

19  
26j



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTADOS DE EQUILIBRIO DE UN MODELO  
ESCALAR NO LOCAL DE TURBULENCIA  
BIDIMENSIONAL

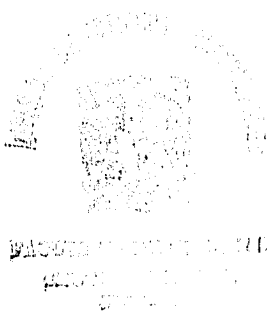
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
F I S I C O  
P R E S E N T A :  
SERGIO HERNANDEZ ZAPATA



MEXICO, D. F.

1996



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "ESTADOS DE EQUILIBRIO DE UN MODELO ESCALAR NO LOCAL DE TURBULENCIA BIDIMENSIONAL"

realizado por HERNANDEZ ZAPATA SERGIO

con número de cuenta 8321633-9 , pasante de la carrera de FISICA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario DR. ENRIQUE VAZQUEZ SEMADEN

Propietario DR. EDUARDO RAMOS MORA

Propietario DR. GERARDO RUIZ CHAVARRIA

Suplente DR. JORGE DANIEL CANTO ILLA

Suplente DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA  
Coordinador de Licenciatura

A MIS PAPAS

A mi maestro cecechero Toño Lee

## AGRADECIMIENTOS

Desco agradecer a todas las personas que hicieron posible este trabajo. En primer lugar, a mi asesor, el Dr. Enrique Vázquez Semadeni, quien me dió a conocer la problemática de la turbulencia, me planteó el problema de tesis y me orientó en todos los aspectos centrales del trabajo. Corrigió además, en la medida en que fué posible, todas mis barbaridades tanto de redacción como de ortografía y discutió conmigo incansablemente todas mis dudas, planteándome, además, muchos problemas y haciéndome ver la importancia e inagotabilidad del tema. Le agradezco sobre todo su paciencia y la generosa amistad que me brindó durante todo el tiempo. Agradezco a mis sinodales, los doctores Eduardo Ramos, Gerardo Ruiz, Jorge Cantó y Oscar Palmas, los cuales me hicieron invaluable observaciones y sugerencias para mejorar este trabajo; espero haber tomado en cuenta satisfactoriamente sus consejos. No puedo dejar de mencionar aquí a mi amigo Javier Ballesteros, quien me mostró la alternativa de hacer mi tesis en el Instituto de Astronomía en una época en que estaba muy desorientado. Agradezco por último a todas las personas del IAUNAM, trabajadores, profesores y estudiantes, que me facilitaron su valiosa ayuda para realizar este trabajo.

## INDICE.

Capítulo 1. Introducción .....	3
Capítulo 2. Teoría Básica de la Turbulencia Incompresible.....	7
2.1) Las ecuaciones hidrodinámicas (EHD).....	7
2.1.1) EHD (Caso compresible).....	7
2.1.2) EHD (Caso incompresible).....	8
2.2) Propiedades de conservación de cantidades cuadráticas de flujos incompresibles.....	8
2.2.1) Conservación de energía (Caso incompresible).....	8
2.2.2) Conservación de la helicidad en un flujo tridimensional.....	10
2.2.3) Conservación de la vorticidad sobre las trayectorias de los puntos materiales y conservación de la enstrofia en un flujo bidimensional.....	12
2.2.4) Tabla de cantidades conservadas (fluido incompresible $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ).....	14
2.3) Las ecuaciones hidrodinámicas en el espacio de Fourier y la condición de Liouville para flujos sin viscosidad.....	14
2.4) Teorema de Parseval e interpretación física de las ecuaciones hidrodinámicas en el espacio de Fourier.....	20
2.5) Turbulencia.....	24
2.6) Fenomenología de la Turbulencia Incompresible.....	25
2.7) Dirección de las cascadas en 2D.....	28
Capítulo 3. Modelos Escalares.....	30
3.1) Utilidad de los modelos escalares en el estudio de fenómenos de la Turbulencia.....	30
3.2) Modelo Escalar de Desmiańsky y Novikov.....	30
3.3) Puntos Fijos del Modelo Escalar DN.....	34
3.4) Punto Fijo del Modelo de DN Forzado.....	37
3.5) Modelo a Primeros Vecinos de Obukhov.....	40
3.6) Puntos Fijos en el Modelo de Obukhov.....	41
3.7) Generalización de los Modelos a Primeros Vecinos.....	41
3.8) Modelo Escalar de Gledzer a Segundos Vecinos.....	43
3.9) Búsqueda de PFAS en el Modelo de Gledzer.....	45
Capítulo 4. Modelo Escalar a Terceros Vecinos.....	47

4.1) Construcción del modelo escalar .....	47
4.2) Búsqueda de puntos fijos autosimilares .....	49
4.3) Restricciones adicionales al modelo .....	52
4.3.1) Conservación detallada por ternas de vectores .....	52
Capítulo 5. Búsqueda de PFASAs .....	54
5.1) Búsqueda de PFASAs cuando $\beta = 0$ .....	54
5.2) Cascadas de energía y enstrofia .....	54
Capítulo 6. Conclusiones .....	58
6.1) Resumen .....	58
6.2) Significado físico de los PFASs .....	58
FIGURAS .....	61
APENDICE I. Resumen de la teoría K67 .....	67
APENDICE II. Excitación de armónicos en el caso 1-dimensional .....	69
REFERENCIAS .....	70



## CAPITULO 1.

### INTRODUCCION.

En el espacio de Fourier las ecuaciones hidrodinámicas de Navier-Stokes para un flujo incompresible y con condiciones a la frontera periódicas tienen la forma (ver, e.g., Lesieur 1990)

$$\dot{u}_k = -\frac{i}{2} \sum_{p+q=k} [(k \cdot u_p)u_q + (k \cdot u_q)u_p - \frac{2k}{k^2} (k \cdot u_p)(k \cdot u_q)] - \nu k^2 u_k,$$

en donde  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  son vectores de onda con componentes enteras, si el dominio de integración tiene tamaño  $2\pi$ .  $k$  es el módulo de  $\mathbf{k}$ ,  $i$  es el imaginario puro,  $u_k$ ,  $u_p$  y  $u_q$  son las amplitudes de Fourier asociadas a ellos, y  $\nu$  es la viscosidad cinemática. La sumatoria contiene las interacciones no lineales.

El comportamiento de los flujos regidos por esta ecuación en regímenes turbulentos ( $|\nu k^2 u_k| \ll |$  términos no lineales  $|$ ) presenta una enorme complejidad, observándose en particular los fenómenos de transporte no lineal entre los diversos modos, y de cascadas turbulentas de las cantidades cuadráticas conservadas por los términos no lineales (capítulo 2). Los modelos escalares se construyen como una simplificación de las ecuaciones hidrodinámicas en el espacio de Fourier y son utilizados con el objeto de estudiar a "grosso modo" las interacciones no lineales presentes en estas ecuaciones entre las amplitudes de Fourier del campo de velocidades euleriano. Estos modelos no consideran todos los modos de Fourier (o vectores de onda) como grados de libertad, sino que se toma una partición del conjunto de vectores de onda y cada grado de libertad del modelo será una magnitud escalar  $k_i$  representativa de las normas de los vectores en un miembro de la partición. Usualmente la partición consiste de una colección numerable de cáscaras esféricas centradas en el origen cuyos radios y grosores crecen geoméricamente. La razón para elegir el tamaño de las cáscaras creciendo en proporción geométrica es que con unos pocos modos es posible cubrir un gran intervalo de escalas  $l_i \sim 1/k_i$ . Las amplitudes de Fourier  $u_k$  del campo de velocidades, que son vectores de la misma dimensión que el flujo y con componentes

complejas, asociados a los vectores de onda dentro de la cáscara  $i$ -ésima son sustituidas por una amplitud escalar representativa  $u_i$ . Estas amplitudes escalares son interpretadas como promedios de las amplitudes de Fourier. En algunos casos, se interpreta la amplitud escalar como la raíz cuadrada de la energía cinética en toda la cáscara (Desniansky y Novikov, 1974), mientras que en otros la amplitud escalar es considerada como promedio directo de las amplitudes vectoriales (Gledzer, 1973). La última elección permite reproducir otra característica básica de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles sin disipación además de las interacciones no lineales, a saber, la condición de Liouville  $\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0$ . Los modelos escalares son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con acoplamientos no lineales cuyas incógnitas son precisamente las magnitudes escalares  $u_i$ . Entonces, la condición de Liouville se puede considerar como un criterio para juzgar el significado de las amplitudes que intervienen en un modelo dado. En los dos tipos de modelo mencionados, el cuadrado de cada amplitud escalar es proporcional a la cantidad de energía cinética contenida en la cáscara correspondiente.

En resumen, los modelos escalares de turbulencia tienen la forma

$$\dot{u}_i = \sum A_{ijk} u_j u_k + \delta_{i0} f_i - \delta_{iN} \nu k_i^2 u_i$$

en donde las  $u_i$  es la amplitud escalar característica de la  $i$ -ésima cáscara y  $f_i$  representa el término de forzamiento.

Desniansky y Novikov por un lado (1974, lo llamaremos brevemente DN) y por el otro Obukhov (1971) han explorado modelos de este tipo para el estudio del establecimiento de las pendientes  $-\frac{5}{3}$  y  $-3$  de los intervalos inerciales para flujos incompresibles en 3 y 2 dimensiones (abreviados 3D y 2D), respectivamente (Kolmogorov 1941, Kraichnan 1967, Batchelor 1969). Más recientemente, Gloaguen *et al* (1985) estudiaron diversos aspectos de la turbulencia magnetohidrodinámica con ayuda de este tipo de modelos. En el modelo de Gloaguen *et al*, los acoplamientos no lineales incluyen amplitudes escalares asociadas al campo magnético, además de las amplitudes usuales asociadas al campo de velocidades euleriano.

Es importante notar que, aunque en las ecuaciones de Navier-Stokes aparecen interacciones entre todas las escalas de movimiento, en los modelos mencionados arriba cada cáscara interactúa únicamente con sus dos cáscaras vecinas más próximas. Es decir, en

estos modelos la transferencia de energía cinética y otras cantidades ocurre únicamente entre cáscaras contiguas. Por el contrario, Gledzer (1974) ha propuesto un modelo que incluye términos no lineales de interacción entre segundos vecinos. Esto le permite conservar dos cantidades cuadráticas simultáneamente, (es decir, para el mismo conjunto de valores de los parámetros), mientras que los modelos con interacciones únicamente a primeros vecinos sólo pueden conservar una cantidad cuadrática a la vez. Esto hace al modelo de Gledzer particularmente adecuado para modelar flujos bidimensionales (ver, e.g., Lesieur 1990), donde se conservan simultáneamente la energía cinética  $E = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2$  y la enstrofia  $\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2$ .

Tradicionalmente, los puntos fijos de los modelos escalares ( $\dot{u}_i = 0$ ) se identifican con los estados estacionarios de los flujos que modelan (véase sin embargo Qian 1988). En particular, los puntos fijos correspondientes a los intervalos inerciales autosimilares de flujos reales son *puntos fijos autosimilares* (PFASs) de la forma  $u_i = A^{(m)} k_i^{-\frac{m+1}{3}}$ . Como se verá en los capítulos 2 y 3, estos PFASs corresponden a la conservación de la cantidad cuadrática  $\sum u_i^{2/m}$ . Del hecho de la conservación de la energía ( $m = 0$ ) se sigue la existencia de un punto fijo  $u_i \propto k_i^{-1}$  y de la conservación de la enstrofia ( $m = 2$ ) la existencia de un punto fijo  $u_i \propto k_i^{-1}$ . El espectro de energía correspondiente al primer punto fijo es de la forma  $k^{-5/3}$  (el "PFAS de Kolmogorov" o K41) y el correspondiente al segundo es de la forma  $k^{-3}$  ("PFAS de Kraichnan" o K67).

El hecho de que el modelo de Gledzer (1974), por su inclusión de interacciones a segundos vecinos, sea capaz de soportar más de una solución del tipo PFAS para un conjunto de valores de los parámetros, sugiere inmediatamente la posibilidad de que un modelo escalar con interacciones a vecinos más distantes sea capaz de soportar un número aún mayor de PFASs. Es decir, que los modelos escalares puedan tener un número arbitrariamente grande de soluciones tipo PFAS dependiendo del número de interacciones no lineales que incluyan.

En este trabajo exploraremos la posibilidad de la aparición de PFASs adicionales a K41 y K67 por medio de un modelo escalar de turbulencia incompresible en 2D. De resultar cierta esta posibilidad, ella tendría consecuencias importantes, bien sobre la dinámica de los flujos de NS si es que tales soluciones estacionarias existen para las ecuaciones primitivas, o bien sobre las condiciones que deben satisfacer los modelos escalares de turbulencia, si es que tales soluciones son peculiares a los modelos. En el capítulo 2 se presenta un resumen de los resultados básicos de teoría de turbulencia necesarios para este trabajo. En el capítulo 3 se revisa la construcción de modelos escalares, en particular los de DN y

de Gledzer. En el capítulo 4 se procede a la construcción de un modelo escalar a terceros vecinos, y en el capítulo 5 se describe la búsqueda de PFASAs (PFASs adicionales) para este modelo. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan algunas conclusiones.

## CAPITULO 2.

### TEORIA BASICA DE LA TURBULENCIA INCOMPRESIBLE.

#### 2.1) Las ecuaciones hidrodinámicas (EHD).

A continuación escribiremos las ecuaciones hidrodinámicas básicas, explícitamente. Su obtención se puede consultar en cualquier libro de texto sobre Mecánica de Fluidos (e.g., Landau y Lifshitz, 1986).

##### 2.1.1) EHD (Caso compresible).

Las ecuaciones hidrodinámicas básicas para un fluido no viscoso y no forzado son la ecuación de balance de momento

$$\rho \left[ \frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P \quad (2.1)$$

y la ecuación de balance de masa (ecuación de continuidad):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $P$  la presión del flujo y  $\mathbf{u}$  la velocidad del flujo.

Otra forma de la ecuación (2.1) puede ser obtenida como sigue. Consideremos la expresión  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u})$ , que es la divergencia de un tensor de segundo intervalo y por lo tanto es un vector de tres dimensiones. La componente  $j$ -ésima ( $j = 1, 2, 3$ ) de este vector es

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u})]_j &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j) = \sum_i \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} u_j + \sum_i \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \\ &= [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] u_j + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_j. \end{aligned}$$

Este análisis por componentes nos lleva a la siguiente relación vectorial

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) puede escribirse utilizando las relaciones (2.1) y (2.2) como:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = -\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla P$$

o bien

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla P. \quad (2.4)$$

### 2.1.2) EHD (Caso incompresible)

La ecuación

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P \quad (2.5)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

son las ecuaciones hidrodinámicas básicas para los flujos incompresibles. Esta última relación expresa en forma diferencial el hecho de que el gasto en cualquier superficie cerrada inmersa en un flujo incompresible es idénticamente cero y se sigue de que la ecuación de balance de masa se reduce en este caso a  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ .

### 2.2) Propiedades de conservación de cantidades cuadráticas en flujos incompresibles.

Analizaremos a continuación la conservación de cantidades cuadráticas en el caso incompresible

#### 2.2.1) Conservación de energía (Caso incompresible).

Tomando el producto punto entre la ecuación (2.5) y el campo de velocidades  $\mathbf{u}$  obtenemos

$$\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\mathbf{u} \cdot \nabla P. \quad (2.6)$$

Ahora bien, el término  $\mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]$  puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] &= \sum_i u_i \left( \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \sum_i u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ &= \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{u_i^2}{2} \right) = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{u^2}{2} \right) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left( \frac{u^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado  $\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right)$ . Además dado que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , tenemos que  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \left( \frac{u^2}{2} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{u^2}{2} \mathbf{u} \right)$  y  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) P = \nabla \cdot (P \mathbf{u})$ . Entonces la ecuación (2.6) queda como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{u^2}{2} \mathbf{u} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{P \mathbf{u}}{\rho} \right). \quad (2.7)$$

De aquí en adelante supondremos, a menos que se especifique lo contrario, que  $\rho$  es constante en todo el flujo, es decir que el flujo es homogéneo. Integrando la relación (2.7) en todo el espacio y usando el hecho de que la derivada total de una integral de volumen coincide con la integral de la derivada parcial del integrando cuando integramos en todo el espacio, obtenemos el siguiente resultado, que establece precisamente la conservación de la energía cinética total por unidad de masa

$$\frac{d}{dt} \int \frac{u^2}{2} d^3x = - \int \nabla \cdot \left[ \left( \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \mathbf{u} \right] d^3x = - \int_{\Sigma} \left[ \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right] \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

en donde hemos hecho la suposición habitual de que el campo de velocidades es cero en infinito. Este resultado, la conservación de la energía cinética total, es independiente de la dimensionalidad del flujo. Nótese que en el caso de flujos viscosos, el lado derecho de (2.7) contiene el término adicional  $\nu \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}$  que expresa la cantidad de energía cinética disipada por unidad de volumen.

### 2.2.2) Conservación de la helicidad en un flujo tridimensional.

Se define la vorticidad del flujo  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$  como una medida de la circulación local del fluido. El teorema de Stokes establece la siguiente relación

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{A}} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathbf{A}} \omega \cdot d\mathbf{a}$$

donde  $\Gamma$  es una curva cerrada y  $\mathbf{A}$  es una superficie limitada por  $\Gamma$ . Esta relación dice que la circulación de  $\mathbf{u}$  a lo largo de  $\Gamma$  es igual al flujo de  $\omega$  a través de  $\mathbf{A}$ .

