7

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Escuela Nacional de Estudios Profesionales
Acatlán

2e1

APLICACION DEL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS A LA VALUACION DE OPCIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

MA. TERESA CARDENAS TORRES

Asesor: M. en C. Lucio Pérez Rodríguez

Acatlán, Edo. de México 1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA
PROGRAMA DE ACTUARIA Y M.A.C.

SRITA. MA. TERESA CARDENAS TORRES
Alumna de la carrera de Actuaría
P r e s e n t e .

Por acuerdo a su solicitud presentada con fecha 17 de agosto de 1995, me complace notificarle que esta Jefatura tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesis: "APLICACION DEL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS A LA VALUACION DE OPCIONES", el cual se desarrollará como sigue:

INTRODUCCION
CAP. I Teoria de Opciones.
CAP. II Método de diferencias finitas.
CAP. III Valuación de Opciones con el método de diferencias finitas.
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.
APENDICE.
BIBLIOGRAFIA.

Asimismo, fue asignado como Asesor de Tesis el M. en C. Lucio Pérez Rodríguez.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberán prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar Examen Profesional, así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares del trabajo de tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la misma.

E.N.E.P. ACATLAN

A T E N T A M E N T E
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Acatlán, Edo. Méx., diciembre 12 de 1995.

ACT. LAURA MA. RIVERA BECERRA
Jefe del Programa de Actuaría
y M.A.C.

cg'

APLICACION DEL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS A LA VALUACION DE OPCIONES

A mi Familia.

A Julio, siempre.

CONTENIDO

	Lista de Símbolos.	vi
	Lista de Figuras.	viii
	Resumen.	ix
	Abstract.	ix
	INTRODUCCION.	x
Capítulo I.	TEORIA DE OPCIONES.	1
1.1	Conceptos Fundamentales.	1
1.1.1	Opción de Compra (CALL).	1
1.1.2	Opción de Venta (PUT).	3
1.1.3	Prima de la Opción.	4
1.1.4	Tipos de Opciones.	4
1.2	Estrategias Básicas.	5
1.2.1	Cobertura de Riesgos.	5
1.2.1	Especulación.	5
1.3	El Valor de una Opción.	5
1.4	Determinantes del Valor de una Opción.	8
1.4.1	Variables Relacionadas al Activo Subyacente.	8
1.4.2	Variables Relacionadas a las Características de la Opción.	10
1.4.3	Variables Relacionadas a los Mercados Financieros.	11
1.4.4	Variables Relacionadas al Ejercicio Prematuro de la Opción.	11
1.5	Límites del Valor de una Opción.	12
1.5.1	El Concepto de Arbitraje.	12
1.5.2	Límites del Valor de una CALL.	12
1.5.3	Límites del Valor de un PUT.	15
1.5.4	La Paridad PUT-CALL.	16
1.5.5	Posiciones Sintéticas.	18
1.6	Volatilidad.	20
1.6.1	Mercados Eficientes y Volatilidad.	20

1.6.2 Volatilidad Histórica. 21
1.6.3 Volatilidad Implícita. 22
1.6.4 Volatilidad Futura. 24
1.7 Otras Aplicaciones. 24

Capítulo II. METODO DE DIFERENCIAS FINITAS. 25
2.1 Método de Diferencias Finitas. 25
2.1.1 Metodologia. 26
2.1.2 Las Herramientas Básicas. 27
2.1.3 Método de Diferencias Finitas Implícitas. 30
2.1.4 Método de Diferencias Finitas Explícitas. 33

Capítulo III. VALUACION DE OPCIONES CON EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS. 34
3.1 Valuación de Opciones sobre Acciones. 34
3.1.1 Valuación de una Opción de Venta Americana. 34
3.1.2 Valuación de una Opción de Compra Americana. 38
3.1.3 Cuadros Comparativos. 43

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES. 46

BIBLIOGRAFIA. 48

APENDICE. 51

GLOSARIO. 60

LISTA DE SIMBOLOS

Capítulo 1:

Vc : valor de la opción de compra, CALL.

Vp : valor de la opción de venta, PUT.

P : precio de la opción de venta americana, PUT americana.

C : precio de la opción de compra americana, CALL americana.

p : precio de la opción de venta europea, PUT europea.

c : precio de la opción de compra europea, CALL europea.

K : precio de ejercicio de la opción.

S : precio del bien subyacente.

T : fecha de vencimiento.

D : valor presente de los dividendos.

i : tasa de interés.

r : rendimiento.

σ : volatilidad.

ln : logaritmo natural

Capítulo 2

T : fecha de vencimiento.

r : tasa de interés libre de riesgo.

t : fecha de ejercicio de la opción.

f : representa el valor de la opción

Δ : léase como incremento en.

$o|k|$: léase error de orden k.

bda : léase aproximación de diferencias atrasada (backward difference approximation).

fda : léase aproximación de diferencias adelantada (forward difference approximation).

max : léase como máximo de.

∂: léase como parcial de.

∂^2: léase como segunda parcial de.

dz : movimiento browniano con media cero y desviación estándar dt.

N : número de diferencias en el tiempo.

M: número de diferencias en precios de la acción.

f_{ij} : valor de la opción en el punto (i,j).

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 1

Fig. 1.1 Transacciones con una opción de compra, CALL.

Fig. 1.2 Valor de la Opción de Compra, CALL.

Fig. 1.3 Transacciones con una opción de venta, PUT.

Fig. 1.4 Valor de la Opción de Venta, PUT:

Fig. 1.5 Valor de una opción de compra antes de su vencimiento.

Fig. 1.6 Valor de una opción de compra en función del precio del subyacente.

Fig. 1.7 Valor de una opción de venta en función del precio del subyacente.

Fig. 1.8 Factores que influyen en el precio de una opción.

Fig. 1.9 Arbitraje entre opciones.

Fig. 1.10 Opción de venta sintética, PUT sintética.

Fig. 1.11 Opción de compra sintética. CALL sintética.

Fig. 1.12 Distribución normal con diferente volatilidad.

Capítulo 2

Fig. 2.1 Malla para el método de diferencias finitas.

Apéndice

Fig. A.1: Movimientos del precio de la acción en el tiempo Δt.

Fig. A.2: Arbol para valuar la opción sobre la acción.

RESUMEN

El trabajo está enfocado a la presentación del método de diferencias finitas como una alternativa en la valuación de opciones. Se describe el método de diferencias finitas explícitas e implícitas ilustradas con un ejemplo de valuación, así como cuadros comparativos de opciones sobre acciones valuadas con los modelos de Black & Scholes y árboles binomiales. El método converge a los valores de las opciones valuadas con Black & Scholes cuando se aumenta el número de diferencias en precios y tiempo. El modelo de valuación adecuado será entonces aquel que satisfaga las necesidades del inversionistas y las características de los derivados a valuar.

ABSTRACT

This paper suggests the finite difference method like a choice for valuing options. It describes the explicit and implicit finite difference method with examples and comparative tables of stock options, for the valuation used the Black & Scholes model and the binomial tree approach. The finite difference method converges to the Black & Scholes values when increases the number of prices differences and time differences. The method that is chosen in practice is likely to depend on the characteristics of the derivative security being evaluated and the accuracy required.

INTRODUCCION

Un importante segmento de los mercados financieros lo ocupa el mercado de opciones. Aspectos vitales de las finanzas, como la gestión de carteras, la cobertura de riesgos, etc., no se pueden entender sin considerar las posibilidades que ofrecen las opciones. Asimismo, da a los financieros de las empresas métodos alternativos para la valuación de proyectos, posibilidades de financiamiento para las empresas y un nuevo método para la valuación de la firma. Por otro lado, la teoría de valuación de opciones ha revolucionado la teoría financiera moderna, especialmente a partir del desarrollo del modelo básico de valuación de Black & Scholes, el cual ha sido modificado para utilizarlo en diferentes escenarios. Una alternativa a este modelo ha sido el binomial, sin embargo existen otras alternativas para la valuación de opciones que han utilizado métodos numéricos, tal es el caso del método de diferencias finitas, al cual enfocaré este trabajo, con el fin de mostrar un método alternativo para la valuación de opciones, no sin antes hacer una breve introducción a la teoría de opciones.

Debido a la gran importancia que las opciones (en México llamadas warrants[1]) ocupan en los mercados financieros mexicanos y dado que una buena parte de profesionistas, entre ellos actuarios, se desempeñan en el área de las finanzas, he tenido interés en mostrar el método de diferencias finitas para la valuación de opciones, tanto americanas como europeas. Este método fue presentado hace ya casi dos décadas por Brennan y Schwartz, sin embargo los métodos mas utilizados en la valuación son el modelo de Black & Scholes y de árboles binomiales, de ahí mi interés por presentar un método alternativo a los financieros dedicados a la valuación de opciones en instituciones financieras. Por otra parte, el trabajo es de fácil acceso para aquellos que posean conocimientos de matemáticas financieras, álgebra, análisis numérico, programación matemática, ecuaciones diferenciales, estadística y algunos conocimientos de economía. Sin embargo, será de buena utilidad a los economistas, administradores y contadores, o a cualquier profesionista, dedicados a esta área de trabajo, ya que el método es de fácil aplicación.

Planteado ya el objetivo del trabajo, describiré a continuación su contenido. El trabajo incluye cinco apartados. La primera parte del trabajo está constituído por una lista de símbolos, una lista de figuras, tablas y gráficas, un resumen y por último un abstract, las cuales permiten un mejor entendimiento del trabajo, al mismo tiempo que facilita el manejo del mismo. La introducción constituye la segunda parte de este trabajo, la cual describe los objetivos del trabajo y muestra un breve resumen de cada uno de los capítulos que lo conforman. Constituída por tres capítulos está la tercera parte del trabajo. El capítulo I hace una breve introducción a la teoría de opciones, realizando una descripción sobre el tipo de opciones y la clase de estrategias que pueden darse con ellas. Asimismo, se explica lo que es

[1] En México las opciones se conocen como warrants, sin embargo, es necesario explicar que este término en E.U.A. se aplica a aquellas opciones de compra o venta emitidas por las mismas empresas y no por instituciones financieras como en México. Ver término en glosario.

el valor de una opción, los factores que lo determinan y los límites que esta tiene. Por otra parte, se hace una breve descripción de la aplicación que puede tener la teoría de opciones en la valuación de firmas. En el capitulo II se incluye la descipción del método de diferencias finitas como modelo de valuación de opciones, con el fin de mostrar una alternativa a los dos más usados, el modelo binomial y Black & Scholes. El método de diferencias finitas incluye sus formas explícita e implícita. El capítulo III incluirá la valuación de opciones sobre acciones. Asimismo, se hace una comparación de los resultados obtenidos con los que se obtendrían si se valuara con los métodos más comunes. Las conclusiones y recomendaciones constituirán la cuarta parte, la que mostrará las ventajas o desventajas que pueda representar el método de diferencias finitas en la valuación de opciones, así como las sugerencias que se puedan derivar. El quinto apartado está constituído por la bibliografía, un apéndice y el glosario. La bibliografía incluye algunos títulos de textos, revistas y tesis de consulta para el interesado en profundizar en el tema o temas afines. Algunos títulos de tesis aún están en etapa de aprobació. El apédice describe los modelos de valuació de Black & choles y el de áboles binomiales, ambos incluyen un ejercicio, para que el lector pueda tener una mejor comprensió, de tal forma que si no conoce ningú modelo de valuació, el trabajo pueda darle el conocimiento de al menos tres méodos, entre los muchos que hay.

Finalmente, agradezco a todas los profesores que compartiendo sus conocimientos me ayudaron a formar una buena parte de lo que soy, al M. en C. Lucio Pérez R. por aceptar ser mi asesor y darme múltiples recomendaciones, pero sobre todo a Julio, por ser mi motor y ejemplo de superación constante.

M.T.C.
Invierno 1995.

CAPITULO 1

TEORIA DE OPCIONES

El 26 de abril de 1973 comienza a operar el CBOE, Chicago Board Options Exchange, el primer mercado organizado que se crea en el mundo. Los primeros contratos eran contratos de opción sobre lotes de 100 acciones, eligiéndose sólo 16 compañías al comienzo del mercado, sobre las que se podían negociar opciones. El primer día se negociaron 911 contratos. En 1974 se negoció una media diaria de 20,000 contratos. Hoy en día sólo en los mercados americanos se negocian 2,000 contratos de opción por minuto. Desde 1973 hasta hoy se han creado mercados de opciones en las principales plazas financieras del mundo, se negocian opciones sobre una gama amplísima de activos financieros y no financieros y su uso se ha generalizado para todo tipo de agentes económicos.

1.1 Conceptos Fundamentales.

Una opción es un contrato que dá derecho a su tenedor a vender o comprar una cantidad específica de un activo subyacente a un precio determinado (denominado precio de ejercicio) durante un periodo o en una fecha prefijada. Es decir, las opciones incorporan derechos de compra o derechos de venta, por lo que una primera clasificación que se puede realizar es entre opciones de compra u opciones de venta.

1.1.1 Opción de Compra (CALL).

Una opción de compra, CALL option, es un contrato por el que el comprador tiene el derecho, pero no la obligación, de comprar un determinado activo o activo subyacente, a un determinado precio (precio de ejercicio) y en una determinada fecha de ejercicio. El vendedor tiene la obligación de vender el activo subyacente en la fecha determinada y al precio acordado. El comprador paga una prima por este derecho.

	Ahora	Al vencimiento
Comprador de una opción de compra (CALL)	Paga la prima de la opción de compra y tiene el derecho para ejercer.	Si el valor del activo (*S*) es mayor que el precio de ejercicio (*K*), el comprador ejerce. Beneficio bruto = *S* - *K* Beneficio neto = *S* - *K* - prima de la opción de compra.
Vendedor de una opción de compra (CALL)	Recibe la prima de la opción de compra y acuerda entregar el activo al precio de ejercicio si el comprador lo demanda antes de la fecha de vencimiento.	Si el valor del activo es menor que el precio de ejercicio, el comprador no ejerce. Pérdida del comprador = prima de la opción de compra Ganancia del vendedor = prima de la opción de compra.

Fig. 1.1 Transacciones con una opción de compra.

