

01173/1
zey

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA**

**MODELACION COMPUTACIONAL DE PROBLEMAS
TERMOELASTICOS**

T E S I S

**PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER
EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA
(MECANICA).**

**PRESENTA
JUAN MANUEL ADAME PEREZ**

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. LUIS REYES AVILA**

CIUDAD UNIVERSITARIA

1995

FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

*A mis padres
por su apoyo incondicional
y valores que me inculcaron.*

A Mayte con todo cariño.

*A mis hermanos
con respeto y admiración.*

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis fue posible gracias al apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) que becó al autor de este trabajo durante sus estudios de posgrado y a la FUNDACIÓN UNAM que apoyó los proyectos de investigación que culminaron en esta obra. Deseo así mismo expresar mi profundo agradecimiento al director de esta tesis, Dr. Luis Reyes Ávila y a los demás miembros del jurado : Dr. Luis Ferrer Argote, Dr. Moisés Arroyo C., M.I. Mario Márquez M. y M.I. Mauricio Méndez C., por su apoyo y valiosas sugerencias que contribuyeron a enriquecer este trabajo.

Quiero agradecer especialmente a la Mat. Carmen Ramos Nava del laboratorio de visualización de la DGSCA por haber programado la visualización de diferencias de esfuerzo en GL y a todos mis compañeros y amigos de la DEPEFI por su apoyo.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta un enfoque computacional a los problemas termoelásticos. En el capítulo 1, tomando como marco teórico a la mecánica de los medios continuos se presentan los principios fundamentales de la termoelasticidad y se concluye con el modelo matemático general de los problemas termoelásticos; en el capítulo 2 se utiliza el método de subdiferenciales para encontrar la formulación variacional de dicho modelo. En el capítulo 3 explicamos el módulo termoelástico del programa de elemento finito MODULEF¹ a través de un ejemplo modelo y en el capítulo 4 aplicamos la metodología desarrollada para resolver problemas reales; en la primera parte del capítulo se aborda el problema de encontrar el estado de esfuerzos en una sección de combustible sólido como el utilizado para propulsar cohetes, se desarrolla también un programa que permite tomar los resultados de esfuerzos proporcionados por MODULEF y nos muestra un gráfico equivalente al de isocromáticas obtenido en los análisis experimentales de fotoelasticidad². Con esta herramienta es posible comparar cualitativamente los resultados del análisis numérico con los del análisis experimental. En la segunda parte del capítulo 4 se presenta el análisis del estado de esfuerzos a que esta sujeta una viga de izaje cuando ésta levanta 430 toneladas y se comparan estos valores con los obtenidos experimentalmente por medio de la extensometría, todo esto para decidir si la viga puede soportar la carga de forma segura.

Por último en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y recomendaciones.

¹ Biblioteca científica de elementos finitos, desarrollada en el Instituto Nacional de Investigación en Informática y Automatización (INRIA), Francia.

² Un listado de este programa aparece en el apéndice A

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
CAP. 1 MODELO FÍSICO	2
LEYES DE BALANCE DE FUERZAS Y DE MOMENTOS	2
TASA DE TRABAJO	6
LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA	6
LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA	7
MATERIALES ELÁSTICOS. CONSECUENCIAS DE LA SEGUNDA LEY	8
<i>Restricciones impuestas sobre los materiales elásticos por la segunda ley.</i>	10
<i>Procesos termodinámicamente admisibles.</i>	11
<i>En un proceso termodinámicamente admisible, las funciones de respuesta para esfuerzo y entropía satisfacen la relación de Maxwell.</i>	11
PRINCIPIO DE INDIFERENCIA AL SISTEMA DE REFERENCIA MATERIAL	13
<i>Consecuencias de la indiferencia al sistema de referencia material.</i>	15
CONSECUENCIAS DE LA DESIGUALDAD DE CONDUCCIÓN DEL CALOR	16
<i>Consecuencias de la desigualdad de conducción del calor.</i>	16
DERIVACIÓN DE LA TEORÍA LINEAL	17
HOMOGENEIDAD E ISOTROPÍA	23
EL CAMPO DE DIFERENCIA DE TEMPERATURAS	24
<i>Ecuaciones básicas.</i>	24
EL PROBLEMA DE VALORES EN LA FRONTERA E INICIALES	25
CARACTERIZACIÓN DEL PROBLEMA TERMOELÁSTICO EN TÉRMINOS DEL DESPLAZAMIENTO Y LA TEMPERATURA	26
CAP. 2 FORMULACIONES VARIACIONALES	28
FORMULACIÓN VARIACIONAL PRIMAL DEL PROBLEMA TERMOELÁSTICO	28
CAP. 3 EL MÓDULO TERMOELÁSTICO DE MODULEF	36
SOLUCIÓN DEL PROBLEMA TERMOELÁSTICO	39
<i>Mallado.</i>	40
<i>Elección del tipo de elemento finito y generación de las funciones de interpolación.</i>	44
<i>Especificación de los datos físicos del problema y creación de las matrices asociadas al elemento finito elegido.</i>	46
<i>Especificación de las condiciones de frontera tipo Dirichlet.</i>	48
<i>Solución del problema matricial.</i>	49
POSTPROCESO	50
CAP. 4 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS TERMOELÁSTICOS USANDO MODULEF	51
EL PROBLEMA DEL COMBUSTIBLE SÓLIDO	51
PROCEDIMIENTO DEL MODELADO	53
LA VIGA DE IZAJE	62
EL MALLADO	63
LA SOLUCIÓN	64
CAP. 5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	67
LA TERMOELASTICIDAD	67
MODULEF	67
APÉNDICE A. PROGRAMA DE ISODIFERENCIAS DE ESFUERZOS	69

Capítulo 1

MODELO FÍSICO

Leyes de balance de fuerzas y de momentos.

La fuerza de contacto ejercida sobre una parte $P \subset B$ de un cuerpo por su "entorno" en el tiempo t es:

$$\int_{\partial P} s(n, x, t) dA \equiv \int_{\partial P} s(n) dA$$

Ec. 1.1

donde $s(n, x, t)$ es la densidad de la fuerza de superficie definida para cada vector unitario n y cada (x, t) en la trayectoria τ .

El entorno también puede ejercer fuerzas sobre puntos en el interior de P , ejemplos de este tipo de fuerzas son las debidas a la gravedad, campos magnéticos, etc. Tales fuerzas están determinadas por un campo vectorial b sobre τ : $b(x, t)$ es la fuerza ejercida por el ambiente sobre x , de manera que

$$\int_{P_i} b(x, t) dV \equiv \int_{P_i} b dV$$

Ec. 1.2

es la fuerza ejercida por el ambiente sobre P que no son debidas al contacto.

A s se le conoce como la fuerza de superficie y a b la fuerza de cuerpo y se define la fuerza $f(P, t)$ y el momento $m(P, t)$ (alrededor de O) sobre una parte P en el tiempo t ,

$$f(P, t) = \int_{\partial P_t} s(n) dA + \int_{P_t} b dV$$

$$m(P, t) = \int_{\partial P_t} r \times s(n) dA + \int_{P_t} r \times b dV$$

Ec. 1.3

Aquí n es la normal a ∂P_t y r es un vector de posición.

Los axiomas básicos que relacionan el movimiento con la fuerza son las leyes de balance de momentum. Estas leyes aseguran que para cada parte P y tiempo t :

$$f(P, t) = l(P, t)$$

$$m(P, t) = a(P, t)$$

Ec. 1.4

Las ecuaciones Ec. 1.3 se pueden escribir como:

$$\int_{\partial P_t} s(n) dA + \int_{P_t} b dV = \int_{\partial P_t} v \rho dV$$

$$\int_{\partial P_t} r \times s(n) dA + \int_{P_t} r \times b dV = \int_{\partial P_t} r \times v \rho dV$$

Ec. 1.5

Si se introduce la fuerza de cuerpo total $b_t = b - \rho v$ para que incluya la fuerza de cuerpo inercial y retomando Ec. 1.3 se tiene:

$$f_t(P, t) = 0, m_t(P, t) = 0$$

Ec. 1.6

Ahora usando el teorema de Cauchy para sustituir $s(n)$ por Tn se tiene:

$$\int_{\partial P_t} Tn dA + \int_{P_t} b_t dV = 0$$

$$\int_{\partial P_t} r \times Tn dA + \int_{P_t} r \times b_t dV = 0$$

Ec. 1.7

Donde T es el tensor de esfuerzos de Cauchy.

El tensor de esfuerzos de Cauchy mide la fuerza de contacto por unidad de área en la configuración deformada. En muchos problemas de interés -especialmente aquellos que involucran sólidos- no es conveniente trabajar con T , dado que la configuración deformada no se conoce con anticipación. Por esta razón se introduce un tensor de esfuerzos que mide la fuerza por unidad de superficie en la configuración de referencia.

Para realizar esto utilizamos la identidad :

$$\int_{\mathcal{A}(p)} T(x)m(x)dAx = \int_{\mathcal{A}^p} T(f(p))G(p)n(p)dAp$$

Ec. 1.8

Nota: en este caso $G = \det(F)F^{-T}$

Entonces :

$$\int_{\mathcal{A}^p} TmdA = \int_{\mathcal{A}^p} \det(F)T_m F^{-T} ndA$$

Ec. 1.9

Donde m y n son respectivamente las normales a ∂P_t y ∂P , y T_m es la descripción material de T . Si hacemos :

$$S = \det(F)T_m F^{-T}$$

Ec. 1.10

Entonces :

$$\int_{\mathcal{A}^p} TmdA = \int_{\mathcal{A}^p} SndA$$

Ec. 1.11

Al tensor $S: B \times R \rightarrow \text{Lin}$ se le conoce como el tensor de esfuerzos de Piola-Kirchoff, además S_n es la fuerza de superficie medida por unidad de área en la configuración de referencia.

El vector r definido en la configuración de referencia se puede expresar

$$r = x + u - O$$

Ec. 1.12

De igual manera podemos usar la identidad:

$$\int_{\mathcal{A}(p)} v(x)dAx = \int_{\mathcal{A}^p} v(f(p))\det F(p)dVp$$

Ec. 1.13

Con esto la fuerza de cuerpo se puede escribir como:

$$\int_{P_1} b_i dV = \int_P b_m (\det F) dV = \int_P b_0 dV$$

Ec. 1.14

Llamamos a b_0 la fuerza de cuerpo en la configuración de referencia.

Ahora podemos escribir Ec. 1.7 como :

$$\begin{aligned} \int_{\partial P} S n dA + \int_P b_0 &= 0 \\ \int_{\partial P} (p + u) \times S n dA + \int_P (p + u) \times b_0 &= 0 \end{aligned}$$

Ec. 1.15

Donde $p = x - O$.