Encontraremos ahora la ecuación de evolución del campo de vorticidad. Para obtenerla, tomemos el rotacional de la ecuación (2.5). Entonces

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = \mathbf{0}.$$

Utilizando la identidad

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b})$$

obtenemos

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left( \frac{u^2}{2} \right) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0},$$

ecuación que puede ser reescrita con ayuda de la identidad

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a}$$

y con ayuda de la relación  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  (la divergencia de un rotacional siempre es cero) y la condición de incompresibilidad  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  como



$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0. \quad (2.8)$$

De esta ecuación se puede obtener a su vez la ecuación para la helicidad  $H = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3x$ . En forma análoga a como se procedió en la sección 2.2.1 tomamos el producto punto de la ecuación (2.8) con el campo de velocidades  $\mathbf{u}$  para obtener

$$\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}] - \mathbf{u} \cdot [(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = 0. \quad (2.9)$$

Desarrollando la expresión  $\mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}]$ , que es ahora un escalar, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}] &= \sum_j u_j \left( \sum_i u_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{ij} u_i u_j \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \sum_{ij} u_i \frac{\partial (u_j \omega_j)}{\partial x_i} - \sum_{ij} u_i \omega_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \\ &= \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \sum_j \omega_j (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_j = (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (2.10a)$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot [(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}] &= \sum_j u_j \left( \sum_i \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{ij} \omega_i u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \sum_{ij} \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{u_j^2}{2} \right) = \sum_i \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \\ &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \left( \frac{u^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.10b)$$

La ecuación (2.9) puede entonces ser reescrita como

$$\frac{\partial (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega})}{\partial t} - \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0. \quad (2.11a)$$

La ecuación (2.5) nos permite simplificar esta ecuación para obtener

$$\frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\left(\frac{P}{\rho}\right) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0. \quad (2.11b)$$

Dado que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  esta última ecuación se puede escribir como una ecuación de balance de helicidad, es decir, una ecuación que expresa la conservación de la helicidad en forma local:

$$\frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} + \nabla \cdot \left[ \frac{P}{\rho} \boldsymbol{\omega} - \frac{u^2}{2} \boldsymbol{\omega} \right] = 0. \quad (2.12)$$

Integrando en todo el espacio y utilizando el Teorema de Gauss obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \, d^3\mathbf{x} = \oint \left( \frac{P}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, dA + \oint (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (2.13)$$

cuando las condiciones a la frontera son periódicas, o bien los campos  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  se anulan en infinito la cantidad  $H = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \, d^3\mathbf{x}$  (llamada la helicidad), es un invariante del flujo.

### 2.2.3) Conservación de la vorticidad sobre las trayectorias de los puntos materiales y conservación de la enstrofia en un flujo bidimensional.

Notemos que la ecuación (2.8) es válida en general, independientemente de la dimensionalidad del flujo. Ahora bien, la derivada total de la vorticidad está dada por  $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}$ , lo que, sustituyendo en (2.8), nos lleva a la siguiente ecuación:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}.$$

En particular en 2D,  $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla = 0$ , ya que el campo vectorial  $\boldsymbol{\omega}$  es ortogonal al plano donde se mueve el flujo y el operador  $\nabla$  en este caso tiene su tercera coordenada igual a cero ya que para campos confinados a un plano, la dirección de máximo cambio también está en el plano. El resultado inmediato de lo anterior es que en 2D

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{0},$$

lo que significa que el campo de vorticidad no cambia sobre la trayectoria de un punto material; es decir  $\omega(\mathbf{x}(t), t) = \text{constante}$  si  $\mathbf{x}(t)$  es la trayectoria de un punto material del flujo. Un resultado inmediato de esto es que la enstrofia total del flujo  $\Omega \equiv \int \omega^2 dV$  permanece constante, ya que de la ecuación anterior se desprende que  $\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} = 0$  y por lo tanto

$$\int \frac{d\omega^2}{dt} dA = \frac{d}{dt} \int \omega^2 dA = 0.$$

Aquí hemos usado el hecho de que el área de integración no cambia con el tiempo.

Veamos este último resultado de otra forma. Sabemos que

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = 0,$$

y por lo tanto

$$\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega] = 0.$$

Desarrollando los términos de esta última ecuación

$$\begin{aligned} \omega \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega] &= \sum_i \omega_i \left( \sum_j u_j \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{ij} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\omega_j^2}{2} \right) = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\omega^2}{2} \right) = \\ &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left( \frac{\omega^2}{2} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{\omega^2}{2} \mathbf{u} \right), \end{aligned}$$

en donde la última igualdad se sigue de  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Por lo tanto obtenemos la ecuación de balance de enstrofia

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega^2 \mathbf{u}) = 0, \quad (2.14)$$

la que al ser integrada en todo el plano produce

$$\frac{d}{dt} \int \omega^2 d^2 \mathbf{x} = 0.$$

Esto último es precisamente la expresión de la conservación de la enstrofia en un flujo 2D. A continuación presentamos una tabla que resume las cantidades cuadráticas conservadas.

#### 2.2.4) Tabla de cantidades conservadas (fluido incompresible $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ )

3D	$K \equiv \rho \int \frac{u^2}{2} d^3\mathbf{x}$	Energía cinética total
	$H \equiv \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3\mathbf{x}$	Helicidad
2D	$\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{u}$	Vorticidad sobre las líneas de flujo
	$K \equiv \sigma \int \frac{u^2}{2} d^2\mathbf{x}$	Energía cinética total
	$\Omega \equiv \int \omega^2 d^2\mathbf{x}$	Enstrofia

#### 2.3) Las ecuaciones hidrodinámicas en el espacio de Fourier y la condición de Liouville para flujos sin viscosidad.

Recordemos las ecuaciones hidrodinámicas para un flujo incompresible sin viscosidad ( ecuaciones (2.5) y (2.6) )

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} \right). \quad (2.15)$$

En el caso incompresible se tiene que  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})$ , (ver ecuación (2.3)). Por lo tanto, la ecuación (2.15) queda como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) \quad (2.16a)$$

o bien

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{P}{\rho} \right). \quad (2.16b)$$

Aplicando la divergencia a ambos lados de la ecuación (2.16b) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (u_i u_j) = -\nabla^2 \left( \frac{P}{\rho} \right) \quad (2.17a)$$

que dado que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  se convierte en

$$\nabla^2 \left( \frac{P}{\rho} \right) = - \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j) \equiv M. \quad (2.17b)$$

aquí  $M$  es introducida por comodidad.

En lo que sigue supondremos que las condiciones a la frontera son espacialmente periódicas en todo momento. Bajo esta hipótesis obtendremos ahora la ecuación (2.1) (en el espacio de Fourier). Para hacer esto expandiremos en Fourier los términos de la ecuación (2.15). En primer lugar, la función  $\frac{P}{\rho}$  queda como

$$\frac{P}{\rho} = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{P}{\rho} \right)_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

donde  $i = \sqrt{-1}$  y  $\mathbf{k}$  representa a los vectores de onda de Fourier. Además, tomando la divergencia,

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{P}{\rho} \right) = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{P}{\rho} \right)_{\mathbf{k}} i k_l \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}).$$

Derivando otra vez respecto de  $x_l$  obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \left( \frac{P}{\rho} \right) = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{P}{\rho} \right)_{\mathbf{k}} i^2 k_l^2 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

lo que por último nos conduce a la relación

$$\nabla^2 \left( \frac{P}{\rho} \right) = - \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{P}{\rho} \right)_{\mathbf{k}} k^2 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (2.18)$$

La relación (2.17b) produce por lo tanto  $\left( \frac{P}{\rho} \right)_{\mathbf{k}} = -\frac{M_{\mathbf{k}}}{k^2}$ . Calculemos ahora  $M_{\mathbf{k}}$ :

$$M = - \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (u_i u_j)$$

$$u_i = \sum_{\mathbf{p}} u_{i\mathbf{p}} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$$

$$u_j = \sum_{\mathbf{q}} u_{j\mathbf{q}} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$$

$$\begin{aligned}
 u_i u_j &= \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} u_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{q}} \exp(i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}) \\
 \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j) &= i \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} (\rho_i + q_i) u_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{q}} \exp(i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}) \\
 \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j) &= i \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} [(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{p}}] u_{\mathbf{q}} \exp(i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}) \\
 \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (u_i u_j) &= i^2 \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} [(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{p}}] u_{\mathbf{q}} (\rho_j + q_j) \exp(i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}) \\
 M &= - \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (u_i u_j) = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} [(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{p}}] [(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}}] \exp(i(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}). \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la amplitud de Fourier  $M_{\mathbf{k}}$  está dada por

$$M_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{p}}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}})$$

y por consiguiente

$$\left(\frac{P}{\rho}\right)_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{p}}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}})}{k^2}. \quad (2.20)$$

En la ecuación (2.15) aparece el término  $\nabla \left(\frac{P}{\rho}\right)$ ; nos interesa obtener entonces su amplitud de Fourier correspondiente al vector de onda  $\mathbf{k}$ . En primer lugar

$$\begin{aligned}
 \frac{P}{\rho} &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{P}{\rho}\right)_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \\
 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{P}{\rho}\right) &= i \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{P}{\rho}\right)_{\mathbf{k}} k_i \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \\
 \nabla \left(\frac{P}{\rho}\right) &= i \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{P}{\rho}\right)_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$[\nabla(\frac{P}{\rho})]_{\mathbf{k}} = i(\frac{P}{\rho})_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = -i \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{p}})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{q}}). \quad (2.21)$$

La amplitud de Fourier correspondiente al término  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  está dada por

$$[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}]_{\mathbf{k}} = \frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{dt} \quad (2.22)$$

y como ya probamos

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \mathbf{u}) = i \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} [(\mathbf{p} + \mathbf{q})\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{p}}] u_{\mathbf{q}} \exp(i(\mathbf{p} + \mathbf{q})\cdot\mathbf{x})$$

por lo tanto

$$[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]_{\mathbf{k}} = i \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{p}}) u_{\mathbf{q}} = \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} [(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{p}}) u_{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{q}}) u_{\mathbf{p}}]. \quad (2.23)$$

Las relaciones (2.21), (2.22) y (2.23) nos permiten obtener la amplitud de Fourier correspondiente al vector  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla(\frac{P}{\rho})$  que tiene que ser igual a 0 debido a que el campo vectorial  $\mathbf{u}$  satisface la ecuación diferencial (2.15), es decir

$$[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla(\frac{P}{\rho})]_{\mathbf{k}} =$$

$$\frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{dt} + \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} [(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{p}}) u_{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{q}}) u_{\mathbf{p}} - \frac{2\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{p}})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{q}})] = 0. \quad (2.24)$$

La última relación constituye un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias con acoplamientos no lineales y cuyas incógnitas son precisamente las amplitudes de Fourier del campo  $\mathbf{u}$ . Este sistema es entonces equivalente a la ecuación (2.15) dado que el campo de velocidades  $\mathbf{u}$  se obtiene de las amplitudes  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$  por medio de la serie de Fourier

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}). \quad (2.25)$$

El campo de velocidades  $\mathbf{u}$  es real y por lo tanto para que la igualdad de arriba sea consistente es necesario que

$$[\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})]^* = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$$

donde  $*$  denota el complejo conjugado, lo que implica que  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* = \mathbf{u}_{-\mathbf{k}}$ .

De la relación (2.25) se sigue que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot \nabla (\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})) = i \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}).$$

Como  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en el caso incompresible, se sigue que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.26)$$

para todos los vectores de onda.

El término de disipación es  $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ ; en el espacio de Fourier queda como

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} = -\sum_{\mathbf{k}} k^2 \nu \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}).$$

Esto último nos dice que la amplitud de Fourier correspondiente al término viscoso está dada por <sup>1</sup>  $[\nu \nabla^2 \mathbf{u}]_{\mathbf{k}} = -\nu k^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ , con lo cual en el caso disipativo las ecuaciones (ecuaciones de Navier-Stokes) quedan:

$$\frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{dt} + \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} [(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{p}})\mathbf{u}_{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{q}})\mathbf{u}_{\mathbf{p}} - \frac{2\mathbf{k}}{k^2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{p}})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_{\mathbf{q}})] + k^2 \nu \mathbf{u}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.27)$$

Estas ecuaciones son completamente equivalentes a las ecuaciones diferenciales parciales originales. Si escribimos las ecuaciones hidrodinámicas (2.27) por componentes obtenemos

<sup>1</sup> La naturaleza disipativa de este término aparece aquí con toda claridad, basta recordar por ejemplo, la fuerza de fricción del aire  $-\kappa \mathbf{V}$  proporcional a la velocidad  $\mathbf{V}$  de una partícula en caída o el término  $-RI$  debido a un resistor  $R$  en la ecuación diferencial asociada a un circuito.



$$\frac{du_j(\mathbf{k})}{dt} = -i(\delta_{ij} - k_j k_l k^{-2}) k_m \sum_{\mathbf{p}} u_m(\mathbf{k} - \mathbf{p}) u_l(\mathbf{p}).$$

Dado que  $u_i(\mathbf{k})$  es complejo, se puede escribir como  $u_i(\mathbf{k}) = a_i(\mathbf{k}) + i b_i(\mathbf{k})$ . Las ecuaciones hidrodinámicas se convierten entonces bajo estas condiciones en ecuaciones en la parte real  $a_i(\mathbf{k})$ <sup>2</sup>

$$\frac{da_j(\mathbf{k})}{dt} = (\delta_{ij} - k_j k_l k^{-2}) k_m \sum_{\mathbf{p}} (a_m(\mathbf{k} - \mathbf{p}) b_l(\mathbf{p}) + b_m(\mathbf{k} - \mathbf{p}) a_l(\mathbf{p}))$$

y en la parte imaginaria  $b_j(\mathbf{k})$

$$\frac{db_j(\mathbf{k})}{dt} = -(\delta_{ij} - k_j k_l k^{-2}) \sum_{\mathbf{p}} (a_m(\mathbf{k} - \mathbf{p}) a_l(\mathbf{p}) - b_m(\mathbf{k} - \mathbf{p}) b_l(\mathbf{p})).$$

El espacio fase de este sistema de ecuaciones diferenciales está conformado por las coordenadas  $a_i(\mathbf{k})$  y  $b_i(\mathbf{k})$ . Ahora bien, veremos que el volumen fase es conservado por el sistema. Para ver esto, es necesario probar que la divergencia del campo vectorial asociado al sistema en el espacio fase es 0. En primer lugar,

$$\frac{\partial a_j(\mathbf{k})}{\partial a_i(\mathbf{k})} = (\delta_{ij} - k_j k_l k^{-2}) k_m \sum_{\mathbf{p}} (\delta_{jm}^{k, k-p} b_l(\mathbf{p}) + \delta_{lj}^{k, p} b_m(\mathbf{k} - \mathbf{p})) =$$

<sup>2</sup> El desarrollo es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{du_j(\mathbf{k})}{dt} &= \frac{1}{2} \{ -i(\delta_{ij} - k_j k_l k^{-2}) k_m \sum_{\mathbf{p}} u_m(\mathbf{k} - \mathbf{p}) u_l(\mathbf{p}) + \\ &+ i(\delta_{ij} - k_j k_l k^{-2}) k_m \sum_{\mathbf{p}} u_m^*(\mathbf{k} - \mathbf{p}) u_l^*(\mathbf{p}) \} = (\delta_{ij} - k_j k_l k^{-2}) k_m \sum_{\mathbf{p}} \text{Im} [u_m(\mathbf{k} - \mathbf{p}) u_l(\mathbf{p})] = \\ &= (\delta_{ij} - k_j k_l k^{-2}) k_m \sum_{\mathbf{p}} (a_m(\mathbf{k} - \mathbf{p}) b_l(\mathbf{p}) + b_m(\mathbf{k} - \mathbf{p}) a_l(\mathbf{p})) \end{aligned}$$

un desarrollo análogo se obtiene para  $\frac{db_j(\mathbf{k})}{dt}$ .

$$= (\delta_{ij} - k_j k_i k^{-2}) k_m (\delta_{jm} b_i(0) + \delta_{ij} b_m(0)) = k_j b_j(0) + k \cdot b(0) - 2k_j k_j k^{-2} k \cdot b(0),$$

en donde hemos aplicado la convención de Einstein de sumar sobre todos los índices repetidos. Obtenemos entonces

$$\frac{\partial \hat{a}_k}{\partial a_k} = 2k \cdot b(0) - 2k \cdot b(0) = 0.$$

Junto con la fórmula análoga

$$\frac{\partial \hat{b}_k}{\partial b_k} = 0,$$

estas fórmulas implican la conservación del volumen fase por las ecuaciones hidrodinámicas, y constituyen la llamada condición de Liouville. La importancia de este hecho para nuestro asunto es que el modelo escalar de Gledzer (1973) y el que nosotros proponemos (capítulos 4 y 5) reproducen la condición de Liouville.

