8
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ACATLÁN

LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL Y SUS APLICACIONES

TESINA PRESENTADA EN

LA DIVISIÓN DE MATEMÁTICAS E INGENIERÍA

COMO ASPIRANTE AL GRADO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

POR

HILDA VERÓNICA CHÁVEZ CASTILLO

ASESORADA POR

FIS. MAT. JORGE LUIS SUAREZ MADARIAGA

Enero 1996.

En toda línea de investigación se debe de adoptar un punto de partida, y este comienzo por fuerza resulta casi siempre una tentativa imperfecta, a menudo sin éxito. Existen verdades que son desconocidas de la misma forma que hay países para llegar a los cuales el mejor camino sólo se aprende después de haberlos probado todos. Algunas personas tienen que correr el riesgo de perderse para mostrar a los demás el camino correcto [...].

Estamos casi siempre condenados a padecer errores para llegar a la *verdad.*

Denis Diderot.

ÍNDICE

CAPÍTULO II

La Distribución Weibull

CAPÍTULO III

Aplicaciones de la Distribución Weibull

Dedico este trabajo con todo cariño a:

Mi Mamá

Por su esfuerzo, dedicación, entrega,
porque este trabajo es prueba tangible que he asimilado
la esencia de sus enseñanzas,
por que gracias a ella soy la persona que ahora soy,
por ser la persona que más admiro en el mundo.

A Marianita

Por ser mi mayor alegría

A mis Hermanos, Abuelos y demás Familiares

Por su apoyo y confianza

A mi Tía Lety

Por brindarme sin reservas su apoyo y cariño incondicional

A la UNAM y a mis maestros

Por darme la formación y los medios para poder haber terminado mi carrera profesional, y en especial agradezco a la Profesora Beatriz Clavel, por sus útiles consejos.

Al Profesor Jorge Luis Suárez Madariaga

Por todo el apoyo recibido

A mis amigas

Verónica Alegría, Aidcé, Aurea, Ana Lidia, Martha, Lidia, por su confianza, paciencia, apoyo incondicional, ayuda, amistad, pero sobre todo por haber creido en mi.

A Elio

Por todo el apoyo recibido para la realización de esta tesina,
por su paciencia, tiempo, y los buenos momentos
que me brindo.

A Erick

Por todo lo bueno que ha dejado en mi,
por haberme brindado momentos innolvidables.

Pero sobre todo a Dios por haberme dado la vida, y la oportunidad de tener a mi lado a todas estas maravillosas personas.

OBJETIVO:

Analizar un panorama general acerca de la Teoría de la Confiabilidad, y el vinculo que tiene esta con la Distribución Weibull y sus principales aplicaciones.

INTRODUCCIÓN

La Confiabilidad tiene muchos significados, incluso es superlativo, pero en general es la probabilidad de que un sistema opere con éxito en el medio ambiente de uso, el éxito puede ser obvio a primera vista, pero en la mayoría de los casos es subjetivo. Por otra parte la confiabilidad es una función de tiempo, ya que el buen funcionamiento de un sistema depende de el tiempo en que este opere adecuadamente.

Con el crecimiento acelerado de la tecnología, los sistemas actuales son cada día más complejos, por lo que se ha mostrado que los modelos determinísticos son inadecuados para diseñarlos y evaluarlos. Por tanto es necesario tratar con modelos probabilísticos capaces de describir variaciones aleatorias, tales como son las fallas que estos sistemas puedan presentar.

La *Teoría de la Confiabilidad*, es entonces una buena alternativa de solución a dichas variaciones, ya que una de sus principales funciones es la de el planteamiento de modelos probabilísticos capaces de describir en forma adecuada y eficiente las discrepancias, fallas, etc., que pudiera sufrir un sistema complejo.

La ocurrencia de fallas depende en gran medida de factores aleatorios, y es difícil de medir. Dichas fallas casuales se pueden originar a partir de, ya sea causas internas o externas a el sistema, pero generalmente se asocian a las condiciones ambientales bajo las cuales esta operando el equipo.

Estas fallas tienen como consecuencia en la mayoría de los casos, discrepancias tales como: Paro total del sistema, mal funcionamiento del equipo, etc. Tales fallas por tanto, pueden ser modeladas a través de algunas distribuciones de probabilidad muy comunes como lo son la normal, normal-logarítmica, exponencial, gamma, entre otras, con el objetivo primordial de obtener la confiabilidad del sistema.

Pero debido a que en la práctica se ha comprobado que la aplicación de dichas distribuciones puede ser limitada, la utilización de distribuciones de valor extremo tales como son Weibull y Gumbel, proporcionan modelos más adecuados en la confiabilidad.

La *Distribución Weibull*, probablemente es una de las más utilizadas en el análisis de confiabilidad y pruebas de vida, ya que proporciona un modelo adecuado para los tiempos de vida de componentes mecánicos y electrónicos, así como otros tipos de unidades tales como tubos de vacío, baleros, relés, entre otros.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN
A LA
TEORÍA DE LA CONFIABILIDAD

En cualquier teoría particular sólo hay de ciencia real lo que haya de matemáticas.
Immanuel Kant.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA CONFIABILIDAD

I.I ASEGURAMIENTO Y MEDIOS DE EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD

I.I.1 ASEGURAMIENTO DE LA CONFIABILIDAD

El problema de asegurar la confiabilidad esta vinculado con todas las etapas de creación del artículo y todo el periodo de su elaboración.

La ***"CONFIABILIDAD"*** de un artículo por lo general se prevé durante su diseño. Esta se asegura mediante la correcta producción del mismo, la elección de la tecnología adecuada, control de calidad de los materiales iniciales, productos semiacabados, productos terminados, control de regímenes y condiciones de elaboración.

I. Al diseñar un artículo se deben de tomar en consideración los siguientes factores:

•*La calidad de los componentes del artículo*, los cuales se deben de realizar tomando en cuenta las condiciones de trabajo tanto climáticas como de producción del mismo. Los elementos que integran dicho artículo deben de satisfacer ciertos requerimientos, los cuales van estrechamente relacionados con sus resistencias mecánicas y térmicas, así como la rigidez electrónica necesarias, en ciertos casos.

- La confiabilidad de un artículo o sistema se conserva en algunos casos utilizando *métodos correctos de almacenamiento* y se mantiene con su correcta explotación o funcionamiento, el entrenamiento sistemático, el control profiláctico y la reparación.

- Se ha demostrado que generalmente al utilizar componentes, piezas, unidades, así como *elementos unificados* aumentan considerablemente la confiabilidad del artículo. Esto debido a que dichos componentes están mejor trabajados con respecto al esquema del producto, y se tiene una tecnología de elaboración estable y bien controlada.

- *Los regímenes de trabajo de componentes y elementos.* Esto corresponde a las posibilidades físicas del artículo.

La utilización de piezas en regímenes imprevistos para su uso es una de las fuentes fundamentales de las fallas, es también importante la solución esquemática y diseño del artículo en conjunto.
Por lo tanto la elección correcta y el uso de los componentes, elementos, esquemas y detalles de construcción, así como su composición, son de vital importancia para lograr una alta confiabilidad en la elaboración de artículos.

- *La accesibilidad a todas las partes del artículo*, así como sus componentes, piezas, unidades, bloques y elementos que lo integran para el examen , control, reparación o la sustitución.

En el caso de sistemas complejos existen dispositivos de control que verifican el buen funcionamiento del artículo, su estado y control automático.

- *Los dispositivos de protección.* Son necesarios en la elaboración de los artículos para su regulación y mando automático, el cual es necesario para la formación de circuitos de construcción de manera que la falla en el trabajo de un elemento no de lugar al estado de avería de toda la instalación.

Uno de los métodos de protección es el uso de piezas de reserva en el mecanismo, tales como elementos , aparatos y dispositivos que cumplan con las funciones más importantes.

II. Durante la producción del artículo se deben de observar una serie de condiciones vinculadas con el mantenimiento de la disciplina tecnológica, como a continuación se enumeran:

- *El adecuado control de calidad*, es decir, las propiedades físico-químicas vinculadas con las características del artículo.
- Sería conveniente *no alterar* el ensamblaje tecnológico y las reglas de montaje eléctrico, así como la sustitución de los artículos complementarios de baja calidad.

III. Los factores principales que influyen en la confiabilidad del artículo durante su funcionamiento son:

- *Las condiciones de funcionamiento o explotación*: climatológicas y de producción, la acción de las altas y bajas temperaturas del medio ambiente, las grandes oscilaciones de humedad.

· Un sistema de servicio *construido adecuadamente* tiene gran importancia para conservar la confiabilidad del artículo.

· *El personal calificado y responsable de servicio* tiene una gran influencia para conservar la confiabilidad, la duración y la efectividad del artículo. Dicho personal esta encargado entre otras cosas de el mantenimiento, elaboración y diseño del producto.

I.1.2 MEDIOS DE EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD

Tomando en cuenta todas las consideraciones anteriores y los siguientes puntos en el diseño de un artículo, se pueden obtener los medios de evaluación de confiabilidad:

- Conocer el *funcionamiento* del producto,
- Conocer la *física* de las fallas,
- *Utilizar materiales*, productos semiacabados, elementos complementarios de alta calidad.
- Tener la *información* suficiente sobre las propiedades, características y parámetros de los materiales, con el fin de elegir correctamente sus regímenes y condiciones de utilización,
- Llevar a cabo un *análisis y cálculo* de las características funcionales,
- El aseguramiento de *limpieza y confort* de los locales de producción,
- El *control total de las propiedades*, características y parámetros de todo el artículo después de su producción.
- Utilización de *métodos modernos* de equipamiento.
- La *Norma Internacional de Calidad*

En lo correspondiente al ***FUNCIONAMIENTO*** del sistema o producto es necesario:

- *Utilizar instrucciones y métodos* de funcionamiento adecuadamente,
- Precisar correctamente los *derechos, obligaciones y responsabilidades* del personal de servicio,
- Organización de *datos estadísticos* completos, analizando los mismos periódicamente para poder establecer las recomendaciones para el mejor funcionamiento y perfeccionamiento de la construcción.

I.II DEFINICIÓN DE CONFIABILIDAD
I.II.1 TEORÍA DE LA CONFIABILIDAD

Definiendo el estado de un Sistema denominado ***FALLA***, el cual se puede dar para cualquier componente del sistema. Entendiéndose como falla el evento asociado con un cambio en las características de operación.

Suponiendo un elemento o conjunto de componentes armados en un sistema, el cual es sometido a " *tensión* ", en un tiempo determinado $t = 0$, y observando hasta que el sistema entre en un estado de falla (es decir, deje de funcionar correctamente bajo tensión aplicada). El tiempo para fallar o duración se denomina T, considerada como una v.a. continua con f.d.p. de f.

El cálculo de T, dependerá de la " *manera de falla o tipo de falla* " que se presente en el tipo de artículo que se este considerando. Para ello es necesario utilizar un modelo probabilístico correspondiente a la v.a. T.

DEFINICIÓN I.II.1: La confiabilidad de un componente en un intervalo de tiempo t, llamado $R(t)$ está definida como $R(t) = P(T > t)$, en donde T es la duración de la componente R, y es denominada ***FUNCIÓN DE CONFIABILIDAD.***
La definición anterior equivale a la probabilidad de que la componente esté funcionando después del tiempo t.

Mediante la *f.d.p* de T, llamada f, tenemos:

$$R(T) = \int_{t}^{\infty} f(s)ds$$

Mediante la *f.d.a.* de T, llamada F, tenemos:

$$R(t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t) \qquad ([1])$$

EXPLICACIÓN: Considerando una componente, sistema o artículo y su v.a. asociada y el tiempo de falla T. Sea F la distribución de probabilidad asociada a dicha v.a. del tiempo que transcurre hasta que la componente falle, y f su función de densidad.

Por tanto :

$$R(t) = 1 - F(T) = \int_{t}^{\infty} f(s)ds$$

DEFINICIÓN I.II.2 : La *Teoría de la Confiabilidad* estudia las leyes de falla de sistemas que estén funcionando dentro de límites predeterminados bajo condiciones de operación dadas.

DEFINICIÓN I.II.3: *La Confiabilidad* es la probabilidad de éxito en el medio ambiente de uso. La Confiabilidad es una propiedad interna de los sistemas de operación y como tal tiene que especificarse como parte de las características de los sistemas.

[1] llamada función de confiabilidad del sistema.

Por otra parte la *Confiabilidad* es la propiedad del artículo, pieza, componente, aparato, sistema debe cumplir las funciones prefijadas, mantener sus índices de funcionamiento establecidos, durante el intervalo de tiempo requerido o las horas de trabajo necesarias. Los elementos de cálculo de la *Confiabilidad* es el dispositivo o dispositivos, los cuales pueden ser una pieza, elemento, aparato, línea o canal de comunicación del sistema e incluso un conjunto de sistemas, considerados en el cálculo de la confiabilidad como una parte autónoma separada, la cual posee un índice cualitativo general de confiabilidad.

En general *La Confiabilidad* es la capacidad de trabajo, propiedad del artículo, para el cual éste tiene la aptitud de cumplir las funciones prefijadas con parámetros establecidos en la documentación técnica.

DEFINICIÓN I.II.4: *La Duración* es la propiedad del artículo de conservar la capacidad de trabajo con las interrupciones necesarias para el servicio técnico. Tal estado de límite es la Rotura o Avería, el Desgaste, etc., o la Reducción de la efectividad (descenso de potencia, disminución de rendimiento), o bien decrecimiento de presión.

DEFINICIÓN I.II.5: *Plazo de Funcionamiento o Plazo de Servicio*, es el periodo o término de explotación o funcionamiento del artículo hasta el instante de aparición del estado límite estipulado en la documentación técnica.

DEFINICIÓN I.II.6: *Horas de Trabajo*; es la duración de trabajo, la cual puede estar medida por diversas unidades, tales como Km., hectáreas, metros cúbicos, etc.

DEFINICIÓN I.II.7: *Recurso*; son las horas de trabajo hasta el estado límite estipulado en la documentación técnica.

El Recurso es igual a la suma de todas las horas de trabajo del artículo desde el comienzo del funcionamiento hasta el instante de alcanzar el estado límite condicional.

DEFINICIÓN I.II.8: *FALLA*. Hecho después de el cual el artículo (elemento, aparato, dispositivo, sistema) deja de cumplir total o parcialmente sus funciones. La falla es la alteración de la capacidad de trabajo del artículo.

DEFINICIÓN I.II.9: *Fenómeno de Falla*; Se define como el evento asociado a un cambio en las características de sus límites permisibles de operación del artículo.

La Falla de un elemento o componente de un artículo es un fenómeno casual o aleatorio, pero los motivos que se deben a la aparición de la falla están vinculados con los procesos físicos y físico-químicos que ocurren en los materiales y las construcciones en distintas etapas de sus vida.

El desarrollo de estos procesos depende tanto de los regímenes de trabajo (condiciones internas), como de las condiciones externas de trabajo del elemento: temperatura, presión y composición del medio circulante, vibración y golpes, acción emisiones ópticas o radioactivas, etc.

I.II.2 CLASIFICACIÓN DE LOS TIPOS DE FALLAS.

En general la clasificación de fallas esta dada de la siguiente manera:

- *Falla de tipo exógenas*: Son fallas aleatorias o casuales y se originan a partir de causas externas al sistema. Generalmente se asocian con las condiciones ambientales bajo las cuales está operando el equipo. Son los resultados de fuerzas severas e impredecibles que surgen de factores ambientales tales como cambios repentinos. Su tasa de incidencia esta determinada por la rigidez de los condicionamientos, mientras más severo es el ambiente, más frecuente es la ocurrencia de las fallas.

- *Fallas de tipo Endógenas*: Se originan a partir de causas internas y generalmente se asocian con ciertas características inherentes en el sistema atribuidos al mal diseño, manufactura o ensamble. Ocurren conforme el sistema se desgasta, de aquí, que durante la fase final de operación, estas se conocen como fallas de desgaste, en este caso son el resultado de deterioro natural acumulado.

La *FALLA* es una de las manifestaciones del defecto o mal funcionamiento del artículo. Por defecto podemos encontrar la disparidad o la incompatibilidad del artículo. El mal funcionamiento que no produce una falla se denomina defecto.

I.II.2.1 Las Fallas se pueden clasificar por una serie índices.

Por otra parte las fallas se pueden clasificar con respecto a cierto índice de clasificación y a los tipos de fallas de este:

- Según su grado de influencia en la capacidad de trabajo:

1. Falla Total o Falla de desgaste
2. Falla Incompleta o Parcial

- Según el carácter físico de la aparición de la falla:

1. Falla Catastrófica: Esta falla conduce a la alteración completa de la capacidad de trabajo. A este tipo de falla se refieren las rupturas y los cortos circuitos, las fracturas, deformaciones y atascamientos de las piezas mecánicas, el fundido o la combustión de las piezas de la construcción o los componentes de los circuitos.
2. Falla Parámetrica: Es la falla parcial de los artículos complejos, la cual se expresa cuando el artículo empeora, esta falla puede ser estable o temporal.

- Debido a otras fallas:

1. Fallas Independientes, Fallas Dependientes. Las fallas como hechos casuales pueden ser dependientes o independientes. Si la falla de un elemento cualesquiera del sistema no motiva a la falla de otros elementos, éste será un hecho independiente. Si la Falla de un elemento ha cambiado con la falla de otros elementos será un hecho dependiente.

- Según el carácter de proceso de aparición:

1. Falla Repentina: También conocida como falla inesperada, aparece como consecuencia de variaciones bruscas de los principales parámetros, bajo la acción de uno o varios factores casuales vinculados con defectos internos de los elementos del artículo, con la alteración de los regímenes de funcionamiento o las condiciones de trabajo.
2. Falla Gradual: En este tipo de fallas se observa una variación suave de los parámetros debido al envejecimiento y desgaste de los elementos de todo el sistema.

La aparición de fallas repentinas generalmente anteceden a variaciones inadvertibles de las propiedades de las piezas o componentes del artículo, que no siempre se logran descubrir. Por ello la clasificación de las fallas repentinas o graduales tiene un carácter convencional.

- Según el tiempo de existencia de la falla:

1. Falla Estable: Se eliminan sólo con la aparición o la regulación, o bien sustituyendo el elemento que este fallando.
2. Fallas Temporales: Pueden desaparecer espontáneamente sin la intervención del personal de servicio, debido a que se eliminan los motivos que provocaron la falla. Las causas de tales fallas frecuentemente son los regímenes y condiciones de trabajo.

La Probabilidad del trabajo en buen estado, (sin que se presente falla) es la probabilidad de que en un intervalo de tiempo prefijado o en los límites de trabajo dados, a regímenes y condiciones de trabajo establecidas no se produzca ninguna falla.

La Probabilidad de que el artículo dado conserve sus parámetros en los límites prefijados durante un intervalo de tiempo determinado para condiciones de funcionamiento definidas se denomina, **P(t).***

La Probabilidad de falla o también llamada probabilidad de incumplimiento de las funciones, es la probabilidad de que en un intervalo de tiempo prefijado se produzca por lo menos una falla, y se denomina **Q(t).**

$$Q(t) = 1 - P(t)$$

DEFINICIÓN I.II.10: *La frecuencia de las fallas* es el número de fallas por unidad de tiempo, referido al número inicial de elementos y se define como sigue:

$$a(t) = n_x / n_t$$

donde:

n_x es el número de artículos que fallaron en el intervalo de

$(t - t/2)$ **a** $(t + t/2)$

donde:

n_t es el número inicial de artículos;

t es el intervalo de tiempo;

* La cual es equivalente a $R(t)=P(T>t)$

DEFINICIÓN I.II.11: *Tiempo medio de fallas* hasta la ocurrencia de una falla. Es el promedio de tiempo de trabajo hasta la ocurrencia de falla y es denotado por ***Tm***([2]).