Diagrama de pago

Un diagrama de pago ilustra el pago en efectivo de una opción al vencimiento. Para una CALL, el pago neto es negativo (e igual a la prima pagada por el CALL) si el valor del activo subyacente excede al precio de ejercicio, el pago bruto es la diferencia entre el valor del activo subyacente y el precio de ejercicio, el pago neto es la diferencia entre el pago bruto y la prima de la opción de compra, CALL.

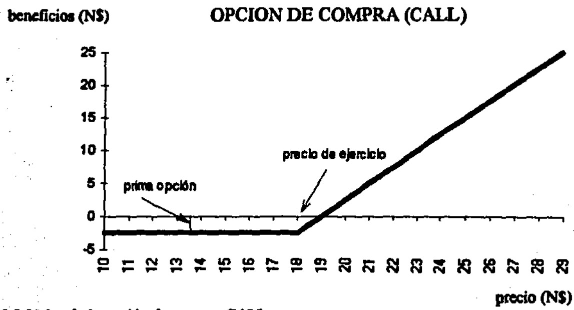


Fig. 1.2 Valor de la opción de compra CALL.

1.1.1 Opción de Venta (PUT)

Una opción de venta, PUT option, dá al comprador el derecho, pero no la obligación, de vender el activo subyacente a un determinado precio y en una fecha establecida. El vendedor de la opción de venta tiene la obligación de comprar el activo en la fecha acordada y al precio acordado si el comprador decide ejercer la opción. El comprador pagó una prima por este derecho.

	Ahora	Al vencimiento
Comprador de una opción de venta, PUT	Paga prima de la opción, PUT, y tiene el derecho para ejercer.	Si el valor del activo (S) es menor que el precio de ejercicio, el comprador ejerce. Beneficio bruto = $K - S$ Beneficio neto = $K - S$ - prima de la opción de venta.
Vendedor del PUT	Recibe la prima de la opción de venta y acuerda comprar el activo al precio de ejercicio si el comprador lo demanda.	Si el valor es mayor que el precio de ejercicio, el comprador no ejerce. Pérdida del comprador = prima de la opción de venta. Ganancia del vendedor = prima de la opción de venta.

Fig. 1.3 Transacciones con una opción de venta, PUT.

Diagrama de pago

Un PUT tiene un pago neto negativo si el valor del activo subyacente excede al precio de ejercicio y tiene un beneficio bruto igual a la diferencia entre el precio de ejercicio y el valor del activo subyacente si el valor del activo es menor que el precio de ejercicio.

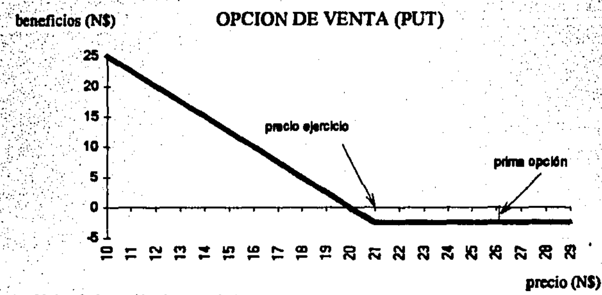


Fig. 1.4 Valor de la opción de venta PUT.

1.1.3 Prima de la Opción

En un contrato de opción, los derechos y obligaciones y, en consecuencia, la posición ante el riesgo del comprador y del vendedor son asimétricos. Así, el comprador tiene el derecho (no la obligación) de comprar o vender, es decir, ejercer la opción en el plazo correspondiente a la misma. Sin embargo, el vendedor sólo tiene obligaciones, en el sentido de que tendrá que vender o comprar si el poseedor de la opción decide ejercerla, y en caso contrario no hará nada. Evidentemente, los compradores ejercerán las opciones cuando la evolución de los precios de mercado del activo subyacente les permita obtener beneficios con el ejercicio. Precisamente estos beneficios del ejercicio de las opciones suponen pérdidas para los vendedores, por lo que el riesgo asumido por ambas partes es muy distinto. ¿Por qué entonces un agente económico vende una opción? La respuesta es simple, porque recibe una compensación monetaria del comprador. Es decir, los contratos de opción tienen un precio (prima) que deberá compensar al vendedor por el riesgo que asume.

1.1.4 Tipos de Opciones

Las opciones se pueden clasificar según el activo subyacente sobre el que se instrumentan. Así, por ejemplo, existen opciones sobre acciones, opciones sobre divisas, opciones sobre tasas de interés y/o instrumentos de deuda, opciones sobre índices bursátiles. Las cuales serán útiles en las estrategias de especulación y cobertura de riesgos para los diferentes inversionistas, según sus necesidades.

1.2 Estrategias Básicas

1.2.1 Cobertura de Riesgos

Las estrategias básicas con opciones incluyen la cobertura de riesgo y la especulación. Con respecto a la cobertura de riesgos, las opciones son el mejor instrumento para cubrir cualquier riesgo de precios. La razón es muy simple, con una opción transferimos el riesgo de pérdida, pero mantenemos las posibilidades de beneficio ante una evolución positiva de los precios. En una economía moderna sólo existen dos instrumentos que permiten esta cobertura, las pólizas de seguros y las opciones. En cambio, con otros instrumentos de cobertura de riesgos, como los futuros y los contratos adelantados o a plazo (forward), transferimos el riesgo de pérdida y también todas las posibilidades de beneficio por un movimiento de los precios a nuestro favor.

1.2.1 Especulación

De forma análoga a la cobertura de riesgos, las opciones son el mejor instrumento para tomar posiciones especulativas ante una previsión de evolución de precios. En la especulación con opciones, los errores de previsión no suponen graves pérdidas, ya que las opciones no se ejercen y el único quebranto que se asume es el precio de la opción pagada.

En otros términos, especulando con opciones limitamos las pérdidas a la prima y dejamos abiertas todas las posibilidades de beneficio si acertamos en la evolución de los precios.

1.3 El Valor de una Opción

Valor Intrínseco y Valor Temporal

El valor de una opción se puede dividir en dos componentes:

- El valor intrínseco
- El valor tiempo, valor temporal o valor extrínseco.

El *valor intrínseco* se puede definir como el valor que tendría una opción en un momento determinado si se ejerciese inmediatamente. Formalmente se calcula por las expresiones:

$$V = \text{Max}\,[\,0, S - K\,] \qquad \text{para un CALL.}$$

$$V = \text{Max}\,[\,0, K - S\,] \qquad \text{para un PUT.}$$

Siendo:

V = valor intrínseco de la opción.
S = precio del activo subyacente.
K = precio de ejercicio.

En función del valor intrínseco, las opciones pueden estar:

Opciones "dentro de dinero" (*in the money*), son aquellas cuyo valor intrínseco es positivo, esto es:

$S > K$ para los CALL

$K > S$ para los PUT

Estas opciones están "dentro de dinero" porque su ejercicio nos dá un beneficio.

Las opciones "en el dinero" (*at the money*) son aquellas cuyo precio de ejercicio coincide con el precio del subyacente:

$S = K$ para CALL's y PUT's.

Su valor intrínseco es nulo y su ejercicio no supone beneficio ni pérdida.

Las opciones "fuera de dinero" (*out the money*) son aquellas cuyo ejercicio implica una pérdida. En términos analíticos:

$S < K$ para las CALL's.

$K < S$ para los PUT's.

Dado que estas opciones no se ejercen, ya que el ejercicio se traduce en pérdidas, si asumimos que el comprador es racional, su valor intrínseco también es cero. Este razonamiento explica la definición de los valores intrínsecos de Max [0, S - K] para las CALL's y Max [0, K - S] para los PUT's.

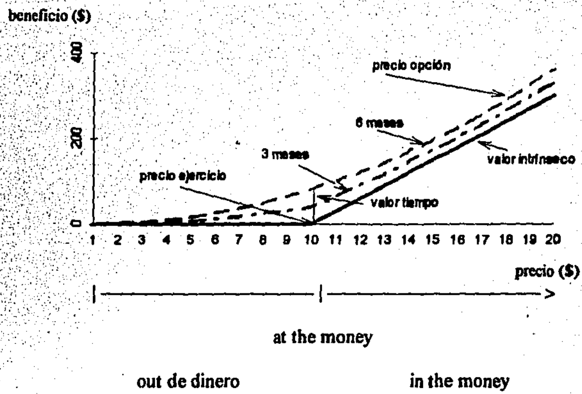


Fig. 1.5 Valor de una CALL antes de su vencimiento.
Fuente: Multinational Financial Management.

El valor de una opción CALL en función del precio del activo subyacente se representa en la fig. 1.5. En dicha figura se observa como dicho valor intrínseco sólo toma valores a partir de precios superiores al precio de ejercicio, y su función es una recta. El valor tiempo viene determinado por la diferencia entre la curva del valor total y la recta del valor intrínseco.

El *valor tiempo* de una opción es simplemente la valuación que hace el mercado de las probabilidades de mayores beneficios con la opción si el movimiento del precio del activo subyacente es favorable. Es decir, el valor tiempo tiene un componente probabilístico, y por consiguiente en su determinación tendrá una importancia decisiva la distribución que se asuma para las variaciones futuras del precio del activo subyacente. Se observará que:

1) Las opciones "fuera de dinero" sólo tienen valor en el tiempo. Es decir, en la determinación del precio los agentes sólo consideran las posibilidades de una evolución favorable (o desfavorable, los vendedores) de los precios del subyacente.

2) Las opciones "dentro de dinero" son las que tienen el menor valor tiempo. Además, conforme la opción está más "dentro de dinero" (mayor valor intrínseco), el valor del tiempo es menor.

3) Las opciones "en el dinero" son las que tienen el máximo valor tiempo.

El valor tiempo de una opción se maximiza cuando $S = K$.

El valor tiempo de las opciones se comporta de este modo, porque cuando valuamos las opciones, asumimos que el mercado es eficiente, es decir, los precios reflejan plenamente toda la información relevante para el correspondiente activo.

Para las opciones PUT, cuando la opción comienza a estar muy "dentro de dinero" el valor tiempo de la opción se anula. Esto se debe a que en el caso de las opciones PUT europeas, el valor tiempo puede llegar a ser negativo. Dado que el valor total de una opción es igual a la suma del valor intrínseco y el valor tiempo, una forma de valuar opciones sería calcular ambos componentes y posteriormente sumar los resultados.

1.4 Determinantes del Valor de una Opción

El valor de una opción está determinada por un número de variables relacionadas al activo subyacente y a los mercados financieros:

1.4.1 Variables Relacionadas al Activo Subyacente

Valor Actual del Activo Subyacente

Las opciones son activos que derivan su valor de un activo subyacente, por lo que, cambios en el valor del activo subyacente afectan el valor de la opción sobre dicho activo. Las alzas de precios del subyacente provocan subidas de las primas de las CALL y descensos de las primas de los PUT, las bajadas de precios tienen el efecto contrario, suben las primas de las PUT y bajan las primas de las CALL. La razón de esta relación es muy simple, si Vc y Vp son los valores intrínsecos de una opción CALL y una opción PUT, respectivamente, considerando su definición:

$$Vc = \text{Max}\,[0, S-K]$$

$$Vp = \text{Max}\,[0, K-S]$$

Un incremento de S, precio del subyacente, aumentará el valor intrínseco de las CALL y reducirá el valor intrínseco de las PUT, y a la inversa. Asimismo, las variaciones del precio del subyacente influyen de forma directa en las expectativas del precio posible al vencimiento de la opción.

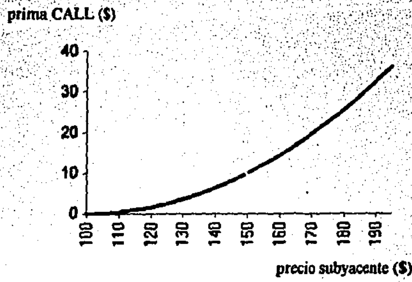


Fig. 1.6 Valor de una CALL en función del precio del subyacente.

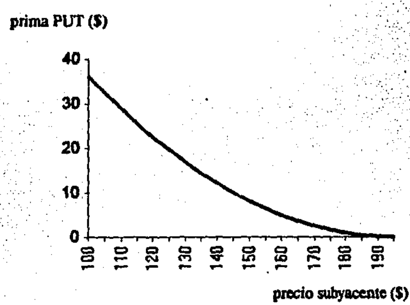


Fig. 1.7 Valor de una PUT en función del precio del subyacente.

Varianza o Volatilidad en el Valor del Activo Subyacente

La volatilidad es una variable crucial en los mercados de opciones, se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente. Estadísticamente es la dispersión del rendimiento del activo subyacente, definiendo como rendimiento a las variaciones del precio. Su efecto sobre las CALL y las PUT es el mismo. Los incrementos de volatilidad producen aumentos de las primas para ambas modalidades de opciones. La explicación de tal efecto es el siguiente:

Cuanto mayor volatilidad tenga el subyacente, el rango de precios al vencimiento de la opción será mayor, lo que implica un riesgo superior para los vendedores de opciones y mayores probabilidades de beneficio para los compradores de opciones. En consecuencia, el mercado de opciones traducirá aumentos de volatilidad en aumentos de precios, y a la inversa.

Esto pudiera no parecer lógico, es decir, que un incremento en una medida de riesgo, como es la varianza, incrementara el valor, pero las opciones son diferentes de otros valores derivados, dado que los compradores de opciones nunca pueden perder más del precio que pagan y además pueden tener significantes rendimientos dado los movimientos en el precio. La volatilidad es el único factor que se desconoce en el momento de estimar precios y realizar transacciones con opciones.

Dividendos Pagados sobre un Activo Subyacente

En un mercado de acciones podemos asumir que los dividendos suponen una reducción de las cotizaciones en la medida que los inversionistas descuentan del precio de cada acción los dividendos repartidos. En consecuencia, dado el impacto desfavorable que tienen sobre el precio del activo subyacente, los dividendos afectarán positivamente al valor de las opciones PUT y de forma negativa al valor de las CALL. En este sentido, el concepto de dividendos que es válido para las opciones sobre accciones e índices bursátiles, debemos traducirlo para otros activos subyacentes. En opciones sobre divisas, el equivalente a dividendo es la tasa de interés de la divisa en cuestión. Esto es, una mayor tasa de interés de la divisa afecta negativamente a las opciones de compra y positivamente a las opciones de venta. Si se trata de opciones sobre bonos, los pagos de cupones de intereses afectan negativamente a las CALL y favorablemente a las PUT. En resumen, los pagos que realice el activo subyacente por diferentes conceptos, en función de su naturaleza, afectan negativamente a las CALL y positivamente a las PUT. Tal afirmación será verdadera siempre que se suponga que estos pagos afecten negativamente al precio del subyacente.