#### 2.4) Teorema de Parseval e interpretación física de las ecuaciones hidrodinámicas en el espacio de Fourier.

Consideremos dos funciones escalares (complejas en general)  $f$  y  $g$  de la posición y del tiempo, y escribámoslas como series de Fourier

$$f(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

$$g(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}} g_{\mathbf{p}} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$$

El producto  $fg^*$ , donde  $g^*$  es la función conjugada compleja de  $g$ , queda como sigue

$$fg^* = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} f_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{p}}^* \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}).$$

Si integramos esta relación en todo el espacio obtenemos

$$\int fg^* d^3x = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} f_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{p}}^* \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^*. \quad (2.28)$$

Este último resultado es conocido como Teorema de Parseval y nos indica cómo se escriben las cantidades cuadráticas asociadas al flujo en el espacio de Fourier. El Teorema de Parseval para dos campos vectoriales  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  es una consecuencia inmediata de lo anterior y nos dice que

$$\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}^* d^3x = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{F}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{k}}^* \quad (2.29)$$

Las implicaciones de este Teorema son muy interesantes. En primer lugar podemos reescribir la energía cinética total por unidad de masa como

$$K = \int \frac{u^2}{2} d^3x = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2 \quad (2.30)$$

expresión que da la energía cinética en el espacio de números de onda o espacio de Fourier. Consideremos ahora la conservación de la energía cinética en este espacio. Esta se puede demostrar tomando el producto punto de la ecuación (2.24) con el vector  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*$ , y dado que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* = 0$ , se obtiene

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \cdot \frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{dt} + \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \left[ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{p}})(\mathbf{u}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}})(\mathbf{u}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*) \right] = 0. \quad (2.31)$$

Ahora bien, dado que  $\frac{d|\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2}{dt} = \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*}{dt} + \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \cdot \frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{dt}$  y como  $|\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2$  es real obtenemos

$$\frac{d|\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2}{dt} = \text{Re} \left( \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*}{dt} \right) + \text{Re} \left( \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \cdot \frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{dt} \right)$$

pero

$$\text{Re} \left( \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*}{dt} \right) = \text{Re} \left( \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \cdot \frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{dt} \right)$$

por lo tanto

$$\frac{d|\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2}{dt} = 2\text{Re} \left( \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \cdot \frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{dt} \right).$$

Si tomamos la parte real de (2.31) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{|\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2}{2} \right) + \text{Re} \left( \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \left[ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{p}})(\mathbf{u}_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}})(\mathbf{u}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*) \right] \right) = 0.$$

Sin embargo si  $z = x + iy$  es un complejo, entonces  $\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re}(i(x + iy)) = \operatorname{Re}(-y + ix) = -y = -\operatorname{Im}(z)$ . Por consiguiente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{|u_k|^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{p+q=k} \left[ (k \cdot u_p)(u_q \cdot u_k^*) + (k \cdot u_q)(u_p \cdot u_k^*) \right] \right). \quad (2.32)$$

El Teorema de Parseval nos dice que la energía cinética total por unidad de masa es  $\sum_k \frac{|u_k|^2}{2}$ . Por lo tanto la conservación de la energía se expresa en el espacio de Fourier como

$$\frac{1}{2} \int u^2 d^3x = \frac{d}{dt} \left( \sum_k \frac{|u_k|^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_k \sum_{p+q=k} \left[ (k \cdot u_p)(u_q \cdot u_k^*) + (k \cdot u_q)(u_p \cdot u_k^*) \right] \right) = 0 \quad (2.33a)$$

o bien

$$\sum_k \sum_{p+q=k} \operatorname{Im} \left[ (k \cdot u_p)(u_q \cdot u_k^*) + (k \cdot u_q)(u_p \cdot u_k^*) \right] = 0. \quad (2.33b)$$

Denotaremos por  $T(k|p, q)$  al término

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[ (k \cdot u_p)(u_q \cdot u_k^*) + (k \cdot u_q)(u_p \cdot u_k^*) \right]. \quad (2.33c)$$

Procederemos a interpretar este término físicamente. Cuando teníamos en mente las ecuaciones hidrodinámicas referidas al espacio usual de tres o dos dimensiones, pensábamos en la energía cinética del flujo distribuida en este mismo espacio con densidad local igual a  $\rho \frac{u^2}{2}$ . La energía total por unidad de masa de nuestro flujo se obtenía, en 3D por ejemplo, realizando la integral  $\int \frac{u^2}{2} d^3x$ . En la representación de Fourier la energía cinética puede ser pensada como repartida entre los distintos modos, correspondiendo a cada vector  $k$  la energía específica  $\frac{|u_k|^2}{2}$ . Subrayemos que esto es consistente debido al Teorema de Parseval. La ecuación (2.32) puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \frac{|u_k|^2}{2} = \sum_{p+q=k} T(k|p, q)$$

en donde  $T(k|p, q)$  representa la cantidad de energía cedida por unidad de tiempo al vector  $k$  por el vector  $p$  a través del vector  $q$  junto con la cantidad de energía cedida por unidad de tiempo al vector  $k$  por el vector  $q$  a través del vector  $p$ . Es decir, la energía se transfiere

en un flujo incompresible por un mecanismo de triadas de vectores  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}$  con la propiedad de que  $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}$ . Debido a lo anterior el término  $T(\mathbf{k}|\mathbf{p}, \mathbf{q})$  recibe el nombre de *término de transferencia de energía*. Por otro lado, la ecuación (2.33b) que expresa la conservación de la energía en el espacio de Fourier se puede escribir como

$$\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} T(\mathbf{k}|\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0. \quad (2.34)$$

La forma *detaillada* en que los términos  $T(\mathbf{k}|\mathbf{p}, \mathbf{q})$  se cancelan en la ecuación (2.34) está dada por

$$T(\mathbf{k}|\mathbf{p}, \mathbf{q}) + T(\mathbf{p}|\mathbf{-q}, \mathbf{k}) + T(\mathbf{q}|\mathbf{k}, \mathbf{-p}) = 0. \quad (2.35)$$

El lado izquierdo de (2.35) puede escribirse salvo un factor constante como

$$\begin{aligned} & \cancel{1} (k \cdot u_p)(u_q \cdot u_k^*) + \cancel{2} (k \cdot u_q)(u_p \cdot u_k^*) - \cancel{3} (k \cdot u_p^*)(u_q^* \cdot u_k) - \cancel{4} (k \cdot u_q^*)(u_p^* \cdot u_k) + \\ & \cancel{4} (p \cdot u_{-q})(u_k \cdot u_p^*) + \cancel{5} (p \cdot u_k)(u_{-q} \cdot u_p^*) - \cancel{2} (p \cdot u_{-q}^*)(u_k^* \cdot u_p) - \cancel{6} (p \cdot u_k^*)(u_{-q}^* \cdot u_p) \\ & \cancel{5} (q \cdot u_k)(u_{-p} \cdot u_q^*) + \cancel{3} (q \cdot u_{-p})(u_k \cdot u_q^*) - \cancel{6} (q \cdot u_k^*)(u_{-p}^* \cdot u_q) - \cancel{1} (q \cdot u_{-p}^*)(u_k^* \cdot u_q), \end{aligned}$$

los términos tachados con el mismo número se cancelan juntos, debido a la condición de incompresibilidad  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{-\mathbf{k}} = 0$  y a la condición  $\mathbf{u}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*$  válidas para todo vector de onda  $\mathbf{k}$ .

La ecuación (2.35) representa la *conservación detallada de la energía*. La cantidad de energía que se transfiere entre los tres vectores de una triada de este tipo por unidad de tiempo es idénticamente cero. Esto no quiere decir que la energía total almacenada en una triada de vectores  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}$  tales que  $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}$  sea la misma siempre, ya que cada uno de estos está acoplado por medio de las ecuaciones diferenciales (2.24) con un conjunto infinito de vectores de onda.

La conservación de la enstrofia en un flujo 2D representado en el espacio de Fourier también se realiza por el mismo mecanismo de triadas de vectores. Se puede probar que la

amplitud de Fourier del rotacional de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  correspondiente al vector de onda  $\mathbf{k}$  está dada por

$$[\nabla \times \mathbf{F}]_{\mathbf{k}} = i \mathbf{k} \times \mathbf{F}_{\mathbf{k}}.$$

Entonces la enstrofia total en el espacio de Fourier se escribe como

$$\Omega = \int \omega^2 d^3x = \sum_{\mathbf{k}} |\omega_{\mathbf{k}}|^2 = \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2$$

en donde se ha usado la condición de incompresibilidad  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}} = 0$  para obtener  $|\mathbf{k} \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}}| = k u_{\mathbf{k}}$ . La cantidad  $\frac{1}{2} k^2 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2$  tiene que ser interpretada ahora como la enstrofia en el vector de onda  $\mathbf{k}$ . La cantidad de enstrofia transferida al vector  $\mathbf{k}$  en la unidad de tiempo por los vectores  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  en la interacción triádica está dada por  $k^2 T(\mathbf{k}|\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Kraichnan (1967) estableció que

$$k^2 T(\mathbf{k}|\mathbf{p}, \mathbf{q}) + p^2 T(\mathbf{p}|\mathbf{q}, \mathbf{k}) + q^2 T(\mathbf{q}|\mathbf{k}, \mathbf{p}) = 0 \quad (2.36)$$

lo que nos da la *conservación detallada de la enstrofia* en un flujo 2D incompresible.

## 2.5) Turbulencia.

Las ecuaciones (2.24) conforman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con acoplamientos no lineales y con una infinidad de incógnitas, a saber, las amplitudes  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ . Los términos de transferencia producen que la energía pase de unos vectores de onda a otros. Los vectores de onda con números de onda  $\sim k$  representan escalas de movimiento  $\lambda \sim \frac{1}{|k|}$ . Consideremos ahora las ecuaciones (2.24) pero añadiendo el término de disipación y un término de inyección de energía externa  $\mathbf{F}_{\mathbf{k}}$ , el cual suponemos que sólo es distinto de cero para  $\mathbf{k}$ 's pequeñas; es decir, suponemos que la inyección de energía ocurre a escalas grandes. Obtenemos

$$\frac{d\mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \{ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{p}}) \mathbf{u}_{\mathbf{q}} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}}) \mathbf{u}_{\mathbf{p}} - \frac{2\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{p}})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{q}}) \} - k^2 \nu \mathbf{u}_{\mathbf{k}} + \mathbf{F}_{\mathbf{k}}. \quad (2.37)$$

A los vectores de onda  $\mathbf{k}$  para los cuales  $\mathbf{F}_{\mathbf{k}}$  no es 0 les llamaremos *forzados* debido a que representan escalas de movimiento donde energía externa está siendo inyectada al sistema. Tradicionalmente en teoría de turbulencia se supone que los modos forzados

corresponden a las escalas más grandes del sistema, empezando por el trabajo pionero de Kolmogorov 1941. Aunque esto es cierto en la mayoría de flujos turbulentos terrestres (en flujos de laboratorio, los océanos y la atmósfera), no tiene necesariamente que ser así. Por ejemplo, en el medio interestelar de las Galaxias, la inyección de energía debida a las estrellas al gas interestelar ocurre en las escalas pequeñas (Scalo 1987, Vázquez-Semadeni et al 1994). Sin embargo, en el presente trabajo nos limitaremos a inyección de energía a escalas grandes.

El término  $-vk^2\mathbf{u}_k$  sólo es importante cuando  $k$  es suficientemente grande. El valor medio de las  $k$ 's para las cuales el término de disipación no es despreciable aumenta conforme la viscosidad del flujo decrece. El intervalo de vectores de onda no forzados para los cuales la disipación es despreciable se llama *intervalo inercial*. La situación entonces es la siguiente para un flujo 3D: Cierta cantidad de energía es inyectada, generalmente en las escalas grandes, por unidad de tiempo. Debido al mecanismo de las interacciones triádicas ( $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}\}$  con  $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}$ ), esta energía es transferida a lo largo del intervalo inercial a escalas más pequeñas, atravesando intacta todo el intervalo inercial. Al llegar a las escalas más pequeñas donde la  $k$  es muy grande, se disipa y las escalas con números de onda todavía más grandes prácticamente no son excitadas. A este proceso se le conoce como "*cascada turbulenta de energía*". La cantidad de modos o de vectores de onda excitados depende del cociente entre los términos inerciales de interacción no lineal y la viscosidad. Si este cociente es muy grande, el sistema de ecuaciones diferenciales (2.37) (sistema dinámico) tiene un gran número de grados de libertad. *De manera muy general se pueden definir como flujos turbulentos aquellos flujos con una cantidad enorme de grados de libertad y que tienen la capacidad de intercambiar energía a través de los términos no lineales*

## 2.6) Fenomenología de la Turbulencia Incompresible.

En 1941 Kolmogorov estudió el estado estacionario de un flujo turbulento incompresible con forzamiento y viscosidad (teoría K41), encontrando la ley del espectro de energía correspondiente (en el intervalo inercial), a través de argumentos de análisis dimensional. Este análisis permite también establecer una medida de la razón entre las escalas más grandes de excitación del flujo, donde la energía es inyectada según las hipótesis de la teoría K41, a las más pequeñas donde la disipación es importante. Las hipótesis de este análisis *fenomenológico* pueden ser resumidas como sigue:

a) La razón de transferencia de energía debida a los términos no lineales  $\epsilon_l$  de una escala a las otras es independiente del número de onda  $k \sim \frac{1}{l}$ .

b) La transferencia de energía es *local* en espacio de Fourier; es decir, se produce entre modos de Fourier de tamaños similares. De esta manera, bajo la premisa de que la energía es inyectada únicamente en las escalas grandes, se establece una cascada hacia las escalas más pequeñas disipativas a través del intervalo inercial. La escala  $l_d$  donde la disipación es importante se llama la escala disipativa o de Kolmogorov y el número de onda asociado se denota por  $k_d \sim 1/l_d$ .

A continuación reproducimos una deducción simple de los resultados de la teoría K41 (ver e.g., Lesieur 1990). Sea  $u_l$  la velocidad característica de la escala de tamaño  $l$ . Entonces el tiempo dinámico característico de la escala  $l$  está dado por

$$\tau_l \sim \frac{l}{u_l}. \quad (2.38)$$

Por el orden de magnitud, podemos estimar la tasa de transferencia de energía de una escala a la siguiente como la energía de la escala  $l$ ,  $u_l^2$ , dividida por el tiempo característico  $\tau_l$ :

$$\epsilon_l \sim \frac{u_l^2}{\tau_l} \sim \frac{u_l^3}{l}, \quad (2.39)$$

donde según la hipótesis  $\epsilon_l = \epsilon$  no depende de  $l$ . Por lo tanto obtenemos una relación de similitud entre la velocidad característica y el tamaño de la escala

$$u_l^3 \sim \epsilon l \quad \text{o bien} \quad u_l \sim \epsilon^{1/3} l^{1/3}. \quad (2.40)$$

Escrito esto último en términos del número de onda  $k$  obtenemos

$$u_k \sim \epsilon^{1/3} k^{-1/3}. \quad (2.41)$$

La cantidad de energía por unidad de masa, por unidad de número de onda está dada entonces por

$$E(k) \sim \frac{u_k^2}{k} \sim \frac{\epsilon^{2/3} k^{-2/3}}{k} \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.42)$$

que es la muy conocida ley "5/3" de Kolmogorov y que es un resultado que se sigue de la teoría K41. Analizaremos, por último la razón  $\frac{l}{L}$  entre la escala de inyección  $L$  y la escala de disipación  $l_d$ . En primer lugar debido a la independencia de la tasa de transferencia respecto al tamaño de la escala  $l$  obtenemos



$$\frac{u_l^3}{L} \sim \frac{u_d^3}{l_d} \quad (2.43)$$

El lado derecho de (2.43) es la tasa de disipación de energía, que es igual a la tasa de transferencia de energía debida a los términos no lineales si el sistema está en equilibrio. El número de Reynolds  $R$  del flujo, definido como  $R = \frac{u_l L}{\nu}$ , se puede introducir para obtener

$$u_l^3 = \frac{R^3 \nu^3}{L^3} \quad (2.44)$$

Por otro lado, la escala  $l_d$  está definida como aquella en la que los términos de disipación y de transferencia son comparables, es decir  $\nu k_d^2 u_d^2 \sim \frac{u_d^3}{l_d}$ , lo que nos conduce a

$$\nu \sim u_d l_d,$$

relación que tomada junto con (2.44) al sustituir en (2.43) produce  $\frac{R^3 \nu^3}{L^3} \sim \frac{\nu^3}{l_d^3}$ , de lo que se sigue inmediatamente que

$$\frac{L}{l_d} \sim R^{\frac{2}{3}} \quad (2.45)$$

Podemos entonces estimar el intervalo de escalas excitadas en el flujo. Para estimar el número de grados de libertad  $N$  de nuestro flujo turbulento en términos del número de Reynolds solo tenemos que saber cual es la dimensión del flujo. Para turbulencia 3D el número de grados de libertad está dado por

$$N \sim R^{\frac{3}{2}} \quad (2.46)$$

De manera enteramente análoga, se pueden obtener los resultados para flujos 2D, sustituyendo la cascada de energía por una de eustrofia  $k_l^2 u_l^2$ . De esta manera se obtiene:

$$E(k) \sim \eta^2 k^{-1} \quad (2.47a)$$

donde  $\eta$  es la tasa de transferencia de eustrofia, y

$$N \sim R^{\frac{1}{2}} \quad (2.47b)$$

El espectro (2.47a) fué obtenido por Kraichnan (1967) para un régimen en equilibrio de transferencia de enstrofia en un flujo 2D incompresible.

### 2.7) Dirección de las cascadas en 2D.

Análíticamente, la dirección de las cascadas no se ha establecido de manera formal, sino que sólo se han presentado sugerencias. Kraichnan (1967), trabajando directamente sobre las ecuaciones hidrodinámicas para un flujo 2D, investigó la posibilidad de espectros autosimilares con la propiedad de que las tasas de transferencia de energía  $\Pi(k)$  y de enstrofia  $Z(k)$  de números de onda menores que  $k$  a números de onda mayores que  $k$  (ver Apéndice 1) fuesen independientes de  $k$ . Encontró que para un flujo 2D existen esencialmente dos espectros con tasas de transferencia independientes de  $k$ , a saber, uno con pendiente  $-\frac{5}{3}$  con  $Z(k) \equiv 0$  y otro con pendiente  $-3$  con  $\Pi(k) \equiv 0$ . Además el signo de  $\Pi(k) = \epsilon$  en el espectro de pendiente  $-\frac{5}{3}$  es opuesto al signo de  $Z(k) = \eta$  en el espectro de pendiente  $-3$  (aquí tanto  $\epsilon$  como  $\eta$  son constantes independientes de  $k$ ). Esto nos conduce a que basta conocer la dirección de una de estas cascadas para obtener la dirección de la otra. Los argumentos para establecer la dirección de la cascada de enstrofia en el espectro de pendiente  $-3$  dados por Kraichnan (1967) consisten en la comparación de este espectro con el llamado *espectro de equilibrio absoluto*. Este último espectro se obtiene aplicando un tratamiento mecánico-estadístico a las ecuaciones hidrodinámicas sin viscosidad ni forzamiento en espacio de Fourier, cuando se establece una cota  $k_{\max}$  para los números de onda, y los modos con  $k > k_{\max}$  son suprimidos. El espectro de enstrofia de equilibrio absoluto en 2 dimensiones es de la forma  $\Omega(k) = \frac{k^\alpha}{\alpha k^\alpha + \beta}$ , donde  $\Omega(k)$  es la enstrofia por unidad de número de onda y  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes que dependen de la energía y la enstrofia totales presentes en el flujo (conservadas por los términos no lineales). Claramente  $\Omega(k) \rightarrow \frac{k^\alpha}{\alpha}$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Entonces en el espectro de enstrofia asociado al espectro de pendiente  $-3$  hay una sobreexcitación en números de onda pequeños y un déficit de enstrofia en números de onda grandes con respecto al espectro de enstrofia del equilibrio absoluto. Esto sugiere que debe establecerse una transferencia de enstrofia hacia los números de onda más grandes. El problema con este argumento es que se aplica también a la transferencia de energía sobre el espectro de pendiente  $-\frac{5}{3}$ , aunque el déficit de energía en números de onda grandes es menos importante.