El tiempo medio de trabajo sin falla de los elementos de un mismo intervalo, es aproximadamente:

$$Tm \approx \sum_{i=1}^{n} t_i / n$$

donde :

t_i es el tiempo de trabajo correcto del i-ésimo elemento;

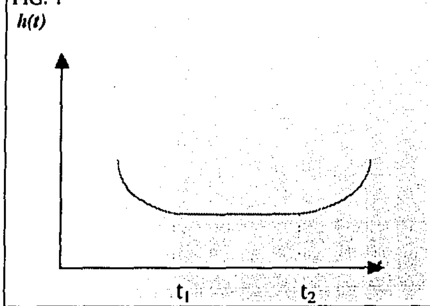
n es el número de elementos del lote que se experimenta.

Cuanto más grande es n, con tanta mayor precisión se determina el valor de ***Tm***. El inconveniente de esta fórmula es la necesidad de conocer los instantes de falla de cada uno de los n elementos del lote.

[2] o valor medio de las horas de trabajo de artículos de lote hasta la primera falla o la esperanza matemática del tiempo de trabajo sin falla.

GRÁFICA DEFALLAS

FIG. 1



Una propiedad intuitiva que llama la atención en la Teoría de la Confiabilidad es la *tasa de falla* , *función de riesgo* o también llamada *tasa de fracaso.* Esta tasa esta definida por ***h(t)***, se determina para aquellos valores de t, para los cuales ***F(t) > 1***.

La Función de riesgo tiene forma de *tina de baño,* esta curva es característica para el caso de fallas instantáneas de equipos que utilizan una amplia variedad de componentes electrónicos.

Para un periodo inicial hasta el tiempo t_1 , h(t) decrece, a este periodo se le conoce como periodo de mortandad infantil, y le corresponde a fallas tempranas atribuidas a defectos de manufactura. Después h(t) permanece constante en un tiempo t_2 después del cual h(t) incrementa debido a las fallas por desgaste.

DEFINICIÓN I.II.12: Si ***F(t)*** es la función de distribución de tiempo de falla de la v.a. *T*, y si ***f(t)*** es la función de densidad de probabilidad. Entonces la tasa de falla ***h(t)*** se define como:

$$h(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}$$

donde:

1-F(t) es la confiabilidad en el tiempo ***t***, y se denota por ***R(t)***.

El comportamiento de la tasa de azar como una función del tiempo se conoce como *Función de Azar* (Característica de Vida) del sistema.

Dicho comportamiento, que es una función del tiempo, tiene una interpretación probabilística de falla. La cual representa la probabilidad de falla de un aparato o sistema de la edad ***t***, en el intervalo de **[t, t+dt]** o

$$h(t)=\lim_{dt\to 0} P(\text{de que un artículo de edad t falle en el intervalo (t,t+dt) o este sobreviva hasta el tiempo t})/dt$$

Con la finalidad de demostrar *La Tasa de Falla* se establece esta como la probabilidad de que ocurra una falla por unidad de tiempo en el intervalo $[t_1, t_2]$, dado que la falla no ocurrió antes de t_1, y se define como:

$$R(t_1, t_2)=\frac{R(t_1)-R(t_2)}{R(t_1)(t_2-t_1)}$$

La Tasa de azar o Razón de Falla, se define como el límite cuando $t_2 \to t_1$, también conocida como fuerza de mortalidad o fuerza de intensidad:

$$\mathbf{h(t)} = \frac{f(t_1)}{1-F(t)}$$

DEMOSTRACIÓN:

Dado: $h(t) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{R(t_1)-R(t_2)}{R(t_1)(t_2-t_1)}$ definido en el intervalo [t , t+dt]

$dt = t_2 - t_1$

$$h(t) = \lim \frac{R(t)-R(t+dt)}{R(t)dt}$$

$$= \frac{1}{R(t)} \lim \frac{R(t)-R(t+dt)}{dt}$$

$$= \frac{1}{R(t)} \left(\frac{-dR(T)}{dt} \right)$$

$$= \frac{-f(t)}{1-F(t)} \quad \text{donde :} \quad \frac{1}{1-F(t)} = \frac{1}{R(t)}$$

$$R'(t) = P(t \geq T) = -F'(t) = -f(t)$$

$$h(t) = \frac{-(-f(t))}{1-F(t)}$$

$$\mathbf{h(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)} \quad \text{Razón o Tasa de Falla}$$

L.Q.Q.D.

TEOREMA I.II. 1: *El Tiempo medio de falla* se define como sigue:

$$E(t)=\int_0^\infty tF(t)dt$$

Realizando las operaciones necesarias:

R(t) = 1 - F(t) de donde

f(t) = F′ (t)

R′ (t)= -F′ (t) = -f(t) de donde

f(t) = -R(t)

$$\boldsymbol{E(t)} = \int_0^\infty tR'(t)dt \text{ integrando:}$$

$$\lim_{t\to 0} R(t) = 1 \qquad \lim_{t\to\infty} R(t) = 0$$

TEOREMA I.II.2: Si ***T***, (es el tiempo para fallar) es una v.a. continua con *f.d.p.* de ***T***, entonces ***f*** puede expresarse mediante la tasa de falla ***h***, como sigue:

$$\boldsymbol{f(t)} = h(t) \ \exp\left(-\int_0^t h(s)ds \right)$$

DEMOSTRACIÓN: Puesto que R(t) = 1 - F(t), tenemos R ′ (t) = - F(t) = - f(t)

luego:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-R'(t)}{R(t)} \text{ integrando ambos miembros de 0 a t :}$$

$$\int_0^t h(s)ds = -\int_0^t \frac{R'(s)}{R(s)}ds$$

$$= - \ln (R(s)) \Big|_0^t$$

$$= - \ln R(t) + \ln R(0)$$

$$= -\ln R(t)$$

Dado que ln R(0)=0 lo que es válido si y sólo si R(0)=1, esta última condición se satisface si F(0)=0. Simplemente se expresa la probabilidad de una falla inicial igual a cero.

Por lo tanto: $R(t) = h(t) \exp (-\int_0^t h(s)ds)$

luego:

$$f(t) = F'(t) = \frac{d}{dt(1-R(t))} = h(t) \exp (-\int_0^t h(s)ds)$$

Así se ha demostrado que la tasa de fallas h determina unívocamente la *f.d.p.* de *f*. L.Q.Q.D.

En muchas aplicaciones existen razones para creer que la tasa de falla tiende a aumentar a causa de un deterioro inevitable. Se dice con frecuencia que la tasa de falla que permanece constante o aumenta con el tiempo tiene una tasa de fracaso creciente *TFC*. Esto es apropiado cuando la unidad está sujeta a un envejecimiento a través del uso, fatiga o daño acumulado.

En algunos casos, la tasa de falla tiende a disminuir, por lo que se establece entonces que h(t) es decreciente *TFD*. Esto puede ocurrir por ejemplo, cuando el proceso de manufactura produce una proporción apreciable unidades de baja calidad que fallaran pronto. Después de un tiempo, componentes de mayor calidad seguirán funcionando, los cuales tienen una menor tasa de fallas.

I.III. PRINCIPALES APLICACIONES DE LA TEORÍA DE LA CONFIABILIDAD

I.III.1 APLICACIONES TEORÍA DE LA CONFIABILIDAD

La *Teoría de la Confiabilidad* tiene sus principales aplicaciones en problemas de ingeniería, utilizándose primordialmente en el área de seguridad.

En los últimos veinte-treinta años el problema de la Confiabilidad o Seguridad de los sistemas técnicos⁺ y de sus elementos componentes se ha agudizado fuertemente, principalmente gracias a lo siguiente:

La complejidad de los sistemas técnicos cada día es mayor, ya que muchos de estos sistemas incluyen hasta 10^4 entre 10^6 elementos individuales.

- La intensidad de los regímenes de trabajo o funcionamiento del sistema o sus partes individuales:

a altas temperaturas,

2. altas presiones,
3. altas velocidades, etc.

La complejidad de las condiciones en las que se explota el sistema técnico, por ejemplo:

1.baja o alta temperatura,

alta humedad,

2.vibración,

3.aceleración y

4.radiación.

⁺ refiriéndonos a un sistema que produce artículos, componentes, etc.

- La necesidad de una mejor calidad de trabajo de los sistemas tales como:

1. alta precisión
2. ejecutabilidad, etc.

- La automatización de los sistemas técnicos, ya sea total o parcialmente, y la exclusión de la participación del hombre, así como su observación continua, y control por parte de éste.

Una de las principales causas de el auge que puede tener la Teoría de la Confiabilidad es el crecimiento y la complejidad de los sistemas técnicos.

EJEMPLOS DE APLICACIONES

•El sistema de mando de los cohetes balísticos intercontinentales ATLAS contiene cerca de 300 000 elementos, mientras que el sistema de mando de cohete NIKE tiene más de $1.5 * 10^6$ elementos individuales.

•Las computadoras numéricas electrónicas modernas tienen cerca de 10 000 - 15000 tríodos semiconductores y 6-15 veces más de otros componentes eléctricos, tales como resistencias, condensadores, etc.

•La mayoría de los contratos del Departamento de Defensa, la NASA y de la Comisión Nuclear (AEC) imponen cierto grado de exigencias de confiabilidad al contratista. Estos requisitos van desde la definición de metas de confiabilidad para el sistema, hasta exigir una demostración real de los resultados conseguidos.

- modernos se caracterizan por el trabajo de una amplia gama de temperatura variable de -70 ^{o} C. + 70 ^{o} C. , la existencia del vacío, alta humedad (98 -100 %), vibraciones de gran amplitud y espectro de frecuencia ancha, la presencia de aceleración lineales de hasta 10 entre 300 000 e incluso 20 000 g. , la existencia de una alta radiación solar y cósmica.

- La responsabilidad de las funciones a cumplir por los sistemas técnicos modernos está relacionada con su falla, la cual da lugar a grandes pérdidas técnicas y económicas.

Ejemplos de ello, son algunos efectos catastróficos, por ejemplo:

- La falla de un elemento de valor de cinco dólares motivó en Estados Unidos el fracaso del Lanzamiento de un satélite de valor de $28*10^{6}$ dólares.

- El prejuicio debido a la falla de los aparatos de mando automático de procesos de elaboración en la industria química supera cientos de veces el valor de los mismos aparatos de mando y puede dar lugar a pérdidas de instalación y de personal.

Entre otras aplicaciones de la Teoría de la Confiabilidad se pueden mencionar las siguientes:

•Supóngase que consideramos un componente (o conjunto completo de componentes armados en un sistema), como podrían ser los siguientes: una barra de acero bajo una carga, un fusible puesto en un circuito, un ala de un aeroplano bajo influencia de ciertas fuerzas, o un instrumento electrónico puesto en servicio. Por lo que la función de confiabilidad tiene la característica de describir las partes que fallaran de

la componente o el sistema, es decir que la barra de acero pueda agrietarse o romperse, el fusible puede quemarse, el ala puede doblarse, o el instrumento electrónico puede dejar de funcionar.

Una de las consecuencias de no tomar en cuenta a la confiabilidad como parte importante de los artículos, son por ejemplo los retrasos de horarios, las incomodidades, la insatisfacción de los clientes, la pérdida de prestigio, etc.

Por ejemplo un componente defectuoso de una Televisión implica costo, incomodidad, pérdida de prestigio (del fabricante o del último técnico que tocó el televisor) y descontento del cliente.

Por ello en necesario que las empresas mexicanas se percaten de las ventajas principalmente económicas que proporciona un programa eficaz de confiabilidad.

TRATAMIENTO ESTADÍSTICO DE LOS RESULTADOS DE LAS OBSERVACIONES DE FUNCIONAMIENTO

I.IV DETERMINACIÓN DE LA CONFIABILIDAD DE LOS ARTÍCULOS SEGÚN LOS RESULTADOS DE FUNCIONAMIENTO

Uno de los principales métodos para la obtención de datos sobre la confiabilidad de los artículos es el tratamiento de la información con respecto a las fallas, las condiciones y los motivos de su aparición obtenidas durante el funcionamiento de los artículos.

En este caso, el mayor problema existente corresponde a la insuficiencia de los datos gracias a la ausencia de una organización correcta de la recolección de los elementos estadísticos. Frecuentemente a esto se deben dificultades objetivas, las cuales se relacionan con la complejidad de observación en condiciones reales: en los talleres de producción , instalaciones energéticas en funcionamiento, etc.

Para la recolección de los datos, conviene tomar en cuenta factores tales como variaciones suficientemente rápidas de las construcciones y tecnología de elaboración de los medios técnicos modernos, en una serie de casos, los datos sobre la confiabilidad de los artículos, obtenidos por el análisis de los datos de funcionamiento, envejecen de una manera considerable.

El contenido de los datos sobre las fallas, dependen del tipo de artículos y las particularidades de funcionamiento. No obstante, en todos los casos en los datos deben entrar los siguientes factores fundamentales:

- *El tipo de artículo*: sistema, dispositivo, aparato, elemento, componente, pieza, y los datos de certificado técnico, tales como: número de artículo, año de producción, fecha de comienzo de funcionamiento,

- La *duración del trabajo* en buen estado hasta la aparición del defecto,

- Los *regímenes de trabajo* del artículo tales como parámetros que caracterizan el régimen de trabajo: tensión, corrientes, presión, temperatura, etc.

- Las *condiciones externas de trabajo* del artículo: temperatura, humedad, presión, frecuencia y amplitud de las vibraciones, golpes, impurezas corrosivas en el medio ambiente, etc.

- *El carácter de falla*: cortocircuito, corte, atascamiento, ruptura, salida de los parámetros de los límites de tolerancia, etc.

- Los *motivos y aparición de la falla*: desgaste, fatiga, envejecimiento, rotura, etc.

Algunos de los cuales ya se señalaron.

I.IV.2 TRATAMIENTO ESTADÍSTICO DE LOS RESULTADOS DE LAS OBSERVACIONES DE FUNCIONAMIENTO

Los datos obtenidos respecto a las fallas de los artículos se exponen al siguiente tratamiento estadístico:

- *Determinar el tipo de función de densidad de distribución* de las fallas o el tipo de función de distribución de las fallas de los artículos;

- Calcular los *parámetros* de la distribución obtenida;

- Establecer el *grado de coincidencia de las distribución empírica con la supuesta distribución teórica*;

- Determinar los *parámetros de confiabilidad* de los artículos que se examinan.

Para la estimación de parámetros de la distribución teórica más próxima a la distribución empírica obtenida, se utilizan más comúnmente los métodos de *Máxima Verosimilitud* y *Mínimos Cuadrados* gracias a las características de los parámetros que estas proporcionan.

I.IV.2.1 MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

Partiendo de una muestra aleatoria de tamaño ***n*** : T_1 ,T_2, T_3, ... ,T_n, se pretende maximizar la probabilidad de la obtención de la muestra.

Si ***T*** es una v.a. con función de densidad de probabilidad $f(t; \theta_1, \theta_2,..., \theta_k)$, y se supone que los valores de la muestra son independientes, entonces la función de verosimilitud de la muestra será:

$$Lf(\theta_1, \theta_2,..., \theta_k) = f(t_1; \theta_1, \theta_2,..., \theta_k)f(t_2; \theta_1, \theta_2,..., \theta_k) \cdots f(t_n; \theta_1, \theta_2,...,\theta_k)$$

El estimador de máxima verosimilitud estará dado por el conjunto de valores que maximicen la función anterior.

Para llevar a cabo el propósito anterior es necesario calcular las derivadas parciales con respecto a cada uno de los parámetros, igualar cada ecuación a cero y resolver el sistema de ecuaciones. En diversas ocasiones, esto no resulta sencillo por lo que se deben de llevar a cabo aproximaciones ya que el sistema puede contener ecuaciones no lineales.

Generalmente es más conveniente maximizar el logaritmo de la función que la función, para de este modo simplificar los cálculos.

Observaciones acerca de los estiamdores de máxima verosimilitud (ML):

•Será naturalmente un estadígrafo y por tanto una v.a. puesto que su valor dependerá de la muestra (T1 ,T2 , ... Tn).

- En la mayoría de los casos dependerá sólo de un número real, sin embargo puede suceder que la distribución de probabilidad de T dependa de dos o más valores parámetricos como en el caso de la distribución Weibull que depende de 2 parámetros.

Propiedades de los estimadores de máxima verosimilitud (ML):

•El estimador de ML puede ser sesgado. Muy a menudo tal sesgo puede evitarse multiplicando por una constante apropiada.

•Bajo condiciones muy generales los estimadores de ML pueden ser convergentes, es decir si los tamaños de muestra sobre los cuales se ban es grande, la estimación de ML estará " próxima" al valor del parámetro que se estime.

•Los estimadores de ML poseen la muy importante propiedad de invarianza. Supóngase que $\hat{\theta}$ es el estimador de ML de θ . Puede demostrarse que el estimador de ML de $f(\theta)$ es $f(\hat{\theta})$. Es decir, si el estadístico A toma sus medidas en cm^2 y el estadístico B en cm. y si el estimador de ML de A $\sqrt{\hat{\theta}}$, entonces el de B sería . Esta propiedad la tienen los estimadores insesgados.

I.IV.2.2 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS*

La Regresión Lineal Simple representa una relación rectilínea entre dos variables a menudo denominadas variables dependendiente e independiente respectivamente. El método de mínimos cuadrados en un método de regresión, y su principal función estriba en predecir los valores de una variable, cuando se conoce el valor de otra.

Mediante la gráfica o la ecuación de la regresión se pueden inferir los valores de las variables dependiente a partir de los que adquiera la variable independiente.

Es casi una norma emplear la letra X para denotar la var. independiente y Y para la independiente.

Por otro lado ecuación de la línea recta esta dada por:

$Y = a + bX$

El coeficiente b indica la relación entre la variación de Y y la variación de X. Dicho cociente se llama pendiente de la recta con dicho eje.

La Recta que aparece en el estudio de regresión suele tener una forma análoga a la anterior:

$Y` = a+bX$

con la diferencia de figurar Y' en lugar de Y; Y' se lee " valor previsto de Y".

La recta de regresión, o línea de ajuste óptimo, se suele definir como aquella recta respecto a la cual la suma de los cuadrados de los errores de predicción es mínima. Ya que la diferencia entre la puntuación obtenida (Y) y la prevista (Y') se llama error de predicción.

$Y'=a+bX \quad Y-Y'= Y-(a+bX).$

Estos errores de predicción se elevan al cuadrado y se suman.

* Esta prueba ejemplificará posteriormente en el capítulo III

Para obtener los valores de a y b, que hacen mínima la suma de los cuadrados de los errores de predicción, hay que derivar la expresión anterior respecto de a y b e igualar a cero cada una de dichas derivadas. Se obtiene un sistema de dos ecuaciones de el que se deducen los otros dos coeficientes:

$$b = \frac{\sum xy - \left[\left(\sum x\right)\left(\sum y\right) / N\right]}{\sum x^2 - \left[\left(\sum x\right)^2 / N\right]}$$

$$a = \bar{y} - b\left(\bar{x}\right)$$

Al obtener nuestros estimadores es importante que estos cumplan con ciertas características :

- Es deseable que el promedio o valor esperado de nuestro estimador coincida con el valor real o parámetro, a esta propiedad se le denomina ***estimador insesgado***.
- La varianza del estimador debe de ser lo más pequeña posible, cuando la varianza es mínima se dice que es un ***estimador eficiente***.
- Si el estimador utiliza en su totalidad la información contenida en la muestra se dice que es un ***estimador suficiente***.
- Si el estimador tiende al valor real , a medida que aumenta el tamaño de la muestra, tiende a infinito, se establece que es un ***estimador consistente***.

Para estimar el grado de coincidencia de la distribución teórica con la empírica obtenida, se utilizan los denominados criterios de *Kolgomorov* y *Prueba de Bondad y Ajuste Chi- Cuadrada.*

I.IV.2.3 CRITERIO DE KOLGOMOROV*

Esta prueba nos permite evaluar la concordancia que existe entre la distribución que suponemos y la distribución teórica. Esta prueba es no paramétrica y es exacta para todos los tamaños de muestra.