Aplicando el teorema de la divergencia al primer término de Ec. 1.15, se obtiene :

$$\int_{\partial P} S n dA = \int_P \operatorname{div} S dV$$

Ec. 1.16

Con lo que Ec. 1.15, se puede escribir :

$$\int_P (\operatorname{div} S + b_0) dV = 0$$

Ec. 1.17

por lo que : $\operatorname{div} S + b_0 = 0$

Además retomando Ec. 1.10 :

$$T = (\det F)^{-1} S F^T$$

Ec. 1.18

y en vista de que T es simétrico :

$$T = (\det F)^{-1} S F^T = (\det F)^{-1} F S^T$$

Ec. 1.19

Con esto, las leyes de balance de fuerzas y momentos toman la forma siguiente:

$$\operatorname{div} S + b_0 = 0$$

Ec. 1.20

$$SF^T = FS^T$$

Ec. 1.21

Tasa de trabajo.

La tasa de trabajo se define como :

$$w(P) = \int_{\partial P} (Sn) \cdot \dot{u} dA + \int_P b_0 \cdot \dot{u} dV$$

Ec. 1.22

A continuación se demuestra que esta expresión se puede escribir como:

$$w(P) = \int_P S \cdot F dV$$

Ec. 1.23

Demostración :

Tenemos que : $Sn \cdot \dot{u} = n \cdot S^T \dot{u} = S^T \dot{u} \cdot n$

de manera que:

$$\int_{\partial P} Sn \cdot \dot{u} dA = \int_{\partial P} S^T \dot{u} \cdot n dA$$

Aplicando el teorema de la divergencia :

$$\int_{\partial P} Sn \cdot \dot{u} dA = \int_P \text{div}(S^T \dot{u}) dV$$

Ahora $\text{div}(S^T \dot{u}) = S \cdot \nabla \dot{u} + \dot{u} \cdot \text{div} S$ además $\dot{F} = \nabla \dot{u}$

Con lo que (1) se puede escribir como :

$$\begin{aligned} w(P) &= \int_P S \cdot F dV + \int_P (\text{div} S + b_0) \cdot \dot{u} dV \\ \Rightarrow w(P) &= \int_P S \cdot F dV \end{aligned}$$

□

La primera ley de la termodinámica.

La primera ley de la termodinámica asegura que:

$$\frac{d}{dt} \int_P e dV = w(p) - \int_{\partial P} q \cdot n dA + \int_P r dV$$

Ec. 1.24

para cada parte $P \subset B$ y todo tiempo t . Aquí, $e(x,t)$ es la energía interna por unidad de volumen en $P \subset B$; $q(x,t)$ es el flujo de calor medido por unidad de área en P ; y $r(x,t)$ es el calor suministrado por unidad de volumen en P desde el exterior.

La cantidad: $\int_P e dV$ es la energía interna en P ; $-\int_{\partial P} q \cdot n dA$ es el flujo de calor total en P que cruza la frontera ∂P y $\int_P r dV$ representa el calor suministrado al interior de P desde el exterior. Si e es de clase $C^{0,1}$, q de clase $C^{1,0}$ y r continua sobre $P \times (0, t_0)$, entonces podemos representar Ec. 1.24 por medio del teorema de la divergencia como

$$\int_{\partial P} q \cdot n dA = \int_P \operatorname{div} q dV$$

Ec. 1.25

y Ec. 1.24 se escribirá, utilizando

$$\int_P \frac{de}{dt} dV = \int_P [S \cdot \vec{F} - \operatorname{div} q + r] dV$$

Ec. 1.26

$$\Rightarrow e = S \cdot \vec{F} - \operatorname{div} q + r$$

Ec. 1.27

La segunda ley de la termodinámica.

La segunda ley de la termodinámica asegura que:

$$\frac{d}{dt} \int_P \eta dV \geq - \int_{\partial P} \frac{q \cdot n}{\theta} + \int_P \frac{r}{\theta} dV$$

Ec. 1.28

para cada parte $P \subset B$ y todo tiempo t . Aquí, $\eta(x,t)$ es la entropía por unidad de volumen en P , y $\theta(x,t) > 0$ es la temperatura absoluta. De aquí que: $\int_P \eta dV$ es la entropía de P ; $\int_{\partial P} \frac{q \cdot n}{\theta} dA$ es el flujo de entropía total que cruza la frontera debido a la conducción y $\int_P \frac{r}{\theta} dV$ representa la

entropía suministrada al interior de P desde el exterior. Si además asumimos que η es de clase C^0 y θ de clase C^1 sobre $P \times (0, t_0)$ la segunda ley es equivalente¹ a:

$$\eta \geq -\operatorname{div} \left(\frac{q}{\theta} \right) + \frac{r}{\theta}$$

Ec. 1.29

Si introducimos el concepto de energía libre

$$\psi = e - \eta\theta$$

Ec. 1.30

y combinamos Ec. 1.27 y Ec. 1.30 tenemos:

$$-\eta = \frac{1}{\theta} (\dot{\psi} - S \cdot \dot{F} + \operatorname{div} q - r + \eta\dot{\theta})$$

Ec. 1.31

Sumando con Ec. 1.29 y sustituyendo

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{q}{\theta} \right) &= \frac{1}{\theta} \operatorname{div} q + q \cdot \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \\ &= \frac{1}{\theta} \operatorname{div} q - q \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta^2} \end{aligned}$$

Ec. 1.32

tenemos:

$$\dot{\psi} - S \cdot \dot{F} + \eta\dot{\theta} + \frac{1}{\theta} q \cdot \nabla \theta \leq 0$$

Ec. 1.33

Si hacemos $g = \nabla \theta$

$$\dot{\psi} + \eta\dot{\theta} - S \cdot \dot{F} + \frac{1}{\theta} q \cdot g \leq 0$$

Ec. 1.34

llegamos a la expresión de disipación local.

Materiales elásticos. Consecuencias de la segunda ley.

Dados el gradiente de deformación F , la temperatura θ y el gradiente de temperatura g en $x \in B$; se define un material elástico con las siguientes ecuaciones constitutivas que determinan la energía libre ψ , los esfuerzos S , la entropía η y el flujo de calor q .

¹ Aplicando un procedimiento similar al realizado en la primera ley.

$$\begin{aligned}\psi &= \hat{\psi}(F, \theta, g, x) \\ S &= \hat{S}(F, \theta, g, x) \\ \eta &= \hat{\eta}(F, \theta, g, x) \\ q &= \hat{q}(F, \theta, g, x)\end{aligned}$$

Ec. 1.35

Se asume que las funciones de respuesta $\hat{\psi}$, \hat{S} , $\hat{\eta}$ y \hat{q} son suaves en su dominio D , el cual es el conjunto de todos los (F, θ, g, x) donde F es un tensor con $\det F \neq 0$, θ es un campo escalar estrictamente positivo, g es un vector, y $x \in B$. Además se asume que \hat{S} es compatible con el balance de momentos en el sentido:

$$\hat{S}(F, \theta, g, x) F^T = F \hat{S}(F, \theta, g, x)^T$$

Ec. 1.36

Por conveniencia, generalmente se suprime x en Ec. 1.35.

Un proceso termoelásticamente admisible es un arreglo ordenado:

$$[u, \theta, \psi, S, \eta; q]$$

Ec. 1.37

que tiene las siguientes propiedades:

1. Todas las funciones tienen un dominio común de la forma $P \times T$, donde P es una parte de B y T es un intervalo abierto (de tiempo) de $(0, t_0)$.
2. u es un movimiento sobre $P \times T$, y θ es un campo escalar estrictamente positivo de clase $C^{2,1}$ sobre $P \times T$.
3. ψ , S , η y q están definidas sobre $P \times T$ a través de las relaciones constitutivas Ec. 1.35 con:

$$F = 1 + \nabla u, \quad g = \nabla \theta$$

Ec. 1.38

Dado un proceso termodinámicamente admisible, el balance de fuerzas (3.2) y el balance de energía (3.6) dan la fuerza de cuerpo f y la fuente de calor r que se debe aplicar para soportar el proceso:

$$f = -\operatorname{div} S, \quad r = \dot{\epsilon} - S \cdot F + \operatorname{div} q$$

Ec. 1.39

Sin embargo, la desigualdad de disipación local impone ciertas restricciones sobre las funciones de respuesta.

Restricciones impuestas sobre los materiales elásticos por la segunda ley.

Una condición necesaria y suficiente para que todo proceso termodinámicamente admisible obedezca la desigualdad de disipación local Ec. 1.34 es que se cumplan las siguientes tres sentencias:

1. Las funciones de respuesta: $\hat{\psi}$, \hat{S} , $\hat{\eta}$ son independientes del gradiente de temperatura:

$$\psi = \hat{\psi}(F, \theta) \quad S = \hat{S}(F, \theta), \quad \eta = \hat{\eta}(F, \theta) \quad \text{Ec. 1.40}$$

$\hat{\psi}$ determina \hat{S} a través de la relación de esfuerzos:

$$\hat{S}(F, \theta) = \partial_F \hat{\psi}(F, \theta) \quad \text{Ec. 1.41}$$

y a $\hat{\eta}$ a través de la relación de entropía:

$$\hat{\eta}(F, \theta) = -\partial_\theta \hat{\psi}(F, \theta) \quad \text{Ec. 1.42}$$

\hat{q} obedece a la desigualdad de conducción del calor:

$$\hat{q}(F, \theta, g) \cdot g \leq 0 \quad \text{Ec. 1.43}$$

DEMOSTRACIÓN :

Enseguida se demuestra la suficiencia de Ec. 1.42, 1.43 y 1.44 para la demostración de la necesidad consúltese ².

De acuerdo con Ec. 1.35:

$$\psi(F, \theta, g) = \partial_F \hat{\psi}(F, \theta, g) \cdot F + \partial_\theta \hat{\psi}(F, \theta, g) \theta + \partial_g \hat{\psi}(F, \theta, g) \cdot g$$

Ec. 1.44

por lo que Ec. 1.34 se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & [\partial_F \hat{\psi}(F, \theta, g) - \hat{S}(F, \theta, g)] \cdot F + [\partial_\theta \hat{\psi}(F, \theta, g) + \hat{\eta}(F, \theta, g)] \theta \\ & + \partial_g \hat{\psi}(F, \theta, g) \cdot g + \frac{1}{\theta} \hat{q}(F, \theta, g) \leq 0 \end{aligned}$$

Ec. 1.45

La suficiencia de Ec. 1.42, 1.43 y 1.44 se demuestra sustituyéndolas en Ec. 1.45.