Otro argumento es el basado en el llamado teorema de Fjortoft (ver e.g., Lesieur 1990). Este teorema dice que en un sistema idealizado con sólo 3 modos  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ ,  $p < q < k$ , y en el que inicialmente sólo el modo intermedio  $\mathbf{q}$  contiene energía, los términos de transferencia implican que el modo  $\mathbf{p}$  recibe más energía, mientras que el modo  $\mathbf{k}$  recibe más enstrofia. El problema con esta línea de argumentación es que el teorema de Fjortoft supone que los tres modos  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  son paralelos, y en este caso los factores geométricos de

la forma  $u_k \cdot p$  en los términos de transferencia  $T(k|p, q)$  son cero (ver la ecuación (2.33b)) junto con la condición de incompresibilidad en Fourier). Por otro lado, si se escogen modos  $k$ ,  $p$  y  $q$  no paralelos entre sí, entonces es posible encontrar triadas  $k = p + q$  tales que se contradice el teorema de Fjortoft. Sin embargo, es plausible que estos casos sean excepcionales.

Son sobre todo las simulaciones numéricas y los estudios estadísticos utilizando teorías de cerradura (Herring et al 1974) los que proporcionan evidencia de que efectivamente en los flujos 2D la transferencia de enstrofia sobre el espectro de pendiente  $-3$  es hacia modos grandes, mientras que la transferencia de energía sobre el espectro de pendiente  $-\frac{5}{3}$  es hacia modos pequeños. De la discusión anterior se establece entonces que en los flujos 2D existe un régimen de transferencia de enstrofia con pendiente  $-3$  hacia escalas pequeñas y alternativamente un régimen de transferencia de energía con pendiente  $-\frac{5}{3}$  hacia las escalas grandes.

## CAPITULO 3.

### MODELOS ESCALARES.

#### 3.1) Utilidad de los modelos escalares en el estudio de fenómenos de la Turbulencia.

Los modelos escalares son versiones simplificadas de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica del flujo de los fluidos. Estos modelos, introducidos por Lorenz (1971), han sido utilizados en el estudio de ciertos fenómenos específicos de la turbulencia: equilibrios autosimilares (Obukhov, 1971; Desniansky y Novikov, 1972); regímenes de transferencia en equilibrio autosimilar, de energía y entropía en flujos 2D hidrodinámicos (Gledzer, 1973); extensión de estos estudios a la turbulencia magnetohidrodinámica (Gloaguen et al, 1985); estudio de integrales cúbicas de movimiento en el caso unidimensional, representado por la ecuación de Burgers (Kerr y Siggia, 1978); estudio de atractores en turbulencia 2D y 3D y distribución de los exponentes de Lyapunov en el interior de los atractores (Yamada y Ohkitani, 1987); estudio de soluciones dependientes del tiempo y dependencia de los parámetros de transferencia de cantidades cuadráticas con respecto a la dimensionalidad del flujo (Bell y Nelkin, 1977, 1978); equilibrios estadísticos de la turbulencia totalmente desarrollada (Qian, 1988); correcciones a la teoría clásica de Kolmogorov debido a los fenómenos de intermitencia (Jensen y Paladin, 1991), etcétera. En este capítulo describiremos y analizaremos los modelos de Desniansky-Novikov y Obukhov y el modelo de Gledzer ya que son la base de los desarrollos posteriores aquí expuestos.

#### 3.2) Modelo Escalar de Desniansky y Novikov.

El modelo escalar de Desniansky y Novikov (1974, abreviado DN) es una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes, y consiste en sustituir el gran número de grados de libertad (o modos) de éstas (los vectores de onda de Fourier  $\mathbf{k}$ ) por un conjunto menor de modos que representen a los anteriores. Se llama escalar, porque en lugar de los vectores de onda  $\mathbf{k}$  aparecen escalares representativos  $k_i$  y en lugar de las amplitudes de Fourier  $u_{\mathbf{k}}$  aparecen *amplitudes* representativas escalares  $u_i$ . Genéricamente denotaremos a los conjuntos de las  $k_i$ 's y las  $u_i$ 's como  $\{k_i\}$  y  $\{u_i\}$  respectivamente. Estos escalares se introducen de la siguiente manera:

i) Los vectores de Fourier  $\mathbf{k}$  se pueden interpretar como radio vectores de un espacio cartesiano de tres o dos dimensiones (según la dimensión del flujo). Suponiendo un flujo

con condiciones a la frontera periódicas, el espectro de vectores de onda es estrictamente discreto. Estos vectores tienen todas sus componentes enteras, y sus puntas forman una cuadrícula del espacio cartesiano. En el modelo de DN se trata de reducir fuertemente los grados de libertad del flujo y de cubrir un gran intervalo de escalas con pocos modos escalares. Ellos dividieron entonces el espacio de Fourier en cáscaras esféricas contradas en el origen, la más pequeña con radio medio  $k_0$ , y comprendiendo radio vectores con magnitudes en el intervalo  $(k_0 h^{-1/2}, k_0 h^{1/2})$ . En general, la cáscara  $i$ -ésima está definida por el intervalo  $(k_i h^{-1/2}, k_i h^{1/2})$ , con  $k_i = h^i k_0$ . Así pues, este modelo reduce dramáticamente los grados de libertad, ya que en lugar de todos los vectores de onda contenidos en la cáscara  $i$ -ésima, en el sistema dinámico escalar de DN aparece la magnitud  $k_i$ . Se desprecian las direcciones de los vectores de onda, y cada cáscara está representada por sólo una magnitud escalar.

Usualmente se elige la razón geométrica  $h$  como 2. Aunque en principio esta elección es totalmente arbitraria (fuera de que  $h$  tiene que ser mayor que 1), ocurre que en ecuaciones unidimensionales parecidas a las de Navier-Stokes la energía se transfiere de un modo de tamaño  $k$  a un modo de tamaño  $2k$  como se argumenta en el Apéndice II. Por esta razón, la razón  $h = 2$  se antoja como un valor natural.

ii) Con respecto a las amplitudes escalares  $u_i$ , notemos que cada vector  $\mathbf{k}$  tiene asociada una energía  $\frac{|u_{\mathbf{k}}|^2}{2}$  de modo tal que la suma de estas energías es igual a la energía total

$$\int \frac{u^2}{2} dV = \sum_{\mathbf{k}} \frac{|u_{\mathbf{k}}|^2}{2}$$

en donde se ha utilizado el Teorema de Parseval para variables complejas.

La cantidad de energía contenida dentro de la cáscara  $i$ -ésima  $C_{(i)}$  está dada por  $\sum_{\mathbf{k} \in C_{(i)}} \frac{|u_{\mathbf{k}}|^2}{2}$ . Así pues, se define a las  $u_i$ 's por la relación

$$u_i = \sqrt{\sum_{\mathbf{k} \in C_{(i)}} |u_{\mathbf{k}}|^2}$$

lo cual implica que en el modelo DN las  $u_i$ 's son siempre positivas. Más adelante se verá que esta elección limita las posibilidades del modelo para reproducir otras características básicas de las ecuaciones de Navier-Stokes, la más importante de éstas es la condición de Liouville. Por esta razón, otros modelos (por ejemplo, los modelos de Gledzer (1974) y de Gloaguen et al (1985)), incluído el que se desarrolla en el capítulo 4 de este trabajo, interpretan las  $u_i$ 's como amplitudes de Fourier representativas, que pueden tomar tanto

valores positivos como negativos. En principio, incluso, se podría considerar a las  $\{u_i\}$  como cantidades complejas (como hacen, por ejemplo, Kerr y Siggia (1978)).

Con las definiciones anteriores, DN construyen su modelo de la siguiente manera. La idea básica es copiar a "grosso modo" la estructura de las ecuaciones de Navier-Stokes; de modo que en el modelo aparezcan el mismo tipo de acoplamientos no lineales. Además de esto es importante que el modelo conserve las cantidades cuadráticas que se conservan en un flujo regido por Navier-Stokes. Consideremos las ecuaciones de Navier-Stokes no forzadas y sin disipación (o ecuaciones de Euler)

$$\frac{du_k}{dt} = -i \sum_p \left\{ ((k-p) \cdot u_p) u_{k-p} - \frac{k}{k^2} ((k-p) \cdot u_p) (p \cdot u_{k-p}) \right\}, \quad (3.1)$$

en donde se usó sobre la ecuación (2.27) del capítulo 2 la condición de incompresibilidad  $k \cdot u_k = 0$ . En esta ecuación las interacciones que aparecen son por triadas de vectores de onda y no existe restricción en cuanto a la interacción entre escalas ampliamente separadas. Sin embargo, debido al resultado antes mencionado de que la energía se transfiere preferentemente de modos de tamaño  $k$  a modos de tamaño  $2k$ , en el modelo DN se consideran únicamente interacciones entre cáscaras vecinas, tomando  $h = 2$ . En otras palabras el sistema dinámico sin disipación (modelo escalar) tiene la forma

$$\frac{du_i}{dt} = f(u_i, u_{i-1}, u_{i+1}).$$

Consideremos la suma que aparece en la ecuación (3.1) restringida a los valores escalares  $p = k_{i-1}$ ,  $p = k_i$  y  $p = k_{i+1}$ . Con el primer valor  $p = k_{i-1}$  obtenemos un término de la forma  $\alpha k_i u_{i-1}^2$ , en donde el valor de  $\alpha$  se introduce para sustituir los coeficientes geométricos de la ecuación original (3.1). El valor  $p = k_i$  produce cero ya que en el argumento de la suma tenemos  $k - p$  que se convierte en  $k_i - k_i = 0$ . Por último el valor  $p = k_{i+1}$  produce un término de la forma  $\beta k_i u_{i+1} u_i$ , en donde  $\beta$  juega el mismo papel que  $\alpha$  arriba. Obtenemos, por lo tanto

$$\frac{du_i}{dt} = \alpha k_i u_{i-1}^2 + \beta k_i u_{i+1} u_i. \quad (3.2)$$

En esta ecuación  $\alpha$  y  $\beta$  no dependen de  $i$  ya que un par de cáscaras vecinas con radios relativamente pequeños y un par de cáscaras vecinas con radios más grandes tienen, en cuanto a ángulos entre vectores se refiere, la misma estructura, y  $\alpha$  y  $\beta$  sólo dependen de estos ángulos.

Consideraremos ahora la conservación de invariantes cuadráticos. En general, definimos al invariante cuadrático de orden  $m$  como:

$$I^{(m)} = \sum_i k_i^m \frac{u_i^2}{2}.$$

Es claro que  $I^{(0)}$  es la energía  $E = \sum_i u_i^2/2$  e  $I^{(2)}$  es la enstrofia  $\Omega = \sum_i k_i^2 u_i^2/2$ . Por analogía con el papel de los coeficientes geométricos en la ecuación original, tomemos  $\alpha$  y  $\beta$  de forma tal que la cantidad  $I^{(m)}$  se conserve. (Recuérdese que la conservación de estas cantidades se da por la relación que satisfacen los términos de transferencia  $T(\mathbf{k}|\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , que a su vez están dados en términos de los coeficientes geométricos de las ecuaciones (capítulo 2, ecuaciones (2.33b) y (2.35)). Así pues, escribimos

$$\begin{aligned} \frac{dI^{(m)}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i k_i^m \frac{u_i^2}{2} \right) = \sum_i \alpha k_i^{m+1} u_{i-1}^2 u_i + \sum_i \beta k_i^{m+1} u_{i+1} u_i^2 = \\ &= \alpha \sum_i k_i^{m+1} u_{i-1}^2 u_i + \frac{\beta}{2^{m+1}} \sum_i k_{i+1}^{m+1} u_{i+1} u_i^2 = \\ &= \left[ \alpha + \frac{\beta}{2^{m+1}} \right] \sum_i k_{i+1}^{m+1} u_i^2 u_{i+1} = 0. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se sigue que

$$\beta = -\alpha 2^{m+1}$$

Renombremos  $\alpha$  como  $\alpha_s^{(m)}$  en donde el índice  $m$  corresponde al de la cantidad  $I^{(m)}$  y  $s$  indica la dimensión del flujo. Entonces el modelo escalar queda como

$$\frac{du_i}{dt} = \alpha_s^{(m)} k_i u_{i-1}^2 - \alpha_s^{(m)} 2^{1+m} k_i u_{i+1} u_i. \quad (3.3)$$

En el caso más general de  $h$  arbitraria ( $h > 1$ ), tenemos

$$\frac{du_i}{dt} = \alpha_s^{(m)} k_i u_{i-1}^2 - \alpha_s^{(m)} h^{1+m} k_i u_{i+1} u_i. \quad (3.4)$$

que es la forma más general del modelo escalar de DN para flujos no viscosos.

En este modelo la cantidad de energía transferida por unidad de tiempo de la cáscara  $(i-1)$ -ésima a la  $i$ -ésima está dada por

$$T_s^{(m)} = \alpha_s^{(m)} k_i^{1+m} u_{i-1}^2 u_i, \quad (3.5)$$

lo cual implica que la dirección de transferencia en el espectro de las escalas de movimiento de la cantidad  $I^{(m)}$ , *cascada de la cantidad  $I^{(m)}$* , depende del signo de  $\alpha_s^{(m)}$ . Se dice que una cascada es *directa* si  $T_s^{(m)} > 0$  para todo valor de  $i$ , e *inversa* en caso contrario. Por lo tanto, encontramos que pueden darse los siguientes casos.

2D:  $\alpha_2^{(0)} < 0$       *Transferencia de energía de las escalas más pequeñas a las más grandes, cascada inversa.*

2D:  $\alpha_2^{(2)} > 0$       *Transferencia de entropía de las escalas más grandes a las más pequeñas, cascada directa.*

3D:  $\alpha_3^{(0)} > 0$       *Transferencia de energía de las escalas más grandes a las más pequeñas, cascada directa.*

### 3.3) Puntos Fijos del Modelo Escalar DN.

Igualando a cero la ecuación  $i$ -ésima del sistema para obtener un punto fijo (3.4):

$$\alpha_s^{(m)} k_i u_{i-1}^2 - \alpha_s^{(m)} h^{1+m} k_i u_{i+1} u_i = 0. \quad (3.6)$$

Esto se verifica para el intervalo inercial de números de onda. Proponemos para el intervalo inercial una solución del tipo

$$u_i = A_s^{(m)} k_i^\sigma \quad (3.7)$$

buscando que esta estructura sea de equilibrio, es decir que mantenga todos los modos del intervalo inercial estacionarios. Entonces, de las ecuaciones (3.6) y (3.7) obtenemos

$$k_i k_{i-1}^{2\sigma} = h^{1+m} k_i k_{i+1}^\sigma k_i^\sigma,$$

de donde

$$\frac{k_i^{2\sigma+1}}{h^{2\sigma}} = h^{1+m} k_i^\sigma k_i^{2\sigma+1}$$

y por lo tanto

$$h^{3\sigma+m+1} = 1$$



o bien

$$\sigma = -\frac{1+m}{3}. \quad (3.8)$$

Entonces la solución

$$u_i = A_s^{(m)} k_i^{-1+m} \quad (3.9)$$

es de equilibrio.

Consideremos ahora el término de transferencia del modo  $(i-1)$ -ésimo al modo  $i$ -ésimo

$$T_s^{(m)}{}_i = \alpha_s^{(m)} k_i^{1+m} u_{i-1}^2 u_i,$$

y evaluémoslo en el estado de equilibrio (3.9), para obtener

$$T_s^{(m)}{}_i = \alpha_s^{(m)} A_s^{(m)3} k_i^{1+m} \frac{k_i^{-2(1+m)}}{h^{-2(1+m)}} k_i^{-1+m} = \alpha_s^{(m)} A_s^{(m)3} h^2 (1+m)$$

que en este caso no depende de  $i$ , lo que es natural porque para que los modos del intervalo inercial permanezcan estacionarios es necesario que la energía que entra a cada modo sea la misma que la que sale en la unidad de tiempo. Por esta razón, omitiremos el subíndice "i" del término de transferencia, denotándolo simplemente por  $T_s^{(m)}$ . Así pues,  $T_3^{(0)}$  es la tasa de transferencia de energía en general ( $s=2,3$ ) y  $T_2^{(2)}$  es la tasa de transferencia de entropía en un flujo 2D.

Aunque en el modelo escalar de DN aparecen los modos discretizados  $k_i$ , podemos sin embargo extender la forma funcional  $T_s^{(m)}$  al caso de una variable de número de onda  $k$  continua. Así pues, definimos el espectro de energía  $E(k)$  como la densidad de energía por unidad de número de onda  $k$ . Se sigue que  $E(k)dk$  es la cantidad de energía contenida en una cáscara esférica de radio  $k$  y de grosor diferencial  $dk$ . Si  $E(k)$  es de la forma  $E(k) = Bk^\lambda$ , se dice que es un *espectro de energía autosimilar*, ya que es invariante frente a cambios de escala  $k \rightarrow ck$ , con  $c$  una constante arbitraria. Nótese que el punto fijo (3.9) también es autosimilar. Así pues, es posible proponer una forma autosimilar para el espectro de energía, y encontrar su relación con la pendiente del punto fijo autosimilar (PFAS) (3.9). Tenemos entonces que

$$\frac{n_i^2}{2} = \int_{k_i h^{-1}}^{k_i h^{\frac{1}{2}}} E(\kappa) d\kappa, \quad (3.10)$$

y dado que  $\frac{n_i^2}{2} = \frac{A_s^{(m)2}}{2} k_i^{-\frac{2}{3}(1+m)}$  se sigue que

$$\begin{aligned} A_s^{(m)2} k_i^{-\frac{2}{3}(1+m)} &= 2 \int_{k_i h^{-1}}^{k_i h^{\frac{1}{2}}} B \kappa^\lambda d\kappa = 2B \left[ \frac{\kappa^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right]_{k_i h^{-1}}^{k_i h^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{2B}{\lambda+1} \left[ k_i^{\lambda+1} h^{\frac{\lambda+1}{2}} - k_i^{\lambda+1} h^{-\frac{\lambda+1}{3}} \right] = \frac{2B}{\lambda+1} (h^{\lambda+1} - h^{-\frac{\lambda+1}{3}}) k_i^{\lambda+1}, \end{aligned}$$

de donde

$$-\frac{2}{3}(1+m) = \lambda + 1$$

o bien

$$\lambda = -\frac{5+2m}{3} \quad E(k) = Bk^{-\frac{5+2m}{3}} \quad (3.11)$$

en donde

$$B = \frac{A^2(1+m)}{3(h^{\frac{1}{3}(1+m)} - h^{-\frac{1}{3}(1+m)})},$$

y los subíndices de  $A$  y  $B$  han sido omitidos.