1.4.2 Variables Relacionadas a las Características de la Opción

Precio de Ejercicio de la Opción

Una característica clave que describe la opción es el precio de ejercicio. En el caso de los CALL's, donde el tenedor adquiere el derecho para comprar a un precio fijo, el valor del CALL disminuirá cuando el precio de ejercicio se incrementa. En el caso de los PUT's, donde el tenedor tiene el derecho para vender a un precio fijo, el valor se incrementa cuando el precio de ejercicio se incrementa.

Plazo de Vencimiento de la Opción

Tanto los PUT's como los CALL's llegan a tener mayor valor cuando el plazo de vencimiento se acerca. La longitud del plazo de vencimiento dá mayor tiempo para que el valor del activo subyacente se mueva, incrementándose el valor de ambos tipos de opciones. Hay un efecto adicional sobre el valor de la opción, en el caso de una CALL, donde el comprador tiene que pagar un precio fijo al vencimiento, el valor presente de este precio fijo decrece cuando la vida de la opción se acerca al término, y esto incrementa el valor de la CALL. En el caso de un PUT, el valor presente de las ganancias esperadas a partir de la venta del activo al precio de ejercicio al vencimiento, decrece conforme el plazo de vencimiento se alcanza.

Así, por ejemplo:

- Los compradores de opciones estarán más interesados en tener contratos con mayores plazos de vencimiento, mientras que los vendedores preferirán negociar opciones a muy corto plazo.
- Si un operador posee una cartera de opciones compradas con un plazo corto hasta su vencimiento (menos de tres semanas), debe vigilar permanentemente su cartera y vender rápidamente los contratos, salvo que la evolución del precio del subyacente sea claramente favorable, ya que cada día que pasa erosiona su inversión en opciones.

1.4.3 Variables Relacionadas a los Mercados Financieros

Dado que el comprador de una opción paga el precio de ésta por adelantado, existe un costo de oportunidad envuelto. Este costo de oportunidad dependerá del nivel de tasa de interés y del plazo de vencimiento de la opción. La tasa de interés libre de riesgo también interviene en la valuación de opciones cuando el valor presente del precio de ejercicio es calculado, dado que el precio de ejercicio no tiene que ser pagado (recibido) hasta el vencimiento de los CALL's (PUT's). Incrementos en la tasa de interés generalmente incrementarán el valor de las CALL's y reducirán el valor de los PUT's.

1.4.4 Variables Relacionadas al Ejercicio Prematuro de la Opción

Una opción americana puede ser ejercida en una fecha anterior a su vencimiento, mientras que una opción europea puede ser ejercida solamente en la fecha de vencimiento. La posibidad de ejercer prematuramente hace a las opciones americanas más valiosas que las europeas, pero también hace más difícil su valuación.

A continuación se muestra un cuadro, el indica los cambios que presentan las opciones de compra y venta con respecto a los cambios que presentan sus variables:

Factor	Valor del CALL	Valor del PUT
Incremento en el precio de la acción	Crece	Decrece
Incremento en el precio de ejercicio	Decrece	Crece
Incremento en la varianza del activo subyacente	Crece	Crece
Incremento en el plazo de vencimiento	Crece	Crece
Incremento en la tasa de interés	Crece	Decrece
Incremento en el pago de dividendos	Decrece	Crece

Fig. 1.8 Factores que influyen en el precio de una opción.

1.5 Límites del Valor de una Opción

1.5.1 El concepto de arbitraje

La valuación de cualquier activo financiero, incluyendo las opciones, se puede realizar mediante un enfoque de arbitraje, en este contexto el arbitraje significa simplemente que se pueden obtener beneficios comprando y vendiendo activos, sin tomar riesgos. En un mercado financiero (u otro mercado) eficiente y en equilibrio, los precios de los activos no permiten realizar operaciones de arbitraje.

1.5.2 Limites del Valor de una CALL

El establecimiento de unos límites teóricos al valor de las opciones exige la suposición previa de ciertas hipótesis, que permiten fundamentalmente, que el arbitraje funcione sin trabas. Estas hipótesis son las siguientes:

1) No existen impuestos y costos de transacción.
2) Los activos son completamente divisibles, es decir, podemos comprar 1.65 acciones o vender medio contrato de opción.
3) Se pueden hacer ventas en corto sin límites, esto es, podemos vender una acción sin poseerla previamente con el compromiso de entrega en una fecha posterior.
4) No se exigen depósitos de garantía a la venta de opciones y a las ventas en corto.
5) Se puede prestar y tomar prestado a la misma tasa de interés.
6) Todas las transacciones se pueden realizar de forma simultánea.
7) Las transacciones se realizan sin que afecten a los precios del mercado. Es decir, el mercado tiene una gran "profundidad" y no se ve influído por las transacciones de un agente económico en particular.

Evidentemente, estas hipótesis no se cumplen en su totalidad en los mercados financieros actuales. Ahora bien, generalmente su incumplimiento afecta sólo en el hecho de que los precios de las opciones se alejan ligeramente de sus límites teóricos.

En base a las hipótesis anteriores, los límites del valor de una opción de compra europea expresado como $C(S, K, T)$, donde S es el precio del subyacente, K el precio de ejercicio de la opción y T el plazo de vencimiento, son los siguientes:

- El valor de una opción CALL es siempre mayor o igual a 0.

$$C(S, K, T) \geq 0$$

Una opción sólo tiene derechos y no obligaciones, si el valor fuese negativo, la compra de una CALL supondría una ganancia automática para el comprador. Además, se quedaría con un activo, la opción, que dá posibilidades de mayores beneficios en el futuro. Las personas dedicadas al arbitraje en el mercado, reestablecerían rápidamente el equilibrio comprando todas las opciones que no cumpliesen este límite.

- El valor de una opción de compra, CALL, debe ser mayor o igual que el valor del activo subyacente menos el valor presente del precio de ejercicio menos el valor presente de los dividendos del activo subyacente hasta el vencimiento de la opción.

$$C \geq S - K(1+i)^{-T} - D$$

donde i es la tasa de interés y D el valor presente de los dividendos a pagar por el activo subyacente hasta el plazo de vencimiento de la opción. El incumplimiento de esta condición generaría operaciones de arbitraje que reestablecerían la desigualdad.

- Una opción de compra no puede valer más que el activo subyacente.

$$C \leq S$$

Si $C > S$, vendemos opciones y compramos acciones. Si la ejerzo al vencimiento, gano C-S. Si no la ejerzo, gano el precio de la acción, es decir, los límites del valor de una CALL son:

$$S \geq C \geq \text{Max}\,(0,\ S - K(1+i)^{-T} - D)$$

- La prima de una CALL no puede ser inferior al de otra opción equivalente con un precio de ejercicio superior.

$$C(S, K_1, T) \geq C(S, K_2, T) \geq K_1 \leq K_2$$

Si $C(S, K_1, T) < C(S, K_2, T)$, compro las opciones con un precio de ejercicio K_1 y vendo las opciones con un precio de ejercicio K_2, los posibles resultados se presentan en el cuadro siguiente.

Precios al vencimiento	S^{*}[2] $\leq K_1 \leq K_2$	$K_1 \leq S^* < K_2$	$K_1 \leq K_2 < S^*$
Opción que se ejerce	Ninguna	Precio de ejercicio K_1	Las dos
Beneficio	Diferencia de primas capitalizadas	S^*-K_1 más diferencia de primas capitalizada	K_2-K_1 más la diferencia de primas capitalizada

Fig. 1.9 Arbitraje entre opciones.

- La diferencia de primas de dos opciones CALL no puede ser mayor que el valor presente de sus precios de ejercicio.

$$(K_2 - K_1)(1+i)^{-T} \geq C(S, K_1, T) - C(S, K_2, T) \qquad \text{si } K_2 > K_1$$

- Una opción CALL debe tener un precio superior al de las opciones equivalentes con menor plazo de vencimiento.

$$C(S, K, T_1) \geq C(S, K, T_2) \quad \text{si } T_1 > T_2$$

Como ya se mencionó, el mayor plazo de vencimiento se debe reflejar en un mayor valor de la opción.

Para opciones americanas, la demostración de esta relación es evidente. Si $C(S,K,T_1) < C(S, K, T_2)$, compramos la opción a un plazo de T_1 y vendemos la opción a un plazo T_2. Si en T_2 la opción se ejerce, ejercemos la opción para un vencimiento T_1, ganando el diferencial de primas capitalizado. Si en T_2 la opción no se ejerce, hemos ganado el diferencial de primas y el precio de la opción a T_1 en el momento T_2. Para opciones europeas debemos suponer que los mercados valoran eficientemente las opciones de tal forma que si en T_2 interesa ejercer la opción, $C(S, K, T_1)$ debe ser mayor que su valor intrínseco. Particularmente no se conoce algún mercado donde $C(S, K, T) < S - K$.

[2] S^* es el precio del subyacente al vencimiento de las opciones.

- Si tenemos tres opciones con precios $K_3>K_2>K_1$, el valor de una opción intermedia no debe exceder al valor medio ponderado de las otras dos opciones, de forma que:

$$C(S, K_2, T) \leq \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} C(S, K_1, T) + \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} C(S, K_3, T)$$

Esta relación indica que la prima de una CALL es una función convexa del precio de ejercicio, lo que se puede verificar en las figuras 1.5 y 1.6.

1.5.3 Límites del Valor de un PUT

De forma análoga a las CALL, el valor de las opciones de venta tienen los siguientes límites:

- $P \geq 0$.
- $P(S, K, T) \geq K(1+i)^{-T} + D - S$
- $P(S, K, T) \leq K(1+i)^{-T} + D$. Por tanto, los límites del valor de una PUT son: $K(1+i)^{-T} + D \geq P(S, K, T) \geq \text{Max}(0, K(1+i)^{-T} + D - S)$.
- $P(S, K_2, T) \geq P(S, K_1, T)$ si $K_2 > K_1$. Evidentemente esta relación es la inversa de la correspondiente a una opción CALL.
- $(K_2 - K_1)(1+i)^{-T} \geq P(S, K_2, T) - P(S, K_1, T)$ si $K_2 > K_1$
- $P(S, K, T_1) \geq P(S, K, T_2)$ si $T_1 > T_2$
- $$P(S, K_2, T) \leq \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} P(S, K_1, T) + \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} P(S, K_3, T)$$

1.5.4. La Paridad PUT - CALL

Opciones Europeas

Si consideramos a P y C como los precios de una opción de venta y compra americanas, mientras que p y c son los precios de opciones europeas, las cuales son funciones de S, K, r, T, t y σ. Suponiendo, asimismo que no existe el pago de dividendos, se cumple que:

$$C = c$$

$$P > p \quad \text{cuando} \quad r > 0.$$

Ahora bien, considerando los siguiente dos portafolios:

Portafolio A: una opción de compra europea más un monto en efectivo igual a $Ke^{-r(T-t)}$.
Portafolio C: una opción de venta europea más una acción.

Dado que las opciones son europeas, estas no se pueden ejercer antes del plazo de vencimiento, por lo que los portafolios deben tener valores idénticos el día de hoy, esto es:

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S \qquad (1.5.4.1)$$

Esta relación es conocida como la paridad PUT-CALL, mostrando que el valor de una opción de compra europea con un cierto precio de ejercicio y fecha de vencimiento puede ser derivada a partir del valor de una opción de venta europea con el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento y viceversa.

Opciones Americanas

La paridad se cumple sólo para opciones europeas, sin embargo es posible derivar algunas relaciones para las opciones americanas, considerando que no existe el pago de dividendos.

Dado que P>p, se sigue a partir de (1.5.4.1) que:

$$P > c + Ke^{-r(T-t)} - S$$

y dado que C = c

$$P > C + Ke^{-r(T-t)} - S$$

$$C - P < S - Ke^{-r(T-t)} \qquad (1.5.4.2)$$

Considerando ahora dos portafolios:

Portafolio I: opción de compra europea más un monto en efectivo igual a K.
Portafolio J: opción de venta americana más una acción.

Ambas opciones tienen el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento y suponiendo que el efectivo del portafolio I esta invertido a una tasa de interés libre de riesgo. Si la opción de venta del portafolio J no es ejercida prematuramente su valor en la fecha T será:

$$\max (S_T, K)$$

El valor del portafolio I en la fecha T es:

$$\max (S_T, K) + Ke^{-r(T-t)} - K$$

Por lo que el portafolio I tiene mayor valor que el portafolio J. Suponiendo ahora que la opción del portafolio J se ejerce prematuramente, es decir, en la fecha τ, su valor es igual a K. Sin embargo, si el valor de la opción de compra fuese menor, el valor del portafolio I sería $Ke^{-r(\tau-t)}$ en la fecha τ. Por lo que el portafolio I tiene mayor valor que el portafolio J siempre. Esto es:

$$c + K > P + S$$

dado que $c + C$:

$$C + K > P + S$$

o

$$C - P > S - K$$

combinando con (1.5.4.2) tenemos:

$$S - K < C - P < S - Ke^{-r(T-t)} \qquad (1.5.4.3)$$

El Efecto de los Dividendos

Los dividendos pagados durante la vida de la opción pueden usualmente ser predecidos con razonable certeza. Se usa D para denotar el valor presente de los dividendos durante la vida de la opción. Definiremos otros portafolios para mostrar la paridad.

Portafolio C: una opción de venta europea más una acción.
Portafolio D: un monto en efectivo igual a $D + Ke^{-r(T-t)}$

De dichos portafolios se sigue:

$$p > D + Ke^{-r(T-t)} - S$$

Portafolio E: una opción de compra europea más un monto en efectivo igual a $D + Ke^{-r(T-t)}$.
Portafolio F: una acción.

