a_i)} f_T[r(i)] =$$

$$= \frac{1}{\delta(z - a_i)} {}_{r(i)} p_x \mu_{x+r(i)} \qquad [12]$$

Para $a_i + bv^{m(i)} < z \leq a_i + bv^{m(i-1)}$

donde $r(i) = -1/\delta \ln[(z - a_i)/b_i]$ para $(z - a_i)/b_i > 0$.

B) Para $b_i < 0$ tenemos que a partir de la ecuación encontrar el valor de T:

$a_i + b_i v^T \leq z$

$v^T \geq \dfrac{z + a_i}{b}$

$T \ln v \geq \ln\left(\dfrac{z - a_i}{b_i}\right)$

y de la igualdad $ln\ v = -\delta$

$$T \leq -\frac{1}{\delta}\ ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right) \qquad (13)$$

De (6) y (13)

$$F_Z(z) = P\left[\ T < -\frac{1}{\delta}\ ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right)\right]$$

$$= P\left[\ T < -\frac{1}{\delta}\ ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right)\right]$$

derivando:

$$G_i = F'_Z(z) =$$

$$= f_Z(z) =$$

$$= F_T\left[\frac{-1}{\delta}\ ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right)\right]$$

$$= f_T\left[\frac{-1}{\delta}\ ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right)\right] * \frac{d}{dz}\left[\frac{-1}{\delta}\ ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right)\right]$$

$$= f_T\left[\frac{-1}{\delta}\ ln\left(\frac{z - a_i}{b_i}\right)\right]\left[\frac{1}{\delta(z - a_i)}\right]$$

$$= f_T[\ r(i)]\left[\frac{1}{\delta(a_i - z)}\right] \qquad (14)$$

para $r(i) = -1/\delta\ ln\ [(z - a_i)/b_i]$ para $(z - a_i)/b_i > 0$, por (9)

Donde z toma los siguientes valores:

$$m(i-1) \leq T < m(i) \Rightarrow a_i + bv^{m(i-1)} \leq a_i + bv^T = z < a_i + bv^{m(i)}$$

Como habíamos visto en los capítulos anteriores:

$$f_T(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} \qquad [15]$$

concluímos por:

$$G_i(z) = \frac{1}{\delta(z - a_i)} f_T[r(i)] =$$

$$= \frac{1}{\delta(z - a_i)} {}_{r(i)} p_x \mu_{x+r(i)} \qquad [16]$$

Para $a_i + bv^{m(i)} < a_i + bv^T = z \leq a_i + bv^{m(i-1)}$

Donde $r(i) = -1/\delta \ln[(z - a_i) / b_i]$ para $(z - a_i) / b_i > 0$.

Así queda demostrado el teorema de la función de densidad de Z de [6], [12], y [16]; ahora resta obtener la función de densidad para cada seguro descrito anteriormente.

Seguro de vida entera pagadero en el momento en que ocurra la muerte Ax

$$Z = v^T \quad : 0 \leq T$$

para $a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ m_0 = 0,\ m_1 = \infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$$f(z) = {}_{r(i)} p_x \mu_{x+r(i)} / \delta(z - a_i)$$

para $b_i > 0$ y $a_i + b_i v^{m(i)} < z \leq a_i + b_i v^{m(i-1)}$

$$r(i) = -1/\delta \ln[(z - a_i) / b_i] \quad \text{para } (z - a_i) / b_i > 0$$

Sustituyendo :

$$f(z) = {}_{r(1)} p_x \mu_{x+r(1)} / \delta(z)$$

para $0 < z \leq 1$

$$r(1) = -1/\delta \ ln\ (z)$$

Seguro temporal a n años $\bar{A}x^1{:}n\rceil$

$Z=$

a) v^T $\quad 0 \leq T < n \quad a_1=0 \quad b_1=1 \quad m_0=0 \quad m_1=n$

b) 0 $\quad n \leq T < \infty \quad a_2=0 \quad b_2=0 \quad m_1=n \quad m_2=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$$G_1(z) = {}_{r(1)}p_x \, \mu_{x+r(1)} \ / \ \delta(z - a_1)$$

para $b_1 > 0$ **y** $a_1+b_1v^{m(1)} < z \leq a_1+b_1v^{m(0)}$

Con $r(1) = -1/\delta \ ln\ [(z - a_1) / b_1]$ **para** $(z - a_1) / b_1 > 0.$

$$G_2(z) = \Delta(z - a_2)\ ({}_{m(1)}p_x - {}_{m(2)}p_x) \qquad \text{para } b_2 = 0$$

Sustituyendo, tenemos:

$$G_1(z) = {}_{r(1)}p_x \, \mu_{x+r(1)} \ / \ \delta(z) \qquad \text{para } b_1 > 0 \text{ y } v^n < z \leq v^0 = 1$$

Con $r(1) = -1/\delta \ ln\ (z)$ **para** $z > 0.$

$$G_2(z) = \Delta(z)\ ({}_n p_x - {}_\infty p_x) = \Delta(z)({}_n p_x - 0) = \Delta(z)\ {}_n p_x$$

para $b_2 = 0$ **y** $a_2=0$

Escribiendo la función de densidad por intervalos y como puntos masa de probabilidad, tenemos:

$f(z)=$

a) ${}_{n}p_x$ $z=0$

b) ${}_{r(1)}p_x\,\mu_{x+r(1)}\;/\;\delta(z)$ $v^n < z \leq 1$

c) 0 otro caso.

donde $r(1)= -1/\delta\; lnz$

Seguro dotal a n años $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$

$Z =$

$a)\;\; v^T \qquad 0 \leq T < n \qquad a_1=0 \quad b_1=1 \quad m_0=0 \quad m_1=n$

b) $v^n \qquad n \leq T < \infty \qquad a_2=v^n \quad b_2=0 \quad m_1=n \quad m_2=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = {}_{r(1)}p_x\,\mu_{x+r(1)}\;/\;\delta(z)$

para $b_1 > 0$ y $v^{m(1)} < z \leq v^{m(0)}$

Con $r(1) = -1/\delta\; ln\;(z)$ para $z > 0.$

$G_2(z) = \Delta(\,z - a_2\,)\,(\,{}_{m(1)}p_x - {}_{m(2)}p_x\,)$ para $b_2 = 0$

Sustituyendo, tenemos:

$G_1(z) = {}_{r(1)}p_x\,\mu_{x+r(1)}\;/\;\delta(z)$

para $b_1 > 0$ y $v^n < z \leq v^0 = 1$

$G_2(z) = \Delta(z - v^n) ({}_n p_x - {}_\infty p_x) = \Delta(z - v^n) ({}_n p_x - 0) = \Delta(z - v^n) {}_n p_x$

para $b_2 = 0$ y $a_2 = v^n$

$f(z) =$

a) ${}_{r(1)} p_x \mu_{x+r(1)} / \delta(z)$ $\quad v^n < z \leq 1$

b) ${}_n p_x$ $\quad z = v^n$

c) 0 otro caso.

Con $r(1) = -1/\delta \ln (z)$

Anualidad vitalicia $\bar{a}x$

$Z =$

$\bar{a}_{\overline{T|}} \quad 0 \leq T \quad a_1 = 1/\delta \quad b_1 = -1/\delta \quad m_0 = 0 \quad m_1 = \infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = {}_{r(1)} p_x \mu_{x+r(1)} / \delta(a_1 - z)$

para $b_1 > 0$ y $a_1 + b_1 v^{m(0)} \leq z < a_1 + b_1 v^{m(1)}$

Con $r(1) = -1/\delta \ln \left(\frac{z - a_1}{b_1} \right)$ para $z > 0$.

Sustituyendo, tenemos:

$G_1(z) = {}_{r(1)} p_x \mu_{x+r(1)} / \delta(1/\delta - z) = {}_{r(1)} p_x \mu_{x+r(1)} / (1 - \delta z)$

para $b_1 < 0$ y $1 / \delta - 1 / \delta v^0 = 0 \leq z < 1/\delta - 1/\delta v^\infty = 1/\delta$

$\Rightarrow \quad 0 \leq z < 1/\delta$

$$\text{Con } r(1) = -1/\delta \ ln \frac{(z - 1/\delta)}{-1/\delta} = -1/\delta \ ln \ (1\text{-}\delta z)$$

$f(z) =$

a) ${}_{r(1)} p_x \, \mu_{x+r(1)} \; / \; (1 - \delta z) \qquad 0 \leq z < 1/\delta$

$$\text{Con } r(1) = -1/\delta \ ln \ (1\text{-}\delta z)$$

Anualidad a n años $\bar{a}_{x:n\urcorner}$

$Z =$

a) $\bar{a}_{T\urcorner} \qquad 0 \leq T < n \qquad a_1 = 1/\delta \quad b_1 = -1/\delta \quad m_0 = 0 \quad m_1 = n$

b) $\bar{a}_{n\urcorner} \qquad n \leq T < \infty \qquad a_2 = a_{n\urcorner} \quad b_2 = 0 \quad m_1 = n \quad m_2 = \infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = {}_{r(1)} p_x \, \mu_{x+r(1)} / \ \delta(a_1 - z)$

para $b_1 < 0$ y $a_1 + b_1 v^{m(0)} \leq z < a_1 + b_1 v^{m(1)}$

$$\text{Con } r(1) = -1/\delta \ ln \frac{(z - a_1)}{b_1} \quad \text{para } z > 0.$$

$G_2(z) = \Delta(z - a_2) \ ({}_{m(1)} p_x - {}_{m(2)} p_x) \quad$ para $b_2 = 0$

Sustituyendo, tenemos:

$G_1(z) = {}_{r(1)} p_x \, \mu_{x+r(1)} / \ \delta(1/\delta - z) = {}_{r(1)} p_x \, \mu_{x+r(1)} \; / \; (1 - \delta z)$

Para $b_1 < 0$ y $0 \leq z < \bar{a}_{n\urcorner}$

$$\text{Con} \quad t(1) = 1/\delta \ ln \ \frac{(z - 1/\delta)}{-1/\delta} = -1/\delta \ ln \ (1 - \delta z)$$

$$G_2(z) = \Delta(z - \bar{a}_{\overline{n|}}) ({}_n p_x - {}_\infty p_x) = \Delta(z - \bar{a}_{\overline{n|}}) \ {}_n p_x$$

para $b_2 = 0$ y $a_2 = \bar{a}_{\overline{n|}}$

$f(z) =$

a) ${}_{t(1)} p_x \ \mu_{x+t(1)} / (1 - \delta z)$ $\qquad 0 \leq z < \bar{a}_{\overline{n|}}$

b) ${}_n p_x$ $\qquad z = \bar{a}_{\overline{n|}}$

c) 0 $\qquad$ otro caso

El desarrollo de las funciones de densidad de los planes faltantes se encontrarán en el apéndice número 4.

Seguro	Z	f(z) [2]
Vida entera $\bar{A}x$	v^T $T \geq 0$	${}_{r(1)}p_x\ \mu_{x+t} / \delta z$ $0 < z \leq 1$ 0 otro caso
Temporal n años $\bar{A}x':n\rceil$	v^T $0 \leq T < n$ 0 $T \geq n$	${}_np_x$ $z = 0$ ${}_{r(1)}p_x\ \mu_{x+t} / \delta z$ $v^n < z \leq 1$ 0 otro caso
Vitalicio diferido m años $m\|\bar{A}x$	0 $0 \leq T < m$ v^T $T \geq m$	${}_mq_x$ $z = 0$ ${}_{r(1)}p_x\ \mu_{x+t} / \delta z$ $0 < z \leq v^m$ 0 otro caso
Temporal m diferido n años $m\|\bar{A}x':n\rceil$	0 $0 \leq T < m$ v^T $m \leq T < m+n$ 0 $T \geq m+n$	${}_mq_x + {}_{m+n}p_x$ $z = 0$ ${}_{r(1)}p_x\ \mu_{x+t} / \delta z$ $v^{m+n} < z \leq v^m$ 0 otro caso

2

$r(1) = (-1/\delta)\ln z$

Seguro	Z	f(z) [3]
Dotal puro a n años $\bar{A}_{x:\overline{n'}\rceil}$ o $_nE_x$	0 $\quad 0 \le T < n$ v^n $\quad T \ge n$	$_nq_x$ $\quad z = 0$ $_np_x$ $\quad z = v^n$ 0 otro caso
Dotal a n años $\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}$	v^T $\quad 0 \le T < n$ v^n $\quad T \ge n$	$_np_x$ $\quad z = v^n$ $_{r(1)}p_x \, \mu_{x+t} / \delta z$ $\quad v^n < z \le 1$ 0 otro caso
Dotal n años diferido m años. $m\vert \bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}$	0 $\quad 0 \le T < m$ v^T $\quad m \le T < m+n$ v^{m+n} $\quad T \ge m+n$	$_mq_x$ $\quad z = 0$ $_{m+n}p_x$ $\quad z = v^{m+n}$ $_{r(1)}p_x \, \mu_{x+t} / \delta z$ $\quad v^{m+n} < z \le v^m$ 0 Otro caso
Anualidad	Z	f(z)
Vitalicia $\bar{a}_x$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil}$ $\quad T \ge 0$	$_{r(2)}p_x \, \mu_{x+r(2)} / (1-\delta z)$ $\quad 0 < z \le 1/\delta$ 0 otro caso
n años $\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil}$ $\quad T \ge 0$ $\bar{a}_{\overline{n}\rceil}$ $\quad T \ge n$	$_{r(2)}p_x \, \mu_{x+r(2)} / (1-\delta z)$ $\quad 0 < z \le \bar{a}_{\overline{n}\rceil}$ $_np_x$ $\quad z = \bar{a}_{\overline{n}\rceil}$ 0 otro caso

[3]

* $r(1) = (-1/\delta)\ln z$
** $r(2) = (-1/\delta)\ln(1-\delta z)$
** $r(3) = (-1/\delta)\ln(v^{*}-\delta z)$

Anualidad	Z		f(z) [4]	
Vitalicia diferida m años $m\|\bar{a}_x$	0	$0 \leq T < m$	${}_m q_x$	$z=0$
	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil} - \bar{a}_{\overline{m}\rceil}$	$T \geq m$	${}_{r(3)}p_x \; \mu_{x+r(3)} / (v^m - \delta z)$	$0 < z \leq v^m/\delta$
			0	otro caso
n años diferida m $m\|\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	0	$0 \leq T < m$	${}_m q_x$	$z=0$
	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil} - \bar{a}_{\overline{m}\rceil}$	$m \leq T < m+n$	${}_{r(3)}p_x \; \mu_{x+r(3)} / (v^m - \delta z)$	$0 < z \leq v^m \bar{a}_{\overline{n}\rceil}$
	$v^m \bar{a}_{\overline{n}\rceil}$	$T \geq m+n$	${}_{m+n}p_x$	$z = v^m \bar{a}_{\overline{n}\rceil}$
			0	otro caso

[4] $r(3) = (-1/\delta)\ln(v^m - \delta z)$

4.2 CASO DISCRETO.

La función de densidad de la variable aleatoria Z de tipo discreto, está definida por la siguiente función:

$$f_Z(z) = \sum G_i(z)$$

para $i = 1,2,\ldots,n$

$$G_i(z) =$$

a) ${}_{m(i-1)}p_x - {}_{m(i)}p_x$ Para $z = a_i$, $b_i = 0$

b) ${}_{k|}q_x$ Para $z = a_i + b_i v^{k+1}$, $b_i \neq 0$

$k = m_{i-1}, m_i, \ldots, m_i - 1$

Demostración.

Podemos escribir $f(z)$ como:

$$f(z) = P(Z(T) = z) = P(Z(T) = z \cap \Omega)$$

$$= P(Z(T) = z \cap (\cup_{i=1}^{n} [m(i-1), m(i))))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P[a_i + b_i v^{K+1} \leq z \cap m(i-1) \leq K < m(i)] = \sum_{i=1}^{n} G_i(z)$$

ya que $0 \leq m(0) < m(1) < m(2) < \ldots < m(n) \leq \infty$ y

$[m(0), m(1)) \cup [m(1), m(2)) \cup \ldots \cup [m(n-1), m(n))$= espacio muestral, es decir el recorrido completo de la variable aleatoria K.

Como hemos observado en los capítulos anteriores:

$$Prob[m(i-1) \leq K < m(i)] = {}_{m(i-1)}p_x - {}_{m(i)}p_x$$

Partiendo de que $Z = a_i + b_i v^{K+1}$ tenemos que:

I) Para $b_i=0 \Rightarrow z = a_i$

$G_i(z) = P[\, a_i = z \cap m(i-1) \leq K < m(i)])$

$= P[\, m(i-1) \leq K < m(i)]$ para $z=a_i$

$= {}_{m(i-1)}p_x - {}_{m(i)}p_x$ para $z=a_i$

II) Para $b_i \neq 0$

$G_i(z) = P[a_i + b_i v^{K+1} = z \cap m_{i-1} \leq K < m_i])$

$= P[\, m_{i-1} \leq K < m_i]$ para $z=a_i + b_i v^{K+1}$

y $K = m_{i-1}, m_{i-1}+1, \ldots, m_i-1$

$= \sum {}_{k|}q_x$ para $z=a_i + b_i v^{K+1}$

y $K = m_{i-1}, m_{i-1}+1, \ldots, m_i-1$

Así queda demostrado el teorema.

