



00384  
4  
2ej

Universidad Nacional  
Autónoma de México

Facultad de Ciencias  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

" ESTUDIO ASINTOTICO  
DE ESCAPES EN  
SISTEMAS HAMILTONIANOS POLINOMIALES "

Tesis

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

P R E S E N T A

Manuel Jesús Falconi Magaña

DIRECTOR DE TESIS: Dr. ERNESTO A. LACOMBA ZAMORA

México D.F.

1996

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Abstract**

This work studies the behavior at infinity of two cases of Hamiltonian Systems:

a) Mechanical Systems with Homogeneous Polynomial Potential, and b) Hamiltonian Systems with a polynomial Hamiltonian.

In case (a), a blow-up of McGehee type is used, and in case (b) a Poincaré Compactification is the main tool. For both cases, the flow can be extended to an invariant manifold, the so called Infinity Manifold. For (a), a description of the flow on the Infinity Manifold is given when the potential is homogeneous with degree at most 4. For (b), the topological classification of the Infinity Manifold is given for the case in which the Hamiltonian has degree at most 3. This result is concerned with the study of cubic surfaces.

## Resumen

En este trabajo se estudia el comportamiento al infinito de dos clases de Sistemas Hamiltonianos:

a) Sistemas Mecánicos con un Potencial Polinomial Homogéneo, y b) Sistemas Hamiltonianos con un Hamiltoniano Polinomial. Para estudiar (a), se utiliza una explosión tipo McGehee. En el análisis de (b), la principal herramienta es la Compactificación de Poincaré. En ambos casos, el flujo se puede extender hasta una variedad invariante llamada Variedad al Infinito. Para el caso (a), se da una descripción del flujo sobre la Variedad al Infinito, cuando el potencial es de grado a lo más 4. Para (b) se obtiene una clasificación de la topología de la Variedad al Infinito para los Hamiltonianos de grado menor o igual a 3. Este resultado está relacionado con el estudio de las superficies cúbicas.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Sistemas Hamiltonianos Clásicos Con Potencial Homogéneo</b>	<b>8</b>
2.1	Explosión al infinito	8
2.2	Puntos de equilibrio	10
2.3	Comportamiento casi-gradiente y soluciones homotéticas	12
2.4	Geometría de $E_h$ y $N_\infty$	18
<b>3</b>	<b>Dinámica Sobre <math>N_\infty</math>. Grado 2,3 y 4</b>	<b>20</b>
3.1	Forma Reducida de un Potencial Homogéneo de Tercer Grado	20
3.2	Clasificación de $N_\infty$ . Grado 3	26
3.3	Flujo en $N_\infty$ . Grado 3	30
3.4	Potencial Homogéneo de grado par	43
3.5	Clasificación de $N_\infty$ . Grado 2	45
3.6	Flujo en $N_\infty$ . Grado dos	47
3.7	Potencial homogéneo de grado 4.	48
3.8	El Flujo en $N_\infty$ . Grado Cuatro	51
<b>4</b>	<b>Sistemas Hamiltonianos Polinomiales</b>	<b>55</b>
4.1	Compactificación de Poincaré de campos vectoriales polinomiales.	55
4.2	Compactificación de Poincaré para campos vectoriales polinomiales Hamiltonianos.	57
4.3	Algunas propiedades generales de $E_\infty$	59
<b>5</b>	<b>La Variedad <math>E^\infty</math>. Grado 2 y 3</b>	<b>67</b>
5.1	Clasificación topológica de la variedad $E^\infty$ . 2 grados de libertad.	67
5.1.1	Hamiltoniano Homogéneo de grado 2	69
5.1.2	Hamiltoniano Homogéneo de grado tres.	78
5.2	Las componentes conexas de $p$ .	80
5.2.1	Puntos de equilibrio. Grado 3.	82

**6 Apéndice**

**97**

**Bibliografía**

**102**

# Capítulo 1

## Introducción

En mecánica celeste se requiere describir el movimiento de los cuerpos sujetos a fuerzas gravitacionales mutuas. La dificultad de este problema ha promovido un gran desarrollo de la matemática, además de estimular la adaptación de métodos y técnicas de las más diversas ramas de la matemática, para explicar dichos movimientos. Tipicamente la dinámica queda descrita por un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \bar{p}}(\bar{x}, \bar{p}) = \bar{p}, \\ \dot{\bar{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{p}) = \frac{\partial U}{\partial \bar{x}}(\bar{x}),\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $H(\bar{x}, \bar{p}) = \frac{1}{2}|\bar{p}|^2 - U(\bar{x})$  es una constante de movimiento.

El potencial  $U(\bar{x})$  es homogéneo de grado  $-1$ , por lo que el campo vectorial (1) tiene una singularidad en el origen. Consecuentemente, el análisis de las trayectorias cerca de colisión total resulta especialmente difícil. Sin embargo, el estudio del sistema cerca de singularidades no es el único problema interesante en Mecánica Celeste; de acuerdo con G. Contopoulos [4], uno de los problemas importantes de la disciplina es el estudio de los escapes de las estrellas. Si una estrella tiene energía mayor que la de escape, ella se irá hacia infinito, a menos que además de la energía exista otra restricción que se lo impida. A fin de tener una buena descripción de la dinámica de escape, uno debe contestar preguntas como ¿Cuántas trayectorias de escape hay?

Cómo varían con el nivel de energía  $h$ , los conjuntos de trayectorias de escape?, ¿Cómo se van hacia infinito, las trayectorias de escape?.

Entre las varias técnicas utilizadas para estudiar el sistema alrededor del origen, McGehee tomó de la Geometría Algebraica el concepto de la explosión (Blow-up), [15]. Con la transformación de McGehee, la singularidad es reemplazada por una variedad bidimensional, llamada la variedad de colisión. Posteriormente, Lacomba y Simó siguiendo la idea de McGehee, introducen la explosión al infinito para el potencial Newtoniano, con lo cual logran pegarle a la integral de energía una variedad frontera, de modo que cada vecindad del infinito es transformada en una vecindad de dicha variedad [20].

Por otra parte es conveniente observar que en muchos problemas de la mecánica, el potencial es homogéneo, aunque no de grado  $-1$ . A este respecto, se puede resaltar el potencial cúbico

$$U(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3,$$

que Henon y Heiles utilizaron para su estudio sobre la existencia de la tercera integral primera en el movimiento de una estrella que se mueve en un potencial galáctico con simetría cilíndrica, [14].

En este trabajo se estudiarán algunos aspectos del problema de las trayectorias de escape tanto para un sistema Hamiltoniano con potencial polinomial homogéneo de grado entero positivo, como para sistemas Hamiltonianos polinomiales con dos grados de libertad. En el primer caso utilizaremos las ecuaciones de la explosión al infinito introducidas por Lacomba-Ibort en [17] y en el segundo caso usaremos la compactificación de Poincaré de un campo vectorial polinomial; para esta parte serán muy valiosos los cálculos de [6].

El comportamiento asintótico de Sistemas Hamiltonianos Clásicos con potencial homogéneo de grado positivo  $d$ , son estudiados en los Capítulos 2 y 3. Para esta parte la herramienta esencial es una explosión al infinito tipo McGehee que fué analizada por Lacomba e Ibort [17]. Este concepto es introducido en el Capítulo 2 para un

sistema hamiltoniano con dos grados de libertad de la forma

$$H(x, y, p_1, p_2) = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) - U(x, y),$$

con  $U$  una función homogénea de grado  $d > 0$ . Para aplicar una explosión al infinito se transforman las coordenadas del espacio de configuración a coordenadas polares, pero con la coordenada radial substituida por su recíproca. Las nuevas coordenadas posicionales son  $\rho, \theta$ , las cuales satisfacen las relaciones

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad x = \frac{1}{\rho} \cos \theta; \quad y = \frac{1}{\rho} \sin \theta.$$

Dado que la relación de energía tiene que ser regular en  $\rho = 0$ , las nuevas componentes radial y tangencial se definen como

$$v = \rho^{d/2} (-\dot{\rho}/\rho^2), \quad u = \rho^{d/2} (\rho^{-1}\dot{\theta}).$$

Después de un cambio de escala en el tiempo  $\frac{dt}{d\tau} = \rho^{d/2-1}$ , las ecuaciones hamiltonianas se convierten en el sistema

$$\begin{aligned} \rho' &= -\rho v, & v' &= u^2 - \frac{d}{2}v^2 + dU(\theta), \\ \theta' &= u, & u' &= -\frac{d+2}{2}uv + U'(\theta), \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde  $U(\theta) = U(\cos \theta, \sin \theta)$  y  $' = d/d\tau$ . En las nuevas coordenadas el nivel de energía  $H = h$  está dado por la variedad de dimensión 3

$$E_h = \left\{ (\rho, \theta, v, u) \mid \rho > 0, \frac{1}{2} (u^2 + v^2) = U(\theta) + \rho^d h \right\}.$$

Como el sistema (1.2) y la relación de energía están bien definidas en infinito, i.e.  $\rho = 0$ , a  $E_h$  se le agrega una frontera bidimensional, llamada superficie al infinito dada por

$$N_\infty = \left\{ (\rho, \theta, v, u) \mid \rho = 0, \frac{1}{2} (u^2 + v^2) = U(\theta) \right\},$$

la cual es independiente de  $h$  e invariante bajo el flujo.

En el Capítulo 2 se estudian algunas propiedades del flujo sobre la variedad  $N_\infty$ . Así, después de describir la explosión al infinito en la Sección 2.1, se demuestra en la Sección 2.2 que genéricamente los puntos de equilibrio son hiperbólicos, por

lo que el conocimiento del flujo sobre la superficie compacta  $N_\infty$  da información asintótica sobre las soluciones que escapan al infinito. La Sección 2.4 está dedicada al análisis de las soluciones homotéticas y se demuestra que el flujo sobre  $N_\infty$  es cuasigradiante respecto a  $v$ . También se hace ver que las variedades invariantes se cortan transversalmente a lo largo de las soluciones homotéticas. La Sección 2.4 es la última de este Capítulo y en ella se da una descripción geométrica de  $E_h$  y de  $N_\infty$ .

El Capítulo 3 se estudia la dinámica sobre la superficie al infinito para potenciales homogéneos de grado 2,3 y 4. A fin de reducir el número de parámetros a tratar, en cada uno de estos casos se da una forma normal de los potenciales; ésto se hace en las Secciones 3.1, 3.4 y 3.7. El espacio de parámetros para la forma normal de grado 3 es de dimensión 2. En la Sección 3.2 se obtiene una clasificación completa de la topología de  $N_\infty$  en términos de los parámetros; se determina que esencialmente existen tres tipos de superficie: i) Esferas con dos puntos de equilibrio, ii) Esferas con 3 parejas de puntos de equilibrio "antipodales". Una de esas parejas está formada por puntos sillar, y iii) Superficies no-suaves, formadas por la unión de dos esferas tangentes. En la Sección 3.4 se da una descripción bastante completa del flujo para grado 3. Debido a que el flujo es cuasigradiante el caso interesante a tratar es el caso ii). Debido a que las soluciones del sistema (1.2) tienen la simetría  $(\rho, \theta, v, u, \tau) \mapsto (\rho, \theta, -u, -v, -\tau)$ , es suficiente con analizar el comportamiento de las variedades invariantes de los puntos sillar, las cuales resultan separatrices del flujo. En las Secciones (3.4-3.8) se aplican las mismas técnicas para analizar grado 2 y 4, y aunque en forma general se obtienen resultados análogos, en estos casos la variedad  $N_\infty$  puede ser un toro con varios puntos de equilibrio o incluso un conjunto vacío. Potenciales polinomiales homogéneos de grado 3 e integrables fueron clasificados por Gramaticos et al [11]. Nosotros encontramos que la integrabilidad no se refleja en el comportamiento asintótico de las soluciones.

Un campo vectorial  $X$  en  $\mathbb{R}^n$  se puede proyectar sobre cada hemisferio de una esfera  $S^n$ , por medio de la proyección central. Si el campo es polinomial, existe un campo vectorial  $\bar{X}$  sobre toda la esfera que coincide con cada una de las proyecciones. A este campo  $\bar{X}$  se le llama la compactificación de Poincaré del campo  $X$ . Es importante notar que cada vecindad al infinito de  $\mathbb{R}^n$ , se proyecta sobre una vecindad

del ecuador  $S^{n-1}$  de la esfera, de modo que el comportamiento del campo  $\tilde{X}$  sobre el ecuador determina la dinámica al infinito del campo  $X$ . Este proceso se aplica a un sistema hamiltoniano polinomial para estudiar su comportamiento asintótico. Siguiendo las líneas de [6], en la Sección 4.1 se describe la compactificación de Poincaré para un campo vectorial polinomial. Este proceso se particulariza en la Sección 4.2, para campos polinomiales Hamiltonianos  $X_H$ . Aquí se demuestra que el nivel de energía  $H = h$  se mapea sobre cada hemisferio en un subconjunto  $E_h^\pm$  invariante bajo el flujo de  $\tilde{X}_H$ . Además, si  $H_{m+1}$  es la parte homogénea de grado máximo del polinomio  $H$ , resulta que el conjunto  $E^\infty = S^{n-1} \cap (H_{m+1} = 0)$  es invariante bajo el flujo y la frontera de  $E_h^\pm$  está contenida en  $E^\infty$ . Así, en este enfoque, es la dinámica sobre  $E^\infty$  la que guarda la información sobre el comportamiento asintótico del sistema hamiltoniano. En la Sección 4.3 se demuestran algunas propiedades generales de  $E^\infty$ . En particular se calcula su  $2k+1$  grupo de homología, para dimensión  $n-1 = 4k+3$ . Como corolario de esto, resulta que para 2 grados de libertad  $E^\infty$  no puede ser una superficie de género impar. El estudio de la topología de  $E^\infty$  para  $m=2$  y 2 grados de libertad, nos lleva al problema de la clasificación de las superficies cúbicas. Este problema fue estudiado por B. Segre en [23], para el caso no-singular y por Bruce y Wall en [2], para superficies singulares; utilizando para ello técnicas de Geometría Proyectiva. En este trabajo se aborda el mismo problema pero tomando como herramienta fundamental el Teorema del Índice de Poincaré-Hopf, para aprovechar que se tiene un campo vectorial invariante sobre  $E^\infty$ . Esto permite en principio determinar la topología de la superficie para cualquier polinomio homogéneo de grado tres. En Capítulo 5 se da la metodología general para determinar la topología de las superficies cúbicas. Con base en una forma normal para polinomios homogéneos de grado 3, propuesta por Arnold [1], en la Sección 5.2.1 se da la forma normal para cuando la superficie cúbica es una esfera, tres esferas o un bitoro. El caso de superficies reducibles es tratado en la Sección 5.1.1. En la Sección previa se demuestra que para superficies no-singulares,  $E^\infty$  es homeomorfa a un toro, es la unión de dos esferas ajenas o es vacía, cuando  $m=2$  y  $n-1=3$ .

Mi agradecimiento a Fernando Brambila P., Joaquín Delgado F., Francisco González A., Santiago López de M., Arturo Olvera Ch., Ernesto Pérez Ch., Javier Pulido C. y

muy especialmente a Ernesto Lacomba Z. por el apoyo y confianza que me mostraron durante la realización de este trabajo.

## Capítulo 2

# Sistemas Hamiltonianos Clásicos Con Potencial Homogéneo

En este capítulo se estudian algunas características dinámicas del sistema que se obtiene al aplicar una explosión al infinito de tipo McGehee, a un sistema hamiltoniano con potencial polinomial homogéneo de segundo grado y con dos grados de libertad. Mediante este cambio de coordenadas y después de un reescalamiento del tiempo, al conjunto de nivel  $h$  de la energía, se le agrega una variedad  $N_\infty$  bidimensional llamada variedad al infinito, a la cual convergen las trayectorias del sistema que se escapan al infinito. Todos los puntos de equilibrio son hiperbólicos y pertenecen a  $N_\infty$ . También se determinan las soluciones homotéticas para cada nivel de energía y se demuestra la transversalidad a lo largo de ellas, de las variedades estables e inestables de los puntos de equilibrio. Por último, además de demostrar el carácter cuasigradiante del flujo, respecto a la velocidad radial  $v$ , se describe la variedad  $N_\infty$ .

### 2.1 Explosión al infinito

Sea  $U(x, y)$  un potencial homogéneo de grado positivo  $d$ . El Hamiltoniano es  $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - U(x, y)$ , con el sistema asociado

$$\dot{x} = p_1 \quad , \quad \dot{y} = p_2, \quad (2.1)$$

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \dot{p}_2 = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

El nivel de energía  $h$  está determinado por

$$\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - U(x, y) = h. \quad (2.2)$$

Sea  $E_h$  el conjunto de puntos  $(x, y, p_1, p_2)$  que satisfacen la ecuación (2.2). De la fórmula de Euler para funciones homogéneas, se deduce que los puntos de equilibrio del sistema (2.1), pertenecen al nivel  $E_0$ .

Para estudiar el problema de escape de las trayectorias es conveniente introducir las ecuaciones de la explosión al infinito analizadas por Lacoma e Ibor en [17]:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ Q &= \rho(x, y) = (X, Y), \\ \bar{P} &= \rho^{d/2}(p_1, p_2), v = \bar{P} Q'. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Entonces (2.1) se convierte en

$$\begin{aligned} \rho' &= -\rho v; \quad \bar{P}' = \frac{-d}{2} v \bar{P} + \nabla U(Q), \\ Q' &= \bar{P} - v Q, \end{aligned} \quad (2.4)$$

con la integral

$$\frac{1}{2} \|\bar{P}\|^2 = U(Q) + \rho^d h. \quad (2.5)$$

La prima indica derivada respecto a  $\tau$  y

$$\frac{dt}{d\tau} = \rho^{-1+d/2}.$$

Así, tomando coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

hacemos  $X = \cos \theta, Y = \sin \theta$ . Resulta que

$$\begin{aligned} \|\bar{P}\|^2 &= \rho^{d-4}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2), \\ v &= -\rho^{d/2-2}\dot{\rho}. \end{aligned}$$

Definimos  $u = \rho^{\frac{d}{2}-1}\dot{\theta}$ . Así en las nuevas coordenadas  $\rho, \theta, v, u$ , el sistema se convierte en

$$\begin{aligned} \rho' &= -\rho v, & v' &= u^2 - \frac{d}{2}v^2 + dU(\theta), \\ \theta' &= u, & u' &= -\frac{d+2}{2}uv + U'(\theta), \end{aligned} \quad (2.6)$$

con la relación

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) = U(\theta) + \rho^d h. \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) define una variedad tridimensional  $E_h$  cuya frontera ( $\rho = 0$ ) es una superficie de revolución

$$N_\infty = \{(\rho, \theta, v, u) | \rho = 0, \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = U(\theta), U(\theta) \geq 0\},$$

que no depende del nivel de energía  $h$ . Ver Figura 2.1.

Para conocer cómo se escapan las trayectorias al infinito, debemos analizar la dinámica del sistema cerca de  $N_\infty$ .

## 2.2 Puntos de equilibrio

Si  $h \neq 0$ , entonces los puntos de equilibrio pertenecen a  $N_\infty$  y se determinan de las ecuaciones

$$\rho = 0, \quad u = 0, \quad U'(\theta) = 0, \quad v^2 = 2U(\theta),$$

donde por supuesto  $U(\theta) \geq 0$ . Cuando  $h = 0$ , a los puntos anteriores, se deben agregar los que satisfacen

$$u = 0 = v, \quad U(\theta) = 0 = U'(\theta), \quad \rho > 0,$$

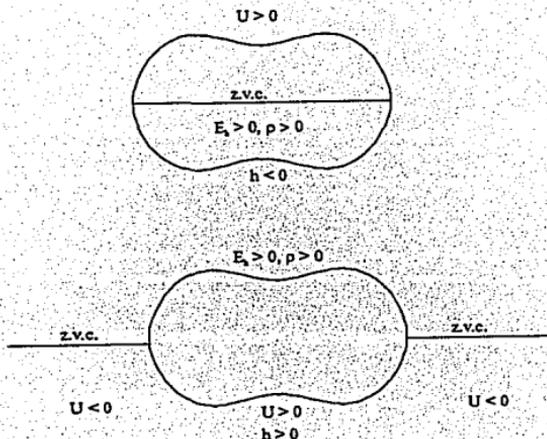


Figura 2.1:

los cuales resultan degenerados, por no ser aislados.

La matriz Jacobiana de (2.6) es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ dU'(\theta) & -dv & 2u \\ U''(\theta) & -(\frac{d+2}{2})u & -(\frac{d+2}{2})v \end{pmatrix},$$

y al calcularla en los puntos de equilibrio

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -dv_0 & 0 \\ U''(\theta_0) & 0 & -(\frac{d+2}{2})v_0 \end{pmatrix}.$$

Si  $h \neq 0$ , entonces los valores propios de  $J$  están dados por

$$\lambda_1 = -dv_0,$$

$$\lambda_2 = \frac{\frac{d+2}{2}v_0 + \sqrt{\left(\frac{d+2}{2}v_0\right)^2 + 4U_0''}}{-2},$$

$$\lambda_3 = \frac{\frac{d+2}{2}v_0 - \sqrt{\left(\frac{d+2}{2}v_0\right)^2 + 4U_0''}}{-2},$$

con  $v_0 = \pm \sqrt{2U(\theta_0)}$ ,  $U_0'' = U''(\theta_0)$ . Por lo tanto, los puntos de equilibrio son atractores si  $v_0 > 0$  y son repulsivos si  $v_0 < 0$ . Se tienen 2 puntos de equilibrio  $A = (0, \theta_0, \sqrt{2U(\theta_0)}, 0)$  y  $B = (0, \theta_0, -\sqrt{2U(\theta_0)}, 0)$  cuyas características dependen del discriminante

$$\Delta = \left(\frac{d+2}{2}\right)^2 v_0^2 + 4U_0''.$$

Consideremos primero el caso  $U(\theta_0) > 0$ :

1) Si  $U_0'' < 0$ , ( $U(\theta)$  tiene un máximo en  $\theta_0$ ). Entonces  $A$  es atractor y  $B$  es repulsor. En el caso en que  $\Delta < 0$ , las trayectorias espiralan cerca de estos puntos.

2) Si  $U_0'' > 0$ , ( $U(\theta)$  tiene un mínimo en  $\theta_0$ ). Entonces  $A$  tiene una variedad estable de dimensión 2 y una inestable de dimensión 1. Análogamente para  $B$ , su variedad inestable es de dimensión 2 y la estable de dimensión 1. (Ver Figura 2.2)

Si  $U(\theta_0) = 0$ , los valores propios son:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{U_0''}$ ,  $\lambda_3 = -\sqrt{U_0''}$  y en este caso degenerado,  $N_\infty$  no es suave alrededor del punto de equilibrio. Sin embargo cuando  $U_0'' > 0$ , el Teorema de la Variedad Central asegura la existencia de tres variedades invariantes de dimensión 1; una de ellas es estable y otra inestable, ambas tangentes a espacios lineales unidimensionales; entonces debido a que el sistema es cuasigradiante, estas variedades resultan tangentes al conjunto  $\{v = 0\}$  sobre  $N_\infty$ . Sobre la tercera variedad, llamada central, no se puede decir nada.

## 2.3 Comportamiento casi-gradiente y soluciones homotéticas

El sistema (2.6) es casi-gradiente con respecto a  $v$ , en  $\rho \geq 0$  si  $h < 0$ . Esto significa que  $v$  es siempre creciente a lo largo de las soluciones, excepto en los puntos de

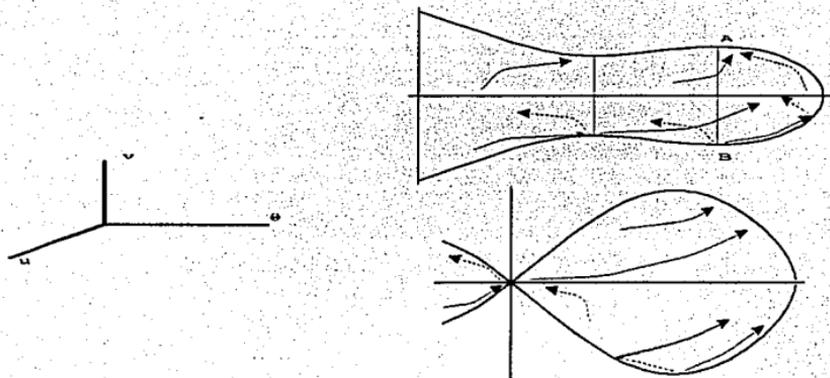


Figura 2.2:

equilibrio del flujo. (En Mecánica Celeste generalmente se obtiene el comportamiento casi-gradiente sólo para  $\rho = 0$ ).

En efecto, por (2.7)

$$\frac{d}{2}u^2 + \frac{d}{2}v^2 \leq dU(\theta),$$

si  $h < 0$ . Por lo tanto

$$v' = u^2 - \frac{d}{2}v^2 + dU(\theta) \geq (1 + \frac{d}{2})u^2,$$

así que

$$v' \geq 0. \tag{2.8}$$

Además la igualdad en (2.8) se da sólo si  $u = 0$  y  $\frac{1}{2}v^2 = U(\theta)$ ; si esto ocurre, la relación (2.7) nos dice que necesariamente  $\rho = 0$ . En estos puntos  $\rho' = 0$ ,  $\theta' = 0$ , pero  $u' = U'(\theta)$  es diferente de cero, en general. Falta verificar que si  $v' = 0$  y el

punto no es de equilibrio, o sea  $U'(\theta) \neq 0$ , entonces  $v$  es creciente. Esto es cierto ya que

$$v'' = 2uv' - dvv' + dU'(\theta)u = 0;$$

pero

$$\begin{aligned} v''' &= 2u'{}^2 + 2uv'' - dv'{}^2 - dvv'' + dU''(\theta)u + dU'(\theta)u' \\ &= (2+d)U'{}^2(\theta) > 0, \end{aligned}$$

bajo las hipótesis de arriba.

Si  $h \geq 0$  el campo (2.6) es casi-gradiente solamente sobre la superficie ( $\rho = 0$ ). En efecto, si  $\rho = 0$  la desigualdad (2.8) siempre es válida.

La región definida por  $u = 0$  y  $\theta_0$  cualquier cero de  $U'(\theta)$  es invariante bajo el flujo de (2.6) y sobre ella se encuentra una clase especial de órbitas. El sistema (2.6) resulta

$$\rho' = -\rho v, \quad v' = -\frac{d}{2}v^2 + dU(\theta_0), \quad (2.9)$$

y la restricción de (2.7) es

$$v^2 = 2U(\theta_0) + 2\rho^d h. \quad (2.10)$$

A las soluciones de (2.9) y (2.10) se le conocen como soluciones homotéticas y sus trayectorias son rectas en el espacio  $\{(\theta, v, u)\}$ . Vea Figura 2.3.

Si  $h \geq 0$ , tenemos dos soluciones homotéticas para cada valor crítico  $\theta_0$  del potencial  $U$ .

Si  $h < 0$ , no existen trayectorias homotéticas en la dirección  $\theta_0$  con  $U(\theta_0) = 0$ , porque no existen puntos que satisfagan (2.10). Si  $U(\theta_0) > 0$ , la órbita homotética es una órbita heteroclinica que une a los puntos de equilibrio  $A^- = (0, \theta_0, -\sqrt{2U(\theta_0)}, 0)$  y  $A^+ = (0, \theta_0, \sqrt{2U(\theta_0)}, 0)$ ; por lo tanto pertenece a la intersección de la variedad inestable  $V^i$  del punto  $A^-$  con la variedad estable  $V^e$  del punto  $A^+$ . En el análisis de la estructura geométrica de estas variedades, a lo largo de la órbita homotética será muy útil la simetría

$$(\rho, \theta, v, u, \tau) \rightarrow (\rho, \theta, -v, -u, -\tau). \quad (2.11)$$

De esta simetría se sigue que si la trayectoria  $(\rho(\tau), \theta(\tau), v(\tau), u(\tau))$  se acerca

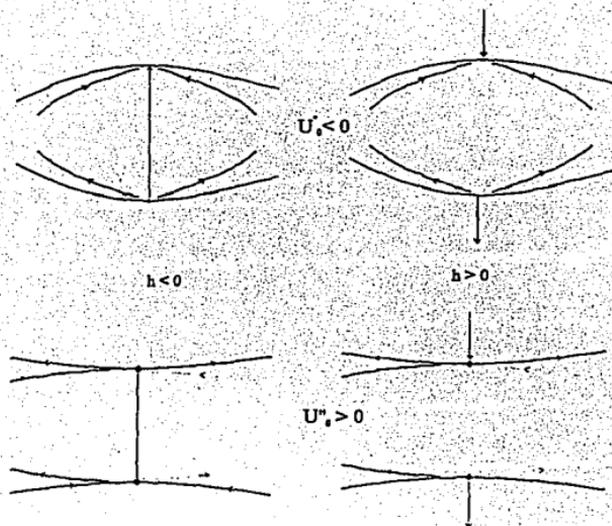


Figura 2.3:

al punto  $A^+$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$ , entonces la curva  $(\rho(-\tau), \theta(-\tau), -v(-\tau), -u(-\tau))$  se acerca a  $A^-$  cuando  $\tau \rightarrow -\infty$ .