Dados los portafolio E y F se tiene que:

$$c > S - D - Ke^{-r(T-t)}$$

Ahora bien, comparando el valor en la fecha T de los portafolios E y C se tiene que cuando existen dividendos, la paridad PUT- CALL es:

$$c + D + Ke^{-r(T-t)} = p + S$$

1.5.5 Posiciones Sintéticas

La compra del subyacente más la compra de un PUT equivale a la compra de una opción CALL. Es decir, combinando posiciones en el subyacente con una opción, CALL o PUT, obtendremos otra modalidad de opción.

En otros términos, las opciones se pueden replicar con carteras equivalentes del subyacente y otra modalidad de opciones. Como dicen los operadores de los mercados de opciones, se pueden conseguir posiciones "sintéticas". Por los razonamientos de arbitraje, una CALL sintética debe valer lo mismo que una CALL idéntica adquirida directamente en el mercado. La igualdad anterior se expresa formalmente con la paridad PUT-CALL. En conclusión, se puede enunciar la paridad PUT-CALL diciendo que una opción adquirida directamente en el mercado debe tener el mismo precio que una opción idéntica replicada de forma sintética.

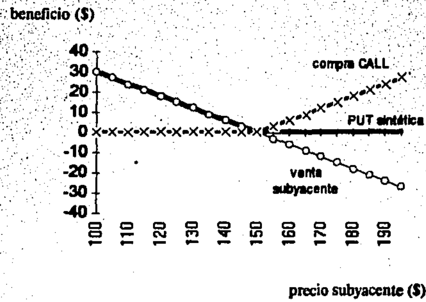


Fig. 1.10 PUT sintética. Esta opcion sintetica se forma con la compra de una CALL más la venta de un activo subyacente, por ejemplo una accion.

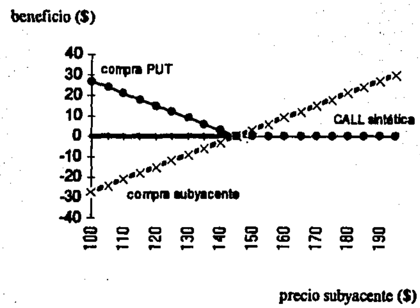


Fig. 1.11 CALL sintética. Esta CALL se consigue con la compra de una opcion de venta (PUT) más la compra de un subyacente, por ejemplo una accion.

Básicamente, las posiciones sintéticas en opciones se construyen considerando:

CALL SINTETICA = PUT + COMPRA SUBYACENTE

PUT SINTETICO = CALL + VENTA DEL SUBYACENTE

Esta posibilidad de "replicar" opciones no sólo es importante de cara a posibles arbitrajes, sino que es útil en el diseño de algunos instrumentos "sintéticos" de cobertura y en la gestión del riesgo de una cartera de opciones.

1.6 LA VARIABLE FUNDAMENTAL: VOLATILIDAD

En los modelos de valuación de opciones siempre aparece un parámetro desconocido, la volatilidad, que influye notablemente en el precio. Evidentemente la volatilidad tiene gran importancia para los modelos de valuación de opciones y asimismo para los operadores de un mercado de opciones, pues éstos se interesan en la dirección de los precios del subyacente y en la "velocidad" de los movimientos del subyacente. Esta "velocidad" es la volatilidad. Como indica Natemberg, si los precios de un subyacente no se mueven con la suficiente rapidez, las opciones sobre dicho subyacente valdrán poco dinero ya que disminuyen las posibilidades de que el mercado cruce los precios de ejercicio de las opciones. Los mercados cuyos precios se mueven lentamente son mercados de baja volatilidad; los mercados cuyos precios se mueven a gran velocidad son mercados de alta volatilidad. Si el subyacente es poco volátil, los agentes que acuden al mercado a cubrir riesgos no tendrán ningún incentivo para comprar opciones. Por otra parte, la especulación con opciones no tiene ningún sentido en un mercado de baja volatilidad. Es decir, las opciones y la volatilidad están íntimamente unidas. De hecho, dado que los operadores más profesionales especulan sobre los valores futuros de la volatilidad podemos definir a un mercado de opciones como un mercado de volatilidad.

1.6.1 Mercados Eficientes y Volatilidad

En la mayoría de los modelos de valuación de opciones se asume la hipótesis de un mercado eficiente para el subyacente. Esto significa que los precios del activo subyacente incorporan automáticamente toda la información relevante sobre dicho subyacente.
Si el mercado es eficiente, la variación de los precios será totalmente aleatoria ya que se producirá sólo cuando aparezca nueva información en el mercado, y este fenómeno, la

aparición de nueva información, es también aleatorio. Por esto se dice que en un mercado eficiente los precios siguen un "random walk" (caminata aleatoria). El significado de esta hipótesis se comprende fácilmente en base al ejemplo propuesto por Natemberg. Los precios en un mercado eficiente tienen un comportamiento similar al de las "bolas" de la típica máquina de pinball. Cada vez que accionamos el muelle de la máquina la bola sale disparada por el tablero y caerá en cualquier agujero final en función de las colisiones que tenga con los diferentes obstáculos construídos sobre el tablero. Después de muchas tiradas de varias bolas, la distribución de las mismas se aproximará a una distribución normal. Por otra parte, la mayor o menor intensidad de los movimientos de los precios generará una distribución más o menos volátil (fig. 1.12).

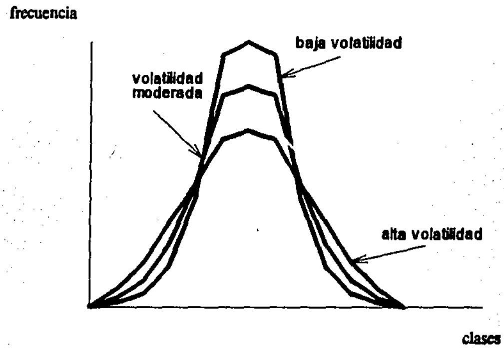


Fig. 1.12 Distribuciones con diferente varianza o volatilidad.

En una distribución normal, y en general en cualquier variable aleatoria, el nivel de dispersión de los valores posibles de la variable lo podemos medir por la varianza o desviación estándar. En el caso del subyacente de una opción, la dispersión de los precios posibles al vencimiento se corresponde con la volatilidad de dicho subyacente. En términos más precisos, la volatilidad la podemos asociar a la desviación estándar de las variaciones de los precios del subyacente. Además, si seguimos con nuestra hipótesis de mercado eficiente, estas variaciones seguirán una distribución normal.

1.6.2 Volatilidad Histórica

Una primera aproximación a la estimación de la volatilidad del subyacente es analizar cual ha sido su volatilidad en el pasado. A la volatilidad de un activo subyacente calculada según series históricas de precios se denomina volatilidad histórica. El cálculo de la volatilidad histórica se puede realizar de dos formas:

- En base a los precios de "cierre" del subyacente.
- En base a los precios "máximo" y "mínimo" registrados en las diferentes sesiones de negociación del subyacente en el periodo de cálculo.

El primero es el más utilizado en los estudios académicos de los mercados de opciones y por los profesionales que negocian estos instrumentos. El rendimiento del activo subyacente se calcula:

$$r_t = \ln (S_t / S_{t-1})$$

donde:

r_t = rendimiento del subyacente de t-1 a t.
S_t = precio de cierre del subyacente en la fecha t.
S_{t-1} = precio de cierre del subyacente en la fecha t-1.

La utilización de logaritmos convierte la variación de precios (S_t / S_{t-1}) en una tasa de rentabilidad continua que es la más apropiada para los modelos de valuación de opciones. A partir de la serie de r_t calculamos la media y la varianza de los rendimientos mediante:

$$r = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_t}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} (r_t - r)^2$$

donde n es el número de datos utilizados en los cálculos, r la media y sigma cuadrada la varianza. La desviación nos dará una estimación de la volatilidad histórica en términos del periodo elegido para calcular rt, es decir, si rt se calcula en base semanal, sigma será la volatilidad histórica en términos semanales, etc.

1.6.3 Volatilidad Implícita

La volatilidad implícita se obtiene de los modelos de valuación, donde la incógnita será sigma y la prima de la opción será un dato. El cálculo de la volatilidad implícita exige primero, la selección del modelo de valuación que pensamos se utiliza por la mayoría del mercado. En segundo lugar, cada opción tendrá una determinada volatilidad implícita, lo que exige calcular la volatilidad implícita para cada serie de opciones en los mercados organizados.

La volatilidad implícita refleja las expectativas del mercado sobre la volatilidad del subyacente hasta el vencimiento de la correspondiente opción. Esto explica que también se la denomine "volatilidad del mercado". La volatilidad implícita cambia continuacmente en función de las alteraciones de las primas, el precio del subyacente, etc. Realmente es el auténtico precio de los mercados de opciones. Así, algunos especialistas de los mercados de opciones suelen denominar a esta volatilidad "nivel de las primas". Si la volatilidad implícita está por encima de sus valores históricos, dirán que el nivel de primas del mercado es alto y a la inversa. Por ellos, muchos agentes intentan predecir los niveles de las volatilidades implícitas en el futuro. Esta predicción se puede realizar con el típico análisis técnico, o utilizando modelos estadísticos y econométricos más sofisticados. Dada la importancia del análisis de la volatilidad implícita, conviene obtener un dato de volatilidad para cada subyacente y vencimiento en periodos regulares de tiempo (día, apertura, cierre, etc). El problema se plantea, de cara a análisis empíricos, en la selección de la volatilidad implícita de cada momento del tiempo (p.e. al cierre diario del mercado) que vamos a utilizar. En un mercado organizado de opciones, para un determinado vencimiento existirá una volatilidad implícita diferente para cada precio de ejercicio cotizado. Una solución a este problema es calcular la volatilidad implícita promedio como media ponderada de las volatilidades implícitas de los diferentes precios de ejercicic negociados. Es decir,

$$\bar{\sigma}_i = \sum_{J=1}^{n} W_J \, \sigma_{iJ}$$

$$\sum_{J=1}^{n} W_J = 1$$

donde:

σ_i = volatilidad implícita media para el vencimiento en una fecha dada.
σ_{iJ} = volatilidad implícita para el vencimiento, de la serie de precio de ejercicio J,
en la misma fecha.
W_{Ji} = puede ser calculado a partir de la liquidez de las diferentes series (más negociación, más peso) o a partir de la VEGA de las diferentes series.

Otra alternativa más sencilla y más empleada en los mercados es utilizar la volatilidad implícita de las opciones at the money, las cuales presentan dos importantes características:

- Normalmente son las más líquidas, por lo que ofrecen una mayor representatividad de las opiniones del mercado.
- Adicionalmente son las más sensibles a las variaciones de la volatilidad.

Se puede evaluar en todo momento la expectativa de volatilidad del mercado a través de la volatilidad implícita de las opciones at the money.

1.6.4 Volatilidad Futura

La volatilidad futura es el dato que a cualquier operador en opciones le gustaría conocer. Todos los modelos de estimación de volatilidades intentan determinar este valor. Conociéndolo se puede valuar correctamente las opciones y por supuesto ganar dinero aprovechando los errores de las expectativas de otros agentes. Conocer la volatilidad futura del subyacente de una opción tiene tanto valor como saber con certeza las tasas de interés el próximo mes. Para ningún mercado financiero o no financiero existen "bolas de cristal" que nos permiten averiguar perfectamente el futuro.

1.7 Otras Aplicaciones de la Teoría de Opciones

Las opciones además de funcionar como instrumentos financieros y ayudar a los inversionistas a cubrir riesgos y especular, son utilizadas por los financieros de las firmas o empresas: (1) para la valuación de proyectos, sustituyendo el método de valor presente neto; (2) en la valuación de empresas; o bien, (3) como medio de financiamiento de la empresa mediante la emisión de ciertos valores o bonos corporativos, como los callable bonds (bonos con opción de recompra) y putable bonds (bonos con opción de reventa). Sobre este último punto es necesario indicar que las empresas mexicanas no emiten este tipo de bonos, sin embargo constituyen potenciales fuentes de cobertura al riesgo para estas empresas.

Sobre el segundo punto, la teoría de opciones juega un importante papel en la valuación de las empresas, además de que provee una diferente perspectiva que puede ser útil en el entendimiento y análisis de empresas de alta tecnología, empresas con graves problemas de capitalización, así como aquellas dedicadas a los recursos naturales. Así por ejemplo, la teoría de opciones pueden aplicarse de tal forma que el capital de la empresa puede ser valuada como una opción de compra, una patente puede ser valuada como una opción sobre un producto y los recursos naturales considerados como activos pueden ser analizados como opciones.

CAPITULO 2

METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

En la última década se ha tenido un amplio crecimiento en el campo de la teoría de opciones, durante este tiempo, el método original propuesto por Black & Scholes se ha extendido a la valuación de otro tipo de opciones. Todos los diferentes modelos de valuación han tenido un punto en común, en cada uno de ellos, los valores de las opciones pueden ser obtenidos resolviendo una ecuación diferencial sujeta a un conjunto de condiciones de frontera.

Sin embargo, la mayoría de los problemas de valuación de opciones no tienen una solución exacta y ésta debe resolverse utilizando métodos numéricos, es decir, métodos que intenten calcular una solución aproximada para un conjunto específico de parámetros. Dos principales categorías de soluciones numéricas han sido utilizadas en la teoría de opciones. La primera intenta resolver la integral representando el valor de una opción, mientras que la segunda resuelve directamente la ecuación diferencial. En la primera se incluyen el método Binomial de Sharpe (1978) y Cox, Ross y Rubinstein (1979), el método Trinomial de Parkinson (1977) y el método de simulación de Monte Carlo propuesto por Boyle (1977). En la segunda categoría se incluyen las técnicas de aproximación de diferencias finitas, comenzando con el trabajo de Brennan y Schwartz (1976).

2.1 Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas valúa derivados resolviendo numéricamente la ecuación diferencial que el derivado satisface. La ecuación diferencial se convierte en un conjunto de ecuaciones en diferencia y éstas son resueltas iterativamente.

Los supuestos considerados son:

- Los mercados se consideran sin fricciones y el comercio es continuo. En particular, no hay restricciones en las ventas en corto.
- La tasa anual de interés libre de riesgo es constante e igual a r.
- El precio de la acción sigue un proceso geométrico Wiener de la forma: $dS = \alpha S dt + \sigma S dz$, donde α y σ son, respectivamente, la media y la desviación estándar de la tasa de rendimiento de la acción. Finalmente, dz es un movimiento Browniano con media cero y varianza dt.