Seguro de vida entera Ax

$Z = v^{K+1} \quad : K = 0, 1, \ldots$

donde $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ $m_0 = 0$ $m_1 = \infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$f(z) = {}_{k|}q_x$ Para $z = v^{k+1}$ y $k = 0, 1, \ldots$

Seguro temporal a n años $A_{x:\overline{n}|}^{1}$

$Z =$

a) v^{K+1} $K=0,1,\ldots,n-1$ $a_1=0$ $b_1=1$ $m_0=0$ $m_1=n$

b) 0 $K=n,n+1,\ldots$ $a_2=0$ $b_2=0$ $m_1=n$ $m_2=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1 = {}_{k|}q_x$ Para $z=a_1+b_1v^{k+1}$
$b_1 \neq 0,$ $k=m_0, 1, \ldots, m_1-1$

$G_2 = {}_{m(1)}p_x - {}_{m(2)}p_x$ Para $z=a_2$, $b_2=0$

Escribiendo la función de densidad por intervalos y como puntos masa de probabilidad, tenemos:

$f(z)=$

a) ${}_{k|}q_x$ Para $z=v^{k+1}$ y $k=0, 1, \ldots, n-1$

b) ${}_{n}p_x$ Para $z=0$

c) 0 otro caso.

Seguro dotal a n años $A_{x:\overline{n}|}$

$Z =$

a) v^{K+1} $K=0,1,\ldots, n-1$ $a_1=0$ $b_1=1$ $m_0=0$ $m_1=n$

b) v^n $K=n,n+1,\ldots$ $a_2=v^n$ $b_2=0$ $m_1=n$ $m_2=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1 = {}_{k|}q_x$ Para $z = v^{k+1}$
$b_1 \neq 0$, $k = m_{(0)}, \ldots m_{(1)}-1$

$G_2(z) = {}_{m(1)}p_x - {}_{m(2)}p_x$ Para $z = a_2 b_2 = 0$

Escribiendo la función de densidad por intervalos y como puntos masa de probabilidad . Tenemos:

$f(z) =$

a) ${}_{k|}q_x$ $z = v^{k+1}$ $k = 0, 1, \ldots, n-1$

b) ${}_{n}p_x$ $z = v^{n}$

c) 0 otro caso.

Anualidad vitalicia anticipada $\ddot{a}$ x

$Z =$

a) $\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$ $K=0,1,\ldots$ $a_1=1/d$ $b_1=-1/d$ $m_0=0$ $m_1=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1 = {}_{k|}q_x$ **Para** $z = 1/d - v^{k+1}/d$
$b_1 \neq 0$ y $k = m_0, \ldots, m_1-1$

Escribiendo la función de densidad por intervalos y como puntos masa de probabilidad . Tenemos:

$f(z) =$

a) ${}_{k|}q_x$ **Para** $z = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$ y $k = 0,1,\ldots$

Anualidad vitalicia (vencida) a_x

$Z =$

a) $a_{\overline{K|}}$ $K=0,1,\ldots$ $a_1=1/i;$ $b_1=-1/d;$ $m_0=0;$ $m_1=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$f(z) =$

a) ${}_{k|}q_x$ Para $z = a_{\overline{K|}}$ y $k = 0,1,\ldots$

Anualidad anticipada por n años $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

$Z =$

a) $\ddot{a}_{\overline{K+1|}}$ $0 \le K < n$ $a_1=1/d$ $b_1=-1/d$ $m_0=0$ $m_1=n$

b) $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ $n \le K < \infty$ $a_2=\ddot{a}_{\overline{n|}}$ $b_2=0$ $m_1=n$ $m_2=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1= {}_{k|}q_x$ Para $z = 1/d - v^{k+1}/d$
$b_1 \neq 0$ y $k = 0,\ldots,n-1$

$G_2(z) = {}_{m(1)}p_x - {}_{m(2)}p_x$ Para $z = a_2, b_2 = 0$

Escribiendo la función de densidad por intervalos y como puntos masa de probabilidad . Tenemos:

$f(z) =$

a) ${}_{k|}q_x$ $z = \ddot{a}_{\overline{K+1|}}$ y $k = 0,1,..,n-1.$

b) ${}_{n}p_x$ $z=\ddot{a}_{\overline{n|}}$

c) 0 otro caso

El desarrollo de las funciones de densidad de los planes faltantes se encontrarán en el apéndice número 5.

Seguro	Z	f(z)
Vida entera Ax	v^{K+1} K = 0,1,...	${}_{k\|}q_x$ z= v^{k+1} k= 0,1,... 0 otro caso
Temporal n años $Ax{:}\overline{n\|}$	v^{K+1} K = 0,1,...,n-1 0 K = n, n+1,...	${}_{m}q_x$ z= 0 ${}_{k\|}q_x$ z= v^{k+1} k= 0,1,...n-1 0 Otro caso
Vitalicio diferido m años m|Ax	0 K = 0,1,...,m-1 v^{K+1} K = m, m+1,...	${}_{n}p_x$ z= 0 ${}_{k\|}q_x$ z= v^{k+1} k= m,m+1,... 0 Otro caso
Temporal m diferido n años m|$Ax{:}\overline{n\|}$	0 K = 0,1,...,m-1 v^{K+1} K = m, m+1,...,m+n-1 0 K = m+n,m+n+1,...	${}_{n}q_x + {}_{m+n}p_x$ z= 0 ${}_{k\|}q_x$ z= v^{k+1} k= m,m+1,... 0 Otro caso

Seguro	Z	f(z)
Dotal puro a n años $A_{x:\overline{n}\rceil}$ o $_nE_x$	0 $\quad K = 0,1,\ldots,n-1$ $v^n \quad K = n,\ n+1$	$_nq_x \quad z = 0$ $_np_x \quad z = v^n$ 0 $\quad$ Otro caso
Dotal a n años $A_{x:\overline{n}\rceil}$	$v^{K+1} \quad K = 0,1,\ldots,n-1$ $v^n \quad K = n,\ n+1,\ldots$	$_{n-1}p_x \quad z = 0$ $_{k\mid}q_x \quad z = v^{k+1}$ $k=0,1,\ldots,n-2$ 0 $\quad$ Otro caso
Dotal n años diferido m años. $_{m\mid}A_{x:\overline{n}\rceil}$	0 $\quad K = 0,1,\ldots,m-1$ $v^{K+1} \quad K = m,\ m+1,\ldots,m+n-1$ $v^{m+n} \quad K = m+n,m+n+1,\ldots$	$_mq_x \quad z = 0$ $_{m+n-1}p_x \quad z = v^{m+n}$ $_{k\mid}q_x \quad z = v^{k+1}$ $k = m,\ldots,m+n-2$ 0 $\quad$ Otro caso
Anualidad	Z	f(z)
Anticipada vitalicia $\ddot{a}x$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil} \quad K = 0,1,\ldots$	$_{k\mid}q_x \quad z = \ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$ $k=0,1,\ldots$ 0 $\quad$ otro caso
Anticipada a n años $\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil} \quad K = 0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil} \quad K = n+1,\ldots$	$_{k\mid}q_x \quad z = \ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$ $k=0,1,\ldots,n-1$ $_np_x \quad z = \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$ 0 $\quad$ otro caso
Anticipada vitalicia diferida m años $m\mid\ddot{a}x$	0 $\quad K = 0,1,\ldots,m-1$ $\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil} - \ddot{a}_{\overline{m}\rceil} \quad K = m,m+1,\ldots$	$_mq_x \quad z=0$ $_{k\mid}q_x \quad z = \ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil} - \ddot{a}_{\overline{m}\rceil}$ $k = m,m+1,\ldots$ 0 $\quad$ otro caso

Anualidad	Z		f(z)	
Anticipada a n años diferida m $m\|\ddot{a}x:\overline{n}\|$	0	$K = 0,1,\ldots,m-1$	${}_{m}q_x$	$z=0$
	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\|} - \ddot{a}_{\overline{m}\|}$	$K= m,\ldots,m+n-1$	${}_{k\|}q_x$	$z=\ddot{a}_{\overline{K+1}\|} - \ddot{a}_{\overline{m}\|}$ $k = m,\ldots,m+n-1\ldots$
	$v^m\ddot{a}_{\overline{n}\|}$	$K= m+n,m+n+1,\ldots$	${}_{m+n}p_x$	$z= v^m\ddot{a}_{\overline{n}\|}$
			0	otro caso
Anualidad vitalicia ax	$a_{\overline{K}\|}$	$K = 0,1,\ldots$	${}_{k\|}q_x$	$z= a_{\overline{K}\|}$ $k=0,1,\ldots$
			0	otro caso
Anualidad a n años $ax:\overline{n}\|$	$a_{\overline{K}\|}$	$K = 0,1,\ldots,n-1$	${}_{k\|}q_x$	$z= a_{\overline{K}\|}$ $k=0,1,\ldots,n-1$
	$a_{\overline{n}\|}$	$K = n+1,\ldots$	${}_{n}p_x$	$z= a_{\overline{n}\|}$
			0	otro caso
Anualidad vitalicia diferida m años $m\|ax$	0	$K = 0,1,\ldots,m-1$	${}_{m}q_x$	$z=0$
	$a_{\overline{K}\|} - a_{\overline{m}\|}$	$K = m,m+1,\ldots$	${}_{k\|}q_x$	$z=a_{\overline{K}\|} - a_{\overline{m}\|}$ $k = m,m+1,\ldots$
			0	otro caso
Anualidad a n años diferida m $m\|ax:\overline{n}\|$	0	$K = 0,1,\ldots,m-1$	${}_{m}q_x$	$z=0$
	$a_{\overline{K}\|} - a_{\overline{m}\|}$	$K= m,\ldots,m+n-1$	${}_{k\|}q_x$	$z=a_{\overline{K+1}\|} - a_{\overline{m}\|}$ $k = m,\ldots,m+n-1\ldots$
	$v^m a_{\overline{n}\|}$	$K= m+n,m+n+1,\ldots$	${}_{m+n}p_x$	$z= v^m a_{\overline{n}\|}$
			0	otro caso

CONCLUSIONES.

1) Mediante métodos algebraicos, probabilísticos y de cálculo diferencial se definió la función general de densidad, a partir de la función de distribución de T.

2) Se aplicaron los parámetros correspondientes a cada tipo de seguro y anualidad, obteniéndose la función de densidad particular para cada uno de ellos, tanto en el caso discreto como en el continuo.

3) Esta función nos permitirá el desarrollo de la esperanza de la función Z, que será de gran utilidad para llevar a cabo cálculos de primas netas únicas, primas netas niveladas y reservas, que se realizarán en el capítulo siguiente.

INTRODUCCIÓN.

Como objetivo principal de este capítulo se tiene la obtención de las primas netas únicas, primas netas niveladas y reservas, tomando en cuenta los desarrollos realizados en capítulos anteriores. Estos conceptos son fundamentales para la creación y funcionamiento de cualquier producto actuarial. Por lo cual se utilizan todos los puntos obtenidos anteriormente.

Partiendo de Z y su función de densidad se calculará su esperanza. la que representa la prima neta única. Posteriormente, basándose en el Principio de Equivalencia sobre el pago de beneficios y obligaciones de un seguro, obtendremos las primas netas niveladas. Con el transcurso del tiempo este principio sufre un desequilibrio, el que nos conduce hacia la necesidad de crear una reserva.

Las bases teóricas se desarrollaron para ambos casos, discretos y continuos, cabe destacar que los ejemplos prácticos sólo contemplan el primer caso ya que la mayor parte de la aplicación actual de seguros en nuestro país se practica con el tipo discreto.

5.1. PRIMAS NETAS UNICAS.-

CASO CONTINUO

La prima neta única de un seguro o anualidad es la esperanza de " Z " función de valor presente de beneficios. Existen 2 maneras de evaluar dicha esperanza que resultan equivalentes.

Si T es una variable aleatoria y Z es una función de T con contradominio en los reales, es decir, $Z = \sum a_i + b_i\, v^T$, Z es también una variable aleatoria con una función de distribución de probabilidades.

$$1)\; E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\, f(z)\, dz$$

$$2)\; E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\, f(t)\, dt$$

CASO DISCRETO

Si K es una variable aleatoria y Z es una función de K, es decir, $Z = \sum a_i + b_i\, v^K$, Z es también una variable aleatoria con una función de distribución de probabilidades existen dos formas de calcular su esperanza.

$$1)\ E(Z) = \sum_{-\infty}^{\infty} z\, f(z)$$

$$2)\ E(Z) = \sum_{-\infty}^{\infty} z\, f(k)$$

La función Z para cada seguro y anualidad han sido descritas en el capítulo dos. Tanto K como T y sus funciones de densidad fueron analizadas en el capítulo anterior. A continuación se desarrollarán sus esperanzas usando estos conceptos para obtener su prima neta única.

De aquí en adelante se desarrollará únicamente la variable aleatoria discreta por ser el metodo principalmente usado en México.

Se trabajará básicamente con dos seguros: dotal mixto y ordinario de vida. Las anualidades desarrolladas serán únicamente anticipadas.

Los desarrollos de los demas seguros y anualidades son análogos.

Utilizando la tabla resumen de funciones de densidad del cápitulo 4 para el caso discreto (página 112) desarrollaremos la esperanza de:

Seguro ordinario de vida

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x = Ax$$

Seguro dotal mixto n años

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k|}q_x + v^n\ {}_n p_x = Ax{:}\overline{n|}$$

Anualidad anticipada vitalicia

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^{k} v^h \right) ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^0 ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) + \sum_{k=1}^{\infty} v^1 ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) + \sum_{k=2}^{\infty} v^2 ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) + \ldots$$

$$= v^0\ {}_0 p_x + v^1\ {}_1 p_x + v^2\ {}_2 p_x + \ldots \quad = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_k p_x = \ddot{a}_x$$

o bien

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} (1-v^{k+1})/d\ \ {}_{k|}q_x = (1/d)\ (1-Ax)$$

Anualidad anticipada a n años

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{h=0}^{k} v^h \right) ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) + \sum_{h=0}^{n-1} v^h{}_n\ p_x =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^0 ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x + {}_n p_x) + \sum_{k=1}^{n-1} v^1 ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x + {}_n p_x) + \ldots$$

$$+ \sum_{k=n-1}^{n-1} v^{n-1} ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x + {}_n p_x)$$

$$= v^0\ {}_0 p_x + v^1\ {}_1 p_x + \ldots + v^{n-1}\ {}_{n-1} p_x \quad = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_k p_x$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

o bien,

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\ {}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_{n}p_x = \sum_{k=0}^{n-1} (1/d)(1-v^{k+1})\ {}_{k|}q_x + (1/d)(1-v^{k+1})\ {}_{n}p_x$$

$$= (1/d)\ (\ (\sum_{k=0}^{n-1}\ {}_{k|}q_x + {}_{n}p_x\ ) - (\ \sum_{k=0}^{n-1}\ v^{k+1}\ {}_{k|}q_x\ + v^n\ {}_{n}p_x\ )\ )$$

$$= (1/d)\ (1-Ax{:}\overline{n|}\ )$$

Ahora se obtendrán las varianzas de los siguientes planes:

a) Ordinario de vida.

b) Dotal a n años

c) Anualidad anticipada vitalicia.

d) Anualidad anticipada a n años.