La ecuación variacional a lo largo de la órbita homotética está dada por

$$\begin{pmatrix} \theta' \\ v' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -d v(\tau) & 0 \\ U''_0 & 0 & -\left(\frac{d+2}{2}\right) v(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ v \\ u \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

con  $U''_0 = U''(\theta_0)$ .

Parametricemos la órbita homotética  $\xi$  de manera que  $\xi(0)$  pertenezca al nivel  $\{v=0\}$ . Tomemos una vecindad suficientemente pequeña alrededor del punto  $\xi(0)$ . Sea  $\beta_0^-$  la curva que se obtiene al intersectar  $V^i$  con la sección  $\{v=0\}$ , en dicha vecindad. Denotemos con  $T\beta_0^-$  el vector tangente a  $\beta_0^-$  en el punto  $\xi(0)$  y con  $\varphi$ ,

el flujo del campo vectorial al tiempo  $\tau$ . Ahora  $\varphi_\tau(\beta_0^-)$  es la curva que se obtiene al transportar  $\beta_0^-$  con el flujo, al tiempo  $\tau$ . Usando la regla de la cadena, el vector tangente a la curva  $\varphi_\tau(\beta_0^-)$  en el punto  $\xi(\tau)$  está dado por  $T\beta_\tau^- = D\varphi_\tau(\xi(\tau)) \cdot T\beta_0^-$ . De esto se sigue que  $T\beta_\tau^-$  es un vector tangente a la variedad  $V^i$  en el punto  $\xi(\tau)$ , el cual tiene componente nula en la dirección  $v$ , para todo  $\tau$ , debido a la segunda ecuación del sistema (2.12). Cuando  $\tau \rightarrow -\infty$ , tenemos que  $\xi(\tau) \rightarrow A^-$  y entonces por continuidad del campo se sigue que  $T\beta_\tau^-$  converge a un vector tangente  $T\beta_{-\infty}^-$  a  $V^i$  en el punto  $A^-$ . Como  $T\beta_\tau^-$  tiene componente nula en la dirección  $v$ , lo mismo ocurre con el vector límite  $T\beta_{-\infty}^-$ , por lo tanto debe pertenecer a  $V^i \cap N^\infty$ . Del mismo modo se construye un vector  $T\beta_\tau^+$  para la variedad  $V^e$ . Sea  $\alpha^\pm(\tau)$  el ángulo que forma la proyección sobre el plano  $\{(\theta, u)\}$  del vector  $T\beta_\tau^\pm$ , por el punto de la órbita homotética. Fácilmente se ve que por la simetría (2.11)  $\alpha^+(\tau) = -\alpha^-(-\tau)$ . De esta igualdad se sigue que si  $V^e$  y  $V^i$  no se intersectan transversalmente a lo largo de la curva homotética, necesariamente el incremento que recibe  $\alpha^-$ , desde que inicia en  $T\beta_0^-$  hasta que termina en  $T\beta_{-\infty}^-$ , no debe pasar por un múltiplo de  $\pi/2$ . De esta manera hemos demostrado el siguiente resultado

**Lema 1** *Supongamos que  $U''(\theta_0) > 0$ . Una condición necesaria para que las variedades  $V^e$  y  $V^i$ , se intersecten transversalmente a lo largo de la órbita homotética, es que el ángulo  $\alpha^+(\tau)$  no pase por un múltiplo de  $\pi/2$ .*

Ahora demostraremos que para todo potencial homogéneo de grado positivo, las variedades estables e inestables se intersectan transversalmente, si el nivel de energía  $h < 0$ . Un resultado análogo se tiene para potenciales homogéneos de grado  $-1$ . Ver [20] y [18].

**Teorema 2** *Sea  $U(x, y)$  un potencial homogéneo de grado  $d > 0$  y  $A^\pm = (0, \theta_0, \pm\sqrt{2U(\theta_0)}, 0)$  dos puntos de equilibrio. Supongamos que  $U''(\theta_0) > 0$ , entonces la variedad estable  $V^e(A^+)$  corta transversalmente a la variedad inestable  $V^i(A^-)$ , a lo largo de la órbita homotética.*

Demostración: Tomando coordenadas polares en el plano  $\{(\theta, u)\}$  de la forma

$$\theta = R \cos(\alpha) \quad ; \quad u = R \sin(\alpha), \quad (2.13)$$

se tiene que

$$\alpha' = \frac{d}{d\tau} \left( \arctan \frac{u}{\theta} \right) = \frac{1}{u^2 + \theta^2} (\theta u' - u \theta'),$$

usando las expresiones de  $\theta'$  y  $u'$  dadas por la ecuación (2.12) se obtiene

$$\alpha' = \frac{1}{R^2} \left( U_0'' \theta^2 - \left( \frac{d+2}{2} \right) \theta v u - u^2 \right) \quad (2.14)$$

Resolviendo la ecuación (2.9), con condición inicial  $v(0) = 0$ , se obtiene la solución

$$v(\tau) = \sqrt{2U_0} \tanh \left( \frac{d}{2} \sqrt{2U_0} \tau \right) \quad (2.15)$$

Así substituyendo  $\theta$ ,  $u$  y  $v(\tau)$  dadas por (2.13) y (2.15), en la ecuación (2.14), se obtiene finalmente

$$\alpha'' = a \cos^2(\alpha) - b \cos(\alpha) \sin(\alpha) \tanh(c\tau) - \text{Sen}^2(\alpha) = f(\alpha, \tau), \quad (2.16)$$

con  $a = U_0''$ ,  $b = \sqrt{2U_0} \left( \frac{d+2}{2} \right)$ ,  $c = \frac{d}{2} \sqrt{2U_0}$ .

Ahora demostraremos que sobre el intervalo  $[0, \infty)$  el ángulo  $\alpha$  se incrementa menos que  $\pi/2$ , lo que de acuerdo con el Lema (1), demuestra la transversalidad. En la ecuación (2.16) se considerarán la condición inicial  $\tau = 0$ ,  $\alpha = \alpha_0$ , siendo  $\alpha_0$  el único valor del ángulo en  $(0, \pi/2)$  tal que  $f(\alpha, 0) = 0$ .

Para cada  $\tau > 0$ , existe un único valor  $\bar{\alpha}(\tau)$  tal que  $f(\bar{\alpha}(\tau), \tau) = 0$ ; es decir

$$a \cos^2(\alpha) - b \cos(\alpha) \sin(\alpha) \tanh(c\tau) = \text{Sen}^2(\alpha),$$

como  $\tanh(c\tau)$  es positiva y creciente en  $[0, \infty)$  y  $b \cos(\alpha) \sin(\alpha)$  es positiva en  $(0, \pi/2)$ , de la última ecuación se sigue que  $\bar{\alpha}(\tau)$  es una función decreciente, acotada por abajo por 0. Además es diferenciable ya que  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\bar{\alpha}(\tau), \tau) \neq 0$ . Un cálculo sencillo nos permite verificar que la derivada de  $\bar{\alpha}(0)$  es menor que cero. Como  $\alpha'(0) = 0$  y  $\alpha(0) = \bar{\alpha}(0)$ , se sigue que existe un intervalo donde  $\alpha(\tau) > \bar{\alpha}(\tau)$ . Supongamos que existe  $\tau_1 > 0$  para el cual se cumple la desigualdad  $\alpha(\tau_1) < \bar{\alpha}(\tau_1)$ . Sea  $\tau_0$ , el primer instante en que  $\alpha(\tau_0) = \bar{\alpha}(\tau_0)$  y  $\bar{\alpha}(\tau) > \alpha(\tau)$ , para toda  $\tau \in (\tau_0, \tau_0 + \epsilon)$ , para alguna  $\epsilon > 0$ . Ya que  $f(\bar{\alpha}(\tau_0), \tau_0) = 0$ , se tiene que  $\alpha'(\tau_0) = 0$ , pero como  $\bar{\alpha}'(\tau_0) < 0$  se tendría que  $\bar{\alpha}(\tau) < \alpha(\tau)$  a la derecha de  $\tau_0$ , llegando a una contradicción. Por lo tanto  $\bar{\alpha}(\tau) < \alpha(\tau)$  para toda  $\tau > 0$ . Por último, dado que  $f(\alpha, \tau) < 0$  para  $\alpha > \bar{\alpha}(\tau)$ ,

se sigue que  $\alpha(\tau)$  es una función decreciente. Ahora el resultado se obtiene de la desigualdad

$$\pi/2 > \alpha_0 > \alpha_0 - \bar{\alpha}(\tau) > \alpha_0 - \alpha(\tau). \quad \square$$

## 2.4 Geometría de $E_h$ y $N_\infty$

Para cualquier  $h$ , el conjunto  $N_\infty$  consiste de una superficie de revolución, más posiblemente algunos puntos aislados.

Dado  $\rho \geq 0$ , sea  $E(\rho) = \{(\theta, v, u) | \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = U(\theta) + \rho^2 h\} \subset \mathbb{R}^3$ .

Nótese que  $E(\rho)$  es una superficie de revolución (o un conjunto vacío) de radio  $\sqrt{2U(\theta) + 2\rho^2 h}$ .

y

$$E_h = \cup \{(\rho, z) | z \in E(\rho)\}.$$

Sea  $I = \{\theta | U(\theta) \geq 0\}$ . Si  $h > 0$  entonces  $I_\rho = \{\theta | U(\theta) + \rho^2 h \geq 0\}$ . Por lo tanto  $E(\rho)$  envuelve a  $N_\infty$  y a su vez  $E(\rho_1)$  está en el interior de  $E(\rho_2)$  si  $\rho_1 < \rho_2$ .

Si  $h < 0$ , sucede precisamente lo contrario.

Si  $\rho_1 > \rho_2$  entonces  $I_{\rho_1} \subset I_{\rho_2}$  y como  $U(\theta)$  está acotada, existe  $\bar{\rho}$  tal que  $I_{\bar{\rho}}$  consiste de puntos aislados, de hecho  $I_{\bar{\rho}} = \{\theta | U(\theta) \text{ es máximo absoluto}\}$ .

En la Figura 2.4 se muestran los cortes de  $E(\rho)$  con el plano  $u = 0$ . por lo tanto  $E_h = N_\infty \cup N^*$ ;  $N^*$  denota la región acotada por  $N_\infty$ . Si  $h = 0$ , entonces  $E_h$  es el cilindro  $N_\infty \times \mathbb{R}^+$ .

En la Figura 2.5 se muestran las formas típicas para la gráfica de  $U(\theta)$  y las correspondientes para  $N_\infty$ . En esa figura, los puntos A son atractores y los B repulsores. El punto C tiene un valor propio cero, uno positivo y uno negativo. En los puntos D sobre  $N_\infty$  hay una variedad inestable y una estable.

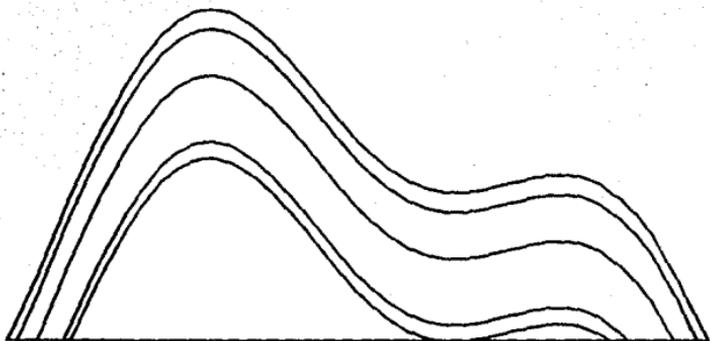


Figura 2.4:

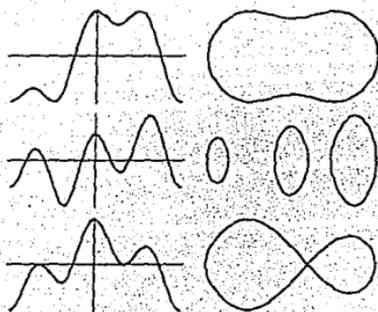


Figura 2.5:

## Capítulo 3

### Dinámica Sobre $N_\infty$ . Grado 2,3 y 4

En este capítulo se deduce una forma normal para los sistemas hamiltonianos con potencial polinomial homogéneo de tercer grado y con dos grados de libertad, que sólo depende de dos parámetros. Utilizando esta forma normal se obtiene una clasificación de  $N_\infty$  y se analiza la dependencia del flujo sobre  $N_\infty$ , respecto a los parámetros, para tales sistemas. Los métodos usados en este caso, se aplican para obtener una clasificación completa del flujo sobre  $N_\infty$ , para todos los potenciales de grado dos y para la familia de potenciales de grado cuatro de la forma  $y^4 + \rho x^2 y^2 + kx^4$

#### 3.1 Forma Reducida de un Potencial Homogéneo de Tercer Grado

Sea

$$U(x, y) = ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3, \quad (3.1)$$

un potencial homogéneo de grado 3.

**Proposición 3** Con el cambio de variable  $X = a^{1/3}x$ ,  $Y = a^{1/3}y$  y el reescalamiento del tiempo

$$\frac{dt}{d\tau} = a^{-1/3},$$

El sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_1, & \dot{y} &= p_2, \\ p_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & p_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

con la primera integral

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - U(x, y),$$

se transforma en el sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} X' &= P_1, & Y' &= P_2, \\ P_1 &= -\frac{\partial H}{\partial X}, & P_2 &= -\frac{\partial H}{\partial Y}, \end{aligned}$$

con un potencial

$$U(X, Y) = Y^3 + a^{-1}(bXY^2 + cX^2Y + dX^3). \quad (3.3)$$

Nota: (') denota derivada respecto al nuevo tiempo  $\tau$

Demostración:  $X = a^{1/3}x \Rightarrow X' = a^{1/3}\dot{x}a^{-1/3} = \dot{x} = p_1$ .

Análogamente

$$Y' = \dot{y} = p_2.$$

Sea

$$P_1 = X', \quad P_2 = Y'.$$

De las ecuaciones (3.2) se obtiene

$$\begin{aligned} P_1' &= \dot{P}_1 \frac{dt}{d\tau} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)(a^{-1/3}) \\ &= -(by^2 + 2cxy + 3dx^2)a^{-1/3} \\ &= -a^{-2/3}(bY^2 + 2cXY + 3dX^2)a^{-1/3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P_1' &= -a^{-1}(bY^2 + 2cXY + 3dX^2) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial X}. \end{aligned}$$

En forma semejante se demuestra que

$$P_2' = \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad \square$$

A continuación se demuestra que aún cuando  $a$  y  $d$  sean iguales a 0 el potencial se puede llevar a la forma (3.3)

**Proposición 4** *Un sistema Hamiltoniano con energía*

$$H(x, y, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - bxy^2 - cx^2y,$$

con el cambio de variable

$$x = X + Y, \quad y = X - Y,$$

y el escalamiento del tiempo

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{2}.$$

Se convierte en un sistema Hamiltoniano con potencial del tipo (3.1), de modo que los coeficientes de  $x^3$  y  $y^3$  no son simultáneamente iguales a cero.

Demostración:  $x = X + Y$ ,  $y = X - Y$ . Entonces

$$U(X, Y) = (b - c)Y^3 + (c - b)X^2Y + (-b - c)XY^2 + (b + c)X^3,$$

y

$$\dot{X} = \frac{1}{2}(\dot{x} + \dot{y}) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad \dot{Y} = \frac{1}{2}(p_1 - p_2).$$

Definimos

$$P_1 = X' = \sqrt{2}\dot{X} = \frac{\sqrt{2}}{2}(p_1 + p_2),$$

$$P_2 = Y' = \sqrt{2}\dot{Y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(p_1 - p_2);$$

de donde

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_1 - P_2),$$

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_1 + P_2).$$

Entonces

$$\begin{aligned} H(X, Y, P_1, P_2) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - U(X, Y) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(P_1 - P_2)^2 + \frac{1}{2}(P_1 + P_2)^2 \right) - U(X, Y) \\ &= \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) - U(X, Y). \end{aligned}$$

Facilmente se ve que se cumple

$$X' = \frac{\partial H}{\partial P_1}, Y' = \frac{\partial H}{\partial P_2}.$$

Además

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial X} = 2(c-b)XY + (-b-c)Y^2 + 3(b+c)X^2;$$

$$\begin{aligned} P_1' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(p_1 + p_2)\sqrt{2} = p_1 + p_2 \\ &= (by^2 + 2cxy + 2bxy + cx^2) \\ &= 2(c-b)XY + (-b-c)Y^2 + 3(b+c)X^2. \end{aligned}$$

Así

$$P_1' = -\frac{\partial H}{\partial X}.$$

Analogamente

$$P_2' = -\frac{\partial H}{\partial Y}. \quad \square$$

Resumiendo

**Corolario 5** *Todo potencial polinomial homogéneo de grado 3 se puede llevar a la forma*

$$U(x, y) = y^3 + \alpha xy^2 + \beta x^2 y + \gamma x^3.$$

Ejemplo 1.- Sea  $U(x, y) = -\alpha(x^2 y - \frac{y^3}{3})$  el potencial de Henon-Heiles. En este caso

$$a = \frac{\alpha}{3}, b = 0, c = -\alpha.$$

Entonces el tiempo  $\tau$  está dado por

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{1/3}$$

El nuevo potencial es

$$U(X, Y) = Y^3 + \frac{3}{\alpha}(-\alpha X^2 Y)$$

Esto es

$$U(X, Y) = Y^3 - 3X^2 Y$$

Ejemplo 2.- El potencial de Contopoulos es

$$U(x, y) = -\alpha xy^2$$

Ahora  $b = -\alpha$  y  $c = 0$ . Después de la transformación

$$x = X + Y, \quad y = X - Y$$

El potencial transformado es

$$U(X, Y) = -\alpha Y^3 + \alpha X^2 Y + \alpha XY^2 - \alpha X^3$$

Las variables  $t$  y  $\tau$  están relacionados por  $\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{2}$ .

El potencial anterior está en la forma (3.1), con

$a = -\alpha$ ,  $b = \alpha$ ,  $c = \alpha$ ,  $d = -\alpha$  y se convierte en el tipo standard

$$U(X, Y) = Y^3 - XY^2 - X^2 Y + X^3,$$

con un nuevo tiempo  $\tau'$  dado por

$$\frac{d\tau}{d\tau'} = (-\alpha)^{-1/3}$$

**Teorema 6** *Todo Sistema Hamiltoniano*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_1, \dot{y} = p_2, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \dot{p}_2 = -\frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

con  $U(x, y)$  un potencial del tipo (3.1), se convierte por medio de un cambio de variables, en un sistema de la forma (3.4) con un potencial

$$U(x, y) = y^3 + \alpha xy^2 + \beta x^3. \tag{3.5}$$

**Demostración:** Si  $b = 0 = c$ , entonces por la Proposición 4,  $U$  se lleva a la forma (3.5). Por otra parte si  $b = 0$  y  $c \neq 0$ , entonces por medio de la transformación

$$x \longrightarrow y,$$

$$y \longrightarrow x,$$

$U(x, y)$  se convierte en  $U(x, y) = dy^3 + cxy^2 + ax^3$ , al cual se le aplica la Proposición 4 para transformarlo a la forma requerida.

Por lo anterior, en las líneas que siguen se considerará que  $b \neq 0$ .

Sea  $X = rx + sy$  ;  $Y = -sx + ry$ . Entonces

$$x = -\frac{1}{r^2 + s^2}(-rX + sY), \quad (3.6)$$

$$y = -\frac{1}{r^2 + s^2}(sX - rY).$$

Al substituir (3.6) en (3.1), se encuentra que

$$U(X, Y) = c_1 Y^3 + c_2 X^2 Y + c_3 X Y^2 + c_4 X^3, \quad (3.7)$$

con  $c_2$  dado por

$$c_2 = \frac{cr^3}{(r^2 + s^2)^3} + \frac{2br^2s}{(r^2 + s^2)^3} - \frac{3dr^2s}{(r^2 + s^2)^3} + \frac{3ars^2}{(r^2 + s^2)^3} - \frac{2crs^2}{(r^2 + s^2)^3} - \frac{bs^3}{(r^2 + s^2)^3}.$$

Para cada  $s$ ,  $c_2$  es un polinomio cúbico en  $r$  cuyos coeficientes depende de  $a, b, c$  y  $d$ . Fijemos  $s = 1$  y  $r$  cualquiera de las raíces reales de la ecuación  $c_2 = 0$ . Con esta elección de  $r$  y  $s$ , (3.7) resulta ser

$$U(X, Y) = c_1 Y^3 + c_3 X Y^2 + c_4 X^3. \quad (3.8)$$

Definimos una nueva escala de tiempo  $\tau$  por

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{(r^2 + 1)^{1/2}} \quad (3.9)$$

$$P_1 = X' \quad ; \quad P_2 = Y'. \quad (3.10)$$

Entonces

$$P_1 = \frac{dX}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{(r^2 + 1)^{1/2}} (r\dot{p}_1 + s\dot{p}_2), \quad (3.11)$$

$$P_2 = \frac{dY}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{(r^2 + 1)^{1/2}} (-s\dot{p}_1 + r\dot{p}_2). \quad (3.12)$$

Al derivar (3.11) respecto a  $\tau$ , se llega a la igualdad

$$P_1' = \frac{1}{(r^2 + 1)^{1/2}} (r\dot{p}_1 + s\dot{p}_2),$$

de esta igualdad y de (3.4), resulta

$$P_1' = -\frac{1}{r^2 + 1} \left( r \frac{\partial U}{\partial x} + s \frac{\partial U}{\partial y} \right);$$

por otra parte  $\frac{\partial U}{\partial X} = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial X} \right)$

y por (3.6)  $\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{r}{r^2 + 1}$  ;  $\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{s}{r^2 + 1}$ . De lo anterior se obtiene

$$P_1' = -\frac{\partial U}{\partial X}, \quad (3.13)$$

$$P_2' = -\frac{\partial U}{\partial Y}. \quad (3.14)$$

(3.10), (3.13) y (3.14) demuestran la afirmación.  $\square$

### 3.2 Clasificación de $N_\infty$ . Grado 3

En esta sección se supondrá que el potencial  $U$  tiene la forma normal

$$U(x, y) = y^3 + axy^2 + bx^3.$$

Se dará una clasificación de  $N_\infty$ , en términos de los parámetros  $a$  y  $b$ . Recuérdese que  $N_\infty$  es la superficie de revolución que se obtiene al rotar la parte no-negativa de

$$U(\theta) = U(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \text{Sen}^3(\theta) + a\cos(\theta)\text{Sen}^2(\theta) + b\cos^3(\theta). \quad (3.15)$$

A continuación se da una propiedad general para potenciales polinomiales homogéneos  $U(x, y)$  de cualquier grado de homogeneidad  $d$ . Se verifica fácilmente que  $U(\theta) = U(\cos(\theta), \sin(\theta))$  y su derivada  $U'(\theta)$  son polinomios trigonométricos de grado  $d$ .

**Proposición 7** *Los polinomios trigonométricos  $U$  y  $U'$  de grado  $d$  tienen  $2k$  raíces con  $1 \leq k \leq d$ ; sin embargo, si  $d$  es par pueden no tener raíces. Además,  $U(\theta + \pi) = (-1)^d U(\theta)$  y  $U'(\theta + \pi) = (-1)^d U'(\theta)$  para toda  $\theta$ . En particular, si  $U(\theta_0) = 0$ , entonces  $U(\theta_0 + \pi) = 0$  y lo mismo es cierto para  $U'$ .*

**Demostración:** Por la homogeneidad de  $U$  se infiere que si  $U(x_0, y_0) = 0$  entonces  $U(\lambda x_0, \lambda y_0) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Así cada raíz de  $U(x, y)$  determina un ángulo  $\theta$  tal que  $U(\theta) = 0$  y  $U(\theta + \pi) = 0$ . Por otra parte, si  $L_1, L_2, \dots, L_n$  son rectas no horizontales que pasan por el origen, entonces pasan por los puntos  $(x_1, \bar{y}), (x_2, \bar{y}), \dots, (x_n, \bar{y})$ , con  $\bar{y}$  arbitraria y si  $U$  se anula en  $L_i$ , la abscisa  $x_i$  es raíz del polinomio  $U(x, \bar{y})$  de grado  $d$ , por lo tanto no pueden haber más de  $d$  rectas de ceros de  $U(x, y)$ . Obviamente, lo mismo vale para  $U'$ . La parte restante se verifica directamente.  $\square$ .

Para determinar la forma de  $N_\infty$ , debemos revisar el tipo de ceros de  $U(\theta)$  y de  $U'(\theta)$ .

**Definición 8** *El polinomio trigonométrico  $U(\theta)$  se dice que es de clase  $\{N_1, N_2\}$  si  $U$  tiene  $N_1$  raíces y  $U'$  tiene  $N_2$  raíces, módulo  $2\pi$ .*

De la Proposición 7, se sigue de  $N_1$  y  $N_2$  son siempre números pares. De Cálculo elemental se sigue que  $N_2 \geq N_1$ . En forma más precisa, se tiene

$$2d \geq N_2 \geq N_1 \geq 2, \text{ si } d \text{ es impar,}$$

y

$$2d \geq N_2 \geq N_1 \geq 0, \text{ si } d \text{ es par.}$$

Ahora regresamos al caso de grado 3. En la Figura 3.1 listamos las diferentes formas de  $U(\theta)$ , de acuerdo con su clase. No hay  $U(\theta)$  de los tipos  $\{4,2\}$ ,  $\{6,2\}$  y  $\{6,4\}$ .

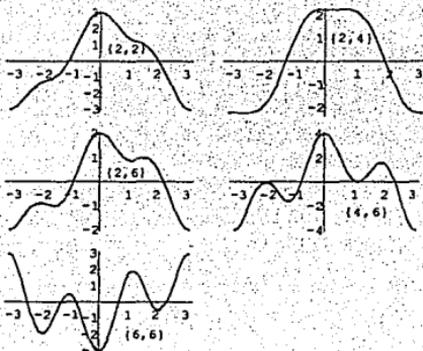


Figura 3.1:

El polinomio asociado a  $U'(\theta)$  es

$$V(x, y) = -ay^3 + 3xy^2 + (2a - 3b)x^2y. \quad (3.16)$$

De acuerdo con la Proposición 7 (y su demostración), determinar el número de raíces reales de  $U(\theta) = 0$ ,  $U'(\theta) = 0$ , es equivalente a determinar el número de raíces reales de

$$U(1, y) = 0,$$

$$V(1, y) = 0,$$

con  $U(1, y)$  y  $V(1, y)$  polinomios de tercer grado. Mediante un cambio de variable, todo polinomio cúbico se lleva a la forma  $Q(x) = x^3 + ax + f$ , cuyo número de

raíces están determinadas por los coeficientes  $a$  y  $f$ , de acuerdo con las fórmulas de Tartaglia-Cardano, de la manera siguiente:

**Proposición 9** 1.- Si  $a \geq 0$ ,  $Q(x)$  tiene una sola raíz.

2.- Si  $a < 0$  entonces

$$2.a) \text{ Tiene una sola raíz si } f > \frac{2}{3\sqrt[3]{a}}(-a)^{3/2} \text{ o } f < -\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}(-a)^{3/2}$$

$$2.b) \text{ Tiene dos raíces si } f + \frac{2}{3\sqrt[3]{a}}(-a)^{3/2} = 0 \text{ o } f - \frac{2}{3\sqrt[3]{a}}(-a)^{3/2} = 0$$

$$2.c) \text{ Tiene tres raíces si } -\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}(-a)^{3/2} < f < \frac{2}{3\sqrt[3]{a}}(-a)^{3/2}$$

De (3.16) tenemos  $V(1, y) = y(-ay^2 + 3y + (2a - 3b)) = 0$ , cuyas raíces son

$$y_1 = 0, y_2 = -\frac{1}{2a}(-3 + \Delta^{1/2}), y_3 = -\frac{1}{2a}(-3 - \Delta^{1/2})$$

con  $\Delta = 9 + 4a(2a - 3b)$ . De ésto se sigue que

$U'$  tiene 2 raíces si  $\Delta < 0$ .