Cuando no aparecen los términos de disipación y de forzamiento, el sistema dinámico (3.4) conserva la cantidad  $I^{(m)}$ . Esta es la única cantidad cuadrática conservada y debido a esto el sistema acepta un sólo punto fijo autosimilar en el intervalo inercial de la forma (3.9). *Hay entonces una correspondencia entre cantidades conservadas y equilibrios del intervalo inercial autosimilares.* El espectro de energía (3.11) corresponde a un régimen estacionario de transferencia de la cantidad cuadrática  $I^{(m)}$ . Es decir, la conservación de  $I^{(m)}$  impone la existencia de un equilibrio autosimilar para el intervalo inercial cuya *pendiente espectral es  $-\frac{5+2m}{3}$* . Cuando  $m = 0$ ,  $I^{(0)}$  es la energía y la pendiente espectral es  $-\frac{5}{3}$ , obteniéndose el conocido espectro de Kolmogorov (1941). Para  $m = 2$  tenemos conservación de la enstrofia y (3.9) es un equilibrio autosimilar con pendiente espectral  $-3$ , sugerido por primera vez por Kraichnan (1967). En este caso tenemos un régimen estacionario de cascada de enstrofia, mientras que en el anterior se tiene un régimen estacionario de cascada de energía.

### 3.4) Punto Fijo del Modelo de DN Forzado.

Escribamos explícitamente el sistema dinámico de DN asumiendo que el único modo forzado es el primero y que el intervalo inercial empieza en el segundo modo. Además supondremos que el único modo que disipa es el último. Estas suposiciones son razonables ya que modos con número de onda más grandes prácticamente no son excitados cuando hay disipación. La fuerza externa que se aplica sobre el primer modo puede ser visualizada como una fuente de energía mientras que el término disipativo de la última ecuación proporciona un sumidero de energía. Supondremos que el sistema dinámico empieza en  $i = 1$ . Con todas estas hipótesis las ecuaciones del modelo son

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= -\alpha k_1 h^{1+m} u_1 u_2 + f_1 \\ \frac{du_i}{dt} &= \alpha [u_{i-1}^2 - h^{1+m} u_i u_{i+1}] \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \frac{du_n}{dt} &= \alpha k_n u_{n-1}^2 - \nu k_n^2 u_n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Las ecuaciones intermedias conforman precisamente el intervalo inercial de (3.12). Para el sistema reducido en el que se omiten la primera y la última ecuaciones tenemos un punto fijo de la forma (3.9), es decir que satisface

$$\frac{u_i}{u_1} = \frac{k_i^{-\frac{1+m}{3}}}{k_1^{-\frac{1+m}{3}}} = h^{-\frac{(1+m)(i-1)}{3}} \quad (3.13)$$

para todo  $i$ .

Supongamos un punto  $v_i$  del espacio fase del sistema dinámico que no satisface (3.13) pero que es también un punto fijo de (3.12). Dado que para el punto fijo (3.9) se satisface la condición (3.13), se tiene que  $\frac{1}{3}(i-1)(1+m) + \log_h(u_i v_i^{-1}) = 0$ . Una medida de qué tan separado está  $v_i$  de  $u_i$  está dada por

$$\psi_i = \frac{1}{3}(i-1)(1+m) + \log_h(v_i v_i^{-1}). \quad (3.14)$$

Las  $\psi_i$ 's definen entonces desviaciones del punto fijo autosimilar (3.13). Como (3.14) se cumple para cada  $i$  tenemos que

$$\psi_{i+1} + \psi_{i+2} = \frac{1}{3}(2i+1)(1+m) + \log_h(v_{i+1} v_{i+2} v_i^{-2}). \quad (3.15)$$

Si  $v_i$  es un punto fijo de (3.12) tenemos que  $h^{-1-m}v_i^2v_1^{-2} = v_{i+1}v_{i+2}v_1^{-2}$ , lo que produce en (3.15)

$$\begin{aligned}\psi_{i+1} + \psi_{i+2} &= \frac{1}{3}(2i+1)(1+m) + \log_h(h^{-1-m}v_i^2v_1^{-2}) = \\ &= \frac{1}{3}(2i+1)(1+m) + \log_h(h^{-1-m}) + \log_h(v_iv_1^{-1})^2 = \\ &= \frac{2}{3}(i-1)(1+m) + 2\log_h(v_iv_1^{-1}) = 2\psi_i.\end{aligned}$$

Resumiendo, hemos obtenido la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$\psi_{i+1} + \psi_{i+2} = 2\psi_i \quad (3.16)$$

y hemos visto que resolverla es equivalente a encontrar un punto fijo, no necesariamente autosimilar, del sistema dinámico DN forzado (3.12). Las ecuaciones en diferencias del tipo de (3.16) se resuelven en forma muy similar a como se resuelve una ecuación diferencial lineal homogénea. El polinomio característico de (3.16) es

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\text{o bien } (\lambda+2)(\lambda-1) = 0,$$

por lo tanto  $\lambda_1 = -2$  y  $\lambda_2 = 1$  son las dos raíces del polinomio característico. Las dos soluciones linealmente independientes de (3.16) son  $(-2)^i$  y  $1^i = 1$ .<sup>1</sup> La solución general a (3.16) está dada por la combinación lineal más general de las dos soluciones encontradas

$$\psi_i = a + b(-2)^i. \quad (3.17)$$

Para determinar por completo a las  $\psi_i$ 's, necesitamos dos condiciones a la frontera, ya que la ecuación en diferencias es de segundo orden. En primer lugar, sustituyendo  $i = 1$  en (3.14) obtenemos que  $\psi_1 = 0$ . Por otro lado,

<sup>1</sup> Nótese que aquí " $i$ " denota el índice de la ecuación en diferencias y no debe confundirse con la unidad imaginaria.

$$\begin{aligned}
\psi_{n-1} &= \frac{1}{3} (n-2)(1+m) + \log_h(v_{n-1}v_1^{-1}) = \\
&= \frac{1}{3} (n-2)(1+m) + \frac{1}{2} \log_h(v_{n-1}^2 v_1^{-2}) = \\
&= \frac{1}{3} (n-2)(1+m) + \frac{1}{2} \log_h\left(\frac{\nu k_n v_n}{\alpha} v_1^{-2}\right) = \\
&= \frac{1}{3} (n-2)(1+m) + \frac{1}{2} \log_h\left(\frac{\nu h^{n-1} k_1 v_n}{\alpha} v_1^{-2}\right) = \\
&= \frac{1}{3} (n-2)(1+m) + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2} \log_h(\nu k_1 \alpha^{-1} v_1^{-1}) + \frac{1}{2} \log_h(v_n v_1^{-1})
\end{aligned}$$

en donde se usó que

$$\alpha k_n v_{n-1}^2 = \nu k_n^2 v_n.$$

Además, puesto que  $\psi_n = \frac{1}{3}(n-1)(1+m) + \log_h(v_n v_1^{-1})$ , obtenemos finalmente

$$2\psi_{n-1} - \psi_n = \frac{(4+m)n}{3} - 2 - m - \log_h R \quad (3.18)$$

donde  $R = \frac{1}{\nu k_1 \alpha^{-1} v_1^{-1}}$  es el número de Reynolds del modelo. Llamaremos  $\gamma_n$  al lado derecho de la ecuación (3.18).

Resumiendo, las dos condiciones a la frontera están dadas por

$$\psi_1 = 0, \quad 2\psi_{n-1} - \psi_n = \gamma_n,$$

imponiendo esto sobre la solución (3.17) de (3.16) obtenemos

$$\psi_1 = a - 2b = 0, \quad a = 2b$$

$$2\psi_{n-1} - \psi_n = \gamma_n, \quad 2a + (-2)^{n-1}2b = \gamma_n + a + (-2)^n b$$

$$a - (-2)^n b = \gamma_n + (-2)^n b, \quad a - (-2)^n 2b = \gamma_n$$

$$a = 2b = \frac{\gamma_n}{(1 - (-2)^n)}. \quad (3.19)$$

Entonces la solución del problema se obtiene substituyendo (3.19) en (3.17), lo que produce

$$\psi_i = a \left( 1 + \frac{(-2)^i}{2} \right) = \gamma_n (1 - (-2)^n)^{-1} (1 - (-2)^{i-1}).$$

Por último, recordando la definición de  $\psi$ , obtenemos

$$\psi_i = \frac{1}{3}(i-1)(1+m) + \log_h(v_i v_1^{-1}) = \gamma_n \frac{(-2)^{i-1} - 1}{(-2)^n - 1}$$

$$\log_h(v_i v_1^{-1}) = \frac{1}{3}(i-1)(1+m) + \gamma_n \frac{(-2)^{i-1} - 1}{(-2)^n - 1} \equiv \chi, \quad (3.20)$$

por lo tanto

$$v_i v_1^{-1} = h^\chi \quad v_i = v_1 h^\chi \quad (3.21)$$

donde  $\chi$  está definida por (3.20). Nótese que el punto fijo así obtenido (3.21) no es autosimilar, ya que  $\chi$  depende de  $i$ . Sin embargo, cuando  $n$  tiende a infinito para valores de  $i$  fijos,  $\chi$  tiende a  $\frac{1}{3}(i-1)(1+m)$ , lo que produce que el intervalo inercial tienda a un espectro de energía con pendiente  $\frac{5+2m}{3}$ .

### 3.5) Modelo a Primeros Vecinos de Obukhov.

Estudiaremos ahora otro modelo escalar a primeros vecinos muy parecido al modelo de DN, propuesto por Obukhov (1974). Brevemente revisaremos este modelo para después proceder a construir un modelo más general, también a primeros vecinos, y que comprende a los modelos de DN y de Obukhov como casos particulares.

El sistema dinámico de Obukhov tiene la forma

$$\frac{du_i}{dt} = \alpha k_i u_{i-1} u_i - \beta k_i u_{i+1}^2.$$

El hecho de que en cada término aparece  $k$ , como factor expresa una condición de autosimilitud sobre el modelo. Esta condición, también satisfecha por el modelo de DN, será usada más adelante para construir modelos escalares con un intervalo de interacciones más amplio. Si en el modelo Obukhov determinamos los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  de modo que se conserve la cantidad cuadrática  $I^{(m)}$  de manera análoga a lo que hicimos para el modelo DN, el modelo de Obukhov queda como <sup>2</sup>

$$\frac{du_i}{dt} = \alpha k_i [u_{i-1} u_i - h^{1+m} u_{i+1}^2] - \nu \beta k_i^2 u_i + F_i \delta_{i1} \quad (3.22)$$

Aquí se han añadido los términos de disipación y forzamiento, suponiendo también que sólo el primer modo está sujeto a forzamiento. Una diferencia sustancial de este modelo con el de DN radica en que cuando no aparecen los términos de disipación y forzamiento admite un equilibrio donde el único modo excitado es el primero. Es decir, se mantiene un equilibrio sin que la energía sea transferida a las escalas más pequeñas; el modelo DN no admite una solución así. En forma más general, si los primeros  $l-1$  modos están excitados y forzados con términos  $F_j$  no nulos ( $j < l$ ), y los modos restantes no están excitados ni forzados ( $u_m = F_m = 0$  para  $m \geq l+1$ ), entonces la energía se acumula en los primeros  $l$  modos sin que sea transferida a las escalas más pequeñas. Esto constituye una limitación del modelo Obukhov para representar cascadas de cantidades cuadráticas.

### 3.6) Puntos Fijos en el modelo de Obukhov.

Un análisis enteramente análogo al de la sección 3.2 muestra que los PFASAs del modelo Obukhov exactamente son de la misma forma que los del modelo de DN, ecuación (3.9). Así mismo los puntos fijos no autosimilares son también de la forma

$$v_i = v_1 h^{\lambda_i},$$

donde  $\lambda_1 = \frac{(1+m)(1-1)}{1} + \gamma_m \frac{1 - (-\frac{1}{h})^{1+m}}{1 - (-\frac{1}{h})^{1+m}}$  y  $\gamma_m = \nu(1+m)/3 - (5+2m)/3 - \log_h R$ . Nótese que DN sugieren que estos puntos fijos no autosimilares probablemente no son estables.

### 3.7) Generalización de los Modelos a Primeros Vecinos.

<sup>2</sup> Originalmente Obukhov construyó un modelo menos general que sólo conservaba la energía para atacar la Turbulencia en 3 dimensiones.

A continuación estudiaremos un modelo escalar más general para Turbulencia incompresible a primeros vecinos, introducido también por DN. Los modelos de DN y de Obukhov pueden ser conjuntados para obtener un modelo escalar que reúna todos los términos de acoplamiento no lineal presentes en ellos. Las hipótesis para construir este modelo son las mismas que las de Obukhov y DN. En primer lugar, los términos no lineales son cuadráticos, existe una condición de autosimilitud sobre las ecuaciones del modelo, y se incluyen sólo interacciones a primeros vecinos. Por último, se pide que el modelo conserve la cantidad cuadrática  $J^{(m)} = \sum_i k_i^m u_i^2$ . Los requerimientos de autosimilitud y de restricción de las interacciones a los vecinos más próximos producen el siguiente modelo:

$$\frac{du_i}{dt} = k_i \{ a_1 u_{i-1}^2 + a_2 u_{i-1} u_i + a_3 u_{i-1} u_{i+1} + a_4 u_i^2 + a_5 u_i u_{i+1} + a_6 u_{i+1}^2 \}. \quad (3.23)$$

La condición de autosimilitud se expresa en que  $a_1, a_2, \dots, a_6$  tienen el mismo valor en todas las ecuaciones del modelo como se explicó en la sec. 3.2 después de la ecuación (3.2). La condición de conservación de la cantidad cuadrática  $J^{(m)}$  determina los parámetros de acoplamiento del modelo, a saber

$$a_5 = -h^{1+m} a_1 \quad a_6 = -h^{1+m} a_2 \quad a_3 = a_4 = 0.$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.23) obtenemos

$$\frac{du_i}{dt} = a_1 k_i \{ u_{i-1}^2 - h^{1+m} u_i u_{i+1} \} + a_2 k_i \{ u_{i-1} u_i - h^{1+m} u_{i+1}^2 \}. \quad (3.24)$$

Este modelo se reduce al modelo de DN cuando  $a_2 = 0$  y al de Obukhov cuando  $a_1 = 0$ . Un resultado interesante es que, invirtiendo el tiempo, cambiando la escala por medio de  $t \rightarrow -h^{1+m} t$  e intercambiando  $i-1$  por  $i+1$  e  $i+1$  por  $i-1$  (es decir, invirtiendo el orden de los modos de forma que para pasar de  $k_i$  a  $k_{i+1}$  se multiplica ahora por  $h^{-1}$ ), el modelo de DN se convierte en el de Obukhov. Es decir:

$$\frac{du_i}{d(-h^{1+m} t)} = a_1 k_i \{ u_{i+1}^2 - h^{-1-m} u_i u_{i-1} \},$$

mientras que

$$\frac{du_i}{dt} = a_1 k_i \{ u_{i-1} u_i - h^{1+m} u_{i+1}^2 \}.$$



### 3.8) Modelo Escalar de Gledzer a Segundos Vecinos.

Hemos visto que los modelos escalares a primeros vecinos no pueden tener más de una integral cuadrática de movimiento  $I^{(m)}$  para cada selección de valores de los parámetros. A cada integral cuadrática  $I^{(m)} = \sum_i k_i^m u_i^2$  le corresponde sólo un equilibrio autosimilar cuyo espectro de energía, también autosimilar, tiene una pendiente de  $-\frac{5+2m}{3}$ . Gledzer (1974) construyó un modelo con interacciones a segundos vecinos capaz de conservar simultáneamente (es decir, para los mismos valores de los parámetros) dos integrales cuadráticas del flujo. Este hecho sugiere que la ampliación del intervalo de interacción entre las escalas de movimiento permite aumentar el número de integrales cuadráticas del modelo, y por lo tanto aumentar el número de PFASs.

La prescripción para construir el modelo de Gledzer es muy similar a las de DN y de Obukhov, aunque con las siguientes diferencias i) los términos no lineales acoplan cada modo con sus dos predecesores y sus dos sucesores; es decir, el modelo de Gledzer es un modelo a *segundos vecinos*. ii) Las amplitudes escalares  $u_i$  de Gledzer se interpretan como promedios directos de las amplitudes de Fourier en las ecuaciones de Navier-Stokes, por lo que no son positivas definidas, como sucede en los modelos de DN y de Obukhov. El punto ii) arriba se sigue de que Gledzer supone que su modelo reproduce la condición de Liouville en su forma más fuerte:  $\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial u_i} = 0$ ; es decir, copia con más detalle las propiedades de las ecuaciones de Navier-Stokes que los modelos de DN y de Obukhov. Sin embargo, la forma de dividir el espacio de Fourier en cáscaras esféricas y la interpretación de los modos escalares  $k_i$  es exactamente la misma que en los dos modelos anteriores. Otra imposición al modelo también preservada por Gledzer es la condición de autosimilitud sobre las ecuaciones diferenciales del modelo, de manera que también aquí  $\frac{d u_i}{d t}$  es proporcional a  $k_i$  y los parámetros del modelo no dependen del índice  $i$ . Las interacciones entre las cáscaras son elegidas siguiendo el diagrama mnemotécnico que se muestra en la figura 1. Las anteriores hipótesis producen un modelo de la forma

$$\dot{u}_0 = C_0^{(1)} u_1 u_2 + f_0$$

$$\dot{u}_1 = C_1^{(1)} u_2 u_3 + C_1^{(2)} u_0 u_2 + f_1$$

$$\dot{u}_2 = C_2^{(1)} u_3 u_1 + C_2^{(2)} u_1 u_3 + C_2^{(3)} u_0 u_1 \quad (3.25)$$

$$\dot{u}_i = C_i^{(1)} u_{i+1} u_{i+2} + C_i^{(2)} u_{i-1} u_{i+1} + C_i^{(3)} u_{i-1} u_{i-2} - \nu k_i^2 u_i$$

donde, como siempre, el término de disipación  $-\nu k_i^2 u_i$  es despreciable en el intervalo inercial. La condición de autosimilitud sobre el sistema es  $\frac{C_i^{(1)}}{C_i^{(3)}} = \frac{k_{i+1}}{k_i} = h$ .