Inicialmente suponemos que una variable aleatoria $\boldsymbol{T}$ sigue una distribución continua, a la cual se le denomina $F_0(t)$. Para probar lo supuesto anteriormente se toma una muestra de tamaño n a partir de una distribución continua F(t).

Posteriormente se determinará la distribución acumulada de nuestra muestra denotada por $F_n(t)$. En seguida $F_n(t)$ se comparará con la distribución acumulada F(t). Si $F_n(t)$ difiere demasiado de F(t) nos da una evidencia de que $F_n(t)$ no es igual a F(t).

Para llevar a cabo este propósito se establece un estadístico de $\boldsymbol{D}$, como a continuación se muestra:

$$\mathbf{D^{+}= \max_{t_i} \{ i/n - F(t_i) \}}$$

$$\mathbf{D^{-} = \min_{t_i} \{ F(t_i) - (i-1)/n \}}$$

$$\mathbf{D = \max \{ D^{+}, D^{-} \}}$$

Para un tamaño de muestra $n \geq 20$ se utiliza como aproximación al valor crítico de $d\alpha$:

$d_{0.05} = 1.36 / (n)^{1/2}$

$d_{0.01} = 1.63 / (n)^{1/2}$

---

* El cual se ejemplificará más adelante en el método gráfico de visualización de la distribución de probabilidad

Por lo cual la regla de decisión es aceptar $F_0(t)$, si el estadístico $\boldsymbol{D}$ es menor que el valor $d\alpha$.

I.IV.2.4 PRUEBA DE BONDAD Y AJUSTE CHI-CUADRADA

Esta prueba se emplea para decidir cuándo un conjunto de datos se apega a una distribución de probabilidad dada. Así la Chi- Cuadrada se utiliza como contraste de significación cuando los datos son frecuencias tanto absolutas como relativas. Por otra parte muchas de las aplicaciones de esta prueba se basan en datos discretos, sin embargo también es aplicable a datos continuos reduciéndolos a categorías.

En primer lugar, la Chi-Cuadrada se emplea en el contraste de la bondad de un ajuste. En él se trata de juzgar cuantitativamente en qué medida unos datos observados obedecen a cierta distribución.

Supóngase un experimento, donde los resultados son anotados, estas frecuencias son llamadas observadas, y se representan con el símbolo O. En seguida se enuncia la hipótesis nula que consiste en afirmar que la distribución observada, no difiere de la que podría ser la esperada. Determinando por otro lado las frecuencias esperadas o teóricas.

Luego es necesario normalizar los resultados como se expresa en la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7
O	E	O	E	O-E	(O-E)2	(O-E)2/E

•En las columnas 1 y 2 se tienen las frecuencias esperadas y observadas.

•En las columnas 3 y 4 aparecen las mismas frecuencias pero combinadas las correspondientes a los intervalos extremos de clase.

•En la columna 5 figuran las diferencias entre los valores de O y E de las columnas 3 y 4, posteriormente en la columna 6 el cuadrado de estas diferencias, y en la columna 7 el cuadrado de las diferencias dividido por la frecuencia esperada.

•Posteriormente se suman los valores de la columna 7, la cual da como resultado la Chi-Cuadrada . El número de grados de libertad es el número total de intervalos menos tres unidades.

La hipótesis nula, consiste en afirmar que los datos pertenecen a cierta distribución.

Se busca en una tabla correspondiente a la para ciertos grados de libertad (gl), y se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación 1 por 100.

Dicho esto con otras palabras, una diferencia de cierta magnitud sólo es de esperar una vez cada 100, este riesgo es tan pequeño que se puede afirmar que la población de la que se extrajo la muestra pertenece a cierta distribución.

I.IV.2.5 MÉTODO GRÁFICO EN LA REVELACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

En la Ingeniería este método es muy usado, para la revelación de la distribución de probabilidad, dados datos estadísticos empíricos.

En este caso se utiliza el hecho de que las distribuciones más comunes tales como:

- EXPONENCIAL,
- NORMAL,
- NORMAL - LOGARÍTMICA,
- WEIBULL.

Los datos obtenidos se deben de escribir en una tabla como la que se mostrará a continuación .

x_i	n_i	H_i	$H_i / \Sigma n_i$	$1- H_i / \Sigma n_i$
1	2	3	4	5

En la columna 1 se fija el valor de $x_i = t_i$, correspondiente a los instantes de tiempo para las fallas,

- En la columna 2, el número de artículos n_i que han fallado en el intervalo de tiempo dado,
- En la columna 3, el número de fallas H_i acumulado en el instante dado,
- En las columnas 4 y 5, respectivamente los valores de $H_i / \Sigma n_i$ y

$1- H_i / \Sigma n_i$.

Para la revelación gráfica de la función de distribución, se llevan sobre un papel cuadriculado con red de coordenadas especial los valores de $H_i / \Sigma n_i$ y $1-H_i / \Sigma n_i$:

Al verificar la ***Distribución Weibull*** se utiliza de preferencia la tabla cuadriculada fig2. Es también recomendable verificar el siguiente orden:

- Distribución Exponencial,
- Distribución Normal,
- Distribución Normal-Logarítmica,
- Distribución Weibull.

La interpolación lineal de los datos experimentales se realiza trazando una línea recta entre los puntos para : $\mathbf{H_i/\Sigma n_i}$ **o** $\mathbf{(1-H_i/\Sigma n_i)}$

Donde:

$\mathbf{H_i}$ es el número de fallas acumuladas el instante dado, el número de artículos corresponde a $\mathbf{n_i}$.

De manera que las desviaciones de los puntos con respecto a la recta tengan el valor mínimo y se distribuyan por ambos lados.

Si no se logra trazar una línea recta en la red de coordenadas dada, es conveniente utilizar paquetes estadísticos, para una mayor precisión.

La desviación máxima de **D** se determina, comparando las magnitudes de la desviación por el eje de ordenadas de los puntos trazados, según los datos experimentales, con respecto a la recta de interpolación para distintos valores de $\mathbf{x_i}$ y eligiendo la máxima de ellas (teniendo en cuenta la irregularidad de la escala de ordenadas).

El criterio de adaptación Kolmogorov se calcula por la fórmula $D\sqrt{n}$, donde : **D** es la desviación máxima , **n** la cantidad total de puntos obtenidos experimentalmente.

Si $D\sqrt{n} \leq 1$

se considera que está establecida la adaptación de la distribución experimental con la ley de distribución que se compara

1	2	3	4	5
2	2	2	0.08	0.92
3	2	4	0.16	0.84
5	1	5	0.18	0.82
6	1	6	0.21	0.79
7	1	7	0.25	0.75
8	1	8	0.29	0.71
9	2	10	0.36	0.64
13	1	11	0.39	0.61
15	1	12	0.43	0.57
16	1	13	0.47	0.53
17	1	14	0.50	0.50
18	1	15	0.54	0.46
20	1	16	0.57	0.43
21	1	17	0.61	0.39
25	1	18	0.64	0.36
27	1	19	0.68	0.32
35	1	20	0.72	0.28
38	1	21	0.75	0.25
53	1	22	0.79	0.21
56	1	23	0.82	0.18
69	1	24	0.86	0.14
77	1	25	0.89	0.11
86	1	26	0.93	0.07
98	1	27	0.96	0.04
120	1	28	1.00	0.00

si: $D\sqrt{n} > 1$

no hay adaptación y es necesario continuar la comparación, por orden, con la siguiente ley de distribución teórica.

Ejemplo:

Como resultado del tratamiento de los datos de los ensayos, se ha obtenido la siguiente serie de valores del tiempo de trabajo sin falla del artículo, en horas: 2,2,3,3,5,6,7,8,9,9,13,15,16,17,18,20,21,25,27,35,38,56,69,77 ,86, 98,129.

Se necesita revelar la ley de distribución del trabajo sin falla.

Solución.

1.Los datos obtenidos se presentan en la siguiente tabla y se calculan los valores correspondientes a las distintas columnas.

2.Para verificar la concordancia de la distribución experimental con la ley de distribución exponencial supuesta llevamos el valor de t_i y de $(1\text{-}H_i/\Sigma n_i)$ sobre la red de coordenadas correspondientes.

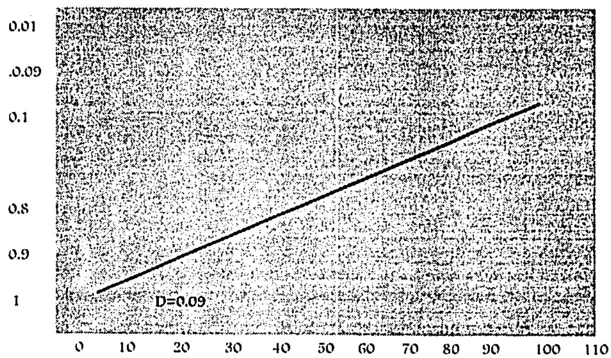
3.Por los puntos de la gráfica trazamos una recta. Puesto que esto resulta realizable, hallamos la desviación máxima de los puntos con respecto a la recta trazada: D=0.09.

4. Valoramos según el criterio de adaptación de Kolgomorov:

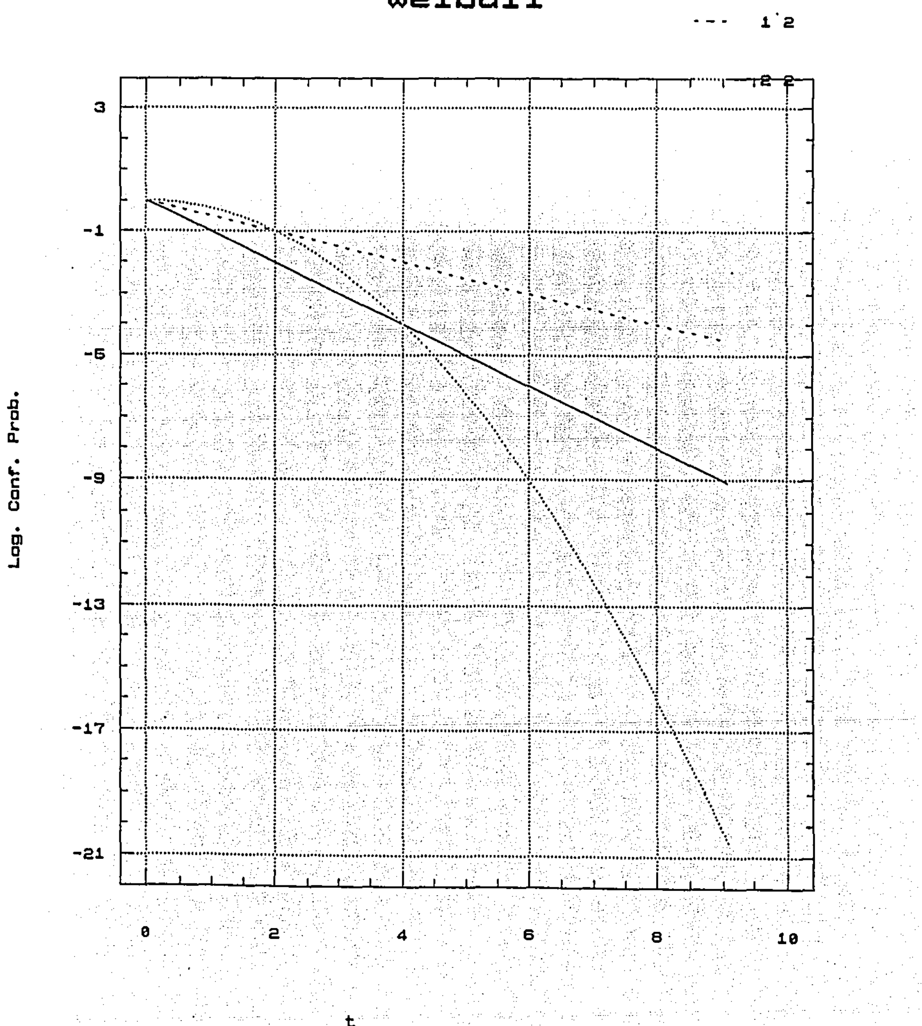
$$D\sqrt{n} = .09\sqrt{28} = 0.48$$

Puesto que 0.48 < 1.00, se puede considerar que la ley de distribución del tiempo de trabajo sin falla cumple con la ley exponencial.

Gráfica de Coordenadas Logarítmica Exponencial



Función de Confiabilidad Logarítmica Weibull



CAPÍTULO II

LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL

La probabilidad es la verdadera guía de la vida
Obispo Butler

La vida es la escuela de la probabilidad.
Walter Bageltot.

CAPÍTULO 2
LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL

II.I PRINCIPALES CARACTERÍSTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL

En *La Teoría de la Confiabilidad* como ya se ha establecido en el capítulo anterior, algunas *Distribuciones de Probabilidad* juegan un papel de vital importancia, principalmente para modelar las fallas de sistemas u artículos.

Entre las principales distribuciones estudiadas en este ramo, se encuentran la Distribución Exponencial, la Normal, la Normal Logarítmica, la Gamma, Distribuciones de Valor Extremo, entre otras.

Pero una de las Distribuciones más representativas en este sentido es la *Weibull*, por su flexibilidad de modelaje, por esta razón el enfoque de este capítulo va dirigido principalmente a esta distribución.

La Distribución Weibull fue establecida por el físico Suizo Waloddi Weibull en los años 1939-1951 aproximadamente.

Esta distribución había sido derivada anteriormente por Fisher y Tippett en 1928, como la *Tercera Distribución Asintótica de Valor Extremo.*

Al principio, se demostró, con base en evidencias puramente empíricas, que el esfuerzo o resistencia al que se someten los materiales se puede modelar por medio de esta distribución. El principal problema estribaba en encontrar el elemento más débil del sistema o artículo en cuestión.

Fue entonces como la *Distribución Weibull* se obtuvo al principio como empírica. La base teórica fue dada por B.V. Gnedenko.

Por esta razón en ocasiones algunos autores establecen que también es correcto denominar a esta distribución como *Distribución de Weibull-Gnedenko.*

La Distribución Weibull representa un modelo apropiado para la ley de falla siempre que el sistema este compuesto por cierto número de componentes y la falla se deba principalmente al defecto *más grave* en un gran número de defectos que el sistema pueda presentar.

Es decir que el sistema debe de poseer ciertas características especiales para que la distribución Weibull pueda ser aplicable, además de que dicho sistema tiene que presentar un defecto grave que altere las características importantes de operación, para poder aplicar este modelo de falla.

En los últimos veinticinco años esta Distribución ha sido empleada como modelo para situaciones de tipo *tiempo-falla* con el objetivo de lograr una amplia variedad de componentes mecánicos y electrónicos.

Es decir que este modelo ha sido utilizado para ampliar la calidad de los artículos y componentes principalmente mecánicos y electrónicos.

Existen diversas situaciones en las que suponemos que la tasa de falla es constante, esto evidentemente no siempre nos proporciona una representación de la realidad, siendo que situaciones reales ocurre con más frecuencia que la tasa de falla crezca o decrezca *suavemente* con el tiempo. Lo cual quiere decir que la tasa de falla tiene pequeñas variaciones conforme el sistema esta funcionando a través del tiempo.

En ocasiones también, se supone que no hay discontinuidades o cambios de tendencia en la tasa de falla, como es el caso de la tasa de falla de la *Distribución Exponencial*, siendo esta, un tanto limitada en cuanto a su uso y aplicación, al contrario de la *Distribución Weibull*.

A continuación se darán algunas características propias de la Distribución Weibull:

DEFINICIÓN* 2.1.1**:Se dice que una variable aleatoria ***t, tiene una *Distribución Weibull* si su función de densidad de probabilidad está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{f(\ t;\alpha,\theta)} = \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}} t^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}} \qquad t > 0 \qquad 1.1$$

0 para cualquier otro caso.

La cual depende de dos parámetros fundamentales:

α el de forma

θ el de escala

siendo ambos parámetros constantes positivas.

La *característica de vida del parámetro de escala* θ , tiene la siguiente propiedad

Prob($\theta,\alpha\leq\theta$) = 1 - exp (-1) = 0.632 para toda α

Por otra parte:

El rango de la Distribución Weibull $0 \leq t \leq \infty$

A menudo se introduce un parámetro adicional, obteniéndose al reemplazar ***t*** por *t*- γ, donde γ , es un parámetro de localización que representa en la mayoría de las veces un valor umbral o tiempo de garantía.

La función de densidad quedaría de la siguiente manera:

$$\mathbf{f(\ t;\alpha,\ \theta)} = \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}(t-\gamma)^{\alpha-1} e^{-\left[\frac{(t-\gamma)}{\theta}\right]^{\alpha}} \quad \alpha,\theta,\gamma\rangle 0 \qquad 1.2$$

$$(t-\gamma)>0$$

En las siguientes figuras se muestran diversas gráficas de la *Distribución Weibull*, para varios valores de los parámetros.
Como se podrá observar en estas gráficas la *Distribución Weibull* suele tener diversos perfiles dependiendo de el valor que se le asigne a el parámetro de forma α.

A medida que α aumenta, la deformación de las gráficas se hace menos pronunciada.
El parámetro θ opera principalmente como factor de escala, mientras que α produce efectos cualitativamente diferentes, dependiendo de su magnitud.

Cuando γ es negativa indica que algunas unidades son defectuosas en el instaste de iniciar el funcionamiento; es decir han fallado en almacenamiento. Cuando γ es positiva, hay otro periodo libre de fallas. En el caso de cojinetes de bolas, por ejemplo, puede ser el tiempo que tardan los defectos microscópicos incipientes bajo la superficie del cojinete en propagarse a la superficie para luego causar fallas por fatiga.

Las siguientes figuras, por otro lado muestran los efectos de los valores de los parámetros sobre la forma de la curva y pueden compararse con las curvas de la exponencial y la normal.

Puede observarse que la forma general de la distribución Weibull es siempre la misma, así como en el origen, pero la curva se comprime o expande a lo largo del eje de las abscisas (eje del tiempo). La forma de la distribución sería diferente para otro valor de θ, pero todas las curvas de la familia atendrían forma parecida para el mismo parámetro θ. Análogamente, para un valor diferente de γ cambiaría el origen, pero todas las curvas tendrían el mismo origen.

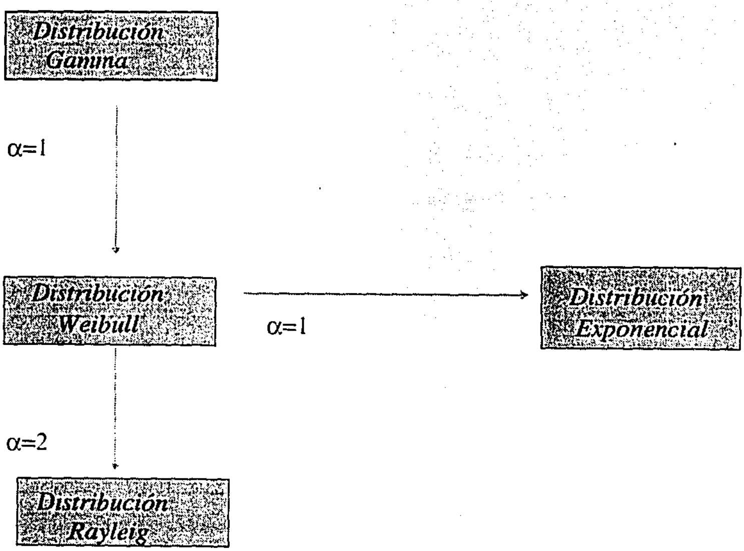
Un ejemplo de ello es si $\alpha<1$, la gráfica de la Distribución tiene forma de *J* transpuesta, y si $\alpha>1$, la función de densidad de Weibull tiene un pico único.

La Curva de Weibull es asintótica a ambos ejes y con una gran tendencia hacia la derecha para valores de α menores que 1; es idéntica a la *Distribución Exponencial* para $\alpha=1$; cuando $\alpha=2$ se genera la *Distribución Rayleig**. Nota: Ver figuras 2.1, 2.2.

* Ver apartado II.III. Casos Especiales de la Distribución Weibull, de este capítulo.