$U'$  tiene 4 raíces si  $\Delta = 0$  ó  $\Delta = 9$ ,

$U'$  tiene 6 raíces si  $\Delta > 0$ .

La curva  $\Delta = 0$  es la gráfica de la función  $b = \frac{3}{4}a + \frac{3}{4a}$  con  $a \neq 0$ . La Figura 3.2 muestra como se divide el plano  $a$ - $b$ , de acuerdo con el número de raíces de  $U'(\theta)$ .

Con el cambio de variable  $w = y + a/3$ , el polinomio  $U(1, y) = y^3 + ay^2 + b$  se convierte en el polinomio  $Q(w) = w^3 - \frac{a^2}{3}w + \frac{2a^2}{27} + b$ . Así aplicando la Proposición 9, resulta que  $U(\theta)$  tiene 2 raíces si  $|2a^3/27 + b| > |2a^3/27|$  o  $a = 0$ , lo cual es equivalente

a

$$\{a = 0\} \cup \{a > 0, b > 0\} \cup \{a > 0, b < -\frac{4}{27}a^3\} \cup \{a < 0, b < 0\} \cup \{a < 0, b > -\frac{4}{27}a^3\}$$

$U(\theta)$  tiene 4 raíces si  $|2a^3/27 + b| = |2a^3/27|$ , o sea

$$\{a > 0, b = 0\} \cup \{a > 0, b = -\frac{4}{27}a^3\} \cup \{a < 0, b = 0\} \cup \{a < 0, b = -\frac{4}{27}a^3\}.$$

raíces están determinadas por los coeficientes  $a$  y  $f$ ; de acuerdo con las fórmulas de Tartaglia-Cardano, de la manera siguiente:

**Proposición 9 1.** - Si  $a \geq 0$ ,  $Q(x)$  tiene una sola raíz.

2. - Si  $a < 0$  entonces

$$2.a) \text{ Tiene una sola raíz si } f > \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}(-a)^{3/2} \text{ o } f < -\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}(-a)^{3/2}$$

$$2.b) \text{ Tiene dos raíces si } f + \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}(-a)^{3/2} = 0 \text{ o } f - \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}(-a)^{3/2} = 0$$

$$2.c) \text{ Tiene tres raíces si } -\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}(-a)^{3/2} < f < \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}(-a)^{3/2}$$

De (3.16) tenemos  $V(1, y) = y(-ay^2 + 3y + (2a - 3b)) = 0$ , cuyas raíces son

$$y_1 = 0, y_2 = -\frac{1}{2a}(-3 + \Delta^{1/2}), y_3 = -\frac{1}{2a}(-3 - \Delta^{1/2})$$

con  $\Delta = 9 + 4a(2a - 3b)$ . De esto se sigue que

$$U' \text{ tiene 2 raíces si } \Delta < 0,$$

$$U' \text{ tiene 4 raíces si } \Delta = 0 \text{ ó } \Delta = 9,$$

$$U' \text{ tiene 6 raíces si } \Delta > 0.$$

La curva  $\Delta = 0$  es la gráfica de la función  $b = \frac{3}{5}a + \frac{3}{4a}$  con  $a \neq 0$ . La Figura 3.2 muestra como se divide el plano  $a$ - $b$ , de acuerdo con el número de raíces de  $U'(\theta)$ .

Con el cambio de variable  $w = y + a/3$ , el polinomio  $U(1, y) = y^3 + ay^2 + b$  se convierte en el polinomio  $Q(w) = w^3 - \frac{a}{3}w + \frac{2a^3}{27} + b$ . Así aplicando la Proposición 9, resulta que  $U(\theta)$  tiene 2 raíces si  $|2a^3/27 + b| > |2a^3/27|$  o  $a = 0$ , lo cual es equivalente a

$$\{a = 0\} \cup \{a > 0, b > 0\} \cup \{a > 0, b < -\frac{4}{27}a^3\} \cup \{a < 0, b < 0\} \cup \{a < 0, b > -\frac{4}{27}a^3\}$$

$U(\theta)$  tiene 4 raíces si  $|2a^3/27 + b| = |2a^3/27|$ , o sea

$$\{a > 0, b = 0\} \cup \{a > 0, b = -\frac{4}{27}a^3\} \cup \{a < 0, b = 0\} \cup \{a < 0, b = -\frac{4}{27}a^3\}.$$

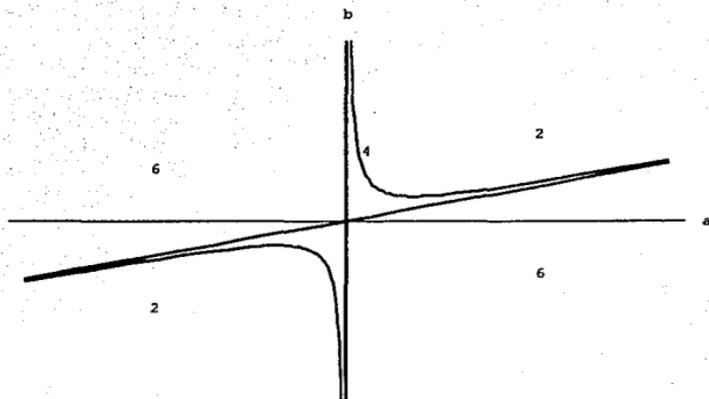


Figura 3.2:

Finalmente,  $U(\theta)$  tiene 6 raíces si  $|2a^3/27 + b| < |2a^3/27|$ , de donde

$$\{a < 0, 0 < b < -\frac{4}{27}a^3\} \cup \{a > 0, -\frac{4}{27}a^3 < b < 0\}.$$

Véase la Figura 3.3. En la Figura 3.4 se representan en el plano los distintos tipos de  $N_\infty$ .

### 3.3 Flujo en $N_\infty$ . Grado 3

En esta sección se determinará la topología de cada uno de los tipos de  $N_\infty$  y se dará una descripción del flujo que sobre cada tipo define el sistema

$$\begin{aligned} v' &= u^2 - \frac{3}{2}v^2 + 3U(\theta), \\ u' &= -\frac{5}{2}uv + U'(\theta), \\ \theta' &= u. \end{aligned} \tag{3.17}$$

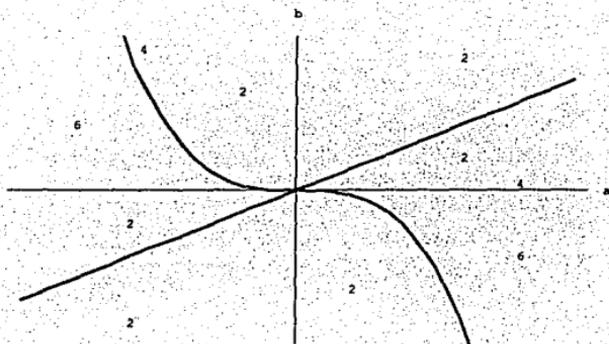


Figura 3.3:

Por  $C$  denotaremos a la curva en  $N^\infty$ , dada por el conjunto  $\{(\theta, v, u) \in N^\infty \mid u = 0\}$ .  $C_{+(-)}$  es el conjunto de puntos en  $C$ , cuya segunda coordenada es mayor (menor) o igual a cero.

**Proposición 10** 1) Si  $N_\infty$  es del tipo  $\{2, 2\}$  es homeomorfo a una esfera y el campo (3.17) tiene un punto de equilibrio atractor y otro repulsor.

2) Si  $N_\infty$  es del tipo  $\{2, 6\}$  es homeomorfo a una esfera, pero su sección

$C_+$  presenta dos máximos locales y un mínimo local. El campo tiene seis puntos de equilibrio: dos atractores en los máximos de  $C_+$  y un punto silla en el mínimo; en los mínimos de  $C_-$  son repulsores y en el máximo es un punto silla.

3) Si  $N_\infty$  es del tipo  $\{6, 6\}$ , entonces consiste de 3 esferas ajenas, cada una equivalente a la del caso 1)

4) Si  $N_\infty$  es del tipo  $\{4, 6\}$  es homeomorfo a dos esferas unidas por un punto. Los polos norte son atractores y los polos sur, repulsores. El campo (3.17) tiene un punto

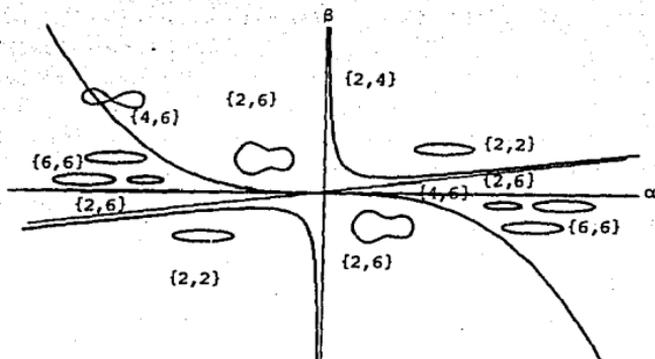


Figura 3.4:

de equilibrio en el punto de unión, que se proyecta en un punto silla sobre cada esfera.

5) Si  $N_{\infty}$  es del tipo  $\{2,4\}$  es una esfera con un atractor en el polo norte y un repulsor en el polo sur. Los extremos de la curva  $C_+$  son puntos de inflexión con derivada nula.

6) El conjunto de parámetros para los cuales se cumple (4) o (5) es unión de cuatro curvas conexas.

**Demostración:** Si  $N_{\infty}$  es del tipo  $\{2,2\}$ , entre las dos raíces  $\theta_0$  y  $\theta_1$  de  $U(\theta)$  solo puede haber una raíz de  $U'(\theta)$  ya que si  $\alpha$  es raíz entonces  $\alpha + \pi$  es raíz. De esto se sigue que la función  $v = \sqrt{2U(\theta)}$  no tiene más que un punto crítico entre  $\theta_0$  y  $\theta_1$ , con lo cual

queda probado (1).

Sea  $N_{\infty}$  es del tipo  $\{2,6\}$  y supongamos que entre las dos raíces  $\theta_0$  y  $\theta_1$  de  $U(\theta)$  no hay exactamente tres raíces de  $U'(\theta)$ , entonces en un intervalo de longitud  $\pi$  habrían al menos cuatro raíces, pero ésto es imposible ya que cada raíz tiene una raíz compañera a una distancia  $\pi$ .

Considérese ahora el tipo  $\{6,6\}$ . Las seis raíces de  $U(\theta)$  dividen al intervalo  $[0, 2\pi]$  en 6 subintervalos, cada uno de los cuales contiene al menos una raíz de  $U'(\theta)$ . Como  $U'(\theta)$  solo tiene seis raíces, se sigue que entre dos raíces de  $U(\theta)$  hay exactamente una raíz de  $U'(\theta)$ . Al rotar la porción entre dos ceros consecutivos de  $\sqrt{2U(\theta)}$  se obtiene una superficie homeomorfa a una esfera.

Para el caso  $\{2,4\}$ , se tiene exactamente una raíz de  $U'(\theta)$  entre las dos raíces comunes de  $U(\theta)$  y  $U'(\theta)$ . Por lo tanto la curva  $C_+$  tiene un único máximo y dos puntos de inflexión.

Las afirmaciones sobre los puntos de equilibrio se demostraron en la Sección 2.2

□

Para  $N_{\infty}$  del tipo  $\{2,6\}$ , a los puntos de equilibrio se les pondrá el subíndice + o - para indicar si su coordenada  $v$  es mayor o menor que cero, respectivamente. Al punto silla se le denotará por S y con A al punto de equilibrio que está a la izquierda de S; al de la derecha designará con la letra B. Se dirá que una rama de una variedad invariante del punto S, es izquierda (derecha) si inicialmente  $\theta(\tau)$  decrece (crece). Una rama invariante quedará determinada, indicando en forma ordenada si es l (izquierda) o D (derecha) y si es e (stable) o i (nestable). Esta notación se ilustra en la Figura 3.5.

En los dos lemas y el teorema que sigue estudiaremos el caso particular

$$U(\theta) = S \cos^3 \theta + \beta \cos^3 \theta.$$

Posteriormente se analizará el caso general.

La función  $U$  es no-negativa en un intervalo que denotaremos por  $[I_0, I_1]$  el cual está contenido en  $(-\pi/2, 3\pi/2)$  y tiene longitud  $\pi$ ; en el punto  $\theta$ , la curva  $C_+$  tiene

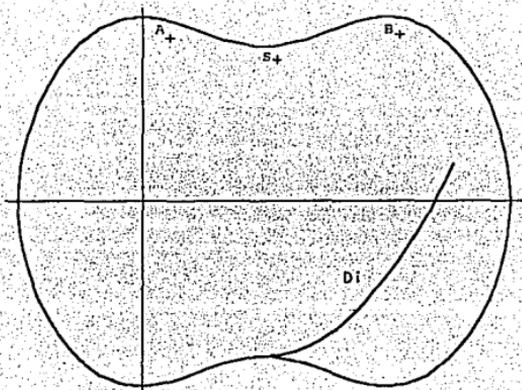


Figura 3.5:

un mínimo. De hecho,

$$I_0 = -\arctan(\beta^{1/3}), \quad \theta_* = \arctan(\beta). \quad (3.18)$$

Entonces  $U(\theta_*) = \text{Sen}^3\theta_* + \text{Sen}\theta_* \text{Cos}^2\theta_* = \text{Sen}\theta_*$ ; ahora  $\text{Cos}\theta_* = 1/\text{Sec}\theta_* = 1/\sqrt{1 + \text{Tan}^2\theta_*} = 1/\sqrt{1 + \beta^2}$ , por lo tanto  $\text{Sen}^2\theta_* = 1 - 1/(1 + \beta^2) = \beta^2/(1 + \beta^2)$ . Así se obtiene que  $U(\theta_*) = \beta/(1 + \beta^2)^{1/2}$ . Finalmente,  $v(\theta_*) = \sqrt{2U(\theta_*)}$  es

$$v(\theta_*) = \frac{\sqrt{2\beta}}{(1 + \beta^2)^{1/4}}. \quad (3.19)$$

Del sistema de ecuaciones 2.6 y la relación de energía 2.7, eliminando el tiempo  $\tau$ , se obtiene sobre  $N_\infty$  la ecuación

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{2+d}{2} \sqrt{2U(\theta) - v^2}. \quad (3.20)$$

Luego hacemos  $d = 3$ .

**Lema 11.** Existe  $\beta \geq 0$ , suficientemente pequeña tal que la solución de

$$\frac{dv}{d\theta} = (5/2)\sqrt{2U(\theta) - v^2}, \quad v(I_0) = 0 \quad (3.21)$$

es menor que  $\sqrt{2U(\theta_*)}$  en el intervalo  $[I_0, \theta_*]$ .

Demostración: la solución  $\bar{v}$  de la ecuación  $\frac{d\bar{v}}{d\theta} = 5/2\sqrt{2\beta - v^2}$ , con la condición inicial  $v(I_0) = 0$  está dada por  $\bar{v}(\theta) = \sqrt{2\beta} \operatorname{Sen} 5/2(\theta - I_0)$ . En el intervalo  $[I_0, \theta_*]$  se cumple la desigualdad  $0 \leq 2U(\theta) - v^2 \leq 2\beta - v^2$ , de la cual se sigue  $v(\theta) \leq \bar{v}(\theta)$ ; en particular

$$v(\theta_*) \leq \bar{v}(\theta_*) = \sqrt{2\beta} \operatorname{Sen} 5/2(\theta_* - I_0)$$

Por otra parte  $I_0 = -\arctan(\beta^{1/3})$  y  $\theta_* = \arctan(\beta)$  convergen a cero cuando  $\beta$  tiende a cero, por lo que para  $\beta$  suficientemente pequeña se tiene que

$$\bar{v}(\theta_*) \leq \frac{\sqrt{2\beta}}{2} < \sqrt{2U(\theta_*)}. \quad \square$$

**Lema 12** Existe  $\beta \geq 0$  suficientemente grande tal que la solución de

$$\frac{dv}{d\theta} = (5/2)\sqrt{2U(\theta) - v^2}, \quad v(0) = 0, \quad (3.22)$$

satisface que  $v(\theta)$  es mayor que  $\sqrt{2U(\theta_*)}$  para algún valor de  $\theta$  en el intervalo  $[I_0, \theta_*)$ .

Demostración: Los valores máximos de  $\sqrt{2U(\theta)}$  son  $\sqrt{2\beta}$  y  $\sqrt{2}$  que se alcanzan en 0 y en  $\pi/2$ , respectivamente. Cuando  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $\theta_* \rightarrow \pi/2$ , y  $I_0 \rightarrow -\pi/2$ . Por lo tanto para toda  $\beta$  suficientemente grande, existe un intervalo  $J = [\bar{\theta}, 0]$  de longitud igual a  $\pi/5$  contenido en  $[I_0, 0]$ ;  $\bar{\theta}$  se elige de modo que  $\sqrt{2U(\bar{\theta})}$  sea mayor que  $\sqrt{2U(\theta_*)}$ . Obviamente  $2U(\bar{\theta}) - v^2 \leq 2U(\theta) - v^2$ , en el intervalo  $J$ . Por lo tanto la solución  $v(\theta)$  de la ecuación (3.22) con condición inicial  $v(\bar{\theta})$  es mayor o igual que la solución  $\bar{v}(\theta)$  de ecuación  $\frac{d\bar{v}}{d\theta} = 5/2\sqrt{2U(\bar{\theta}) - v^2}$ , con condición inicial  $v(\bar{\theta}) = 0$ . Ahora bien,  $\bar{v}(\theta) = \sqrt{2U(\bar{\theta})} \operatorname{Sen} 5/2(\theta - \bar{\theta})$ . Por lo tanto  $\bar{v}(0) = \sqrt{2U(\bar{\theta})} \operatorname{Sen} 5/2(-\bar{\theta}) = \sqrt{2U(\bar{\theta})}$ . Así, la afirmación es válida.  $\square$

En adelante  $\Pi_i$  denotará la proyección de  $(\theta, v, u)$  sobre la  $i$ -ésima coordenada. Las coordenadas del punto  $S_+$  son  $(\theta^*, v^*, u^*)$  y la trayectoria del punto  $O = (I_0, 0, 0)$  se

denotará por  $\gamma(t)$ ; a la trayectoria del punto  $(I_1, 0, 0)$  se le llamará  $\delta(t)$ . Cuando sea necesario indicar la dependencia de un término cualquiera  $\Phi$ , respecto del parámetro  $\beta$ , se utilizarán indistintamente la notación  $\Phi_\beta$  o  $\Phi(\beta)$ .

Dado que el sistema (2.6) tiene la simetría  $(\rho, \theta, v, u, \tau) \mapsto (\rho, \theta, -v, -u, -\tau)$ , la cual se verifica fácilmente, para estudiar el comportamiento de las soluciones de ese sistema, es suficiente con estudiar las soluciones  $\gamma$  y  $\delta$ . Estas soluciones son las separatrices del flujo sobre  $N_\infty$  y entonces lo determinan completamente. Además dichas soluciones son simétricas con respecto al plano  $v = 0$ , por lo cual basta con estudiar la parte donde  $v \geq 0$ .

Sea  $P$  un punto de equilibrio. Se dirá que una trayectoria  $\phi(t)$  *sube al punto*  $P$  si su  $\omega$ -límite es  $\{P\}$ . Si existe  $t > 0$  para el cual  $\Pi_1(\phi(t)) > \theta^*$  y  $\Pi_2(\phi(t)) < v^*$ , entonces se dirá que  $\phi(t)$  *pasa por debajo de*  $S_+$ . El símbolo  $\phi \uparrow P$  significará que  $\phi(t)$  sube al punto  $P$  y  $\phi \nearrow S_+$ , indicará que  $\phi$  pasa por debajo de  $S_+$ .

**Teorema 13** *Existen valores  $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 < \beta_5 < \beta_6$  de  $\beta$ , tales que*

1) *Para toda  $\beta \in (0, \beta_1)$ ,  $\gamma(t) \nearrow S_+$ .*

2) *Si  $\beta > \beta_3$ , entonces  $\gamma(t) \uparrow A_+$ .*

*Análogamente*

3) *Cuando  $\beta \in (0, \beta_4)$ ,  $\delta(t) \uparrow B_+$ .*

4) *Si  $\beta > \beta_6$ , entonces  $\delta(t) \nearrow S_+$ .*

5) *Para  $\beta = \beta_2$ , la variedad  $II_-$  es igual a la variedad  $IE_+$ . Correspondientemente, en  $\beta_5$ ,  $DI_-$  es igual a  $DE_+$ .*

**Demostración:** La existencia de  $\beta_3$  se sigue directamente del Lema 12, ya que éste asegura la existencia de un semirrayo  $(\bar{\beta}, \infty)$  tal que para toda  $\beta > \bar{\beta}$ , la trayectoria  $\gamma_\beta$  satisface las desigualdades  $\Pi_2(\gamma_\beta(t)) > v(\theta^*)$ ,  $\Pi_1(\gamma_\beta(t)) < \theta^*$ , en un cierto instante

*l.* De estas desigualdades y de que el sistema es cuasigradiante respecto a  $v$ , se deduce que  $\gamma_\beta(t)$  sube al punto  $A_+$ . El valor de  $\beta_3$  se toma como la frontera inferior del máximo de los semirrayos mencionados. En forma análoga, el Lema 11 determina la existencia de un intervalo  $(0, \bar{\beta})$  tal que para toda  $\beta$  en ese intervalo  $\gamma_\beta(t)$  pasa por debajo de  $S_+$ . La frontera superior del máximo de tales intervalos es  $\beta_1$ .

El valor de  $\beta_2$  se puede tomar como el supremo de las  $\beta_1$ . Supongamos que para  $\beta_2$  el  $\omega$ -límite de  $\gamma_{\beta_2}$  es  $B_+$ , entonces por continuidad respecto a  $\beta$ , existiría  $\beta > \beta_2$  tal que  $\gamma_\beta(t)$  tendría como  $\omega$ -límite a  $B_+$ , contradiciendo de este modo la definición de  $\beta_3$ . Del mismo modo, si el  $\omega$ -límite fuera  $A_+$ , la trayectoria  $\gamma_{\beta_2}$  tocaría a la curva  $C_+$  en un punto tal que  $\Pi_2(\gamma_{\beta_2}(t)) > v(\theta^*)$  y  $\Pi_1(\gamma_{\beta_2}(t)) < \theta^*$ , nuevamente por continuidad respecto a  $\beta$ , existiría  $\beta < \beta_2$  tal que el  $\omega$ -límite de  $\gamma_\beta$  sería  $A_+$ , contradiciendo también en este caso la definición de  $\beta_2$ . Vea la Figura 3.6.

Las afirmaciones para  $\delta$ , se demuestran de manera similar. ■

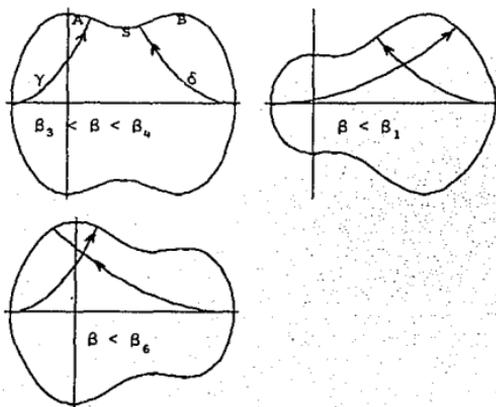


Figura 3.6:

La evidencia numérica sugiere que de hecho se tienen las siguientes igualdades  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$  y  $\beta_4 = \beta_5 = \beta_6$ . Además  $\beta_1 \approx 0.2$  y  $\beta_4 \approx 5.2$ .

Ahora se estudiará el caso general

$$U(\theta) = \text{Sen}^3\theta + a \text{Cos}\theta \text{Sen}^2\theta + b \text{Cos}^3\theta.$$

Si es necesario se usará la notación  $U(\theta, a, b)$  para indicar la dependencia de  $U$  respecto a los parámetros  $a$  y  $b$ .

Dada la igualdad

$$U(\theta) = \text{Sen}^3(\pi - \theta) - a \text{Cos}(\pi - \theta) \text{Sen}^2(\pi - \theta) - b \text{Cos}^3(\pi - \theta), \quad (3.23)$$

basta considerar el caso en que  $a \neq 0$  y  $b > 0$ . Como solo interesa el análisis del tipo  $\{2, 6\}$  para extender los resultados del caso  $a = 0$ , los parámetros pertenecen a la región  $R$  definida por

$$\begin{aligned} R &= \left\{ (a, b) \mid a < 0, b > \frac{4}{27}a^3 \right\} \cup \left\{ (a, b) \mid a > 0, b < \frac{3}{4a} + \frac{2}{3}a, 2a - 3b < 0 \right\} \cup \\ &\quad \left\{ (a, b) \mid a > 0, b > 0, 2a - 3b > 0 \right\} \cup \left\{ (a, b) \mid a = 0, b > 0 \right\} \\ &= R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \left\{ (a, b) \mid a = 0, b > 0 \right\} \end{aligned}$$

Estas regiones se muestran en la figura (3.7).

Para cada valor fijo de los parámetros  $a, b$ , el potencial  $U(\theta)$  es no negativo en un intervalo que denotaremos por  $[I_0(a, b), I_1(a, b)]$ .

**Lema 14** Sea  $b > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} 1) \lim_{a \rightarrow 0} I_0(a, b) &= \arctan(-b)^{1/3} ; & 2) \lim_{b \rightarrow 0} I_0(a, b) &= \arctan(-a) \\ 3) \lim_{a \rightarrow -\infty} I_0(a, b) &= -\pi/2 ; & 4) \lim_{b \rightarrow -\infty} I_0(a, b) &= -\pi/2. \end{aligned}$$

Además  $I_0(a, b)$  es función decreciente de cada una de sus variables.

**Demostración:**  $\text{Sen}^3\theta + a \text{Cos}\theta \text{Sen}^2\theta + b \text{Cos}^3\theta = 0$  si y sólo si

$$\tan^3\theta + a \tan^2\theta + b = 0.$$

Haciendo  $x = \tan \theta$ , obtenemos la ecuación cúbica

$$q(x; a, b) = x^3 + ax^2 + b = 0. \quad (3.24)$$

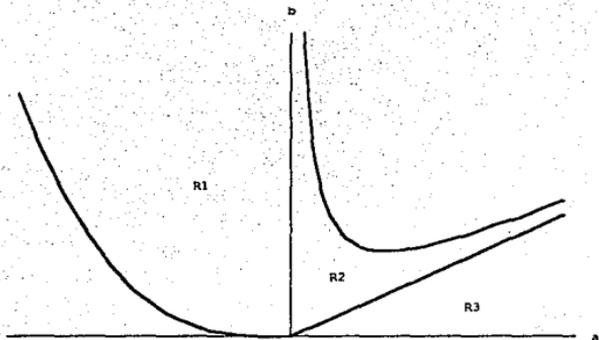


Figura 3.7:

Entonces la parte (1) se sigue de la continuidad de  $x^3 + ax^2 + b$ , respecto a  $a$ . En forma análoga se prueba (2).

La ecuación (3.24) tiene una única raíz  $R(a, b)$  (ver Proposición 9). El polinomio  $q(x; a, 0)$  tiene las raíces  $-a$  y  $0$ . Como  $q(x; a, b) = q(x; a, 0) + b$ , la raíz  $R(a, b)$  es menor que  $-a$  y por lo tanto tiende a  $-\infty$ , cuando  $a \rightarrow \infty$ . Del mismo modo se demuestra la parte (4).  $\square$

La derivada de  $U(\theta)$  es

$$U'(\theta) = \text{Sen}(\theta) \left( -a\text{Sen}^2(\theta) + 3\text{Cos}(\theta)\text{Sen}(\theta) + (2a - 3b)\text{Cos}^2(\theta) \right)$$

por lo tanto las proyecciones bajo  $\Pi_1$  de los puntos de equilibrio del sistema (29), son  $\theta = 0$  y las raíces de la ecuación

$$-a\text{Sen}^2(\theta) + 3\text{Cos}(\theta)\text{Sen}(\theta) + (2a - 3b)\text{Cos}^2(\theta) = 0 \quad (3.25)$$

Si en esta ecuación suponemos que  $\text{Sen}(\theta) = 0$ , se deduce que  $2a - 3b = 0$ . Así sobre esta recta se tiene un punto de equilibrio degenerado en  $\theta = 0$  y el otro en  $\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$ .