Ordinario de vida.

$$Var\ (\ Z\ ) = E\ (\ z^2\ ) - E\ (\ z\ )^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\ v^2\ )^{k+1}\ {}_{k|}\ qx - Ax^2$$

Si definimos ${}^2Ax$ como un seguro con tasa de interés $(1+i\ )^2 - 1$, tenemos:

$$Var\ (\ Z\ ) = {}^2Ax - Ax^2$$

Dotal a n años.

$$Var\ (\ Z\ ) = \sum_{k=0}^{n-1} (\ v^2\ )^{k+1}\ {}_{k|}\ qx + v^{2n} - Ax{:}\overline{n|}^{\,2} =$$

$$= {}^2Ax'{:}\overline{n|} - {}^2Ax{:}\overline{n'|} - (\ Ax{:}\overline{n|}\ )^2 =$$

$$= {}^2Ax{:}\overline{n|} - Ax{:}\overline{n|}^{\,2}$$

Anualidad anticipada vitalicia.

$$Var\ (Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 - v^{k+1}}{d}\right)^2 {}_{k|}qx - \left[\frac{1}{d}(1 - Ax)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{d^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(1-2v^{k+1}+v^{2(k+1)})\ {}_{k|}qx - \frac{1}{d^2}(1 - 2Ax - 2Ax + Ax^2) =\right.$$

$$= \frac{1}{d^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}q_x - 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_{k|}qx\right) + \sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)}{}_{k|}qx - 1 + 2Ax - Ax^2\right] =$$

$$= \frac{1}{d^2}(1 - 2Ax + {}^2Ax - 1 - 2Ax + Ax^2) =$$

$$= \frac{1}{d^2}\left[{}^2Ax - Ax^2\right]$$

Anualidad anticipada n años.

$$Var\ (Z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1 - v^{k+1}}{d}\right)^2 {}_{k|}qx + \left(\frac{1 - v^n}{d}\right)^2 {}_np_x - \left[\frac{1}{d}(1 - Ax{:}\overline{n|})\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{d^2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(1-2v^{k+1}+v^{2(k+1)})\ {}_{k|}qx + {}_np_x - 2v^n{}_np_x + v^{2n}{}_np_x\right] -$$

$$- \frac{1}{d^2}(1 - 2Ax{:}\overline{n|} + Ax{:}\overline{n|}^2) =$$

$$= \frac{1}{d^2}\left[1 - {}_np_x - 2\left(\sum_{k=0}^{n-1}{}_{k|}qx + v^n{}_np_x\right) + \sum_{k=0}^{n-1}v^{2(k+1)}{}_{k|}qx + {}_np_x + v^{2n}{}_np_x -\right.$$

$$\left. 1 + 2Ax{:}\overline{n|} - Ax{:}\overline{n|}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{d^2} (-2A_{x:\overline{n}|} + {}^2A_{x:\overline{n}|} - 2A_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}{}^2) =$$

$$= \frac{1}{d^2} [{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2]$$

5.2.- PRIMAS NETAS NIVELADAS.

Hasta el presente capítulo, consideramos sólo la posibilidad de adquirir un seguro mediante el pago de la prima en una exhibición (prima única). El realizar este desembolso representa en la mayoría de los casos, un gasto considerable y a su vez inaccesible. Como medida alternativa se creó una forma de pago mediante anualidades bajo el Principio de Equivalencia.

Este principio sostiene que el valor presente de estas anualidades debe ser igual al valor presente de los beneficios del seguro.

Lo anterior lo podemos enunciar de la siguiente manera:

E[Valor presente de los beneficios] = E[Valor presente de las primas netas]

denotado:

$$E(Z_B) = E(P\, Z_O)$$

Donde

B = Beneficios
P = Prima Neta
O = Obligaciones

De esta igualdad tenemos:

$$E(Z_B - P\, Z_O) = 0$$

A la diferencia del valor presente de los beneficios y el valor presente de las primas netas se define como " pérdida del asegurador " (L).

$L = Z_B - P\,Z_O$

Utilizando el principio de equivalencia tenemos:

$E\,[\,L\,] = 0$

Aplicando estos conceptos:

E [Valor presente de los beneficios] = Prima Neta * E [Valor presente de la anualidad en que se pagará la prima neta]

$$\text{Prima Neta} = \frac{\text{E [Valor presente de los beneficios]}}{\text{E [Valor presente de anualidades]}}$$

La varianza la expresamos de la siguiente manera:

$$Var\,(\,L\,) = E\,(\,L^2\,) - E\,(\,L\,)^2$$

y como la $E\,(\,L\,) = 0$ por el principio de equivalencia tenemos que:

$$Var\,(\,L\,) = E\,(\,L^2\,)$$

Las primas netas pueden clasificarse de acuerdo a su forma de pago y el tipo de beneficios (continuo o discreto) de la siguiente forma:

- Primas totalmente continuas.
- Primas totalmente discretas.
- Primas mixtas.

PRIMAS NETAS TOTALMENTE CONTINUAS.

En este tipo de primas los beneficios que otorga y las anualidades con las que se paga son de tipo continuo (capítulo no. 4) . Con ellas se pueden obtener varias combinaciones.

PRIMAS TOTALMENTE DISCRETAS.

Son aquellas pagaderas al principio del período y donde los beneficios (muerte) son pagaderos al final del período en que ocurra.

PRIMAS MIXTAS.

En éstas se combinan los dos tipos anteriores. Obteniendo por ejemplo un beneficio de muerte otorgado al momento de ocurrir ésta, adquirido por una anualidad pagadera al inicio del período.

A continuación desarrollaremos las esperanzas y varianzas de los siguientes planes:

a) Ordinario de vida.

b) Dotal a n años.

Para caso discreto por ser este método el más usado en el mercado mexicano de seguros.

ORDINARIO DE VIDA

Beneficios: $f(z)$

$$Z_B = v^{K+1} \qquad K = 0,1,.., \qquad {}_{k|}q_x$$

Obligaciones:

$$Z_o = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \qquad K = 0,1,.. \qquad {}_{k|}q_x$$

$$\text{Prima neta nivelada} = \frac{E(Z_B)}{E(Z_o)} = \frac{Ax}{\ddot{a}x} = P$$

$$E(L) = Ax - P\,\ddot{a}x$$

$Var(L) = E(L^2) - [E(L)]^2 = E(L^2)$ dado que $E(L) = 0$

$$= E[Z_B^2 - 2PZ_B Z_o + P^2 Z_o^2]$$

$$= E(Z_B^2) - 2P E(Z_o Z_B) + E(Z_o^2)$$

$$= {}^2Ax + \frac{P^2}{d^2}(1 - 2Ax + {}^2Ax) - \frac{2}{d}(Ax - {}^2Ax) + \frac{P^2}{d^2}(1 - 2Ax + {}^2Ax) -$$

$$(Ax + P\ddot{a}x)^2$$

$$= {}^2Ax\left(1 + \frac{P}{d}\right)^2 - {}^2Ax\left(\frac{P^2}{d^2} + \frac{P}{d}\right) + \frac{P^2}{d^2}$$

Ya que

$$E(Z_B^2) = {}^2Ax$$

$$E(Z_o^2) = E\left[\left(\frac{1 - v^{k+1}}{d}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{d^2}\left[1 - 2v^{k+1} + v^{2(k+1)}\right] =$$

$$= \frac{P^2}{d^2}\left[1 - 2Ax + {}^2Ax\right]$$

$$E(Z_B * Z_o) = E\left(v^{k+1}\left(\frac{1 - v^{k+1}}{d}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{d} E\left(v^{k+1} - v^{2(k+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{d}(Ax - {}^2Ax)$$

Para simplificar la expresión le restamos ya $E(L)^2 = 0$
Entonces:

$$= {}^2Ax\left(1+\frac{P}{d}\right)^2 - {}^2Ax\left(\frac{P^2}{d^2}+\frac{P}{d}\right) + \frac{P^2}{d^2} - (Ax+P\ddot{a}x)^2$$

y sustituyendo $\ddot{a}x = (1/d)(1-Ax)$

$$Var(L) = ({}^2Ax - Ax)\left(1+\frac{P}{d}\right)^2$$

SEGURO DOTAL

Seguro dotal a n años adquirido por una anualidad a n años.

Beneficios: $f(z)$

$$Z_B = v^{K+1} \qquad K = 0,1,..,n-1 \qquad {}_{k|}q_x$$

$$= v^n \qquad K = n, \dots, \qquad {}_n p_x$$

Obligaciones:

$$Z_o = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \qquad K = 0,1,..,n-1 \qquad {}_{k|}q_x$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} \qquad K = n,.. \qquad {}_{n|}p_x$$

$$Prima\ neta\ nivelada = \frac{E(Z_B)}{E(Z_o)} = \frac{Ax{:}\overline{n}|}{\ddot{a}x{:}\overline{n}|} = P$$

$$E(L) = Ax{:}\overline{n}| - P\,\ddot{a}x{:}\overline{n}|$$

$$Var(L) = E(L^2) - E(L)^2 = E(L^2) =$$

$$= E(Z_B^2 - 2PZ_BZ_o + P^2Z_o^2) =$$

$$= {}^2Ax{:}\overline{n|} - \frac{2P}{d}\left(Ax{:}\overline{n|} - {}^2Ax{:}\overline{n|} \right) + \frac{P^2}{d^2}\left(1 - {}^2Ax{:}\overline{n|} \right) + {}^2Ax{:}\overline{n|} \,) =$$

$$= {}^2Ax{:}\overline{n|}\left(1 + \frac{2P}{d} + \frac{P^2}{d^2} \right) + Ax{:}\overline{n|}\left(\frac{-2P}{d} - \frac{2P^2}{d^2} \right) + \frac{P^2}{d^2}$$

Para simplificar la expresión le restamos ya $E(L)^2 = 0$
Entonces:

$$= {}^2Ax{:}\overline{n|}\left(1 + \frac{P}{d} \right)^2 - {}^2Ax{:}\overline{n|}\left(\frac{P^2}{d^2} + \frac{P}{d} \right) + \frac{P^2}{d^2} - \left(Ax{:}\overline{n|} + P\ddot{a}x{:}\overline{n|}\right)^2$$

y sustituyendo $\ddot{a}x{:}\overline{n|} = (1/d)(1 - Ax{:}\overline{n|})$

$$Var(L) = \left({}^2Ax{:}\overline{n|} - Ax{:}\overline{n|} \right)\left(1 + \frac{P}{d} \right)^2$$

$$E\left(Z_B^2 \right) = {}^2Ax{:}\overline{n|}$$

$$P\,E\left(Z_B Z_o \right) = P \sum_{k=0}^{n-1} \left(v^{k+1}\, \ddot{a}\overline{k+1|} \right) {}_{k|}qx + v^n\, \ddot{a}\overline{n|}\; {}_np_x =$$

$$= P\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{v^{k+1} - v^{2(k+1)}}{d} \right) {}_{k|}qx + \frac{v^n - v^{2n}}{d}\; {}_np_x =$$

$$= \frac{P}{d} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_{k|}qx + v^{k+1} nPx + \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)}\, {}_{k|}qx + v^{2n}\; {}_np_x$$

$$= P\left(Ax{:}\overline{n|} - {}^2Ax{:}\overline{n|} \right)$$

$$E\left(Z_o^2 \right) = P^2\left(1 - {}^2Ax{:}\overline{n|} + {}^2Ax{:}\overline{n|} \right)$$

EJEMPLOS

Para una cartera de 100 primas totalmente discretas de edad 35 y usando la Tabla de Mortalidad Ultima Experiencia Mexicana 82-89 con un interés del 6%, se calcularán:
a) Varianzas
b) Probabilidad de que L sea mayor que 0, es decir que la función de pérdida del asegurador sea positiva.
c) Prima nivelada necesaria para obtener la probabilidad de que L sea positiva, resulte menor que 0.05
Para los planes Ordinario de Vida y Dotal a 20 años.

ORDINARIO DE VIDA

a) De acuerdo a las varianzas obtenidas anteriormente:
Var (L) = (1 + P/d)^2 (2Ax - Ax^2)

2Ax =	0.0396	
Ax:=	0.1362	
P =	**0.0089**	
d =	0.0566	**VAR (L)= 0.0282**

b) Si Li denota el riesgo de pérdida por parte del i-ésimo asegurador, entonces se desea calcular P(Li > 0) = P (L > 0 / 100)
ya que el tamaño de la muestra es grande, el teorema del límite central establece que L es aproximadamente una distribución normal:
media = E [L] = 0 varianza = Var [L] / 100
Estandarizando:

$$P(L > 0) = P\left(\frac{L - E[L]}{(Var[L] / 100)^{1/2}} > \frac{0 - E[L]}{(Var[L] / 100)^{1/2}} \right)$$

$$P(L > 0) = P\left(\frac{L - 0}{(Var[L] / 100)^{1/2}} > \frac{0 - 0}{(Var[L] / 100)^{1/2}} \right)$$

P (Z > 0) = 0.5 según valores en tablas de la normal estandarizada (Z).
P (L > 0) = 50.00%

c) Para determinar la prima necesaria para que P (L > 0) = 0.05, la aproximamos a una distribución normal:
(0 - E [L] / (Var[L] / 100)^1/2) = 1.645
-(Ax -P ax / Var(L)^1/2)=1.645/100
-(Ax -P ax / ((1+P/d) (2Ax - Ax^2)^1/2)=0.01645
Despejando P (prima)
(prima) = d [(0.1645* ((2Ax - Ax^2)^1/2)+ Ax) / 1- (Ax + 0.1645*(2Ax - Ax^2)^1/2)]
sustituyendo valores:
(prima) = 0.0091
Lo que representa un incremento del 1.47% con respecto a la prima original, incluyendo un grado de confiabilidad de 95% de que el asegurador no tenga pérdida.

DOTAL A 20 AÑOS

a) De acuerdo a las varianzas obtenidas anteriormente:
VAR (L) = 2Ax:n (1+ 2P/d + P^2/d^2) + Ax:n (- 2P^2/d^2 - 2P/d) + P^2/d^2

2Ax:n	0.1155	
Ax:n	0.3305	
P	**0.0279**	
d	0.0566	**VAR (L)= 0.0139**

b) Si Li denota el riesgo de pérdida por parte del i-ésimo asegurador, entonces se desea calcular P (Li > 0) = P (L > 0 / 100)
ya que el tamaño de la muestra es grande, el teorema del límite central establece que L es aproximadamente una distribución normal:
media = E [L] = 0 varianza = Var [L] / 100
Estandarizando:

$$P(L > 0) = P\left(\frac{L - E[L]}{Var[L] / 100} > \frac{0 - E[L]}{Var[L] / 100} \right)$$

$$P(L > 0) = P\left(\frac{L - 0}{Var[L] / 100} > \frac{0 - 0}{Var[L] / 100} \right)$$

P (Z > 0) = 0.5 según valores en tablas de la normal estandarizada (Z).
P (L > 0) = 50.00%

c) Para determinar la prima necesaria para que P (L > 0) = 0.05, la aproximamos a una distribución normal:
(0 - E [L] / (Var[L] / 100)^1/2) = 1.645
-(Ax -P ax / Var(L)^1/2)=1.645/100
-(Ax -P ax / ((1+p/d) (2Ax - Ax^2)^1/2)=0.01645
(prima) = d [(0.1645* ((2Ax - Ax^2)^1/2)+ Ax) / 1- (Ax + 0.1645*(2Ax - Ax^2)^1/2)]
sustituyendo valores:
(prima) = 0.0280
Lo que representa un incremento del 0.23% con respecto a la prima original, incluyendo un grado de confiabilidad de 95% de que el asegurador no tenga pérdida.

Con estos ejercicios se pretende obtener una aplicación real de los conceptos y procedimientos propuestos a lo largo de este trabajo, complementados con algunas herramientas probabilísticas y estadísticas. Aportar un grado de confiabilidad para el cálculo de la prima considerando la experiencia en mortalidad de la cartera, sin olvidar la posibilidad de salir del mercado debido a algún incremento excesivo en la prima, puede ser un instrumento valioso de análisis de un producto.

Actualmente en nuestro país, todo este procedimiento de análisis no se le ha llevado a la práctica real en productos existentes en el mercado de seguros mexicano, por lo que consideramos que se cuenta con un amplio campo de desarrollo de estos conceptos.

5.3.- RESERVAS.

El concepto reserva nace a partir del desequilibrio que sufre el Principio de Equivalencia con el transcurso de algún tiempo, ya que al inicio las primas pagadas por el asegurado son mayores que el riesgo por el cual está cubierto. Por lo cual, al exceso del valor presente de los beneficios contra el valor presente de las primas netas futuras, lo llamaremos *reserva*.

Dos métodos para el cálculo de reservas son:

1) Método retrospectivo.
2) Método prospectivo.

Método Retrospectivo.

Nos situamos al tiempo de valuación de la reserva, antes del pago de la prima. Analizamos las obligaciones y derechos que se han cubierto y cobrado, respectivamente. De esta forma, el excedente que resulte de restar las primas cobradas al tiempo de valuación menos los derechos cubiertos, será igual a la reserva. Esto lo podemos expresar como:

Reserva al tiempo $x+t$ = Valor presente de las primas cobradas hasta $x+t$ - Valor presente de los beneficios cubiertos a $x+t$

Método Prospectivo.

Mediante este método se obtiene el cálculo de la reserva al tiempo t, por lo cual nos situamos al tiempo x+t. Analizamos los beneficios y las obligaciones contratadas o reservas, sea igual a:

Reserva = Valor presente de las obligaciones por cubrir. - Valor presente de las primas por pagar.