Al establecer $\alpha=1$ en la Distribución Gamma, se determina la Distribución Weibull.

La Distribución Weibull



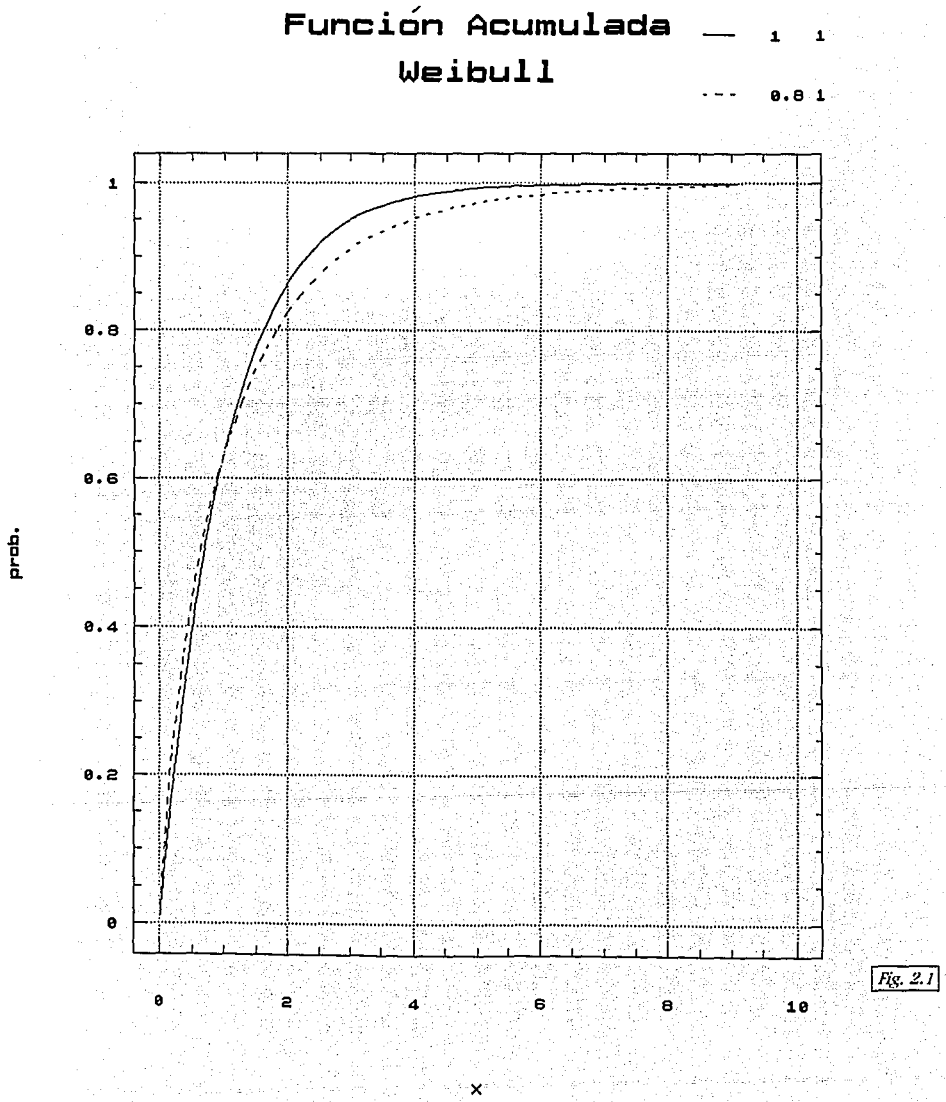

Función Acumulada
Weibull
1 1
0.8 1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
prob.
0
2
4
6
8
10
x

Fig. 2.1

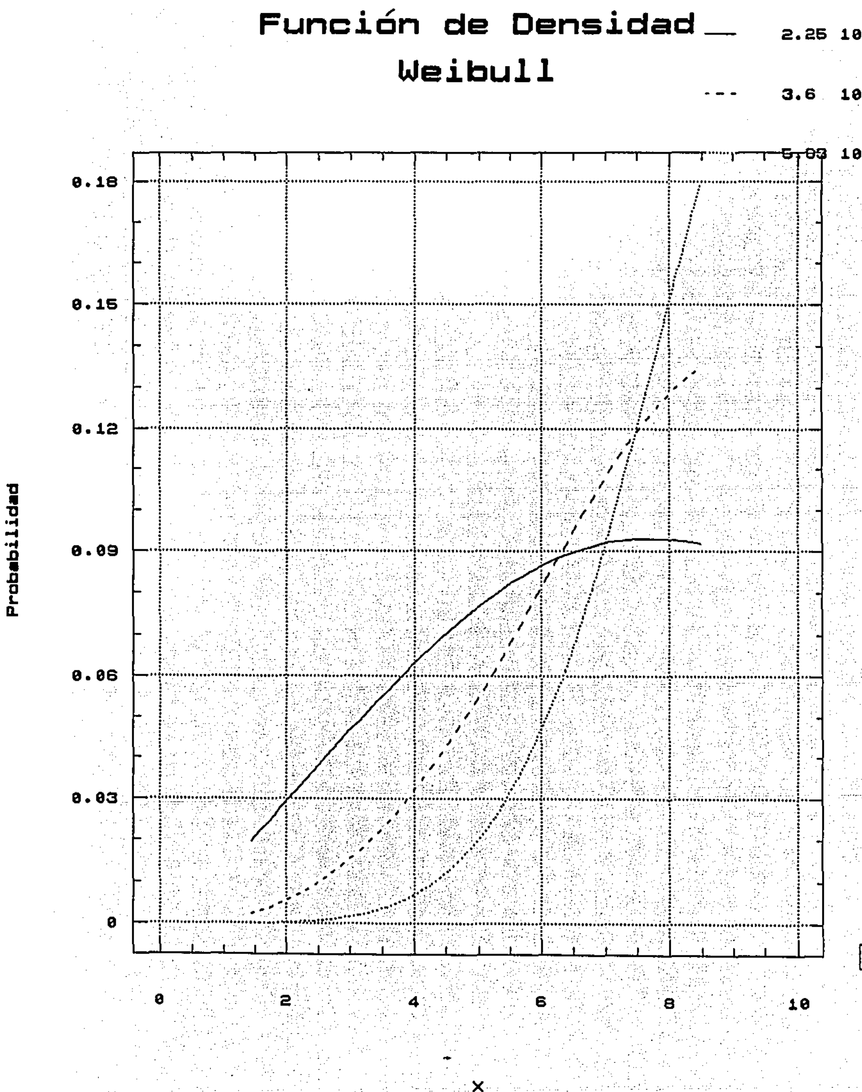

Función de Densidad
Weibull
2.25 10
3.6 10
5.03 10
0.18
0.15
0.12
0.09
0.06
0.03
0
Probabilidad
0
2
4
6
8
10
X

Fig. 2.2

La Función de Distribución de Weibull, está dada por la siguiente expresión:

$$F(t;\alpha,\theta) = \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}\int_0^t x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}} dx \qquad 1.3$$

Llevando a cabo las operaciones necesarias:

$F(t;\alpha,\theta) = e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}} \Big|_0^t$ se obtiene:

$$F(t;\alpha,\theta) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}} \quad t \geq 0 \qquad 1.4$$

La inversa de la Función de Distribución (o probabilidad β) , esta representada por la siguiente expresión :

$$\theta\left[Ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad 1.5$$

DEFINICIÓN 2.1.2 : Para cualquier variable aleatoria ***t***, el valor cuantil t_q de orden q $0 < q < 1$ tal que : $P(t \leq t_q) = q$.

Si una serie de datos se colocan en orden de magnitud, el valor medio o la media aritmética de los dos valores medios, que divide al conjunto de datos en dos partes iguales es la mediana. Por extensión de esta idea se puede pensar en aquellos valores que dividen a los datos en cuatro partes iguales. Estos valores representados por q_1 , q_2 y q_3 se llaman primero, segundo y tercer cuartil, respectivamente; el valor de q_2 es igual a la mediana.

Análogamente los valores que dividen en diez partes iguales se llaman deciles y se representan por d_1 , d_2, d_3, ..., d_9 , mientras que los valores que dividen a los datos en cien partes iguales se llaman percentiles y se representan por p_1 , p_2,..., p_{99} .
El quinto decil y el quincuagésimo percentil se corresponden con la mediana. Los percentiles p_{25} y p_{75} se corresponden con el primer y tercer cuartil respectivamente.

El conjunto, de cuartiles, deciles, percentiles y otros valores obtenidos por subdivisiones análogas de los datos se llaman *cuantiles.*

Por otra parte el valor cuantil de esta distribución t_q está dado por lo siguiente:

$$1-e^{-\left(\frac{t_q}{\theta}\right)^{\alpha}}=q \qquad 1.6$$

Despejando el valor cuantil, obtenemos la siguiente expresión :

$$1-q=e^{-\left(\frac{t_q}{\theta}\right)^{\alpha}}$$

por tanto :

$$t_q=\theta Ln\left[\frac{1}{1-q}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad 1.7$$

En particular *la mediana* de la v.a. que se distribuye como Weibull es:

$$t_{0.5}=\theta \ln\left[\frac{1}{1-.5}\right]^{1/\alpha} \qquad 1.8$$

Por otro lado,

La moda de la Distribución Weibull es:

$$\theta\left[1-\frac{1}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \alpha\geq 1 \qquad 1.9$$

En lo que se refiere a la obtención de los *momentos y factores* de una v.a. con *Distribución Weibull*, estos se encuentran al determinar el *r*-ésimo momento central al rededor de cero .

Según la definición, la *Función Generadora de Momentos* alrededor de cero, está dada por la siguiente expresión:

$$\mu'_r = E(t^r) = \int_{-\infty}^{\infty} t^r f(t)dt \text{ si t es continua} \qquad 1.10$$

Sea T v.a. , al r-ésimo momento central alrededor de cero de T, se define como sigue:

$$\mu_r = E(T - \mu)^r = \sum_t [t - \mu]^r p(t) \qquad T \text{ discreta} \qquad 1.11$$

$$\mu_r = E(T - \mu)^r = \int_{-\infty}^{\infty} [t - \mu]^r f(t)dt \qquad T \text{ continua} \qquad 1.12$$

Obteniendo el r-ésimo momento para la variable aleatoria T, distribuida como Weibull:

$$\mu_r' = E(t^r) = \int_0^{\infty} t^r f(t;\alpha,\theta)dt \quad \textit{resolviendo la integral} \qquad 1.13$$

$$\frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}\int_0^{\infty} t^r e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}} dt$$

$$u = \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}$$

$$t = u^{\frac{1}{\alpha}}\theta$$

$$dt = \frac{\theta}{\alpha} u^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)-1} du$$

sustituyendo

$$= \frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}\int_0^{\infty}\left(\theta u^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{r+\alpha-1} \exp\left[\frac{-u^{\frac{1}{\alpha}}\theta}{\theta}\right]^{\alpha} \frac{\theta}{\alpha} u^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)-1} du$$

$$\mu_r' = \int_0^{\infty} \theta^r u^{\frac{r}{\alpha}} e^{-u} du$$

$$= \theta^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{\alpha}\right) \qquad 1.14$$

a esta función (1.14) se le denomina *función generadora de momentos* de la Distribución Weibull.

Como se sabe el primer momento alrededor de cero es mejor conocido como la media o valor esperado de la v.a. generalmente denotado por.

De esta manera se tiene $\mu_1 = \mu = E(t)$ De la ecuación (1.14) :

La media de la Distribución Weibull, está dada por la siguiente expresión:

$E(T) = \theta\Gamma(1 + 1/\alpha)$ 1.15

Obteniendo el segundo momento central, también conocido como *VARIANZA*:

Sabemos que:

$\mu_2 = VAR(T) = E(T-\mu)^2$ 1.16

$VAR(T) = \mu_2^{2} - \mu^2$ 1.17

Utilizando la Función Generadora de Momentos y las ecuaciones 1.16 y 1.17 se obtiene:

La Varianza :

$$\sigma^2 = \theta^2\Gamma\left[1+\frac{2}{\alpha}\right] - \Gamma^2\left[1+\frac{1}{\alpha}\right]$$

la desviación estándar $\sqrt{\sigma^2} = \left[\theta^2\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^{1/2}$ 1.18 y 1.19

Por otra parte, *el tercer momento central alrededor de cero*, nos representará una medida que está relacionada con la asimetría de la *Distribución*:

Este momento se representa como sigue:

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$ 1.20

El tercer momento central para la Distribución Weibull es :

$$\mu_3 = \theta^3\left[\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right) - 3\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) + 2\Gamma^3\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right] \qquad 1.21$$

Por otro lado, el momento estandarizado está determinado por la siguiente expresión:

$$\alpha^3 = \mu_3/(\mu_2)^{3/2} \qquad 1.22$$

$$\alpha_3(t) = \frac{\Gamma\left(1+3/\alpha\right) - 3\Gamma\left(1+1/\alpha\right)\Gamma\left(1+2/\alpha\right) + 2\Gamma^3\left(1+1/\alpha\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^{3/2}} \qquad 1.23$$

$\alpha_3 > 0$	Existe una asimetría positiva
$\alpha_3 < 0$	Existe una asimetría negativa
$\alpha_3 = 0$	Existe Simetría.

En general los criterios más utilizados para algunas distribuciones son los que se muestran a la izquierda:

El cuarto momento central, llamado también *Curtosis*, nos proporciona una medida de que tan puntiaguda es la distribución de probabilidad, el cual está definido como sigue:

$$\mu_4 = E\,(T - \mu)^4 \qquad 1.24$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\,\mu\mu_3' + 6\,\mu^2\mu_2' - 3\mu^4 \qquad 1.25$$

El cuarto momento estandarizado es:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \qquad 1.26$$

Por tanto el *cuarto momento estandarizado*, para la Distribución Weibull, utilizando las ecuaciones 1.14 , 1.25 y 1.26, esta dado por la siguiente expresión:

$$\alpha_4(t)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{4}{\alpha}\right)-4\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)+6\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-3\Gamma^4\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2} \quad 1.27$$

Para la Curtosis de la distribución de probabilidad, en general se establecen los siguientes criterios:

si $\alpha_4 > 3$, la distribución de probabilidad presenta un pico relativamente alto, y recibe el nombre leptocúrtica.

si $\alpha_4 < 3$, la distribución de probabilidad es relativamente plana y recibe el nombre de platicúrtica.

si $\alpha_4 = 3$, la distribución no presenta un pico ni muy alto, ni muy bajo, y recibe el nombre de mesocúrtica.

Los *momentos tercero y cuarto*, también se conocen como *factores de forma primero y segundo*, respectivamente, de la distribución de probabilidad en cuestión, debido a que en gran medida determinan la forma de la distribución de probabilidad.

La Distribución Weibull *es simétrica* sólo si α =3.6 , si α<3.6 la distribución tiene un *sesgo negativo* y si α> 3.6 , se halla *sesgada positivamente*. Ver figura 2.5 y 2.6.

La *Curtosis Relativa* se encuentra cercana a la Distribución Normal, que es de 3 cuando tiene un valor cercano a 2.25 - 5.83.

De esta manera la *Distribución Weibull* puede aproximarse de manera adecuada por la Distribución Normal cada vez que el factor de forma se encuentre cercano a estos valores.

Una medida que compara la disparidad relativa de dos distribuciones de probabilidad, está dada por el *coeficiente de variación*:

$$V = \sigma / \mu \qquad 1.28$$

El coeficiente de variación representa la magnitud de la dispersidad de una variable aleatoria con respecto a su valor esperado. Por tanto usando (1.28) se obtiene,

el coeficiente de variación para la Distribución Weibull:

$$\left\{ \frac{\Gamma(\alpha + 2)/\alpha}{\left[\Gamma(\alpha + 1)/\alpha\right]^2} - 1 \right\}^{1/2} \qquad 1.29$$

II.I.2 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Uno de los métodos más eficientes para la estimación de parámetros es precisamente el ya conocido *Método de Máxima Verosimilitud.*

La estimación de los parámetros α y θ distribución Weibull , se obtienen mediante dicho método:

Representación de la estimación de los parámetros de forma y escala:

$\hat{\alpha}$

$\hat{\theta}$

Los cuales , se obtienen al resolver las ecuaciones simultáneas:

$$\hat{\theta} = \left[\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\alpha}}\right]^{1/\hat{\alpha}}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\left[\left(\frac{1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\alpha}} \sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\alpha}} Lnt_i - \sum_{i=1}^{n} Lnt_i\right]} \qquad 1.30, 1.31$$

Para resolver este sistema de ecuaciones es necesario hacer uso de los ya conocidos *Métodos Numéricos*, y en particular el *Método de Newton Raphson.*

El sistema de ecuaciones anterior fue descrito y resuelto por el anterior método (*Newton Raphson*) por Prescott y Walden en 1983, los cuales establecieron un algoritmo en lenguaje de programación Fortran.

Otra alternativa de solución al sistema de ecuaciones , es haciendo uso de la *Simulación* y específicamente por medio de el *Método de Monte Carlo.*

En ocasiones para la estimación de parámetros es también es conveniente utilizar el *Método de Mínimos Cuadrados* y *El Método Gráfico de Estimación de Parámetros* [1] .

[1] de el cual se hablará específicamente en el siguiente capítulo

II.II. LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL EN LA TEORÍA DE LA CONFIABILIDAD

II.II.1 EL MODELO WEIBULL EN PRUEBAS DE DURACIÓN DE VIDA

Aunque las pruebas de duración de vida de componentes, durante el período de vida útil de cierto artículo o sistema se basa generalmente en el modelo exponencial, es importante considerar que la tasa de falla de un componente o elemento puede no siempre puede ser constante en el periodo bajo investigación.

El algunas ocasiones, el período de falla inicial puede ser tan grande, que el uso más importante de la componente se presenta durante este período y, en otras ocasiones, el objetivo principal de una prueba de duración de vida puede ser el de determinar el tiempo entre fallas por uso, en lugar de las fallas casuales. En tales casos, el modelo exponencial no se aplica y por tanto, es necesario substituirlo por una hipótesis más general que la de la constante de fallas.

Como se menciono anteriormente, la *Distribución Weibull* describe adecuadamente los tiempos de falla de las componentes o elementos cuando su tasa de fallas aumenta o disminuye con el tiempo.

De la función de Distribución se deduce la *Función de Confiabilidad* asociada con la *Distribución Weibull*, la cual está dada por la siguiente expresión:

Tomando la definición (I.II.1) del capítulo anterior :

$$\boldsymbol{R(t)} = 1 - F(t) = e^{\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}\right]} \qquad 2.1$$

La inversa de la Función de confiabilidad es :

$$\theta\left[Ln\left(\frac{1}{\beta}\right)\right]^{1/\alpha} \qquad 2.2$$

Por medio de el método de máxima verosimiltud•, se obtiene el *estimador de Máxima Verosimilitud* de la Función de Confiabilidad Weibull :

$$\hat{R} = e^{\left[-\left(t/\hat{\theta}\right)^{\alpha}\right]} \qquad 2.3$$

II.II.2 LEY DE FALLAS DE LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL

Suponemos la tasa de fallas asociada con la v.a. T , la cual puede ser representada por la siguiente expresión:

$h(t) = f(t) / R(t)$ [2] ,

por tanto *la tasa de falla para la Distribución Weibull* es:

$$h(t) = \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\theta^{\alpha}}. \qquad 2.4$$

Por otro lado, *la tasa de falla acumulada* esta representada por :

$$\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha} \qquad 2.5$$

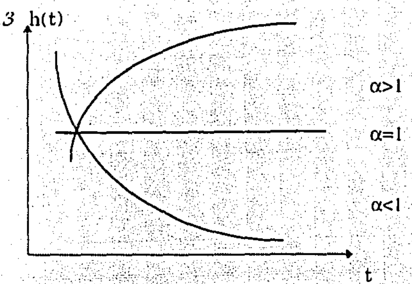
La generalidad de la curva de la tasa de falla, esta determinada por lo siguiente:

Si $\alpha < 1$ la tasa de falla disminuye con el tiempo;
Si $\alpha > 1$ la tasa crece con el tiempo;
Si $\alpha = 1$ la tasa es constante.