Dado estos supuestos, se considera la valuación en el tiempo *t*, de un PUT americano sobre una opción que no paga dividendos, $f(S,t)$. El sistema de ecuaciones que la opción con vencimiento *T*, debe satisfacer es:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r S \frac{\partial f}{\partial S} + \tfrac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\sigma^2 f}{\sigma S^2} = r f \qquad (2.1.1)$$

sujeto a:

$$f(S,T) = \text{Max}\,[0, K\text{-}S] \qquad (2.1.2)$$

$$f(S,u) = \text{Max}[f^*(S,u), K\text{-}S] \qquad \text{para } t<u<T \qquad (2.1.3)$$

donde K es el precio de ejercicio de la opción y $f^*(S,u)$ representa el valor de la opción en el tiempo u si no es ejercida, es decir, si se deja viva para el siguiente instante del tiempo. La condición de frontera (2.1.2) considera el hecho de que el pago de la opción al vencimiento será cero si el precio de la acción es mayor o igual al precio de ejercicio ó igual a la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de la acción si el precio de la acción es menor que el precio de ejercicio. La condición de frontera (2.1.3) representa la decisión que el tenedor de un PUT americano tiene que tomar en cada punto del tiempo durante la vida de la opción. El tenedor de la opción puede mantener la opción viva, en cuyo caso su posición será $f^*(S,u)$ o bien, ejercerla si K-S es mayor que $f^*(S,u)$. Este problema de valuación no tiene una solución exacta y debe ser resuelta numéricamente.

2.1.1 Metodología

Se escoge un número finito de diferencias, igualmente espaciadas entre el valor actual, cero y el vencimiento de la opción, T. Estas diferencias corresponderán al tamaño o longitud uniforme de los intervalos del tiempo, en el horizonte $[t, T]$, y que será $k = \Delta t$. Se supone que $\Delta t = T/N$ y que se considera un total de $N+1$ veces:

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$$

Asimismo se escoge un número finito de diferencias, igualmente espaciadas en precios de la acción. Las diferencias representan el tamaño del intervalo entre los precios y se define como h que es igual a ΔS. Suponiendo que S_{max} es un precio de la acción suficientemente alto que, cuando es alcanzado, el PUT virtualmente no tiene ningún valor. Se define $\Delta S = S_{max}/M$ y considera un total de precios de la acción igual a $M+1$ precios:

$$0,\ \Delta S,\ 2\Delta S,\ \ldots,\ S_{max}$$

Uno de estos precios se supondrá como el valor actual del precio.

Esta aproximación general es representada en la fig. 2.1. Se construye una malla que consiste de un total de $(M+1)\ (N+1)$ puntos, el punto (i, j) sobre la malla es el punto que corresponde al tiempo $i\Delta t$ y al precio $j\Delta S$. La variable f_{ij}, denota el valor de la opción en el punto (i, j).

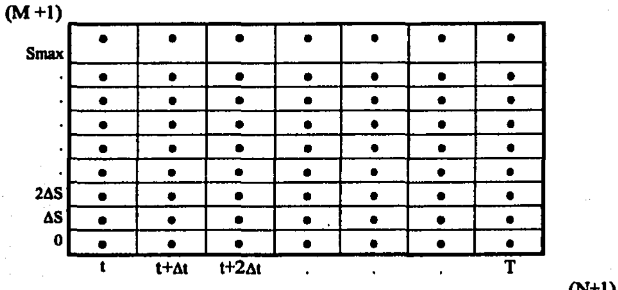


Fig.2.1 Malla para el método de diferencias finitas, cada cuadro representa un punto en la malla, un punto f_{ij} cualquiera.

2.1.2 Las Herramientas Básicas

La principal herramienta en la derivación de la aproximación de diferencias es la expansión de Taylor, la cual dice que el valor de la opción en el punto (S, u) satisface las siguientes ecuaciones[3] :

$$f(S+h, u) = f(S, u) + h\frac{\partial f}{\partial S} + \tfrac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + 1/6\, h^3\frac{\partial^3 S}{\partial S^3} + o(h^4) \qquad (2.1.4)$$

[3] $o(h^4)$ significa que el error es "de orden h ". Existe una constante K positiva tal que $|o(h^4)| < K(h^4)$ cuando h tiende a cero. En la ecuación (2.1.4), cuando h (el tamaño del intervalo entre los precios de la acción en la malla) va a cero, el error que cometemos usando los primeros cuatro términos del lado derecho de la ecuación, también va a cero y a una tasa suficientemente rápida que es menor a $K(h^4)$ para cualquier h. En general mientras mayor sea el orden de h en la aproximación, más exacta es.

$$f(S-h,\, u) = f(S,\, u) - h \frac{\partial f}{\partial S} + \tfrac{1}{2}\, h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - 1/6\, h^3 \frac{\partial^3 S}{\partial S^3} + o(h^4) \qquad (2.1.5)$$

Sumando las ecuaciones (2.1.4) y (2.1.5), se obtiene una aproximación de diferencias finitas de la segunda derivada, $\partial^2 f / \partial S^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f(S+h,\, u) - 2f(S,u) + f(S-h,\, u)}{h^2} + o(h^2) \qquad (2.1.6)$$

En forma de diferencias finitas, esto se aproxima a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{j+1,i} - 2 f_{ji} + f_{j-1,i}}{h^2} \qquad (2.1.7)$$

donde el segundo miembro representa la segunda derivada de $f(S,u)$ con respecto a S y f_{ji} es la aproximación de diferencias finitas de $f(S,u)$ en el punto $S = S_{min} + ih$ y $u = t + jk$.

Similarmente, restando (2.1.5) a (2.1.4) se obtendrá la aproximación en diferencias finitas para la primera derivada con respecto a S:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f(S+h,\, u) - f(S-h,\, u)}{2h} + o(h^2) \qquad (2.1.8)$$

en términos de diferencias finitas:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{j+1,i} + f_{j-1,i}}{2h} \qquad (2.1.9)$$

Finalmente, la aproximación en diferencias finitas de la derivada del tiempo se puede obtener expandiendo el valor de la opción como una función del tiempo:

$$f(S,\ u+k) = f(S,\ u) + k\frac{\partial f}{\partial t} + o(k^2) \tag{2.1.10}$$

$$f(S,\ u-k) = f(S,\ u) - k\frac{\partial f}{\partial t} + o(k^2) \tag{2.1.11}$$

Las ecuaciones (2.1.10) y (2.1.11) implican dos diferentes aproximaciones de la derivada del tiempo. La ecuación (2.1.10) implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f(S,\ u+k) - f(S,u)}{k} + o(|k|) \tag{2.1.12}$$

la que corresponde a la siguiente aproximación:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{j,i+1} - f_{j,i}}{k} \tag{2.1.13}$$

La ecuación (2.1.11), implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f(S,\ u) - f(S,u-k)}{k} + o(|k|) \tag{2.1.14}$$

o en diferencias finitas:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{j,i} - f_{j,i-1}}{k} \tag{2.1.15}$$

2.1.3 Método de Diferencias Finitas Implícitas

Para un punto interior (i, j) sobre la malla, $\partial f / \partial S$ puede ser aproximada como:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{ij}}{\Delta S} \qquad (2.1.16)$$

o bien,

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \qquad (2.1.17)$$

La ecuación 2.1.16 es la aproximación de diferencia adelantada a la que llamaremos en adelante fda, la ecuación (2.1.17) es la aproximación de diferencia atrasada ó bda en adelante. En el método de diferencias implícitas se usa una aproximación más simétrica promediando las dos ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \qquad (2.1.18)$$

Para $\partial f / \partial t$ se usará la fda tal que el valor en el tiempo $i\Delta t$ está relacionado al valor en el tiempo $(i+1)\,\Delta t$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{ij}}{\Delta t} \qquad (2.1.19)$$

La bda para $\partial f / \partial S$ en el punto (i, j) está dada por la ecuación (2.1.17). La bda en el punto $(i, j+1)$ es:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{ij}}{\Delta S}$$

Una aproximación en diferencias finitas para $\partial^2 f / \partial S^2$ en el punto (i,j) es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \left[\frac{f_{i,j+1} - f_{ij}}{\Delta S} - \frac{f_{ij} - f_{i,j-1}}{\Delta S}\right] / \Delta S$$

o bien,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{ij} + f_{i,j-1}}{\Delta S^2} \qquad (2.1.20)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.1.18), (2.1.19) y (2.1.20) en la ecuación diferencial (2.1.1) y dado que $S = j\Delta S$:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{ij}}{\Delta t} + rj\,\Delta S\,\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2\,\frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{ij}}{\Delta S^2} = r f_{ij}$$

para $j = 1,2,\ldots, M\text{-}1$ e $i = 0,1,\ldots, N\text{-}1$. Reordenando términos y considerando que $j = S/\Delta S$, se obtiene:

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{ij} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \qquad (2.1.21)$$

donde:

$$a_j = \tfrac{1}{2} rj\,\Delta t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2\,\Delta t$$

$$b_j = 1 + \sigma^2 j^2\,\Delta t + r\,\Delta t$$

$$c_j = -\tfrac{1}{2} rj\,\Delta t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2\,\Delta t$$

Usando ahora las condiciones de frontera para un PUT americano. El valor del PUT en el tiempo T es max [$X - S_T$, 0] donde S_T es el precio en el tiempo, por lo que:

$$f_{Nj} = \max [X - j\,\Delta S, 0] \qquad j = 0, 1, \ldots, M \tag{2.1.22}$$

El valor del PUT cuando el precio es cero es X, entonces:

$$f_{i0} = X \qquad i = 0,1,\ldots, N \tag{2.1.23}$$

El valor de la opción tiende a cero cuando el precio tiende a infinito. Usando la aproximación:

$$f_{iM} = 0 \qquad i = 0, 1,\ldots,N \tag{2.1.24}$$

Las ecuaciones (2.1.22), (2.1.23) y (2.1.24) definen el valor del PUT a lo largo de los tres extremos de la malla, donde $S = 0$, $S = S_{max}$ y $t = T$. Usando la (2.1.21) se llega al valor de f a lo largo del extremo izquierdo de la malla. Primero los puntos correspondientes al tiempo T-Δt son considerados. La ecuación (2.1.21) con $i = N$-1 dan M-1 ecuaciones simultáneas:

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1j} + c_j f_{N-1j+1} = f_{Nj} \tag{2.1.25}$$

para $j = 1,2,\ldots, M$-1. El segundo miembro de estas ecuaciones son conocidas a partir de la ecuación (2.1.22), de las ecuaciones (2.1.23) y (2.1.24) se tiene:

$$f_{N-1,0} = \mathrm{X}$$

$$f_{N-1,M} = 0$$

(2.1.25) representa a las M-1 ecuaciones que pueden ser resueltas para las M-1 desconocidas: $f_{N-1,1}, f_{N-1,2},\ldots, f_{N-1,M-1}$. Después que esto ha sido resuelto, cada valor de f_{N-1j} es comparado con X-$j\Delta S$. Si $f_{N-1j} < X - j\Delta S$, el precio de ejercicio anterior en el tiempo $T - \Delta t$ es óptimo y f_{N-1j} es igual al conjunto X-$j\Delta S$. Los nodos correspondientes a $T - 2\Delta t$ se manejan de una manera similar y así sucesivamente. Eventualmente, $f_{01}, f_{02}, f_{03}, \ldots, f_{0M-1}$ son obtenidos y uno de estos será el valor de la opción.

2.1.4 Método de Diferencias Finitas Explícitas

Para este método los valores de $\partial f/\partial S$ y $\partial f^2/\partial S^2$ en el punto (i, j) sobre la malla se suponen como iguales en el punto $(i+1, j)$, y entonces las ecuaciones (2.1.18) y (2.1.20) serán:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{\Delta S^2}$$

y (2.1.25) será entonces:

$$a^*_j f_{i+1,j-1} + b^*_j f_{i+1,j} + c^*_j f_{i+1,j+1} = f_{ij} \qquad (2.1.25^*)$$

donde:

$$a^*_j = \frac{1}{1 + r\,\Delta t}\left[-\tfrac{1}{2} rj\,\Delta t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2\,\Delta t \right]$$

$$b^*_j = \frac{1}{1 + r\,\Delta t}\left[1 + \sigma^2 j^2\,\Delta t + r\,\Delta t \right]$$

$$c^*_j = \frac{1}{1 + r\,\Delta t}\left[\tfrac{1}{2} rj\,\Delta t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 j^2\,\Delta t \right]$$

CAPITULO 3

VALUACION DE OPCIONES CON EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

La primera parte de este apartado incluye la valuación de una opción de venta (PUT) americana con el método de diferencias finitas explícitas, en la segunda parte se valúa una opción de compra americana (CALL) con el método de diferencias finitas implícitas. En la valuación se suponen datos de una acción x a la que llamare JCA3, es decir, no considero datos de opciones reales que operen en el mercado de valores mexicano, pues mi propósito es sólo mostrar el método de diferencias finitas como una alternativa a los modelos de valuación comúnmente utilizados. Sin embargo, describo el algoritmo en excel que utilicé para la valuación de las opciones sobre la acción JCA3. Se incluyen asimismo, dos cuadros comparativos de valuación de opciones de compra y venta tanto europeas como americanas valuadas con los modelos binomial y de Black & Scholes.

3.1 Valuación de Opciones sobre Acciones.

3.1.1 Valuación de una Opción de Venta Americana (PUT americano).

Con el método de diferencias finitas explícitas, calcular el valor de una opción de venta americana sobre la acción JCA3, considerando que la opción tiene un plazo vencimiento de 5 meses y no paga dividendos. Tiene hoy un precio de 50 u.m[4] . y un precio de ejercicio de 50 u.m., la tasa anual libre de riesgo es de 10% y una volatilidad del 40% anual.

Datos:

Dividendo = 0
T = 5 meses = 0.4167 años.
$N = 2$
$\Delta t = 0.2083$
$\sigma_S = 0.40$
$r_f = 0.10$
$K = 50$
$S = 50$
$M = 6$

[4] u.m.: unidades monetarias.