² DONALD E CARLSON, Linear thermoelasticity

A partir de aquí se asume que las ecuaciones Ec. 1.42, 1.43 y 1.44 se cumplen.

De Ec. 1.30 se tiene:

$$\dot{e} = \dot{\psi} + \theta\dot{\eta} + \dot{\eta}\theta$$

Ec. 1.46

Además por Ec. 1.41 $\dot{\psi} = \partial_F \hat{\psi} \cdot \dot{F} + \partial_\theta \hat{\psi} \dot{\theta}$

y sustituyendo Ec. 1.42 y 1.43 $\dot{\psi} = S \cdot \dot{F} - \dot{\eta}\theta$

$$\Rightarrow \dot{e} = S \cdot \dot{F} + \theta\dot{\eta}$$

Ec. 1.47

y se tiene el siguiente resultado:

Procesos termodinámicamente admisibles

En un proceso termodinámicamente admisible, la ecuación de la energía Ec. 1.27 toma la forma:

$$\theta\dot{\eta} = -\text{div} q + r$$

Ec. 1.48

Así, un proceso termodinámicamente admisible es adiabático ($-\text{div} q + r \equiv 0$) si y sólo si es isentrópico ($\dot{\eta} \equiv 0$).

Otra consecuencia importante de 1 es:

En un proceso termodinámicamente admisible, las funciones de respuesta para esfuerzo y entropía satisfacen la relación de Maxwell.

$$\partial_\theta \hat{S}(F, \theta) = -\partial_F \hat{\eta}(F, \theta)$$

Ec. 1.49

DEMOSTRACION:

Dado que asumimos que \hat{S} y $\hat{\eta}$ son suaves, Ec. 1.42 y 1.43 implican que ψ es de clase C^2 . Por lo que:

$$\partial_\theta \partial_F \hat{\psi}(F, \theta) = \partial_F \partial_\theta \hat{\psi}(F, \theta)$$

Ec. 1.50

en donde sustituyendo Ec. 1.42 y 1.43 se obtiene Ec. 1.49. □

Retomando Ec. 1.30 y 1.41 junto con Ec. 1.35 se sabe que la energía interna obedece a una relación constitutiva de la forma:

$$e = \hat{e}(F, \theta)$$

Ec. 1.51

donde

$$\hat{e}(E, \theta) = \hat{\psi}(F, \theta) + \theta \hat{\eta}(F, \theta)$$

Ec. 1.52

al número

$$c(F, \theta) = \partial_{\theta} \hat{e}(F, \theta)$$

Ec. 1.53

se le conoce como calor específico. Por Ec. 1.52 y Ec. 1.53

$$c(F, \theta) = \partial_{\theta} \hat{\psi}(F, \theta) + \hat{\eta}(F, \theta) + \theta \partial_{\theta} \hat{\eta}(F, \theta)$$

Ec. 1.54

así, Ec. 1.43 implica:

$$c(F, \theta) = \theta \partial_{\theta} \hat{\eta}(F, \theta)$$

Ec. 1.55

de aquí en adelante se asume que:

$$c(F, \theta) > 0$$

Ec. 1.56

para todo (F, θ) . Dado que $\theta > 0$ Ec. 1.55 y Ec. 1.56 implican que $\hat{\eta}(F, \theta)$ es suavemente invertible en θ para toda elección de F , por tanto, se pueden escribir las ecuaciones constitutivas Ec. 1.35 en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} e &= \bar{e}(F, \eta) & S &= \bar{S}(F, \eta) \\ \theta &= \bar{\theta}(F, \eta) & q &= \bar{q}(F, \eta, g) \end{aligned}$$

Ec. 1.57

Para un F dado, la función $\eta \rightarrow \bar{\theta}(F, \eta)$ en Ec. 1.57 es precisamente la inversa de la función $\theta \rightarrow \hat{\eta}(F, \theta)$ en Ec. 1.35; mientras que por ejemplo la función \bar{e} está dada por:

$$\bar{e}(F, \eta) = e(F, \bar{\theta}(F, \eta))$$

Ec. 1.58

se sigue de Ec. 1.52 y Ec. 1.58 que:

$$\bar{e}(F, \eta) = \hat{\psi}(F, \bar{\theta}(F, \eta)) + \eta \bar{\theta}(F, \eta)$$

Ec. 1.59

además

$$\begin{aligned} \partial_F \bar{e} &= \partial_F \hat{\psi} + (\partial_\theta \hat{\psi}) \partial_F \bar{\theta} + \eta \partial_F \bar{\theta} \\ \partial_\eta \bar{e} &= (\partial_\theta \hat{\psi}) \partial_\eta \bar{\theta} + \bar{\theta} + \eta \partial_\eta \bar{\theta} \end{aligned}$$

Ec. 1.60

y se concluye de Ec. 1.42 y 1.43 que:

$$\begin{aligned} \bar{S}(F, \eta) &= \partial_F \bar{e}(F, \eta) \\ \bar{\theta}(F, \eta) &= \partial_\eta \bar{e}(F, \eta) \end{aligned}$$

Ec. 1.61

Las ecuaciones Ec. 1.61 son las relaciones de esfuerzo y temperatura cuando se toma a la entropía como la variable termodinámica independiente.

Principio de indiferencia al sistema de referencia material.

Este principio asegura que las relaciones constitutivas Ec. 1.35 son independientes del observador. Con un cambio en el observador las cantidades mecánicas y termodinámicas relevantes cambia como sigue:

$$\begin{aligned}
 F &\rightarrow QF \\
 S &\rightarrow QS \\
 \theta &\rightarrow \theta \\
 g &\rightarrow g \\
 \psi &\rightarrow \psi \\
 \eta &\rightarrow \eta \\
 q &\rightarrow q
 \end{aligned}$$

Ec. 1.62

donde Q es el tensor ortogonal que corresponde al cambio. Dado que Ec. 1.35 tiene que ser invariante bajo estos cambios, esta debe satisfacer:

$$\begin{aligned}
 \hat{\psi}(F, \theta) &= \hat{\psi}(QF, \theta) \\
 \hat{S}(F, \theta) &= Q^T \hat{S}(QF, \theta) \\
 \hat{\eta}(F, \theta) &= \hat{\eta}(QF, \theta) \\
 \hat{q}(F, \theta, g) &= \hat{q}(QF, \theta, g)
 \end{aligned}$$

Ec. 1.63

para cada tensor ortogonal Q y para todo $(F, \theta, g) \in D$.

Por el teorema de descomposición polar:

$$F = RU$$

Ec. 1.64

Dado R es ortogonal y U es un tensor positivo definido. ($U^2 = F^T F$).

Eligiendo $Q=R^T$ en Ec. 1.35 y usando Ec. 1.64, se llega a:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \hat{\psi}(U, \theta) \\
 S &= F U^{-1} \hat{S}(U, \theta) \\
 \eta &= \hat{\eta}(U, \theta) \\
 q &= \hat{q}(U, \theta, g)
 \end{aligned}$$

Ec. 1.65

Definiendo el tensor de deformaciones finitas D como:

$$D = \frac{1}{2}(U^2 - 1) = \frac{1}{2}(F^T F - 1)$$

Ec. 1.66

llegamos a:

Consecuencias de la indiferencia al sistema de referencia material.

Las ecuaciones constitutivas Ec. 1.65 satisfacen el principio de indiferencia al sistema de referencia material si y solo si se pueden escribir en la forma reducida:

$$\begin{aligned}\psi &= \tilde{\psi}(D, \theta) \\ S &= F\tilde{S}(D, \theta) \\ \eta &= \tilde{\eta}(D, \theta) \\ q &= \tilde{q}(D, \theta, g)\end{aligned}$$

Ec. 1.67

Además, las relaciones de esfuerzo y entropía de Ec. 1.42 y 1.43 se reducen a:

$$\begin{aligned}\tilde{S}(D, \theta) &= \partial_{\theta} \tilde{\psi}(D, \theta) \\ \tilde{\eta}(D, \theta) &= -\partial_{\theta} \tilde{\psi}(D, \theta)\end{aligned}$$

Ec. 1.68

DEMOSTRACIÓN: Las ecuaciones Ec. 1.67 se obtienen a partir de Ec. 1.65 y Ec. 1.66, por ejemplo para Ec. 1.65₂:

$S = FU^{-1}\dot{S}(U, \theta)$; y de Ec. 1.66 se puede escribir como $U = (2D+1)^{1/2}$ sustituyendo se tiene:

$$S = F[(2D+1)^{1/2}]^{-1}\dot{S}((2D+1)^{1/2}, \theta)$$

haciendo $\dot{S}((2D+1)^{1/2}, \theta) = \dot{S}(D, \theta)$; $f(D) = [(2D+1)^{1/2}]^{-1}$

$$S = Ff(D)\dot{S}(D, \theta)$$

lo cual puede escribirse:

$$S = F\tilde{S}(D, \theta)$$

donde $\tilde{S}(D, \theta) = f(D)\dot{S}(D, \theta)$

Ahora, que a partir de Ec. 1.67 se obtenga Ec. 1.65 se demuestra siguiendo el procedimiento inverso al ejemplificado.

Nótese que combinando Ec. 1.67₂ con Ec. 1.68, se tiene:

$S = F \partial_D \tilde{\psi}(D, \theta)$ la cual automáticamente satisface³:

$$SF^T = FS^T \square$$

Esto es, en termoelasticidad, el balance de momentos es una consecuencia del balance de fuerzas, las dos leyes de la termodinámica y la indiferencia al sistema de referencia material.

Consecuencias de la desigualdad de conducción del calor.

De acuerdo con Ec. 1.67₄ y Ec. 1.44 la función \tilde{q} debe satisfacer la desigualdad:

$$\tilde{q}(D, \theta, g) \cdot g \leq 0$$

Ec. 1.69

En esta sección se obtienen algunas implicaciones importantes de esta desigualdad.

Llamamos a $K(D, \theta) = -\partial_g q(D, \theta, g)|_{g=0}$ el tensor de conductividad. Manteniendo fijos D y θ y expandiendo:

$$\tilde{q}(g) \approx \tilde{q}(D, \theta, g)$$

Ec. 1.70

en una serie de Taylor alrededor de $g=0$ tenemos:

$$\tilde{q}(g) = \tilde{q}(0) - Kg + o(|g|) \text{ cuando } g \rightarrow 0$$

Ec. 1.71

usando Ec. 1.69 y Ec. 1.71

$$\tilde{q}(0) \cdot g - g \cdot Kg + o(|g|^2) \leq 0 \text{ cuando } g \rightarrow 0$$

Ec. 1.72

Esta desigualdad es válida para todo g si y solo si $\tilde{q}(0) = 0$ y $g \cdot Kg \geq 0$ para todo g . Así se tiene el siguiente resultado.