En la región R, se cumple  $2a - 3b \neq 0$  y de la ecuación (3.25) se obtiene

$$-a \tan^2(\theta) + 3 \tan(\theta) + (2a - 3b) = 0,$$

cuyas raíces son

$$\tan(\theta) = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4a(2a - 3b)}}{2a}. \quad (3.26)$$

De los valores  $\arctan\left(\frac{3 \pm \sqrt{9 + 4a(2a - 3b)}}{2a}\right)$ , elegimos los ángulos  $\theta_1, \theta_2 \in (I_0, I_1)$ , donde  $\theta_1 < \theta_2$ . Sea  $E_0$  el punto de equilibrio con  $\theta = 0$  y  $E_i$  el punto de equilibrio con  $\Pi_1(E_i) = \theta_i$ ,  $i = 1, 2$ . Con esta notación, se enuncia el siguiente resultado

**Lema 15** Sea  $b > 0$ .

$$\begin{aligned} 1) \lim_{a \rightarrow 0} \theta_1^*(a, b) &= \arctan(b) > 0 & 2) \lim_{a \rightarrow \infty} \theta_1^*(a, b) &= \arctan(-\sqrt{2}) < 0 \\ 3) \lim_{a \rightarrow 0} \theta_2^*(a, b) &= \pi/2 & 4) \lim_{a \rightarrow \infty} \theta_2^*(a, b) &= \arctan(\sqrt{2}) > 0. \end{aligned}$$

Además si  $a = \frac{3}{2}b$ ,  $E_1$  se confunde con  $E_0$  y en este caso  $\theta_2^* = \arctan(\frac{3}{a})$ .

**Demostración:** Estos límites se obtienen fácilmente, expandiendo en serie la expresión  $\sqrt{9 + 4a(2a - 3b)}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \sqrt{9 + 4a(2a - 3b)} &= 3 + 2 \cdot 9^{-1/2} a(2a - 3b) - 9^{-3/2} a^2(2a - 3b)^2 + \dots - \dots \\ &= 3 + \frac{2}{3} a(2a - 3b) + o(a) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{3 - \sqrt{9 + 4a(2a - 3b)}}{2a} &= \frac{3 - 3 - \frac{2}{3} a(2a - 3b) + o(a)}{2a} \\ &= -\frac{(2a - 3b)}{3} + \frac{o(a)}{a} \end{aligned}$$

De esta igualdad se sigue

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 + 4a(2a - 3b)}}{2a} = b.$$

Del mismo modo se demuestra la igualdad (3). Los límites (2) y (4) se obtienen directamente.  $\square$

Las siguientes observaciones establecen algunos hechos sobre los cambios que sufre  $C_+$  (y por ende  $N_\infty$ ) cuando se hace variar uno de los parámetros.

**Nota 16** Como  $\cos(\theta)$  es no negativo en el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ ,  $U(\theta, a, b)$  es función creciente de los parámetros  $a$  y  $b$ , para cada valor de  $\theta$  en dicho intervalo.

**Nota 17** Para cada  $b$ , el punto  $E_0$  es un máximo local de  $C_+(a, b)$  con  $a \in (0, 3b/2)$  y es un mínimo para toda  $a > 3b/2$ . Esto se sigue fácilmente de que  $U''(0, a, b) = 2a - 3b$ .

Para el análisis en la región  $R_1$ , se necesitará el siguiente lema. Recuerdese que  $I_0$  e  $I_1$  son los ceros de  $U(\theta)$  y que  $I_0 < I_1$ .

**Lema 18** Sea  $(a, b)$  en la región  $R_1$  entonces  $0 < \theta_1^*(a, b) < \pi/2 < \theta_2^*(a, b)$  y además  $\lim_{b \rightarrow \infty} \theta_1^*(a, b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \theta_2^*(a, b) = \pi/2$ .

**Demostración:** La desigualdad se sigue inmediatamente, de que  $U(\pi/2, a, b) = 1$  y  $U'(\pi/2, a, b) = -a > 0$  para cualesquiera  $(a, b)$ . Por lo tanto  $U$  es creciente en una vecindad de  $\pi/2$ ; de lo cual se deduce que  $U$  tiene un punto crítico entre  $\pi/2$  e  $I_1$  y entonces forzosamente tiene otro entre  $0$  y  $\pi/2$ . Tomando límite cuando  $b$  tiende a  $\infty$  en la expresión (3.26) se obtienen los valores  $\pm\infty$  para  $\tan(\theta)$ .  $\square$

Con todos los hechos anteriores podemos describir en una forma muy general la dinámica sobre  $N_\infty$  para parámetros en la región  $R$ .

Recordemos que  $\gamma$  es la órbita que parte del punto  $(I_0, 0, 0)$ .

**Teorema 19** a) Existe un abierto  $O$  en  $R^2$ , no acotado, tal que  $\{a = 0, b > \beta_1\} \subset O \subset R$  y para toda  $(a, b) \in O$  se tiene que  $\gamma \uparrow A_+$ . Además

1) el semirrayo  $\{a > 0, b = 0\}$  es frontera de  $O$

2) Existe  $\bar{b} > 0$  tal que  $O \cap R_1$  contiene al conjunto acotado por la gráfica de  $b = -\frac{4}{27}a^3$ , el eje  $a = 0$  y con  $b \geq \bar{b}$ . Además  $\bar{b} \geq \beta_1$

3) Para todo  $b > 0$  existe  $a(b)$  tal que si  $a > a(b)$  entonces  $(a, b) \in O$

b) Existe un abierto acotado  $V$ , que contiene al segmento  $\{(0, b) \mid 0 < b < \beta_1\}$  sobre el cual  $\gamma \uparrow B_+$ .

**Demostración:** Daremos solo un esbozo de la demostración ya que los detalles son muy parecidos a los del Teorema 13. Por el Teorema 13, sabemos que  $\gamma \uparrow A_+$  para

$(0, b)$  con  $b > \beta_1$ , entonces por continuidad respecto a los parámetros  $a$  y  $b$  existe un abierto  $O_1$  que satisface la afirmación de la parte a). De forma similar se establece la existencia del abierto  $V$ , mencionado en la parte b). Para probar 1), recordemos que  $N_\infty(a, 0)$  no es una variedad suave (Proposición 10, inciso 4); su contorno  $C_+(a, 0)$  es una curva con un punto de contacto de segundo orden con el eje horizontal. Vea la Figura 3.8

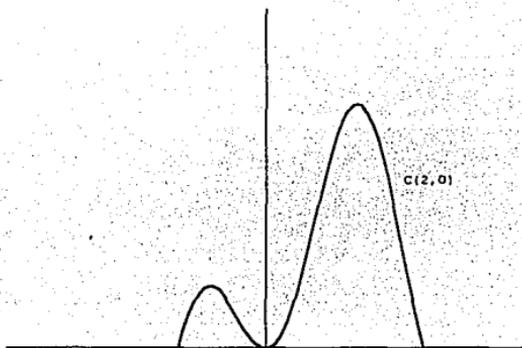


Figura 3.8:

Dado  $a > 0$ , tomemos un punto  $q_0 \in C_+(a, 0)$  tal que  $\Pi_2(q_0) < 0$ . La trayectoria  $\tau(q_0)$  del punto  $q_0$  toca a  $C_+$  en un punto  $q_1$  tal que  $\Pi_2(q_1) > 0$ . Ahora elegimos cualquier  $b > 0$ , para la cual  $\Pi_2(S_+(a, b)) < \Pi_2(q_1)$ . De la Nota 16 se deduce que la trayectoria  $\gamma(a, b)$  debe tocar a  $C_+(a, b)$  arriba de  $\Pi_2(q_1)$  y por lo tanto se tiene  $\gamma \uparrow A_+$ . Esto completa la demostración de 1). Sea  $b > 0$  y  $a < 0$ . Por el Lema 14, sabemos que  $I_0(a, b) \geq \arctan(-b)^{1/3}$ . Entonces podemos elegir  $\tilde{b}$  suficientemente grande de modo que la trayectoria  $\gamma(0, \tilde{b})$  alcance un valor mayor que  $\sqrt{2}$  en  $\theta = 0$ . Esto implica que  $\gamma \uparrow A_+$  ya que por el Lema 15,  $\Pi_2(S_+)$  es menor que  $\sqrt{2}$ ; finalmente, si  $b \geq \tilde{b}$  entonces  $I_0(a, b) \geq \arctan(-\tilde{b})^{1/3}$  y  $\Pi_2(A_+(a, b)) \geq \Pi_2(A_+(0, \tilde{b}))$

( $I_0$  es decreciente, ver Lema 14), por lo tanto  $\gamma(a, b)$  va por arriba de  $\gamma(0, \bar{b})$ , de lo cual se sigue 2). Un razonamiento muy similar sirve para demostrar la parte 3). Por Lema 14 y Lema 15, se sabe que si  $a$  crece,  $I_0(a, b)$  decrece hacia  $-\pi/2$  y  $\theta_1^*(a, b)$  decrece hacia  $\arctan(-\sqrt{2})$ . Así para  $b$  fijo, encontramos  $a(b)$  suficientemente grande, para la cual existe un intervalo  $J = [r, \theta_1^*(a(b), b)] \subset [I_0(a(b), b), \theta_1^*(a(b), b)]$ , tal que  $\theta_1^* - r = \pi/10$ . Además, se deduce de la Nota 16 que es posible elegir  $r$  con la propiedad de que  $K = U(r, a(b), b) \geq 2b$ . Entonces la solución  $\bar{v}$  de

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{5}{2}\sqrt{2K - v^2} \quad ; \quad v(r) = 0 \quad (3.27)$$

es  $\bar{v}'(\theta) = \sqrt{2K} \operatorname{sen} \frac{5}{2}(\theta - r)$ ; por lo tanto  $\bar{v}(\theta_1^*) = \sqrt{K} \geq \sqrt{2b}$ . Como  $\bar{v}(\theta_1^*) \leq \Pi_2(\gamma(t, a(b), b))$ , para  $t$  tal que  $\theta(t) = \theta_1^*$ , se sigue que  $\gamma(a(b), b) \uparrow A_+$ .  $\square$

### 3.4 Potencial Homogéneo de grado par

En esta sección revisaremos preferentemente el caso de grado cuatro, a fin de mostrar las características generales de los potenciales de grado par. Estos tienen la particularidad, a diferencia del grado impar, que la variedad al infinito puede ser vacía. Ese es el contenido del siguiente lema.

**Lema 20** Si  $H = H_1 + H_2 + \dots + H_n$  es un Hamiltoniano con  $H_i$  una forma homogénea positiva definida, entonces  $H = c$  es un variedad acotada.

**Demostración:** Supongamos que  $\{z_k\}$  es una sucesión tal que  $H(z_k) = c$  y  $\|z_k\| \rightarrow \infty$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ . Entonces la sucesión  $\{z_k/\|z_k\|\}$  tiene una subsucesión convergente, que sin pérdida de generalidad podemos suponer que es ella misma. Por continuidad  $\{H_i(z_k/\|z_k\|)\}$  converge y como

$$H_i(z_k/\|z_k\|) = \frac{1}{\|z_k\|^i} H_i(z_k)$$

se obtiene que  $\{H_i(z_k)\}$  converge a infinito  $\forall i = 1, \dots, n$ . En caso contrario  $H_i(z_k/\|z_k\|) \rightarrow 0$ , lo cual no puede ser porque  $H_i$  es positivo definido. De lo anterior se deduce que  $H(z_k) \rightarrow \infty$ , lo cual es una contradicción; por lo tanto  $H = c$  está acotado.  $\square$

**Corolario 21** *Los niveles de energía del Hamiltoniano  $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - U(x, y)$  son variedades compactas, si  $U(x, y)$  es una forma homogénea negativa definida.*

Con el objeto facilitar la comprensión del caso de grado cuatro, trataremos primero un potencial homogéneo de grado dos.

Como en el caso de grado 3, mediante algunos cambios de variable y un reescalamiento adecuado del tiempo podemos reducir el número de constantes involucradas. En el siguiente resultado supondremos que  $a^2 + c^2 \neq 0$ .

**Nota 22** *Todo Sistema Hamiltoniano  $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - (ax^2 + bxy + cy^2)$ , se puede transformar mediante un cambio de variable de la forma*

$$X = rx + y \quad ; \quad Y = -x + ry$$

*y un reescalamiento del tiempo*

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{(r^2 + 1)^{1/2}}$$

*en un Sistema con Hamiltoniano*

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) - (AX^2 + BY^2) \quad (3.28)$$

De esta ecuación podemos eliminar uno de los parámetros

**Nota 23** *Mediante el cambio de variable*

$$x = |B|^{1/2} X \quad ; \quad y = |B|^{1/2} Y$$

*y el reescalamiento del tiempo*

$$\frac{dt}{d\tau} = |B|^{-1/2},$$

*el hamiltoniano 3.28 se transforma en*

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - (\pm y^2 + \alpha x^2). \quad (3.29)$$

**Nota 24** Si  $a = 0 = c$ , la rotación

$$x = X + Y, \quad y = X - Y,$$

transforma al potencial  $U(x, y) = bxy$  en

$$U(X, Y) = bX^2 - bY^2,$$

que podemos reducir a la forma 3.29.

No se dan las demostraciones ya que son completamente análogas a las de la Proposición 3 y del Teorema 6. En lo que sigue consideraremos la forma standard dada por 3.29. Si  $a < 0$  y  $b < 0$ , el potencial  $U(x, y) = ax^2 + by^2$  es negativo definido y se sigue del Lema 20 que  $N^\infty$  es vacío; por lo tanto basta considerar a los potenciales de la forma

$$U(x, y) = y^2 + ax^2. \quad (3.30)$$

### 3.5 Clasificación de $N_\infty$ . Grado 2

Recordemos de la teoría general, que  $N_\infty$  es la superficie de revolución que se obtiene al rotar la parte no-negativa de

$$U(\theta) = \sin^2\theta + a\cos^2\theta.$$

Por lo tanto para determinar la forma de  $N_\infty$ , es suficiente con analizar los ceros de  $U(\theta)$ .

a) Si  $a = 0$ ,  $U(\theta) = \sin^2\theta$  es no-negativo para toda  $\theta$  y sus ceros son  $0, \pi$  y  $2\pi$ ; con puntos críticos en  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2 \pmod{2\pi}$ . Por lo tanto  $N_\infty$  es una variedad no suave, unión de dos espacios homeomorfos a  $S^2$  que se pegan en dos puntos de cada uno. Ver (a) de la Figura 3.9.

b) Si  $a < 0$ ,  $U(\theta)$  tiene cuatro raíces dadas por  $\theta = \arctan \pm \sqrt{-a}$  y tiene los valores mínimos  $U(0) = U(\pi) = a$  y los valores máximos  $U(\pi/2) = U(3\pi/2) = 1$ . Por lo tanto  $N_\infty$  es una variedad diferenciable formada por la unión de dos esferas ajenas  $S^2$ , con un punto de equilibrio repulsor en  $(\pi/2, -\sqrt{2}, 0)$  y en  $(3\pi/2, -\sqrt{2}, 0)$

y puntos de equilibrio atractores en  $(\pi/2, \sqrt{2}, 0)$  y en  $(3\pi/2, \sqrt{2}, 0)$ . Ver parte (b) de la Figura 3.9.

c) Si  $a > 0$ ,  $U(\theta)$  es positivo para toda  $\theta$ , entonces  $N_\infty$  es difeomorfo a un toro. Para  $a = 1$ , tenemos dos variedades de puntos de equilibrio

$$\{\theta \in [0, 2\pi], v = \pm\sqrt{2}, u = 0\}.$$

Si  $a < 1$ ,  $N_\infty$  tiene puntos de equilibrio atractores en  $(\pi/2, \sqrt{2}, 0)$  y en  $(3\pi/2, \sqrt{2}, 0)$  y puntos sillan en  $(0, \sqrt{2a}, 0)$  y en  $(\pi, \sqrt{2a}, 0)$ ; los antípodas de estos puntos son repulsores y sillan, respectivamente. Algo semejante ocurre para  $a > 1$ , excepto que en este caso, los puntos sillan están en  $\theta = \pi/2$  y en  $\theta = 3\pi/2$  y los puntos atractores en  $\theta = 0$  y en  $\theta = \pi$ . En la Figura 3.9, ver (c).

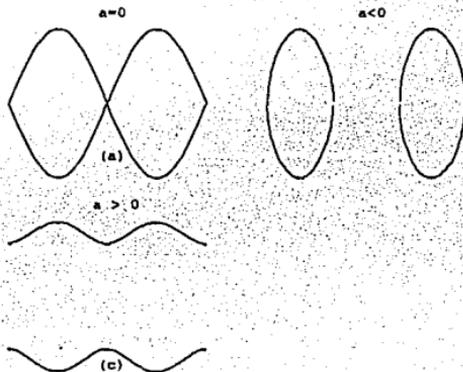


Figura 3.9:

Notemos que  $U(\theta)$  es invariante bajo la traslación  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ , y lo mismo ocurre con  $N^\infty$ . Esto simplifica la descripción del flujo en la siguiente sección.

### 3.6 Flujo en $N_\infty$ . Grado dos

Si  $a < 0$ ,  $N_\infty$  consiste en dos esferas ajenas, por lo tanto el flujo en cada esfera sube del punto atractor en el polo sur al punto atractor del polo norte (inciso (b) de la sección anterior). Para  $a > 0$ , la variedad  $N_\infty$  es un toro y la situación es ligeramente más complicada. Antes de analizarlo introducimos la siguiente notación:

Al punto de equilibrio en  $\theta = 0$ , lo denotaremos por  $O$ . Al punto de equilibrio a la izquierda de  $O$  lo designaremos con  $A$  y al de la derecha por  $B$ . Para indicar si es un punto superior o inferior se les pondrá el índice  $+$  o  $-$ , respectivamente.

Debido a la simetría  $(\theta, v, u) \mapsto (-\theta, v, -u)$ , del análisis de la rama frontal de la variedad invariante (la que surge del punto de equilibrio con un ángulo positivo) se deduce el comportamiento de la rama trasera. Si el  $\omega$ -límite de una rama de un punto silla  $S$  es el punto  $Q$ , decimos que  $S$  sube a  $Q$  y lo denotamos por  $S \uparrow Q$ .

**Teorema 25** a) Si  $0 < a < 1$ , entonces el punto  $O_\pm$  es punto silla y  $O_- \uparrow B_+$

b) Para  $a = 1$ , si el  $\omega$ -límite de una trayectoria es  $(\theta, \sqrt{2}, 0)$ , su  $\alpha$ -límite es  $(\theta - \pi/2, -\sqrt{2}, 0)$

c) Para toda  $a > 1$ , el punto  $O_+$  es atractor y el punto  $B_\pm$  es silla. Además,  $A_- \uparrow O_+$ .

**Demostración:** En la sección anterior se han señalado las características de los puntos de equilibrio.

Sea  $a < 1$ . Consideremos como en la demostración del Lema 11, la ecuación  $\frac{dv}{d\theta} = 2\sqrt{2a - v^2}$ ,  $v(0) = -\sqrt{2a}$ . Su solución está dada por  $v(\theta) = \sqrt{2a} \operatorname{Sen}(2\theta - \pi/2)$ , la cual para  $\pi/2$  alcanza el valor  $\sqrt{2a}$ , que es precisamente la altura del punto  $B_+$ . Por continuidad respecto a parámetros, si la condición inicial  $(\theta_0, -\sqrt{2r})$  está cercana a  $(0, -\sqrt{2a})$ , la solución correspondiente alcanzará el valor  $\sqrt{2r}$  para un valor de  $\theta$  muy cercano a  $\pi/2$ . Como  $U(\theta) \geq a$  en el intervalo  $[0, \pi]$ , de lo anterior se sigue que trayectorias del flujo que inicien muy cerca del punto  $O_-$ , alcanzarán la altura  $\sqrt{2a}$  para un valor de  $\theta$  próximo a  $\pi/2$  y por lo tanto  $O_- \uparrow B_+$ .

Si  $a = 1$ ,  $U(\theta) \equiv 1$ , por lo tanto la relación entre  $v$  y  $\theta$  es simplemente  $\frac{dv}{d\theta} = 2\sqrt{2 - v^2}$  cuya solución para una condición inicial  $v(\theta_0) = -\sqrt{2}$  es

$v(\theta) = \sqrt{2} \operatorname{Sen}(2(\theta - \theta_0) - \pi/2)$  la cual toma el valor  $\sqrt{2}$  en  $\theta = \theta_0 + \pi/2$ . Esto demuestra (b).

La parte (c) se demuestra con argumentos análogos a los de (a), utilizando la ecuación  $\frac{dv}{d\theta} = 2\sqrt{2-v^2}$ ,  $v(-\pi/2) = -\sqrt{2}$ .  $\square$

### 3.7 Potencial homogéneo de grado 4.

En esta sección estudiaremos al potencial homogéneo de grado 4, cuya forma general es

$$U(x, y) = ax^4 + by^3x + cx^2y^2 + dxy^3 + ex^4 \quad (3.31)$$

Mediante una transformación  $T: x = rX - sY$ ,  $y = sX + rY$ , la expresión (3.31) se convierte en una forma homogénea en las variables  $X$  y  $Y$ , que volvemos a denotar por  $x$  y  $y$  por un abuso de notación:

$$U(x, y) = Ay^4 + By^3x + Cx^2y^2 + Dyx^3 + Ex^4. \quad (3.32)$$

Los coeficientes  $B$  y  $D$  están dados por

$$B = dr^4 + (2c - 4c)r^3s + 3(b - d)r^2s^2 + (4a - 2c)rs^3 - bs^4 \quad (3.33)$$

$$D = br^4 + (4a - 2c)r^3s + 3(d - b)r^2s^2 + (2c - 4e)rs^3 - ds^4$$

**Lema 26** Existe una transformación lineal  $T$  que anula a  $B$  o a  $D$ .

**Demostración:** Si  $b$  o  $d$  es cero, no hay nada que probar. El lema quedará demostrado si se hace ver que alguna de las formas  $B$  o  $D$ , no son definidas. Si  $b$  y  $d$  tienen el mismo signo,  $B(r, 0)$  tiene signo diferente que  $B(0, s)$  por lo tanto  $B$  no es definida. Supongamos que  $b < 0$ ,  $d > 0$  entonces  $b - d < 0$  (este caso es suficiente, ya que para la desigualdad opuesta se toma a  $D$ ) y  $B(r, 0) > 0$ ; ahora veamos cada posibilidad que se origina al considerar los signos de los coeficientes de  $r^3s$  y  $rs^3$ . Sea  $(2c - 4e) \geq 0$ ,  $(4a - 2c) \geq 0$ , entonces  $B(r, -r) = r^4(d - (2c - 4e) + 3(b - d) - (4a - 2c) - b) = r^4(2(b - d) - (2c - 4e) - (4a - 2c)) < 0$  por lo tanto  $B$  no es definida. Si  $(2c - 4e) < 0$ ,  $(4a - 2c) < 0$ ,  $B(r, r) = r^4(d + (2c - 4e) + 3(b - d) + (4a - 2c) - b) < 0$ . Por último,

si se tienen signos contrarios, por ejemplo,  $(2c - 4e) \geq 0$  y  $(4a - 2c) \leq 0$ , se originan 2 subcasos:  $|4a - 2c| \leq 2c - 4e$ , lo que produce  $B(r, -r) < 0$ , o  $|4a - 2c| \geq 2c - 4e$  y entonces  $B(r, r) < 0$ .  $\square$

Con ayuda de la transformación  $T$  y un reescalamiento del tiempo se demuestra una reducción de parámetros, análoga a la de grado 3 (ver Teorema 6).

**Teorema 27** *Todo sistema hamiltoniano*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_1 & , & \quad \dot{y} = p_2, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial U}{\partial x} & , & \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned}$$

con  $U(x, y)$  un potencial del tipo (3.31), se convierte por medio de un cambio de variables y un nueva escala de tiempo, en un sistema de la forma anterior con un potencial

$$U(x, y) = y^4 + \rho x^2 y^2 + \beta x^3 y + kx^4.$$

Este potencial es demasiado general, como para permitir una investigación completa del flujo en  $N_\infty$ , y aún de la topología de esa variedad. Por lo tanto, en lo que sigue nos restringiremos a potenciales de la forma

$$U(x, y) = y^4 + \rho x^2 y^2 + kx^4, \quad (3.34)$$

a los cuales les corresponden las funciones

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \text{Sen}^4(\theta) + \rho \text{Cos}^2(\theta) \text{Sen}^2(\theta) + k \text{Cos}^4(\theta), \\ U'(\theta) &= \text{Sen}(\theta) \text{Cos}(\theta) \{ (4 - 2\rho) \text{Sen}^2(\theta) + (2\rho - 4k) \text{Cos}^2(\theta) \}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

La forma de  $N_\infty$  queda determinada por los ceros de (3.35) y recordemos que se dice que  $N_\infty$  es del tipo  $\{a, b\}$  si  $U$  tiene  $a$  raíces y  $U'$  tiene  $b$ . El tipo  $\{0, b\}$  corresponde a toros, el cual es una forma de  $N_\infty$  que no se presenta para grados impares. De nuevo se tiene que  $U(\theta)$  y  $N_\infty$  son invariantes bajo la traslación  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ , ya que esta propiedad solo depende de que el grado del potencial sea par.

Las raíces de  $U(\theta)$  se obtienen como el arcotangente de las raíces del polinomio  $x^4 + \rho x^2 + k = 0$ , las cuales son :

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{(-\rho + (-4k + \rho^2)^{1/2})^{1/2}}{\sqrt{2}}, & -x_1^*, \\ x_2^* &= \frac{(-\rho - (-4k + \rho^2)^{1/2})^{1/2}}{\sqrt{2}}, & -x_2^*. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Los ceros de  $U'(\theta)$  son

$$\begin{aligned} &-\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi, \\ &\arctan\left(\frac{2k-\rho}{2-\rho}\right)^{1/2}, \arctan\left(\frac{2k-\rho}{2-\rho}\right)^{1/2}, \\ &\arctan\left(\frac{2k-\rho}{2-\rho}\right)^{1/2} + \pi, \arctan\left(\frac{2k-\rho}{2-\rho}\right)^{1/2} - \pi, \end{aligned} \quad (3.37)$$

Las últimas cuatro raíces, si existen, son de la forma

$$\pi/2 - \alpha, -\pi/2 + \alpha, \pi/2 + \alpha, -\pi/2 - \alpha,$$

con  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . Las denotaremos por  $\theta_1^*$ ,  $-\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  y  $-\theta_2^*$ , respectivamente

**Lema 28** 1)  $-\pi, 0$  y  $\pi$  son las únicas raíces de  $U(\theta)$  si y sólo si  $(k = 0, \rho \geq 0)$ . Si

$(k = 0, \rho < 0)$  las raíces son  $-\pi, 0, \pi, \pm \arctan \sqrt{-\rho}, \pm (\pi - \arctan \sqrt{-\rho})$ .

2)  $U(\theta)$  no tiene raíces si y sólo si  $(\rho > 0, k > 0) \cup (\rho < 0, k > 0, \frac{\rho^2}{4} < k)$

3)  $U(\theta)$  tiene 8 raíces si y sólo si  $(k > 0, \rho < 0) \cap (\frac{\rho^2}{4} > k)$

4) Si  $k < 0$ ,  $U(\theta)$  tiene 4 raíces.

Análogamente para las raíces de  $U'(\theta)$  se tiene la siguiente distribución

**Lema 29** En términos de  $\rho$  y  $k$ , los ceros de  $U'(\theta)$  están dados por:

1)  $U'(\theta)$  tiene las ocho raíces dadas por (3.37), si  $(\rho < 2, \rho/2 < k) \cup (\rho > 2, \rho/2 > k)$

2) En el punto  $\rho = 2, k = 1$ ,  $U(\theta) \equiv 1$  y por lo tanto  $U'(\theta) \equiv 0$ .

3) En el complemento de la región determinada por 1) y 2),  $U'(\theta)$  tiene 4 ceros.

**Demostración:** Las demostraciones de estos lemas se siguen inmediatamente de las fórmulas (3.36) y (3.37).  $\square$

En la Figura 3.10, se muestra la partición del plano  $\rho, k$  de acuerdo con el tipo de  $N_{\infty}$ .