Requiriendo la conservación simultánea de la energía  $E = \sum \frac{1}{2} u_i^2$  y la enstrofia  $\Omega = \sum \frac{1}{2} k_i^2 u_i^2$  se obtienen las condiciones

$$C_i^{(1)} + C_{i+1}^{(2)} + C_{i+2}^{(3)} = 0 \quad k_i^2 C_i^{(1)} + k_{i+1}^2 C_{i+1}^{(2)} + k_{i+2}^2 C_{i+2}^{(3)} = 0. \quad (3.26)$$

Escribiendo todas las  $C$ 's en términos de  $C_i \equiv C_i^{(1)}$  obtenemos las relaciones

$$C_i^{(2)} = -C_{i-1} \frac{k_{i-1}^2 - k_{i+1}^2}{k_i^2 - k_{i+1}^2} \quad C_i^{(3)} = C_{i-2} \frac{k_{i-2}^2 - k_{i+1}^2}{k_{i-1}^2 - k_i^2}, \quad (3.27)$$

que producen la siguiente forma en el intervalo inercial de (3.25)

$$\dot{u}_i = C_i u_{i+1} u_{i+2} - C_{i-1} \frac{k_{i-1}^2 - k_{i+1}^2}{k_i^2 - k_{i+1}^2} u_{i-1} u_{i+1} + C_{i-2} \frac{k_{i-2}^2 - k_{i+1}^2}{k_{i-1}^2 - k_i^2} u_{i-1} u_{i-2}. \quad (3.28)$$

La condición de autosimilitud impuesta por Gledzer a su modelo es  $\frac{C_i}{C_{i-1}} = \frac{k_i}{k_{i-1}} = h > 1$ . Por otro lado, la forma en que las cáscaras esféricas fueron construídas produce

$$\frac{k_{i-1}^2 - k_{i+1}^2}{k_i^2 - k_{i+1}^2} = \frac{k_{i-1}^2}{k_i^2} \frac{1 - h^2}{1 - h^2} = \frac{1 + h^2}{h^2}$$

$$\frac{k_{i-2}^2 - k_{i+1}^2}{k_{i-1}^2 - k_i^2} = \frac{k_{i-2}^2}{k_{i-1}^2} \frac{1 - h^2}{1 - h^2} = \frac{k_{i-2}^2}{k_{i-1}^2} = \frac{1}{h^2}$$

por lo tanto, haciendo  $C_i = \gamma$ , el intervalo inercial del modelo Gledzer queda como

$$\dot{u}_i = k_i \left[ \gamma u_{i+1} u_{i+2} - \gamma \frac{1 + h^2}{h^2} u_{i-1} u_{i+1} + \gamma \frac{1}{h^2} u_{i-1} u_{i-2} \right]. \quad (3.29)$$

Estudiaremos ahora los equilibrios autosimilares para el intervalo inercial. Es decir los puntos en el espacio fase de las  $u_i$ 's que anulan el lado derecho de (3.29) y que satisfacen  $\frac{\dot{u}_i}{u_i} = \mu$ , donde  $\mu$  es constante. En particular, veremos si admite el K11 y el K67 (los PFASs de Kolmogorov y de Kraichnan, respectivamente; ver capítulo 1) como puntos fijos.

### 3.9) Búsqueda de PFAS en el Modelo de Gledzer.

Igualemos a cero el lado derecho de las ecuaciones (3.29), suponiendo autosimilitud sobre las  $u_i$ 's, y dividiendo entre  $u_{i-2}u_{i-1}$ , obtenemos

$$\mu^6 - \frac{1+h^2}{h^3} \mu^3 + \frac{1}{h^3} = 0 \quad (3.30)$$

que es una ecuación de grado 6 en  $\mu = \frac{u_i}{u_{i-1}}$ . Las soluciones de esta ecuación son

$$h^{-1}, h^{-1}, \frac{(-1)^{\frac{1}{3}}}{h}, \frac{(-1)^{\frac{2}{3}}}{h}, \frac{(-1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}, \frac{(-1)^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}$$

Ahora bien, dado que  $\frac{u_i}{u_0} = \mu^i$ , las raíces del polinomio (3.30)  $h^{-1}$  y  $h^{-1}$  producen en un caso  $u_i = h^{-1}u_0$  y en el otro  $u_i = h^{-i}u_0$ . Si escribimos  $u_0 = \Lambda k_0^{-1}$  se obtiene en el primer caso el K41

$$u_i = \Lambda h^{-i} k_0^{-1} = \Lambda k_i^{-1} \quad (3.31)$$

y en el segundo caso el K67

$$u_i = 3h^{-i} k_0^{-1} = 3k_i^{-1} \quad (3.32)$$

Como vimos en los párrafos anteriores, la solución (3.31) produce un espectro energético con pendiente de  $-\frac{5}{3}$ , mientras que (3.32) produce un espectro energético con pendiente  $-3$ . El primer espectro corresponde a un régimen de transferencia de energía, mientras que el segundo corresponde a un régimen de transferencia de entropía. Demostraremos ahora que cuando la pendiente del espectro es  $-\frac{5}{3}$  no hay transferencia de entropía. Consideremos el sistema en el régimen de equilibrio K41  $\frac{u_i}{u_{i-1}} = h^{-1}$  y los primeros dos modos mantenidos en equilibrio por forzamiento externo. Entonces obtenemos las siguientes relaciones para los primeros modos

$$\dot{u}_0 = k_0 \gamma u_1 u_2 + f_0 = 0$$

$$\dot{u}_1 = k_1 \gamma u_2 u_3 - k_1 \gamma \frac{(1+h^2)}{h^3} u_0 u_2 + f_1 = 0$$

por lo tanto, la transferencia de entropía en este régimen está dada por

$$W_{\Omega}^{(0)} \equiv \int_0 k_0 u_0 + \int_1 k_1 u_1 = -k_0^3 \gamma u_0 u_1 u_2 - k_1^3 \gamma u_2 u_3 u_4 + k_1^3 \gamma \frac{(1+h^2)}{h^3} u_0 u_1 u_2 =$$

$$-k_0^3 \gamma [u_0 u_1 u_2 + h^3 u_1 u_2 u_3 - (1+h^2) u_0 u_1 u_2] = -k_0^3 \gamma [h^3 u_1 u_2 u_3 - h^2 u_0 u_1 u_2] = 0$$

ya que  $\frac{u_2}{u_0} = (h^{-1})^3 = \frac{1}{h}$ . Resumiendo, en el K41 no hay transferencia neta, o cascada, de enstrofia entre las escalas de movimiento,  $W_{\Omega}^{(0)} = 0$ . Se puede establecer análogamente que en el K67 no existe cascada de energía,  $W_E^{(2)} = 0$ . Si las fuerzas actúan en un intervalo de escalas intermedio dividiendo el intervalo inercial en dos partes, el sistema admite un punto fijo cuyo espectro de energía soporta las dos pendientes  $-3$  y  $-\frac{5}{3}$ . Lo que ocurre es que hay una transferencia neta de energía hacia las escalas más grandes a partir de las escalas forzadas, y una transferencia neta de enstrofia hacia las escalas más pequeñas. El espectro cambia entonces de pendiente al pasar por el intervalo de excitación de una pendiente de  $-\frac{5}{3}$  correspondiendo a la cascada inversa de energía, a una pendiente de  $-3$ , correspondiendo a la cascada directa de enstrofia.

## CAPITULO 4.

## MODELO ESCALAR A TERCEROS VECINOS.

En este capítulo procedemos ahora a construir un modelo a terceros vecinos, con el objeto de determinar si el mayor alcance y mayor número de las interacciones no lineales incluídas introduce soluciones de punto fijo autosimilar *adicionales* (PFASAs) a K41 y K67.

**4.1) Construcción del modelo escalar.** Siguiendo a Gledzer (1974), imponemos las siguientes condiciones a nuestro modelo: a) en la ecuación  $i$ -ésima no aparecerá el término  $u_i$  (cuando no hay disipación); esto es, se satisface la forma más fuerte de la condición de Liouville. b) Dadas las interacciones utilizadas en el modelo de Gledzer (figura 1), proponemos una estructura similar para nuestro modelo a terceros vecinos, los términos cuadráticos en la ecuación  $i$ -ésima serán como se representa en el diagrama mnemotécnico de la figura 2. Por lo tanto, la forma de las ecuaciones sin disipación y sin forzamiento es:

$$\dot{u}_i = C_i^{(1)} u_{i+2} u_{i+1} + C_i^{(2)} u_{i+1} u_{i+3} + C_i^{(3)} u_{i+1} u_{i+2} +$$

$$C_i^{(4)} u_{i-1} u_{i+2} + C_i^{(5)} u_{i-1} u_{i+1} + C_i^{(6)} u_{i-2} u_{i+1} +$$

$$C_i^{(7)} u_{i-2} u_{i-1} + C_i^{(8)} u_{i-3} u_{i-1} + C_i^{(9)} u_{i-3} u_{i-2}.$$

Aquí las  $C_i$ 's son coeficientes de acoplamiento a elegirse de modo que este sistema de ecuaciones diferenciales conserve la energía cinética y la enstrofia. Esto nos lleva a las siguientes condiciones:

$$C_{i-1}^{(2)} + C_i^{(4)} + C_{i+2}^{(9)} = 0$$

$$C_{i-1}^{(1)} + C_{i+1}^{(6)} + C_{i+2}^{(8)} = 0$$

$$C_{i-1}^{(3)} + C_i^{(5)} + C_{i+1}^{(7)} = 0$$

$$C_{i-1}^{(2)} k_{i-1}^2 + C_i^{(4)} k_i^2 + C_{i+2}^{(9)} k_{i+2}^2 = 0$$

$$C_{i-1}^{(3)} k_{i-1}^2 + C_i^{(5)} k_i^2 + C_{i+1}^{(7)} k_{i+1}^2 = 0$$

$$C_{i-1}^{(1)} k_{i-1}^2 + C_{i+1}^{(6)} k_{i+1}^2 + C_{i+2}^{(8)} k_{i+2}^2 = 0.$$

Considerando la condición de crecimiento geométrico de los radios de las cáscaras por el factor  $h$  obtenemos las siguientes relaciones:

$$C_i^{(4)} = C_{i-1}^{(2)} \frac{1-h^6}{h^6-h^2} \quad C_i^{(5)} = C_{i-1}^{(3)} \frac{1-h^4}{h^4-h^2} \quad C_i^{(6)} = C_{i-2}^{(1)} \frac{1-h^6}{h^6-h^4}$$

$$C_i^{(7)} = C_{i-2}^{(3)} \frac{h^2-1}{h^4-h^2} \quad C_i^{(8)} = C_{i-3}^{(1)} \frac{h^4-1}{h^6-h^4} \quad C_i^{(9)} = C_{i-3}^{(2)} \frac{h^2-1}{h^6-h^2},$$

por lo que el sistema dinámico queda:

$$\dot{u}_i = C_i^{(1)} u_{i+2} u_{i+3} + C_i^{(2)} u_{i+1} u_{i+3} + C_i^{(3)} u_{i+1} u_{i+2} +$$

$$C_{i-1}^{(2)} \frac{1-h^6}{h^6-h^2} u_{i-1} u_{i+2} + C_{i-1}^{(3)} \frac{1-h^4}{h^4-h^2} u_{i-1} u_{i+1} + C_{i-2}^{(1)} \frac{1-h^6}{h^6-h^4} u_{i-2} u_{i+1} +$$

$$C_{i-2}^{(3)} \frac{h^2-1}{h^4-h^2} u_{i-2} u_{i-1} + C_{i-3}^{(1)} \frac{h^4-1}{h^6-h^4} u_{i-3} u_{i-1} + C_{i-3}^{(2)} \frac{h^2-1}{h^6-h^2} u_{i-3} u_{i-2}.$$

Si imponemos sobre las  $C_i$ 's la condición de autosimilitud  $\frac{C_i^{(m)}}{C_{i-1}^{(m)}} = \frac{k_i}{k_{i-1}} = h > 1$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , tenemos que  $\frac{C_i^{(m)}}{k_i} = D^{(m)}$ , donde  $D^{(m)}$  es una constante que no depende de  $i$ . Las siguientes igualdades son entonces satisfechas:

$$C_{i-1}^{(2)} = k_{i-1} D^{(2)} = \frac{k_i D^{(2)}}{h} \quad C_{i-1}^{(3)} = k_{i-1} D^{(3)} = \frac{k_i D^{(3)}}{h}$$

$$C_{i-2}^{(1)} = k_{i-2} D^{(1)} = \frac{k_i D^{(1)}}{h^2} \quad C_{i-2}^{(3)} = k_{i-2} D^{(3)} = \frac{k_i D^{(3)}}{h^2}$$

$$C_{i-3}^{(1)} = k_{i-3} D^{(1)} = \frac{k_i D^{(1)}}{h^3} \quad C_{i-3}^{(2)} = k_{i-3} D^{(2)} = \frac{k_i D^{(2)}}{h^3}$$

si hacemos  $\alpha = D^{(1)}$ ,  $\beta = D^{(2)}$  y  $\gamma = D^{(3)}$  el sistema dinámico queda como:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i = k_i & \left[ \alpha u_{i+2} u_{i+1} + \beta u_{i+1} u_{i+3} + \gamma u_{i+1} u_{i+2} + \right. \\ & \frac{\beta}{h} \frac{1-h^6}{h^6-h^2} u_{i-1} u_{i+2} + \frac{\gamma}{h} \frac{1-h^4}{h^4-h^2} u_{i-1} u_{i+3} + \frac{\alpha}{h^2} \frac{1-h^6}{h^6-h^4} u_{i-2} u_{i+1} + \\ & \left. \frac{\gamma}{h^2} \frac{h^2-1}{h^4-h^2} u_{i-2} u_{i-1} + \frac{\alpha}{h^3} \frac{h^4-1}{h^6-h^3} u_{i-3} u_{i-1} + \frac{\beta}{h^3} \frac{h^2-1}{h^6-h^2} u_{i-3} u_{i-2} \right]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Este modelo se reduce al de Gledzer cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$ .

**4.2) Búsqueda de puntos fijos autosimilares.** Hemos encontrado un modelo con interacciones a terceros vecinos que conserva la energía cinética y la entropía. Buscamos ahora PFASAs para este modelo. Para lograr esto, igualamos el lado derecho de las ecuaciones a cero y dividimos entre  $u_{i-2} u_{i-3}$  para obtener:

$$\alpha \mu^{10} + \beta \mu^9 + \gamma \mu^8 +$$

$$\frac{\beta}{h} \frac{1-h^6}{h^6-h^2} \mu^6 + \frac{\gamma}{h} \frac{1-h^4}{h^4-h^2} \mu^5 + \frac{\alpha}{h^2} \frac{1-h^6}{h^6-h^4} \mu^4 + \quad (4.2)$$

$$\frac{\gamma}{h^2} \frac{h^2-1}{h^4-h^2} \mu^2 + \frac{\alpha}{h^3} \frac{h^4-1}{h^6-h^4} \mu + \frac{\beta}{h^3} \frac{h^2-1}{h^6-h^2} = 0$$

que es un polinomio de grado diez en  $\mu = \frac{u_i}{u_{i+1}}$ . Esta ecuación se puede resolver numéricamente, usando MATHEMATICA, para el caso  $h = 2$ , encontrándose las siguientes soluciones independientes de  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$ :

$$\mu = \frac{1}{2}, 2^{-\frac{1}{2}}, \frac{\pm(-1)\frac{1}{2}}{2^{\frac{1}{2}}}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}.$$

Notamos que dos raíces son positivas  $\frac{1}{2}$  y  $2^{-\frac{1}{2}}$ , y las otras cuatro son complejas. Estas raíces aparecen siempre, por lo que *sólo hay dos puntos fijos autosimilares que no dependen de los valores de los parámetros*. El caso  $\mu = \frac{1}{2}$  corresponde al K67, mientras que  $\mu = 2^{-\frac{1}{2}}$  corresponde al K41. Las soluciones complejas también corresponden a las mismas pendientes del espectro y por lo tanto no proporcionan regímenes cualitativamente distintos.

Las seis raíces ya obtenidas nos permiten reducir el grado de la ecuación algebraica de grado diez a grado cuatro. Una vez realizada esta reducción obtenemos:

$$\alpha(0.625\mu + \mu^4) + \beta(0.1 + \mu^3) + \gamma\mu^2 = 0. \quad (4.3)$$

Si a  $\mu$  le damos el valor positivo  $\mu_0$ , la ecuación anterior se convierte en la ecuación de un plano en el espacio de los parámetros  $\alpha\beta\gamma$ . Para todos los puntos en este plano hay un punto fijo autosimilar de la forma  $u_i \propto k_i^{\log_2 \mu_0}$ . Por lo tanto, los valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  para los que existen PFASAs están dados por la unión de la familia uniparamétrica de planos ortogonales a los vectores de posición de la curva

$$(0.625\mu + \mu^4, 0.1 + \mu^3, \mu^2); \mu > 0$$



que pasan además por el origen  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Como esta curva está completamente contenida en el octante principal ( $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ ) se sigue que no hay PFASAs cuando los tres parámetros tienen el mismo signo.

Para obtener una idea cualitativa de esta región consideremos su intersección con el plano  $\gamma = \gamma_0 > 0$ . Cada plano de la familia interseca al plano  $\gamma = \gamma_0$  en una recta, de modo que obtenemos una familia uniparamétrica de rectas en el plano  $\gamma = \gamma_0$  dada por

$$\alpha(0.625\mu + \mu^4) + \beta(0.1 + \mu^3) + \gamma_0\mu^2 = 0.$$

El comportamiento de esta familia uniparamétrica de curvas se puede estudiar a través de su envolvente, definida como la curva tal que cada uno de sus puntos está situado en una curva miembro de la familia, siendo esta curva y la envolvente tangentes en su punto común. Si hacemos

$$F(\alpha, \beta; \mu) = \alpha(0.625\mu + \mu^4) + \beta(0.1 + \mu^3) + \gamma_0\mu^2$$

la ecuación de la envolvente de la familia de rectas está dada por:

$$F(\alpha, \beta; \mu) = 0$$

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta; \mu)}{\partial \mu} = 0$$

lo que resolviendo para  $\alpha$  y  $\beta$  nos da la envolvente en la forma  $\alpha = \alpha(\mu)$ ,  $\beta = \beta(\mu)$ .