$\Delta S = 16.67$
$S_{max} = 100$
$S_{min} = 0$

Metodología

1) Se construye la malla para la valuación, en este caso será de 7x3, la cual tendrá 21 nodos, a cada uno los cuales se le asigna el valor correspondiente, considerando la ΔS supuesta, comenzando de abajo hacia arriba. Consideramos la malla descrita en el capítulo 2:

$$\Delta S = S_{max} / M = 100 / 6 = 16.67$$

Así, $2\Delta S = 33.33$, $3\Delta S = 50$, $4\Delta S = 66.67$, $5\Delta S = 83.33$ y por último $S_{max} = 100$, sustituyendo estos valores en la malla y recordando que $N = 2$, tendremos entonces $N+1 = 3$ columnas en la malla.

S_{max}	$S_a = 100$	$S_h = 100$	$S_o = 100$
$5\Delta S$	$S_b = 83.33$	$S_i = 83.33$	$S_p = 83.33$
$4\Delta S$	$S_c = 66.67$	$S_j = 66.67$	$S_q = 66.67$
$3\Delta S$	$S_d = 50$	$S_k = 50$	$S_r = 50$
$2\Delta S$	$S_e = 33.33$	$S_l = 33.33$	$S_s = 33.33$
ΔS	$S_f = 16.67$	$S_m = 16.67$	$S_t = 16.67$
S_{min}	$S_g = 0$	$S_n = 0$	$S_u = 0$

2) A partir de las fórmulas para calcular *a*, *b* y *c*, ecuación (2.1.25*), se obtiene el siguiente cuadro, que utilizaremos más tarde para valuar la opción:

	S_b	S_c	S_d	S_e	S_f
a	0.3571	0.2204	0.1163	0.0449	0.0061
b	0.1837	0.4775	0.7061	0.8694	0.9673
c	0.4592	0.3020	0.1775	0.0857	0.0265

Recordemos que $S_a=S_h=S_o$, $S_b=S_i=S_p$, $S_c=S_j=S_q$, $S_d=S_k=S_r$, $S_e=S_l=S_s$, $S_f=S_m=S_t$ y por último, $S_g=S_n=S_u$. De tal forma que para calcular aS_b, bS_d y cS_f será:

$$aS_b = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left[- \frac{r\Delta t S_b}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2 S^2{}_b \Delta t}{2\Delta S^2} \right]$$

$$bS_d = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left[1 - \frac{\sigma^2 S^2{}_d \Delta t}{\Delta S^2} + r\Delta t \right]$$

$$cS_f = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left[\frac{r\Delta t S_f}{2\Delta S} + \frac{\sigma^2 S^2{}_f \Delta t}{2\Delta S^2} \right]$$

3) Se valúa la opción empezando por el primer término superior de la tercera columna, en este caso:

$p_a = p_h$	$p_h = p_o$	$p_o = max\,[K\text{-}S_o, 0]$
$p_b = max\,[(aS_b p_j + bS_b p_i + cS_b p_h), K\text{-}S_b]$	$p_i = max[(aS_b p_q + bS_b p_p + cS_b p_o), K\text{-}S_i]$	$p_p = max\,[K\text{-}S_p, 0]$
$p_c = max\,[(aS_c p_k + bS_c p_j + cS_c p_i), K\text{-}S_c]$	$p_j = max[(aS_c p_r + bS_c p_q + cS_c p_p), K\text{-}S_j]$	$p_q = max\,[K\text{-}S_q, 0]$
$p_d = max\,[(aS_d p_l + bS_d p_k + cS_d p_j), K\text{-}S_d]$	$p_k = max[(aS_d p_s + bS_d p_r + cS_d p_q), K\text{-}S_k]$	$p_r = max\,[K\text{-}S_r, 0]$
$p_e = max\,[(aS_e p_m + bS_e p_l + cS_e p_k), K\text{-}S_e]$	$p_l = max[(aS_e p_t + bS_e p_s + cS_e p_r), K\text{-}S_l]$	$p_s = max\,[K\text{-}S_s, 0]$
$p_f = max\,[(aS_f p_n + bS_f p_m + cS_f p_l), K\text{-}S_f]$	$p_m = max\,[(aS_f p_u + bS_f p_t + cS_f p_s), K\text{-}S_m]$	$p_t = max\,[K\text{-}S_t, 0]$
$p_g = p_n$	$p_n = p_u$	$p_u = max\,[K\text{-}S_u, 0]$

En las opciones americanas se tiene la alternativa de considerar el valor máximo entre ejercerlo hoy o ejercerlo hasta su fecha de vencimiento, por eso es que se considera en todas las columnas dicha alternativa. Sustituyendo los valores del cuadro anterior y efectuando operaciones tenemos que:

$p_a = 0$	$p_h = 0$	$p_o = 0$
$p_b = 0$	$p_i = 0$	$p_p = 0$
$p_c = 0.4273$	$p_j = 0$	$p_q = 0$
$p_d = 3.3078$	$p_k = 1.9388$	$p_r = 0$
$p_e = 16.6667$	$p_l = 16.6667$	$p_s = 16.6667$
$p_f = 33.3333$	$p_m = 33.3333$	$p_t = 33.3333$
$p_g = 50$	$p_n = 50$	$p_u = 50$

Así, el valor de la opción de venta americana es: 3.3078 u.m., cuyo valor será dado por p_d.

En caso de que la opción fuese europea:

$p_a = p_{h0}$	$p_h = p_o$	$p_o = max\ [K\text{-}S_o, 0]$
$p_b = aS_bp_j+bS_bp_i+cS_bp_h$	$p_i = aS_ip_q+bS_ip_p+cS_ip_o$	$p_p = max\ [K\text{-}S_p, 0]$
$p_c = aS_cp_k+bS_cp_j+cS_cp_i$	$p_j = aS_jp_r+bS_jp_q+cS_jp_p$	$p_q = max\ [K\text{-}S_q, 0]$
$p_d = aS_dp_l+bS_dp_k+cS_dp_j$	$p_k = aS_kp_s+bS_kp_r+cS_kp_q$	$p_r = max\ [K\text{-}S_r, 0]$
$p_e = aS_ep_m+bS_ep_l+cS_ep_k$	$p_l = aS_lp_t+bS_lp_s+cS_lp_r$	$p_s = max\ [K\text{-}S_s, 0]$
$p_f = aS_fp_n+bS_fp_m+cS_fp_l$	$p_m = aS_mp_u+bS_mp_t+cS_mp_s$	$p_t = max\ [K\text{-}S_t, 0]$
$p_g = p_n$	$p_n = p_u$	$p_u = max\ [K\text{-}S_u, 0]$

en la valuación de esta opción ya no se considera la alternativa del máximo, sólo hasta la última columna, por ser la fecha de vencimiento la única en que puede ejercerse este tipo de opción, por esa razón no se considera esa alternativa para las columnas 1 y 2.

$p_a = 0$	$p_h = 0$	$p_o = 0$
$p_b = 0$	$p_i = 0$	$p_p = 0$
$p_c = 0.4273$	$p_j = 0$	$p_q = 0$
$p_d = 3.2286$	$p_k = 1.9388$	$p_r = 0$
$p_e = 15.5458$	$p_l = 15.9864$	$p_s = 16.6667$
$p_f = 32.6461$	$p_m = 32.9932$	$p_t = 33.3333$
$p_g = 50$	$p_n = 50$	$p_u = 50$

La opción de venta europea tendrá un valor de 3.2286 u.m.

Comparando ambos resultados podemos ver que la opción de venta americana tiene mayor valor que la opción de venta europea, esto como resultado de la alternativa de ejercer la opcion antes o en la fecha de vencimiento.

3.1.2 Valuación de una Opción de Compra Americana (CALL americano).

Calcular por el método de diferencias finitas implícitas el valor de una opción de compra americana sobre la acción JCA3, suponga que la opción tiene un plazo de vencimiento de 5 meses y no paga dividendos. El precio hoy es de 50 u.m. y el precio de ejercicio acordado es 50 u.m., la tasa anual libre de riesgo es de 10% y la volatilidad del 40% anual.

Datos:

Dividendos = 0
T = 5 meses = 0.4167 años.
N = 3
$\Delta t = 0.1389$
$\sigma_s = 0.40$
$r_f = 0.10$
K = 50
S = 50
M = 6
$\Delta S = 16.67$
$S_{max} = 100$
$S_{min} = 0$

3.2.1 Metodología

1) Como en el ejemplo anterior, el primer paso para la solución del problema, es construir la malla, que para esta opción es de 7x4 con un total de 28 nodos. La ΔS considerada es de 16.67:

$S_a = 100$	$S_h = 100$	$S_o = 100$	$S_v = 100$
$S_b = 83.33$	$S_i = 83.33$	$S_p = 83.33$	$S_w = 83.33$
$S_c = 66.67$	$S_j = 66.67$	$S_q = 66.67$	$S_x = 66.67$
$S_d = 50$	$S_k = 50$	$S_r = 50$	$S_y = 50$
$S_e = 33.33$	$S_l = 33.33$	$S_s = 33.33$	$S_z = 33.33$
$S_f = 16.67$	$S_m = 16.67$	$S_t = 16.67$	$S_{aa} = 16.67$
$S_g = 0$	$S_n = 0$	$S_u = 0$	$S_{ab} = 0$

2) Para la valuación de la opción es necesario calcular, con las fórmulas de los términos *a*, *b* y *c* de la ecuación (2.1.21), el siguiente cuadro:

$$aS_b = \frac{r\Delta t S_b}{2\Delta S} - \frac{\sigma^2 S^2{}_b \Delta t}{2\Delta S^2}$$

$$bS_d = 1 + \frac{\sigma^2 S^2{}_d \Delta t}{\Delta S^2} + r\Delta t$$

$$cS_f = -\frac{r\Delta t S_f}{2\Delta S} - \frac{\sigma^2 S^2{}_f \Delta t}{2\Delta S^2}$$

	S_b	S_c	S_d	S_e	S_f
a	-0.2431	-0.1500	-0.0792	-0.0306	-0.0042
b	1.5694	1.3694	1.2139	1.1028	1.0361
c	-0.3125	-0.2056	-0.1208	-0.0583	-0.0181

Reordenando los términos de la tabla anterior como una *matriz A*, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ aS_f & bS_f & cS_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aS_e & bS_e & cS_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aS_d & bS_d & cS_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & aS_c & bS_c & cS_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & aS_b & bS_b & cS_b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sustituyendo por los valores correspondientes, tenemos que la *matriz A* es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0042 & 1.0361 & -0.0181 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0306 & 1.1028 & -0.0583 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0792 & 1.2139 & -0.1208 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1500 & 1.3694 & -0.2056 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2431 & 1.5694 & -0.3125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3) Se obtiene la *matriz inversa* de *A*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0040234 & 0.9656153 & 0.0158652 & 0.000771 & 6.965e\text{-}05 & 9.122e\text{-}06 & 2.851e\text{-}06 \\ 0.0001119 & 0.0268488 & 0.9104168 & 0.0442439 & 0.0039968 & 0.0005235 & 0.0001636 \\ 7.378e\text{-}06 & 0.0017708 & 0.0600453 & 0.8360163 & 0.0755217 & 0.0098913 & 0.003091 \\ 8.274e\text{-}07 & 0.0001986 & 0.0067335 & 00937511 & 0.7560707 & 0.0990252 & 0.0309454 \\ 1.281e\text{-}07 & 3.075e\text{-}05 & 0.0010428 & 0.014519 & 0.1170906 & 0.6525039 & 0.2039075 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$p_a = b_a$	$p_h = b_h$	$p_o = b_o$	$p_v = max\ [S_v\text{-}K,\ 0]$
$p_b = max\ [b_b,\ S_b\text{-}K]$	$p_i = max\ [b_i,\ S_i\text{-}K]$	$p_p = max[b_p,\ S_p\text{-}K]$	$p_w = max\ [S_w\text{-}K\ 0]$
$p_c = max\ [b_c,\ S_c\text{-}K]$	$p_j = max\ [b_j,\ S_j\text{-}K]$	$p_q = max[b_q,\ S_q\text{-}K]$	$p_x = max\ [S_x\text{-}K\ 0]$
$p_d = max\ [b_d,\ S_d\text{-}K]$	$p_k = max\ [b_k,\ S_k\text{-}K]$	$p_r = max[b_r,\ S_r\text{-}K]$	$p_y = max\ [S_y\text{-}K\ 0]$
$p_e = max\ [b_e,\ S_e\text{-}K]$	$p_l = max\ [b_l,\ S_l\text{-}K$	$p_s = max[b_s,\ S_s\text{-}K]$	$p_z = max\ [S_z\text{-}K\ 0]$
$p_f = max\ [b_f,\ S_f\text{-}K]$	$p_m = max\ [b_m,\ S_m\text{-}K]$	$p_t = max[b_t,\ S_t\text{-}K]$	$p_{aa} = max\ [S_{aa}\text{-}K\ 0]$
$p_g = b_g$	$p_n = b_n$	$p_u = b_u$	$p_{ab} = max\ [S_{ab}\text{-}K\ 0]$

5) Se forma el cuadro para valuar la opción americana. Sustituyendo los valores del cuadro tenemos que el valor de la opción será el valor que resulte en p_d:

$p_a = 50$	$p_h = 50$	$p_o = 50$	$p_v = 50$
$p_b = 34.8156$	$p_i = 34.3819$	$p_p = 33.8970$	$p_w = 33.3333$
$p_c = 19.0667$	$p_j = 18.2608$	$p_q = 17.4493$	$p_x = 16.6667$
$p_d = 4.6232$	$p_k = 3.2703$	$p_r = 1.7430$	$p_y = 0$
$p_e = 0.4778$	$p_l = 0.2568$	$p_s = 0.0922$	$p_z = 0$
$p_f = 0.0141$	$p_m = 0.0060$	$p_t = 0.0016$	$p_{aa} = 0$
$p_g = 0$	$p_n = 0$	$p_u = 0$	$p_{ab} = 0$

6) Para llegar al valor de p_d tenemos que realizar algunas operaciones más, primero formamos una matriz B1 tomando los valores (de abajo hacia arriba) de la última columna de la malla de la valuación. Formamos una matriz B2 con la tercera columna de la malla de valuación y así sucesivamente hasta tener tres matrices.