Nota : Los puntos anteriores, serán mejor visualizados en la FIG. 2.3

También manipulando los parámetros, (especialmente α) de la tasa de falla, podemos obtener una curva de falla creciente o decreciente.

• Ver método de máxima verosimilitud , capítulo I
2 ver definición de tasa de falla del capítulo I

FIG. 2.3


Gráfica de Proporción de Fallas

También manipulando los parámetros, (especialmente α) de la tasa de falla, podemos obtener una curva de falla creciente o decreciente.
Por tanto :

* Si $\alpha > 1$, la tasa de falla es una función creciente,

* Si $0 < \alpha < 1$, la tasa de falla es una función decreciente,

En general:

* Cuando $\alpha < 1$ la tasa de falla disminuye con el tiempo,
* Cuando $\alpha = 2$ la tasa de fallas aumentalinealmente,
* Si $\alpha > 2$ la tasa de falla aumenta, con un gradiente en ascenso y
* si $\alpha = 1$ la tasa de fallas es constante.

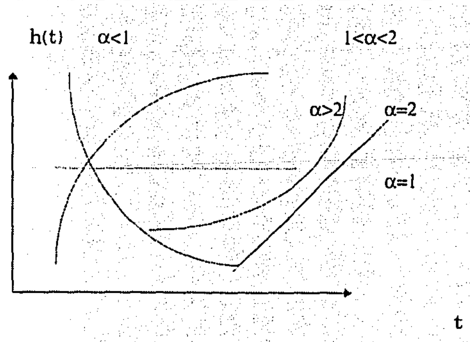
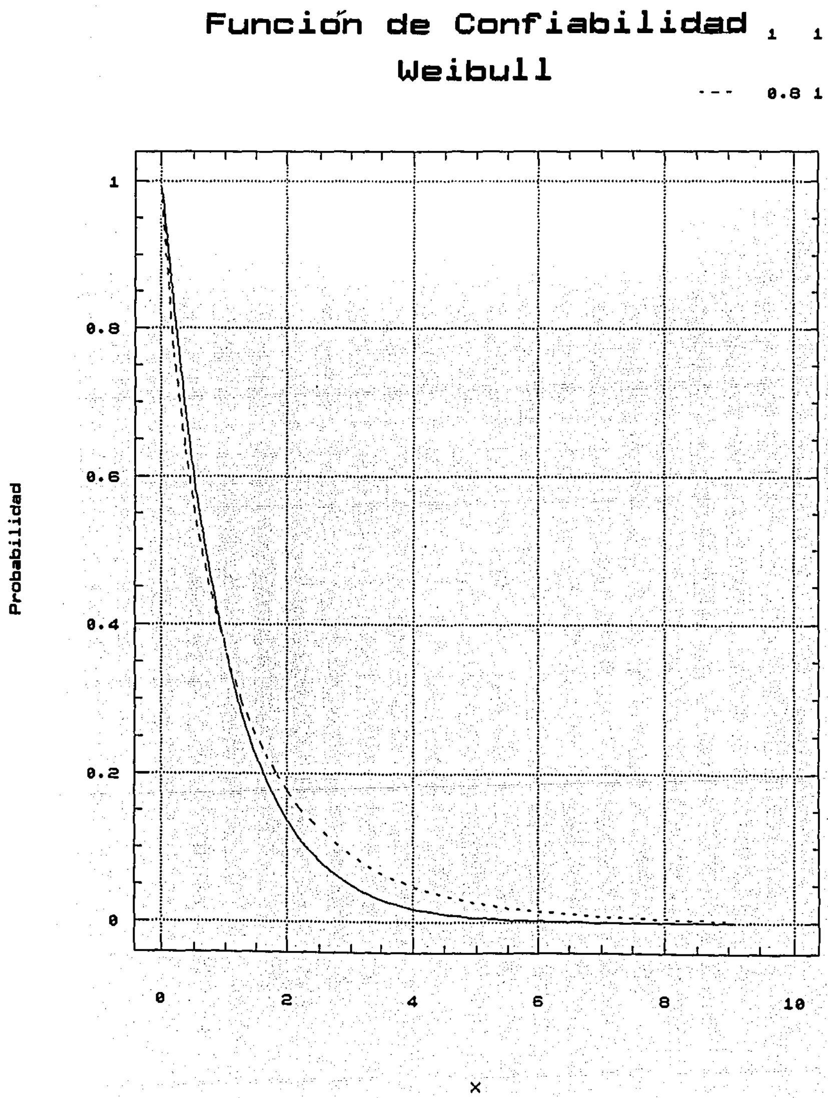
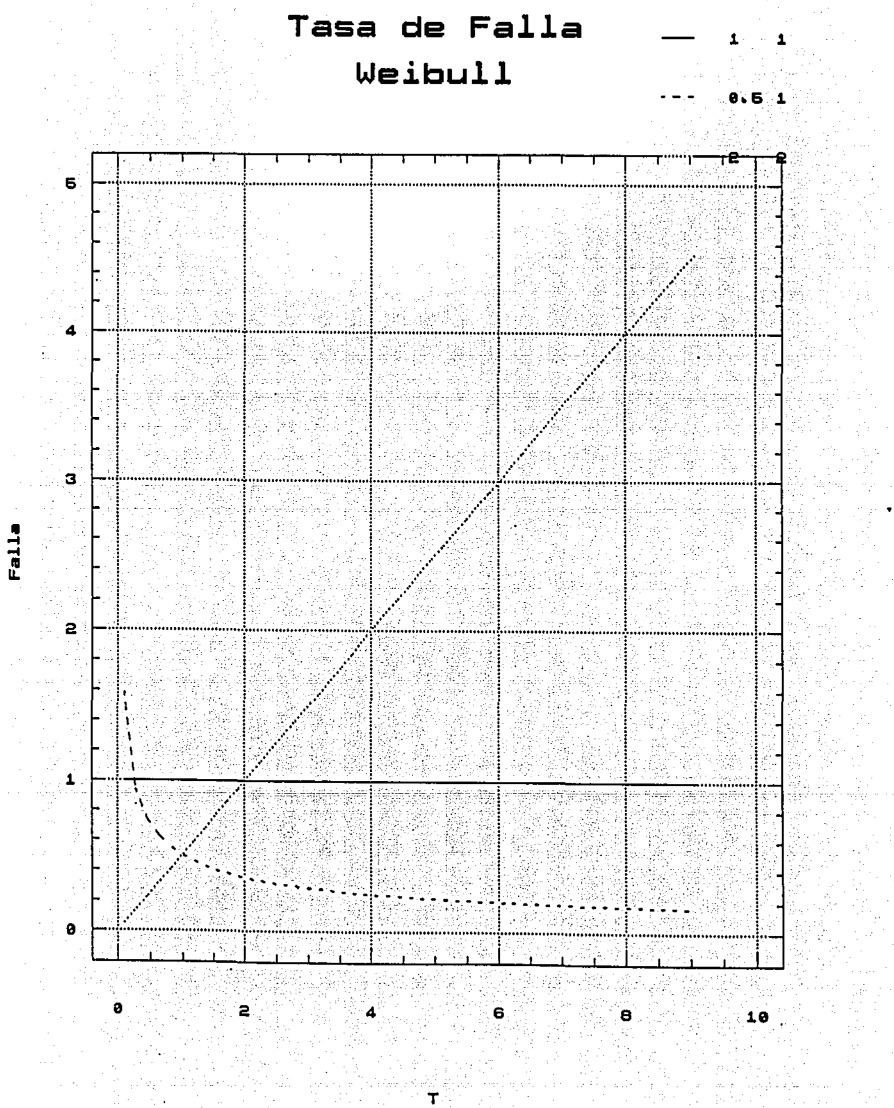


Fig. 2.4

En las siguientes figuras 2.5 y 2.6 se mostrarán las gráficas de la tasa de falla Weibull, así como su función de confiabilidad.


Función de Confiabilidad
Weibull
1 1
0.8 1
Probabilidad
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
10
X


Tasa de Falla
Weibull
1 1
0.5 1
2 2
Falla
T
0
1
2
3
4
5
0
2
4
6
8
10

II.III CASOS ESPECIALES DE LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL

II.III.1 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Como se mencionó anteriormente la *Distribución Exponencial* es un caso particular de la Distribución Weibull, basta con determinar el parámetro $\alpha = 1$ de dicha distribución.

En los estudios de confiabilidad, la *Distribución Exponencial* juega un papel de gran importancia, ya que su principal aplicación estriba en estudios de vida, además de ser un apoyo como una ley de fallas de equipos complejos.

La *Distribución Exponencial* es la distribución más sencilla de las distribuciones utilizadas en la Teoría de la Confiabilidad, las cuales como ya se ha mencionado con anterioridad describen los tiempos de fracaso o falla.

La *Distribución Exponencial*, presenta un índice de fracaso instantáneo constante, es decir, la probabilidad de ocurrencia de fallas en todos los tiempos es constante.

La utilidad primordial de esta distribución se halla principalmente en estudios de tipo masivo. Aún así la aplicabilidad de dicha distribución es un tanto limitada gracias a su propiedad de falta de memoria, esta propiedad requiere que el uso previo no afecte la vida futura, haciendo hincapié que la *Distribución Exponencial* es la única distribución que posee esta propiedad.

DEFINICIÓN 2.3.1: Si una variable aleatoria *T*, tiene una *Distribución Exponencial* , su función de densidad de probabilidad está dada por la siguiente expresión:

$$f(t)=\frac{1}{\theta}e^{[-(t/\theta)]} \qquad 3.1$$

en este caso el parámetro representa el lapso o promedio de tiempo entre dos eventos o fallas independientes de *Poisson*.

Hay una conexión muy próxima entre la ley exponencial de fallas y el proceso de Poisson. Supóngase que la falla ocurre debido a la aparición de ciertos accidentes aleatorios. Estos pueden deberse a fuerzas externas tales como una repentina ráfaga de viento o un aumento de voltaje o por causas internas tales como desintegración química o mal funcionamiento mecánico. Sea X_t el número de accidentes que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t y supongamos que X_t, $t \geq 0$, determina el proceso de Poisson. Es decir para cualquier t fijo, la variable aleatoria X_t tiene la distribución Poisson con parámetro α_t . Supóngase que la falla ocurre en [0,t] y se produce si y sólo si al menos uno de tales accidentes ocurre. Sea T el tiempo para fallar, que supondremos que es una v.a. continua luego, $F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T>t)$.
Ahora T>t si y sólo si ningún accidente ocurre en [0,t] . Esto acontece si y sólo si $X_t = 0$ .Luego

$$F(t) = 1 - P(Xt=0) = 1 - e^{-\alpha t}$$

Esto representa la fda de fallas de la distribución exponencial.

A continuación se mencionan algunas características de esta distribución:

La función Acumulada :

$$F(T \leq t) = F(t;\theta) = 1 - e^{\left[-\frac{t}{\theta}\right]} \qquad 3.2$$

La media de la Distribución Exponencial :

$$E(T) = \theta \qquad 3.3$$

La varianza :

$$VAR(T) = \sigma^2$$

Obteniendo la *Función de Confiabilidad:*

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{[-t/\theta]}. \qquad 3.4$$

La *tasa de falla* se expresa como:

$$h(t) = 1/\theta \qquad 3.5$$ Ver figura 2.5

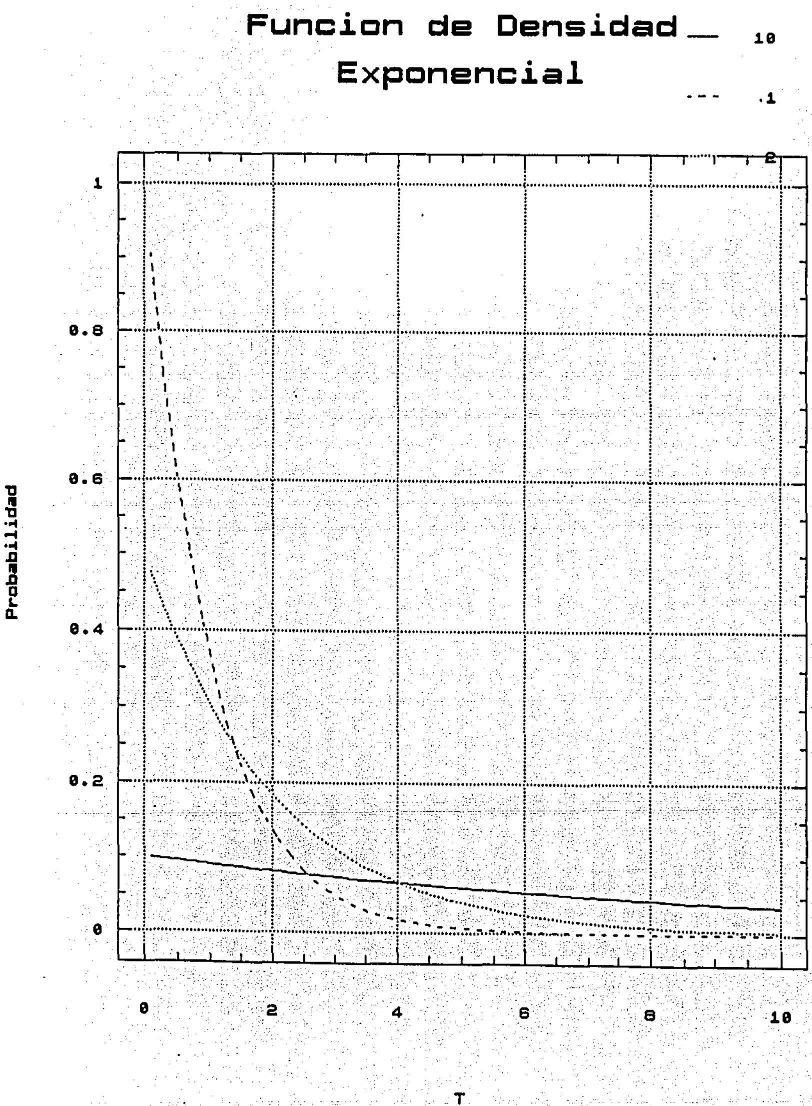

Funcion de Densidad
Exponencial
10
.1
2
Probabilidad
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
10
T

Fig. 2.7

II.III.2 DISTRIBUCIÓN RAYLEIGH

Se halla al establecer el parámetro $\alpha = 2$ y $\theta = \sqrt{2}\,\sigma$, de la Distribución Weibull .

Esta distribución se encuentra en ocasiones al determinar la confiabilidad de elementos complejos.
Una de sus múltiples aplicaciones se encuentra en la representación de el error radical en un avión , en donde los errores de cada eje son independientes y normalmente distribuidos con la misma varianza y media igual a cero.

Otra de las aplicaciones de esta distribución se halla en la teoría estadística de comunicación .

DEFINICIÓN 2.3.2: Si una variable aleatoria ***T***, tiene una *Distribución Rayleigh*, su función de densidad de probabilidad está dada por la siguiente expresión:

$$f(t;\sigma^2) = \frac{t}{\sigma^2} e^{\left[-t^2/_{2\sigma^2}\right]} \qquad t > 0 \qquad 3.6$$

Por tanto la *función de probabilidad* será:

$$F(t;\sigma^2) = \int_0^t \frac{x}{\sigma^2} e^{\left[-x^2/_{2\sigma^2}\right]} dx$$

$$F(t,\sigma^2) = 1 - \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \qquad 3.7$$

$t \rangle 0$

La Función de confiabilidad:

$$R(t) = \exp\left[\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right] \qquad 3.8$$

La *Tasa de Falla*: $$h(t) = \frac{t}{\sigma^2} \qquad 3.9$$

II.IV. DISTRIBUCIÓN DE VALORES EXTREMOS

Las distribuciones de valores extremos , tienen como característica primordial, la determinación de valores máximos y mínimos en muestras de tamaño n.

La falla de un artículo o sistema, en ocasiones está relacionada con fenómenos extremos, que dependen del valor más pequeño o más grande en una muestra de tamaño n.

En general estas situaciones se presentan más comúnmente en pruebas de vida, donde sólo se conoce el valor inicial (mínimo) o el valor final (máximo).

Por ejemplo, suponemos que X representa la resistencia de una cadena de n eslabones, por tanto X_i denota la resistencia del i-ésimo eslabón.

La resistencia de la cadena, es igual a la resistencia del eslabón más débil, por tanto $X = mín(X_i)$, en consecuencia la distribución de X es la distribución de un mínimo.

El problema de las distribuciones de valor extremo, se origina al observar que conjunto de puntos no están fijos, pero son variables estadísticas nuevas que dependen de la distribución subyacente y del tamaño muestral.

En general se han desarrollado tres tipos de distribuciones asintóticas de valor extremo:

1) Distribución asintótica tipo I, para valores máximos o distribución tipo I de valor extremo o distribución Gumbel.

2) Distribución asintótica tipo II, para valores mínimos.

3) Distribución asintótica tipo III, para valores mínimos o Distribución Weibull.
Es el modelo límite conforme el tamaño de la muestra tiende a infinito, para la distribución del menor valor de n valores de varias distribuciones iniciales, cuya característica es la de poseer un límite inferior.

CAPÍTULO III

APLICACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL

La ciencia positiva puede recoger estadísticas
y hacer gráficos. Pero sus predicciones como muy bien
se ha dicho no son más que el retorno de la historia ya pasada.
John Dewey.

CAPÍTULO 3

III.I APLICACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL

El inicio de la aplicabilidad de la *Distribución Weibull*, data aproximadamente de 1951, y actualmente se han establecido estudios más avanzados, descubriéndose aplicaciones cada día más interesantes.

El modelo Weibull es uno de los más populares, utilizado primordialmente en estudios de pruebas de vida.

Si bien muchas fallas son encontradas en la práctica, especialmente aquellas pertenecientes a elementos de aparatos electrónicos. Dichas fallas presentan por lo general un incremento en su tasa de falla, es decir dicha tasa no se mantiene constante como en el caso de la distribución exponencial.

Una de las grandes ventajas de la *Distribución Weibull* es que describe esquemáticamente estas fallas, es decir estas fallas tienen flexibilidad de modelaje por medio de la Weibull.

La *Distribución Weibull* se utiliza ampliamente al valorar la confiabilidad o pruebas de vida, así como el plazo de servicios de los elementos mecánicos , electromecánicos y elementos de equipo radioelectrónico.

Su capacidad de aplicación estriba principalmente en la elaboración de modelos de fallas estructurales.[*]

Un caso particular es la determinación de valores extremos, un campo especial de interés en el estudio de inundaciones y de hidrología general.

Thompon en 1969, discutió otro tipo de aplicación de la Distribución Weibull, con respecto a valores extremos referente al tráfico de flujo, donde la rapidez de los conductores es impedida por un conductor más lento, lo cual ocasiona que el fenómeno tenga la distribución de un mínimo.

Por tanto, el modelo Weibull puede ser sugerido en ocasiones, por consideraciones teóricas, particularmente en lo relacionado a las características de valor extremo.

[*] Ver última sección de este capítulo correspondiente a fallas estructurales.

Recientemente la *Distribución Weibull* ha tomado más auge como una de las distribuciones más populares de entre la familia de distribuciones de fallas.

Entre las aplicaciones más actuales de la *Distribución Weibull*, se han encontrado que el tiempo de vida antes de que una empresa o negocio llegue a la quiebra, se puede modelar de una manera adecuada mediante este modelo.

Probablemente la razón principal para el uso de esta Distribución, es que proporciona un modelo experimental adecuado gracias a sus diferentes características.

Entre las más importantes aplicaciones de la *Distribución Weibull* se han establecido las siguientes :

- Describe un modelo bastante adecuado para los tiempos de vida de tubos de vacío. Esta aplicación data aproximadamente de 1958 y fue aportada por Kao.