Consecuencias de la desigualdad de conducción del calor.

³ Dado que $S^T = \partial_D \tilde{\psi}(D, \theta) F^T$

El flujo de calor tiende a cero siempre que el gradiente de temperatura tiende a cero, o sea,

$$\bar{q}(D, \theta, 0) = 0$$

Ec. 1.73

y el tensor de conductividades $K(D, \theta)$ es positivo semidefinido. De Ec. 1.73

$$\partial_D \bar{q}(D, \theta, 0) = 0$$

$$\partial_\theta \bar{q}(D, \theta, 0) = 0$$

Ec. 1.74

Este resultado será de utilidad en la linealización de la siguiente sección.

Derivación de la teoría lineal.

El sistema completo de ecuaciones de campo para la teoría de la termoelasticidad no lineal se derivó en las secciones anteriores. Consiste de las leyes de balance:

$$\operatorname{div} S + f = 0$$

$$\dot{\eta} = -\operatorname{div} q + r$$

Ec. 1.75

junto con las ecuaciones constitutivas:

$$\psi = \bar{\psi}(D, \theta)$$

$$S = F\bar{S}(D, \theta)$$

$$\eta = \bar{\eta}(D, \theta)$$

$$q = \bar{q}(D, \theta, g)$$

Ec. 1.76

Donde:

$$F = 1 + \nabla u$$

$$D = \mathcal{K}_2(F^T F - 1)$$

$$g = \nabla \theta$$

Ec. 1.77

Por supuesto, esas relaciones constitutivas están sujetas a las restricciones termodinámicas:

$$\begin{aligned}\bar{S}(D, \theta) &= \partial_\theta \psi(D, \theta) \\ \bar{\eta}(D, \theta) &= -\partial_\theta \psi(D, \theta) \\ \bar{q}(D, \theta, g) \cdot g &\leq 0.\end{aligned}$$

Ec. 1.78

En esta sección se determina la aproximación lineal a este sistema bajo las siguientes consideraciones: el gradiente de desplazamientos y su variación en el tiempo son pequeños, el campo de temperaturas es casi igual a un campo uniforme dado θ_0 , llamado la temperatura de referencia; el cambio en el tiempo de la temperatura y su gradiente son pequeños. Así, se asume que:

$$|\nabla u|, |\nabla \dot{u}|, |\theta - \theta_0|, |\dot{\theta}|, |g| \leq \delta$$

Ec. 1.79

donde δ es pequeño.

Con Ec. 1.77, y Ec. 1.79, tenemos:

$$F = 1 + o(\delta)$$

Ec. 1.80

aquí y en lo que sigue toda sentencia de orden de magnitud son con $\delta \rightarrow 0$.

El tensor

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

Ec. 1.81

se conoce como el tensor de deformaciones infinitesimales, por Ec. 1.79

$$E = o(\delta)$$

$$\dot{E} = o(\delta)$$

Ec. 1.82

además combinando Ec. 1.77₂ con Ec. 1.77, tenemos:

$$D = \frac{1}{2}(F^T \dot{F} + \dot{F} F), \quad F = 1 + \nabla u \Rightarrow F^T = 1 + \nabla u^T$$

Ec. 1.83

por lo que

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{2}((1 + \nabla u^T)(1 + \nabla u) - 1) \\
 &= \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) + \frac{1}{2}\nabla u^T \nabla u \\
 &= E + \frac{1}{2}\nabla u^T \nabla u
 \end{aligned}$$

Ec. 1.84

Ec. 1.82 y Ec. 1.79 implican que:

$$\begin{aligned}
 D &= E + o(\delta^2) \\
 &= o(\delta)
 \end{aligned}$$

Ec. 1.85

mientras que:

$$\dot{D} = \dot{E} + \frac{1}{2}\nabla u^T \nabla \dot{u} + \frac{1}{2}\nabla \dot{u}^T \nabla u$$

Ec. 1.86

Ec. 1.82₂ y Ec. 1.79 implican que:

$$\begin{aligned}
 D &= \dot{E} + o(\delta^2) \\
 &= o(\delta)
 \end{aligned}$$

Ec. 1.87

Cuando $F=1$ y $\theta=\theta_0$, $D=0$ y $S = \tilde{S}(0, \theta_0)$

Así $\tilde{S}(0, \theta_0)$ representan los esfuerzos residuales a la temperatura de referencia, o sea, los esfuerzos que el cuerpo experimentaría si se mantuviera en la configuración de referencia a la temperatura uniforme θ_0 .

Se asume que:

$$\tilde{S}(0, \theta_0) = 0$$

Ec. 1.88

El asumir que los esfuerzos residuales son cero y que la temperatura de referencia es uniforme es crucial en el desarrollo de la teoría clásica.

Dado que asumimos que \tilde{S} es diferenciable, entonces utilizando la fórmula de Taylor lo podemos expresar como:

$$\tilde{S}(D, \theta) = \tilde{S}(D, \theta) \Big|_{\theta=\theta_0}^{D=0} + \partial_D \tilde{S}(D, \theta) \Big|_{\theta=\theta_0}^{D=0} (D - 0) + \partial_\theta \tilde{S}(D, \theta) \Big|_{\theta=\theta_0}^{D=0} (\theta - \theta_0) + o(\delta)$$

Ec. 1.89

Aplicando Ec. 1.88, Ec. 1.85, y haciendo:

$$C = \partial_D \bar{S}(D, \theta) \Big|_{\substack{D=0 \\ \theta=\theta_0}}$$

$$M = \partial_\theta \bar{S}(D, \theta) \Big|_{\substack{D=0 \\ \theta=\theta_0}}$$

Ec. 1.90

tenemos

$$\bar{S}(D, \theta) = C[E] + (\theta - \theta_0)M + o(\delta)$$

Ec. 1.91

Sustituyendo Ec. 1.91 en Ec. 1.76, y usando Ec. 1.80 tenemos:

$$S = C[E] + (\theta - \theta_0)M + o(\delta)$$

Ec. 1.92

Al tensor de cuarto orden C se le conoce como tensor de elasticidad; este es una transformación lineal del espacio de todos los tensores simétricos (de segundo orden) a si mismo. Por Ec. 1.78, y Ec. 1.90,

$$C = \partial_D^2 \tilde{w}(D, \theta) \Big|_{\substack{D=0 \\ \theta=\theta_0}}$$

Ec. 1.93

y se concluye que para cualquier par de tensores simétricos G, H :

$$G \cdot C[H] = C[G] \cdot H$$

Ec. 1.94

esto es, que C es simétrico. El tensor (de segundo orden) M se conoce como el tensor de esfuerzo temperatura; ahora, como $S=S^T$, se deduce que el tensor esfuerzo-temperatura es simétrico.

La expansión en series de Taylor de $q = \tilde{q}(D, \theta, g)$ alrededor de $(0, \theta_0, g)$ y considerando Ec. 1.73, Ec. 1.74, Ec. 1.79 y Ec. 1.85; tenemos:

$$q = \partial_g q(D, \theta, g) \Big|_{\substack{D=0 \\ \theta=\theta_0 \\ g=0}} + o(\delta)$$

Ec. 1.95

haciendo:

$$K = -\partial_g (0, \theta_0, g) \Big|_{g=0}$$

Ec. 1.96

entonces:

$$q = -Kg + o(\delta)$$

Ec. 1.97

La ecuación Ec. 1.97 asegura que con un error $o(\delta)$ el flujo de calor depende linealmente del gradiente de temperatura y es independiente de la deformación y la temperatura. Es importante notar que este resultado se sigue de la desigualdad de conducción del calor; no se consideraron argumentos concernientes a la simetría. Además no se hizo la consideración común de considerar que K es simétrico. De 1 se sabe que K es positivo semidefinido.

Si en la ley de balance de fuerzas Ec. 1.75, se introduce la fuerza de cuerpo no inercial b , entonces :

$$f = b - \rho i$$

Ec. 1.98

donde $\rho(x)$ es la densidad en la configuración de referencia y Ec. 1.75 se convierte en:

$$\operatorname{div} S + b = \rho i$$

Ec. 1.99

Para desarrollar la teoría completa, sólo falta derivar la forma linealizada de la ecuación de la energía Ec. 1.75₂. Usando Ec. 1.76₃

$$\dot{\eta} = \partial_D \tilde{\eta}(D, \theta) \cdot D + \partial_\theta \tilde{\eta}(D, \theta) \dot{\theta}$$

Ec. 1.100

Dado que $\tilde{\eta}$ es suave :

$$\partial_D \tilde{\eta}(D, \theta) = \partial_D \tilde{\eta}(D, \theta) \Big|_{\theta=\theta_0}^{D=0} + o(1)$$

$$\partial_\theta \tilde{\eta}(D, \theta) = \partial_\theta \tilde{\eta}(D, \theta) \Big|_{\theta=\theta_0}^{D=0} + o(1)$$

Ec. 1.101

donde se ha usado Ec. 1.79 y Ec. 1.85₂ para recortar las series de Taylor. De Ec. 1.78₁ y Ec. 1.78₂ se nota que:

$$\partial_D \tilde{\eta} = -\partial_\theta \tilde{S}$$

Ec. 1.102

Esta relación deducida de la ecuación de Maxwell Ec. 1.49 y Ec. 1.90₂ implican que:

$$\partial_D \tilde{\eta}(D, \theta) \Big|_{\theta=\theta_0}^{D=0} = -M$$

Ec. 1.103

por Ec. 1.55 y Ec. 1.67 el número

$$c = \theta_0 \partial_\theta \bar{\eta}(D, \theta) \Big|_{D=0, \theta=\theta_0}$$

Ec. 1.104

es el calor específico correspondiente a $D=0$ y $\theta=\theta_0$. Combinando Ec. 1.100-Ec. 1.104 y usando Ec. 1.79, Ec. 1.87₂ y Ec. 1.82₂ obtenemos:

$$\bar{\eta} = -\theta_0 M \cdot \bar{E} + c\theta + o(\delta)$$

Ec. 1.105

Sustituyendo este resultado en Ec. 1.75₂ se llega a la ecuación de la energía:

$$-\operatorname{div} q + \theta_0 M \cdot \bar{E} + r + o(\delta) = c\dot{\theta}$$

Ec. 1.106

Las ecuaciones Ec. 1.77₃, Ec. 1.81, Ec. 1.92, Ec. 1.97, Ec. 1.99 y Ec. 1.106 con los términos $o(\delta)$ considerados despreciables son las ecuaciones básicas de la teoría de la termoelasticidad lineal.