Mat B1	*Mat B2*	*Mat B3*
$p_{ab} = 0$	$p_u = 0$	$p_n = 0$
$p_{aa} = 0$	$p_t = 0.0016074$	$p_m = 0.0060265$
$p_z = 0$	$p_s = 0.0922413$	$p_l = 0.2568009$
$p_y = 0$	$p_r = 1.7429586$	$p_k = 3.2703222$
$p_x = 16.666667$	$p_q = 17.449288$	$p_j = 18.260849$
$p_w = 33.333333$	$p_p = 33.897014$	$p_i = 34.381857$
$p_v = 50$	$p_o = 50$	$p_h = 50$

7) Multiplicamos la matriz inversa de *A* por cada una de las matrices *B* ya formadas con los valores de la malla.

$(Mat\ A^{-1})(Mat\ B1)$	$(Mat\ A^{-1})(Mat\ B2)$	$(Mat\ A^{-1})(Mat\ B3)$
$b_u = 0$	$b_n = 0$	$b_g = 0$
$b_t = 0.0016074$	$b_m = 0.0060265$	$b_f = 0.0141429$
$b_s = 0.0922413$	$b_l = 0.2568009$	$b_e = 0.4778112$
$b_r = 1.7429586$	$b_k = 3.2703222$	$b_d = 4.6231982$
$b_q = 17.449288$	$b_j = 18.260849$	$b_c = 19.066759$
$b_p = 33.897014$	$b_i = 34.381857$	$b_b = 34.815593$
$b_o = 50$	$b_h = 50$	$b_a = 50$

8) Finalmente, sustituímos los valores obtenidos del producto de matrices en la malla de valuación.

El valor de la opción de compra americana es: 4.6232 u.m.

3.1.3 Cuadros Comparativos.

El primer cuadro de esta sección muestra la valuación de opciones de compra y venta, tanto americanas como europeas. La valuación se ha realizado con los modelos Black & Scholes, Binomial y el Método de Diferencias Finitas Implícitas y Explícitas, con el fin de comparar resultados y obtener conclusiones del trabajo. Se consideran los mismos datos para la valuación de las opciones consideradas en los dos cuadros excepto el precio de ejercicio, para el primer cuadro se considera un precio de ejercicio K =50, para el segundo el precio de ejercicio K = 55.

Con el modelo de Black & Scholes sólo se pueden valuar opciones europeas, mientras que el modelo de arboles binomial y el método de diferencias finitas valúa cualquier tipo de opciones, tanto americanas como europeas. Con el modelo de árboles binomiales se valuaron opciones de compra y venta americanas y europeas, considerando árboles de 3 y 6 periodos. Mientras que el método de diferencias finitas (explícitas e implícitas) valúo el mismo tipo de opciones, considerando mallas de 5x3, 7x3 y 7x4.

Cuadro I. K = 50.

	Black & Scholes	Binomial		Diferencias Explícitas			Diferencias Implícitas		
Tipo de Opción		(n = 3)	(n=6)	(5x3)	(7x3)	(7x4)	(5x3)	(7x3)	(7x4)
Opciones de Venta:									
Americana		4.645	4.175	2.098	3.307	3.207	1.805	2.607	2.719
Europea	4.074	4.484	3.869	2.075	3.228	3.116	1.769	2.536	2.691
Opciones de Compra:									
Americana		6.525	5.910	4.137	5.290	5.199	3.749	4.526	4.623
Europea	6.115	6.525	5.910	4.137	5.290	5.199	3.749	4.526	4.623

Cuadro II. K = 55.

	Black & Scholes	Binomial		Diferencias Explícitas			Diferencias Implícitas		
Tipo de Opción		(n = 3)	(n=6)	(5x3)	(7x3)	(7x4)	(5x3)	(7x3)	(7x4)
Opciones de Venta:									
Americana		7.1708	7.361	6.347	6.989	6.955	5.999	6.444	6.522
Europea	7.115	6.8140	6.957	6.324	6.910	6.861	5.959	6.364	6.406
Opciones de Compra:									
Americana		4.0578	4.201	3.386	3.971	3.944	3.137	3.551	3.609
Europea	4.359	4.0578	4.201	3.386	3.971	3.944	3.137	3.551	3.609

Como un primer punto, consideremos la comparación que puede hacerse entre los dos cuadros, es decir, el primer cuadro con un precio de ejercicio K=50 y el segundo cuadro con un precio de ejercicio K=55. Puede observarse el caso en el que el precio de ejercicio K es igual al precio de la acción hoy S (día de la valuación), las opciones de compra tienen un valor mayor que los correspondientes a las opciones de venta. Esto no sucede en el caso en el que el precio de ejercicio es mayor al precio de la acción hoy S, ya que los valores de las opciones de venta son mayores a las opciones de compra. Como una observación adicional, las opciones de venta americanas son mayores que las opciones de venta europeas, no así en las opciones de compra, ya que estas tienen valores iguales tanto para las opciones americanas como europeas.

Con respecto a los modelos de valuación si consideramos al método de Black & Scholes como parámetro de comparación para los dos métodos restantes, puede observarse que los valores de las opciones de compra y venta europeas son mayores. Los cinco valores más cercanos son los obtenidos con el modelo binomial de 6 y 3 periodos, en ese orden, el método de diferencias finitas explícitas de 7x3 y 7x4 y por ultimo el método de diferencias finitas implícitas de 7x4.

De lo anterior podemos deducir que el modelo de árboles binomiales, conforme aumenta el número de periodos, este se acerca a los valores obtenidos con el modelo de Black & Scholes, mientras que con el método de diferencias finitas explícitas sus valores se acercan conforme aumenta el número de filas en la malla, es decir el valor de M (número de Δ's del precio de la acción) más que N. Por otra parte, los valores obtenidos con el método de diferencia finitas implícitas se acercan a los de Black & Scholes cuando aumenta el valor de N, es decir el número de periodos en el tiempo.

De lo anterior, se concluye que el método de diferencias finitas no tiene problema en valuar cualquier tipo de opción americana o europea, al igual que el modelo de árboles binomiales. El modelo binomial converge más rápido, que el método de diferencias finitas, al valor de la opción si consideramos como parámetro el modelo de Black & Scholes. Sin embargo, este inconveniente tiene solución al incrementar el número de periodos de valuación o el número de ΔS's del precio de la acción.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los métodos numéricos tienen una creciente importancia en la valuación de opciones, en este trabajo se ha presentado una de las dos principales categorías de los métodos numéricos utilizados en la valuación, las diferencias finitas. La otra categoría corresponde a los métodos similares a los árboles binomiales o trinomiales, algunas veces referidas como métodos de Lattice y con un toque más económico pues envuelve el concepto de valuación libre de riesgo, mientras que el método de diferencias finitas es de naturaleza más mecánica, por lo que puede decirse es más general.

El método de diferencias finitas, como ya se dijo, resuelve la ecuacion diferencial convirtiéndola en un conjunto de ecuaciones en diferencia. Este método es similar al método de los árboles binomiales en la forma de cálculo, es decir, estos comienzan a partir del final de la vida de la opción hasta el comienzo de la misma. Considerando ahora el método de diferencias finitas en sí, el método de diferencias finitas implícitas es más complicado que el método explicito, pues tiene la ventaja de que uno no debe tomar en cuenta precauciones especiales para asegurar la convergencia, ya que este es más robusto que el método de diferencias explícitas, es decir, siempre converge a la solución de la ecuación diferencial cuando ΔS y Δt se aproximan a cero[5] . Por otra parte, una de las desventajas del método de diferencias implícitas es que las M-1 ecuaciones simultáneas tienen que resolverse en orden para calcular las f_{ij}'s a partir de las $f_{i+1,j}$'s.

Ahora bien, el método de diferencias finitas puede ser usado para el mismo tipo de valuación de derivados que los árboles binomiales. Ambos pueden valuar opciones tanto americanas como europeas, sin embargo existe dificultad, para ambos métodos, cuando los valores de los derivados dependen de una variable del pasado, pues como ya se dijo, la valuación de los derivados con estos modelos se hace a partir del final de la vida de la opción hasta el comienzo de la misma. Este método, por otro lado, consume una gran parte de tiempo-computadora cuando la valuación considera muchos periodos, por lo que el algoritmo si se hiciera en excel sería muy largo, aunque quizá el tiempo disminuiría si se implementara un programa con algún lenguaje de programación.

[5] Una regla útil para el método de diferencias finitas es que ΔS debe mantenerse proporcional a $\sqrt{\Delta t}$ cuando ambas se aproximan a cero.

Finalmente, como una recomendacion para el uso del método que habrá de seleccionarse en la valuación de opciones, es necesario decir que esta decision dependerá de las caracteristicas de los derivados y de la exactitud que se requiera, por lo que queda al usuario considerar las ventajas e inconveniencias de cada uno de los modelos o métodos empleados en las valuación de opciones y decidir cual utilizar considerando sus objetivos. En este trabajo se describe detalladamente el método de diferencias finitas y en una forma más breve los modelos de Black & Scholes y de árboles binomiales en el apéndice.

Sin embargo, existen otros modelos de valuación derivados de soluciones numéricas o analíticas, o bien por extensiones de estos mismos modelos que pueden ser consultados por el lector. Entre otros modelos se encuentra el modelo de árboles trinomiales y la simulación de Monte Carlo.

BIBLIOGRAFIA

Libros:

- **Brealey Richard A. y Myers Stewart C. (1991).**
  "Principles of Corporate Finance".
  Mc. Graw Hill.
  E.U.A.

- **Burden Richard L.y Faires J. Douglas (1985).**
  "Análisis Numérico".
  Ed. Grupo Iberoamerica.

- **Damodaran Aswath (1994).**
  "Damodaran on Valuation".
  Wiley.
  E.U.A.

- **Figlewski Stephen, Silber Willian L. y Subrahmanyam Marti G. (1990).**
  "Financial Options".
  Irwin.
  E.U.A.

- **Hull John C. (1993).**
  "Options, Futures and Other Derivative Securities".
  Prentice Hall.
  E.U.A.

- **Natemberg Sheldon (1994)**
  "Option Volatility and Pricing".
  Probus.
  E.U.A.

- **Shapiro Allan C. (1992)**
  "Multinational Financial Management".
  Allyn y Bacon.
  E.U.A.

- Sharpe, W.F. (1978).
  Investments.
  Prentice Hall.
  E.U.A.

Revistas:

- Brennan, M. J., y E. S. Schwartz (Sept. 1978).
  "Finite Difference Method and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims".
  Journal of Financial and Quantitative Analysis, 13.
  E.U.A.

- Courtadon, Georges (Dic. 1982).
  "A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options".
  Journal of Financial and Quantitative Analysis, 17.
  E.U.A.

- Cox, J., Ross, S. y Rubinstein, M (Sept. 1979).
  "Option Pricing: A Simplified Approach".
  Journal of Financial Economics, 7, no. 3.
  E.U.A.

- Hull, John and White, Alan, (Mar. 1990).
  "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method".
  Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25.
  E.U.A.

- Parkinson, M. (Ene. 1977).
  "Option Pricing: The American Put".
  Journal of Business, 50.
  E.U.A.

- Boyle, P. (May. 1977).
  "Options: A Monte Carlo Approach".
  Journal of Financial Economics, 4.
  E.U.A.

- Bolsa Mexicana de Valores (1994).
  Ventas en Corto.
  Ed. Limusa Noriega.
  México.

Tesis:

- Albanes D. Aristóteles Alejandro (1995).
  "Diagnóstico Financiero de una Inversión".
  Actuaría.

- De León G. Graciela (1995).
  "Introducción al Mercado de Opciones".
  Actuaría.

- Jiménez C. Paul Armando (1993).
  "Aplicación de un Modelo de Revisión de Carteras Optimas en el Entorno Mexicano".
  Actuaría.

- Ramírez G. Aída Acracia y Vargas A. Erick Omar (1995)[*].
  "El Proceso de Valuación de los Títulos Opcionales (Warrants). Consideraciones y Propuestas Alternativas".
  Actuaría.

- Robles R. Minerva (1994).
  "Método de Valuación en la Administración de Riesgo e Inversiones".
  Actuaría.

- Sánchez B. María Grisell (1995)[*].
  "Modelo de Fijación de Precios de los Activos de Capital (CAPM) para el Diseño de un Portafolio Optimo como una Aplicación del Análisis de Regresión".
  Actuaría.

- Vázquez T. Francisco Javier (1994).
  "El Mercado de Valores y la Minimización del Riesgo de una Cartera de Inversión".
  Actuaría.

[*] Tesis en elaboración.

APENDICE

A.1 MODELO BINOMIAL

Este modelo asume que los movimientos en precios tienen un comportamiento binomial en un periodo corto de tiempo de longitud Δt. Se considera la valuación de una opción sobre una acción, que no paga dividendos. La vida de la opción se divide en una gran número de pequeños intervalos de tiempo de longitud Δt. En cada intervalo de tiempo el precio se mueve de su valor inicial S a uno de los dos nuevos valores, Su y Sd, fig. A.1. En general, $u>1$ y $d<1$. El movimiento de S a Su es un movimiento hacia arriba (o a la alza) y el movimiento de S a Sd es un movimiento hacia abajo (o a la baja). La probabilidad de un movimiento hacia arriba es p y la probabilidad de un movimiento hacia abajo es $1-p$.

Otro supuesto a considerar es el de suponer un mundo libre de riesgo, esto significa que para propósitos de valuación de opciones, asumimos que:

- El rendimiento esperado de todos los valores es la tasa libre de riesgo[6] .
- Los flujos de efectivo futuros pueden ser valuados descontando sus valores esperados a la tasa libre de riesgo.

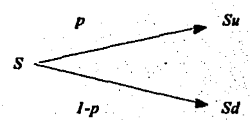


Fig. A.1 Movimientos del precio de la acción en el tiempo Δt.

[6] La tasa libre de riesgo se asocia con los títulos de deuda pública. En este caso se consideran los CETES, Certificados de la Tesorería de la Federación.

A.1.1 Determinación de *p, u* y *d*.