De acuerdo al Principio de Equivalencia, la reserva al tiempo t la podemos expresar de la siguiente manera:

$_tV$ = E [Valor presente de los beneficios futuros a partir de $x+t$ - Valor presente de las primas por recibir de $x+t$]

lo que podemos expresar de igual manera:

$$_tV = E(_tL)$$

Para el caso discreto usamos la variable aleatoria J tiempo futuro de vida para una persona de $x+k$, desarrollada en el capítulo no. 1

$$F(j) = {}_jq_{x+k}$$

y su función de densidad:

$$f(j) = {}_jp_{x+k}$$

donde j y k son enteros positivos.

La función de distribución y densidad para $Z(j)$ es análoga a la de los capítulos 3 y 4.

Para el caso continuo usamos la variable aleatoria U tiempo futuro de vida para una persona de $x+t$, desarrollada en el capítulo no. 1:

$$F(u) = 1 - \frac{{}_{t+u}p_x}{{}_tp_x} = {}_uq_{x+t}$$

y su función de densidad:

$$f(u) = {}_up_{x+t}$$

La función de distribución y densidad para Z en el tiempo t es análoga a la de los capítulos 3 y 4.

ORDINARIO DE VIDA

A continuación se desarrolla la esperanza y varianza de $_kL$ de un plan ordinario de vida:

Valor presente	$f(z)$
$Z_B = v^{J+1}$	${}_{j|}q_{x+k}$

$Z_0 = \ddot{a}_{\overline{J+1}|}$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad {}_j| q_{x+k}$

$$E(\,_kL\,) = E(Z_B) - P\,E(Z_o) =$$

$$= Ax{+}k - P\,\ddot{a}x{+}k$$

$$Var(\,_kL\,) = E(\,_kL^2\,) - E(\,_kL\,)^2 =$$

$$= (\,^2Ax{+}k - Ax{+}k^{\,2}\,)\,(1 - P/d\,)^2$$

DOTAL 20

La esperanza y varianza de la función $_kL$ para un seguro dotal a n años queda de la siguiente forma:

Beneficios		$f(z)$
$Z_B = v^{J+1}$	$J = 0,1,..,n\text{-}k\text{-}1$	${}_j\vert\, q_{x+k}$
$v^{n\text{-}k}$	$J = n\text{-}k, \ldots$	${}_{n\text{-}k}\, p_{x+k}$
$Z_o = \ddot{a}_{\overline{J+1}\vert}$	$J = 0,1,..,n\text{-}k\text{-}1$	${}_j\vert\, q_{x+k}$
$a_{\overline{n\text{-}k}\vert}$	$J = n\text{-}k, \ldots$	${}_{n\text{-}k}\, p_{x+k}$

$$_kL = Z_B - P\,Z_o$$

$$E(\,_kL\,) = Ax{+}k{:}\overline{n\text{-}k}| - P\,\ddot{a}x{+}k{:}\overline{n\text{-}k}|$$

$$Var(\,_kL\,) = (\,^2Ax{+}k{:}\overline{n\text{-}k}| - Ax{+}k{:}\overline{n\text{-}k}|\,)(\,1{+}P/d)^2$$

Para el plan Ordinario de Vida.
Para una cartera de 100 primas totalmente discretas de edad 35 y usando la Tabla de Mortalidad Ultima Experiencia Mexicana 82-89 con un interés del 6%, se calcularán:
a) Esperanza de kL, cuando k=5, 15, 30, 45
b) Varianzas

Siguiendo el procedimiento para las primas netas niveladas del ejercicio anterior, obtenemos los siguientes resultados:

E (kL) = Ax+k - P äx+k =
VAR (kL) = (1 + P/d)^2 (2Ax+k - Ax+k^2)

k	*E(kL)*	*Var (kL)*
0	0.0000	0.0282
5	0.0379	0.0340
15	0.1384	0.0472
30	0.3528	0.0590
45	0.6047	0.0421
55	0.7527	0.0200

CONCLUSIONES.

1) Se obtuvo la definición de conceptos importantes como los son: primas netas únicas, primas netas niveladas y reservas. Nos enfocamos en dos tipos de planes particulares (ordinarios de vida y dotal).

2) El plan ordinario de vida fue elegido por ser uno de los más vendidos; el dotal por utilizar dos tipos de beneficios, por muerte y supervivencia. El uso de las anualidades va implícito en las primas netas niveladas. Con esto cualquier desarrollo sería análogo.

3) Basándonos en estas herramientas, se llevaron a cabo ejemplos prácticos, como lo son el cálculo del incremento necesario en la prima , para que la probabilidad de pérdida para el asegurador resultara menor a un parámetro dado ; o el comportamiento de la reserva y varianzas de un plan a lo largo del tiempo, lo que nos permite observar la variabilidad de la pérdida del asegurador con el plan a tratar para un análisis más profundo.

4) Las bases teóricas quedan descritas para cualquier desarrollo posterior para cualquier caso, discreto o continuo.

CONCLUSIONES.

1) Se obtuvo la definición de conceptos importantes como los son: primas netas únicas, primas netas niveladas y reservas. Nos enfocamos en dos tipos de planes particulares (ordinarios de vida y dotal).

2) El plan ordinario de vida fue elegido por ser uno de los más vendidos; el dotal por utilizar dos tipos de beneficios, por muerte y supervivencia. El uso de las anualidades va implícito en las primas netas niveladas. Con esto cualquier desarrollo sería análogo.

3) Basándonos en estas herramientas, se llevaron a cabo ejemplos prácticos, como lo son el cálculo del incremento necesario en la prima , para que la probabilidad de pérdida para el asegurador resultara menor a un parámetro dado ; o el comportamiento de la reserva y varianzas de un plan a lo largo del tiempo, lo que nos permite observar la variabilidad de la pérdida del asegurador con el plan a tratar para un análisis más profundo.

4) Las bases teóricas quedan descritas para cualquier desarrollo posterior para cualquier caso, discreto o continuo.

1) Para definir una función general de beneficios, se utilizó principalmente en el uso de la variable aleatoria tiempo futuro de vida, debido a que la cobertura de los seguros está relacionada con la medición de la supervivencia de los asegurados. Siendo esta variable aleatoria la base, fue necesario el desarrollo de sus funciones de distribución y densidad.

2) Definida la función general de beneficios y analizada su aplicación a cada uno de los tipos de seguros y anualidades, se observó que son adaptables a esta función general por medio de parámetros señalados en el capítulo dos.

3) Aunque nuestro objetivo es la creación de una forma general de desarrollo, se puede notar que en algunos casos como lo son los seguros que otorgan beneficios exclusivamente por muerte, se puede omitir el uso de un parámetro, para simplificar la utilización de la fórmula.

4) Después de haber obtenido las funciones de distribución y densidad generales, se observa que se cumple para todos los tipos de seguro, así como la adaptación de los parámetros a cada uno de ellos. Aunque la demostración general es complicada, el desarrollo para cada uno de los planes se simplificó gracias a la aplicación de este forma general.

5) El uso de esta fórmula general de beneficios, nos permite a su vez, realizar combinaciones de diferentes tipos de planes de seguros y anualidades para la creación de un producto especial, de acuerdo a las necesidades del mercado o de un cliente.

6) En base a los conceptos y desarrollos obtenidos a lo largo del trabajo fue posible sintetizarlo en la realización de conceptos importantes para los planes de seguros. Además del manejo de éstos, se obtuvieron herramientas estadísticas como lo son esperanzas, varianzas e intervalos de confianza que son una aportación a los trabajos de Cálculo Actuarial anteriores, las cuales se utilizaron para la elaboración de dos ejemplos prácticos. Datos como el incremento necesario en prima para obtener una probabilidad mayor a un parámetro deseado, en la pérdida del asegurador o el comportamiento de las esperanzas y varianzas en las reservas en el transcurso del tiempo, son muestras del análisis que se puede realizar con estos conceptos.

7) Con la obtención de funciones de distribución y densidad para variables aleatorias de tipo continuo, existe la posibilidad de calcular y analizar con mayor detalle los planes desarrollados con este enfoque. Actualmente es mínima la aplicación de este tipo de productos en nuestro país, lo que consideramos como un campo con grandes expectativas de investigación.

8) Como se vio en su momento en el capítulo número 5 con los ejercicios prácticos, la aplicación de este método en México junto con las herramientas de análisis probabilísticos y estadísticos, ha sido totalmente nula. Nuestro objetivo con tales ejemplos es mostrar el uso que se le puede dar a estos cálculos y procedimientos propuestos en este trabajo. La medición de grados de confiabilidad en el cálculo de las primas puede ser una herramienta importante en el estudio del funcionamiento de un producto. Adicional a esta aplicación contamos con todo el enfoque continuo, del cual tampoco se cuenta con ningún desarrollo práctico en algún producto o procedimiento de análisis de los que ya se encuentran en el mercado de seguros mexicano.

9) Otro uso que consideramos puede tener este trabajo, se encuentra dentro de la impartición de materias en nuestra carrera, ya que puede ser utilizado como una guía para complementar los textos empleados en la enseñanza del Cálculo Actuarial.

Seguro temporal de vida diferido m años pagadero al momento de la muerte

$m|\bar{A}x$

$Z =$

a) 0 $\quad 0 \leq T < m \qquad a_1=0 \;\; b_1=0 \;\; m_0=0 \;\; m_1=m$

b) υ^T $\quad m \leq T < \infty \qquad a_2=0 \;\; b_2=1 \;\; m_1=m \;\; m_2=\infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1=0, a_1 \leq z$

$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{max\{r(2),\, m(1)\}}q_x$ Para $b_2>0, a_2<z$

Donde $r(2) = \dfrac{-1}{\delta} \ln \dfrac{(z - a_2)}{b_2}$

Sustituyendo:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x = {}_{m}q_x - {}_{0}q_x = {}_{m}q_x$ Para $b_1=0, a_1 \leq z$

$H_2(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{max\{r(2),\, m(1)\}}q_x$ Para $b_2>0, a_2<z$

Donde $r(2) = \dfrac{-1}{\delta} \ln z$

Como $T < \infty$, tenemos:

$z = \upsilon^T > \upsilon^{\infty} = 0$

2) Para $b_2 > 0,\ 0 < z$

a) Si $max = \left\{ \frac{-1}{\delta} ln(z),\ m \right\} = \frac{-1}{\delta} ln(z)$ tenemos:

$$\frac{-1}{\delta} ln(z) > m$$

$$ln(z) < -\delta m$$

$$z < e^{(ln\ v)m} = v^m$$

$$\therefore\ 0 < z \text{ y como } z < v^m \quad \Rightarrow$$

$$H_{2a}(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{r(2)}q_x \quad \text{para } 0 < z < v^m$$

$$= 1 - {}_{r(2)}q_x = {}_{r(2)}p_x$$

b) Si $max = \left\{ \frac{-1}{\delta} ln(z),\ m \right\} = m$ tenemos:

$$\frac{-1}{\delta} ln(z) \leq m$$

$$ln(z) \geq -\delta m$$

$$z \geq e^{(ln\ v)m} = v^m \quad \Rightarrow$$

$$H_{2b}(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{m}q_x = 1 - {}_{m}q_x = {}_{m}p_x \qquad \text{Para } v^m \leq z$$

Por lo tanto, tenemos:

$H_1(z) = {}_mq_x$ Para $0 \leq z$

$H_{2a}(z) = {}_{r(2)}p_x$ Para $0<z<v^m$

$H_{2b}(z) = {}_mp_x$ Para $v^m \leq z$

Lo que podemos escribir

$F(z) =$

a) ${}_mq_x$ Para $z = 0$

b) ${}_mq_x + {}_{r(2)}p_x$ Para $0 < z < v^m$

c) 1 Para $v^m \leq z$

Donde $r(2) = \frac{-1}{\delta} \ln z$

Seguro temporal a n años diferido m años $m|\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$

$Z =$

a) 0 $\quad 0 \leq T < m$ $\quad a_1=0\ b_1=0\ m_0=0\ \ m_1=m$

b) v^T $\quad m \leq T < m+n$ $\quad a_2=0\ b_2=1\ m_1=m\ \ m_2=m+n$

c) 0 $\quad m+n \leq T$ $\quad a_3=0\ b_3=0\ m_2=m+n\ \ m_3=\infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1 = 0$, $a_1 \leq z$

$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{max\{r(2),\, m(1)\}}q_x$ Para $b_2 > 0$, $a_2 < z$

Donde $r(2) = \dfrac{-1}{\delta} \ln \dfrac{(z - a_2)}{b_2}$

$H_3(z) = {}_{m(3)}q_x - {}_{m(2)}q_x$ Para $b_3 = 0$, $a_3 \leq z$

Sustituyendo:

1) Para $b_1=0$, $0 \leq z$

$$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x = {}_{m}q_x - {}_{0}q_x = {}_{m}q_x - 0 = {}_{m}q_x$$

2) Para $b_2>0$, $a_2=0 < z$

$$H_2(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{max\{r(2),\, m\}}q_x$$

Donde $r(2) = \dfrac{-1}{\delta} \ln z$

Como $T < m$ tenemos:

$$z = \upsilon^T > \upsilon^m$$

a) Si $max = \left\{ \dfrac{-1}{\delta} \ln(z), m \right\} = \dfrac{-1}{\delta} \ln(z)$ tenemos:

$$\frac{-1}{\delta} \ln(z) > m$$

$$ln(z) < -\delta m$$

$$z < e^{(ln\ v)m} = v^{m}$$

$\therefore\ 0 < z$ y como $z < v^{m}$ concluimos:

$$H_{2a}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{r(2)}q_x \quad \text{para} \quad 0 < z < v^{m}$$

b) Si $max = \left\{ -\frac{1}{\delta} ln(z),\ m \right\} = m$ tenemos:

$$-\frac{1}{\delta} ln(z) \leq m$$

$$ln(z) \geq -\delta m$$

$$z \geq e^{(ln\ v)m} = v^{m}$$

Por lo tanto:

$$H_2(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{m}q_x \qquad \text{Para} \quad v^{m} \leq z$$

3) $H_3(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{m+n}q_x$ **Para** $b_3 = 0,\ a_3 = 0 \leq z$

Por lo tanto, tenemos:

$H_1(z) = {}_{m}q_x$	**Para** $0 \leq z$
$H_{2a}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{r(2)}q_x$	**Para** $v^{m+n} < z < v^{m}$
$H_{2a}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{m}q_x$	**Para** $v^{m} \leq z$
$H_3(z) = {}_{m+n}p_x$	**Para** $0 \leq z$

Lo que podemos escribir como:

$F(z) =$

a) ${}_{m}q_x + {}_{m+n}p_x$ Para $0 \leq z \leq v^{m+n}$

b) ${}_{m}q_x + {}_{r(2)}p_x$ Para $v^{m+n} < z < v^m$

c) 1 Para $v^m \leq z$

Seguro dotal puro a n $\bar{A}_{x:\overset{1}{n|}}$ o nEx

$Z =$

a) 0 $0 \leq T < n$ $a_1=0\ b_1=0\ m_0=0\ \ m_1=n$

b) v^n $n \leq T$ $a_2=v^n\ b_2=0\ m_1=n\ \ m_2=\infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

1) $H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1 = 0,\ a_1 \leq z$

2) $H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2 = 0,\ a_2 \leq z$

Sustituyendo:

1) $H_1(z) = {}_{n}q_x - {}_{0}q_x = {}_{n}q_x$ Para $b_1=0,\ a_1 = 0 \leq z$

2) $H_2(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{n}q_x = {}_{n}p_x$ Para $b_2=0,\ a_2 = v^n \leq z$

Lo que podemos escribir:

$F(z) =$

a) ${}_nq_x$ Para $0 \leq z < \upsilon^n$

b) 1 Para $\upsilon^n \leq z$

Seguro dotal mixto a n años diferido m $m|\bar{A}x{:}\overline{n|}$

Z =

a) 0 Para $0 \leq T < m$ $a_1=0,\ b_1=0,\ m_0=0,\ m_1=m$

b) υ^T Para $m \leq T \leq m+n$ $a_2=0,\ b_2=1,\ m_1=m,\ m_2=m+n$

c) υ^{m+n} Para $m+n < T$ $a_3=\upsilon^{m+n},\ b_3=0,\ m_2=m+n,\ m_3=\infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1=0,\ a_1 \leq z$

$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{max\{r(2),\ m(1)\}}q_x$ Para $b_2>0,\ a_2 < z$

Donde $r(2) = \frac{-1}{\delta} \ln \frac{(z-a_2)}{b_2}$

$H_3(z) = {}_{m(3)}q_x - {}_{m(2)}q_x$ Para $b_3=0,\ a_3 \leq z$

Sustituyendo:

1) Para $b_1=0,\ a_1=0 \leq z$

$H_1(z) = {}_mq_x - {}_0q_x = {}_mq_x - 0 = {}_mq_x$

2) Para $b_2 = 1 > 0,\ a_1 = 0 < z$

$$H_2(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{max\{r(2),\, m\}}q_x$$