- Se utiliza ampliamente para pruebas de vida de componentes tales como, relés* , baleros, capacitores, entre otros.

- La elección de un modelo razonable, ajustado a una *Distribución Weibull*, puede servir específicamente cuando el modelo va a ser utilizado para predicciones.

Como se estableció en el capítulo anterior la *Distribución Weibull*, tiene la capacidad de describir tanto un incremento o decremento en la tasa de falla, haciéndola de esta manera más flexible para poder adecuarse a situaciones más reales.

Una interesante aplicación de la esta distribución es la utilización a fenómenos aleatorios.

Esta utilidad estriba fundamentalmente en el hecho de que, el modelo Weibull, proporciona una aproximación a la ley de probabilidades de variables aleatorias, esencialmente en lo referente a los tiempos de vida de componentes mecánicos y electrónicos.

Es aquí cuando el entra el papel de la *Simulación*.

* Los relés son estaciones de radio o T.V. que transmiten mediante ondas hertzianas las señales recibidas desde la estaciòn principal. También son amplificadores teléfonicos para comunicaciones muy lejanas.

En la *Simulación* de sistemas complejos, se requiere cierto tipo de muestreo que en la práctica puede resultar difícil o inconveniente.

Aunque los datos que nos interesan, aún no ocurran o se presenten, estos pueden obtenerse teniendo un conocimiento previo acerca de la población en que se desenvuelven.

En general el objetivo primordial de la simulación de sistemas, es precisamente el simular estos fenómenos aleatorios, que son generalmente característicos de un sistema de espera.

Para resolver este tipo de problemas o situaciones, se supone, en general una distribución de probabilidad apropiada para cada fenómeno, generando una secuencia de valores aleatorios, los cuales se obtienen habitualmente, ya sea por medio de programas computacionales o software especializado.

Puesto que generalmente, estas secuencias de números aleatorios se generan mediante el empleo de algoritmos numéricos que puedan repetirse varias veces, estas secuencias no son constantes, y en un sentido estricto son números aleatorios o seudoaleatorios.

Sin embargo, estas secuencias proporcionan de una manera suficiente las propiedades aleatorias, para emplearse de este modo con éxito en múltiples aplicaciones.

En seguida se obtendrá la función que genera números aleatorios distribuidos como Weibull.

Sabemos que la función de densidad de probabilidad está dada por la siguiente expresión :

$$f(t,\alpha;\theta)=\frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}t^{\alpha-1}e^{\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}\right]} \qquad \text{...(3.1)}$$

$t \rangle 0$

Para generar números aleatorios Weibull, se resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}\int_{0}^{x} t^{\alpha-1} e^{\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}\right]} dt = u \qquad \text{Ecuación ...(3.3)}$$

$$\left[\frac{\alpha}{\theta^{\alpha}}\right]\left[\frac{-\theta^{\alpha}}{\alpha}\right] e^{\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}\right]_{0}^{x}} = u$$

$$1 - e^{\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha}\right]} = u$$

$$x = \theta\left[\ln\left(\frac{1}{1-u}\right)\right]^{1/\alpha} \qquad \text{Ecuación ...(3.4)}$$

donde para $\alpha=1$

la *Distribución Weibull* se reduce a una exponencial, de esta manera también es posible utilizar la *Distribución Exponencial*, para la generación de secuencias de números aleatorios Weibull.

```
10 INPUT " Introduzca el parámetro de forma : ";ALFA
20 INPUT " Introduzca el parámetro de escala: ";TETA
30 INPUT " Cuántos números aleatorios desea generar ";N
40 FOR SIMU = 1 TO N
50   U = RND
60   Y = LOG(1/(1-U)
70 EXP  = 1/ALFA
80 EXP1 = Y^EXP
90 ALEA = TETA*EXP1
100 PRINT " v.a. ";alea
110 NEXT SIMU
```

Por tanto, la función anterior resulta relativamente sencilla de programar, incluso en lenguaje BASIC.

Generándose el programa de cómputo mostrado a la izquierda.

Por otra parte, también utilizando paquetes computacionales se pueden generar secuencias de números aleatorios de diversas distribuciones de probabilidad.

En este caso se obtuvo una muestra de números aleatorios del paquete estadístico *Statgraphics*. Mostrando de este sus gráficas, así como sus propiedades principales tales como media y varianza, entre otras.

Tabla de números aleatorios $\alpha=1$ $y\ \theta=1$

0.487876	0.320806	2.80198	2.95009	0.122307
0.081325	0.166574	0.238858	0.028015	0.103176
1.40565	0.230708	0.666625	1.29264	3.68837
0.68914	0.311847	1.51742	0.403176	3.90628
0.041661	0.696727	0.627297	2.17178	0.255991
1.75761	1.73949	0.4972	1.90915	1.05797
0.531589	0.154589	1.90579	4..784E'	0.288152
0.252782	0.424249	5.36229	0.395883	0.93198
3.05152	0.096297	0.113275	2.37725	0.233844
0.382022	1.62324	0.379335	1.56699	0.016043
0.863125	1.88885	2.24681	2.51944	0.13258
0.402088	1.94947	0.301731	0.212743	0.580971
0.523197	0.823105	0.081496	0.683676	1.69538
0.035442	0.373096	0.26326	1.8346	0.450779
1.28835	0.024140	2.13653	1.00181	1.01579
2.81166	1.76609	1.4063	1.35488	0.396714
1.67392	1.49333	0.646003	1.88968	2.46646
0.680699	0.374305	0.049044	0.270901	0.402156
0.568926	2.23678	0.627555	1.67772	0.010063
0.059649	0.74701	0.914518	0.10046	0.530048

Tabulación de frecuencias para 100 números aleatorios con parámetros $\alpha=1$ $y\ \theta=1$

clase	límite inferior	límite superior	números	frecuencia	frecuencia relativa	frecuencia acumulada	frec. relac. acumulada
1	-0.300	0.000	-0.150	0	0.000	0	0.000
2	0.000	0.300	0.150	28	0.280	28	0.280
3	0.300	0.600	0.450	21	0.210	49	0.490
4	0.600	0.900	0.750	11	0.110	60	0.600
5	0.900	1.200	1.050	5	0.050	65	0.650
6	1.200	1.500	1.350	6	0.060	71	0.710
7	1.500	1.800	1.650	9	0.090	80	0.800
8	1.800	2.100	1.950	6	0.060	86	0.960
9	2.100	2.400	2.250	5	0.050	91	0.910
10	2.400	2.700	2.550	2	0.020	93	0.930
11	2.700	3.000	2.850	3	0.030	96	0.960
12	3.000	3.300	3.150	1	0.010	97	0.970
13	3.300	3.600	3.450	0	0.000	97	0.970
14	3.600	3.900	3.750	1	0.010	98	0.980
15	3.900	4.200	4.050	1	0.010	99	0.990
16	4.200	4.500	4.350	0	0.000	99	0.990
17	4.500	4.800	4.650	0	0.000	99	0.990
18	4.800	5.100	4.950	0	0.000	99	0.990
19	5.100	5.400	5.250	1	0.010	100	1.000
20	5.400	5.700	5.550	0	0.000	100	1.000

Obteniéndose los siguientes datos estadísticos:

Promedio = 1.00825
Moda = 0.627297
Error Estándar = 0.100658
Mínimo= 4.78429 E^{-3}
Máximo= 5.36229
Cuantil menor = 0.25963
Cuantil mayor = 1.67582

Media = 0.627426
Varianza = 1.01321
Desviación Estándar= 1.00658
Rango= 5.35751
Curtosis = 2.98345
Rango Intercuantil = 1.27865
Coeficiente de Variación= 99.8353

Prueba de Bondad y Ajuste Chi-Cuadrada

límite inferior	límite superior	Frec. Obser.	Frec. Esperada	Chi Cuadr.
antes de	0.300	28	27.6	0.00483
0.3000	0.600	21	18.8	0.25438
0.6000	0.900	11	13.6	0.49955
0.9000	1.200	5	10.0	2.49983
1.2000	1.500	6	7.4	0.26961
1.5000	1.800	9	5.5	2.17875
1.8000	2.400	11	7.3	1.93340
2.4000		9	9.7	0.05740

Chi-Cuadrada = 7.69775 con 5 grados de libertad y un nivel de significancia = 0.173699
∴ Se acepta la prueba

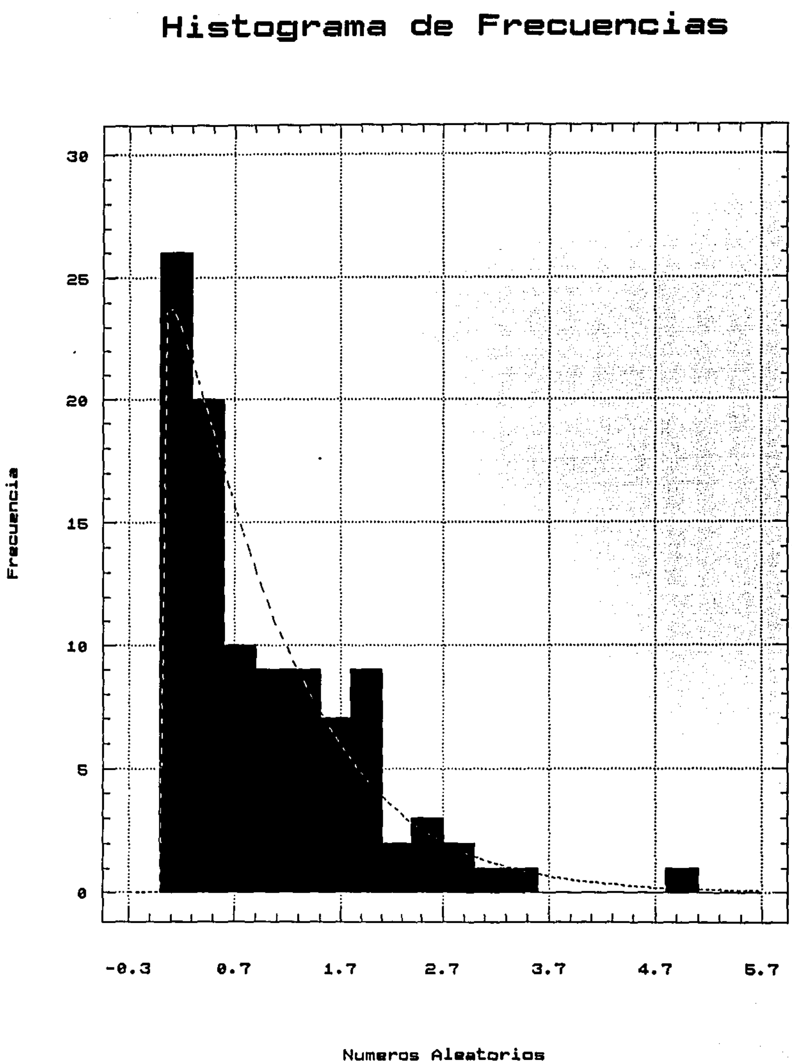

Histograma de Frecuencias
30
25
20
15
10
5
0
Frecuencia
-0.3
0.7
1.7
2.7
3.7
4.7
5.7
Numeros Aleatorios

Fig. 3.1

EJEMPLO 1:

Un fabricante de lavadoras garantiza sus productos contra cualquier defecto durante el primer año de uso normal. El fabricante ha estimado un costo por reparación de N$75 durante el periodo de garantía. Con base en la experiencia, sabe que el tiempo en que ocurre la primera falla es una variable aleatoria de Weibull con parámetros de forma y de escala iguales a 2 y 40, respectivamente. Si el fabricante espera vender 100000 unidades y si, para una misma unidad, se descuenta el valor de las reparaciones, se determina el costo esperado de la garantía para el fabricante.

Sea ***T*** la variable aleatoria que representa el tiempo que transcurre hasta que se presenta la primera descompostura. Por hipótesis, la función de densidad de probabilidad de ***T*** es:

$$f(\,t;\,2,\,40) = \frac{2}{40^2}te^{-\left(\frac{t}{40}\right)^2}$$

$$t > 0$$

La probabilidad de que la primera descompostura ocurra durante el periodo de garantía es igual a la probabilidad de que ***T*** sea menor o igual a la probabilidad de que ***T*** sea menor o igual a 12.
Mediante el empleo de función de distribución acumulada ***F(t)*** , esta probabilidad es :

$$P(T \leq 12\,) = 1 - e^{\left[-\left(\frac{12}{40}\right)^2\right]} = 0.0861$$

Por lo tanto, si se supone que la operación de las lavadoras es independiente entre sí , se pueden esperar (100000)(0.861)=8610 de fallas durante el tiempo de garantía con un costo total de N$645 750.

EJEMPLO 2

Se asume que el tiempo para fallar de un tipo particular de tubo electrónico sigue una *Distribución Weibull* con parámetros de forma y de escala 2 y 8, respectivamente, con el tiempo de prueba expresado en años.

Por tanto la probabilidad de una falla durante los dos primeros años esta dada por:

$$P(\,T \leq 2\,) = F(2;2,8) = 1 - \exp[-(2/8)^2] = 1 - 0.94 = 0.06$$

III.II GRÁFICAS DE PROBABILIDADES Y ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Existen diversas técnicas para evaluar modelos, basadas primordialmente en los datos de nuestra muestra.

El método gráfico, es un tanto subjetivo, ya que en gran medida este método se basa en la observación visual, más que en cálculos estadísticos.

De esta manera, tenemos que decidir que tan razonable es el modelo, determinando posteriormente sus parámetros.

Se ha visto brevemente a lo largo de este trabajo, que si el modelo es el adecuado los puntos se deben de ajustar a una línea recta, de no ser así generalmente se establece que el modelo no es el adecuado, aunque esto en gran medida, también depende de nuestro punto de vista.

Clasificando estos datos recolectados en diversas formas, tales como:

- Cuando se detiene un experimento antes de que todas las unidades fallen, donde solamente se conoce un límite inferior para la falla de las unidades que no fallaron (right-censored);

- Cuando se conoce únicamente un límite superior, para que el tiempo de falla pueda ser conocido, estos datos son por tanto censados a la izquierda (left-censored);

- Sólo se conoce que el tiempo de falla ocurre entre dos tiempos específicos y por tanto se tienen datos censados en un intervalo.

Como se ha establecido con anterioridad los parámetros tienen que estimarse a partir de los datos, o de preferencia, a partir de la teoría subyacente del comportamiento físico involucrado.

Una forma sencilla de estimar α y θ, es mediante el siguiente procedimiento* :

* Estadística para Ciencias e Ingeniería, John B. Kennedy y Adam NL. Nerville, pp. 326-327

Dada la función de confiabilidad $R(t)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}\right]$ esta se puede expresar como: $R(t)=\exp\left[-\gamma t^{\alpha}\right]$ donde $\gamma=\frac{1}{\theta^{\alpha}}$, luego obteniendo el logaritmo natural :

$$\left.\begin{aligned} Ln(R(t)) &= Ln\{e^{-\gamma t^{\alpha}}\} \\ Ln(R(t)) &= -\gamma t^{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad .....(3.4)$$

de tal forma que al obtener el doble logaritmo :

$$Ln[-LnR(t)]=\alpha Ln(t)+Ln(\gamma) \quad ...(3.5)$$

En un experimento real, suponemos una prueba de N elementos de los cuales no se reemplazan los que han fallado.

Si la ***i***-ésima falla ocurre en el tiempo t_i, entonces se puede observar que una estimación no sesgada de la función de distribución acumulada para $t = t_i$ es :

$$F(t_i)=\frac{i}{N+1} \quad ...(3.6)$$

De esta forma si $\boldsymbol{R(t) = 1 - F(t)}$

$$R(t_i)=1-\frac{i}{N+1}=\frac{N+1-i}{N+1}$$

de donde,

$$-\ln(R(t_i))=Ln\left[\frac{N+1}{N+1-i}\right]$$

sustituyendo en la ecuación (3.5) se obtiene:

$$Ln\left[Ln\left(\frac{N+1}{N+1-i}\right)\right] = \alpha Ln(t) + Ln(\gamma) \qquad ...(3.7)$$

Así pues, si se gráfica $Ln\left[\frac{N+1}{N+1-i}\right]$ respecto a t_i en una gráfica log-log , es decir se representa [-ln R(t)], a partir de (3.5), se dice que los puntos experimentales se encontrarán en una línea recta, si la distribución es Weibull.

La pendiente de la recta proporciona la estimación de α , y se puede obtener γ, a partir de ln γ en un valor de t_i que corresponde a

$$Ln\left[\frac{N+1}{N+1-i}\right]=1 \quad y$$

y para obtener el valor de el parámetro de escala, basta con llevar a cabo la siguiente sustitución: $\theta = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

EJEMPLO 3 :

En una gran serie de producción de equipo electrónico de comunicaciones se uso cierto dispositivo para una aplicación crítica.

Se decidió obtener el modelo Weibull para el número de actuaciones antes de que dicho dispositivo falle. Veinte dispositivos fueron sometidos a una prueba de duración de vida , y los siguientes números de actuaciones respecto a la falla que se obtuvieron se presentan en la TABLA 1.

TABLA 1

Número de dispositivo.	Número de actuaciones hasta la falla 10^5
1	3.65
2	8.40
3	9.00
4	5.89
5	9.60
6	6.10
7	11.95
8	4.72
9	12.40
10	3.34
11	18.07
12	8.50
13	13.03
14	11.02
15	6.62
16	1.90
17	7.92
18	20.63
19	4.20
20	13.42

SOLUCIÓN:

- Se jerarquizan* los datos empezando con el número menor de actuaciones: el número de dispositivos probados es $N = 20$,
- Se obtienen los valores de [(N+1)/(N+1-i)] donde ***i*** es la jerarquía de un dispositivo que falla, y el evento mínimo tiene un rango de i=1.

- Se obtuvieron los valores de Ln [(N+1)/(N+1-i)]

los valores resultantes se presentan en la Tabla 2

* Se ordenan los datos en orden de magnitud

TABLA 2

Rango i	actuación	21/ 21-i	ln
1	1.90	1.05	0.049
2	3.34	1.11	0.100
3	3.65	1.17	0.154
4	4.20	1.24	0.211
5	4.72	1.31	0.272
6	5.89	1.40	0.336
7	6.10	1.50	0.405
8	6.62	1.62	0.480
9	7.92	1.75	0.560
10	8.40	1.91	0.647
11	8.50	2.10	0.742
12	9.00	2.33	0.847
13	9.60	2.63	0.965
14	11.02	3.00	1.099
15	11.95	3.50	1.253
16	12.40	4.20	1.435
17	13.03	5.25	1.658
18	13.42	7.00	1.946
19	18.07	10.50	2.351
20	20.63	21.00	3.045

- Los valores de t_i y ln (21/ 21-i) se presentan en forma gráfica en papel rayado " log -log ".

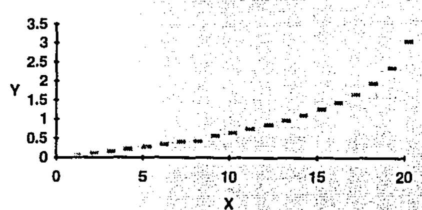
Ver figura 3.2

- Como los puntos graficados quedan casi sobre una línea recta (ajustada visualmente), existen buenas señales de que los datos siguen una Distribución Weibull.

- Obteniendo la pendiente de la recta: $\hat{\alpha}= 1.7$

- Para obtener el estimador de el parámetro γ se requiere una t_i, tal que corresponda a ln [21 /21-i]=1, entonces dada la observación $t= (10.2) * 10^5$

Fig 3.2



- Por tanto, a partir de la ecuación (3.7) sustituyendo y despejando:

ln [ln (N+1 / N+1 -i)] =

$$\alpha Ln(t) + Ln\gamma$$

$$\alpha Ln(10.2 * 10^5) = -Ln\gamma$$

$$1.7 Ln(10.2 * 10^5) = -Ln\gamma$$

$$-\exp[1.7 Ln(10.2 * 10^5)] = \gamma$$

$$\gamma = 6.1007 * 10^{-11}$$

$\therefore$ $\theta=3.9524*10^6$

- Ya determinados los parámetros se pueden definir específicamente ***f(t),*** y la distribución acumulada ***F(t).***[*]

Por tanto se puede estimar, la proporción total de dispositivos

$$f(t;1.7,3.9524*10^6) = \frac{1.7}{(3.9524*10^6)^{1.7}} t^{1.7-1} e^{-\left(\frac{t}{3.9524*10^6}\right)^{1.7}}$$

[*] Ver expresión 1.1 del capítulo II, correspondiente a la función de densidad Weibull

EJEMPLO 4:

Los valores del límite elástico para una cierta clase de acero resultaron ser como los que se presentan en la TABLA 3[i].