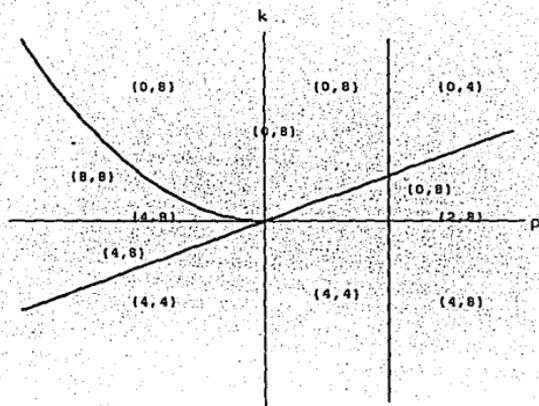


Figura 3.10:

### 3.8 El Flujo en $N_\infty$ . Grado Cuatro

Como una consecuencia de los Lemas 28 y 29, vemos que existen 5 tipos diferentes de superficies al infinito determinadas por los ceros de  $U$  y  $U'$ . Estos tipos son  $\{0,4\}$ ,  $\{0,8\}$ ,  $\{4,4\}$ ,  $\{4,8\}$  y  $\{8,8\}$  (ver Figura 3.11). A causa del comportamiento cuasigradiente del flujo sobre la correspondiente superficie  $N_\infty$ , sólo para los tipos  $\{0,4\}$ ,  $\{0,8\}$  y  $\{4,8\}$  se requiere una explicación del flujo. En el caso  $\{4,8\}$ , la superficie  $N_\infty$  tiene dos componentes simétricas en forma de "cacahuete". Esta situación es similar a la estudiada con detalle en la región del tipo  $\{2,6\}$  para grado tres. Las superficies para los casos  $\{0,4\}$  y  $\{0,8\}$  son topológicamente toros, solo que en el primer caso tiene cuatro ondas, mientras que en el segundo tiene ocho ondas. A continuación analizaremos el flujo para el tipo  $\{0,8\}$ . En la descripción del flujo, utilizaremos como referencia la Figura 3.11. Sobre la región  $R$  acotada por las rectas  $k = p/2$  y  $p = 2$  y la parábola  $k = p^2/4$  con  $p < 0$ , la variedad  $N_\infty$  es topológica-

mente un toro, cuyo contorno  $C_+ = \{(\theta, \sqrt{2U(\theta)}, 0) \mid U(\theta) > 0\}$  es la gráfica de una función con cuatro mínimos y cuatro máximos, en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Por lo tanto el flujo tiene cuatro puntos de equilibrio atractores y cuatro puntos sillas, con sus correspondientes puntos repulsivos y sillas, colocados antipodalmente. El punto de equilibrio en  $(0, \pm\sqrt{2k}, 0)$ , lo denotaremos por  $O_\pm$ . Sobre la región  $R$  es un atractor o repulsor, según se elija el signo positivo o negativo.  $S_\pm^i$  denota al punto silla cuya primer coordenada es  $-\theta_1^i$  y  $S_\pm^d$  es el primer punto silla a la derecha de  $O_\pm$ , cuya primer coordenada es  $\theta_1^i$ ; al punto de equilibrio en  $-\pi/2$ , lo designaremos por  $A$  y al de  $\pi/2$ , por  $B$ ; al punto sobre  $\theta_2^i$  se le designará por  $P$  y al punto sobre  $\pi$ , por  $D$ . Vea la Figura 3.11.

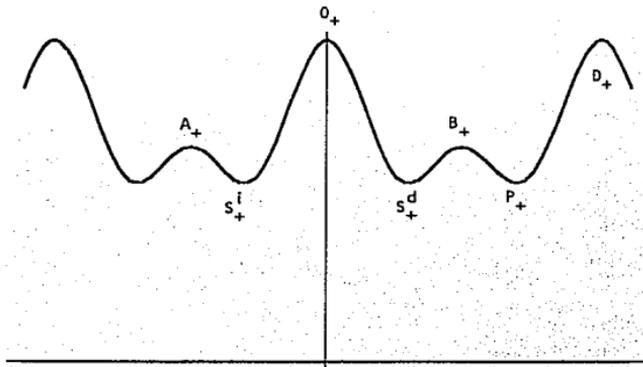


Figura 3.11:

Si  $\rho = 0$ , se tiene el siguiente resultado

**Teorema 30** Sea  $\rho = 0$  y  $k > 0$ . Existen valores  $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 < \beta_5 < \beta_6$  de  $\beta$  tal que

- 1) Si  $0 < k < \beta_1$ ,  $S_-^i \uparrow B_+$
- 2) Si  $k > \beta_3$ , entonces  $S_-^i \uparrow O_+$

3) En el intervalo  $0 < k < \beta_4$ , se cumple que  $S_-^d \uparrow B_+$

4) Si  $k > \beta_6$ , entonces  $S_-^d \uparrow D_+$

5) Para  $k = \beta_2$ , hay una conexión silla-silla, ya que  $S_-^i \uparrow S_+^i$ . También para  $k = \beta_6$  se tiene la conexión de sillas  $S_-^d \uparrow P_+$ .

**Demostración:** Como  $\rho = 0$ , De (3.37), se observa que  $\theta_1^* \rightarrow 0$  y  $\theta_2^* \rightarrow \pi$ , cuando  $k \rightarrow 0$ . Por lo tanto  $\Pi_2(S_+^i) = \Pi_2(S_-^i) \rightarrow 0$ , si  $k \rightarrow 0$ . De lo anterior, se concluye que para una  $k$  suficientemente pequeña, podemos elegir un intervalo  $(a, b) \subset (\theta_1^*, \theta_2^*)$  tal que la solución de

$$\frac{dv}{d\theta} = 3\sqrt{2U(\theta) - v^2} \quad ; \quad v(a) = -\sqrt{2U(a)}$$

toma un valor  $v(b) > \sqrt{2k}$ . Así la órbita de cualquier punto inicial  $(\theta, -\sqrt{2U(\theta)}, 0)$  con  $\theta_1^* < \theta < a$ , necesariamente sube a  $B_+$  y entonces  $S_-^d \uparrow B_+$ . Por otra parte, cuando  $k \rightarrow 0$ ,  $U(0, k)$  es del mismo orden que  $U(\theta_1^*, k)$ , lo cual significa que para toda  $\epsilon > 0$ , existe  $\beta > 0$  tal que si  $k < \beta$  se tiene que  $(1 - \epsilon)U(0, k) < U(\theta_1^*, k)$ ; en particular, para  $\epsilon = 19/100$ ,  $\frac{81}{100}U(0, k) < U(\theta_1^*, k)$  si  $k < \beta$ . La  $\beta$  se elige para que también se cumpla la desigualdad  $\text{Sen}(6\theta_1^*(k)) < \frac{9}{10}$ . La solución de

$$\frac{dv}{d\theta} = 3\sqrt{2k - v^2} \quad ; \quad v(-\theta_1^*) = 0;$$

es  $v(\theta) = \sqrt{2k} \text{Sen}3(\theta + \theta_1^*)$ , por lo tanto si  $k < \beta$  se tiene que  $v(\theta_1^*) = \sqrt{2k} \text{Sen}6\theta_1^* < \sqrt{2k} \frac{9}{10} = \sqrt{2 \frac{81}{100}k} < \sqrt{2\theta_1^{*2}}$ . Así la solución de la ecuación diferencial anterior, con condición inicial  $v(-\theta_1^*) = -\sqrt{2U(-\theta_1^*, k)}$  pasa por debajo de  $\sqrt{2U(\theta_1^*, k)}$ , cuando  $\theta = \theta_1^*$ . Por continuidad, toda solución de  $\frac{dv}{d\theta} = 3\sqrt{2k - v^2}$ , con condición inicial cercana a  $(-\theta_1^*, -\sqrt{2U(-\theta_1^*, k)})$  pasará por debajo de  $\sqrt{2U(\theta_1^*, k)}$ ; por lo tanto  $S_-^i \uparrow O$ . Fácilmente se demuestra que el conjunto  $\{k \mid S_-^i(k) \uparrow O, S_-^d \uparrow O\}$  es un intervalo abierto. Sea  $\beta_1$  su supremo; ahora veremos que para  $k = \beta_1$ ,  $S_-^i \uparrow S_+^i$  y  $S_-^d \uparrow B_+$ ; para esto basta ver que en  $\beta_1$  el ángulo entre  $S_-^i$  y  $S_-^d$  es menor o igual que el ángulo entre  $S_+^d$  y el punto de equilibrio P sobre  $\theta_2^*$ , dado que cada una de las dos parejas de puntos tienen la misma coordenada  $v$ . Notemos primero que cuando  $k \rightarrow 1$ ,  $\theta_1^*(k) \rightarrow \pi/4$  y analicemos la ecuación

$$\frac{dv}{d\theta} = 3\sqrt{2r - v^2} \quad ; \quad v(-\alpha) = -\sqrt{2r}; \quad (3.38)$$

su solución es  $v(\theta) = \sqrt{2r} \text{Sen}(3\theta + 3\alpha - \pi/2)$ . Supongamos que  $\alpha < \pi/4$  y  $\alpha$  es muy cercano a  $\pi/4$ , entonces  $3\alpha - \pi/2$  es muy cercano a  $\pi/4$ , por lo tanto, si  $\theta$  es cercano a  $\pi/12$ , se tiene que  $v(\theta)$  es muy cercano a  $\sqrt{2r} \text{Sen}(\pi/2) = \sqrt{2r}$ . Así, tomando  $k$  de modo que  $\theta_1^*(k) > \pi/12$ , podemos encontrar un punto muy cercano a  $S_-^i$ , de modo que su órbita alcance el valor  $\sqrt{2k}$  en un ángulo  $\theta = \pi/12 < \theta_1^*(k)$ . De esto se concluye que  $S_-^i \uparrow O$ . Pero  $\theta_1^*(k) < \pi/4$ , por lo cual el ángulo entre  $S_-^d$  y  $P$  es mayor que entre  $S_-^i$  y  $S_-^d$ ; con esto se demuestra la existencia de una  $k > \beta_1$ , para la que  $S_-^i \uparrow O$  y  $S_-^d \uparrow B_+$ , de lo que se sigue (2). Ahora es claro que para toda  $k > \beta_1$ ,  $S_-^i \uparrow O$ . Finalmente, cuando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\theta_1^*$  y  $\theta_2^*$  convergen a  $\pi/2$ , por lo tanto con argumentos análogos a los ya utilizados, se demuestra que existe una  $k$ , para la cual  $S_-^d \uparrow D_+$ ; hacemos  $\beta_2$  igual al ínfimo de tales  $k$ , con lo que se cumple 4) y 5) del teorema.  $\square$

## Capítulo 4

# Sistemas Hamiltonianos Polinomiales

En este capítulo se describe la compactificación de Poincaré de un campo vectorial, lo que a grandes rasgos, consiste en proyectar sobre la esfera  $S^n = \{\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2\}$  mediante la proyección central un campo vectorial  $X$  definido en  $\mathbb{R}^n$ , obteniendo así sobre la unión de los dos hemisferios abiertos de la esfera un campo vectorial, el cual puede ser extendido a toda la esfera. A este campo lo denotamos por  $\tilde{X}$ . Este proceso se le aplica a los campos hamiltonianos polinomiales  $X_H$  y se demuestra que la variedad  $E^\infty = S^{n-1} \cap \{H_{m+1} = 0\}$  es invariante bajo el flujo de  $\tilde{X}_H$ , donde  $H_{m+1}$  es la parte homogénea de grado mayor del polinomio  $H$ . Se estudian algunas propiedades generales de la variedad  $E^\infty$ .

### 4.1 Compactificación de Poincaré de campos vectoriales polinomiales.

Para estudiar el comportamiento al infinito de los campos vectoriales hamiltonianos cuyo hamiltoniano es polinomial, se utilizará la compactificación de Poincaré. A continuación se da una breve descripción siguiendo los cálculos desarrollados en [6].

Identificaremos al espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  con el hiperplano

$\Phi = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | y_{n+1} = 1\}$ , tangente a la esfera  $S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = 1\}$ . Sean  $S_+^n$  y  $S_-^n$ , los hemisferios norte y sur de la esfera, respectivamente. Definimos los difeomorfismos

$$\phi^+ : \mathbb{R}^n \longrightarrow S_+^n ; \quad \phi^- : \mathbb{R}^n \longrightarrow S_-^n,$$

por

$$\begin{aligned} \phi^+(x) &= \frac{1}{\Delta(x)} (x_1, \dots, x_n, 1), \\ \phi^-(x) &= -\frac{1}{\Delta(x)} (x_1, \dots, x_n, 1), \end{aligned}$$

con  $\Delta(x) = (1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ .

Así para cada campo vectorial  $X$  en  $\mathbb{R}^n$ , obtenemos un campo  $X^*$  en  $S_+^n \cup S_-^n$ , dado

por

$$X^*(y) = \begin{cases} (D\phi^+)_x X(x) & \text{si } y = \phi^+(x), \\ (D\phi^-)_x X(x) & \text{si } y = \phi^-(x). \end{cases}$$

La expresión para  $X^*(y)$  en  $S_+^n \cup S_-^n$  es

$$X^*(y) = y_{n+1} \begin{pmatrix} 1 - y_1^2 & -y_1 y_2 & \dots & -y_1 y_n \\ -y_1 y_2 & 1 - y_2^2 & \dots & -y_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_n y_1 & -y_n y_2 & \dots & 1 - y_n^2 \\ -y_{n+1} y_1 & -y_{n+1} y_2 & \dots & y_{n+1} y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \vdots \\ X_{n-1}^* \\ X_n^* \end{pmatrix} = A(y) \begin{pmatrix} X_1^* \\ \vdots \\ X_n^* \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

con  $X_i^*(y_1, \dots, y_{n+1}) = X_i(y_1/y_{n+1}, \dots, y_n/y_{n+1})$ .

Debido a que cada  $X_i$  es un polinomio, el campo (4.1) se puede extender a toda la esfera  $S^n$ . En efecto, tal extensión está dada por

$$\widetilde{X}(\bar{y}) = y_{n+1}^{n-1} X^*(\bar{y}) = A(\bar{y}) \begin{pmatrix} \widetilde{X}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{X}_n \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

donde  $m = \max\{\text{grado}(X_1), \dots, \text{grado}(X_n)\}$  y

$$\bar{X}_k(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_{n+1}^m X_k(y_1/y_{n+1}, \dots, y_n/y_{n+1}). \quad (4.3)$$

Nótese que el infinito de  $\mathbb{R}^n$  corresponde al ecuador  $S^{n-1} = \{y \in S^n | y_{n+1} = 0\}$ . El flujo de (4.2) cerca de  $S^{n-1}$ , nos permite estudiar las órbitas de  $X$  que van o vienen de infinito. De las expresiones anteriores se deduce que el infinito  $S^n$  es invariante bajo el flujo de  $\bar{X}$ .

## 4.2 Compactificación de Poincaré para campos vectoriales polinomiales Hamiltonianos.

Sea  $H: \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$  un polinomio y

$$X_H = \left( \frac{\partial H}{\partial x_{d+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2d}}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_d} \right),$$

el campo vectorial Hamiltoniano generado por  $H$ .

Utilizando los cálculos de la sección anterior a esta particular clase de campos vectoriales se obtiene el siguiente resultado

**Proposición 31** [6] Sea  $H(x_1, \dots, x_n)$  un Hamiltoniano polinomial con  $n=2d$  variables y de grado  $m+1$ . Entonces

$$(a) \bar{X}_H = \left( \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} + \lambda y_1, \dots, \frac{\partial H^*}{\partial y_{2d}} + \lambda y_d, -\frac{\partial H^*}{\partial y_1} + \lambda y_{d+1}, \dots, -\frac{\partial H^*}{\partial y_d} + \lambda y_{2d}, \lambda y_{n+1} \right),$$

donde

$$H^*(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_{n+1}^{m+1} H(y_1/y_{n+1}, \dots, y_n/y_{n+1})$$

y

$$\lambda = \sum_{i=1}^d (y_{i+d} \frac{\partial H^*}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}});$$

(b) el nivel de energía  $H^* = 0$  es invariante bajo el flujo de  $\bar{X}_H$ .

**Demostración:** De (4.3) y de la definición de  $H^*$  se obtiene

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i} = y_{n+1}^m \frac{\partial H}{\partial y_i} (y_1/y_{n+1}, \dots, y_n/y_{n+1}) = \frac{\partial H^*}{\partial y_i};$$

por consiguiente (a) se sigue de (4.2) y de la igualdad de arriba.

Al calcular la derivada de  $H^*$  a lo largo de las curvas soluciones de  $\bar{X}_H$  resulta

$$\begin{aligned} \frac{dH^*}{dt} &= \sum_{i=1}^d \left[ \frac{\partial H^*}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}} y_{i+d}' \right] + \frac{\partial H^*}{\partial y_{n+1}} y_{n+1}' \\ &= \sum_{i=1}^d \left[ \frac{\partial H^*}{\partial y_i} \left( \frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}} + \lambda y_i \right) + \frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}} \left( -\frac{\partial H^*}{\partial y_i} + \lambda y_{i+d} \right) \right] + \frac{\partial H^*}{\partial y_{n+1}} \lambda y_{n+1} \\ &= \lambda \left( \sum_{i=1}^d \left[ \frac{\partial H^*}{\partial y_i} y_i + \frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}} y_{i+d} \right] + \frac{\partial H^*}{\partial y_{n+1}} y_{n+1} \right) = \lambda(n+1)H^*. \end{aligned}$$

Para obtener la última expresión se aplicó a  $H^*$ , la fórmula de Euler para funciones homogéneas. De la igualdad final se sigue que  $H^* = 0$  es invariante bajo el flujo de  $\bar{X}_H$ .  $\square$

Dado un Hamiltoniano polinomial  $H$  de grado  $m+1$ ,  $H_i$  denota la parte homogénea de grado  $i$ . Al término constante  $H_0$  lo llamaremos  $h$ . Es claro que el análisis del flujo en los niveles de energía  $E_h = H^{-1}(h)$  se reduce al análisis en el nivel  $H^{-1}(0)$ , si  $h$  se considera como un parámetro y no está fijo.

**Teorema 32** [6] Con las hipótesis de la Proposición 31, son válidas las siguientes afirmaciones

a) El nivel  $E_h = H^{-1}(0)$  se mapea por medio del difeomorfismo  $\phi^+(\phi^-)$  sobre un subconjunto  $E_h^+(E_h^-)$  del hemisferio norte (sur).  $E_h^+$  y  $E_h^-$  son invariantes bajo el flujo de  $\bar{X}_H$ .

b) Sea  $S^{n-1} = S^n \cap \{y_{n+1} = 0\}$ . Entonces la restricción  $\bar{X}_H|_{S^{n-1}}$  está dado por

$$\left( \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_{d+1}} + \lambda y_1, \dots, \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_{2d}} + \lambda y_d, -\frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_1} + \lambda y_{d+1}, \dots, -\frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_d} + \lambda y_{2d} \right),$$

donde

$$\lambda = \sum_{i=1}^d \left( y_{i+d} \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_{i+d}} \right).$$

c) El conjunto

$$E^\infty = S^{n-1} \cap (H_{m+1} = 0),$$

es invariante bajo el flujo de  $\bar{X}_H$ .

(d) La frontera de  $E_h^+$  está contenida en  $E^\infty$ .

(e) Los puntos críticos de  $\bar{X}_H|_{S^{n-1}}$  pertenecen a  $E^\infty$ .

**Demostración:** La afirmación (a) se sigue de la definición de la compactificación de Poincaré. El inciso (b) se obtiene de la Proposición 31. La demostración de (c) es

similar a la de la Proposición 31(b). Dado que  $\{H^* = 0\} \cap S^{n-1} = E^\infty$ , la parte (d) se sigue de la Proposición 31(b) y de la definición de  $E^\infty$ .

Los puntos críticos de  $\tilde{X}_H|_{S^{n-1}}$  satisfacen el sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_{d+i}} + \lambda y_i &= 0, \\ \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_i} - \lambda y_{d+i} &= 0,\end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, d$ . Multiplicando la primera ecuación por  $y_{d+i}$  y la segunda por  $y_i$  y después sumando las ecuaciones, se obtiene

$$\sum_{j=1}^{2d} y_j \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_j} = 0.$$

Por la fórmula de Euler para funciones homogéneas se sigue que

$$H_{m+1} = 0,$$

y por lo tanto se cumple (e).  $\square$

### 4.3 Algunas propiedades generales de $E_\infty$

Sea  $P: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  un polinomio homogéneo de grado  $d$  y  $S^n$  la esfera de dimensión  $n$  definida por

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | G(x) = 1\}, \text{ donde } G(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2.$$

Denotamos con  $V$  al conjunto de ceros de  $P$ , i.e.

$$V = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | P(x) = 0\}.$$

Sea  $W = S^n \cap V$ . Si  $L = (P, G)$ , entonces  $W = L^{-1}(0, 1)$ . En esta sección, por comodidad denotaremos a  $E^\infty$  por  $W$ . Nótese que la dimensión  $n-1$  de la sección anterior la hemos reemplazado por  $n$ .

El polinomio  $P$  se elige de modo que  $W$  es una variedad de dimensión  $n-1$ , es decir  $(0, 1)$  es valor regular de  $L$ , lo cual es equivalente a que  $\nabla P(x) \neq \bar{0}$ , para

toda  $x \in W$ . En efecto, supongamos que  $\bar{x}$  es un punto crítico de  $W$ , entonces  $\nabla P(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$ , para alguna  $\lambda$ ; por la fórmula de Euler  $\bar{x} \cdot \nabla P(\bar{x}) = dP(\bar{x})$ , se sigue de la igualdad anterior que  $\lambda \|\bar{x}\|^2 = dP(\bar{x}) = 0$ . Como  $\bar{x} \in S^n$ , resulta que  $\lambda = 0$  y por lo tanto  $\nabla P(\bar{x}) = 0$ . Al disco de dimensión  $n$ , se denotará por  $D^n$ , i.e.  $D^n = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \mid y_{n+1} = 0, \sum y_i^2 \leq 1\}$ . Si el espacio topológico  $A$  es homeomorfo a  $B$ , escribimos  $A \cong B$ .

Sea  $D$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  definido por

$$D = \{(x_1, \dots, x_n, 1) \mid P(x_1, \dots, x_n, 1) = 0\}. \quad (4.4)$$

La proyección radial de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  sobre la esfera  $S^n$ , es la función definida por

$$\Pi_+^+(x) = \frac{x}{\|x\|}. \quad (4.5)$$

La función  $\Pi_-^-$  es por definición igual a  $-\Pi_+^+$ .

**Proposición 33** *Supongamos que  $x_{n+1}$  no es factor del polinomio  $P$ ; entonces el conjunto  $W$  está dado por*

$$W = \overline{\Pi_+^+(D)} \cup \overline{\Pi_-^-(D)}$$

**Demostración:** Sea  $\{x^k\}$  un sucesión en  $D$  tal que  $x^k / \|x^k\| \rightarrow q$ . Por continuidad se tiene que  $P(x^k / \|x^k\|) \rightarrow P(q)$ , por lo tanto  $P(q) = 0$ , ya que  $P(x^k / \|x^k\|) = 0$ , para toda  $k$ . Obviamente  $\|q\| = 1$ ; así pues  $q \in W$ . Con esto queda demostrado que  $\overline{\Pi_+^+(D)} \subset W$ . En forma semejante se demuestra que  $\overline{\Pi_-^-(D)} \subset W$ .

Ahora veremos que  $W \subset \overline{\Pi_+^+(D)} \cup \overline{\Pi_-^-(D)}$ . Sea  $q = (x_1, \dots, x_{n+1})$  un punto de  $W$ , i.e.  $P(q) = 0$  y  $\|q\| = 1$ . Primero analizaremos el caso que  $x_{n+1} \neq 0$ . Sea  $x = (x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1}, 1)$ ; de la homogeneidad de  $P$  se sigue que  $x \in D$ . Como  $\|q\| = 1$  y  $q = x_{n+1}x$ , entonces  $|x_{n+1}| \|x\| = 1$ ; por lo tanto  $|x_{n+1}| = 1/\|x\|$ ; así  $q = x/\|x\|$  o  $q = -x/\|x\|$ , entonces  $q \in \Pi_+^+(D) \cup \Pi_-^-(D)$ . Por último, supongamos que  $x_{n+1} = 0$ . Si existe una bola  $B(q, \epsilon)$  tal que  $\forall x \in B(q, \epsilon) \cap V$  se tiene que la  $(n+1)$ -coordenada es igual a cero, entonces  $x_{n+1}$  divide a  $P$ ; entonces por la hipótesis se puede suponer que existe una sucesión  $\{(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k, \omega^k) \in W\}_{k=1}^\infty$  que converge a  $q = (q_1, \dots, q_n, 0)$ . Sin pérdida de generalidad se puede considerar

que  $\omega^k > 0$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Obviamente  $q^k = (x_1^k/\omega^k, \dots, x_n^k/\omega^k, 1)$  pertenece a  $D$ ; además  $\|q^k\| = \sqrt{(x_1^{k^2} + \dots + x_n^{k^2})/\omega^{k^2} + 1} = 1/\omega^k$ , por lo tanto  $\Pi_+^+(q^k) = \omega^k q^k$  converge a  $q$ , i.e.  $q \in \Pi_+^+(D) \cup \Pi_-^-(D)$ .  $\square$

**Lema 34** Si  $C \subset S^n$  y  $C \cong S^{n-1} \Rightarrow S^n \setminus C = H \cup K$  con  $H \cap K = \emptyset$  y  $H \cong D^n \cong K$ .

**Proposición 35** Si  $d$  es par entonces  $W$  no es homeomorfo a  $S^{n-1}$ .

**Demostración:** Sea  $\Psi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  el mapeo antipodal, el cual no tiene puntos fijos distintos de cero.

Claramente  $\Psi(W) = W$ .

Definimos

$$V_+ = \{x | P(x) > 0\}, \quad V_- = \{x | P(x) < 0\}, \\ W_+ = V_+ \cap S^n, \quad W_- = V_- \cap S^n.$$

Es fácil ver que  $\Psi(V_+) = V_-$  y  $\Psi(V_-) = V_+$ ; por lo tanto  $\Psi(W_\pm) = W_\mp$ .

Claramente por continuidad, se tiene que  $\overline{W_\pm} = W_\pm \cup W$  y por lo tanto

$$\Psi(\overline{W_\pm}) = \overline{W_\mp}. \quad (4.6)$$

Si  $W \cong S^{n-1}$ , entonces por el Lema 34,  $\overline{W_+} \cong D^n$  y por (4.6), tendríamos un mapeo de  $D^n$  en  $D^n$  sin puntos fijos, lo cual es una contradicción.  $\square$

**Definición 36** Sea  $I$  una involución en  $S^n$ . Se dice que  $N$  es una subvariedad característica de  $(I, S^n)$  si existe  $A$  subvariedad compacta de  $S^n$ , tal que

- 1)  $N = A \cap I(A) = \partial A$ , y
- 2)  $S^n = A \cup I(A)$ .

En lo que sigue de esta sección el grado  $d$  será impar.

**Lema 37** Si  $d$  es impar, entonces  $W$  es subvariedad característica de  $(\Psi, S^n)$ .

**Demostración:** Sea  $A = \overline{W}_+$ ; claramente  $\Psi(\overline{W}_+) = \overline{W}_-$  y fácilmente se verifican (1) y (2) de la definición anterior.  $\square$

Sea  $X$  un espacio topológico, entonces  $H_q(X)$  denota el  $q$ -ésimo grupo de homología de  $X$  y  $T_q(X)$  al subgrupo de torsión de  $H_q(X)$ .

**Proposición 38** *Supongamos que  $n = 4k + 3$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $T_{2k}(W) = 0$ . Entonces  $H_{2k+1}(W) = Z^{4r}$ .*

Antes de dar la demostración de este resultado se enuncia una consecuencia que es de interés en el presente trabajo. Notemos que cuando  $n = 3$ , entonces  $W$  es una superficie orientable, compacta y sin frontera.

**Corolario 39** *Si  $n = 3$ , entonces  $W$  no es una superficie conexa de género impar.*

**Demostración del corolario:** Si  $n = 3$ , entonces  $k = 0$ . Por lo tanto  $H_1 = Z^{4r}$ , pero  $H_1$  es el abelianizado del grupo fundamental, por lo que  $H_1 = Z^{2g}$ , ( $g$  es el género). Si  $g$  es impar,  $2g$  no es divisible entre 4.  $\square$

Sea  $M$  una variedad compacta, orientada de dimensión  $2r$ . Al conjunto de números enteros los denotamos por  $Z$ . Por el Teorema de dualidad de Poincaré existe un isomorfismo  $\Upsilon : H_r(M) \rightarrow H^r$ . Sea  $F : H_r \times H_r \rightarrow Z$ , definida por  $\tilde{F}(x, y) = \langle \Upsilon(x), y \rangle$ ,  $x, y \in H_r(M)$ . Esta función  $\tilde{F}$  es bilineal y simétrica o antisimétrica, si  $r$  es par o impar respectivamente (ver [9]). De modo natural  $\tilde{F}$  induce una forma  $F$  en  $H_r(M)/T_r(M) \times H_r(M)/T_r(M)$ , definida como es usual por medio de los representantes.