La gráfica de la envolvente, en el caso  $\gamma_0 > 0$ , es como se muestra en la figura 3a. Notamos que las rectas tangentes a esta curva barren ciertas regiones del plano una vez, otras dos veces, otras tres veces y otras ninguna, como se indica en la figura 3a, según  $\mu$  recorre los valores de cero a infinito. El número de veces que es barrido un punto nos da el número de PFASAs que existen cuando los valores de los parámetros coinciden con las

coordenadas del punto en cuestión. En la figura 3a, los números indican la cantidad de PFASAs que existen para valores de los parámetros en las distintas zonas del plano. Para  $\gamma = \gamma_0 < 0$  la estructura es simétrica a la de  $-\gamma_0$ . (Ver figura 3b). Por último para  $\gamma = 0$ , la estructura está representada en la figura 3c. Aquí el análisis es más fácil pues tenemos un haz de rectas que pasan por el mismo punto, por lo que basta encontrar las pendientes de las rectas límite del haz.

Como se puede observar, estas gráficas confirman el hecho de que no hay PFASAs cuando  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  tienen el mismo signo.

#### 4.3) Restricciones adicionales al modelo.

4.3.1) **Conservación detallada por ternas de vectores.** Cabe preguntar ahora qué valores de los parámetros son aceptables, si pretendemos que nuestro modelo escalar sea lo más realista posible. Para esto, consideramos las propiedades de conservación detallada derivada de los términos no lineales en la ecuación de Euler original. La conservación detallada de la energía cinética y la enstrofia consiste en el hecho de que estas cantidades se conservan en el espacio de Fourier por medio de triángulos, es decir, por ternas de vectores  $\{k, p, q\}$  con la propiedad de que  $p + q = k$ . Si  $T(k | p, q)$  es la cantidad de energía transferida al modo  $k$  por los modos  $p$  y  $q$ , esta cantidad sólo es distinta de cero cuando  $p + q = k$  (ver, por ejemplo, Rose y Sulem 1978; también el capítulo 2 del presente trabajo). Además, se cumple la propiedad de que:  $T(k | p, q) + T(p | k, -q) + T(q | k, -p) = 0$ . En nuestro modelo escalar la riqueza de la geometría de conservación detallada se pierde y sólo podemos hosquejarla a "grosso modo". Algunos de los términos de transferencia para nuestro modelo escalar son:

$$T(i | i-1, i+1) = \frac{\gamma}{h} \frac{1-h^4}{h^4-h^2} u_{i-1} u_i u_{i+1}$$

$$T(i | i-2, i+1) = \frac{\alpha}{h^2} \frac{1-h^6}{h^6-h^4} u_{i-2} u_i u_{i+1}$$

$$T(i | i+1, i+3) = \beta u_i u_{i+1} u_{i+3}.$$

El término  $T(i | j, l)$  representa la cantidad de energía transferida entre las cáscaras  $i, j$  y  $l$ . Este término debería ser idénticamente cero si en las ecuaciones originales no existen tres vectores  $k_j, k_l$  y  $k_i, k_j$  en la cáscara  $j$ -ésima,  $k_l$  en la  $l$ -ésima y  $k_i$  en la  $i$ -ésima, tales que  $k_j + k_l = k_i$ . En nuestro modelo, el parámetro  $\beta$  acopla entre sí los modos escalares de una terna de cáscaras cuyos índices son de la forma  $i, i+1, i+3$ . El número  $h^{1/2}k_i$  es una cota superior para los módulos de los vectores de onda en la  $i$ -ésima cáscara, mientras que el número  $h^{1/2}k_{i+1} = h^{1/2}k_i$  lo es para los módulos de los vectores en la cáscara  $(i+1)$ -ésima. Se sigue que el módulo de la suma de dos vectores  $k_i$  y  $k_{i+1}$ , en la  $i$ -ésima y en la  $(i+1)$ -ésima cáscaras respectivamente, es a lo más  $h^{1/2}(1+h)k_i$ , número menor que el mínimo  $h^{-1/2}k_{i+3} = h^{1/2}k_i$  de los módulos de los vectores de la cáscara  $(i+3)$ -ésima, cuando  $h = 2$ . Por lo tanto, las ecuaciones originales no contienen términos de acoplamiento entre los modos involucrados en los términos en  $\beta$  de nuestro modelo cuando  $h = 2$ , por lo que en este caso debemos tomar  $\beta = 0$ . Una vez realizada la reducción el modelo queda como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= k_i \left[ \alpha u_{i+2} u_{i+3} + \gamma u_{i+1} u_{i+2} + \right. \\ &\frac{\gamma}{h} \frac{1-h^4}{h^4-h^2} u_{i-1} u_{i+1} + \frac{\alpha}{h^2} \frac{1-h^6}{h^6-h^4} u_{i-2} u_{i+1} + \\ &\left. \frac{\gamma}{h^2} \frac{h^2-1}{h^4-h^2} u_{i-2} u_{i-1} + \frac{\alpha}{h^3} \frac{h^4-1}{h^6-h^4} u_{i-3} u_{i-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nótese que este modelo no conserva la positividad de las  $u_i$ 's, lo que se puede probar fácilmente. Este hecho tendrá consecuencias cuando estudiemos las cascadas de transferencia de las cantidades conservadas.

## CAPITULO 5

### BUSQUEDA DE PFASs.

5.1) Búsqueda de puntos fijos autosimilares adicionales (PFASAs) cuando  $\beta = 0$ . Regresemos a la ecuación algebraica para  $u_{1-1}^{(n)} \equiv \mu$  ( $\beta = 0$ ) (ecuación (4.3), capítulo 4):

$$\alpha(0.625\mu + \mu^4) + \gamma\mu^2 = 0.$$

Esto nos lleva a una familia uniparamétrica de rectas en el plano  $\alpha\gamma$  que pasan por el origen y cuyas pendientes están dadas por (figura 4):

$$m(\mu) = -\frac{(0.625\mu + \mu^4)}{\mu^2}.$$

La pendiente máxima es alcanzada en  $\mu = .6786$  y su valor es de  $m = -1.3815$ . De manera análoga a la del capítulo 4 (sección 4.2), los números en la figura 5 indican la cantidad de PFASAs que existen para valores de los parámetros en las distintas zonas del plano  $\alpha\gamma$ .

5.2) Cascadas de energía y enstrofia. Con el objeto de decidir si los rangos de valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  indicados en la figura 5 para los cuales existen PFASAs corresponden a un comportamiento realista del modelo, procedemos ahora a estudiar la dirección de las cascadas de energía y enstrofia que produce el modelo. Como se describió en la sección 2.5.1, el trabajo pionero de Kraichnan (1967) sugirió una cascada directa (de números de onda pequeños a grandes) de enstrofia en el rango inercial de enstrofia, y una cascada inversa (de números de onda grandes a pequeños) de energía en el rango inercial de energía. Nos interesa verificar que el modelo reproduce estas direcciones de cascada para las soluciones K41 (espectro  $k^{-3}$ ) y K67 (espectro  $k^{-3}$ ), con valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  que poseen soluciones PFASAs.

Consideremos un sistema truncado incluyendo únicamente los modos desde  $u_l$  hasta  $u_{l+2}$ , y en el que interacciones en que aparecen términos de índice menor que  $l$  o de índice

mayor que  $J + 2$  no se tomarán en cuenta. Este sistema truncado nos servirá para estudiar cómo se transfieren la energía y la enstrofia en las soluciones K41 y K67. Despreciamos además los términos de disipación y forzamiento. Si colocamos el sistema al tiempo  $t = t_0$  en una solución K67, i.e. de la forma  $u_i \propto k_i^{-1}$ , el lado derecho de las ecuaciones del sistema será cero excepto en las tres primeras ( $J, J + 1, J + 2$ ) y en las tres últimas ( $J, J + 1, J + 2$ ). Esto implica que al tiempo  $t = t_0$  la cantidad de energía (o enstrofia) perdida (o ganada) por unidad de tiempo por los tres primeros modos será la misma que la cantidad ganada (o perdida) por unidad de tiempo por los tres últimos debido a la conservación por los términos no lineales y a que  $\dot{u}_S = 0$  para  $J + 2 < S < J$ . La cantidad de energía transferida por unidad de tiempo a los tres últimos modos en el instante  $t = t_0$  es entonces:

$$\begin{aligned} u_J \dot{u}_J + u_{J+1} \dot{u}_{J+1} + u_{J+2} \dot{u}_{J+2} &= -\alpha k_{J-1} u_{J-1} u_{J+1} u_{J+2} \\ &\quad - \gamma k_{J-1} u_J u_{J+1} u_{J-1} - \alpha k_{J-2} u_J u_{J+1} u_{J-2} \\ &\quad - \frac{\gamma}{h^3} k_J u_{J-1} u_{J-2} u_J + \frac{\alpha}{h^3} \frac{h^4 - 1}{h^6 - h^4} k_J u_{J-1} u_{J-2} u_J. \end{aligned}$$

Si utilizamos el hecho de que  $\frac{u_m}{k_m} = \frac{k_n}{k_m} = h^{n-m}$  para la condición de tipo Kraichnan al tiempo  $t = t_0$  obtenemos:

$$\begin{aligned} u_J \dot{u}_J + u_{J+1} \dot{u}_{J+1} + u_{J+2} \dot{u}_{J+2} &= -\frac{\alpha k_J}{h^3} u_J^3 - \frac{\gamma k_J}{h} u_J^3 - \frac{\alpha k_J}{h} u_J^3 + \frac{\gamma k_J}{h} u_J^3 \\ &\quad + \alpha \frac{h^4 - 1}{h^5 - h^3} k_J u_J^3 = 0. \end{aligned}$$

Es decir, en el K67 la cascada de energía es nula. Este resultado es independiente de los valores de los parámetros y está de acuerdo con la predicción correspondiente de Kraichnan (1967) para las ecuaciones hidrodinámicas primitivas. Veamos ahora qué pasa en este mismo punto con la cascada de enstrofia. La enstrofia transferida por unidad de tiempo a los tres últimos modos es

$$k_J^2 u_J \dot{u}_J + k_{J+1}^2 u_{J+1} \dot{u}_{J+1} + k_{J+2}^2 u_{J+2} \dot{u}_{J+2} = -\gamma k_{J-1}^3 u_J u_{J+1} u_{J-1} - \alpha k_{J-2}^3 u_J u_{J+1} u_{J-2}$$

$$\begin{aligned} & -\alpha k_{J-1}^3 u_{J+1} u_{J+2} u_{J-1} + \frac{\alpha}{h^3} \frac{h^4 - 1}{h^6 - h^4} k_J^3 u_{J-1} u_{J-3} u_J + \frac{\gamma}{h^4} k_J^3 u_{J-1} u_{J-2} u_J = \\ & = -\frac{\gamma k_J^3}{h^3} u_J^3 - 2 \frac{\alpha k_J^3}{h^5} u_J^3 + \alpha h \frac{h^4 - 1}{h^6 - h^4} k_J^3 u_J^3 + \frac{\gamma k_J^3}{h} u_J^3 = \\ & = k_J^3 u_J^3 (0.375\gamma + 0.562\alpha). \end{aligned}$$

Esta cantidad es positiva si  $0.375\gamma + 0.562\alpha > 0$ , o, equivalentemente,

$$\gamma > -1.498\alpha. \quad (5.1)$$

Si ahora, al tiempo  $t = t_0$  las  $u_i$ 's se colocan en una solución K41 ( $u_i \propto k_i^{-4}$ ) obtenemos de una manera análoga a la anterior para la cascada de energía en un punto tipo Kraichnan que:

$$k_J^2 u_J \dot{u}_J + k_{J+1}^2 u_{J+1} \dot{u}_{J+1} + k_{J+2}^2 u_{J+2} \dot{u}_{J+2} = 0$$

i.e., la cascada de enstrofia es nula en este caso. Esta característica es también independiente de los valores de  $\alpha$  y  $\gamma$ . Por su parte, la energía transferida por unidad de tiempo a los tres últimos modos es

$$u_J \dot{u}_J + u_{J+1} \dot{u}_{J+1} + u_{J+2} \dot{u}_{J+2} = k_J u_J^3 (-0.375\gamma - 0.5314\alpha).$$

Requerimos que esta cantidad sea menor que cero para que exista cascada inversa de energía, lo cual se cumple para  $-0.375\gamma - 0.5314\alpha < 0$ ; i.e., para

$$\gamma > -1.417\alpha. \quad (5.2)$$

Concluimos por lo tanto que la región en el plano  $\alpha\gamma$  que presenta las direcciones correctas de las cascadas es aquella que satisface simultáneamente las desigualdades (5.1) y (5.2), y que se muestra en la figura 6. Finalmente, los valores de  $\alpha$  y  $\gamma$  que presentan las direcciones correctas de las cascadas que poseen PFASAs son los dados por la intersección de las regiones mostradas en las figuras 5 y 6 (figura 7).

En resumen, hemos encontrado regiones en el espacio de parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  para las cuales el modelo tiene soluciones estacionarias autosimilares adicionales (PFASAs) a las clásicas soluciones de Kolmogorov K41 (espectro de pendiente  $-\frac{5}{3}$ ) y de Kraichnan K67 (espectro de pendiente  $-3$ ). Adicionalmente, existen subregiones dentro de las cuales las soluciones K41 y K67 presentan las direcciones correctas de las cascadas de energía y entropía. Así pues, hemos demostrado que, en un modelo escalar de turbulencia 2D, la presencia de un mayor número de interacciones no lineales, que en particular hemos tomado de carácter no local, trae como consecuencia la aparición de PFASAs.

## CAPITULO 6

### CONCLUSIONES

#### 6.1) Resumen.

En este trabajo tenemos construido un modelo escalar para turbulencia bidimensional incluyendo interacciones no lineales no locales. El modelo tiene tres parámetros libres  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , aunque  $\beta$  ha sido tomado igual a cero en el análisis del capítulo 5 con el objeto de preservar los tipos de triadas presentes en las ecuaciones de Navier-Stokes primitivas. Motivados por la aparición de dos soluciones autosimilares de equilibrio (PFASs) en un modelo construido por Gledzer que incluye interacciones a segundos vecinos, hemos buscado soluciones de este tipo para nuestro modelo en adición a las soluciones standard de cascada de energía y enstrofia, de Kolmogorov ( $u; \propto k^{-1/3}$ , denotada K41) y Kraichnan ( $u; \propto k^{-1}$ , denotada K67), respectivamente. Encontramos que las únicas soluciones independientes de los parámetros son K41 y K67, aunque el modelo admite PFASs en adición a K41 y K67 para un rango bien definido de valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  (con  $\beta = 0$ ). Un subconjunto de este rango de parámetros, mostrado en la figura 7, además exhibe direcciones de las cascadas de energía y enstrofia en las soluciones K41 y K67 que coinciden cualitativamente con el comportamiento esperado para los flujos Navier-Stokes bidimensionales primitivos. Así pues hemos demostrado que existen regiones en el espacio de parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  para las cuales el modelo tiene soluciones estacionarias autosimilares adicionales (PFASAs) a las clásicas soluciones de Kolmogorov K41 (espectro de pendiente  $-\frac{5}{3}$ ) y de Kraichnan K67 (espectro de pendiente  $-3$ ). Adicionalmente, existen subregiones dentro de las cuales las soluciones K41 y K67 presentan las direcciones correctas de las cascadas de energía y enstrofia. Así pues, hemos demostrado que, en un modelo escalar de turbulencia 2D, la presencia de un mayor número de interacciones no lineales, que en particular hemos tomado de carácter no local, trae como consecuencia la aparición de PFASAs.

#### 6.2) Significado físico de los PFASs.

A pesar de que, de acuerdo a nuestra expectativa inicial, el modelo con interacciones no lineales no locales exhibió puntos fijos autosimilares adicionales (PFASAs) a K41 y K67, la existencia de aquellos PFASAs dependientes de los parámetros no parece ser atribuible al carácter no local del modelo, sino que puede ser únicamente una consecuencia del número



de parámetros libres que contiene. Por ejemplo, puede ser fácilmente mostrado que la versión más general del modelo a primeros vecinos de DN<sub>1</sub> que tiene la forma

$$\dot{u}_i = a_1 k(u_{i-1}^2 - h^{1+m} u_i u_{i+1}) + a_2 k(u_{i-1} u_i - h^{1+m} u_{i+1}^2),$$

admite el PFAS dependiente de los parámetros  $\mu = -\frac{a_2}{a_1}$ , en adición a la solución independiente de los parámetros  $\mu = h^{\frac{1+m}{2}}$ . Una versión más simple de el modelo con  $a_2 = 0$ , a la cual DN dedicaron mucha de su atención, admite únicamente la solución independiente de los parámetros. Así pues, la inclusión de terceros vecinos en el modelo aparentemente no produce, por sí misma, ningún PFAS adicional independiente de los parámetros. Posiblemente, sería necesaria la existencia de más cantidades conservadas.