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

$$\operatorname{div} S + b = \rho \ddot{u}$$

$$-\operatorname{div} q + \theta_0 M \cdot \bar{E} + r = c\dot{\theta}$$

$$S = C[E] + (\theta - \theta_0)M$$

$$q = -k\nabla\theta$$

Ec. 1.107

Dado que M y C son simétricos, de Ec. 1.107₄ deducimos que $S=S^T$, es decir, que el tensor de esfuerzos es simétrico en la teoría lineal.

De acuerdo con Ec. 1.107₄, el tensor de esfuerzo-temperatura M proporciona el esfuerzo resultante de una distribución de temperaturas dada cuando no hay deformación:

$$S = (\theta - \theta_0)M \text{ cuando } E=0$$

Ec. 1.108

Cuando el tensor de elasticidad C es invertible, Ec. 1.107₄ se puede resolver para E :

$$E = K[S] + (\theta - \theta_0)A$$

Ec. 1.109

donde:

$$K = C^{-1}$$

$$A = -K[M]$$

Ec. 1.110

son llamados el tensor de concordancia y el tensor de expansión térmica respectivamente. De acuerdo con Ec. 1.109, el tensor de expansión térmica proporciona la deformación resultante de una distribución de temperaturas cuando no hay esfuerzo:

$$E = (\theta - \theta_0)A \text{ cuando } S=0$$

Ec. 1.111

Homogeneidad e Isotropía.

Cuando el material es homogéneo e isotrópico

$$C[E] = 2\mu E + \lambda(\text{tr } E)I$$

$$M = mI$$

$$K = kI$$

Ec. 1.112

Los escalares μ y λ se conocen como los módulos de Lamé; μ es el módulo cortante, m el módulo esfuerzo-temperatura y k es la conductividad. Combinando Ec. 1.112 con Ec. 1.107 arribamos a las ecuaciones básicas de la termoelasticidad lineal para cuerpos homogéneos e isotrópicos.

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

$$\text{div } S + b = \rho \ddot{u}$$

$$-\text{div } q + m\theta_0 \text{tr } \dot{E} + r = c\dot{\theta}$$

$$S = 2\mu E + \lambda(\text{tr } E)I + m(\theta - \theta_0)I$$

$$q = -k\nabla \theta$$

Ec. 1.113

Se sigue de Ec. 1.113, que en un cuerpo isotrópico, el esfuerzo es una presión cuando la deformación es cero.

$$S = m(\theta - \theta_0)I \text{ cuando } E=0$$

Ec. 1.114

Si $\mu \neq 0$ y $3\lambda + 2\mu \neq 0$ Ec. 1.113, se puede invertir para dar:

$$E = \frac{1}{2\mu} S - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} ((tr S)1 + \alpha(\theta - \theta_0)1)$$

Ec. 1.115

donde:

$$\alpha = \frac{-m}{3\lambda + 2\mu}$$

Ec. 1.116

se conoce como el coeficiente de expansión térmica. Comparando Ec. 1.115 con Ec. 1.109 se observa que en las presentes circunstancias

$$A = \alpha 1$$

Ec. 1.117

De acuerdo con Ec. 1.115 la deformación es una dilatación cuando el esfuerzo es cero,

$$E = \alpha(\theta - \theta_0)1 \text{ cuando } S=0$$

Ec. 1.118

El campo de diferencia de temperaturas.

El campo ϑ de diferencia de temperaturas se define

$$\vartheta = \theta - \theta_0$$

Ec. 1.119

Se asume que la temperatura de referencia uniforme θ_0 ha sido fijada. Obsérvese que ϑ puede tener valores negativos. En términos de ϑ , la relación de esfuerzo-deformación-temperatura y la ecuación de conducción del calor se escriben como:

$$S = C[E] + \vartheta M$$

$$q = -K\nabla\vartheta$$

Ec. 1.120

respectivamente.

Ecuaciones básicas.

El sistema fundamental de ecuaciones de campo consisten de la relación de deformación-desplazamiento:

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

Ec. 1.121

la relación gradiente térmico-temperatura

$$g = \nabla \vartheta$$

Ec. 1.122

la ecuación de movimiento

$$\text{div} S + b = \rho \dot{u}$$

Ec. 1.123

la ecuación de la energía

$$-\text{div} q + \theta_0 M \cdot \dot{E} + r = c \dot{\vartheta}$$

Ec. 1.124

la relación esfuerzo-deformación-temperatura

$$S = C[E] + \vartheta M$$

Ec. 1.125

y la ecuación de la conducción del calor

$$q = -K g$$

Ec. 1.126

Aquí $u, E, S, \vartheta, g, q, b$ y r son los campos de desplazamiento, deformación, esfuerzo, diferencia de temperaturas, gradiente térmico, flujo de calor, fuerza de cuerpo y fuente de calor respectivamente; mientras que ρ, c, M, K , y γ son los campos de densidad, elasticidad, esfuerzo-temperatura, conductividad y calor específico respectivamente; finalmente θ_0 es la temperatura de referencia uniforme.

El problema de valores en la frontera e iniciales.

El problema de la teoría de la termoelasticidad consiste en encontrar un proceso termoelástico $[u, E, S, \vartheta, g, q]$ que corresponda a b, r y que satisfaga las condiciones iniciales

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \dot{u}(\cdot, 0) = v_0, \quad \vartheta(\cdot, 0) = \vartheta_0 \quad \text{sobre } B$$

Ec. 1.127

La condición de desplazamiento

$$u = \hat{u} \quad \text{sobre } \partial B_1 \times [0, t_0],$$

Ec. 1.128

La condición de tracción

$$s = S n = \hat{s} \quad \text{sobre } \partial B_2 \times [0, t_0],$$

Ec. 1.129

La condición de temperatura

$$\vartheta = \hat{\vartheta} \quad \text{sobre } \partial B_3 \times [0, t_0],$$

Ec. 1.130

y la condición de flujo de calor

$$q = q \cdot n = \hat{q} \quad \text{sobre } \partial B_4 \times [0, t_0],$$

Ec. 1.131

Caracterización del problema termoelástico en términos del desplazamiento y la temperatura.

Un movimiento admisible u y un campo de temperaturas dependiente del tiempo admisible ϑ corresponden a la solución del problema termoelástico si y solo si

$$\begin{aligned} \operatorname{div} C[\nabla u] + \operatorname{div}(\vartheta M) + b &= \rho \dot{u} & \text{sobre } B \times (0, t_0), \\ \operatorname{div}(K \nabla \vartheta) + \theta_0 M \cdot \nabla u + r &= c \vartheta & \text{sobre } B \times (0, t_0), \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad \dot{u}(\cdot, 0) = v_0, \quad \vartheta(\cdot, 0) &= \vartheta_0 & \text{sobre } B, \\ u &= \hat{u} & \text{sobre } \partial B_1 \times [0, t_0], \\ (C[\nabla u] + \vartheta M)n &= \hat{s} & \text{sobre } \partial B_2 \times [0, t_0], \\ \vartheta &= \hat{\vartheta} & \text{sobre } \partial B_3 \times [0, t_0], \\ -(K \nabla \vartheta) \cdot n &= \hat{q} & \text{sobre } \partial B_4 \times [0, t_0]. \end{aligned}$$

Ec. 1.132

Cuando B es homogéneo e isotrópico, la primera, segunda, quinta y séptima de esas condiciones se reducen a:

$$\begin{aligned}
 \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + m \nabla \vartheta + b &= \rho \ddot{u} && \text{sobre } B \times (0, t_0), \\
 k \Delta \vartheta + m \theta_0 \operatorname{div} \dot{u} + r &= c \vartheta && \text{sobre } B \times (0, t_0), \\
 \mu (\nabla u + \nabla u^T) n + \lambda (\operatorname{div} u) n + m \vartheta n &= \hat{s} && \text{sobre } \partial B_2 \times [0, t_0], \\
 -k \nabla \vartheta \cdot n &= \hat{q} && \text{sobre } \partial B_3 \times [0, t_0]
 \end{aligned}$$

Ec. 1.133

La ecuación anterior es el modelo matemático de la termoelasticidad cuando el material del dominio es homogéneo e isotrópico. Regresaremos a este modelo en los capítulos siguientes.

Capítulo 2

FORMULACIONES VARIACIONALES

En este capítulo obtenemos la formulación variacional clásica del problema de valores en la frontera e iniciales de termoelasticidad a través del método de subdiferenciales propuesto en la referencia [1].

Para la formulación del problema de acuerdo con la metodología, se caracterizan las relaciones que gobiernan a los campos en el interior y sobre la frontera de la región en términos de subdiferenciales de funcionales convexas, para después identificar las componentes de tales expresiones subdiferenciales (lo cual caracterizara las condiciones y restricciones de los campos en estudio), y junto con la aplicación de la definición subdiferencial, obtener la interpretación variacional fuerte punto a punto del problema. A partir de esta interpretación y con la identificación de los correspondientes espacios de Hilbert para los operadores en cuestión obtenemos, después de integrar, la formulación variacional fuerte global. De aquí, aplicando las correspondientes fórmulas de Green, llegamos finalmente a la formulación variacional clásica del problema acoplado de termoelasticidad.

Formulación variacional primal del problema termoelástico.