**Teorema 40** *Sea  $M$  una variedad compacta, sin frontera, orientable de dimensión  $2r$ . Entonces la forma bilineal*

$$F(x, y) = x \cdot y,$$

definida sobre

$$H_r(M)/T_r(M),$$

es unimodular y simétrica si  $r$  es par y es unimodular y antisimétrica si  $r$  es impar.

Unimodular significa que la matriz asociada tiene determinante igual a 1.

El siguiente resultado se encuentra en [10].

**Proposición 41** Si  $M$  es una variedad compacta entonces  $H_q(M)$  está finitamente generado para todo índice  $q$ .

Por un teorema de Kurosh (ver [10]), todo grupo abeliano finitamente generado es suma directa de un grupo libre  $Z^n$  y un grupo de torsión finito  $T$ . Por lo tanto

$$H_q(M) = L_q(M) \oplus T_q(M),$$

tal que  $L_q(M) = Z^n$  y  $T_q(M)$  es un grupo de torsión finito.

Para expresar que dos grupos  $A$  y  $B$  son isomorfos escribimos  $A \approx B$ . Una forma equivalente del Teorema de dualidad de Poincaré es

**Teorema 42** Bajo las hipótesis del Teorema 40 se tiene

- 1)  $L_q(M) \approx L_{2r-q}(M)$ ,
- 2)  $T_q(M) \approx T_{2r-q-1}(M)$ .

Sea  $i: W \rightarrow \overline{W}_+$ , la inclusión canónica. Este mapeo determina un homomorfismo  $i_{*q}$ , en los grupos de homología  $H_q(W) \rightarrow H_q(\overline{W}_+)$ . Como es costumbre omitiremos el índice  $q$  en el símbolo  $i_{*}$ .

Denotemos por  $K_q$  al kernel de  $i_*: H_q(W) \rightarrow H_q(\overline{W}_+)$ .

**Lema 43** Sea  $\Psi_{*q}: H_q(W) \rightarrow H_q(W)$ , el homomorfismo inducido por el mapeo antipodal  $\Psi$ . Si  $q+1 < n$ , entonces  $H_q(W) = K_q \oplus \Psi_{*q}(K_q)$ .

**Demostración:** Sabemos que

$$S^n = \overline{W}_+ \cup \Psi(\overline{W}_+) \quad \text{y} \quad W = \overline{W}_+ \cap \Psi(\overline{W}_+).$$

Por otra parte

$$H_i(S^n) = \begin{cases} Z, & i \in \{0, n\} \\ 0, & \text{en } \{0, n\}^c \end{cases}$$

ver [12].

Tomemos  $q$  tal que  $0 < q < q + 1 < n$ . El índice  $q$  se omitirá en todos los casos, excepto en la notación de los grupos de homología.

Como la sucesión de Mayer-Vietoris

$$\dots \rightarrow H_{q+1}(S^n) \rightarrow H_q(W) \rightarrow H_q(\overline{W}_+) \oplus H_q(\Psi(\overline{W}_+)) \rightarrow H_q(S^n) \rightarrow \dots$$

es exacta (ver [12]) y dado que  $H_{q+1}(S^n) = H_q(S^n) = \{0\}$ , se sigue entonces que  $\varphi = (i_*, j_*)$  es un isomorfismo, donde  $i_*$  y  $j_*$  son los homomorfismos inducidos por las inclusiones de  $W$  en  $\Psi(\overline{W}_+)$  y  $\overline{W}_+$  respectivamente.

Por otra parte, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{i} & \overline{W}_+ \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ W & \xrightarrow{j} & \Psi(\overline{W}_+) \end{array}$$

induce en homología el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K \subset H_q(W) & \xrightarrow{i_*} & H_q(\overline{W}_+) \\ \Psi_* \downarrow \approx & & \approx \downarrow \Psi_* \\ H_q(W) & \xrightarrow{j_*} & H_q(\Psi(\overline{W}_+)). \end{array}$$

Como  $K$  es el kernel de  $i_*$ , se obtiene que  $\Psi_*(K)$  es el kernel de  $j_*$ , por lo cual

$$\varphi(K) \subset 0 \oplus H_q(\Psi(\overline{W}_+))$$

y

$$\varphi(\Psi_*(K)) \subset H_q(\overline{W}_+) \oplus 0.$$

Sea  $(0, z) \in 0 \oplus H_q(\Psi(\overline{W}_+))$ . Como  $\varphi$  es epimorfismo existe  $y \in H_q(W)$  tal que  $\varphi(y) = (0, z)$ ; por lo tanto  $y \in K$ . De este modo queda demostrado que

$$\varphi(K) = 0 \oplus H_q(\Psi(\overline{W}_+)).$$

Análogamente

$$\varphi(\Psi_*(K)) = H_q(\overline{W}_+) \oplus 0.$$

De esto se obtiene que

$$H_q(W) = K \oplus \Psi_*K.$$

□

Demostración de la Proposición 38 : Como  $W$  es una variedad de dimensión  $4k+2$ , por el Teorema 42 ,

$$T_{2k+1}(W) \approx T_{2k}(W) = 0.$$

Por lo tanto  $H_{2k+1}(W)$  es libre de torsión y por el Lema 43 se tiene

$$H_{2k+1}(W) \cong Z^{2m}.$$

Por Teorema 40, la forma bilinear  $F(x, y)$  es antisimétrica y unimodular sobre  $H_{2k+1}(W)$ .

El homeomorfismo antipodal  $\Psi$ , induce la forma bilinear

$$B(x, y) = F(x, \Psi_*y) = x \cdot \Psi_*y, \quad \text{para } (x, y) \in K \times K.$$

Como  $\Psi$  invierte orientación entonces  $x \cdot y = -\Psi_*x \cdot \Psi_*y$ .

Por lo tanto

$$x \cdot \Psi_*y = -\Psi_*x \cdot \Psi_*\Psi_*y = -\Psi_*x \cdot y = y \cdot \Psi_*x,$$

donde la última igualdad es consecuencia de la antisimetría de  $F$ . Así,  $B$  es una forma bilinear simétrica.

Dado que  $H_{2k+1}(W) = K \oplus \Psi_*K$ , (ver Lema 43), se puede elegir una base  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \Psi_*\alpha_1, \dots, \Psi_*\alpha_m$  en la cual la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \cdot \alpha_j & \alpha_i \cdot \Psi_*\alpha_j \\ \Psi_*\alpha_i \cdot \alpha_j & \Psi_*\alpha_i \cdot \Psi_*\alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

asociada a  $F$  es unimodular. Por lo tanto  $B$  es unimodular y como además  $B$  toma valores pares, (ver [22]) se concluye que el número de renglones de  $b$  es par, por lo tanto  $m = \dim K$  es par, y finalmente

$$H_{2k+1}(W) = Z^{4r} \quad \square$$

## Capítulo 5

### La Variedad $E^\infty$ . Grado 2 y 3

Este capítulo está dedicado completamente al estudio de la clasificación de las superficies cúbicas que se obtienen al intersectar la esfera  $S^3$  con un cono  $\{H_3 = 0\}$ , donde  $H_3$  es un polinomio homogéneo de tercer grado en cuatro variables. Se usa una forma normal de Arnold, para reducir el espacio de parámetros a un espacio de cuatro dimensiones. El discriminante divide al espacio de parámetros en diversas componentes conexas y todas las superficies que corresponden a parámetros dentro de una misma componente son difeomorfas; la forma normal de cada superficie se obtiene eligiendo un juego de parámetros en cada una de dichas componentes.

#### 5.1 Clasificación topológica de la variedad $E^\infty$ . 2 grados de libertad.

En esta sección se estudiará la topología de la variedad  $E^\infty$ , con  $H$  un hamiltoniano polinomial homogéneo con 2 grados de libertad y de grado a lo más 3. Las variables  $(y_1, \dots, y_4)$  se denotarán por  $(x, y, z, w)$  y el campo  $\bar{X}_H|_{S^3}$  por  $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ .

Por el Teorema 32(b), el campo  $F$  es

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, w) &= \frac{\partial H_i}{\partial z} + \lambda x, \\ F_2(x, y, z, w) &= \frac{\partial H_i}{\partial w} + \lambda y, \\ F_3(x, y, z, w) &= -\frac{\partial H_i}{\partial x} + \lambda z, \\ F_4(x, y, z, w) &= -\frac{\partial H_i}{\partial y} + \lambda w, \end{aligned} \quad (5.1)$$

con

$\lambda = z \frac{\partial H_i}{\partial z} - x \frac{\partial H_i}{\partial x} + w \frac{\partial H_i}{\partial w} - y \frac{\partial H_i}{\partial y}$ , donde  $i = 1, 2, 3$  es el grado del polinomio  $H$ .

Si  $H$  es de primer grado,  $H = h + ax + by + cz + dw$  y el sistema  $X_H$  es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c, \\ \dot{y} &= d, \\ \dot{z} &= -a, \\ \dot{w} &= -b, \end{aligned}$$

cuyas soluciones

$$\begin{aligned} x(t) &= ct + k_1, \\ y(t) &= dt + k_2, \\ z(t) &= -at + k_3, \\ w(t) &= -bt + k_4, \end{aligned}$$

son independientes entre sí. Es obvio que no se necesita la compactificación para un análisis completo de este sistema.

En las siguientes secciones de este trabajo, serán útiles los siguientes Teoremas 44 y 45, cuyas demostraciones pueden verse en [13].

**Teorema 44** (índice de Poincaré-Hopf). Sea  $X$  un campo vectorial sobre una variedad compacta orientada  $M$ , con un número finito de ceros. Entonces la suma global de los índices es igual a la característica de Euler de  $M$ .

**Teorema 45** La característica de Euler  $\chi$  de una superficie de género  $g$  es

$$\chi = 2 - 2g.$$

### 5.1.1 Hamiltoniano Homogeneo de grado 2

Sea

$$H_2(x, y, z, w) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}w^2 +$$

$$2(a_{12}xy + a_{13}xz + a_{14}xw + a_{23}yz + a_{24}yw + a_{34}zw),$$

la expresión general de una forma cuadrática en 4 variables. La forma  $H_2$  se puede diagonalizar mediante una transformación ortogonal para llevarla a la forma

$$H_2(x, y, z, w) = \rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 + \rho_4 w^2,$$

donde  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  son los valores propios de la matriz asociada a  $H_2$  y genéricamente son distintos de cero.

De acuerdo con el Teorema 32,  $E^\infty$  es invariante bajo el campo dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho_3 z + (\rho_1 - \rho_3)x^2 z + (\rho_2 - \rho_4)xyz, \\ \dot{y} &= \rho_4 w + (\rho_1 - \rho_3)xyz + (\rho_2 - \rho_4)y^2 w, \\ \dot{z} &= -\rho_1 x + (\rho_1 - \rho_3)xz^2 + (\rho_2 - \rho_4)yzw, \\ \dot{w} &= -\rho_2 y + (\rho_1 - \rho_3)xzw + (\rho_2 - \rho_4)yw^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dado que  $E^\infty$  es una superficie compacta de dimensión dos, para describirla topológicamente basta determinar su género  $g$ . El género está relacionado con la característica  $\chi$  por la fórmula

$$\chi = 2 - 2g.$$

Por el Teorema del índice de Poincaré-Hopf, la característica es igual a la suma de los índices de los puntos de equilibrio del sistema (5.2). De estas observaciones se concluye que el problema es equivalente a calcular el índice de cada punto de equilibrio del sistema (5.2).

Después de algunas modificaciones algebraicas sencillas, los puntos de equilibrio de (5.2), se obtienen como soluciones de las ecuaciones

$$\begin{aligned}\rho_3 yz - \rho_4 xw &= 0, \\ -\rho_1 xw + \rho_2 yz &= 0, \\ \rho_3 z^2 + \rho_1 x^2 &= 0, \\ \rho_4 w^2 + \rho_2 y^2 &= 0.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Para resolver (5.3), es conveniente distinguir las siguientes posibilidades de acuerdo con los signos de los valores propios:

I) Todos los valores propios tienen el mismo signo. Entonces  $E^\infty = \emptyset$ .

II) La forma cuadrática  $H_2$  es de signatura impar, es decir 3 valores con el mismo signo y uno con signo distinto. Por la simetría de (5.3) y la homogeneidad de  $H_2$ , es suficiente con analizar el caso  $\rho_1, \rho_2$  y  $\rho_4$ , positivos y  $\rho_3$  negativo.

III) Si  $H_2$  es de signatura par y cambia de signo, entonces tiene 2 valores positivos y 2 negativos. Esencialmente se tienen tres casos: a)  $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$  y  $\rho_3 < 0, \rho_4 < 0$ , b)  $\rho_1 > 0, \rho_4 > 0$  y  $\rho_2 < 0, \rho_3 < 0$  y c)  $\rho_1 > 0, \rho_3 > 0$  y  $\rho_2 < 0, \rho_4 < 0$ .

## Puntos de Equilibrio. grado 2

En la demostración del siguiente teorema se usará la notación de arriba

**Teorema 46** Sea  $\tilde{X}_H$  el campo vectorial Hamiltoniano inducido por un Hamiltoniano polinomial de segundo grado. Si  $E^\infty \neq \emptyset$ , entonces se cumple

(a) Si la signatura de la forma  $H_2$  es impar, el campo  $\tilde{X}_H$  tiene exactamente cuatro puntos de equilibrio en  $E^\infty$ .

(b) Si la signatura de  $H_2$  es par, genéricamente el campo  $\tilde{X}_H$  tiene ocho puntos de equilibrio en  $E^\infty$ , o bien ninguno.

**Demostración:** Consideremos primero el caso II). Por la cuarta ecuación de (5.3) no hay solución de (5.3) con  $y \neq 0$  ó  $w \neq 0$ . Entonces  $y = 0, w = 0$ ; de la tercera ecuación de (5.3) se obtiene

$$x = \pm \left(-\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}} z;$$

como el punto debe pertenecer a la esfera, se obtiene

$$-\frac{\rho_3}{\rho_1} z^2 + z^2 = 1,$$

de donde

$$z = \pm \left( \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_3} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm k.$$

Se tienen exactamente 4 puntos de equilibrio

$$\begin{aligned} P_1 &= (k_1, 0, k, 0); -P_1 = (-k_1, 0, -k, 0), \\ P_2 &= (-k_1, 0, k, 0); -P_2 = (k_1, 0, -k, 0), \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde  $k_1 = \left( \frac{-\rho_2}{\rho_3 - \rho_1} \right)^{\frac{1}{2}}$  y  $k = \left( \frac{-\rho_1}{\rho_1 - \rho_3} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Analicemos ahora III). Para a) se tiene  $\rho_1 > 0$ ,  $\rho_2 > 0$  y  $\rho_3 < 0$ ,  $\rho_4 < 0$ .

Usando la cuarta ecuación de (5.3),  $y = 0$  es equivalente a  $w = 0$ . Con esta condición se obtienen los puntos  $P_1$ ,  $-P_1$ ,  $P_2$  y  $-P_2$  como en el caso anterior. Análogamente,  $x = 0$  es equivalente a  $z = 0$  y las raíces son

$$w = \pm \left( -\frac{\rho_2}{\rho_4} \right)^{\frac{1}{2}} y,$$

$$y = \pm \left( \frac{\rho_4}{\rho_4 - \rho_2} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm r,$$

con lo cual se tienen los puntos de equilibrio

$$\begin{aligned} Q_1 &= (0, r, 0, r_1); -Q_1 = (0, -r, 0, -r_1), \\ Q_2 &= (0, -r, 0, r_1); -Q_2 = (0, r, 0, -r_1), \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde  $r_1 = \left( \frac{-\rho_2}{\rho_2 - \rho_4} \right)^{\frac{1}{2}}$  y  $r = \left( \frac{-\rho_4}{\rho_4 - \rho_2} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

De la primera ecuación de (5.3) se despeja  $xw$  y se sustituye en la segunda ecuación; por lo tanto

$$\frac{-\rho_1 \rho_3}{\rho_4} yz + \rho_2 yz = 0,$$

o bien

$$(-\rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_4) yz = 0.$$

De esta ecuación se concluye que para que existan puntos de equilibrio, sin coordenadas nulas, es necesario que

$$-\rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_4 = 0,$$

lo cual corresponde a un caso no genérico con una curva cerrada de puntos de equilibrio.

Así que en el caso III.a) genericamente se tienen los 8 puntos de equilibrio

$$\pm P_i, \pm Q_i, i = 1, 2. \quad (5.6)$$

De una manera análoga se procede con el caso III.b). Vamos a verificar que el resultado es el mismo que para III.a). Ahora  $\rho_1 > 0, \rho_4 > 0$  y  $\rho_2 < 0, \rho_3 < 0$ . De la tercera y cuarta ecuación de (5.3) se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} (\sqrt{\rho_1}x - \sqrt{-\rho_3}z) (\sqrt{\rho_1}x + \sqrt{-\rho_3}z) &= 0, \\ (\sqrt{\rho_4}w - \sqrt{-\rho_2}y) (\sqrt{\rho_4}w + \sqrt{-\rho_2}y) &= 0, \end{aligned}$$

lo cual en principio da cuatro posibilidades:

$$\begin{aligned} i) \quad & \sqrt{\rho_1}x = \sqrt{-\rho_3}z \quad ; \quad \sqrt{\rho_4}w = \sqrt{-\rho_2}y, \\ ii) \quad & \sqrt{\rho_1}x = \sqrt{-\rho_3}z \quad ; \quad \sqrt{\rho_4}w = -\sqrt{-\rho_2}y, \\ iii) \quad & \sqrt{\rho_1}x = -\sqrt{-\rho_3}z \quad ; \quad \sqrt{\rho_4}w = \sqrt{-\rho_2}y, \\ iv) \quad & \sqrt{\rho_1}x = -\sqrt{-\rho_3}z \quad ; \quad \sqrt{\rho_4}w = -\sqrt{-\rho_2}y. \end{aligned}$$

Utilizando las igualdades de *i*), se substituyen  $x$  y  $w$  en la primera y segunda ecuación de (5.3) y se obtiene

$$\begin{aligned} (\rho_3\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2\rho_3\rho_4})yz &= 0, \\ (\rho_2\sqrt{\rho_4} - \sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3})yz &= 0, \end{aligned}$$

los coeficientes de estas ecuaciones no se pueden anular, ya que cada uno de ellos es una suma de números negativos, por lo tanto  $y = 0$  o  $z = 0$ . Claramente,  $y = 0$  es equivalente a  $w = 0$  y  $z = 0$  es equivalente a que  $x = 0$ . Así en el caso *i*), los puntos de equilibrio están dados por las ecuaciones

$$y = 0, w = 0, z = \sqrt{-\frac{\rho_1}{\rho_3}}x, \left(1 + \left(-\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)\right)x^2 = 1,$$

o

$$x = 0, z = 0, w = \sqrt{-\frac{\rho_2}{\rho_4}} y; \left(1 + \left(-\frac{\rho_2}{\rho_4}\right)\right) y^2 = 1,$$

cuyas soluciones son los ocho puntos siguientes

$$P_1 = (k_1, 0, k, 0); -P_1 = (k_1, 0, -k, 0),$$

$$P_2 = (-k_1, 0, k, 0); -P_2 = (k_1, 0, -k, 0),$$

y

$$Q_1 = (0, r, 0, r_1); -Q_1 = (0, -r, 0, -r_1),$$

$$Q_2 = (0, -r, 0, r_1); -Q_2 = (0, r, 0, -r_1),$$

con  $r = \sqrt{\frac{\rho_4}{\rho_4 - \rho_2}}$ ,  $r_1 = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_4}}$  y  $k = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_3}}$ ,  $k_1 = \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_3 - \rho_1}}$ , los cuales coinciden con los del caso III.a). Es fácil ver que los tres casos restantes presentan las mismas soluciones

$$\pm P_i, \pm Q_i, i = 1, 2,$$

más una curva cerrada de puntos de equilibrio, en el caso no genérico de que se cumpla

$$\rho_1 \rho_3 - \rho_2 \rho_4 = 0,$$

por lo tanto en el caso III.b), genericamente se tienen 8 puntos de equilibrio. Finalmente, de la tercera y cuarta ecuación del sistema (5.3) se sigue que en el caso III.c), no hay solución distinta de la trivial. Con esto se termina la demostración.  $\square$

### Índice del campo en $E^\infty$ , grado 2.

**Proposición 47** a) Si  $H_2$  tiene signatura impar, los cuatro puntos de equilibrio del campo  $\widetilde{X}_H$  sobre  $E^\infty$  tienen índice 1.

b) Si  $H_2$  tiene signatura par y  $E^\infty \neq \emptyset$ , entonces el campo  $\widetilde{X}_H$  en  $E^\infty$  tiene 4 puntos de equilibrio de índice 1 y 4 de índice -1, o bien ningún punto de equilibrio

**Demostración:** La esfera  $S^3$  es el conjunto de nivel 1 para la función  $G(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ . Tenemos

$$\frac{\partial(H_2, G)}{\partial(x, z)} = \det \begin{pmatrix} 2\rho_1 x & 2\rho_3 z \\ 2x & 2z \end{pmatrix} = 4(\rho_1 - \rho_3) xz,$$

y análogamente

$$\frac{\partial(H_2, G)}{\partial(y, w)} = 4(\rho_2 - \rho_4)yw.$$

El primer Jacobiano se anula en los puntos  $\pm Q_i$ , y no se anula en los puntos  $\pm P_i$ . Viceversa para el segundo Jacobiano. Por lo tanto,  $x$  y  $z$  se pueden expresar como funciones de  $(y, w)$  alrededor de cada punto  $\pm P_i$  y  $y$  y  $w$  son funciones de  $(x, z)$  alrededor de  $\pm Q_i$ .

De lo anterior se tiene que para calcular el índice en  $\pm P_i$ , se debe analizar el sistema

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \rho_4 w + (\rho_1 - \rho_3)xyz + (\rho_2 - \rho_4)y^2 w, \\ \dot{w} &= -\rho_2 y + (\rho_1 - \rho_3)xzw + (\rho_2 - \rho_4)yw^2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

con  $x = x(y, w)$ ,  $z = z(y, w)$ .

y en los puntos  $\pm Q_i$ , el sistema correspondiente es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho_3 z + (\rho_1 - \rho_3)x^2 z + (\rho_2 - \rho_4)xyw, \\ \dot{z} &= -\rho_1 x + (\rho_1 - \rho_3)xz^2 + (\rho_2 - \rho_4)yzw, \end{aligned} \quad (5.8)$$

con  $y = y(x, z)$ ;  $w = w(x, z)$ . Por otra parte, derivando implícitamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} \rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 + \rho_4 w^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 &= 1, \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial y} &= \frac{\begin{vmatrix} -\rho_2 y & \rho_3 z \\ -y & z \end{vmatrix}}{(\rho_1 - \rho_3)xz}, & \frac{\partial x}{\partial w} &= \frac{\begin{vmatrix} -\rho_4 w & \rho_3 z \\ -w & z \end{vmatrix}}{(\rho_1 - \rho_3)xz}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\begin{vmatrix} -\rho_2 y & \rho_1 x \\ -y & x \end{vmatrix}}{(\rho_1 - \rho_3)xz}, & \frac{\partial z}{\partial w} &= \frac{\begin{vmatrix} -\rho_2 w & \rho_1 x \\ -w & x \end{vmatrix}}{(\rho_1 - \rho_3)xz}, \end{aligned}$$

que evaluadas en  $\pm P_i$ , cada una da cero. Del mismo modo se obtiene que las derivadas

$\frac{\partial y}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z}$  se anulan en  $\pm Q_i$ .

Así, la aproximación lineal al sistema (5.7) tiene como matriz Jacobiana a

$$\begin{pmatrix} (\rho_1 - \rho_3)xz & \rho_4 \\ -\rho_2 & (\rho_1 - \rho_3)xz \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

evaluada en los puntos  $\pm P_i$ ,  $i = 1, 2$ .

La aproximación de (5.8) está dada por

$$\begin{pmatrix} (\rho_2 - \rho_4)yw & \rho_3 \\ -\rho_1 & (\rho_2 - \rho_4)yw \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

evaluada en  $\pm Q_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Si se cumple (a) sólo se tienen los 4 puntos  $\pm P_i$  y la matriz (5.9) tiene traza no nula y determinante positivo en cada punto, lo cual implica que el índice de  $\pm P_i$  es 1.

Si (b) vale, se tienen 8 puntos de equilibrio,  $\pm P_i, \pm Q_i$ ,  $i = 1, 2$ . La traza de (5.9) y de (5.10) es no nula, pero ahora debido a que  $\rho_1$  y  $\rho_2$  tienen signos distintos de  $\rho_3$  y  $\rho_4$ , el determinante puede tomar cualquier signo.

El determinante de (5.9) en  $\pm P_i$  es

$$\Delta_5 = -\rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_4,$$

y el de (5.10) en  $\pm Q_i$  es

$$\Delta_6 = \rho_1 \rho_3 - \rho_2 \rho_4.$$

De este modo,  $\Delta_5 > 0$  si  $\Delta_6 < 0$  y  $\Delta_5 < 0$  si  $\Delta_6 > 0$ . Por lo tanto, siempre se tienen 4 puntos con traza no-nula y determinante positivo y entonces de índice 1, y 4 puntos con traza no-nula y determinante negativo y por ende de índice -1.  $\square$

## La topología de $E^\infty$ , grado 2.

Ahora se demostrará el teorema principal de esta subsección, que describe genéricamente la topología posible de  $E^\infty$ .

**Teorema 48** a) Si  $H_2$  es de signatura impar,  $E^\infty$  es una superficie con dos componentes conexas, cada una homeomorfa a una esfera  $S^2$ .

b) Si es de signatura dos,  $E^\infty$  es homeomorfo a un toro.

c) Si  $H_2$  es de signatura 0 o 4,  $E^\infty$  es vacío, lo cual significa que no hay escapes.

**Demostración:** Bajo la hipótesis (a), por la Proposición 47 se tienen 4 puntos de equilibrio con índice 1, cada uno. Como cada componente conexa de  $E^\infty$ , debe tener índice global par, y no es posible tener una componente con índice global 4, porque el género  $g$  es positivo, entonces forzosamente se tienen 2 componentes de índice 2 cada una, lo cual implica que el género es 0. Así pues  $E^\infty$  es la unión de 2 esferas  $S^2$ . De la Proposición 33 se sigue que  $E^\infty$  no puede tener más de dos componentes ya que en este caso  $D$  es un elipsoide y por lo tanto es conexo y acotado.

Supongamos que se cumple (b). Entonces no hay ningún punto de equilibrio, o hay 4 puntos con índice 1 y 4 con índice  $-1$ . Como en cualquier caso el índice global es cero, basta probar que  $E^\infty$  es conexo, para concluir que  $E^\infty$  tiene género 1 y por lo tanto es un toro.

Como ( $H_2 = 0$ ) es un cono, entonces  $E^\infty$  es la proyección radial de una generatriz del cono, sobre la esfera  $S^3$ .

Tomemos la generatriz dada por

$$D: \rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2 = -\rho_4, \quad (5.11)$$

(por comodidad, supondremos que  $\rho_1 > 0$ ,  $\rho_2 > 0$ ,  $\rho_4 = -1$  y que  $\rho_3 < 0$ ).

La superficie  $E^\infty$  es entonces el conjunto de todas las intersecciones de cada rayo  $\{(tx, ty, tz, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ,  $(x, y, z) \in D$ , con  $S^3$ .

De (5.11) despejamos a  $z$

$$z = \pm \sqrt{\frac{-\rho_1}{\rho_3} x^2 - \frac{\rho_2}{\rho_3} y^2 + \frac{1}{\rho_3}}.$$

A la raíz positiva la denotamos por  $z_1$  y a la negativa por  $z_2$ .

Dada una terna  $(x, y, z_i) \in D$ ,  $i = 1, 2$ . La intersección con  $S^3$ , se da para una  $t$  que satisface

$$t_i = \pm \left( \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_3} x^2 + \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3} y^2 + \frac{1 + \rho_3}{\rho_3} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

( $t_1$  con el signo positivo y  $t_2$  con el negativo).

Así  $E^\infty$  es la unión de las imágenes de las 4 funciones

$$\varphi_{i,j}(x, y) = (t_i x, t_i y, t_i z_j, t_i), \quad i = 1, 2; j = 1, 2,$$

definidas en la región  $\mathcal{R}: \frac{\rho_1}{\rho_3} x^2 + \frac{\rho_2}{\rho_3} y^2 - \frac{1}{\rho_3} \leq 0$ , incluido el punto al infinito. Nótese que  $R$  es un conjunto conexo, ya que es el exterior de una elipse.