Los parámetros *p, u* y *d* serán los valores para la media y la varianza de los cambios en precio de la acción durante un intervalo de tiempo Δt. Dado que se supone un mundo libre de riesgo, el rendimiento esperado de la acción es la tasa de interés libre de riesgo, *r*. Ya que el valor esperado del precio de la acción al final del intervalo de tiempo Δt es $Se^{r\Delta t}$, donde *S* es el precio de la acción al comienzo del intervalo de tiempo, entonces:

$$Se^{r\Delta t} = p\,Su + (1-p)Sd \tag{A.1.1}$$

o bien,

$$e^{r\Delta t} = p\,u + (1-p)d \tag{A.1.2}$$

La varianza del cambio en el precio de la acción en un intervalo pequeño de tiempo Δt es $S^2 \sigma^2\Delta t$. Dado que la varianza de una variable *Q* se define como $E(Q^2) - [E(Q^2)]$, entonces:

$$S^2\sigma^2\Delta t = pS^2u^2 + (1-p)S^2d^2 - S^2[pu+(1-p)d]^2$$

o

$$\sigma^2\Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu+(1-p)d]^2 \tag{A.1.3}$$

De las ecuaciones A.1.2. y A.1.3 se tienen dos condiciones para *p, u* y *d*, una tercera condición es:

$$u = \frac{1}{d}$$

y estas tres condiciones implican que:

$$p = \frac{a-d}{u-d} \tag{A.1.4}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{A.1.5}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad \text{(A.1.6)}$$

donde:

$$a = e^{r\Delta t} \qquad \text{(A.1.7)}$$

Considerando el árbol mostrado en la fig. A.2, vemos que en el tiempo cero, el precio S de la acción es conocida. En el tiempo Δt, hay dos posibles precios de la acción, Su y Sd; en el tiempo $2\Delta t$ hay tres posibles valores para el precio de la acción, Su^2, S y Sd^2.

La relación $u = 1/d$ se usa en el cálculo del precio en cada nodo del árbol, por ejemplo, $Su^2d = Su$. Es importante hacer notar la recombinación que se hace en el árbol en el sentido de que un movimiento al alza ("up") seguido por un movimiento a la baja ("down") conduce al mismo precio como un movimiento a la baja seguido por un movimiento al alza. Esto hace que se reduzca el número de nodos en el árbol.

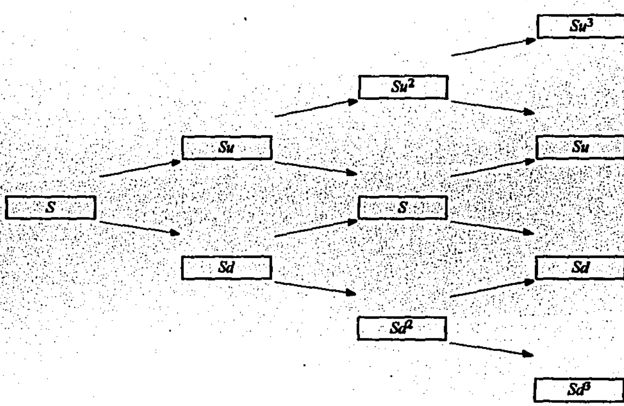


Fig. A.2 Arbol para valuar la opción sobre la acción.

Las opciones son valuadas comenzando al final del árbol (tiempo T) y trabajando de atrás hacia adelante. El valor de la opción es conocido en el tiempo T. Por ejemplo, el valor de

una opción put es max[K-S_T, 0] y el de una opción call max[S_T-K, 0], donde S_T es el precio de la acción en el tiempo T y con precio de ejercicio K. Dado que se asume un mundo libre de riesgo, el valor de cada nodo en el tiempo T-Δt puede ser calculado como el valor esperado en el tiempo T a la tasa r por un periodo de tiempo Δt. Similarmente, el valor de cada nodo en el tiempo T-$2\Delta t$ puede ser calculado como el valor esperado en el T-Δt descontado por un periodo Δt a la tasa r, y así sucesivamente, de tal manera que se obtenga el valor de la opción en el tiempo cero.

A.1.3 Ejercicio

Se supone una opción americana con un precio de ejercicio de 55 u.m., una volatilidad anual de 40% y una tasa de interés libre de riesgo de 10%. El precio de hoy es 50 u.m., el plazo de vencimiento es de 5 meses. Valuar la opción suponiendo que es de compra.

Datos:

Dividendo = 0
Δt = 5 meses = 0.4167 años.
n = 3 periodos
$\sigma_S = 0.40$
$r_f = 0.10$
$K = 55$
$S = 50$

1. Calculamos u, d y p.

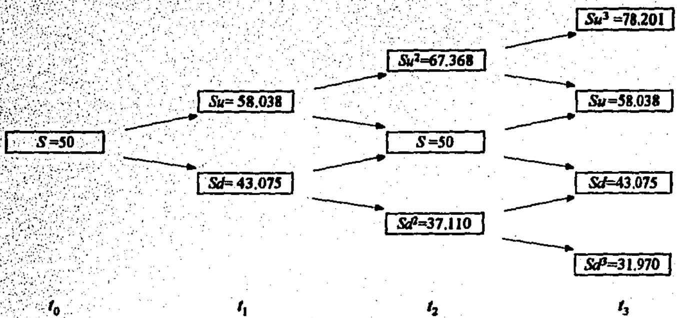
$$a = e^{r\Delta t} = e^{(0.10)(0.4167)} = 1.0139$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{(0.40)\sqrt{0.4167}} = 1.1607$$

$$d = 1/u = 1/1.1607 = 0.8615$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = (1.0139 - 0.8615)/(1.1607-0.8615) = 0.5095$$

Arbol del Activo Subyacente

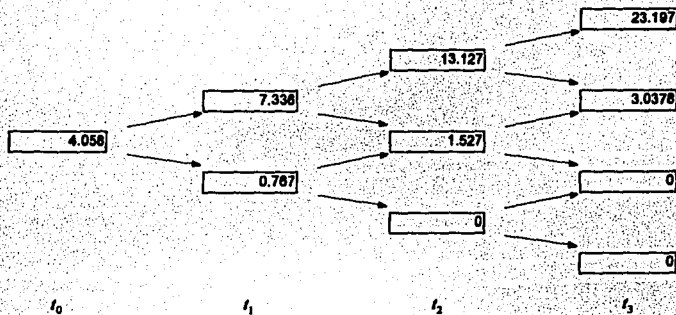


Para construir el arbol del activo subyacente, en este caso la acción, recordemos la gráfica de la Fig. A.2. El árbol para la valuación de la opción se construye tomando en cuenta el árbol del activo subyacente, de tal forma que:

			$w = max\ [Su^3-K,0]$
		$j=max[(pw+(1-p)x)/(1+r\Delta t), (Su^2-K)]$	
	$e=max[(pj+(1-p)k)/(1+r\Delta t), (Su-K)]$		$x = max\ [Su-K,0]$
$max[(pe+(1-p)f)/(1+r\Delta t), (Su-K)]$		$k=max[(px+(1-p)y)/(1+r\Delta t), (S-K)]$	
	$f= max[(pk+(1-p))/(1+r\Delta t), (Sd-K)]$		$y = max\ [Sd-K,0]$
		$l=max[(py+(1-p)z)/(1+r\Delta t), (Sd^2-K)]$	
			$z = max\ [Sd^3-K,0]$

En la opción americana se considera la alternativa de ejercer o no la opción en la fecha de vencimiento por lo que se incluye el máximo en la valuación, sustituyendo los valores obtenemos el árbol de la valuación de la opción.

Valuación de una Opción de Compra Americana



El valor de la opción de compra americana es 4.058 u.m.

A.2 MODELO DE BLACK & SCHOLES

Las hipótesis del modelo son las siguientes:

- **El mercado funciona sin fricciones, es decir, no existen costos de transacción, de información, ni impuestos y los activos son perfectamente divisibles.**
- **Las transacciones tienen lugar de manera continua y existe plena capacidad para realizar compras y ventas en corto.**
- **Los agentes pueden prestar y endeudarse a una misma tasa r.**
- **Las opciones son europeas y el subyacente no paga dividendos en el horizonte de valuación.**
- **El precio del subyacente sigue un proceso continuo estocástico de Gauss-Wiener.**

La versión del modelo de Black & Scholes fue diseñado para valuar opciones europeas que no pagaban dividendos, por lo que ni la posibilidad de un ejercicio prematuro de la opción o el pago de dividendos afectan el valor de las opciones en este modelo.

El valor de una CALL con el modelo de Black & Scholes puede definirse como una función de las siguientes variables:

S = valor de hoy del activo subyacente.
K = precio de ejercicio.
t = vida de la opción.
r = tasa de interés libre de riesgo.
σ^2 = varianza del activo subyacente.

Valor de la opcion de compra, CALL:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

S = precio del activo subyacente en el momento de la valuación.
K = precio de ejercicio.
r = tasa de intéres.
t = plazo de ejercicio en años.
$N(i)$ = valor de la función de la distribución normal para i.

Considerando la paridad PUT-CALL se obtiene la fórmula de valuación para un put:

$$P = K e^{-rt} N(-d_2) - S N(-d_1)$$ [7]

Ejercicio:

Se supone una opción europea con un precio de ejercicio de 55 u.m., una volatilidad anual de 40% y una tasa de interés libre de riesgo de 10%. El precio de hoy es 50 u.m., el plazo de vencimiento es de 5 meses. Valuar la opción suponiendo que es de compra.

[7] Recordemos que $N(-d_i) = 1 - N(d_i)$.

Datos:

Dividendo = 0
T = 5 meses = 0.4167 años.
$\sigma_S = 0.40$
$r_f = 0.10$
$K = 55$
$S = 50$

Recordando las fórmulas:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln (S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$$P = K e^{-rt} N(-d_2) - S N(-d_1)$$

Se sustituyen los valores en las fórmulas teniendo:

$$d_1 = \frac{\ln (50/55) + (0.10 + \frac{1}{2}\, 0.40^2)(0.4167)}{0.40\sqrt{0.4167}} = -0.0787$$

$$d_2 = -0.0787 - (0.40)(\sqrt{0.4167}) = -0.3369$$

$$N(d_1) = 0.4756$$

$$N(d_2) = 0.3681$$

$$C = (50)(0.4756) - (55)(e^{-(0.10)(0.4167)})(0.3681) = 4.3593 \text{ u.m.}$$

Si la opción es de venta, su valor será:

$$P = (55)(e^{-(0.10)(0.4167)})(1-0.3681) - (50)(1-0.4756) = 7.1147 \text{ u.m.}$$

GLOSARIO

Activo subyacente: activo sobre el que se ejerce la opción, pueden ser acciones, tasas de interés, divisas, mercancías o índices.

Arbitraje: estrategia de la que se pueden obtener beneficios comprando y vendiendo activos, sin tomar riesgos.

At the money (en el dinero): opciones cuyo precio de ejercicio es igual al precio del subyacente, no supone beneficio ni pérdida.

Bono recomprable (callable bond): bono que el emisor puede recomprar a un precio fijado y en una fecha determinada.

Bonos: valor emitido por un prestatario que obliga al emisor a hacer pagos específicos al tenedor en un periodo de tiempo específico.

Bonos corporativos: deuda de largo plazo emitida por corporaciones privadas que hacen pagos semestrales y al vencimiento el pago del principal.

Call sintética (opción de compra sintética): combinación de la compra de una opción de venta y la compra de un bien subyacente.

Caminata aleatoria:describe la dirección o trayectoria de los precios de la acción, siendo estos aleatorios e impredecibles.

Cobertura de riesgo: consiste en disminuir o eliminar el riesgo de mercado, combinando activos con riesgo y activos sin riesgo en la proporción adecuada.

Compra opción de, call: derecho a comprar un activo a un precio de ejercicio especifico antes o despues de la fecha de vencimiento.

Convexa, función: Si escogemos cualquier par de puntos M y N de la curva y se unen con una línea recta, el segmento lineal debe quedar enteramente por encima de la curva.

Dividendos: pagos que hace una compañía a sus accionistas.

Especulación: Asumir una inversión riesgosa con el objetivo de lograr beneficios positivos comparado con una alternativa de inversión libre de riesgo. Se realiza en forma privada y no existe garantía.

Forward: un contrato adelantado para una entrega futura de un activo en un precio acordado. Se realiza entre mercados.

Futuros: obliga a las partes a comprar o vender un activo en un precio ya acordado en una fecha futura específica.

In the money (dentro de dinero): describe una opción cuyo ejercicio da beneficios.

Opción americana: la opción puede ser ejercida antes o en la fecha de vencimiento.

Opción europea: la opción puede ser ejercida solamente en la fecha de vencimiento.

Out the money (fuera de dinero): describe una opción cuyo ejercicio no produce beneficios.

Paridad put-call: ecuación que describe la relación entre los precios de una opción de compra y una opcion de venta. La violación de dicha paridad ofrece oportunidades de arbitraje.

Portafolio: combinación de valores según las preferencias y necesidades del inversionista.

Precio de ejercicio: precio fijado para vender o comprar un activo.

Put sintética: combinación de una opción de compra con la venta de un subyacente.

Tasa libre de riesgo: tasa de interés que se puede ganar con certeza.

Valor intrínseco: valor que tiene una opción en un momento determinado si se ejerciera inmediatamente.

Valor tiempo: parte del valor de una opción cuyo valor es positivo al vencimiento.

Vega: mide la sensibilidad de la prima a las variaciones de la volatilidad implícita negociada en el mercado, o bien, la tasa de cambio del portafolio con respecto a la volatilidad de los activos.

Venta opción de, put: el derecho a vender un activo a un precio de ejercicio específico en o antes de la fecha de vencimiento especificada.

Ventas en corto: aquella operación en la que el vendedor obtuvo, mediante un contrato de préstamo, valores para liquidar una venta. En el contrato de préstamo se establece la obligación por parte del prestatario de restituir dichos valores o su equivalente al prestamista.

Venta opción de, put: el derecho a vender un activo a un precio específico y en una fecha determinada.

Volatilidad: se puede definir como la "velocidad" de movimiento del bien subyacente en el mercado.

Volatilidad implícita: refleja las expectativas del mercado sobre la volatilidad del subyacente hasta el vencimiento de la opción. Esta volatilidad será la variable desconocida en los modelos de valuación.

Warrants: opción emitida por una empresa para comprar acciones de la misma.