Suponiendo que la *Distribución Weibull*, es aplicable, calcular los parámetros adecuados, y comparar los valores esperados y observados mediante la prueba de Bondad y Ajuste χ^2

TABLA 3

rango i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
límite elástico kg./mm	32	33	34	35	36	37	38	39	40	42
frecuencia acumulada	10	33	81	161	224	289	336	369	383	389

SOLUCIÓN:

- La resistencia de el límite elástico mínima es de 30.25 (kg./mm^2 = 1.275) y se emplea como una estimación de L, donde $\hat{L}$ es la estimación.
- Lo anterior se resta de todos los otros valores de el límite elástico observados. Por tanto la expresión para $\boldsymbol{R(t_i)}$ es entonces: $\boldsymbol{R(t_i)} = \dfrac{N+1-i}{N+1} = \dfrac{390-i}{390}$

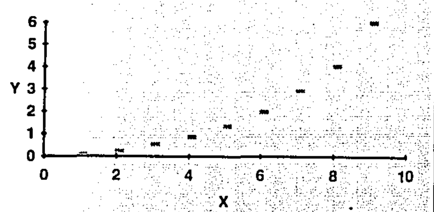
[i]Fuente W. Weibull, "A Statistial Distribution Function of Wide Aplicability", Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, sept. 1951, pp 239-297.

TABLA 4.

LIMITE elastico	ti-l^	frecuencia acumulada	390/390-i	ln
32	1.75	10	1.026	0.026
33	2.75	33	1.092	0.088
34	3.75	81	1.262	0.233
35	4.75	161	1.703	0.532
36	5.75	224	2.349	0.854
37	6.75	289	3.861	1.351
38	7.75	336	7.222	1.977
38	8.75	369	18.571	2.922
40	9.75	383	55.714	4.020
42	11.75	389	390.00	5.966

- Se lleva a cabo la tabulación de los valores, como se muestra en la Tabla 4
- Los valores de (ti-L^) y ln[390/(390-i)] se representan en un papel rayado "log-log", según se muestra en la fig. 3.3

Fig. 3.3



- La pendiente de la línea recta (ajustada a ojo) da un valor aproximado de 2.93 para el parámetro de Weibull α;
- El valor de (t_i- L^) correspondiente a ln [390/(390-i)]=1 el cual corresponde a 6.07x1.275 = 7.74 kg./mm^2.

Por consiguiente, a partir de la ecuación (3.7)

$$\alpha Ln(7.74) = -Ln\gamma \quad \therefore\ \theta=7.728142$$

de donde:

$$\theta = 7.74^{-2.93} = 0.0025$$

A fin de estimar las frecuencias del esfuerzo según lo predicho por la ***Distribución Weibull***, se igualan las dos expresiones para el caso de la función de confiabilidad ***R(t)***.

Por tanto,

$$\exp\left[-\gamma\left(t_i - \hat{L}\right)^{\alpha}\right] = \frac{N+1-i}{N+1}$$

$$\hat{L} = 30.25 * 1.275 = 38.57$$

De modo que,

$$\exp\left[-0.0025\left(t_i-38.57\right)^{2.93}\right]=\frac{390-i}{390}$$

$$-390\left[\exp\left(-0.0025\left\{t_i-38.57\right\}^{2.93}\right)\right]=i-390$$

$$i=390-390\left\{\exp\left[-0.0025\left(t_i-38.57\right)^{2.93}\right]\right\}$$

donde t_i está en kg./mm^2.

- Las frecuencias estimadas se calculan en la Tabla 5

TABLA 5

$((ti-l)'' = T$	γ* T= y	e^y	i estimada
10.501	0.026	0.974	10
39.481	0.099	0.906	37
97.962	0.245	0.783	85
195.820	0.490	0.613	151
342.746	0.857	0.424	224
548.283	1.371	0.254	291
821.862	2.055	0.128	340
1172.813	2.932	0.053	369
1610.380	4.026	0.018	383
2781.992	6.955	0.001	390

Para poner a prueba la hipótesis de que la resistencia del límite elástico observado se ajustan a una ***Distribución Weibull***, se calcula la tabla χ^2 presentada en la Tabla 6.

TABLA 6

E	0	ABS(E-O)	ABS(E-O)^2 / E
10	10	0	0.001
27	23	4	0.475
48	48	0	0.000
66	30	14	2.853
73	63	10	1.495
67	65	2	0.035
49	47	2	0.086
29	33	4	0.497
14	14	0	0.002
7	6	1	0.052

Dado que se tienen nueve clases independientes y se deben estimar tres parámetros de los datos observados, el número de grados de libertad es 9-6=3.

De una tabla correspondiente a la χ^2 se podrá observar que un valor χ^2 de 5.770 para 6 grados de libertad al nivel de 50% , de manera que no se tienen pruebas para rechazar la hipótesis de que la *Distribución Weibull* se ajusta a los datos observados.

III.III MODELOS BASADOS EN LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL

Modelos de mezclado, composición y competencia - riesgo:

En esta sección algunos modelos pueden verse como una distribución de falla general que son originadas por ciertas suposiciones físicas. La razón principal para representar estas distribuciones es la flexibilidad y crecimiento de los datos en la falla.

III.III.1 MODELO DE DISTRIBUCIÓN MEZCLADA

Tal modelo ha sido considerado por investigadores como (Kao 1959, Cohen 1965, Harris y Singpurwalla, 1968), aunque en contextos diferentes. En lugar de una distribución en particular se utiliza un mezcla de 2 o más distribuciones, cada una representa un tipo de falla. Esto es una práctica común para suponer que las distribuciones que están mezcladas pertenecen a alguna familia, pero difieren en los valores de sus parámetros. La distribución normal mezclada considerada por Cohen, es utilizada para aplicarse al estudio de la velocidad del viento y dimensiones físicas de producción de masa de igual característica. La *distribución mezclada de Weibull* por Kao es útil en estudios formales, especialmente al cubrir tubos de electrones.

Dejando $F_x(x)$ ser la función de distribución acumulada de una variable aleatoria x_i, $i=1,2,3,\ldots,k$. Entonces una k ***Función de distribución acumulada (FDA)*** mezclada está definida como:

$$F_x(x)=\sum_{i=1}^{k} p_i F_{x_i}(x), \quad 0 \le p_i \le 1, \text{ y } \quad \sum p_i = 1$$

donde p_i es el parámetro mezclado.

Con frecuencia $F_{xi}(x)$ es entendido como el subconjunto en forma de FDA. Alternativamente , una k función de densidad de probabilidad mezclada está dada por :

$$f_x(x)=\sum_{i=1}^{k} p_i f_{x_i}(x),$$

Donde $f_{xi}(x)$ es el subconjunto en forma de ***Función de Densidad de Probabilidad (FDP).***

Una de las causas para la aplicación de la distribución Weibull mezclada es la que proporciona el siguiente ejemplo:
Considerando las fallas que puediese sufrir un artículo, las cuales se pueden manifestar de la siguiente manera:

- Catastróficos o Espontáneos: Ocurre luego de que el sistema es expuesto al riesgo. Así una distribución Weibull con un parámetro de localización igual a cero y un parámetro de forma $\alpha_1 < 1$ pueden ser un modelo apropiado para describir tales fallas catastróficas.
- Hacia afuera o de Retraso: Ocurre después de que transcurre un periodo de tiempo específico. Esto acontece debido a un componente o sistema ya gastado.
  Así una distribución Weibull con parámetro γ, de posición diferente de 0 y de un parámetro de forma $\alpha_2 > 1$ sería un modelo apropiado para describir tales fallas.

Combinando los dos modelos de fallas, resulta una doble mezcla de la distribución Weibull. Así, el modelo de falla de sistema es:

$$F_x(x) = p\left[1 - \exp\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\alpha_1}\right] + (1-p)\left\{1 - \exp\left[-((x-\gamma)/\theta_2)^{\alpha_2}\right]\right\}$$

para
$\theta_1, \theta_2 \rangle 0, \quad 0 \langle \alpha_1 \langle 1, \ \gamma > 0,$ y $0 \leq 0 \leq 1$

La función de la probabilidad de densidad de Weibull mezclada es fácil de visualizar :

$$f_x(x) = \left(\frac{p\alpha_1}{\theta_1}\right)\left(\frac{x}{\theta_1}\right)^{\alpha_1 - 1} \exp\left(\frac{-x}{\theta_1}\right)^{\alpha_1} + \frac{[(1-p)\alpha_2]}{\theta_2}\left[\frac{(x-\gamma)}{\theta_2}\right]^{\alpha_2 - 1} \exp\left\{-\left[\frac{(x-\gamma)}{\theta_2}\right]^{\alpha_2 - 1}\right\}$$

Acerca del estado de la ecuación para una aplicación, el tiempo de vida de un equipo es un cambio de mezcla de variable dependiendo de la calidad de salida del equipo y su capacidad de resistencia a las severas causas de fallas catastróficas. Los parámetros α_1, α_2, p, θ_1, θ_2 y γ están estimados por los datos de las fallas.

III.III. 2 EL MODELO DE DISTRIBUCIÓN COMPUESTO

La principal razón para considerar un modelo de distribución compuesto es que puede algunas veces poseer flexibilidad en fallas de datos. Desde la estimación de parámetros de una distribución Weibull mezclada.
Una composición de r-componentes de FDA está definida como:

$F_x(x)=F_j(x), \quad S_j\leq x\leq S_{j+1} \quad j=0,1,2,\ldots,r$

Donde $F_j(x)$ es llamada la i-ésima componente de una distribución en forma FDA. Los parámetros S_j son parte de los parámetros de partición. Una r - componente de una distribución Weibull mezclada sería r-1 parámetros de participación. Un r-componente de una FDP se simplifica :

$f_x(x)=f_j(x), \quad S_j\leq x\leq S_{j+1} \quad j=0,1,2,\ldots,r$

donde $fj(x)$ es la derivada de $F_j(x)$.

Para valores pequeños de p y para valores grandes de γ, un segundo modelo de Weibull combinado con el modelo de distribución mezclada puede ser aproximado por un segundo componente de el modelo de falla compuesto. Así:

$$\boxed{\begin{array}{l} F_x(x)=1-\exp\left[\dfrac{-x}{\theta_1}\right]\alpha_1 \\ F_x(x)=1-\exp\left[\dfrac{-x}{\theta_2}\right]\alpha_2 \end{array}} \qquad \begin{array}{l} 0\leq x\leq\delta \\ \delta\leq x\leq\infty \end{array}$$

La partición del parámetro δ puede ser expresada en términos de otros parámetros de δ=x.

MODELO DE COMPETENCIA- RIESGO

El modelo de competencia riesgo fue creado por Makeham (1873) y retomado por Neyman (1950), Coinfield (1957) y Berkson y Elverback(1960), se interesaron principalmente en el análisis de los datos de la mortandad en humanos y animales. Más recientemente , se utilizó potencialmente en las áreas de pruebas de vida y análisis de puntualidad que fue experimentado por Anello (1968). De la misma manera el modelo de distribución combinada, el modelo de competencia- riesgo y el modelo de distribución combinado tienden hacia abajo.

Se supone que un mecanismo que muestra k riesgos de fallas, m_1, m_2, m_3,...,m_k , y que un tiempo de vida aleatorio sobre estos, ocurre como sigue:

Cuando el mecanismo inicia la operación, cada riesgo de falla genera simultáneamente un tiempo de vida aleatorio que es independiente de los otros riesgos. Así, en efecto k tiempos de vida, denotados por x_1, x_2, x_3,...,x_k inicia simultáneamente el tiempo de vida X_i correspondiente i-ésima falla. La falla del mecanismo ocurre pronto como único tiempo de vida, por tanto se dice que X_i se realizó. En efecto si la duración de vida del mecanismo está denotada por una variable X aleatoria, entonces :

$$X= \min (X_1, X_2 , \ldots, X_k) = X(1)$$

Si $F_{xi}(x)$ es la función de distribución acumulada de X_i , la FDA de X, $F_x(x)$ está dada por :

$$F_x(x) = 1 - \prod_{i=1}^{k}\left[1 - F_{x_i}(x)\right]$$

La derivación del modelo de competencia riesgo no es sólo independiente de la forma funcional de $F_{xi}(x)$, pero permite a $F_{xi}(x)$ ser totalmente diferente. En efecto, este medio es que cada modo de falla puede tener cualquier distribución de falla y que todos estos no son necesariamente iguales. Sin embargo, la derivación que se requiere para todos los k riesgos operan independientemente para los otros. Si el modo no opera independientemente el modelo de competencia riesgo tendrá que ser corregido al contar algunas relaciones que existan entre los modos de falla.

La diferencia conceptual entre el modelo de competencia riesgo y el modelo de población mezclada es en la forma en que todos los k riesgos inician generando riesgos posibles que generan un tiempo de vida aleatorio que origina las fallas. La selección de este modo depende del parámetro p_i cuando p_i puede ser precedido a fallar.

La probabilidad de que el mecanismo sobreviva al tiempo x es:

$$1 - F_{x_i}(x) = \exp\left[-\int_0 h_i(S)dS\right]$$

cuando la $\int h_i(S)dS$ es el doble riesgo acumulado aleatorio de riesgo-i al tiempo x.

Decimos que h(s) es la suma de riesgo específico aleatorio independiente la tiempo S , que es:

$h(s) = h_1(s) + h_2(s) + \ldots + h_k(s)$

Más específicamente, si se asume $h_i(s)=h_i$, para toda i y para toda S mayor que cero, entonces:

$h(s) = h_1 + h_2 + \ldots + h_k = h$, dice

La probabilidad de que el sistema sobreviva al tiempo x en el caso de una constante aleatoria de riesgo específico esta dada por:

$1 - F_x(x) = \exp(-hx)$

Para considerar el caso en el cual el riesgo específico aleatorio es una función incrementada del tiempo, deja:

$h_i(S) = \alpha_i \theta_i^{\alpha_i} S^{\alpha_i - 1}$ para todo S>0 $\alpha_i, \theta_i > 0$, $i=1,2,3,\ldots,k$

Retomando todo acerca de la forma de la distribución Weibull, el tiempo S está dado por:

$$h(s) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \theta_i^{\alpha_i} S^{\alpha_i - 1}$$

y la probabilidad de que el sistema sobreviva al tiempo x es:

$$1 - F_x(x) = \exp\left[-\int \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \theta_i^{\alpha_i} S^{\alpha_i - 1} dS\right]$$

si $\alpha_i = \alpha$ para $i=1,2,3,\ldots,k$, la ecuación nos da :

$$1 - F_x(x) = \exp\left[-x^{\alpha} \sum_{i=1}^{k} \theta_i^{\alpha_i}\right],$$

esto implica que, si cada falla k pertenece a una distribución de falla Weibull con algunos parámetros α y un parámetro θi el sistema mostraba una distribución de falla Weibull con parámetro α y un parámetro representativo.

III.IV.1 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Como se mencionó anteriormente existen diferentes metodologías para la estimación de parámetros, y la gran mayoría de ellos basados en el método gráfico de visualización.

El siguiente método es muy parecido al anterior y sirve de base para la confirmación de que un modelo se ajusta adecuadamente a el modelo Weibull, tal como el método de gráficas de residuales.

En principio se define la función empírica de confiabilidad por:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\#\ \text{de observaciones mayores o iguales a } t}{n} \qquad ...(3.20)$$

donde

n - es el número total de observaciones

Esta es una función discreta, no creciente con puntos en tiempos de vida observados, y en general se trata de un estimador no parámetrico*.

Las gráficas basadas en $\hat{\boldsymbol{R}}$, se obtienen siguiendo el siguiente procedimiento:

þ Graficamos $\hat{\boldsymbol{R}}$ contra t_i, donde las t_i (tiempos de vida) han sido colocados en forma ascendente $t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_n$ (no existen observaciones correlacionadas)

por tanto :

$$\hat{\boldsymbol{R}}(t_i) = 1 - (i-1)/n;$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}(t_i+0) = 1 - (i-1)/n - 1/n \qquad ...(3.21)$$

donde: $\hat{\boldsymbol{R}}(t_i+0)$, significa que $\hat{\boldsymbol{R}}$ esta evaluado en el punto inmediato, mayor que t_i.

Ahora, el valor promedio de $\hat{\boldsymbol{R}}$, evaluado cerca de t_i es:

$$1/2\ \{\hat{R}(ti) + \hat{R}(ti+0)\} = 1 - (i-0.5)/n \qquad ...(3.22)$$

* Los estimadores no paramétricos son aquellos que estan libres de una distribución de partida, en estos no se hace hipótesis alguna acerca de la forma exacta de la población en que se obtienen las muestras.

Una *representación gráfica* utilizada para la función de confiabilidad, es graficar, los puntos correspondientes a :

(t_i , 1-p_i) donde:

p_i : posición de la gráfica, y utilizando (3.22)

p_i = i-0.5 / n ...(3.23)

Lo anterior entones significa que debemos graficar la función de confiabilidad empírica mediante los puntos :

(t_i , 1 - (i-0.5)/ n)

Dada la función de confiabilidad, para la *Distribución Weibull:*

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\alpha}}$$

Se obtiene la siguiente expresión:

ln (-ln R (t)) = α **lnt** - α**ln θ** (3.25)

la cual es una representación de la recta.

Por lo tanto, los datos se pueden reducir a un Modelo Weibull, mediante la gráfica:

ln { -ln [1 - [(i-0.5)/n] } contra ln(t_i)

debe ser una aproximación lineal.

Analizando visualmente, obtenemos que la ordenada al origen y pendiente son a_0 y a1, respectivamente, por lo tanto una aproximación a los estimadores de α y θ, son a_1 y exp(-a_0/ a_1)respectivamente (*Método de Mínimos Cuadrados*).

Por (3.25) se pueden por tanto estimar los parámetros de α y θ :

$$\hat{xi} = \ln (t_i)$$

$$\hat{yi} = \ln [-\ln R(t)] = \ln(-\ln(1 - (i - 0.5)/n))$$

$$\hat{\alpha} = a_1$$

$$\hat{\theta} = \exp(-a_0/a_1)$$

de donde :

$$a_0 = \frac{\sum \hat{y}_i \sum \hat{x}_i - \sum \hat{x}_i \left(\sum \hat{x}_i \hat{y}_i\right)}{N \sum \hat{x}_i^2 - \left(\sum \hat{x}_i\right)^2}$$

$$a_1 = \frac{N \sum \hat{x}_i \hat{y}_i - \sum \hat{x}_i \sum \hat{y}_i}{N \sum x_i^2 - \left(\sum \hat{x}_i\right)^2}$$

EJEMPLO 5:

Una muestra de 100 componentes, se someten a una prueba de vida por 500 hrs.
Durante dicha prueba fallaron 12 componentes, donde los tiempos de fallas fueron los siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	21	50	84	95	130	205	260	270	370	440	480

Obtener la recta que se ajuste mejor a los datos, y estimar los parámetros por el método de *Mínimos Cuadrados*.