Sea  $W_{i,j} = \varphi_{i,j}(\mathcal{R})$ . Como  $\varphi_{i,j}$  es continua, cada uno de los conjuntos  $W_{i,j}$  es conexo, por lo tanto  $E^\infty$  es la unión de 4 conjuntos conexos. Así, para probar que  $E^\infty$  es conexo, sólo es necesario confirmar que esos 4 conexos no son ajenos.

Sea

$$A = \left( \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_3} a^2 + \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$B = \left( \frac{-\rho_1 a^2 - \rho_2}{(\rho_3 - \rho_1)^2 + (\rho_3 - \rho_2)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ x = a}} \varphi_{1,1}(x, y) = (aA, A, B, 0),$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ x = -a}} \varphi_{2,2}(x, y) = (aA, A, B, 0);$$

por lo tanto  $W_{1,1} \cap W_{2,2} \neq \emptyset$ .

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ x = a}} \varphi_{1,2}(x, y) = (aA, B, -C, 0)$$

y

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ x = -a}} \varphi_{2,1}(x, y) = (aA, B, -C, 0);$$

de donde se deduce que  $W_{1,2} \cap W_{2,1} \neq \emptyset$ .

Por otra parte, si  $\frac{e_1}{\rho_3} x^2 + \frac{e_2}{\rho_3} y^2 - \frac{1}{\rho_3} = 0$ , entonces

$$\varphi_{1,1}(x, y) = (lx, ly, 0, l),$$

$$\varphi_{1,2}(x, y) = (lx, ly, 0, l),$$

$$\varphi_{2,1}(x, y) = (-lx, -ly, 0, -l),$$

$$\varphi_{2,2}(x, y) = (-lx, -ly, 0, -l),$$

con  $l = (x^2 + y^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ .

De esto se obtiene que  $W_{1,1} \cap W_{1,2} \neq \emptyset$  y

$$W_{2,1} \cap W_{2,2} \neq \emptyset.$$

Con esto queda demostrado el teorema.  $\square$

### 5.1.2 Hamiltoniano Homogéneo de grado tres.

Si el Hamiltoniano  $H(x, y, z, w)$  es un polinomio de tercer grado, la forma homogénea  $H_3(x, y, z, w)$  depende de 20 parámetros

$$\begin{aligned} H_3 = & ax^3 + by^3 + cz^3 + dw^3 + a_1x^2y + a_2x^2z + a_3x^2w \\ & + b_1xy^2 + b_2y^2z + b_3y^2w + c_1xz^2 + c_2yz^2 + c_3z^2w \\ & + d_1xw^2 + d_2yw^2 + d_3zw^2 + e_1xyz + e_2xyw + e_3xzw + e_4yzw \end{aligned} \quad (5.12)$$

Los cuatro parámetros  $a, b, c, d$  se pueden eliminar mediante un simple cambio de escala, pero aún así quedan 16 parámetros que hacen muy complicado el problema de clasificación de  $E^\infty$ . Ahora bien, si la forma (5.12) es reducible se tiene el siguiente resultado

**Proposición 49** Si  $H_3$  es un polinomio reducible, entonces  $E^\infty$  es genericamente una unión de tres esferas ajenas o de una esfera y un toro  $S^1 \times S^1$ .

Demostración : Si  $P$  es un polinomio reducible entonces

(i)  $P = L_1 L_2 L_3$ , donde  $L_j$  es lineal para  $j = 1, 2, 3$ . En este caso  $E^\infty$  es igual

$$\bigcup_{j=1}^3 (\{L_j = 0\} \cap S^3), \text{ o}$$

(ii)  $P = LQ$ , con  $L$  lineal y  $Q$  un polinomio cuadrático y por lo tanto  $E^\infty = (\{L = 0\} \cap S^3) \cup (\{Q = 0\} \cap S^3)$ .

Si ocurre (i) y los tres hiperplanos son paralelos (y distintos),  $E^\infty$  es una variedad suave formada por la unión de tres esferas  $S^2$ , puesto que la intersección de un hiperplano con  $S^3$  es una esfera. Si los 3 hiperplanos se intersectan,  $E^\infty$  es una unión de tres esferas, pero no resulta una variedad suave, ya que en este caso el gradiente de  $P$  se anula en un punto  $x \neq 0$ , como se ve fácilmente de la siguiente igualdad

$$\nabla P = L_2 L_3 \nabla L_1 + L_1 L_3 \nabla L_2 + L_1 L_2 \nabla L_3.$$

Para (ii), suponemos que  $Q$  es no reducible, porque en caso contrario se tiene la situación (i). Por el Teorema 48 ( $\{Q = 0\} \cap S^3$ ) es una unión de dos esferas o es un toro y como ( $\{L = 0\} \cap S^3$ ) es una esfera, se sigue que  $E^\infty$  es una unión de tres esferas o de una esfera y un toro. Si  $E^\infty$  es la unión de una esfera y un toro, entonces  $E^\infty$  no es suave, ya que en este caso  $H_1(E^\infty) = Z^2$ , pero esto es imposible ya que de acuerdo con la Proposición 38, el rango de  $H_1(E^\infty)$  debe ser un múltiplo de 4.  $\square$

El caso irreducible es considerablemente más difícil y para su análisis tomaremos la forma normal propuesta por Arnold [1]:

$$H_3 = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + (ax + by + cz + dw)^3, \quad (5.13)$$

por lo tanto la clasificación topológica de las superficies

$$E^\infty = (H_3 = 0) \cap S^3,$$

dependerá de cuatro parámetros. Recordemos que  $E^\infty$  es una superficie regular si y sólo si para todo  $\bar{x} \in E^\infty$  se cumple que  $\nabla H_3(\bar{x}) \neq 0$  (ver página 4.3). Sea  $\Delta(a, b, c, d) = 0$ , la ecuación que define al conjunto de parámetros para los cuales existe un punto  $\bar{x} \in E^\infty$  tal que  $\nabla H_3(\bar{x}) = 0$ .

Dentro de cada componente conexa del complemento  $\rho$  de  $\{\Delta(a, b, c, d) = 0\}$ , las superficies correspondientes son topológicamente equivalentes. Para determinar a  $E^\infty$

primero se obtendrán las componentes conexas de  $\wp$ . Tenemos que  $\nabla H_3(\bar{x}) = 0$  si y sólo si se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} a(ax + by + cz + dw)^2 &= -x^2, \\ b(ax + by + cz + dw)^2 &= -y^2, \\ c(ax + by + cz + dw)^2 &= -z^2, \\ d(ax + by + cz + dw)^2 &= -w^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

De éstas se sigue que los parámetros  $a, b, c, d$ , son números no-positivos. Eliminando  $(x, y, z, w)$  de las ecuaciones anteriores se obtiene que

$$\Delta(a, b, c, d) = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 2(\epsilon_1 ab\sqrt{ab} + \epsilon_2 ac\sqrt{ac} + \epsilon_3 ad\sqrt{ad} + \epsilon_1 \epsilon_2 bc\sqrt{bc} + \epsilon_1 \epsilon_3 bd\sqrt{bd} + \epsilon_2 \epsilon_3 cd\sqrt{cd}) + 1, \quad (5.15)$$

con  $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ . Estas determinan las ocho ecuaciones que definen a las regiones cuyo complemento es  $\wp$ . Ahora introducimos unos cambios de variable para transformar las ecuaciones 5.15 a una forma más simple. Mediante la aplicación sucesiva de los cambios

$$\begin{aligned} (-a \mapsto x, -b \mapsto y, -c \mapsto z, -d \mapsto w), \\ (\sqrt{x} \mapsto X, \sqrt{y} \mapsto Y, \sqrt{z} \mapsto Z, \sqrt{w} \mapsto W), \\ (X^3 \mapsto A, Y^3 \mapsto B, Z^3 \mapsto C, W^3 \mapsto D), \end{aligned}$$

las 8 ecuaciones 5.15 se transforman en

$$(A + \sigma_1 B + \sigma_2 C + \sigma_3 D)^2 = 1, \quad (5.16)$$

con  $\sigma_i \in \{-1, 1\}$  y  $(A, B, C, D) \geq 0$ . Es claro que existe una correspondencia uno a uno entre las componentes definidas por 5.15 y las definidas por 5.16.

## 5.2 Las componentes conexas de $\wp$ .

Las ecuaciones 5.16 determinan 8 parejas de hiperplanos paralelos. Los hiperplanos de cada pareja que tienen el segundo miembro igual a 1, se indican en la

siguiente tabla

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1 &: A + B + C + D = 1, \\
 \mathcal{L}_2 &: A + B + C - D = 1, \\
 \mathcal{L}_3 &: A + B - C + D = 1, \\
 \mathcal{L}_4 &: A + B - C - D = 1, \\
 \mathcal{L}_5 &: A - B + C + D = 1, \\
 \mathcal{L}_6 &: A - B + C - D = 1, \\
 \mathcal{L}_7 &: A - B - C + D = 1, \\
 \mathcal{L}_8 &: A - B - C - D = 1.
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

Si es necesario se utilizará el símbolo  $\tilde{\mathcal{L}}_i$  para denotar el hiperplano paralelo, correspondiente a  $\mathcal{L}_i$ .

Nótese que  $\tilde{\mathcal{L}}_1$  no interseca a la región de interés  $R_+^4 = \{(A, B, C, D) \geq 0\}$ ;  $\mathcal{L}_1 \cap R_+^4$  es una región acotada afín cuyos tetrahedros de dimensión 2 están dadas por  $e_1: A + B + C = 1, D = 0$ ;  $e_2: A + B + D = 1, C = 0$ ;  $e_3: A + C + D = 1, B = 0$  y  $e_4: B + C + D = 1, A = 0$  y sus "vértices" son  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 0, 1)$ . Los hiperplanos  $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_5, \tilde{\mathcal{L}}_8$ , intersecan al hiperplano  $\mathcal{L}_1$  en las aristas  $e_1, e_2, e_3, e_4$  respectivamente; además ellos mismos se intersecan en el punto  $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ , con lo que se obtiene una componente conexa acotada de  $\wp$  en forma de tetrahedro que llamaremos  $\mathfrak{S}_1$ . Estos mismos planos al prolongarse más allá del vértice  $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$  de  $\mathfrak{S}_1$ , da lugar a una componente no acotada que llamaremos  $\mathfrak{S}_2$ . Otra componente es la que contiene al complemento de  $R_+^4$  y que denotaremos por  $\Omega$ . En principio existe una componente conexa de  $\wp$  por cada cuatro planos que se intersecan en un punto en posición general, así que para localizar cualquier otra componente debemos revisar ese tipo de intersecciones. En cada vértice de  $\mathfrak{S}_1$  existe una componente:

En el punto  $(1, 0, 0, 0)$  se intersecan los planos  $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_5$  y  $\tilde{\mathcal{L}}_8$ .

En  $(0, 1, 0, 0)$  se intersecan  $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \tilde{\mathcal{L}}_8$  y  $\tilde{\mathcal{L}}_5$ .

En  $(0, 0, 1, 0)$  la componente la forman  $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_5, \tilde{\mathcal{L}}_8$  y  $\tilde{\mathcal{L}}_3$ .

Finalmente, en  $(0, 0, 0, 1)$  se tiene la intersección de  $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_5, \tilde{\mathcal{L}}_8$  y  $\tilde{\mathcal{L}}_2$ .

A estas cuatro nuevas componentes las llamaremos  $c_A, c_B, c_C$  y  $c_D$  respectivamente.

Como representante de  $\Omega$  se tomará al punto  $p_1 = (0, 0, 0, 0)$ : En la componente  $\mathfrak{S}_1$  tomaremos al punto  $p_2 = (1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8}, 1/\sqrt{8})$  que en las coordenadas originales  $a, b, c, d$  corresponde al punto  $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$  y en  $\mathfrak{S}_2$  elegimos al punto  $p_3 = (1, 1, 1, 1)$ , que en las coordenadas originales es  $(1, 1, 1, 1)$ . En la siguiente sección demostraremos que  $E^\infty$  correspondiente a  $p_1$  es una esfera, para  $p_2$  son tres esferas ajenas y la que corresponde a  $p_3$  es un bitoro, i.e. una superficie de género 2. Ahora demostraremos un resultado que será muy útil para probar la afirmación hecha acerca de  $p_3$  y  $p_1$ .

**Teorema 50** Si  $H = H(x, y, z, w)$  es un polinomio de tercer grado y  $H_3 = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + (ax + by + cz + dw)^3$  es su parte homogénea de grado máximo, entonces

$$E^\infty = (H_3 = 0) \cap S^3,$$

es una región conexa, si  $(a, b, c, d)$  es  $(0, 0, 0, 0)$  o  $(-1, -1, -1, -1)$ .

**Demostración:** Supongamos que  $a = b = c = d = 0$ . De acuerdo con el Lema 33, es suficiente con demostrar que  $D: x^3 + y^3 + z^3 + 1 = 0$  es conexo, lo cual es cierto ya que es la imagen de  $\mathbb{R}^2$ , bajo la función continua  $x = (-y^3 - z^3 - 1)^{1/3}$ . La demostración del caso  $a = b = c = d = -1$ , se da en el apéndice.  $\square$

### 5.2.1 Puntos de equilibrio. Grado 3.

$E^\infty$  es invariante bajo el flujo del campo dado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3z^2 + 3ce^2 + x\lambda &= F_1(x, y, z, w), \\ \dot{y} &= 3w^2 + 3de^2 + y\lambda &= F_2(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= -3x^2 - 3ae^2 + z\lambda &= F_3(x, y, z, w), \\ \dot{w} &= -3y^2 - 3be^2 + w\lambda &= F_4(x, y, z, w). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Con  $e = ax + by + cz + dw$  y  $\lambda = z(3x^2 + 3ae^2) - x(3z^2 + 3ce^2) + w(3y^2 + 3be^2) - y(3w^2 + 3de^2)$ .

Los puntos de equilibrio del sistema (5.18) son las soluciones de

$$\begin{aligned} 3z^2 + 3ce^2 + x\lambda &= 0, \\ 3w^2 + 3de^2 + y\lambda &= 0, \\ -3x^2 - 3ae^2 + z\lambda &= 0, \\ -3y^2 - 3be^2 + w\lambda &= 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Ahora calcularemos los puntos de equilibrio de (5.19), para tres cuartetos  $(a, b, c, d)$  de parámetros:  $(0, 0, 0, 0)$ ,  $-(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$  y  $-(1, 1, 1, 1)$ .

**Lema 51** *El sistema (5.18) tiene*

- (a) 6 puntos de equilibrio si todos los parámetros son cero,
- (b) 30 puntos de equilibrio si los parámetros son  $-(1, 1, 1, 1)$  y
- (c) 10 puntos de equilibrio si los parámetros son  $-(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ .

**Demostración:** la búsqueda de las raíces se hará mediante el análisis de los cuatro casos que resultan al considerar el número de coordenadas nulas que tiene el punto de equilibrio.

\*\* En cada uno de los casos que siguen, primero se harán los cálculos para  $-(1, 1, 1, 1)$  y después para  $(0, 0, 0, 0)$ . El análisis para  $-(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$  se hará al final.

**1er. caso:** Tres coordenadas iguales a cero. En ningún caso hay solución:

Para que el punto esté en  $S^3$ , la cuarta coordenada es  $\pm 1$ . Por lo tanto  $e^2 = 1$  y  $\lambda = \pm 3$ . Al menos una de las ecuaciones de (5.19) es de la forma  $k^2 - e^2 = 0$ , -con  $k$  una coordenada nula- imposible! **No hay solución.**

Es muy fácil ver que si todos los parámetros son nulos y tres coordenadas son cero, la cuarta coordenada debe ser cero. **No hay solución.**

**2o. caso:** 2 coordenadas iguales a cero y 2 distintas de cero.

2.1  $x = 0 = y, z \neq 0, w \neq 0$ . De las 2 primeras ecuaciones de (5.19)  $z^2 = (z + w)^2, w^2 = (z + w)^2$ , como  $w \neq 0, z \neq 0$  entonces  $2z + w = 0$  y  $z + 2w = 0$ , de donde  $2w = \frac{w}{2}$  imposible! **No hay solución.**

2.2  $x = 0 = z$ , entonces  $e^2 = (y+w)^2$  de la ecuación (5.19.1)  $0 = (y+w)^2 \Rightarrow y+w=0$  de donde  $y = -w$ ,

entonces  $\lambda = -6y^3$ ,  $e = 0$ . Ahora de la segunda ecuación de (5.19)

$$3y^2 - 6y^4 = 0 \iff y^2(1 - 2y^2) = 0,$$

como  $y \neq 0 \iff y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $w = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Así las soluciones en este caso son

$$x = 0 = z; \quad y = +\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad w = \frac{-1}{\sqrt{2}};$$

$$x = 0 = z; \quad y = \frac{-1}{\sqrt{2}}; \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2.3  $x = 0 = w$ ;  $y \neq 0$ ,  $z \neq 0$ .  $e^2 = (y+z)^2$  de las ecuaciones (5.19.1) y (5.19.4) se llega a

$$z^2 = e^2 = (y+z)^2, \quad y^2 = e^2 = (y+z)^2,$$

análogas a las del caso 2.1, por lo tanto **No hay solución**.

2.4  $y = 0 = z$ ;  $x \neq 0$ ,  $w \neq 0$ .  $e^2 = (x+w)^2$ . Usando la segunda y la cuarta ecuación de (5.19), este caso es como el anterior. **No hay solución**

2.5  $y = 0 = w$ ;  $e^2 = (x+z)^2$ , de la ecuación (5.19.2)

$$0 = (x+z)^2 \iff x = -z,$$

así se obtienen las 2 soluciones

$$y = 0 = w, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

$$y = 0 = w, \quad x = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2.6  $x = 0 = w$ ;  $y \neq 0$ ,  $x \neq 0$ .  $e^2 = (x+y)^2$ ,

$$x^2 = (x+y)^2,$$

$$y^2 = (x+y)^2.$$

Análogo al caso 2.4. **No hay solución**.

Tomemos ahora todos los parámetros nulos.

$x = 0 = y \implies z = 0$ , por lo tanto **no hay solución**. Lo mismo para cuando  $x = 0 = w$   
 $O y = 0 = z$ , **no hay solución**. Si  $x = 0 = z$  de la ecuación  $H_3 = 0$ , se deduce la  
relación

$$y = -w.$$

De  $y = 0 = w$  se obtiene la relación

$$x = -z.$$

Cada una de estas relaciones proporciona 2 soluciones, como en 2.2 y 2.5

**3er. caso:** Una de las coordenadas es cero.

3.1  $x = 0$ ;  $e^2 = (y + z + w)^2$ . La ecuación (5.19.1) da

$$z^2 = (y + z + w)^2, \text{ o sea } y = -w. \quad (5.20)$$

De las ecuaciones (5.19.2) a (5.19.4)

$$\lambda = \frac{3(e^2 - w^2)}{y} = \frac{3(x^2 - e^2)}{z} = \frac{3(y^2 - e^2)}{w},$$

sustituyendo (5.20) encontramos

$$\frac{z^2 - w^2}{y} = \frac{x^2 - z^2}{z}; \quad \frac{x^2 - z^2}{z} = \frac{y^2 - z^2}{w},$$

por lo tanto

$$\frac{z^2 - w^2}{y} = \frac{y^2 - z^2}{w}.$$

De la solución de este sistema encontramos que

$$w = \frac{-(1 + \sqrt{5})z}{2}; \quad y = \frac{(1 + \sqrt{5})z}{2};$$

o bien

$$w = \frac{(-1 + \sqrt{5})z}{2}; \quad y = \frac{(1 - \sqrt{5})z}{2}.$$

El valor de  $z$  se obtiene de la condición de que el punto pertenece a  $S^3$ .

3.2  $y = 0; e^2 = (x + z + w)^2$ . De la ecuación (5.19.2),  $w^2 = e^2$  y como  $x \neq 0, z \neq 0$  y  $w \neq 0$ , se obtiene el sistema

$$\frac{w^2 - z^2}{x} = \frac{x^2 - w^2}{z}, \quad \frac{w^2 - z^2}{x} = \frac{y^2 - w^2}{w} = -w \frac{x^2 - w^2}{z} = -w;$$

de las últimas dos ecuaciones  $w^2 - z^2 = -xy$ ;  $x^2 - w^2 = -zw$ . Sumando se llega a  $x^2 - z^2 = -w(x + z)$ , por lo tanto

$$(x - z)(x + z) = -3(x + z),$$

de aquí se obtienen dos posibilidades:  $x = -z$  ó  $w = z - x$ .

La primera alternativa da las soluciones

$$y = 0, x = -z; \quad w = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)x,$$

$$y = 0, x = -z; \quad w = -\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)x,$$

si  $w = z - x$ , entonces la ecuación  $z(w^2 - z^2) - x(x^2 - w^2) = 0$  se convierte en

$$xz(x + z) = 0,$$

la cual tiene como única solución válida para este caso,  $z = -x$ . por lo tanto  $w = -2x$ . Así obtenemos la solución

$$y = 0, z = -x; \quad w = -2x.$$

Pero ésta no satisface las ecuaciones de los puntos de equilibrio por lo tanto **no hay solución**.

$$3.3 \quad z = 0, e^2 = x^2, -3e^2 + x\lambda = 0; 3(w^2 - e^2) + y\lambda = 0 3(-y^2 + e^2) + w\lambda = 0.$$

Por lo tanto

$$\lambda = \frac{3e^2}{x}; \quad \lambda = \frac{3(e^2 - w^2)}{y}; \quad \lambda = \frac{3(y^2 - e^2)}{w};$$

de donde

$$x = \frac{(x^2 - w^2)}{y}; \quad x = \frac{(y^2 - x^2)}{w}; \quad \frac{x^2 - w^2}{y} = \frac{y^2 - x^2}{w};$$

sumando las 2 primeras ecuaciones de arriba se obtiene

$$x(y + w) = y^2 - w^2; \quad x(y + w) = (y - w)(y + w) \Leftrightarrow$$

$$x(y+w) - (y-w)(y+w) = 0 \Leftrightarrow (y+w)(x-y+w) = 0,$$

lo cual da 2 alternativas:  $y = -w$  y  $w = y - x$ . Si  $y = -w$ , entonces  $-xw = x^2 - w^2$ , cuyas soluciones son

$$w \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} x \right\}.$$

En cambio si  $w = y - x$ , la ecuación  $xy = x^2 - w^2$  resulta igual a  $y(y - x) = 0$ , que produce  $y = 0$  o  $w = 0$ , por lo tanto no obtenemos otra solución

$$3.4 \quad w = 0.$$

$$e^2 = y^2, \quad 3(z^2 - y^2) + x\lambda = 0; \quad -3e^2 + y\lambda = 0; \quad 3(-x^2 + y^2) + z\lambda = 0;$$

Por lo tanto

$$\lambda = \frac{3(y^2 - z^2)}{x}; \quad \lambda = 3y; \quad \lambda = \frac{3(x^2 - y^2)}{x};$$

de donde

$$y^2 = y^2 - z^2; \quad yz = x^2 - y^2; \quad z(y^2 - z^2) = x(x^2 - y^2),$$

sumando las 2 primeras  $y(x+z) = x^2 - z^2$  así

$$y(x+z) = (x-z)(x+z) \Leftrightarrow (x+z)(y-x+z) = 0,$$

y nuevamente  $x = -z$ , produce la ecuación

$$y^2 - x^2 - yx = 0,$$

la cual tiene soluciones

$$y \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} x \right\}.$$

La otra posibilidad  $z = x - y$ , produce la ecuación

$$x(y-x) = 0,$$

con lo cual  $x = 0$  o  $z = 0$ . no dá ninguna otra solución

Si todos los parámetros son ceros, no hay solución. Por ejemplo, dado  $x = 0$ , (5.19.1) implica que  $z = 0$ , y de la misma forma las otras posibilidades.

4o. caso:  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $z \neq 0$ ,  $w \neq 0$ .

Eliminando  $\lambda$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{e^2 - z^2}{x} &= \frac{e^2 - w^2}{y}; & \frac{e^2 - z^2}{x} &= \frac{x^2 - e^2}{z}, \\ \frac{e^2 - w^2}{y} &= \frac{x^2 - e^2}{z}; & \frac{e^2 - z^2}{x} &= \frac{y^2 - e^2}{w}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

4.1  $x = y$ , entonces  $z^2 = w^2$ , por lo tanto  $z = \pm w$

4.1.1  $x = y, z = w$ .

Si  $z = w$ , sustituyendo en la ecuación de arriba se obtiene

$$3(w^3 + 4w^2y + 4wy^2 + y^3) = 0,$$

cuyas raíces son

$$w = -y; \quad w = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}y; \quad w = -\frac{3 + \sqrt{5}}{2}y;$$

que nos produce las posibles soluciones

$$x = y; \quad z = w; \quad w = -y;$$

$$x = y; \quad z = w; \quad w = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}y;$$

$$x = y; \quad z = w; \quad w = -\frac{3 + \sqrt{5}}{2}y.$$

4.1.2  $x = y, z = -w$ , no produce ninguna solución

4.2  $z = w$ , entonces la ecuación (5.19.1) da

$$y(e^2 - w^2) = x(e^2 - w^2).$$

4.2.1 Si  $(e^2 - w^2) \neq 0$ , entonces  $y = x$ . Por lo tanto estamos en el caso 4.1.1.

4.2.2  $z = w, e^2 = w^2$ , de esta ecuación resulta que  $w = -(x+y)$  o  $w = -\frac{(x+y)}{3}$ .

4.2.2.1 Si sustituimos  $w = -(x+y); z = -(x+y)$  en las 2 primeras ecuaciones del sistema se obtienen las ecuaciones

$$3x(x^3 + 5x^2y + 5xy^2 + y^3) = 0,$$

$$3y(x^3 + 5x^2y + 5xy^2 + y^3) = 0,$$

que tienen como raíces ( $x = 0, y = 0$ ); ( $y = -x$ )

$$x = (-2 + \sqrt{3})y, \quad x = (-2 - \sqrt{3})y.$$

Pero excepto ( $x = 0, y = 0$ ), ninguna es solución de la tercer ecuación del sistema.  
**Por lo tanto no hay solución.**

4.2.2.2 Si sustituimos  $w = -\frac{(x+y)}{3} = z$  en las 2 primeras ecuaciones del sistema se obtienen

$$-x \frac{(7x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 7y^3)}{9} = 0,$$

$$-y \frac{(7x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 7y^3)}{9} = 0,$$

cuyas únicas soluciones reales son  $x = 0 = y$ . **No hay solución.**

4.3  $x = -z$

Sustituyendo en las ecuaciones (1), (3) y (4) del sistema (5.21), se obtienen

$$y(w^2 + 2wy + y^2 + 2wz + yz - z^2) = 0,$$

$$w(w^2 + 2wy + y^2 - wz - 2yz - z^2) = 0,$$

$$y(w^2 + 2wy + y^2 + 2wz + yz - z^2) = 0,$$

cuyas raíces son ( $y = -z, w = z$ ); ( $y = 0, w = \frac{1+\sqrt{5}}{2}z$ ); ( $y = 0, w = \frac{1-\sqrt{5}}{2}z$ );  
 ( $w = 0, y = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}z$ ); ( $y = -w, z = 0$ ); ( $y = -w, z = 0$ ).

4.4  $y = -w$ .

Sustituimos en (8) se obtiene

$$z(-w^2 - 2wx + x^2 - wz + 2xz + z^2) = 0,$$

$$x(-w^2 + wx + x^2 + 2wz + 2xz + z^2) = 0,$$

$$x(w^2 - wx - x^2 - 2wz - 2xz - z^2) = 0,$$

$$3xz(x + z) = 0,$$

las raíces son

$$(w = z, x = -z); (w = 0, x = -z); (w = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}z, x = 0);$$

$$(w = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}z, x = 0); (w = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x, z = 0);$$

$$(w = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x, z = 0); (x = 0, z = 0).$$

Finalmente

$$4.5 \quad x - y \neq 0, z - w \neq 0, x + z \neq 0 \text{ y } y + w \neq 0.$$

Del sistema original se deriva las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3(z^2 - w^2) + (x - y)\lambda &= 0, \\ 3(y^2 - x^2) + (z - w)\lambda &= 0, \\ 3(z^2 - x^2) + (x + z)\lambda &= 0, \\ 3(w^2 - y^2) + (y + w)\lambda &= 0, \end{aligned} \tag{5.22}$$

de modo que cualquier raíz de (5.19) es raíz de (5.22).