Consideremos la caracterización (Ec. 2.1) del problema mixto en términos del desplazamiento y la temperatura:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} C[\hat{\nabla} u] + \operatorname{div}(\vartheta M) + b &= \rho \ddot{u} \text{ en } B \times (0, t_0) \\ \operatorname{div}(K \nabla \vartheta) + \theta_0 M \cdot \nabla u + r &= c \dot{\vartheta} \text{ en } B \times (0, t_0) \end{aligned}$$

Ec. 2.1

con las correspondientes condiciones iniciales

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \dot{u}(\cdot, 0) = v_0, \quad \vartheta(\cdot, 0) = \vartheta_0 \text{ en } \bar{B}$$

Ec. 2.2

y de frontera

$$\begin{aligned} u &= \hat{u} \text{ sobre } \partial B_1 \times [0, t_0) \\ -[C[\hat{\nabla} u] + \vartheta M]n &= -\hat{s} \text{ sobre } \partial B_2 \times [0, t_0) \\ \vartheta &= \hat{\vartheta} \text{ sobre } \partial B_3 \times [0, t_0) \\ -(K\nabla \vartheta) \cdot n &= \hat{q} \text{ sobre } \partial B_4 \times [0, t_0) \end{aligned}$$

Ec. 2.3

Como se mencionó anteriormente, en método utilizado para formular variacionalmente el problema 1 consiste, en primer termino, en caracterizar las condiciones en el interior de la región en cuestión y sobre su frontera en términos subdiferenciales, esto es:

$$u(x, t) \in D(\phi_1(x, \cdot))$$

$$-\rho(x)\dot{u}(x, t) + \operatorname{div}\{C[\hat{\nabla} u(x, t)] + \vartheta(x, t)M(x)\} + b(x, t) \in \partial\phi_1(x, u(x, t)) = \{0\},$$

$$(x, t) \in B \times (0, t_0),$$

$$(x, t) \in D(\phi_2(x, \cdot))$$

$$-c(x)\vartheta(x, t) + \operatorname{div}(K\nabla \vartheta) + \theta_0 M(x) \cdot \nabla u(x, t) + r(x, t) \in \partial\phi_2(x, \vartheta(x, t)) = \{0\},$$

$$(x, t) \in B \times (0, t_0)$$

$$u(x, t) \in D(\psi_1(x, \cdot)) = \mathfrak{R}^3$$

$$-[C[\hat{\nabla} u(x, t)] + \vartheta(x, t)M(x)]n(x) \in \partial\psi_1(x, u(x, t)) = \mathfrak{R}^3,$$

$$(x, t) \in \partial B_1 \times [0, t_0),$$

$$u(x, t) \in D(\psi_2(x, \cdot)) = \mathfrak{R}^3$$

$$-[C[\hat{\nabla} u(x, t)] + \vartheta(x, t)M(x)]n(x) \in \partial\psi_2(x, u(x, t)) = \{-\hat{s}(x, t)\},$$

$$(x, t) \in \partial B_2 \times [0, t_0),$$

$$\begin{aligned} (x, t) \in D(\psi_3(x, \cdot)) &= \{\mathcal{G}(x, t)\} \\ -(K\nabla \mathcal{G}(x, t)) \cdot n(x) \in \partial\psi_3(x, \mathcal{G}(x, t)) &= \mathfrak{R}, \\ (x, t) \in \partial\mathcal{B}_3 \times [0, t_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, t) \in D(\psi_4(x, \cdot)) &= \mathfrak{R} \\ -(K\nabla \mathcal{G}(x, t)) \cdot n(x) \in \partial\psi_4(x, \mathcal{G}(x, t)) &= \{\mathcal{G}\}, \\ (x, t) \in \partial\mathcal{B}_4 \times [0, t_0] \end{aligned}$$

Ec. 2.4

donde $\partial\phi(x, \cdot): \mathfrak{R} \rightarrow 2^{\mathfrak{R}}$, y $\partial\psi(x, \cdot): \mathfrak{R} \rightarrow 2^{\mathfrak{R}}$, $x \in \partial B$, son subdiferenciales que modelan las condiciones en el interior y sobre la frontera de \bar{B} , respectivamente, y los correspondientes subpotenciales $\phi(x, \cdot): \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \cup \{+\infty\}$, y $\psi(x, \cdot): \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \cup \{+\infty\}$, $x \in B$, son funcionales convexas, semicontinuas inferiormente y propias (esto es, $\neq +\infty$). Por tanto nuestro objetivo será identificar dichas funcionales $\phi(x, \cdot)$, y $\psi(x, \cdot)$, con sus dominios respectivos, ya que de esto se obtendrán las condiciones de admisibilidad para los campos de desplazamiento y temperatura, Así,

$$D(\phi_1(x, \cdot)) = \left. \begin{aligned} \phi_1(x, u(x, t)) &= 0, \\ \phi_1(x, \cdot) &= \{u(x, t) : u(x, t) \in \mathfrak{R}^3\} = \mathfrak{R}^3 \end{aligned} \right\} (x, t) \in B \times (0, t_0),$$

$$D(\phi_2(x, \cdot)) = \left. \begin{aligned} \phi_2(x, \mathcal{G}(x, t)) &= 0, \\ \phi_2(x, \cdot) &= \{\mathcal{G}(x, t) : \mathcal{G}(x, t) \in \mathfrak{R}\} = \mathfrak{R} \end{aligned} \right\} (x, t) \in B \times (0, t_0),$$

$$D(\psi_1(x, \cdot)) = \left. \begin{aligned} \psi_1(x, u(x, t)) &= \begin{cases} 0, & u(x, t) = \hat{u}(x, t), \\ +\infty, & u(x, t) \neq \hat{u}(x, t), \end{cases} \\ \psi_1(x, \cdot) &= \{u(x, t) : u(x, t) = \hat{u}(x, t)\}, \end{aligned} \right\} (x, t) \in \partial\mathcal{B}_1 \times [0, t_0],$$

$$D(\psi_2(x, \cdot)) = \left. \begin{aligned} \psi_2(x, u(x, t)) &= \mathcal{S}(x, t) \cdot u(x, t), \\ \psi_2(x, \cdot) &= \{u(x, t) : u(x, t) \in \mathfrak{R}^3\} = \mathfrak{R}^3 \end{aligned} \right\} (x, t) \in \partial\mathcal{B}_2 \times [0, t_0],$$

$$D(\psi_3(x, \cdot)) = \left. \begin{aligned} \psi_3(x, \mathcal{G}(x, t)) &= \begin{cases} 0, & \mathcal{G}(x, t) = \hat{\mathcal{G}}(x, t), \\ +\infty, & \mathcal{G}(x, t) \neq \hat{\mathcal{G}}(x, t), \end{cases} \\ \psi_3(x, \cdot) &= \{\mathcal{G}(x, t) : \mathcal{G}(x, t) = \hat{\mathcal{G}}(x, t)\}, \end{aligned} \right\} (x, t) \in \partial\mathcal{B}_3 \times [0, t_0],$$

$$D(\psi_4(x, t)) = \left. \begin{aligned} \psi_4(x, \mathcal{G}(x, t)) &= -\hat{g}(x, t) \mathcal{G}(x, t), \\ \mathcal{G}(x, t) \cdot \mathcal{G}(x, t) \in \mathfrak{R} &= \mathfrak{R} \end{aligned} \right\} (x, t) \in \partial B_4 \times [0, t_0]$$

Ec. 2.5

De acuerdo con lo anterior, y aplicando la definición de subdiferencial i , a la caracterización (4.4), el problema en términos de subpotenciales es:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\in \mathfrak{R}^3, \\ 0 &\geq \left\{ -\rho(x) \dot{u}(x, t) + \operatorname{div} C[\hat{\nabla} u(x, t)] + \mathcal{G}(x, t) M(x) + b(x, t) \right\} \cdot \{v(x, t) - u(x, t)\}, \\ \forall v(x, t) &\in \mathfrak{R}^3, (x, t) \in B \times (0, t_0). \end{aligned}$$

Ec. 2.6

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, t) &\in \mathfrak{R}, \\ 0 &\geq \left\{ -c(x) \mathcal{G}(x, t) + \operatorname{div}(K \nabla \mathcal{G}) + \theta_0 M(x) \cdot \nabla u(x, t) + r(x, t) \right\} \cdot \{\xi(x, t) - \mathcal{G}(x, t)\}, \\ \forall \xi(x, t) &\in \mathfrak{R}, (x, t) \in B \times (0, t_0), \end{aligned}$$

Ec. 2.7

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \hat{u}(x, t), \\ 0 &\geq \left\{ -\left(C[\hat{\nabla} u(x, t)] + \mathcal{G}(x, t) M(x) \right) n(x) \right\} \cdot \{v(x, t) - u(x, t)\}, \\ \forall v(x, t) &= \hat{u}(x, t), (x, t) \in \partial B_1 \times [0, t_0], \end{aligned}$$

Ec. 2.8

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, t) &\in \mathfrak{R}^3, \\ \delta(x, t) \cdot \{v(x, t) - u(x, t)\} &\geq \left\{ -\left(C[\hat{\nabla} u(x, t)] + \mathcal{G}(x, t) M(x) \right) n(x) \right\} \cdot \{v(x, t) - u(x, t)\}, \\ \forall v(x, t) &\in \mathfrak{R}^3, (x, t) \in \partial B_2 \times [0, t_0], \end{aligned}$$

Ec. 2.9

$$\begin{aligned} (x, t) &= \hat{\mathcal{G}}(x, t), \\ 0 &\geq \left\{ -(K \nabla \mathcal{G}(x, t)) \cdot n(x) \right\} \cdot \{\xi(x, t) - \mathcal{G}(x, t)\}, \\ \forall \xi(x, t) &= \hat{\mathcal{G}}(x, t), (x, t) \in \partial B_3 \times [0, t_0], \end{aligned}$$

Ec. 2.10

$$\begin{aligned}
 &(x, t) \in \mathfrak{R}, \\
 &-g(x, t)\{\xi(x, t) - \vartheta(x, t)\} \geq \{-K\nabla g(x, t) \cdot n(x)\}\{\xi(x, t) - \vartheta(x, t)\}, \\
 &\forall \xi(x, t) \in \mathfrak{R}, (x, t) \in \partial\mathcal{B}_1 \times [0, t_0]
 \end{aligned}$$

Ec. 2.11

donde ahora a éste problema se le conoce como la formulación variacional fuerte punto a punto.

Continuando con el procedimiento, se tiene que, de acuerdo al orden de los operadores diferenciales elípticos

$$\operatorname{div}\left(C\left[\hat{\nabla}u(x, t)\right] + g(x, t)\mathcal{M}(x)\right), \text{ y } \operatorname{div}(K\nabla g)$$

Ec. 2.12

los correspondientes espacios de Hilbert son:

$$V(\mathbf{B}) = H^1(\mathbf{B})^3,$$

$$W(\mathbf{B}) = H^1(\mathbf{B}).$$

esto es, el espacio de Sobolev de funciones vectoriales cuadráticamente integrables junto con sus gradientes en \mathbf{B} (en el sentido Lebesgue). Combinando las inecuaciones (2.6), (2.8), (2.9) y (2.7), (2.10) y (2.11) e integrando, obtenemos la formulación variacional fuerte global:

Bajo las condiciones iniciales:

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad u(\cdot, 0) = v_0, \quad \text{y } g(\cdot, 0) = g_0$$

encuentre $(u, g) \in K \times T$ tal que:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbf{B}} \rho \ddot{u} \cdot (v - u) d\mathbf{B} + \int_{\partial\mathcal{B}_1} \hat{s} \cdot (v - u) d\hat{\mathcal{C}}\mathcal{B}_1 \geq \int_{\mathbf{B}} \operatorname{div}\left(C\left[\hat{\nabla}u\right] + g\mathcal{M}\right) \cdot (v - u) d\mathbf{B} + \\
 &\int_{\mathbf{B}} b \cdot (v - u) d\mathbf{B} - \int_{\partial\mathcal{B}_1} \left(C\left[\hat{\nabla}u\right] + g\mathcal{M}\right) n \cdot (v - u) d\hat{\mathcal{C}}\mathcal{B}_1, \quad \forall v \in K
 \end{aligned}$$