Lo anterior nos lleva al punto, sin embargo, de que un modelo con un gran número de tipos de interacciones tiene en principio la posibilidad de tener un gran número de invariantes. Este era el caso, por ejemplo, de el modelo de Gledzer, que era capaz de conservar simultáneamente dos invariantes cuadráticos gracias a la inclusión de interacciones a segundos vecinos, mientras el modelo de Desniansky y Novikov podía únicamente conservar uno a la vez debido al número más pequeño de interacciones que contiene. Sobre esta base, uno podría argüir que únicamente las soluciones independientes de los parámetros tienen significado físico, ya que éstas son las únicas que corresponden a un invariante físico. Apuntemos, sin embargo, que las soluciones "independientes de los parámetros" únicamente lo son en virtud de la restricción que hemos hecho sobre los coeficientes imponiendo las propiedades de conservación sobre el modelo. Antes de hacer esto, aquellas soluciones eran dependientes de los parámetros también. De hecho, uno podría investigar espacios paramétricos para el modelo sin imponer condición alguna de conservación, usando un procedimiento análogo al que hemos seguido en este trabajo, y encontrando un subconjunto del espacio de parámetros para el cual K41 y K67 son soluciones de equilibrio. Para este subconjunto de posibles valores de los parámetros, la conservación de la energía y la enstrofia debe cumplirse también, aunque estas condiciones no hubieran sido impuestas sobre el modelo desde el inicio. Es posible que una situación similar ocurra para los PFAS adicionales "dependientes de los parámetros". Esto nos conduce a la conjetura de que las soluciones adicionales que hemos encontrado para el presente modelo pueden corresponder a invariantes desconocidos del sistema. Para hacer ver la plausibilidad de nuestra conjetura, consideremos una versión simplificada del modelo, tomando  $\gamma = 0$  en la ecuación (4) del capítulo 4, y que llamaremos el modelo escalar  $\alpha$ . Se puede demostrar que el modelo- $\alpha$  admite un invariante cuadrático adicional a la energía y la enstrofia, a saber,

$$I_\alpha = \sum_j \left( -\frac{h^2}{1+h^2} \right)^j u_j^2. \quad (6.1)$$

El invariante  $I_\alpha$  aparece entonces cuando restringimos las interacciones triádicas entre cáscaras a aquellas acopladas por el parámetro  $\alpha$ . Si no se restringe el parámetro de similitud  $\mu$  a valores positivos (a diferencia del tratamiento de los capítulos 4 y 5), se puede probar que el modelo- $\alpha$  admite además un nuevo punto fijo autosimilar dado por

$$u_j = (-1)^j \frac{(h^2 + 1)^{\frac{j}{2}}}{h^j} u_0. \quad (6.2)$$

Se puede establecer que para esta solución las cascadas de energía y enstrofia son nulas, mientras que la cascada del invariante  $I_\alpha$  es distinta de cero, lo que nos indica que el punto fijo (6.2) representa un régimen estacionario de cascada para el invariante  $I_\alpha$ . Sin embargo este nuevo invariante no parece tener contraparte en los flujos de Navier-Stokes reales, por lo que se le puede considerar como un invariante espúreo. La presencia de invariantes espúreos en los modelos escalares puede constituir una clara limitación a su aplicabilidad como modelos de la turbulencia en flujos de Navier-Stokes. En este caso, es posible invertir la argumentación, y sugerir que un criterio adicional de realismo para un modelo escalar de turbulencia debe ser el escoger valores de los parámetros que eviten la existencia de soluciones estacionarias autosimilares espúreas, de acuerdo al trabajo realizado en esta tesis.

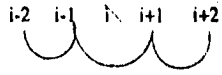


fig 1. Representación gráfica de los términos de interacción presentes en el modelo de Gledzer.

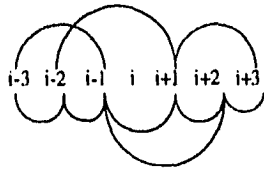
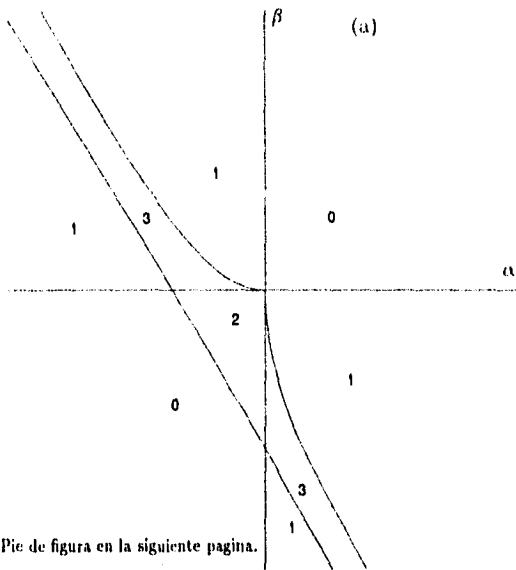
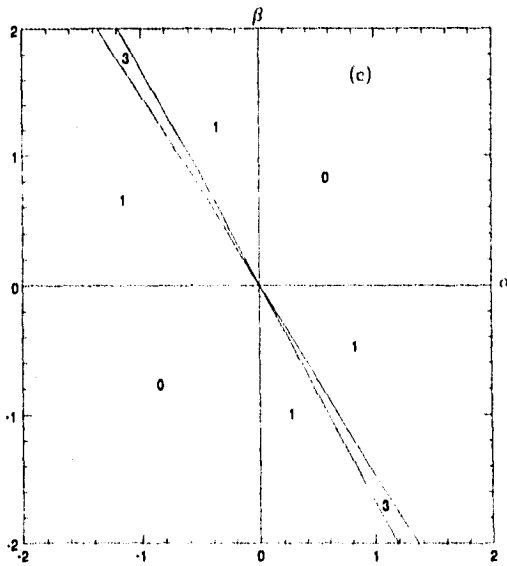
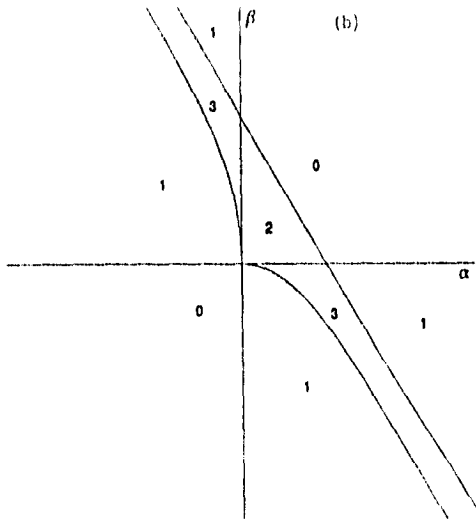


fig 2. Representación gráfica de los términos de interacción presentes en el modelo a terceros vecinos.



3a. Pie de figura en la siguiente pagina.



fig's 3a,3b y 3c. Sección plana ( $\gamma = \gamma_0$ ) del espacio de parámetros  $\alpha\beta\gamma$ . Los números representan PFASAs (puntos fijos autosimilares adicionales, es decir. distintos de K4I y K67) para valores de los parámetros en las distintas regiones de la sección.

a)  $\gamma_0 > 0$     b)  $\gamma_0 < 0$     c)  $\gamma_0 = 0$

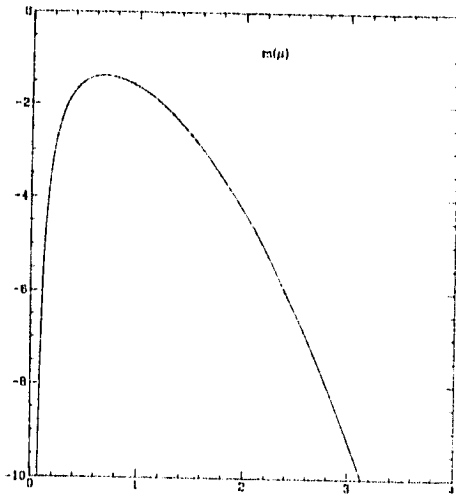


fig 4. Pendiente de la recta en el plano de parámetros  $\alpha\gamma$  ( $\beta = 0$ ) para cuyos puntos existe una solución autosimilar con parámetro de similitud  $\mu$ , como función de  $\mu$ .

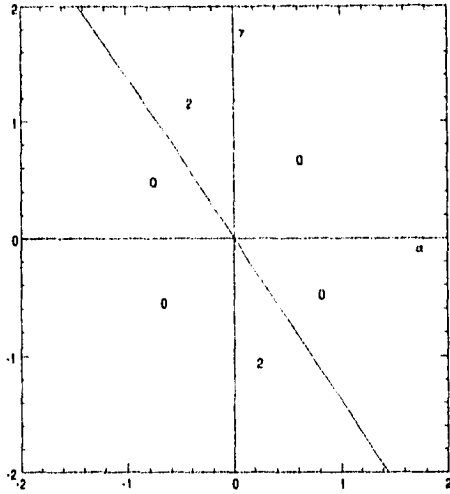


fig 5. Distribución de PFASAs cuando  $\beta = 0$  en el plano  $\alpha\gamma$ , indicando el número de PFASAs de cada región. La pendiente de la recta es  $-1.3815$ .

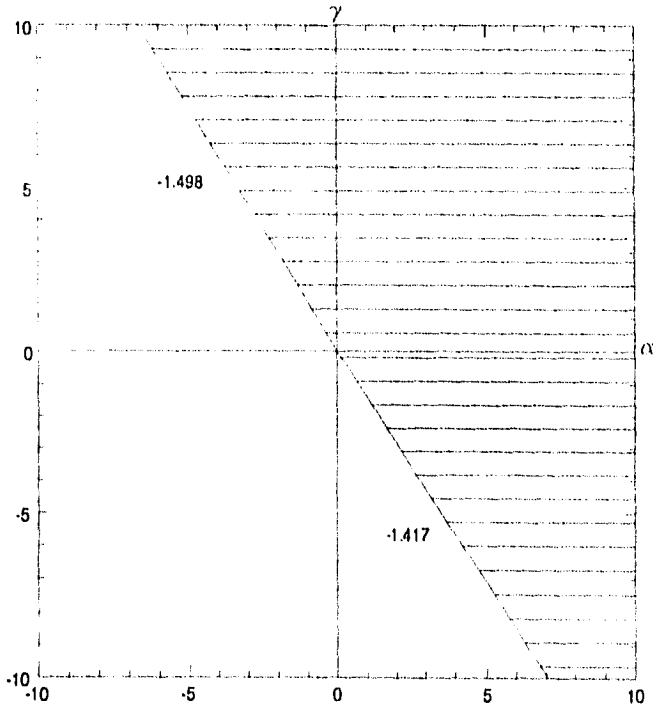


fig 6. Conjunto de valores de los parámetros para los que las direcciones de las cascadas en el K41 (Punto fijo autosimilar propuesto por Kolmogorov en 1941 para la cascada estacionaria de energía) y en el K67 (Propuesto por Kraichnan en 1967 para la cascada de enstrofia) son las correctas (región sombreada). Los números indican la pendiente de la recta divisoria.

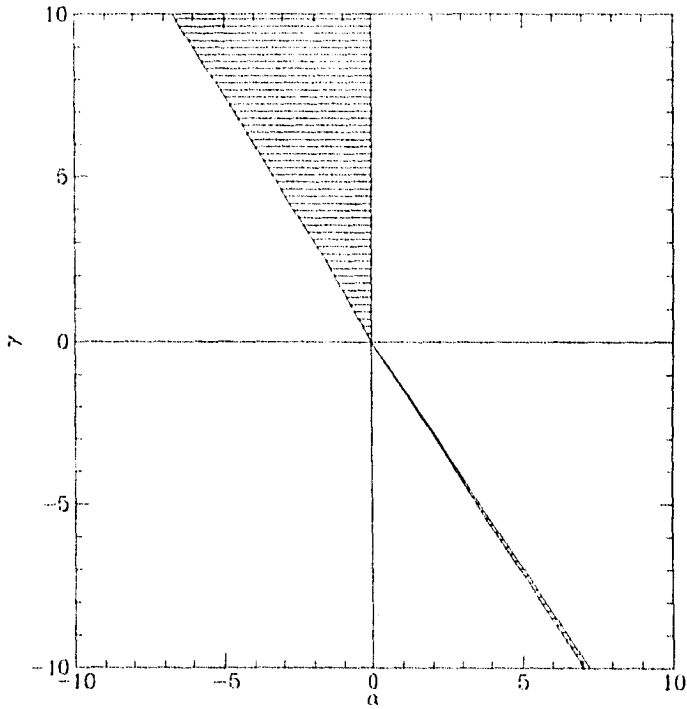


fig 7. Intersección de las regiones sombreadas en las figs. 5 y 6 representando valores de los parámetros con las direcciones de las cascadas correctas en K41 y en K67 admitiendo PFASs.



## APENDICE I

### RESUMEN DE LA TEORIA K67.

A continuación resumimos los resultados de Kraichnan (1967) sobre los regímenes K41 y K67 obtenidos del análisis directo de las ecuaciones hidrodinámicas.

i)  $T(k|p, q)$  es definido como la tasa de transferencia de energía de modos de tamaño  $p$  y  $q$  a modos de tamaño  $k$ . Entonces  $T(k|p, q) dp dq dk$  es la cantidad de energía que recibe por unidad de tiempo una cáscara esférica (3D), o circular (2D) de grosor  $dk$  centrada en  $k$ , proveniente de modos de tamaño  $p'$  ( $p - \frac{dp}{2} < p' < p + \frac{dp}{2}$ ) y de tamaño  $q'$  ( $q - \frac{dq}{2} < q' < q + \frac{dq}{2}$ ).

ii) El cálculo de  $T(k|p, q)$  a partir de los términos triádicos de transferencia  $T(k|p, q)$  (ecuación (33c), capítulo 2) es realizado integrando todas las contribuciones de estas últimas sobre el ángulo sólido.

iii) Entonces

$$T(k) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty T(k|p, q) dp dq$$

es la cantidad total de energía recibida en  $k$  por unidad de tiempo y por unidad de número de onda. Por lo tanto

$$\Pi(k) = \int_k^\infty T(k') dk' \quad (1)$$

es la cantidad de energía recibida por números de onda mayores que  $k$  proveniente de números de onda menores que  $k$  y

$$Z(k) = \int_k^\infty k'^2 T(k') dk' \quad (2)$$

es la tasa de transferencia de enstrofia a números de onda mayores que  $k$ .

iv) Cuando el sistema es colocado en una condición autosimilar con espectro  $E(k)$  de índice espectral (o pendiente)  $n$  que cumple la relación

$$\frac{E(ak)}{E(k)} = a^{-n}$$

Kraichnan probó que es posible reescribir (1) y (2) como

$$\Pi(k) = k^{\frac{(n-3)n}{2}} F_1(n)$$

y

$$Z(k) = k^{\frac{(n-3)n}{2}} F_2(n)$$

donde  $F_1(n)$  y  $F_2(n)$  son independientes de  $k$ , y satisfacen  $F_1(1) = 0$  y  $F_2(\frac{5}{3}) = 0$ .

o) De estas relaciones se ve que cuando el espectro de energía tiene pendiente  $n = \frac{5}{3}$  (K41),  $\Pi(k)$  es independiente de  $k$  y la transferencia de entropía es 0. Cuando el espectro tiene pendiente  $n = 3$  (K67),  $Z(k)$  es independiente de  $k$  y la transferencia de energía es 0.

ESTA TESIS NO DEBE 69  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

## APENDICE II

### EXCITACION DE ARMONICOS EN EL CASO 1-DIMENSIONAL.

En este apéndice estableceremos que, en el caso 1-dimensional, cuando únicamente un armónico está excitado, el armónico que se excita inmediatamente después es el doble del primero.

Estudiaremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

muy parecida a la ecuación hidrodinámica. Si las condiciones a la frontera son periódicas el campo  $u$  se puede escribir como

$$u = \sum_n u_n e^{i2\pi nx}, \quad (2)$$

lo que produce el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{du_n}{dt} = -i2\pi \sum_m (n-m) u_m u_{n-m}. \quad (3)$$

Supongamos que al tiempo  $t = 0$  la única amplitud distinta de cero es  $u_l$ , entonces

$$\frac{du_n}{dt}(0) = -i2\pi (n-l) u_l u_{n-l}$$

que es distinto de cero solo cuando  $n = 2l$ . Por lo tanto, cuando la única escala excitada es la  $l$ -ésima, la siguiente escala en excitarse es la  $2l$ -ésima. Esto nos da un argumento intuitivo de porque la elección del parámetro geométrico  $h = 2$  es una elección adecuada.

## REFERENCIAS.

- Batchelor, G.K. 1969, *Phys. Fluids Suppl.* 2, 233.
- Bell, T.L. and Nelkin, M. 1977, *Phys. Fluids* 20, 345.
- Bell, T.L. and Nelkin, M. 1978, *J. Fluid Mech* 88, 369.
- Desnaiskii, V.N. and Novikov, E.A. 1974, *J. Appl. Math. Mech.* 38, 468
- Gledzer, E.B. 1973, *Sov. Phys. Dokl.* 18, 216.
- Gloaguen, C., Léorat, J., Pouquet, A. and Grappin, R 1985, *Physica D* 17, 154.
- Grappin, R., Léorat, J. and Pouquet, A. and Grappin, R 1985, *Physica D* 17, 1127.
- Herring, J.R., Orszag, S.A., Kraichnan, R.H. and Fox, D.G. 1974, *J. Fluid Mech.* 66, 417.
- Jensen, M.H., Paladin, G. and Vulpiani, A. 1991, in: *The Global Geometry of turbulence*, ed J. Jiménez (Plenum, New York), p. 221.
- Kerr, R.M. and Siggia, E.D. 1978, *J. Stat. Phys.* 19, 543.
- Kolmogorov, A.N. 1941 *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 30, 301.
- Kraichnan, R.H. 1967, *Phys. Fluids* 10, 1417.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M. 1986, *Mecánica de Fluidos (Física Teórica, Volumen 6)*, Editorial Reverté.
- Lesieur, M. 1990, *Turbulence in Fluids*, 2<sup>nd</sup> ed. (Dordrecht, Kluwer)
- Lorenz, E.N. 1972, *J. Fluid Mech* 55, 515.
- Obukhov, A.M. 1971. On certain general properties of equations of dynamics of atmosphere. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fizika Atmosfery i Okeana*, Vol.7, N<sup>o</sup>7.
- Qian, J. 1988, *Phys. Fluids* 31, 2865.
- Rose H.A. and Sulem, P.L. 1978, *J. Physique* 39, 441.
- Scalo, J. M. 1987, in *Interstellar Processes*, ed. D. J. Hollenbach & H. A. Thronson (Dordrecht: Reidel), 349.
- Vázquez-Semadeni, E. 1994, *ApJ*, 423, 681.
- Yamada, M., and Ohkitani, K, 1987, *J. Phys. Soc. Japan* 56, 4210.
- Yamada, M., and Ohkitani, K. 1988, *Phys. Rev. Lett.* 60, 983.