Donde $r(2) = \dfrac{-1}{\delta}\ ln\ (\ z\ )$

Como $T \leq m+n$ tenemos:

$$z = \upsilon^T \geq \upsilon^{m+n}$$

a) Si $max = \left\{ \dfrac{-1}{\delta} ln(z),\ m \right\} = \dfrac{-1}{\delta} ln(z)$ tenemos:

$$\frac{-1}{\delta} ln(z) > m$$

$$ln(z) < -\delta\ m$$

$$z < e^{\ m\ ln\ \upsilon}$$

$$z < \upsilon^m$$

$$\therefore \quad z < \upsilon^m \ \text{ y como } \ \upsilon^{m+n} \leq z \qquad \Rightarrow$$

$$H_{2a}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{r(2)}q_x \qquad \text{Para } \upsilon^{m+n} \leq z < \upsilon^m$$

b) Si $max = \left\{ \dfrac{-1}{\delta} ln(z),\ m \right\} = m$ tenemos:

$$\frac{-1}{\delta} ln(z) \leq m$$

$$ln(z) \geq -\delta m$$

$z \geq v^m \qquad \Rightarrow$

$H_{2b}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $v^m \leq z$

3) Para $b_3=0$, $a_3= v^{m+n} \leq z$

$H_3(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{m+n}q_x = 1 - {}_{m+n}q_x$

Por lo tanto tenemos:

$H_1(z) = {}_mq_x$	Para $0 \leq z$
$H_{2a}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{r(2)}q_x$	Para $v^{m+n} \leq z < v^m$
$H_{2b}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$	Para $v^m \leq z$
$H_3(z) = 1 - {}_{m+n}q_x$	Para $v^{m+n} \leq z$

Por lo tanto, concluímos:

$F(z) =$

a) ${}_mq_x$	Para $0 \leq z < v^{m+n}$
b) ${}_mq_x + {}_{r(2)}p_x$	Para $v^{m+n} \leq z < v^m$
c) 1	Para $z \leq v^m$

Anualidad vitalicia diferida m años $m|\bar{a}x$

$Z =$

a) 0	$0 \leq T < m$	$a_1=0,\ b_1=0,\ m_0=0,\ m_1=m$
b) $\bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{m}|}$	$m \leq T < \infty$	$a_1=v^m/\delta,\ b_1=-1/\delta,\ m_1=m,\ m_2=\infty$

Aplicando el teorema tenemos:

$H_1 = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1=0, a_1 \leq z$

$H_2 = {}_{min\{r(2),\, m(2)\}}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2<0,\ z<a_2$

$H_{2c} = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2<0,\ a_2 \leq z$

Sustituyendo:

1) $H_1 = {}_m q_x - {}_0 q_x = {}_m q_x$ Para $b_1=0, a_1= 0\leq z$

2) $H_2 = {}_{min\{r(2),\, m\}}q_x - {}_m q_x$ Para $b_2= -1/\delta <0,\ z<a_2 = v^m/\delta$

Para $r(2) = \frac{-1}{\delta}\ ln\ \frac{(z-v^m/\delta)}{-1/\delta} = \frac{-1}{\delta}\ ln\ (v^m-\delta z)$

2a) El $min = \{ \frac{-1}{\delta} ln(1-\delta z), \infty \} = \frac{-1}{\delta} ln(1-\delta z)$ tenemos:

$$\frac{-1}{\delta} ln(v^m - \delta z) < \infty$$

$$ln(v^m - \delta z) > -\delta\infty = ln\ v^\infty$$

$$v^m - \delta z > v^\infty = 0$$

$$-\delta z > -v^m$$

$$z<v^m/\delta \quad \Rightarrow$$

2a) $H_2(z) = {}_{r(2)}q_x - {}_mq_x$ para $z<v^m/\delta$

2c) $H_{2c}= {}_\infty q_x - {}_mq_x = {}_mp_x$ Para $b_{2c}<0$, $v^m/\delta \leq z$

Por lo que tenemos:

1) $H_1 = {}_mq_x$ Para $0\leq z$

2a) $H_2(z) = {}_{r(2)}q_x - {}_mq_x$ Para $z<v^m/\delta$

2c) $H_2(z) = 1- {}_mq_x$ Para $z \geq v^m/\delta$

Lo podemos escribir según intervalos, de la siguiente manera:

$F(z) =$

a) ${}_{r(2)}q_x$ $\quad 0 \leq z < v^m/\delta$

b) 1 $\quad v^m/\delta \leq z$

Anualidad a n años diferida m años $m|\bar{a}_{x:\overline{n}|}$

$Z =$

a) 0 $\quad 0 \leq T < m$ $\quad a_1=0,\ b_1=0,\ m_0=0,\ m_1=m$

b) $\bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{m}|}$ $\quad m\leq T<m+n$ $\quad a_2=v^m/\delta,\ b_2=-1/\delta,\ m_1=m,\ m_2=m+n$

c) $v^m\bar{a}_{\overline{n}|}$ $\quad m+n \leq T < \infty$ $\quad a_3=v^m\bar{a}_{\overline{n}|},\ b_3=0,\ m_2=m+n,\ m_3=\infty$

Aplicando el teorema anterior:

$H_1 = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1=0,\ a_1\leq z$

$H_2 = {}_{min\{r(2),\,m(2)\}}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2<0,\ z<a_2$

$H_{2c} = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2\leq 0,\ a_2\leq z$

$H_3 = {}_{m(3)}q_x - {}_{m(2)}q_x$ Para $b_3=0,\ a_3\leq z$

Sustituyendo:

1) $H_1 = {}_mq_x - {}_0q_x = {}_mq_x$ Para $b_1=0, a_1=0\leq z$

2) $H_2 = {}_{min\{r(2),\,m(2)\}}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2<0,\ z<a_2 = \upsilon^m / \delta$

$$\text{Para } r(2) = \frac{-1}{\delta}\ ln\ \frac{(z-\upsilon^m/\delta)}{-1/\delta} = \frac{-1}{\delta}\ ln\ (\upsilon^m-\delta z)$$

2a) Si $min = \left\{ \frac{-1}{\delta} ln(1-\delta z), m+n \right\} = \frac{-1}{\delta} ln(1-\delta z)$ tenemos:

$$\frac{-1}{\delta} ln(\upsilon^m-\delta z) < m+n$$

$$ln(\upsilon^m-\delta z)>-\delta(m+n) = ln\ \upsilon^{m+n}$$

$$\upsilon^m-\delta z>\upsilon^{m+n}$$

$$-\delta z>\upsilon^{m+n}-\upsilon^m$$

$z<\upsilon^m-\upsilon^{m+n}/\delta = \upsilon^m \bar{a}_{\overline{n|}}$ y como

$$z<\upsilon^m \bar{a}_{\overline{n}|} < \upsilon^m/\delta \Rightarrow$$

2a) $H_2(z) = {}_{r(2)}q_x - {}_mq_x$ Para $z<\upsilon^m \bar{a}_{\overline{n}|}$

2b) Si $min = \left| -\frac{1}{\delta} ln(1-\delta z),\ m+n \right| = m+n$ tenemos:

$$-\frac{1}{\delta} ln(\upsilon^m-\delta z) \geq m+n$$

$$ln(\upsilon^m-\delta z) \leq -\delta m+n = ln\ \upsilon^{m+n}$$

$$\upsilon^m- \delta z \leq \upsilon^{m+n}$$

$$-\delta z \leq \upsilon^{m+n}-\upsilon^m$$

$z \geq \upsilon^m- \upsilon^{m+n}/\delta = \upsilon^m \bar{a}_{\overline{n}|}$ y como por hipótesis $z< \upsilon^m/\delta \Rightarrow$

2b) $H_{2b}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $\upsilon^m \bar{a}_{\overline{n}|} \leq z < \upsilon^m/\delta$

2c) $H_{2c}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $\upsilon^m/\delta \leq z$

3) $H_3 = {}_{\infty}q_x - {}_{m+n}q_x = 1- {}_{m+n}q_x$ Para $b_3=0, a=\upsilon^m \bar{a}_{\overline{n}|} \leq z$

Tomando H_1, H_2, H_3 tenemos:

$H_1 = {}_mq_x$ Para $0 \leq z$

$H_{2a}(z) = {}_{r(2)}q_x - {}_mq_x$ Para $z<\upsilon^m \bar{a}_{\overline{n}|}$

$H_{2b}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $\upsilon^m \bar{a}_{\overline{n}|} \leq z<\upsilon^m/\delta$

$H_{2c}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $\upsilon^m/\delta \leq z$

$H_3 = 1- {}_{m+n}q_x$ Para $\upsilon^m \bar{a}_{\overline{n}|} \leq z$

Lo podemos escribir según intervalos, de la siguiente manera:

$F(z) =$

${}_{r(2)}q_x$	Para $0 \leq z < v^m \bar{a}_{\overline{n|}}$
1	Para $v^m \bar{a}_{\overline{n|}} \leq z$

Donde $r(2) = -\dfrac{1}{\delta} \ln (v^m - \delta z)$

Seguro temporal de vida diferido m años pagadero al final del año en que ocurra la muerte m|Ax

$Z =$

a) 0 $\quad 0 \leq K < m \quad a_1=0\ b_1=0\ m_0=0\ m_1=m$

b) v^{K+1} $\quad m \leq K < \infty \quad a_2=0\ b_2=1\ m_1=m \quad m_2=\infty$

K entero no negativo

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1=0, a_1 \leq z$

$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{max\{]r(2)-1[,\ m(1)\}}q_x$ Para $b_2>0, a_2<z$

Donde $r(2) = \dfrac{-1}{\delta} \ln \dfrac{(z-a_2)}{b_2}$

Sustituyendo:

$H_1(z) = {}_mq_x - {}_0q_x = {}_mq_x$ Para $b_1=0, 0 \leq z$

$H_2(z) = {}_\infty q_x - {}_{max\{]r(2)-1[,\ m(1)\}}q_x$ Para $b_2>0, 0<z$

Donde $r(2) = \dfrac{-1}{\delta} \ln z$

Como $K < \infty$, tenemos:

$z = v^{K+1} > v^\infty = 0$

2) Para $b_2>0, 0<z$

a) Si $max = \{\,]\frac{-1}{\delta}\ln(z) - 1[,\ m \,\} =]\frac{-1}{\delta}\ln(z) - 1[$ tenemos:

$$]\frac{1}{\delta}\ln(z) - 1[> m$$

$$\frac{1}{\delta}\ln(z) - 1 > m$$

$$\ln(z) < -\delta(m+1)$$

$$z < e^{(\ln v)(m+1)} = v^{m+1}$$

$\therefore\ z<v^{m+1}$ y como $0<z \Rightarrow$

$$H_{2a}(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{]r(2)-1[}q_x = {}_{]r(2)-1[}p_x \qquad \text{Para } 0<z<v^{m+1}$$

b) Si $max = \{\,]\frac{-1}{\delta}\ln(z) - 1[,\ m \,\} = m$ tenemos:

$$]\frac{-1}{\delta}\ln(z) - 1[\leq m$$

$$\frac{-1}{\delta}\ln(z) - 1 \leq m$$

$$\ln(z) \geq -\delta(m+1)$$

$$z \geq e^{(\ln v)(m+1)} = v^{m+1} \Rightarrow$$

$$H_{2b}(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{m}q_x = 1 - {}_{m}q_x = {}_{m}p_x \qquad \text{Para } v^{m+1} \leq z$$

Por lo tanto, tenemos:

$H_1(z) = {}_mq_x$ Para $0 \leq z$

$H_{2a}(z) = {}_{|r(2)-1|}\, p_x$ Para $0 < z < v^{m+1}$

$H_{2b}(z) = {}_m\, p_x$ Para $v^{m+1} \leq z$

Lo que podemos escribir

$F(z) =$

a) ${}_mq_x$ Para $0 = z$

b) ${}_mq_x + {}_{|r(2)-1|}p_x$ Para $0 < z < v^{m+1}$

c) 1 Para $v^{m+1} \leq z$

Donde $r(2) = -1/\delta \ln z$

Seguro temporal a n años diferido m años pagadero al final del año en que ocurra la muerte m|Ax':n┐

$Z =$

a) 0 $0 \leq K < m$ $a_1=0\ b_1=0\ m_0=0\ \ m_1=m$

b) v^{K+1} $m \leq K < m+n$ $a_2=0\ b_2=1\ m_1=m\ \ m_2=m+n$

c) 0 $m+n \leq K$ $a_3=0\ b_3=0\ m_2=m+n\ \ m_3=\infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1=0, a_1 \leq z$

$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{max\{r(2),\, m(1)\}}q_x$ Para $b_2>0, a_2<z$

Donde $r(2) = \frac{-1}{\delta} \ln \frac{(z-a_2)}{b_2}$

$H_3(z) = {}_{m(3)}q_x - {}_{m(2)}q_x$ Para $b_3=0, a_3 \leq z$

Sustituyendo:

1) Para $b_1=0, 0\leq z$

$$H_1(z) = {}_mq_x - {}_0q_x = {}_mq_x - 0 = {}_mq_x$$

2) Para $b_2>0,\ a_2=0\leq z$

$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{max\{r(2),\, m(1)\}}q_x$ Para $b_2>0, a_2<z$

Donde $r(2) = \frac{-1}{\delta} \ln (z)$

Como $K \leq m+n-1$ tenemos:

$$z = v^{K+1} \geq v^{m+n}$$

a) Si $max = \{]\frac{-1}{\delta} \ln(z) - 1[\ , m \} =]\frac{-1}{\delta} \ln(z) - 1[$ tenemos:

$$]\frac{-1}{\delta} \ln(z) - 1[\ > m$$

$$\frac{-1}{\delta} \ln(z) > m+1$$

$ln(z) < -\delta(m+1)$

$z < e^{(ln\ v)(m+1)} = v^{m+1}$

$\therefore\ z < v^{m+1}$ y como $z \geq v^{m+n}$ concluimos:

$H_{2a}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{]\,r(2)\,-1\,[}\,q_x$ Para $v^{m+n} \leq z < v^{m+1}$

b) Si $max = \left\lceil\,]\, -\frac{1}{\delta}\, ln(z) - 1\, [\, ,\, m \right\rceil = m$ tenemos:

$] -\frac{1}{\delta}\, ln(z) - 1[\leq m$

$-\frac{1}{\delta}\, ln(z) - 1 \leq m$

$ln(z) \geq -\delta(m+1)$

$z \geq e^{(ln\ v)(m+1)} = v^{m+1}$

Por lo tanto:

$H_2(z) = {}_{m+n}q_x - {}_m q_x$ Para $v^{m+1} \leq z$

3) $H_3(z) = {}_\infty q_x - {}_{m+n}q_x = {}_{m+n}\, p_x$ Para $b_3 = 0, a_3 = 0 \leq z$

Por lo tanto, tenemos:

$H_1(z) = {}_m q_x$ Para $0 \leq z$

$H_{2a}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{/r(2)-1/}q_x$ Para $v^{m+n} \leq z < v^{m+1}$

$H_{2b}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{m}q_x$ Para $v^{m+1} \leq z$

$H_3(z) = {}_{m+n}\, p_x$ Para $0 \leq z$

Lo que podemos escribir como:

$F(z) =$

a) ${}_{m}q_x + {}_{m+n}p_x$ Para $0 \leq z \leq v^{m+n}$

b) ${}_{m}q_x + {}_{/r(2)-1/}p_x$ Para $v^{m+n} \leq z < v^{m+1}$

c) 1 Para $v^{m+1} \leq z$

Donde $r(2) = -1/\delta\, lnz$

Seguro dotal puro a n años pagadero al final del año Ax:n'┐ o nEx

$Z =$

a) 0 $0 \leq K < n$ $a_1=0\ b_1=0\ m_0=0\ \ m_1=n$

b) v^n $n \leq K$ $a_2=v^n\ b_2=0\ m_1=n\ \ m_2=\infty$

K entero no negativo

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

1) $H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1=0, a_1 \leq z$

2) $H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2=0, a_1 \leq z$

Sustituyendo:

1) $H_1(z) = {}_nq_x - {}_0q_x = {}_nq_x$ Para $b_1=0, a_1 = 0 \leq z$

2) $H_2(z) = {}_\infty q_x - {}_nq_x = {}_n p_x$ Para $b_2=0, a_2=v^n \leq z$

Lo que podemos escribir:

$F(z) =$

a) ${}_nq_x$ Para $0 \leq z < v^n$

b) 1 Para $v^n \leq z$

Seguro dotal mixto a n años diferido m pagadero al final del año m|Ax:n┐

$Z =$

a) 0 Para $0 \leq K < m$ $a_1=0$ $b_1=0$ $m_0=0$ $m_1=m$

b) v^{K+1} Para $m \leq K < m+n$ $a_2=0$ $b_2=0$ $m_1=m$ $m_2=m+n$

c) v^{m+n} Para $m+n \leq K$ $a_3=v^{m+n}$ $b_3=0$ $m_2=m+n$ $m_3=\infty$

Entonces usando el teorema anterior tenemos:

$H_1(z) = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1=0, a_1 \leq z$

$$H_2(z) = {}_{m(2)}q_x - {}_{\max\{\,]r(2)-1[\,,\, m(1)\}}\,q_x \qquad \text{Para } b_2>0, a_2<z$$

Donde $r(2) = \frac{-1}{\delta}\ ln\ \frac{(z-a_2)}{b_2}$

$$H_3(z) = {}_{m(3)}q_x - {}_{m(2)}q_x \qquad \text{Para } b_3=0, a_3\leq z$$

Sustituyendo:

1) Para $b_1=0, a_1=0\leq z$

$$H_1(z) = {}_{m}q_x - {}_{0}q_x = {}_{m}q_x - 0 = {}_{m}q_x$$

2) Para $b_2=1>0,\ a_2=0<z$

$$H_2(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{\max\{\,]r(2)-1[\,,\, m\}}\,q_x$$

Donde $r(2) = \frac{-1}{\delta}\ ln\ (z)$

Como $K+1 \leq m+n$ tenemos:

$$z = v^{K+1} \geq v^{m+n}$$

Para $b_2=1>0, 0<z$

a) Si $max = \{\,]\frac{-1}{\delta} ln(z) - 1[\,,\ m\} =]\frac{-1}{\delta} ln(z) - 1[$ tenemos:

$$]\frac{-1}{\delta} ln(z) - 1[\ > m$$

$$\frac{-1}{\delta} ln(z) - 1 > m$$

$$ln(z) < -\delta(m+1)$$

$z<e^{(m+1)\ln v}$

$z< v^{m+1}$

y como $v^{m+n} \leq z \quad \Rightarrow$

$H_{2a}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{]r(2)-1[}q_x$ Para $v^{m+n} \leq z < v^{m+1}$

b) Si $max = \left| \;]\, -\frac{1}{\delta} \ln(z) - 1\, [,\ m \right| = m$ tenemos:

$]\, -\frac{1}{\delta} \ln(z) - 1\, [\leq m$

$-\frac{1}{\delta} \ln(z) - 1 \leq m$

$\ln(z) \geq -\delta(m+1)$

$z \geq v^{m+1} \qquad \Rightarrow$

$H_{2b}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{m}q_x$ Para $v^{m+1} \leq z$

3) Para $b_3=0, a_3=v^{m+n} \leq z$

$H_3(z) = {}_{\infty}q_x - {}_{m+n}q_x = 1 - {}_{m+n}q_x$

Por lo tanto tenemos:

$H_1(z) = {}_{m}q_x$ Para $0 \leq z$

$H_{2a}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{]r(2)-1[}q_x$ Para $v^{m+n} \leq z < v^{m+1}$

$H_{2b}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{m}q_x$ Para $v^{m+1} \leq z$

$H_3(z) = 1 - {}_{m+n}q_x$ Para $v^{m+n} \leq z$

Por lo tanto,concluimos:

$F(z) =$

a) ${}_{m}q_x$ Para $0 \leq z < v^{m+n}$

b) ${}_{m}q_x + {}_{/ r(2) - 1 /}p_x$ Para $v^{m+n} \leq z < v^{m+1}$

c) 1 Para $z \leq v^{m+1}$

Donde $r(2) = -1/\delta \ ln \ z$

Anualidad vencida temporal a n años $a_{x:\overline{n|}}$

$Z =$

$a_{\overline{K	}}$	$0 \leq K < n+1$	$a_1 = 1/i$	$b_1 = -1/d$	$m_0 = 0$	$m_1 = n+1$
$a_{\overline{n|}}$	$n+1 \leq K$	$a_2 = a_{\overline{n|}}$	$b_2 = 0$	$m_1 = n+1$	$m_2 = \infty$

Note que esta $a_{x:\overline{n|}}$ también puede ser escrita de esta forma

Aplicando el teorema tenemos:

1) Para $b_1 < 0, \quad a_1 = 1 / i > z$

$$H_1 = {}_{\min \{ [r(1)], m(1) \}}q_x - {}_{m(0)}q_x$$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta} \ ln \dfrac{(z - a_1)}{b_1}$

1c) Para $b_1 < 0, \quad a_1 \leq z$

$$H_{1c} = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$$

2) Para $b_2 = 0 \quad a_2 \leq z$

$$H_2 = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$$

Sustituyendo:

$H_1 = {}_{min\{[r(1)],\ \infty\}}q_x - {}_0q_x$ Para $b_1 = -1/d < 0, \quad a_1 = 1/i > z$

Donde $r(1) = \dfrac{-1}{\delta} \ln \dfrac{(z - 1/i)}{-1/d} = -\dfrac{1}{\delta} \ln (v - dz)$

1a) Si $min = \{[-\dfrac{1}{\delta} \ln(v - dz)],\ n+1\} = [-\dfrac{1}{\delta} \ln(v - dz)]$ tenemos:

$$[-\frac{1}{\delta} \ln(v - dz)] < n+1$$

$$-\frac{1}{\delta} \ln(v - dz) < n+1$$

$$\ln(v - dz) > -\delta(n+1) = \ln v^{n+1}$$

$$v - dz > v^n+1$$

$$-dz > v^{n+1} - v$$

$z < (v^{n+1} - v) / d = a_{\overline{n|}}$ y como $z < a_{\overline{n|}} < 1/i$

cumple con la hipótesis de $z < 1/i \Rightarrow$

1a) $H_1(z) = {}_{[r(1)]}q_x - {}_0q_x = {}_{[r(1)]}q_x$ Para $z < a_{\overline{n|}}$

1b) Si $min = \{ [-\dfrac{1}{\delta} \ln(v - dz)],\ n+1 \} = n+1$ tenemos:

$$[\ -\frac{1}{\delta}\ ln(\ v - dz\ )\ ]\ \geq\ n+1$$

$$ln(\ v - dz\ ) \leq -\delta\ n\ \ = ln\ v^{n+1}$$

$$v - dz \leq v^{n+1}$$

$$-dz\ \leq\ v^{n+1}-v$$

$z \geq (\ v^{n+1} - v)\ /\ d\ =\ a_{\overline{n}|}$ y para $a_{\overline{n}|} < z \leq 1/i$

cumple con la hipótesis de $z < 1/i \Rightarrow$

1b) $H_{1b}(z) = {}_{n+1}q_x - {}_0q_x$ Para $b_1<0,\quad a_{\overline{n}|} < z \leq 1/i$

1c) $H_{1c} = {}_{n+1}q_x - {}_0q_x$ Para $b_1<0,\quad 1/i \leq z$

2) $H_2(z) = {}_\infty q_x - {}_{n+1}q_x$ Para $b_2=0, a_2 = a_{\overline{n}|} \leq z$

Por lo tanto tenemos:

1a) $H_{1a}(z) = {}_{[r(1)]}q_x$ Para $z < a_{\overline{n}|}$

1b) $H_{1b}(z) = {}_{n+1}q_x$ Para $a_{\overline{n}|} < z \leq 1/i$

1c) $H_{1c} = {}_{n+1}q_x$ Para $1/i \leq z$

2) $H_2(z) = 1 - {}_{n+1}q_x$ Para $a_{\overline{n}|} \leq z$

$F(z) =$

a) ${}_{[r(1)]}q_x$ Para $0 \leq z < a_{\overline{n}|}$

b) 1 Para $a_{\overline{n}|} \leq z$

Donde $r(1) = -1/\delta\ ln(v-dz)$

Anualidad anticipada diferida m años m |äx

$Z =$

$0 \qquad 0 \leq K < m \qquad a_1 = 0 \quad b_1 = 0 \quad m_0 = 0 \quad m_1 = m$

$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|} \qquad m \leq K \qquad a_2 = v^m / d \;\; b_2 = -1/d \;\; m_1 = m \;\; m_2 = \infty$

Aplicando el teorema tenemos:

1) Para $b_1 = 0 \quad a_1 \leq z$

$H_1 = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$

2) Para $b_2 < 0, \quad a_2 = 1 / d > z$

$H_2 = {}_{\min\{ [r(2)],\; m(2) \}}\, q_x - {}_{m(1)}q_x$

Donde $r(2) = \dfrac{-1}{\delta} \ln \dfrac{(z - a_2)}{b_2}$

2c) Para $b_2 < 0, \;\; a_2 \leq z$

$H_{2c} = {}_{m(2)}\, q_x - {}_{m(1)}q_x$

Sustituyendo:

1) $H_1(z) = {}_m q_x - {}_0\, q_x$ Para $b_1 = 0, \;\; a_1 = 0 \leq z$

2) $H_2 = {}_{\min\{ [r(2)],\; \infty \}}\, q_x - {}_m\, q_x$ Para $b_2 = -1 / d < 0, \; a_2 = v^m / d > z$

Donde $r(2) = \dfrac{-1}{\delta} \ln \dfrac{(z - v^m/d)}{-1/d} = \dfrac{-1}{\delta} \ln (v^m - dz)$

2a) El $\min = \{ [\dfrac{-1}{\delta} \ln(v^m - dz)], \infty \} = [\dfrac{-1}{\delta} \ln(v^m - dz)]$ tenemos:

$$[\frac{-1}{\delta} \ln(v^m - dz)] < \infty$$

$$-\frac{1}{\delta} \ln(v^m - dz) < \infty$$

$$v^m - dz > 0$$

$$-dz > v^m$$

$$z < v^m / d$$

2a) $H_1(z) = {}_{[r(2)]}q_x - {}_0q_x = {}_{[r(2)]}q_x$ Para $z < v^m / d$

2c) $H_{2c} = {}_\infty q_x - {}_m q_x$ Para $b_2 < 0, \quad v^m / d \leq z$

Por lo tanto tenemos:

1) $H_{1a}(z) = {}_m q_x$ Para $0 \leq z$

2a) $H_{2a}(z) = {}_{[r(2)]}q_x - {}_m q_x$ Para $z \leq v^m / d$

2c) $H_2(z) = 1 - {}_m q_x$ Para $v^m / d \leq z$

Lo podemos escribir según intervalos de la siguiente manera:

$F(z) =$

a) ${}_{[r(2)]}q_x$ Para $0 \leq z < v^m / d$

b) 1 Para $v^m / d \leq z$

Donde $r(2) = \frac{-1}{\delta} \ln (v^m - dz)$

Anualidad vencida diferida m años $m | a_x$

$Z =$

0	$0 \leq K < m$	$a_1 = 0 \quad b_1 = 0 \quad m_0 = 0 \quad m_1 = m$
$a_{\overline{K}\rceil} - a_{\overline{m}\rceil}$	$m \leq K$	$a_2 = v^m / i \quad b_2 = -1 / d \quad m_1 = m \quad m_2 = \infty$

Aplicando el teorema tenemos:

1) Para $b_1 = 0 \quad a_1 \leq z$

$$H_1 = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$$

2) Para $b_1 < 0, \quad a_2 = 1 \ / \ d > z$

$$H_2 = {}_{min\{[r(2)],\ m(2)\}}q_x - {}_{m(1)}q_x$$

Donde $r(2) = \frac{-1}{\delta} \ ln \frac{(z - a_2)}{b_2}$

2c) Para $b_2 < 0, \ a_2 \leq z$

$$H_{2c} = {}_{m(2)}q_x - {}_{m(1)}q_x$$

Sustituyendo:

1) $H_1(z) = {}_{m}q_x - {}_{0}\,q_x$ Para $b_1=0, \ a_1=0\leq z$

2) $H_2 = {}_{min\{[r(2)],\ \infty\}}q_x - {}_{m}\,q_x$ Para $b_2 = -1 \ / \ d < 0, \ a_2 = v^m \ / \ d > z$

Donde $r(2) = \frac{-1}{\delta} \ ln \frac{(z - v^m / i)}{-1/d} = \frac{-1}{\delta} \ ln \ (v^{m+1} - dz)$

2a) Si $min = \{[\frac{-1}{\delta} ln(v^{m+1} - dz)], \infty\} = [\frac{-1}{\delta} ln(v^{m+1} - dz)]$ tenemos:

$$[\frac{-1}{\delta} ln(v^{m+1} - dz)] < \infty$$

$$\frac{-1}{\delta} ln(v^{m+1} - dz) < \infty$$

$$v^{m+1} - dz > 0$$

$-dz > v^{m+1}$

$z < v^{m+1} / d$

2a) $H_1(z) = {}_{[r(2)]}q_x - {}_mq_x$ Para $z < v^m/i$

2c) $H_{2c} = {}_\infty q_x - {}_mq_x$ Para $b_2<0, \quad v^m/i \leq z$

Por lo tanto tenemos:

1) $H_{1a}(z) = {}_mq_x$ Para $0\leq z$

2a) $H_{2a}(z) = {}_{[r(2)]}q_x - {}_mq_x$ Para $z \leq v^m/i$

2c) $H_2(z) = 1 - {}_mq_x$ Para $v^m/i\leq z$

Lo podemos escribir según intervalos de la siguiente manera:

$F(z) =$

a) ${}_{[r(2)]}q_x$ **Para** $0 \leq z < v^m/i$

b) 1 **Para** $v^m/i \leq z$

Donde $r(2) = -\dfrac{1}{\delta} \ln (v^{m+1} - dz)$

Anualidad anticipada a n años diferida m años m|äx:n┐

$Z =$

0	$0 \leq K < m$	$a_1=0, \quad b_1=0, \quad m_0=0, \; m_1=m$
$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil} - \ddot{a}_{\overline{m}\rceil}$	$m\leq K<m+n$	$a_2=v^m/d, b_2=-1/d, m_1=m, \; m_2=m+n$
$v^m\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$m+n \leq K < \infty$	$a_1=v^m\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}, b_1=0, m_2=m+n, \; m_3=\infty$

Aplicando el teorema anterior:

$H_1 = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1=0,\ a_1 \leq z$

$H_2 = {}_{min\{[r(2)],\ m(2)\}}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2<0,\ z<a_2$

$H_{2c} = {}_{m(2)}\ q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2 \leq 0,\ a_2 \leq z$

$H_3 = {}_{m(3)}q_x - {}_{m(2)}q_x$ Para $b_3=0,\ a_3 \leq z$

Sustituyendo:

1) $H_1 = {}_{m}q_x - {}_{0}q_x = {}_{m}q_x$ Para $b_1=0, a_1=0 \leq z$

2) $H_2 = {}_{min\{[r(2)],\ m(2)\}}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2<0,\ z<a_2 = v^m\ /\ d$

Para $r(2) = \dfrac{-1}{\delta}\ ln\ \dfrac{(z-v^m/d)}{-1/d}\ = \dfrac{-1}{\delta}\ ln\ (v^m-dz)$

2a) Si $min = \{[\ \dfrac{-1}{\delta}\ ln(v^m-dz)], m+n\}\ = [\dfrac{-1}{\delta}\ ln(1-dz)]$ tenemos:

$$[\ \frac{-1}{\delta}\ ln(v^m-dz)] < m+n$$

$$\frac{-1}{\delta}\ ln(v^m-dz) < m+n$$

$$ln(v^m-dz) > -\delta(m+n) = ln\ v^{m+n}$$

$$v^m-dz > v^{m+n}$$

$$-dz > v^{m+n}-v^m$$

$z<(v^m-v^{m+n})/d = v^m\ \ddot{a}_{\overline{n|}}$ y como

$z<v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} < v^m / d \Rightarrow$

2a) $H_2(z) = {}_{[r(2)]}q_x - {}_mq_x$ Para $z<v^m \ddot{a}_{\overline{n}|}$

b) Si $min = \left\{ \left[-\frac{1}{\delta} ln(v^m-dz) \right], m+n \right\} = m+n$ tenemos:

$$-\frac{1}{\delta} ln(v^m-dz) \geq m+n$$

$$\left[-\frac{1}{\delta} ln(v^m-dz) \right] \geq m+n$$

$$ln(v^m-dz) \leq -\delta(m+n) = ln\ v^{m+n}$$

$$v^m-dz \leq v^{m+n}$$

$$-dz \leq v^{m+n}-v^m$$

$z \geq v^m-v^{m+n}/d = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|}$ y como

$z < v^m / d \Rightarrow$

2b) $H_{2b}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} \leq z < v^m / d$

2c) $H_{2c}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $v^m / d \leq z$

3) $H_3 = {}_{\infty}q_x - {}_{m+n}q_x = 1 - {}_{m+n}q_x$ Para $b_3=0, a=v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} \leq z$

Tomando H_1, H_2, H_3 tenemos:

$H_1 = {}_mq_x$ Para $0 \leq z$

$H_{2a}(z) = {}_{[r(2)]}q_x - {}_mq_x$ Para $z<v^m \ddot{a}_{\overline{n}|}$

$H_{2b}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} \leq z < v^m / d$

$H_{2c}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_{m}q_x$ Para $\upsilon^m / d \leq z$