TABLA 7

i	x_i	x_i^2	y_i	$x_i * y_i$
1	1.7918	3.2104	-3.1568	-5.6563
2	3.0445	9.2691	-2.0134	-6.1299
3	3.9120	15.3039	-1.4541	-5.6884
4	4.4308	19.6321	-1.0647	-4.7174
5	4.5539	20.7378	-0.7550	-3.4382
6	4.8675	23.6929	-0.4892	-2.3813
7	5.3230	28.3344	-0.2483	-1.3215
8	5.5607	30.9212	-0.0194	-0.1076
9	5.5984	31.3423	0.2088	1.1687
10	5.9135	34.9695	0.4502	2.6622
11	6.0868	37.0488	0.7321	4.4561
12	6.1738	38.1156	1.1563	7.1386

El valor de a_0 = -4.9191
El valor de a_1 = 0.9148

total : 57.257 292.578 -6.654 -14.015

Estimación de Parámetros...

La estimación de $\hat{\alpha}$ = 0.9148

La estimación de $\hat{\theta}$ = 216.4850

la recta ajustada a los datos:

$$\hat{y} = -4.919 + 0.915\, x$$

EJEMPLO 6

Veinte motores eléctricos fueron hechos funcionar hasta que se destruyeron, y los tiempos de falla (en horas) se muestran en la tabla 7.

TABLA 8

Número del motor	Tiempos de fallas en horas
1	106.2
2	159.6
3	194.3
4	215.9
5	227.6
6	271.6
7	274.3
8	297.7
9	299.0
10	345.5
11	357.6
12	373.4
13	398.0
14	430.5
15	447.9
16	485.3
17	512.4
18	548.9
19	564.5
20	608.9

Estime los parámetros por el *Método de Mínimos Cuadrados* para que un modelo Weibull ajuste los tiempos de fracaso observados mediante el modelo simplificado sin el parámetro de localización.

Qué proporción de los motores durará más de dos semanas (336 horas) ?

SOLUCIÓN:

- Se jerarquizan los datos empezando con el número menor de actuaciones: el número de dispositivos probados es N=20,

- Se aplica el Método de Mínimos Cuadrados,

TABLA 9

x_i	x^2	y_i	$x^* y_i$
4.6653	21.7652	-3.6762	-17.1509
5.0727	25.7320	-2.5515	-12.9431
5.2694	27.7666	-2.0134	-10.6095
5.3748	28.8886	-1.6483	-8.8594
5.4276	29.4587	-1.3669	-7.4191
5.6043	31.4085	-1.1345	-6.3581
5.6142	31.5195	-0.9338	-5.2428
5.6961	32.4454	-0.7550	-4.3006
5.7004	32.4951	-0.5917	-3.3730
5.8450	34.1639	-0.4395	-2.5689
5.8794	34.5675	-0.2951	-1.7351
5.9227	35.0778	-0.1559	-0.9232
5.9865	35.8376	-0.0194	-0.1159
6.0649	36.7836	0.1168	0.7086
6.1046	37.2658	0.2554	1.5591
6.1848	38.2513	0.3999	2.4732
6.2391	38.9264	0.5556	3.4664
6.3079	38.7998	0.7321	4.6180
6.3359	40.1441	0.9518	6.0303
6.4117	41.1093	1.3053	8.3693

Totales:

$\sum x =$ 115.707 $\sum x^2 =$ 673.397

$\sum y =$ -11.262 $\sum xy =$ -54.375

Estimación de Parámetros...

La estimación de $\hat{\alpha}$ = 2.7067

La estimación de $\hat{\theta}$ = 400.7952

El valor de a_0 = -16.224

El valor de a_1 = 2.7067

La recta ajustada a los datos:

$\hat{y} = -16.722\,6 + 2.702\,x$

- Qué proporción de los motores durará más de dos semanas (336 horas) ?

P(t ≥336)= 1 - P (t≤ 335)= 1- F(335; 2.7067, 400.7952)=

$$= 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{335}{400.7952}\right)^{2.7067}} \right) =$$

$$= e^{-\left(\frac{335}{400.7952}\right)^{2.7067}}$$

$$= 0.5403857$$

III.IV.2 FALLAS ESTRUCTURALES

Otra de las aplicaciones en Confiabilidad, es en el campo de la Confiabilidad Estructural de Sistemas.
La Confiabilidad Estructural de un Sistema es a menudo denominada : confiabilidad resultante del sistema, cuando se ha prefijado su estructura y se conocen los valores de confiabilidad de todas las partes componentes (bloques, elementos, etc.).

- Conexión en Serie : Se muestra el esquema estructural compuesto de partes conectados en serie.

Si los valores de confiabilidad de las partes individuales no dependen entre sí, es decir la avería de una parte del sistema no cambia la confiabilidad de las otras, la confiabilidad del sistema se determina por el producto de los valores de confiabilidad de las partes individuales, ver fig. 3.4.

Fig. 3.4

$$p\Sigma = p_1 p_2 \dots p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Para las confiabilidades de partes individuales que siguen diferentes leyes:

- Para la Distribución Exponencial:

$$p_1 = e^{-\lambda_1 t} \qquad p_2 = e^{-\lambda_2 t} \qquad \dots .$$

- Para la Distribución Weibull:

$$p_n = e^{-\frac{(t-\gamma_n)^{\alpha_n}}{\theta_n}}$$

En este caso, sustituyendo el valor de p_i y tomando logaritmos, tendremos la siguiente expresión:

$$-Ln(p_\Sigma)=\left[\sum_{i=k}^{k-1}\lambda_i t+\sum_{i=k}^{n}\frac{(t-\gamma_i)^{\alpha_i}}{\theta_i}\right]$$

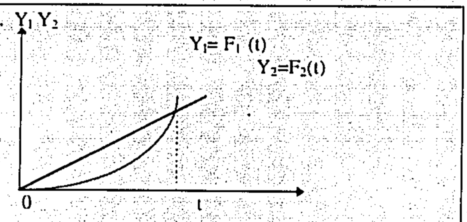
Si se necesita hallar el p_Σ para la magnitud dada, el problema se resuelve sustituyendo en la fórmula obtenida los valores de : λ_i, α_i, θ_i, γ_i, t.
Es más difícil resolver el problema inverso, cuando se ha dado el valor de $p_{\Sigma 0}$ y hay que hallar el plazo de servicio correspondiente a los valores de $p_\Sigma \geq p_{\Sigma 0}$. En el caso dado es necesario calcular y construir las gráficas de las funciones

$$y_i=\sum_{i=k}^{n}\frac{(t-\gamma_L)^{\alpha_i}}{\vartheta_i}=f_1(t)$$

$$y_2=-\ln(p_{\Sigma 0})-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda t=f_2(t)$$

El punto de intersección de las curvas $y_1=f_1(t)$ e $y_2=f_2(t)$ determina el valor buscado de t, ver fig 3.5

fIG 3.5.



CONCLUSIONES

Como se ha podido comprobar, la *distribución Weibull* en general proporciona un modelo estadístico adecuado para modelar diferentes tipos de fallas.

Se han establecido asimismo, varias alternativas para la comprobación de que el modelo que utilicemos para la obtención de la confiabilidad sea el adecuado. Lo importante entonces, es conocer nuevas y mejores técnicas estadísticas, y comprobar que en sistemas reales, estas pueden ser de gran utilidad.

Asimismo, se ha resaltado la importancia que tienen diversas distribuciones de probabilidad, que son poco conocidas en nuestro medio, pudiendo proporcionar de manera adecuada la confiabilidad de un sistema complejo.

Es necesario hacer notar, que el análisis de modelos estadísticos por medio de la distribución Weibull, todavía posee mucho más aplicaciones, tales como el análisis de varianza, análisis de regresión lineal, cálculo de el tamaño de una muestra, y aplicaciones en el campo de la medicina e hidrología. Por tanto, es necesario conocer e investigar este tipo de distribuciones, ya por el gran campo de aplicación estas, nos pueden ayudar a resolver problemáticas más complejas, que utilizando los métodos tradicionales conducen a soluciones inadecuadas.

ANEXO

```
Program OrdenarFalla;

 Uses
  Crt;

  const
  limite = 20;

 Type
  item  = real;
  rango = 1..limite;
  lista = Array [rango] of item;

 Var
  listaitem                    : lista;
  pen,teta,nmas1, maslim,lnnmas1,numitems : real;


 Procedure Leer ( Var a: lista; n: integer);
   Var
    i : integer;
     Begin
     writeln(' Introduzca la lista de valores : ');
      for i := 1 to n do
        Begin
        read(a[i]);
        End;
     End;


Procedure Escribir( Var a: lista; n: integer; nmas1:real;lnnmas1:real );
  Var
   i : integer;
    Begin
    maslim := limite+1;
      for i := 1 to n do
       Begin
        nmas1 := maslim / (maslim-i);
       lnnmas1 := ln(nmas1);
       gotoxy (5,4+i); write(i);
       gotoxy (25,4+i);write(a[i]:2:2);
       gotoxy (45,4+i);write(nmas1:2:2);
       gotoxy (65,4+i);write(lnnmas1:2:3);
      End;
    End;


Procedure Burbuja( Var a: lista; n: integer);
  Var
  i,j          : integer;
  nointercambio : boolean;

      { procedimiento de intercambio }

    Procedure Intercambio ( Var a,b: item);
      Var
       aux : item;
         Begin
         aux := a;
           a := b;
```

```
      b := aux
     End;
 Begin
 for i := 1 to n+1 do
  for j := 1 to n-1 do
    if a[i] < a[j]
    then
    Intercambio (a[i], a[j])
 End;


    { programa principal }

Begin
ClrsCr;
Leer (listaitem, limite);
Burbuja(listaitem, limite);
ClrsCr;
gotoxy (5,3); write('Rango i');
gotoxy (25,3);write('Actuaciones');
gotoxy (45,3);write(limite+1,'/',limite+1,'-i ');
gotoxy (62,3);write('ln (',limite+1,'/',limite+1,'-i) ');
Escribir (listaitem, limite,nmas1,lnnmas1);
Delay(7000);
End.
```

```
Program Mini_Cuadr;

 Uses
  Crt;
 Type
 Matriz = Array [1..100] of real;

 Var
  n,i                          : integer;
  suma,suma1, prod, sumac,a,b,prome,beta : real;
  x,y,xic,produc               : matriz;


  { Procedimiento de Entrada de Datos }

 Procedure Entrada;
 begin
  ClrScr;
  suma:= 0; suma1:= 0; prod:= 0; sumac:=0; prome:=0;
  gotoxy(13,7);write(' Obtenci¢n de la Recta de M¡nimos Cuadrados ');writeln;
  gotoxy(10,9);write('        " Cu ntas componentes son : ' );read(n);
  Clrscr;
  writeln(' Introduzca las componentes: ');
   for i := 1 to n do
   begin
    write(' introduzca t[ ',i,']= ' );read(x[i]);
   end;
end;

  { Procedimiento que calcula el m,todo de m¡nimos cuadrados }

 Procedure Minimos;
  begin
    for i := 1 to n do
    begin
     x[i]  := ln(x[i]);
     suma  := suma + x[i];
    xic[i] := sqr( x[i]);
     sumac := sumac+xic[i];
     y[i]  := ln (-ln (1- ( i-0.5)/n) );
     suma1 := suma1+ y[i];
  produc[i] := x[i]*y[i];
    prod  := prod + produc[i];
    end;
 end;

    { Procedimiento de Impresi¢n de Resultados }

Procedure Imprimir;
 begin
 Clrscr;
  for i:=1 to n do
  begin
   gotoxy (5 ,2 );write('i     xi     xi^2     yi     xi*yi ');
   gotoxy (5 ,3+i);write( i);
   gotoxy (10,3+i);write( x[i]:2:4);
   gotoxy (20,3+i);write( xic[i]:2:4);
   gotoxy (30,3+i);write( y[i]:2:4);
   gotoxy (40,3+i);write( produc[i]:2:4);
  end;
  prome :=suma1/n;
   gotoxy ( 3,(n+5));write(' suma : ',suma:2:3);
   gotoxy (20,(n+5));write(suma1:2:3);
   gotoxy (30,(n+5));write(sumac:2:3);
   gotoxy (40,(n+5));write(prod:2:3);
```

```
b:= ( (n*prod) - (suma*suma1) ) / ( (n*sumac) - (sqr(suma)) );
a:= ( (suma1*sumac) - (suma*prod) ) / ( (n*sumac)- ( sqr(suma) ) );
readln;
readln;
Clrscr;
gotoxy(10,5); write(' El valor de ao: ',a:2:4);
gotoxy(10,7); write(' El valor de a1: ',b:2:4);
gotoxy(10,10);write(' Estimaci¢n de par metros ... ');
gotoxy(10,12);write(' La estimaci¢n de alfa = ', b:2:4);
beta := exp (-a/b);
gotoxy(10,14);write(' La estimaci¢n del par metro teta = ',beta:2:4);
gotoxy(10,18);write(' La recta ajustada a los datos: y^ = ',a:2:3,' + ',b:2:3,'x ');
Delay(7000);
end;

{ Programa Principal }

Begin
Clrscr;
Entrada;
Minimos;
Imprimir;
end.
```

```
Program Chi_Cua;
uses
Crt;
  Type
   Lista = Array [1..100] of real;

Var
t,potencia,a,b,x,r,rl,ea,eb,fo,f,ie,res,resc,ea1 : lista;
alfa, teta,li,y, lim,l,limite,suma          : real;
car                                         : char;
clase, i                                    : integer;

 Procedure Presionar;
  begin
   Gotoxy(10,(12+clase));write('Presione cualquier tecla para continuar ');
    CAR:=READKEY;CAR:=UPCASE(CAR);
    ClrScr;
  end;


  Procedure Introducir;
    Begin
    GotoXY(10,10);write(' Introduzca el n£mero de clases : ');read(clase);
    Presionar;
    GotoXY(10,10);WriteLn(' Introduzca los datos correspondientes a el problema ');
     For i:= 1 to clase do
      begin
      read(a[i]);
      end;
   Presionar;
   Gotoxy(10,10);writeln('Introduzca las Frecuencias Acumuladas ');
   For i := 1 to clase do
    begin
     read(b[i]);
    end;
   Presionar;
   Gotoxy(10,10);writeln(' Introduzca el dato de conversi¢n' );read(li);
   Presionar;Clrscr;
   end;



 Procedure Tabla1;
   Begin
    lim := b[clase] +1;
    GotoXY(10,10);write('Introduzca el l¡mite inferior o m¡nimo ');read(l);
    Presionar;
    Gotoxy(8,1);write('       Tabla De Datos ');
    Gotoxy(8,2);write('L¡mite      ti-1^    frecuencia  ',lim:2:0,'/',lim:2:0,'-i                 Ln ');
    Gotoxy(8,3);write('                        Acumulada ');
    limite:= li*l;
     For i := 1 to clase do
      begin
        x[i] := a[i]-l;
        r[i] :=  (lim)/( lim -b[i]);
        rl[i]:= ln(r[i]);
        GotoXy( 5,3+i);write(a[i]:2:0);
        GotoXy(13,3+i);write(x[i]:2:2);
        GotoXy(35,3+i);write(b[i]:2:0);
        GotoXy(47,3+i);write(r[i]:2:3);
        GotoXy(57,3+i);write(rl[i]:2:3);
     end;
    end;
```

```
Procedure Tabla2;
    Begin
    Presionar;
Gotoxy(10,10);write('Introduzca la Estimaci¢n del par metro alfa ');read(alfa);
Gotoxy(10,12);write('Introduzca la Estimaci¢n del par metro teta ');read(teta);
Presionar;ClrScr;
Gotoxy(8,4);write('(ti-l^)^alfa=T      teta* T= ty        e^ty     i estimada');
    For i :=1 to clase do
     Begin
     ea1[i]:= ((a[i]*li)-limite);
     ea[i] := Exp(ln( ea1[i] )* alfa);
     T[i]  := teta* ea[i];
     r[i]  := exp(-t[i]);
     eb[i] := a[i] *li;
     potencia[i]:=exp( ln(eb[i]-limite)* alfa);
     ie[i] := lim-lim*exp (-teta* potencia[i]);
     Gotoxy( 5,4+i); write(ea[i]:2:3);
     Gotoxy(18,4+i); write(T[i]:2:3);
     Gotoxy(35,4+i); write(r[i]:2:3);
      Gotoxy(54,4+i); write(ie[i]:2:0);
    end;
  end;

 Procedure Tabla3;
  Begin
  Presionar;
  Gotoxy(10,2);write(' Prueba de Bondad y Ajuste Chi- Cuadrada ');
  For i := 1 to clase do
   begin
   fo[i] := b[i] - b[i-1];
   end;
  suma := 0;
  Gotoxy(10,4);write(' E        O        -E- O-        -E- O-^2/E ');
  For i := 1 to clase do
   begin
   f[i] := ie[i] - ie[i-1];
   res[i] := abs( f[i] - fo[i] );
   resc[i] := ( sqr( res[i] ) )/ ( f[i] );
   suma := suma+ resc[i];
   Gotoxy(11,4+i);write( f[i]:3:0);
   Gotoxy(24,4+i);write(fo[i]:3:0);
   Gotoxy(32,4+i);write(res[i]:3:0);
   Gotoxy(41,4+i);write(resc [i]:2:3);
   end;
  Gotoxy(36,5+(clase+2));write(' x^2 = ',suma:2:3);
  Presionar;
  end;


begin
ClrScr;
Introducir;
Tabla1;
Tabla2;
Tabla3;
 End.
```

BIBLIOGRAFÍA

BIBILIOGRAFÍA

Statical Analysis of Finite Mixture Distributions,
Titterington, D.M.,
Ed. J. Wiley, Chichester, 1988
234 pág.

Statical Analysis of Reliability and Life Testing Models
Bann Lee J, Max Englhardt,
Ed. Marcel . Dekker, New York, 1991
477 pág.

Statical Analysis of Reliability Data
M. J. Crowder, A.C. Smith
Ed. Champan an Hall, London, 1991
250 pág.

Statical Distributions
Hastings, N.A.J.
Ed. Wiliy, New York, 1975
130 pág.

Survival Distributions;
Reliability Applications in the Biomedical Sciences,
Ed. Wiley & Sons, New York, 1975
331 pág.

Fundamentos de la Teoría del Cálculo de Fiabilidad de Elementos y Dispositivos de Automatización y Técnicas de Cálculo,
Sotskov, Boris Stepanovich,
*Ed.*Mir, Moscú, 1972
262 pág.

Estadística para Ciencias e Ingeniería
Jonh B. Kennedy & Adam M. Nerville
Ed. Harla, 1982

Probabilidad y Estadística, Aplicaciones y Métodos
C. Canavos, George
Ed. Mc. Graw Hill, 1992
635 pág.

Probabilidad y Estadística para Ingenieros
Miller Irwin,
Freund Jhon E.
Ed. Reverte Mexicana S.A, E.U

Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas
L, Meyer, Paul
Ed. Fondo Educativo Interamericano, México 1980
367 pág.

*Methods for Statistical Analysis of Realiability and Life Data*
Mana V. R. , R.E. Schafor and Sing Porwalla
Ed. Wiley

*Elementos de Probabilidad*
Olivera Salazar, Antonio
Ed. Limusa, México 1987
p.p 48-47

*Theorical Statistics*
D. R. Cox and D.V. Hinklev
pág. 437

*Introducción a la Investigación de Operaciones*
Gerald J. Lieberman
Ed. Mc. Graw Hill, México 1991
915 pág.

*Hanbook of Probability and Statistics with Tables*
Stevens Burington, Richard
Ed. Mc Graw Hill, México 1970
434 pág.

Elementos de Probabilidad y Estadística
Moreno Bonett, Alberto
Ed. Presentaciones y Servicios, México D.F., 1970
245 pág.

An Introduction To Applied Probability
A. Roberts, Richard
Ed. Addison Wesley, E.U.A., 1992
281 pág.

Análisis y Simulación de Sistemas Industriales
R. E. , Taylor
Ed. Trillas, México 1979
639 pág.

Métodos Estadísticos Aplicados
N.M. Dowhie, R. W. Heath
Ed. Harla, México D.F., 1983
366 pág.

Matemáticas de la Fiabilidad
(Fundamentos, Prácticas, Procedimientos)
L. Amstadter, Bertran
Ed. Reverté, Barcelona España
422 pág.