Ec. 2.13

$$\int_B c \vartheta (\xi - \vartheta) dB - \int_{\partial B_1} \hat{q} (\xi - \vartheta) d\partial B_1 \geq \int_B \operatorname{div} (k \nabla \vartheta) (\xi - \vartheta) dB + \int_B r (\xi - \vartheta) dB + \int_B \theta_0 M \cdot \hat{\nabla} u (\xi - \vartheta) dB - \int_{\partial B_1} (k \nabla \vartheta) \cdot n (\xi - \vartheta) d\partial B_1, \quad \forall \xi \in T$$

Ec. 2.14

donde K y T son los conjuntos de campos de desplazamiento y temperatura cinemática y térmicamente admisibles respectivamente, los cuales corresponden a la definición de los dominios efectivos de los funcionales $\phi(x, \cdot)$, $x \in B$, y $\psi(x, \cdot)$, $x \in \partial B$, y son dados por:

$$K = \left\{ v \in H^1(B)^3 : v|_{\partial B_1} = \hat{u} \right\},$$

$$T = \left\{ \xi \in H^1(B) : v|_{\partial B_1} = \hat{g} \right\}$$

Ec. 2.15

Ahora, las fórmulas de Green correspondientes son:

$$\int_B \left(C [\hat{\nabla} u] + \mathcal{M} \right) \cdot \hat{\nabla} v dB = - \int_B \operatorname{div} \left(C [\hat{\nabla} u] + \mathcal{M} \right) \cdot v dB + \int_{\partial B} \left(C [\hat{\nabla} u] + \mathcal{M} \right) n \cdot v d\partial B,$$

$$\int_B K \nabla \vartheta \cdot \nabla \xi dB = - \int_B \operatorname{div} (K \nabla \vartheta) \xi dB + \int_{\partial B} (K \nabla \vartheta) \cdot n \xi d\partial B$$

Ec. 2.16

y al aplicar estas a (2.13) y (2.14) respectivamente, se llega a la formulación variacional clásica (débil):

Bajo las condiciones iniciales

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \dot{u}(\cdot, 0) = v_0 \quad \text{y} \quad \vartheta(\cdot, 0) = \vartheta_0$$

encuentre $(u, \vartheta) \in K \times T$ tal que:

$$\int_B \rho \dot{u} \cdot v dB + \int_B \operatorname{div} \left(C [\hat{\nabla} u] + \mathcal{M} \right) \cdot \hat{\nabla} v dB = \int_B b \cdot v dB + \int_{\partial B_2} \hat{s} v d\partial B_2, \quad \forall v \in K_0$$

Ec. 2.17

$$\int_B c \vartheta \xi dB + \int_B K \nabla \vartheta \cdot \nabla \xi dB - \int_B \theta_0 M \cdot \widehat{\nabla} \hat{u} \xi dB = \int_B r \xi dB + \int_{\partial B_4} \hat{q} \xi d\mathcal{B}_4 \quad \forall \xi \in T_0$$

Ec. 2.18

$$K_0 = \left\{ v \in H^1(B)^3 : v|_{\partial B_1} = \hat{u} \right\},$$

$$T_0 = \left\{ \xi \in H^1(B) : v|_{\partial B_1} = \hat{\vartheta} \right\}$$

Ec. 2.19

los cuales vienen a ser subespacios cerrados de K y T respectivamente.

Es así que se ha obtenido el principio variacional clásico del problema lineal Dirichlet-Neumann de termoelasticidad.

¹ G. Alduncin G., 1. Formulación Subdiferencial y Variacional de Problemas de Valores sobre la Frontera, en Comunicaciones Técnicas, Serie de Investigación No. 4, Instituto de Geofísica, UNAM, 1986.

2. Subdifferential and Variational Formulations of Boundary Value Problems, Submitted to Compl. Meths. Appl. Mech. Engrg. November 1987.

Capítulo 3

EL MÓDULO TERMOELÁSTICO DE MODULEF

En este capítulo se explica el funcionamiento del módulo termoelástico del programa MODULEF. Para realizar este objetivo, se utilizará el siguiente problema:

“Encontrar la deformación en una placa de acero sujeta a las solicitaciones que se muestran en la figura 1.”

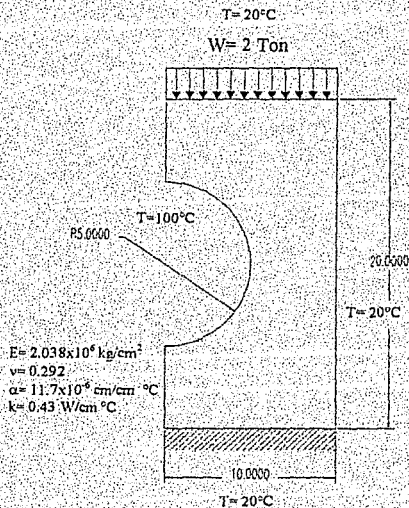


Figura. 1 Geometría y condiciones de frontera de la placa

Nótese que por estar la pieza sujeta a un gradiente de temperaturas y además estar bajo la acción de una carga, el problema al que nos enfrentamos es de tipo termoelástico.

El modelo matemático del problema termoelástico (1.133) se repite nuevamente aquí particularizando para el ejemplo que nos compete, (material homogéneo e isotrópico)

$$\begin{aligned}
 \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + m \nabla \vartheta + b &= 0 && \text{sobre } B \times (0, t_0) \\
 k \Delta \vartheta &= 0 && \text{sobre } B \times (0, t_0) \\
 u &= \hat{u} && \text{sobre } \partial B_1 \times [0, t_0) \\
 \vartheta &= \hat{\vartheta} && \text{sobre } \partial B_2 \times [0, t_0) \\
 \mu (\nabla u + \nabla u^T) n + \lambda (\operatorname{div} u) n + m \vartheta n &= \hat{s} && \text{sobre } \partial B_3 \times [0, t_0) \\
 -k \nabla \vartheta \cdot n &= \hat{q} && \text{sobre } \partial B_3 \times [0, t_0)
 \end{aligned}$$

Ec. 3.1

La solución empleando el método del elemento finito implementado en el programa MODULEF consta de dos etapas:

En la primera de ellas se obtiene el campo de temperaturas a que está sujeto el cuerpo, esto se consigue resolviendo el problema en cuestión como si se tratara de un problema exclusivamente térmico. Después, en la segunda etapa, se resuelve el problema termoelástico para encontrar los desplazamientos debidos a las cargas y a los gradientes de temperatura (proporcionados por el problema térmico). Note que este procedimiento es perfectamente válido debido a que por tratarse de un material homogéneo e isotrópico las ecuaciones (3.1)₁ y (3.1)₂ del modelo están desacopladas.

El problema térmico del problema anterior es el siguiente:

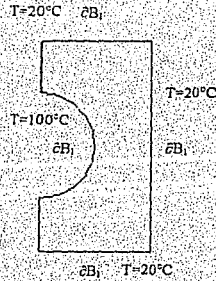


Figura. 2 Condiciones de frontera del problema térmico

su modelo matemático correspondiente es¹:

$$\begin{aligned}
 k\Delta\vartheta &= 0 \quad \text{sobre } B \times (0, t_0) \\
 \vartheta &= \hat{\vartheta} \quad \text{sobre } \partial B_1 \times [0, t_0) \\
 -k\nabla\vartheta \cdot n &= \hat{q} \quad \text{sobre } \partial B_2 \times [0, t_0)
 \end{aligned}$$

Ec. 3.2

el problema elástico es:



Figura. 3 Condiciones de frontera del modelo elástico.

y su modelo matemático:

¹ Note que en este problema en particular no se cuenta con la condición de frontera 2.

$$\begin{aligned} \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + m \nabla \vartheta + b &= 0 & \text{sobre } B \times (0, t_0) \\ u &= \tilde{u} & \text{sobre } \mathcal{B}_1 \times [0, t_0) \\ \mu (\nabla u + \nabla u^T) n + \lambda (\operatorname{div} u) n + m \vartheta n &= \hat{s} & \text{sobre } \mathcal{B}_2 \times [0, t_0) \end{aligned}$$

Ec. 3.3

El procedimiento para resolver problemas por medio de MODULEF es el siguiente:

1. Mallado del dominio.
2. Elección del tipo de elemento finito y generación de las funciones de interpolación.
3. Especificación de los datos físicos y creación de las matrices elementales.
4. Especificación de condiciones de frontera de tipo Diritchlet, (si las hay).
5. Solución del problema matricial resultante.

Los módulos a ejecutar en MODULEF para realizar estas etapas y los archivos generados son:

ETAPA	MÓDULO DE MODULEF	ARCHIVOS CREADOS
1.	MAILLER	NOPO
2.	INTERPOLER	COOR, MAIL
3.	CALCULS	TAE
4.	LIMITES	BDCL
5.	RESOUDRE	B

DESCRIPCIÓN DE ARCHIVOS CREADOS	
NOPO	Información de la malla creada (nodos, conectividades, etc.).
COOR	Almacena las coordenadas de los puntos.
MAIL	Información concerniente a la interpolación.
TAE	Matrices asociadas a los elementos finitos elegidos "matrices elementales".
BDCL	Lista de nodos con grados de libertad restringidos.
B	Solución al problema, (desplazamientos en los nodos).

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA TERMOELÁSTICO

Como se mencionó al principio de este capítulo, para proceder a resolver el problema termoelástico en MODULEF hay que contar con el campo de temperaturas a que está sujeto el cuerpo, dicho campo es proporcionado por MODULEF en el

archivo B que resulta después de ejecutar el módulo "RESOUDRE" cuando se resuelve el problema térmico. Esto quiere decir que hay que resolver necesariamente el problema térmico en MODULEF antes de utilizar el módulo termoelástico². En nuestro caso el campo de temperaturas obtenido después de ejecutar el módulo térmico en MODULEF es el que se muestra en la siguiente figura:

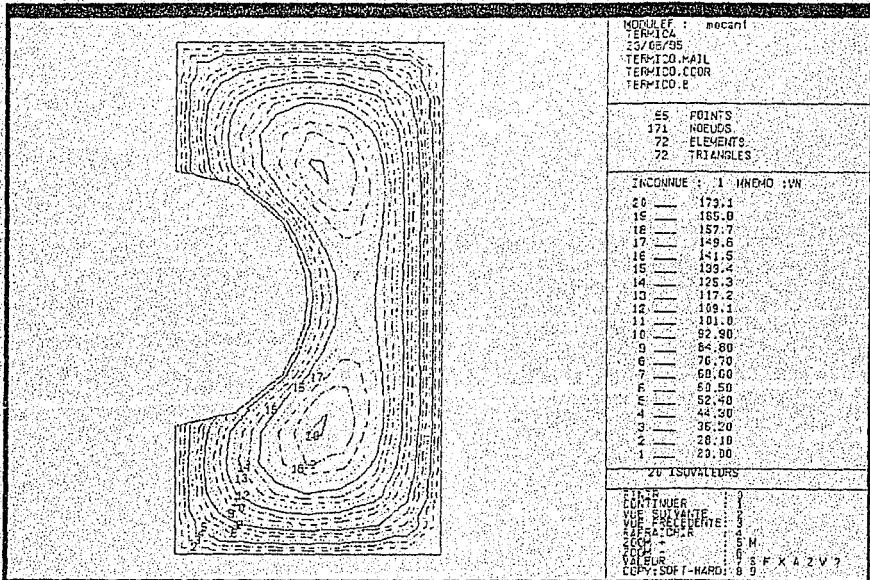


Figura. 4 Isovalores de temperatura

Mallado.