$H_3(z) = 1 - {}_{m+n}q_x$ Para $\upsilon^m \ddot{a}_{\overline{n|}} \leq z$

Lo podemos escribir según intervalos, de la siguiente manera:

$F(z) =$

${}_{[r(2)]}q_x$ Para $0 \leq z < \upsilon^m \ddot{a}_{\overline{n|}}$

1 Para $\upsilon^m \ddot{a}_{\overline{n|}} \leq z$

Donde $r(2) = -1/\delta \ ln \ (\upsilon^m \cdot dz)$

Anualidad vencida a n años diferida m años m|ax:n┐

$Z =$

0	$0 \leq K < m$	$a_1=0,\ b_1=0,\ m_0=0,\ m_1=m$
$a_K - a_{\overline{m|}}$	$m \leq K < m+n$	$a_2=\upsilon^m / i, b_2=-1/d, m_1=m, m_2=m+n$
$\upsilon^m a_{\overline{n|}}$	$m+n \leq K < \infty$	$a_3=\upsilon^m a_{\overline{n|}}, b_3=0, m_2=m+n,\ m_3=\infty$

Aplicando el teorema anterior:

$H_1 = {}_{m(1)}q_x - {}_{m(0)}q_x$ Para $b_1=0,\ a_1 \leq z$

$H_2 = {}_{\min\{[r(2)],\ m(2)\}}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2<0,\ z<a_2$

$H_{2c} = {}_{m\,(2)}\, q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2 \leq 0,\ a_2 \leq z$

$H_3 = {}_{m(3)}q_x - {}_{m(2)}q_x$ Para $b_3=0,\ a\leq z$

Sustituyendo:

1) $H_1 = {}_{m}q_x - {}_{0}q_x = {}_{m}q_x$ Para $b_1=0, a_1=0\leq z$

2) $H_2 = {}_{\min\{[r(2)],\ m(2)\}}q_x - {}_{m(1)}q_x$ Para $b_2<0,\ z<a_2 = v^m\ /\ i$

$$\text{Para } r(2) = \frac{-1}{\delta}\ ln\ \frac{(z-v^m/i)}{-1/d} = -\frac{1}{\delta}\ ln\ (v^{m+1}-dz)$$

2a) Si $min = \{[\ -\frac{1}{\delta}\ ln(v^{m+1}-dz)], m+n\} = [-\frac{1}{\delta}\ ln(v^{m+1}-dz)]$ tenemos:

$$-\frac{1}{\delta}\ ln(v^{m+1}-dz) < m+n$$

$$ln(v^{m+1}-dz)>-\delta(m+n) = ln\ v^{m+n}$$

$$v^{m+1}-dz>v^{m+n}$$

$$-dz>v^{m+n}-v^{m+1}$$

$z<(v^{m+1}-v^{m+n})/d$ y como

$$z<(v^{m+1}-v^{m+n})/d < v^m\ /i \Rightarrow$$

2a) $H_2(z) = {}_{[r(2)]}q_x - {}_{m}q_x$ Para $z<(v^{m+1}-v^{m+n})/d$

b) Si $min = \{[\ \ -\frac{1}{\delta}\ ln(v^{m+1}-dz)]\ ,\ m+n\} = m+n$ tenemos:

$$-\frac{1}{\delta}\ ln(v^{m+1}-dz) \geq m+n$$

$$ln(v^{m+1}\text{-}dz) \leq \text{-}\delta(m+n) = ln\ v^{m+n}$$

$$v^{m+1}\text{-}dz \leq v^{m+n}$$

$$\text{-}dz \leq v^{m+n}\text{-}v^{m+1}$$

$z \geq (v^{m+1}\text{-}v^{m+n})/d$ y como

$$z < v^m/i \Rightarrow$$

2b) $H_{2b}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $(v^{m+1}\text{-}v^{m+n})/d \leq z < v^m/i$

2c) $H_{2c}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $v^m/i \leq z$

3) $H_3 = {}_\infty q_x - {}_{m+n}q_x = 1- {}_{m+n}q_x$ Para $b_3=0, a=v^m\ a_{\overline{n}|} \leq z$

Tomando H_1, H_2, H_3 tenemos:

$H_1 = {}_mq_x - {}_0q_x = {}_mq_x$ Para $0 \leq z$

$H_{2a}(z) = {}_{[r(2)]}q_x - {}_mq_x$ Para $z < (v^{m+1}\text{-}v^{m+n})/d$

$H_{2b}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $(v^{m+1}\text{-}v^{m+n})/d \leq z < v^m/i$

$H_{2c}(z) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x$ Para $v^m/i \leq z$

$H_3 = {}_\infty q_x - {}_{m+n}q_x = 1- {}_{m+n}q_x$ Para $v^m\ a_{\overline{n}|} \leq z$

Lo podemos escribir según intervalos, de la siguiente manera:

$F(z) =$

${}_{[r(2)]}\ q_x$ Para $0 \leq z < (v^{m+1}\text{-}v^{m+n})/d$

${}_{m+n}\ q_x$ Para $(v^{m+1}\text{-}v^{m+n})/d \leq z < v^m\ a_{\overline{n}|}$

1 Para $\upsilon^{m} a_{\overline{n|}} \leq z$

Para $z = (\upsilon^{m+1} - \upsilon^{m+n}) / d$

$$r(2) = -\frac{1}{\delta} \ln\left(\upsilon^{m+1} - d\left(\frac{\upsilon^{m+1} - \upsilon^{m+n}}{d}\right)\right) = -\frac{1}{\delta} \ln \upsilon^{m+n} = m+n$$

Por lo tanto:

$F(z) =$

${}_{[r(2)]}q_x$ **Para** $0 \leq z < \upsilon^{m} a_{\overline{n|}}$

1 **Para** $\upsilon^{m} a_{\overline{n|}} \leq z$

Donde $r(2) = -1/\delta \ln(\upsilon^{m+1} - dz)$

Si una v.a. no es de tipo continuo, estrictamente hablando, no se le asigna una función de densidad ya que su función de distribución, $F(x)$, no es diferenciable; sin embargo, si permitimos que $f(x)$ tenga impulsos definiremos una función de densidad aún para una función discreta o mixta.

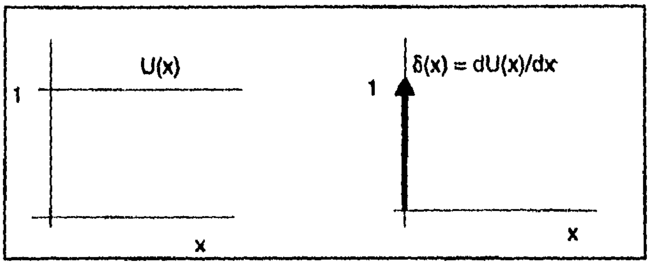
Función delta o de impulso.

La función $\delta(x)$ se define por su propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\delta(x)\, dx = \Phi(x)$$

donde

$\Phi(x)$ es una función continua en el origen



$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-x_0)\delta(x-x_0)\, dx = \Phi(x_0)$$ [1]

Aceptando esta propiedad se muestra que la derivada de una función discontinua $F(x)$ al punto de discontinuidad x_0 existe y es igual a $k\delta(x-x_0)$ donde k es la magnitud de la discontinuidad de $F(x)$.

$$k = F(x_0^+) - F(x_0^-)$$

Por lo anterior si la variable aleatoria es de tipo discreto su función de densidad consiste en impulsos

$$f(x) = \sum k_i \ \delta(x-x_i)$$

1

A Papoulis " The Fourier Integral and its applications" Mc. Graw Hill Book Co., New York, 1962

Ejemplos

El experimento de aventar una moneda, tenemos un espacio muestral de águila o sol, asignandole los siguientes valores:

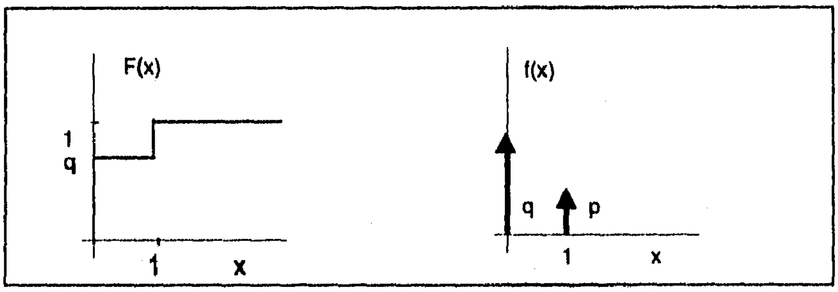
Si es aguila $x = 1$
sol $x = 0$

la masa de probabilidad
$P(x) = q$ para $x=0$
$P(x) = p$ para $x=1$

Es decir la probabilidad de que caiga aguila es p y de que caiga sol $1-p = q$

Expresandolo por impulsos

$$f(x) = q\delta(x) + p\delta(x-1)$$



La función $f(x)$ puede ser considerada como la masa de probabilidad situada en el eje de x. Si $f(x)$ es finito, entonces tiene la misma interpretació de la masa de probabilidad, es decir la masa en el intervalo $(x, x+dx)$ es igual a $f(x)dx$.

Los impulsos $p_i\delta(x-x_i)$ en $f(x)$ pueden ser considerados como puntos de masa de probabilidad p_i situados en x_i.

La probabilidad de que una v.a. x tome un valor en el eje x es la masa de probabilidad de esa región.

Seguro Ordinario de vida diferido m años m|Āx

$Z =$

a) $0 \qquad 0 \leq T < m \qquad a_1=0 \;\; b_1=0 \;\; m_0=0 \;\; m_1=m$

b) $\upsilon^T \qquad m \leq T < \infty \qquad a_2=0 \;\; b_2=1 \;\; m_1=m \;\; m_2=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = \Delta(z - a_1) \, ({}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x)$ para $b_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{r(2)}p_x \, \mu_{x+r(2)} \, / \, \delta(z - a_2)$

para $b_2 > 0$ y $a_2 + b_2\upsilon^{m(2)} < z \leq a_2 + b_2\upsilon^{m(1)}$

Con $r(2) = -1/\delta \, ln \, [(z - a_2) / b_2]$ para $(z - a_2) / b_2 > 0.$

Sustituyendo, tenemos:

$G_1(z) = \Delta(z) \, ({}_0p_x - {}_mp_x) = \Delta(z) \, (1 - {}_mp_x) = \Delta(z) \, {}_mq_x$

para $b_1 = 0$ y $a_1=0$

$G_2(z) = {}_{r(2)}p_x \, \mu_{x+r(2)} \, / \, \delta(z)$

para $b_2 > 0$ y $\upsilon^\infty = 0 < z \leq \upsilon^m$

Con $r(2) = -1/\delta \, ln \, (z)$ para $z > 0.$

Escribiendo la función de densidad por intervalos y como puntos masa de probabilidad . Tenemos:

$f(z) =$

a) ${}_mq_x \qquad z=0$

b) ${}_{r(2)}p_x \, \mu_{x+r(2)} \, / \, \delta z \qquad 0 < z \leq \upsilon^m$

c) 0 otro caso.

Con $r(2) = -1/\delta \ln z$

Seguro temporal a n años diferido m años m|$\bar{A}$x':n|

$Z =$

a) 0 $0 \leq T < m$ $a_1=0$ $b_1=0$ $m_0=0$ $m_1=m$

b) v^T $m \leq T < m+n$ $a_2=0$ $b_2=1$ $m_1=m$ $m_2=m+n$

c) 0 $m+n \leq T$ $a_3=0$ $b_3=0$ $m_2=m+n$ $m_3=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = \Delta(z -a_1) ({}_{m(0)} p_x - {}_{m(1)} p_x)$ para $b_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{r(2)} p_x \mu_{x+r(2)} / \delta(z - a_2)$

para $b_2 > 0$ y $a_2+b_2 v^{m(2)} < z \leq a_2+b_2 v^{m(1)}$

Con $r(2) = -1/\delta \ln [(z -a_2) / b_2]$ para $(z - a_2) / b_2 > 0.$

$G_3(z) = \Delta(z -a_3) ({}_{m(2)} p_x - {}_{m(3)} p_x)$ para $b_3 = 0$

Sustituyendo, tenemos:

$G_1(z) = \Delta(z) ({}_0 p_x - {}_m p_x) = \Delta(z) (1 - {}_m P_x) = \Delta(z) {}_m q_x$

para $b_1 = 0$ y $a_1=0$

$G_2(z) = {}_{r(2)}P_x \mu_{x+r(2)} / \delta(z)$

para $b_2 > 0$ y $v^{m+m} < z \leq v^m$

Con $r(2) = -1/\delta \ ln\ (z)$ para $z > 0$.

$$G_3(z) = \Delta(z)\ ({}_{m+n}p_x - {}_{m}p_x) = \Delta(z)({}_{m+n}p_x - 0) = \Delta(z)\ {}_{m+n}p_x$$

para $b_3 = 0$ y $a_3=0$

$f(z) =$

a) ${}_{m}q_x + {}_{m+n}p_x$ $z=0$

b) ${}_{r(2)}p_x\ \mu_{x+r(2)} / \ \delta(z)$ $v^{m+n} < z \leq v^m$

c) 0 otro caso.

Con $r(2) = -1/\delta \ ln\ z$

Seguro dotal puro a n años Ax:n'┐

$Z =$

a) 0 $0 \leq T < n$ $a_1=0$ $b_1=0$ $m_0=0$ $m_1=n$

b) v^n $n \leq T$ $a_2=v^n$ $b_2=0$ $m_1=n$ $m_2=\infty$

Utilizando el teorema anterior :

$G_1(z) = \Delta(z - a_1)\ ({}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x)$ para $b_1 = 0$

$G_2(z) = \Delta(z - a_2)\ ({}_{m(1)}p_x - {}_{m(2)}p_x)$ para $b_2 = 0$

Sustituyendo, tenemos:

$$G_1(z) = \Delta(z)\ ({}_0 p_x - {}_n p_x) = \Delta(z)\ (1 - {}_n p_x) = \Delta(z)\ {}_n q_x$$

para $b_1 = 0$ y $a_1 = 0$

$$G_2\ (z) = \Delta(z - v^n)\ ({}_n p_x - {}_\infty p_x) = \Delta(z - v^n)({}_n p_x - 0) = \Delta(z - v^n)\ {}_n p_x$$

para $b_1 = 0$ y $a_2 = v^n$

$f(z) =$

a) ${}_n q_x$ $\qquad z=0$

b) ${}_n p_x$ $\qquad z = v^n$

c) 0 $\qquad$ otro caso.

Seguro dotal a n años diferida m $m|\bar{A}_{x:\overline{n|}}$

$Z =$

a) $0 \qquad 0 \le T < m \qquad a_1=0 \quad b_1=0 \quad m_0=0 \quad m_1=m$

b) $v^T \qquad m \le T < m+n \qquad a_2=0 \quad b_2=1 \quad m_1=m \quad m_2=m+n$

c) $v^{m+n} \qquad m+n \le T < \infty \qquad a_3=v^{m+n} \quad b_3=0 \quad m_2=m+n \quad m_3=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = \Delta(z - a_1)\ ({}_{m(0)} p_x - {}_{m(1)} p_x)$ para $b_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{r(2)} p_x\ \mu_{x+r(2)}\ /\ \delta(z)$

para $b_2 > 0$ y $\upsilon^{m(2)} < z \leq \upsilon^{m(1)}$

Con $r(2) = -1/\delta \ ln\ (z)$ para $z > 0$.

$G_3(z) = \Delta(z - a_3)({}_{m(2)}p_x - {}_{m(3)}p_x)$ para $b_3 = 0$

Sustituyendo, tenemos:

$G_1(z) = \Delta(z)({}_0 p_x - {}_m p_x) = \Delta(z)(1 - {}_m p_x) = \Delta(z)\ {}_m q_x$

para $b_1 = 0$ y $a_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{r(2)} p_x \mu_{x+r(2)} / \delta(z)$

para $b_2 > 0$ y $\upsilon^{m+n} < z \leq \upsilon^m$

Con $r(2) = -1/\delta \ ln\ (z)$ para $z > 0$.