De (5.22) se obtienen

$$\frac{3(z^2 - w^2)}{(y - x)} = \lambda; \quad \frac{3(y^2 - x^2)}{w - z} = \lambda; \tag{5.23}$$

$$\frac{-3(z^2 - x^2)}{x + z} = \lambda; \quad \frac{-3(w^2 - y^2)}{y + w} = \lambda; \tag{5.24}$$

de las 2 últimas ecuaciones

$$-3(z - x) = \lambda = -3(w - y).$$

Por lo cual

$$z - w = x - y \Leftrightarrow z - x = w - y,$$

sustituyendo en las 2 primeras ecuaciones de C

$$\lambda = -3(z + w),$$

$$\lambda = 3(y + x),$$

igualando  $-3(z+w) = -3(w-y)$  se obtiene que  $z = -y$ . Entonces

$$-y - w = z - w = x - y \leftrightarrow x = -w,$$

como  $z + y = 0$ ,  $x + w = 0$ , al substituir en  $\lambda$  se tiene

$$\lambda = 6z^2w + 6zw^2,$$

de la igualdad  $\lambda = -3(z+w)$  se llega a

$$(z+w)(2zw+1) = 0,$$

por lo cual  $z = -\frac{1}{2w}$  o  $z = -w$ .  $z = -\frac{1}{2w}$ , no lleva a una solución, ya que el punto correspondiente ( $z = -\frac{1}{2w}$ ,  $y = \frac{1}{2w}$ ,  $x = -w$ ) no pertenece a  $S^3$ . La posibilidad  $z = -w$ , lleva a  $x = -y$ ; estas dos condiciones implican que  $e = 0 = \lambda$ ; lo cual no es compatible con la condición de que las coordenadas del punto no sean cero. **No hay solución.**

Al eliminar  $\lambda$  del sistema (5.19), cuando todos los parámetros se anulan, se obtienen las ecuaciones

$$-\frac{z^2}{x} = -\frac{w^2}{y}; \quad -\frac{z^2}{x} = -\frac{x^2}{z};$$

$$-\frac{w^2}{y} = \frac{x^2}{z}; \quad -\frac{z^2}{x} = \frac{y^2}{w};$$

de las cuales se obtiene la solución

$$y = x = -z = -w.$$

De la misma manera se puede ver que para los parámetros  $a = b = c = d = -1/2$ , sólo se tienen las siguientes soluciones

$$2.2 \quad x = 0 = z, \quad w = -y. \quad 2.5 \quad y = 0 = w, \quad x = -z.$$

$$4.1.1 \quad (a) \quad x = y, \quad z = w = -y. \quad (b) \quad x = y, \quad z = w \text{ y } w = (2 + \sqrt{3})y. \quad (c) \quad x = y, \quad z = w \text{ y } w = (2 - \sqrt{3})y.$$

## Resumen de los puntos de equilibrio.

Los valores de los puntos de equilibrio se calculan a partir de la condición de que pertenecen a la esfera  $S^3$ . Primero se listan los puntos de equilibrio para  $a = b = c = d = -1$ .

2.2

$$P_1 : x = 0 = z, y = \frac{1}{\sqrt{2}}, w = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$P_2 : x = 0 = z, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, w = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2.3

$$P_3 : y = 0 = w, x = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_4 : y = 0 = w, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3.1

$$P_5 : x = 0, y = -\left(\frac{7 + \sqrt{5}}{22}\right)^{1/2}, z = \frac{(11 - 11\sqrt{5})(7 + \sqrt{5})^{1/2}}{22^{3/2}}, w = -y,$$

$$P_6 = -P_5,$$

$$P_7 : x = 0, y = -\left(\frac{7 - \sqrt{5}}{22}\right)^{1/2}, z = \frac{(11 - 11\sqrt{5})(7 - \sqrt{5})^{1/2}}{22^{3/2}}, w = -y,$$

$$P_8 = -P_7.$$

3.2

$$P_9 : y = 0, x = -\left(\frac{7 + \sqrt{5}}{22}\right)^{1/2}, z = -x, w = \frac{(-11 + 11\sqrt{5})(7 + \sqrt{5})^{1/2}}{22^{3/2}},$$

$$P_{10} = -P_9,$$

$$P_{11} : y = 0, x = -\left(\frac{7 - \sqrt{5}}{22}\right)^{1/2}, z = -x, w = \frac{(-11 - 11\sqrt{5})(7 - \sqrt{5})^{1/2}}{22^{3/2}},$$

$$P_{12} = -P_{11}.$$

## 3.3

$$P_{13}: z = 0, x = \frac{(-11 + 11\sqrt{5})(7 + \sqrt{5})^{1/2}}{22^{3/2}}, y = -\left(\frac{7 + \sqrt{5}}{22}\right)^{1/2}, w = -y,$$

$$P_{14} = -P_{13},$$

$$P_{15}: z = 0, x = \frac{(-11 - 11\sqrt{5})(7 - \sqrt{5})^{1/2}}{22^{3/2}}, y = -\left(\frac{7 + \sqrt{5}}{22}\right)^{1/2}, w = -y,$$

$$P_{16} = -P_{15}.$$

## 3.4

$$P_{17}: w = 0, x = -\left(\frac{7 + \sqrt{5}}{22}\right)^{1/2}, y = \frac{(-11 + 11\sqrt{5})(7 + \sqrt{5})^{1/2}}{22^{3/2}}, z = -x,$$

$$P_{18} = -P_{17},$$

$$P_{19}: w = 0, x = -\left(\frac{7 - \sqrt{5}}{22}\right)^{1/2}, y = \frac{(-11 - 11\sqrt{5})(7 - \sqrt{5})^{1/2}}{22^{3/2}}, z = -x,$$

$$P_{20} = -P_{19}.$$

## 4.1

$$P_{21}: x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}, w = \frac{1}{2},$$

$$P_{22}: x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}, w = -\frac{1}{2},$$

$$P_{23}: x = \frac{(-15 + 5^{3/2})(3 + \sqrt{5})^{1/2}}{20\sqrt{3}}, z = 1/2 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3}\right)^{1/2}, x = y, z = w,$$

$$P_{24} = -P_{23},$$

$$P_{25}: x = \frac{(-15 - 5^{3/2})(3 - \sqrt{5})^{1/2}}{20\sqrt{3}}, z = 1/2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{3}\right)^{1/2}, x = y, z = w,$$

$$P_{26} = -P_{25}.$$

$$P_{27}: x = 1/2 \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{3} \right)^{1/2}, z = \frac{(-15 + 5^{3/2})(3 + \sqrt{5})^{1/2}}{20\sqrt{3}}, x = y, z = w,$$

$$P_{28} = -P_{27},$$

$$P_{29}: x = 1/2 \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{3} \right)^{1/2}, z = \frac{(-15 - 5^{3/2})(3 - \sqrt{5})^{1/2}}{20\sqrt{3}}, x = y, z = w,$$

$$P_{30} = -P_{29}.$$

Los puntos de equilibrio para los parámetros nulos son:

$$O_1 = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), O_2 = -O_1, O_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), O_4 = -O_3,$$

$$O_5 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), O_6 = -O_5.$$

Los puntos de equilibrio para  $a = b = c = d = -1/2$  son:

$$2.2 Q_1 = \left( 0, 1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2} \right) = O_1, Q_2 = \left( 0, -1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2} \right) = O_2.$$

$$2.5 Q_3 = \left( 1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}, 0 \right) = O_3, Q_4 = \left( -1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0 \right) = O_4.$$

4.1.1

$$Q_5 = \left( \frac{(2-\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2-\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2+\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2+\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}} \right),$$

$$Q_6 = - \left( \frac{(2-\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2-\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2+\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2+\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}} \right),$$

$$Q_7 = \left( \frac{(2+\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2+\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2-\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2-\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}} \right),$$

$$Q_8 = - \left( \frac{(2+\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2+\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2-\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}}, \frac{(2-\sqrt{3})^{1/2}}{2^{3/2}} \right),$$

$$Q_9 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2) = O_5,$$

$$Q_{10} = (-1/2, -1/2, 1/2, 1/2) = O_6.$$

### Cálculo del índice.

Para calcular el índice, se buscarán alrededor de cada punto de equilibrio, dos variables independientes, con lo cual el sistema (5.18), se convierte en un sistema de dos ecuaciones en dos variables. Al sistema obtenido se le calculan los valores propios de su aproximación lineal.

Nótese que  $\frac{\partial(H_2, g)}{\partial(x_1, x_2)}$  es una función impar. Por lo tanto el que  $x_i$  sea función de  $(x_k, x_s)$  alrededor del punto de equilibrio  $\bar{x}$  es equivalente a que  $x_i$  es función de

$(x_k, x_s)$  alrededor de  $-\bar{x}$ . Obviamente se cumple que

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k}(\bar{x}) = \frac{\partial x_i}{\partial x_k}(-\bar{x}); \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_s}(\bar{x}) = \frac{\partial x_i}{\partial x_s}(-\bar{x}).$$

Además las derivadas de  $F_k$  y  $F_s$  con respecto a  $x_k$  y  $x_s$  son funciones impares (recuérdese que  $F_i$  denota a los miembros de la derecha del sistema de ecuaciones (5.18)). De esto se concluye que el índice es función par y por lo tanto el número de puntos a considerar se reduce a 15.

De hecho como el sistema (5.18) tiene la simetría  $x \mapsto z$ ;  $y \mapsto w$ , es suficiente con analizar 13 puntos.

Para hacer los cálculos se utilizó *Mathematica*. A continuación se da la lista de las matrices de las aproximaciones lineales para los parámetros  $-(1, 1, 1, 1)$ .

- 1)  $P_1; J_1 = ((-3/2, 0), (0, -3/2));$  índice  $I = 1$ .
- 2)  $P_3; J_3 = J_1; I = 1$ .
- 3)  $P_5; J_5 = ((-2.21004, 0), (-2.40268, -2.68628)); I = 1$ .
- 4)  $P_7; J_7 = ((0.533, 0), (-3.91303, -5.05)); I = -1$ .
- 5)  $P_9; J_9 = (12.68628, -4.03478), (0, -5.08896)); I = -1$ .
- 6)  $P_{11}; J_{11} = ((5.05086, 3.91303), (0, -0.533233)); I = -1$ .
- 7)  $P_{13}; J_{13} = ((2.59532, -17.0916), (-0.7705, -0.192644)); I = -1$ .
- 8)  $P_{15}; J_{15} = ((-5.79818, -0.923741), (5.1222, 1 - 28056)); I = -1$ .
- 9)  $P_{17}; J_{17} = ((-0.192644, -0.770575), (-17.0916, 2.59532)); I = -1$ .
- 10)  $P_{19}; J_{19} = ((1.28056, 5.12222), (-0.923741, -5.99818)); I = -1$ .
- 11)  $P_{21}; J_{21} = ((3/2, 3), (3, 3/2)); I = -1$ .
- 12)  $P_{23}; J_{23} = ((-2.73861, 3.96336), (1.51387, -2.73861)); I = 1$ .
- 13)  $P_{25}; J_{25} = ((-2.73861, 1.51387), (3.96336, -2.73861)); I = 1$ .

Por la simetría ya mencionada el índice de  $P_{27}$  y  $P_{29}$  es 1.

Para los parámetros  $a = b = c = d = 0$  se tienen los cálculos siguientes

$$1) O_1; J_1 = ((-3/2^{1/2}, 0), (0, -3/2^{1/2})); I = 1.$$

$$2) O_3; J_3 = ((-3/2^{1/2}, 0), (0, -3/2^{1/2})); I = 1.$$

$$3) O_5; J_5 = ((-3/2, -3), (-3, -3/2)); I = -1.$$

La lista que sigue muestra las matrices jacobianas y los índices de los puntos correspondientes a los parámetros  $(-1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ .

$$1) Q_1; J_1 = ((-3/2, 0), (0, -3/2)); \text{índice } I = 1.$$

$$2) Q_3; J_3 = ((-3/2, 0), (0, -3/2)); \text{índice } I = 1.$$

$$3) Q_5; J_5 = ((-3/2, 4.09808), (-4.09808, -3/2)); \text{índice } I = 1.$$

$$4) Q_7; J_7 = ((3/2, 1.09808), (-4.09808, 3/2)); \text{índice } I = 1.$$

$$5) Q_9; J_9 = ((-3/2, -3), (-3, -3/2)); \text{índice } I = -1.$$

**Teorema 52** Sea  $H = H(x, y, z, w) = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + (ax + by + cz + dw)^3$  un Hamiltoniano polinomial de tercer grado y  $E^\infty$  como en el Teorema 50. Entonces

(a)  $E^\infty$  es homeomorfo a una esfera si  $(a, b, c, d) \in \Omega$ ,

(b) Si  $(a, b, c, d)$  pertenece a  $\mathfrak{S}_1$ ,  $E^\infty$  es homeomorfo a la unión de 3 esferas ajenas,

(c)  $E^\infty$  es una superficie de género 2 (un bitoro) si  $(a, b, c, d)$  está en  $\mathfrak{S}_2$ .

**Demostración:** Es claro que dos superficies cuyos parámetros pertenecen a la misma componente conexa, son homeomorfas, por lo cual basta analizar la topología de un conjunto de parámetros en cada componente. De acuerdo con Teorema 50, al punto  $(0, 0, 0, 0) \in \Omega$ , le corresponde una superficie conexa, la que por los cálculos de esta sección tiene índice 2; entonces por el Teorema 45 su género es 0. Esto prueba (a). El punto  $(-1/2, -1/2, -1/2, -1/2)$  está en  $\mathfrak{S}_1$  y la superficie que le corresponde tiene índice global igual a 6; por la fórmula del Teorema 45 se deduce fácilmente que tiene que ser la unión de tres superficies de género 0, con lo cual queda demostrado (b). Por el Teorema 50, la superficie correspondiente a  $(-1, -1, -1, -1)$  es conexa y tiene índice -2, entonces por los Teoremas 44 y 45 es un bitoro. Esto demuestra (c), dado que  $(-1, -1, -1, -1) \in \mathfrak{S}_2$ .  $\square$

## Capítulo 6

### Apéndice

En esta parte se dará la demostración de que el conjunto  $W$  correspondiente al polinomio homogéneo  $P(x, y, z, w) = x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3$  es cóncavo.

Sea  $D^+ = \{(x, y, z, 1) \mid P(x, y, z, 1) = 0\}$  y  $D^- = \{(x, y, z, -1) \mid P(x, y, z, -1) = 0\}$ . Con la notación de la sección 4.3, se tiene que

$$\begin{aligned}\Pi_r^+(D^+) &= \left\{ \frac{(x, y, z, 1)}{\|(x, y, z, 1)\|} \mid (x, y, z, 1) \in D^+ \right\}, \\ \Pi_r^-(D^+) &= \left\{ -\frac{(x, y, z, 1)}{\|(x, y, z, 1)\|} \mid (x, y, z, 1) \in D^+ \right\}.\end{aligned}$$

Es fácil demostrar que  $\Pi_r^-(D^+) = \Pi_r^+(D^-)$ . En efecto, sea  $q \in \Pi_r^-(D^+)$ ; entonces existe  $(x, y, z, 1) \in D^+$  tal que  $q = -\frac{(x, y, z, 1)}{\|(x, y, z, 1)\|}$ . Por lo tanto  $q = \frac{(-x, -y, -z, -1)}{\|(-x, -y, -z, -1)\|} = \Pi_r^+(-x, -y, -z, -1)$ ; por otra parte  $P(-x, -y, -z, -1) = (-1)^3 P(x, y, z, 1) = 0$ , entonces  $q \in \Pi_r^+(D^-)$ . La afirmación es verdadera ya que todos los pasos anteriores son reversibles. De esta igualdad junto con la Proposición 33 se obtiene que

$$W = \overline{\Pi_r^+(D^+) \cup \Pi_r^+(D^-)}. \quad (1)$$

Si hacemos  $b = y + z$  y  $d = yz$ , se obtiene

$$D^+ : (1 + b)x^2 + (1 + b)^2 x + b(1 + b) + bd = 0, \quad (2)$$

$$D^- : (1 - b)x^2 - (1 - b)^2 x - b(1 - b) - bd = 0. \quad (3)$$

De las expresiones .2, se ve que  $D^+$  y  $D^-$  tienen intersección no vacía, por lo tanto se sigue de la igualdad .1 que  $W$  es cóncavo si  $\overline{\Pi_r^+(D^+)}$  es cóncavo. A su vez  $\overline{\Pi_r^+(D^+)}$  es

conexo si  $\Pi_+^+(D^+)$  lo es. De este modo se concluye que para demostrar que  $\overline{\Pi_+^+(D^+)}$  es conexo, basta con demostrar que  $D^+$  está formado por piezas conexas que se unen al infinito.

Al resolver la ecuación (2) se encuentra

$$x = \frac{-(1+b)^2 \pm \sqrt{(1+b)^4 - 4(1+b)(b(1+b) + bd)}}{2(1+b)}, \quad (4)$$

donde  $b = (y+z)$  y  $d = yz$ . Entonces  $D^+$  es la unión de tres conjuntos  $A, B$  y  $C$  dados por

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, 1+b=0, d=0\}, \\ B &= \{(x, y, z) \mid 1+b > 0, x = (-(1+b)^2 \pm \sqrt{\Delta})/2(1+b)\}, \\ C &= \{(x, y, z) \mid 1+b < 0, x = (-(1+b)^2 \pm \sqrt{\Delta})/2(1+b)\}, \end{aligned}$$

con  $\Delta = (1+b)^4 - 4(1+b)(b(1+b) + bd)$ .

El conjunto  $A$  es la unión de las dos rectas  $\{(x, -1, 0), x \in \mathbb{R}\}$  y  $\{(x, 0, -1), x \in \mathbb{R}\}$ . Ahora  $B$  lo expresamos en la forma  $B = B_0 \cup B_+$ , donde  $B_0$  es el subconjunto de  $B$  con  $\Delta = 0$  y  $B_+$  es el subconjunto de  $B$  con  $\Delta > 0$ . A su vez el conjunto  $B_+$  es la unión de dos conjuntos: el conjunto  $B_{++}$  que se define al tomar la raíz positiva en la expresión (4) y el conjunto  $B_{+-}$  que se obtiene cuando se toma la raíz negativa, i.e.

$B_{++}$  es el conjunto de ternas tales que

$$\begin{aligned} 1+b > 0, \quad \Delta > 0, \\ x = (-(1+b)^2 + \sqrt{\Delta})/2(1+b). \end{aligned} \quad (5)$$

$B_{+-}$  es el conjunto de ternas tales que

$$\begin{aligned} 1+b > 0, \quad \Delta > 0, \\ x = (-(1+b)^2 - \sqrt{\Delta})/2(1+b). \end{aligned} \quad (6)$$

De (5) y (6) se sigue que  $B_{++}$  es conexo si y sólo si  $B_{+-}$  es conexo y como tienen la frontera común  $B_0$ , entonces  $B$  es conexo si  $B_{++}$  lo es. En forma análoga se demuestra que  $C$  es conexo si el conjunto  $C_{++}$  es conexo, donde  $C_{++}$  está definido por

$$\begin{aligned} 1+b < 0, \quad \Delta > 0, \\ x = (-(1+b)^2 + \sqrt{\Delta})/2(1+b). \end{aligned}$$

El problema de la conexidad de  $D^+$  se ha reducido a demostrar que  $B_{++}$  y  $C_{++}$  son conexos. Nótese que  $B_{++}$  es la gráfica de una función continua definida en  $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_3$ , con

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 &= \{(y, z) \mid \Delta > 0, b = 0\}, \\ \mathfrak{R}_2 &= \{(y, z) \mid 1 + b > 0, \Delta > 0, b > 0\}, \\ \mathfrak{R}_3 &= \{(y, z) \mid 1 + b > 0, \Delta > 0, b < 0\}.\end{aligned}$$

Para demostrar que  $B_{++}$  es conexo, se demostrará que  $\mathfrak{R}_2$  y  $\mathfrak{R}_3$  son conexos con frontera común  $\mathfrak{R}_1$ .

Si  $1 + b > 0$  y  $\Delta > 0$ , se obtiene la desigualdad

$$(1 + b)^3 - 4b(1 + b) - 4bd > 0. \quad (.7)$$

Si  $b > 0$ , de la desigualdad anterior se llega a

$$d < \frac{(1 + b)^3 - 4b(1 + b)}{4b}. \quad (.8)$$

En el plano  $y, z$ , el semiplano  $b > 0$  es la unión de todas las rectas  $\{z = -y + \alpha\}$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Para cada  $\alpha$ , la desigualdad (.8) es

$$h(y) = y(\alpha - y) < \frac{(1 + \alpha)^3 - 4\alpha(1 + \alpha)}{4\alpha} = g(\alpha). \quad (.9)$$

La función  $g(\alpha)$  es decreciente en el intervalo  $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ , es creciente en  $[1, \infty)$  y se anula en 1 y en -1; además  $g(\alpha) \rightarrow \infty$  si  $\alpha \rightarrow \pm\infty$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^-} g(\alpha) = -\infty$  y  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g(\alpha) = \infty$  (ver Figura .1).

La función  $h(y)$  alcanza su máximo  $\frac{\alpha^2}{4}$  en  $y = \alpha/2$  y  $\alpha^2/4 < g(\alpha)$  si  $0 < \alpha < (\sqrt{5} - 1)/2$ ; por lo tanto para estos valores de  $\alpha$ , toda la recta  $\{z = -y + \alpha\}$  está contenida en  $\mathfrak{R}_2$ . Si  $\alpha \geq (\sqrt{5} - 1)/2$ , existe un intervalo abierto  $I_\alpha$  contenido en  $\mathbb{R}^+$ , tal que  $\{z = -y + \alpha \mid y \in \mathbb{R} \setminus I_\alpha\}$ . Con esto se demuestra que  $\mathfrak{R}_2$  es conexo y su frontera contiene a  $\{b = 0\}$ .

El conjunto  $\mathfrak{R}_3$  está descrito por las desigualdades  $b < 0$ ,  $1 + b > 0$  y

$$d > \frac{(1 + b)^3 - 4b(1 + b)}{4b}. \quad (.10)$$

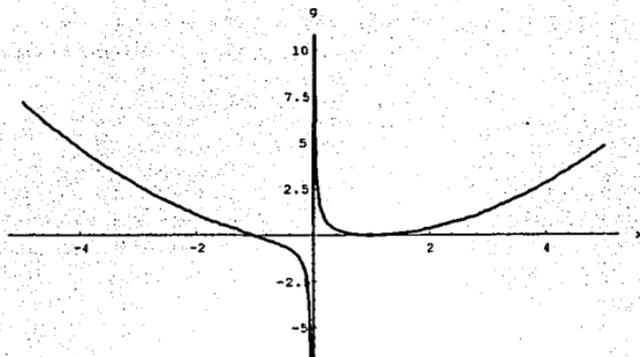


Figura .1:

En el plano  $y, z$ , la región  $\{b < 0, 1 + b > 0\}$  es la unión de las rectas  $\{z = -y + \alpha\}$  con  $\alpha \in (-1, 0)$ . Para cada  $\alpha$  en ese intervalo, la desigualdad (.10) se cumple si  $y$  satisface

$$y(\alpha - y) > g(\alpha).$$

Como  $g(\alpha)$  es negativa y decreciente en el intervalo  $(-1, 0)$ , la desigualdad anterior se satisface sólo sobre un intervalo  $I_\alpha$ , que contiene en su interior al 0. Así pues  $\mathfrak{R}_3$  es conexo y su frontera contiene a  $(0, 0)$  y al segmento  $\{y + z = -1, y \in (-1, 0)\}$ . De todo lo anterior se desprende que  $B_{++}$  es conexo.

Para describir  $C_{++}$ , debemos determinar la región

$$\mathfrak{R}_4 = \{(y, z) \mid 1 + b < 0, \Delta > 0.\}$$

Si  $1 + b < 0$ , entonces  $b < 0$ . Bajo estas condiciones, la desigualdad  $\Delta > 0$  nos lleva a la desigualdad (.9), sobre cada recta  $\{z = -y + \alpha\}$  con  $\alpha < -1$ . Si  $\alpha \in [-(\sqrt{5} + 1)/2, -1)$ , entonces (.9) se cumple sobre un conjunto de la forma  $(-\infty, i_\alpha) \cup (d_\alpha, \infty)$  tal que  $(i_\alpha, d_\alpha) \subset (-1, 0)$  y  $d_\alpha - i_\alpha \rightarrow 0$ , si  $\alpha \rightarrow -(\sqrt{5} + 1)/2$ . Si  $\alpha <$

$-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , la desigualdad (9) se cumple para toda  $y$  en  $\mathbb{R}$ . De esto se desprende que  $\mathfrak{R}_4$  es conexo y su frontera contiene a  $\{1+b=0, y \in (-1, 0)^c\}$ . Con esto se termina la demostración de que  $C_{++}$  es conexo.

## Bibliografía

- [1] Arnold, V., Varchenko, A. y Goussein-Zadé, S.: *Singularités des applications différentiables*. Ed. MIR (1986).
- [2] Bruce, J.W. y Wall, C.T.C.: *On the classification of cubic surfaces*. J.London Math. Soc., 2(19), (1979), 245-256.
- [3] Cima, A. y Llibre, J.: *Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane*. J. of Math. Anal. and App. 147, (1990), 420-448.
- [4] Contopoulos, G.: *Integrable and stochastic behaviour in dynamical systems*.
- [5] Delgado Fernández, J. y Pérez Chavela, E.: *The rhomboidal four body problem. Global flow on the total collision manifold*. en T.Ratiu, (ed.), *The Geometry of Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag (1991), 97-110.
- [6] Delgado, J., Lacomba, E., Llibre, J. y Pérez, E.: *Poincaré compactification of hamiltonian polynomial vector fields*. en *Hamiltonian Dynamical Systems, History, Theory and Applications*, Springer-Verlag I.M.A. Series, 63, (1995), 99-114.
- [7] Diacu, F.N.: *On the validity of Múcket-Treder gravitational law*. en E. Lacomba and J. Llibre, (eds.), *New trends in Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics*, World Scientific Publ., Singapore(1995), 127-139.
- [8] Diacu, F.N.: *Collision/ejection dynamics for particle with quasihomogeneous potentials*. (por aparecer).

- [9] Dimca, A.: *Singularities and Topology of Hypersurfaces*. Springer-Verlag (1992).
- [10] Dold, A.: *Lectures On Algebraic Topology*. Springer-Verlag (1972).
- [11] Gramaticos, B. y Dorizzi, B.: *Integrability of Hamiltonians with third- and fourth-degree polynomial potentials*. J.Math. Phys. **24**(9), (1983), 2289-2295.
- [12] Greenberg, .: *Lectures on Algebraic Topology*.
- [13] Guillemin, V. y Pollack, A.: *Differential Topology*. Prentice Hall (1974).
- [14] Henón, M. y Heiles, C.: *The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments*. The Ast. Journal **69**(1), (1964), 73-79.
- [15] McGehee, R.: *Triple collision in the collinear 3 body problem*. Inventiones Math., **27** (1974), 191-227.
- [16] Lacomba, E.A.: *Infinity manifolds for positive energy in Celestial Mechanics*. Contemporary Math. **58**, (1987), 193-201.
- [17] Lacomba, E.A. y Ibrort, L.A.: *Origin and infinity manifolds for mechanical systems with homogeneous potentials*. Acta App. Math. **11**, (1988), 259-284.
- [18] Lacomba, E.A. y Llibre, J.: *Transversal ejection-collision orbits for the restricted problem and the Hill's problem with applications*. J. Diff. Eq., **74** (1988), 69-85.
- [19] Lacomba, E.A., Bryant, J. y Ibrort, L.A.: *Blow up of mechanical systems with a homogeneous energy*. Pub. Math., **35** (1991), 333-345.
- [20] Lacomba, E.A. y Simó, C.: *Boundary manifolds for energy surfaces in Celestial Mechanics*. Celestial Mech. **28** (1982), 37-48.
- [21] Lacomba, E.A. y Pérez, E.: *Motions close to escapes in the rhomboidal 4-body problem*. Celestial Mech. **57** (1993), 411-437.
- [22] López De Medrano, S.: *Involutions on Manifolds*. Springer-Verlag (1971).
- [23] Segre, B.: *The non-singular cubic surfaces*. Oxford Press (1942).

- [24] Simó, C. y Llibre, J.: *Characterization of transversal homothetic solutions in the n-body problem*. Arch. Rat. Mech. and An., **77**(2), (1981), 189-198.