$G_3(z) = \Delta(z - \upsilon^{m+n})({}_{m+n} p_x - {}_\infty p_x) = \Delta(z - \upsilon^n)({}_{m+n} p_x - 0) = \Delta(z - \upsilon^n)\ {}_{m+n} p_x$

para $b_3 = 0$ y $a_3 = \upsilon^n$

$f(z) =$

a) ${}_m q_x$ $\quad z=0$

b) ${}_{r(2)} p_x \mu_{x+r(2)} / \delta(z)$ $\quad \upsilon^{m+n} < z \leq \upsilon^m$

c) ${}_{m+n} p_x$ $\quad z=\upsilon^{m+n}$

d) 0 $\quad$ otro caso

Con $r(2) = -1/\delta \ ln\ (z)$

Anualidad vitalicia diferida m años $m|\bar{a}x$

$Z =$

a) $0 \qquad 0 \leq T < m \qquad a_1=0 \quad b_1=0 \quad m_0=0 \quad m_1=m$

b) $\bar{a}_{\overline{T|}} - \bar{a}_{\overline{m|}} \qquad m \leq T < \infty \qquad a_2=v^m/\delta \quad b_2=-1/\delta \quad m_1=m \quad m_2=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = \Delta(z - a_1)\ ({}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x)$ para $b_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{r(2)}p_x\, \mu_{x+r(2)} / \delta(a_i - z)$

para $b_2 < 0$ y $a_2+b_2v^{m(1)} \leq z < a_2+b_2v^{m(2)}$

Con $r(2) = -1/\delta \ln \left(\frac{z - a_2}{b_2}\right)$ para $z > 0$.

Sustituyendo, tenemos:

$G_1(z) = \Delta(z-0)\ ({}_0p_x - {}_mp_x) = \Delta(z)\ (1 - {}_mp_x) = \Delta(z)\,{}_mq_x$

para $b_1 = 0$ y $a_1=0$

$G_2(z) = {}_{r(2)}p_x\, \mu_{x+r(2)} / \delta\,(v^m / \delta - z) = {}_{r(2)}p_x\, \mu_{x+r(2)} / (v^m - \delta z)$

para $b_2 < 0$ y $v^m/\delta - v^m/\delta \leq z < v^m/\delta - v^\infty/\delta$

$0 \leq z < v^m/\delta$

Con $r(2) = -1/\delta \ln \left(\frac{z - v^m/\delta}{-1/\delta}\right) = -1/\delta \ln (v^m - \delta z)$

para $z > 0$

$f(z) =$

a) ${}_{m}q_x$ $\qquad z=0$

b) ${}_{r(2)}p_x\,\mu_{x+r(2)} / (\delta z - v^m)$ $\qquad 0 < z < v^m/\delta$

c) 0 $\qquad$ otro caso

Con $r(2) = -1/\delta \ln (v^m - \delta z)$

Anualidad a n años diferida m años m|$\bar{a}$x:n┐

$Z =$

a) 0 $\qquad 0 \leq T < n$ $\qquad a_1=0\ b_1=0\ m_0=0\ \ m_1= m$

b) $(v^m - v^T)/\delta$ $\qquad m \leq T < m+n$ $\qquad a_2=v^m/\delta\ b_2=-1/\delta\ m_1=n\ m_2=m+n$

c) $v^m \bar{a}_{\overline{n}|}$ $\qquad m+n \leq T < \infty$ $\qquad a_3=v^m\bar{a}_{\overline{n}|}\ \ b_3=0\ \ m_2=m+n\ \ m_3=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = \Delta(z - a_1)\ ({}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x)$ para $b_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{r(2)}p_x\,\mu_{x+r(2)} / \delta(a_2 - z)$

para $b_2 < 0$ y $a_2+b_2v^{m(1)} \leq z < a_2+b_2v^{m(2)}$

Con $r(2) = -1/\delta \ln \dfrac{(z - a_2)}{b_2}$ para $z > 0$.

$G_3(z) = \Delta(z - a_3)\ ({}_{m(2)}p_x - {}_{m(3)}p_x)$ para $b_3 = 0$

Sustituyendo, tenemos:

$G_1(z) = \Delta(z - 0)\ ({}_0 p_x - {}_m p_x) = 1 - {}_m p_x = {}_m q_x$

para $b_1 = 0$ y $a_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{r(2)} p_x\, \mu_{x+r(2)} / \delta(\upsilon^m/\delta - z) = {}_{r(2)} p_x\, \mu_{x+r(2)} / (\upsilon^m - \delta z)$

para $b_2 < 0$ y $\upsilon^m/\delta - \upsilon^m/\delta \leq z < \upsilon^m/\delta - \upsilon^{m+n}/\delta$

$0 \leq z < \upsilon^m \bar{a}_{\overline{n}|}$

Con $r(2) = -1/\delta\ ln\ \dfrac{(z - \upsilon^m/\delta)}{-1/\delta} = -1/\delta\ ln\ (\upsilon^m - \delta z)$

$f(z) =$

a) ${}_m q_x$	$z=0$
b) ${}_{r(2)} p_x\, \mu_{x+r(2)} / (\delta z - \upsilon^m)$	$0 < z < \upsilon^m \bar{a}_{\overline{n}|}$
c) ${}_{m+n}\, p_x$	$z = \upsilon^m \bar{a}_{\overline{n}|}$
d) 0	otro caso

Seguro Ordinario de vida diferido m años m|Ax

$Z =$

a) 0 $\quad K=0, 1, 2,\ldots,m-1$ $\quad a_1=0 \;\; b_1=0 \;\; m_0=0 \;\; m_1=m$

b) v^{K+1} $\quad K=m, m+1,\ldots$ $\quad a_2=0 \;\; b_2=1 \;\; m_1=m \;\; m_2=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1 = {}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x$ Para $z=a_1, b_1=0$

$G_2 = {}_{k|}q_x$ Para $z=a_2+b_2v^{k+1}$
$b_2 \neq 0 \quad k=m_1, \ldots$

Sustituyendo, tenemos:

$G_1(z) = {}_0p_x - {}_mp_x = 1 - {}_mp_x = {}_mq_x$ Para $z=0, b_1=0$

$G_2(z) = {}_{k|}q_x$ Para $z=v^{k+1}, \; b_2 \neq 0$

$k=m, m+1,\ldots$

Escribiendo la función de densidad por intervalos y como puntos masa de probabilidad . Tenemos:

$f(z) =$

a) ${}_mq_x$ Para $z=0$

b) ${}_{k|}q_x$ Para $z=v^{k+1}$ y $k=m, m+1,\ldots$

c) 0 otro caso.

Seguro temporal a n años diferido m años $m|A^1_{x:\overline{n|}}$

$Z =$

a) 0 $K=1, 2, ..., m-1$ $a_1=0$ $b_1=0$ $m_0=0$ $m_1=m$

b) v^{K+1} $K=m, m+1, m+n-1$ $a_2=0$ $b_2=1$ $m_1=m$ $m_2=m+n$

c) 0 $K=m+n, m+n+1,...$ $a_3=0$ $b_3=0$ $m_2=m+n$ $m_3=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = {}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x$ Para $z = a_1,\ b_1 = 0$

$G_2= {}_{k|}q_x$ Para $z = a_2 + b_2 v^{k+1}$

$b_2 \neq 0,\ k = m_1,...,m_2-1$

$G_3(z) = {}_{m(2)}p_x - {}_{m(3)}p_x$ Para $z = a_3\ ,\ b_3 = 0$

por lo tanto

$f(z) =$

a) ${}_mq_x + {}_{m+n}p_x$ Para $z=0$

b) ${}_{k|}q_x$ Para $z = v^{k+1}$ y $k=m,m+1,...$

c) 0 Para otro caso.

Seguro dotal puro a n años $A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$

$Z=$

a) 0 $K=1,2,..., n-1$ $a_1=0$ $b_1=0$ $m_0=0$ $m_1=n$

b) v^n $K=n,n+1,\ldots$ $a_2=v^n$ $b_2=0$ $m_1=n$ $m_2=\infty$

Utilizando el teorema anterior :

$G_1(z) = {}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x$ para $z=a_1$, $b_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{m(1)}p_x - {}_{m(2)}p_x$ para $z=a_2$, $b_2 = 0$

Tenemos:

$f(z) =$

a) ${}_nq_x$ Para $z=0$

b) ${}_np_x$ Para $z = v^n$

c) 0 otro caso.

Seguro dotal a n años diferida m $m|A_{x:\overline{n}|}$

$Z =$

a) 0 $0 \leq K < m$ $a_1=0$ $b_1=0$ $m_0=0$ $m_1=m$

b) v^{K+1} $m \leq K < m+n$ $a_2=0$ $b_2=1$ $m_1=m$ $m_2=m+n$

c) v^{m+n} $m+n \leq K < \infty$ $a_3=v^{m+n}$ $b_3=0$ $m_2=m+n$ $m_3=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = {}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x$ Para $z=a_1$, $b_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{k|}q_x$ Para $z=v^{k+1}$

$b_2 \neq 0$ y $k = m,m+1,\ldots,m+n-1$

$G_3(z) = {}_{m(2)}p_x - {}_{m(3)}p_x$ Para $z = a_3$
$b_3 = 0$ y $k = m+n, m+n, \ldots$

Escribiendo la función de densidad por intervalos y como puntos masa de probabilidad . Tenemos:

$f(z) =$

a) ${}_mq_x$ $z=0$

b) ${}_{k|}q_x$ $z = v^{k+1}$ Para $k = m, m+1, \ldots, m+n-1$

c) ${}_{m+n}p_x$ $z = v^{m+n}$

d) 0 otro caso

Anualidad vencida por n años $a_{x:\overline{n|}}$

$Z =$

a) $a_{\overline{K|}}$ $0 \leq K < n$ $a_1 = 1/i$ $b_1 = -1/d$ $m_0 = 0$ $m_1 = n$

b) $a_{\overline{n|}}$ $n \leq K < \infty$ $a_2 = a_{\overline{n|}}$ $b_2 = 0$ $m_1 = n$ $m_2 = \infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1 = {}_{k|}q_x$ Para $z = 1/i - v^{k+1}/d$
$b_1 \neq 0$ y $k = 0, \ldots. n-1$

$G_2(z) = {}_{m(1)}p_x - {}_{m(2)}p_x$ Para $z - a_2$, $b_2 = 0$

Tenemos:

$f(z) =$

a) ${}_{k|}q_x$ $z = a_{k+1}$ Para $k = 0, 1, .., n-1.$

b) ${}_{n}p_x$ $z = a_n$

c) 0 otro caso

Anualidad anticipada vitalicia diferida m años m|äx

$Z =$

a) 0 $0 \leq K < m$ $a_1 = 0$ $b_1 = 0$ $m_0 = 0$ $m_1 = m$

b) $\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}$ $m \leq K < \infty$ $a_2 = v^m/d$ $b_2 = -1/d$ $m_1 = m$ $m_2 = \infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = {}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x$ Para $z = a_1,\ b_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{k|}q_x$ Para $z = a_i + b_i v^{k+1}$

$b_2 \neq 0$ y $k = m, m+1, ...$

Tenemos:

$f(z) =$

a) ${}_{m}q_x$ $z = 0$

b) ${}_{k|}q_x$ $z = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}$ y $k = m, m+1, ..$

c) 0 otro caso

Anualidad vencida vitalicia diferida m años m|ax

$Z =$

a) 0 $\quad 0 \le K < m \quad a_1=0 \quad b_1=0 \quad m_0=0 \quad m_1= m$

b) $a_{\overline{K|}} - a_{\overline{m|}}$ $\quad m \le K < \infty \quad a_2=v^m/i \quad b_2=-1/d \quad m_1=m \quad m_2=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = {}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x$ Para $z = a_1,\ b_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{k|}q_x$ Para $z = a_i + b_i v^{k+1}$
$b_2 \neq 0$ y $k = m, m+1, \ldots$

$f(z) =$

a) ${}_mq_x$ $\quad z=0$

b) ${}_{k|}q_x$ $\quad z= a_{\overline{K|}} - a_{\overline{m|}}$ y $k = m, m+1, \ldots$

c) 0 otro caso

Anualidad anticipada a n años diferida m años m|äx:n⌉

$Z =$

a) 0 $\quad 0 \le K < m \quad a_1=0;\ b_1=0;\ m_0=0;\ m_1= m$

b) $\ddot{a}_{\overline{k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{m|}}$ $\quad m \le K < m+n \quad a_2=v^m/d;\ b_2=-1/d;\ m_1=m;\ m_2=m+n$

c) $v^m \ddot{a}_{\overline{n|}}$ $\quad m+n-1 \le K < \infty \quad a_3=v^m a_{\overline{n|}};\ b_3=0;\ m_3=m+n;\ m_3=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = {}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x$ Para $z = a_1$, $b_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{k|}q_z$ Para $z = a_2 + b_2 v^{k+1}$
$b_2 \neq 0$ y $k = m,\ldots,m+n-1$

$G_3(z) = {}_{m(2)}p_x - {}_{m(3)}p_x$ Para $z = a_3$, $b_3 = 0$

Escribiendo la función de densidad por intervalos y como puntos masa de probabilidad . Tenemos:

$f(z) =$

a) ${}_mq_x$ $z=0$

b) ${}_{k|}q_x$ $z = \ddot{a}_{\overline{k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{m|}}$ y $k = m,\ldots,m+n-1$

c) ${}_{m+n}p_x$ $z = v^m \ddot{a}_{\overline{n|}}$

d) 0 otro caso

Anualidad vencida a n años diferida m años m|ax:n┐

$Z =$

a) 0 . $0 \leq K < m$ $a_1=0$; $b_1=0$; $m_0=0$; $m_1= m$

b) $a_{\overline{K|}} - a_{\overline{m|}}$ $m \leq K < m+n$ $a_2=v^m/i$; $b_2=-1/d$; $m_1=m$; $m_2=m+n$

c) $v^m a_{\overline{n|}}$ $m+n \leq K < \infty$ $a_3=v^m a_{\overline{n|}}$; $b_3=0$; $m_3=m+n$; $m_3=\infty$

Utilizando el teorema anterior tenemos:

$G_1(z) = {}_{m(0)}p_x - {}_{m(1)}p_x$ Para $z = a_1$, $b_1 = 0$

$G_2(z) = {}_{k|}\,q_z$ Para $z = a_2 + b_2 v^{k+1}$
$b_2 \neq 0$ y $k = m,\ldots,m+n-1$

$G_3(z) = {}_{m(2)}p_x - {}_{m(3)}p_x$ Para $z = a_3$, $b_3 = 0$

$f(z)$ =

a) ${}_m q_x$ $z=0$

b) ${}_{k|}\,q_z$ $z = v^m a_{\overline{k}|}$ y $k = m,\ldots,m+n-1$

c) ${}_{m+n}p_x$ $z = v^m a_{\overline{n}|}$

d) 0 otro caso

Arriaga P. Mario, Sánchez Ch. José A.; " **Elementos del Cálculo Actuarial** "; Tesis Profesional; U.N.A.M.

Bowers, N.L.; Gerber, H.U.; Hickman, J.C.; Jones, P.A. y Nesbitt, C.J.; "**Actuarial Mathematics** "; Society of Actuaries; Hasca Il.

De Pril, N. ; " **The Distribution of Actuarial Function**" ; Bulletin of the Swiss Association of Actuaries; 1989.

Dhaene Han; " **Distribution in Life Insurance** "; Astin Bulletin; Vol. 20; No.1; 1990.

Goovaerts, M.J.; " **Effective Actuarial Methods** "; North Holland; 1990.

Jordan C. W. ; " **Life Contingencies**" ; The Society of Actuaries.

Kudriavtsev L.T.; " **Curso de Análisis Matemático**"; Editorial Mir Moscú; 1983; Vol.1.

London Dick; "**Survival Models and their Estimations**"; Actex Publications; 1988.

Parzen, Emanuel; " **Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones** "; Editorial Limusa.

Papoulis Athanasios; "**Probability, random variables, and stochastic processes**"; International student edition; Mc Graw Hill; Kogakusha; 1965.

Tullis Mark A. ; " **Valuation of Life Insurance Liabilities** "; Actex Publications; 1990.

AGRADECIMIENTOS:

Al Act. Mario Arriaga por su valioso tiempo y guía para la realización de esta tesis.
Al Act. Gabriel Peñaloza por su orientación y consejos prácticos otorgados.
A todos y cada uno de los sinodales por su cooperación y valiosas observaciones.
A Oliver y Marco por su guía y conocimientos compartidos.
A Paty por sus consejos y apoyo.

A Dios, por la oportunidad y ayuda para poder realizar y culminar este trabajo.
Amis padres y a Uriel por su apoyo y aliento en todo momento.
A ti Irma, por tu comprensión, paciencia, enseñanzas y por todo lo que tú eres.
A todos mis amigos por su impulso y estímulo para concluir esta tesis.

Daniel

A Dios por permitirme estar aquí.
A mis padres por su aliento cuando más lo necesite.
A mis hermanos por su cariño y apoyo de siempre.
A Dany por su paciencia, su apoyo y por ser un gran compañero.
Al Act. Mario Arriaga quien sembró en mi el gusto por el Cálculo Actuarial por su gran ética y profesionalismo.
A Oscar por lo que significa para mí.
A Gaby por su amistad y comprensión en todos estos años.
A mis amigos que estuvierón conmigo cuando lo necesité (y que seguirán).

Irma

i