En general se puede utilizar el archivo NOPO de la parte térmica en la parte termoelástica, sin embargo, las referencias de las líneas que definen fronteras del problema térmico y las necesarias para el problema elástico generalmente no coinciden. Cambiar las referencias para establecer apropiadamente las condiciones de frontera en el problema elástico es muy sencillo, basta con editar el archivo de mallado de la parte térmica, grabarlo con un nombre adecuado y después ejecutarlo en el módulo de mallado de MODULEF.

² Para obtener información sobre el módulo térmico de MODULEF consulte "Manual de MODULEF"

Si se prefiere rehacer el archivo de mallado, el procedimiento es el siguiente:

- Especificación de la ecuación que define el semicírculo de la figura.
- Declaración del número de nodos y descripción de sus respectivas coordenadas.
- Declaración del número de líneas y descripción de:
 - El número de nodos totales en la línea.
 - El número de línea.
 - Los extremos de la línea.
 - El número de referencia.
 - La distribución de nodos sobre la línea.
- Elección del mallador a utilizar.
- La adición de nodos intermedios.
- La reenumeración de los nodos.
- La creación del archivo con los datos de la malla.

El procedimiento seguido en MODULEF para especificar todo lo anterior es el siguiente:

```

MAILLER - DESSINER - INTERPOLER - DONNEES - CALCULS
LIMITES - RESOUDRE - CONTRAINTE - ASSEMBLER - TRANSITOIRE
PROPRE - FLUX - IMPRIMER - UTILITAIRES - MENU DETAILLE - PAS DE DETAILS
FINIR ?
** TAPER LES 2 PREMIERS CARACTERES DE L'OPTION
MA

BIDIM - TRIDIM - COUCHES - UTILITAIRES - FIN ?
BI
*****
APPEL DE APNOPO : (MALLAGE 2D)
*****

- CREATION DU DATA -- EXECUTION MODULE (DATA EXISTANT) -- FIN -- ?

C
- TITRE DU TRAVAIL (20 CARACTERES AU PLUS) ?
TERMICA
*****
CREATION CONVERSATIONNELLE DES DONNEES DE APNOPO
*****
** ECRIRE EN MAJUSCULES S.V.P.
- NOM DU FICHIER DE COMMANDES A CREER (A) ?
TERMOELAS.MA

- UTILISER LES FONCTIONS INTERPRETEES (OUI-NON-?) ?
O
- DES DETAILS (OUI-NON) ?
O
PARAMETRE D'IMPRESSION (I) IMPRE
NOMBRE DE COURBES A DEFINIR (I) NFONC
- IMPRE NFONC ?
I I
LES I COURBES SONT NUMEROTEES DE 1 A I (OUI-NON) ?
N

```

```

** DONNER L'EXPRESSION F(X,Y) (= 0.) EN FINISSANT PAR ;
** LONGUEUR MAXI A64 ( 64 ESPACES )
** EXEMPLE : X**2 + Y**2 - 4;
      OU : X*X+Y*Y-4;
NUMERO DE LA COURBE      1 ?
2
-- COURBE 1 DE NUMERO      2 :
X*X + Y*Y - 25;
-- MOT CLEF ?
POIN
-- DES DETAILS      (OUI-NON) ?
O
PARAMETRE D'IMPRESSION      (I) IMPRE
NOMBRE DE POINTS CARACTERISTIQUES      (I) NPOINT
** NPOINT < 0 : LES NPOINT POINTS SONT FOURNIS VIA SPDPTS()
-- IMPRE NPOINT ?
10 6
POUR CHAQUE POINT : SA REFERENCE      (I) NOREF
      SON ABCISSE      (R) X
      SON ORDONNEE      (R) Y
** POUR NOREF IGNES DU MAILLAGE      (I) NDLM
-- IMPRE NDLM ?
10 6
POUR CHAQUE LIGNE DE NUMERO NOLIG :
SON NOMBRE DE POINTS ( EXTREMITES COMPRISES )      (I) NOELIG
NUMERO DU POINT EXTREMITÉ 1 ( DE 1 A NPOINT )      (I) NEXTR1
NUMERO DU POINT EXTREMITÉ 2 ( DE 1 A NPOINT )      (I) NEXTR2
NUMERO DE REFERENCE DE LA LIGNE      (I) NOREFL
OPTION POUR LA DESCRIPTION GEOMETRIQUE      (I) NFFRON
> 0 : FONCTION DESCRIPTIVE ( S.P. FFRONT OU INTERPRETEE )
= 0 : DROITE PASSANT PAR LES EXTREMITES
=-1 : POINTS DE LA LIGNE RENTRES A LA MAIN
=-2 : CERCLE CENTRE A L'ORIGINE
RAISON ( 1 => POINTS EQUIDISTANTS )      (R) RAISON
** SI NOELIG < 0, SUPPRESSION DES CONTROLES ET SORTIE DE 'LIGN'
-- LIGNE NUMERO      1 : NOELIG NEXTR1 NEXTR2 NOREFL NFFRON RAISON ?
5 1 2 1 0 1
-- LIGNE NUMERO      2 : NOELIG NEXTR1 NEXTR2 NOREFL NFFRON RAISON ?
10 2 3 4 0 1
-- LIGNE NUMERO      3 : NOELIG NEXTR1 NEXTR2 NOREFL NFFRON RAISON ?
5 3 4 3 0 1
-- LIGNE NUMERO      4 : NOELIG NEXTR1 NEXTR2 NOREFL NFFRON RAISON ?
3 4 5 4 0 1
-- LIGNE NUMERO      5 : NOELIG NEXTR1 NEXTR2 NOREFL NFFRON RAISON ?
6 6 5 2 10 1
** LA FONCTION D'INDICE      2 DECRIRA LA LIGNE      5
-- LIGNE NUMERO      6 : NOELIG NEXTR1 NEXTR2 NOREFL NFFRON RAISON ?
3 6 1 4 0 1
-- RESTER DANS CE MOT-CLE (OUI-NON) ?
N
-- MOT CLEF ?
QUAC
-- DES DETAILS      (OUI-NON) ?
O
PARAMETRE D'IMPRESSION      (I) IMPRE
NIVEAU DU MAILLAGE RESULTAT      (I) NIVEAU
SOUS-DOMAINÉ DE LA PARTIE A MAILLER      (I) NUDSD
NOMBRE DE LIGNES DE SON CONTOUR COMPLET      (I) NBRELI
SENS DE PARCOURS DE LA LIGNE 1 DU CONTOUR      (I) NSIL
  1 SI ELLE EST PARCOURUE DE NEXTR1 VERS NEXTR2
-1 SINON
** LE CONTOUR EST PARCOURU DANS LE SENS DIRECT !
-- IMPRE NIVEAU NUDSD NBRELI NSIL ?
10 1 1 6 1
NUMERO DE CHAQUE LIGNE DU CONTOUR      (I) NOLO
** RAPPEL : LE CONTOUR EST PARCOURU DANS LE SENS DIRECT
-- NOLO( 1 ) ?
1
-- NOLO( 2 ) ?
2

```



```

- NOLO( 3 ) ?
3
- NOLO( 4 ) ?
4
- NOLO( 5 ) ?
5
- NOLO( 6 ) ?
6
NOMBRE DE POINTS DU COTE 1 DU QUADRILATERE (I) IMAX
MAILLAGE EN TRIANGLES ( 0 , 1 , 2 ) (I) NQUAD
EN QUADRANGLES ( 1 )
- IMAXNQUAD ?
5 0
- ANNULER (OUI-NON) ?
N
- MOT CLEF ?
ADPO
- DES DETAILS (OUI-NON) ?
O
PARAMETRE D'IMPRESSION (I) IMPRE
NIVEAU DU MAILLAGE INITIAL (I) NIVEAU
NIVEAU DU MAILLAGE RESULTAT (I) NIVEAU
NOMBRE DE NOEUDS / ARETE (HORS EXTREMITES) (I) NI
NOMBRE DE NOEUDS INTERNES PAR TRIANGLE (I) ISET
NOMBRE DE NOEUDS INTERNES PAR QUADRILATERE (I) ISEQ
LES SOMMETS SONT DES NOEUDS ==> 1 (I) NOESOM
LES SOMMETS NE SONT PAS DES NOEUDS ==> 0
- IMPRE NIVEA1 NIVEA2 N1 ISET ISEQ NOESOM ?
10 1 2 1 0 0 1
- ANNULER (OUI-NON) ?
N
- MOT CLEF ?
RENC
- DES DETAILS (OUI-NON) ?
O
PARAMETRE D'IMPRESSION (I) IMPRE
NIVEAU DU MAILLAGE INITIAL (I) NIVEAU
NIVEAU DU MAILLAGE RESULTAT (I) NIVEAU
- IMPRE NIVEA1 NIVEA2 ?
10 2 1
- ANNULER (OUI-NON) ?
N
- MOT CLEF ?
SAUV
- DES DETAILS (OUI-NON) ?
O
PARAMETRE D'IMPRESSION DE LA S.D. ( 0 10 ) (I) IMPRE
NIVEAU DE LA S.D. (I) NINOPO
NOM DU FICHIER RESULTAT (A) NOM
NOMBRE DE TABLEAUX ASSOCIES A CETTE S.D. (I) NTNPOPO
** GENERALEMENT NTNPOPO = 0
- IMPRE NINOPO NOM_NOPO NTNPOPO ?
10 1 TERMOELAS.NOPO 0
- ANNULER (OUI-NON) ?
N
- MOT CLEF ?
FIN

```

La malla resultante es la siguiente:

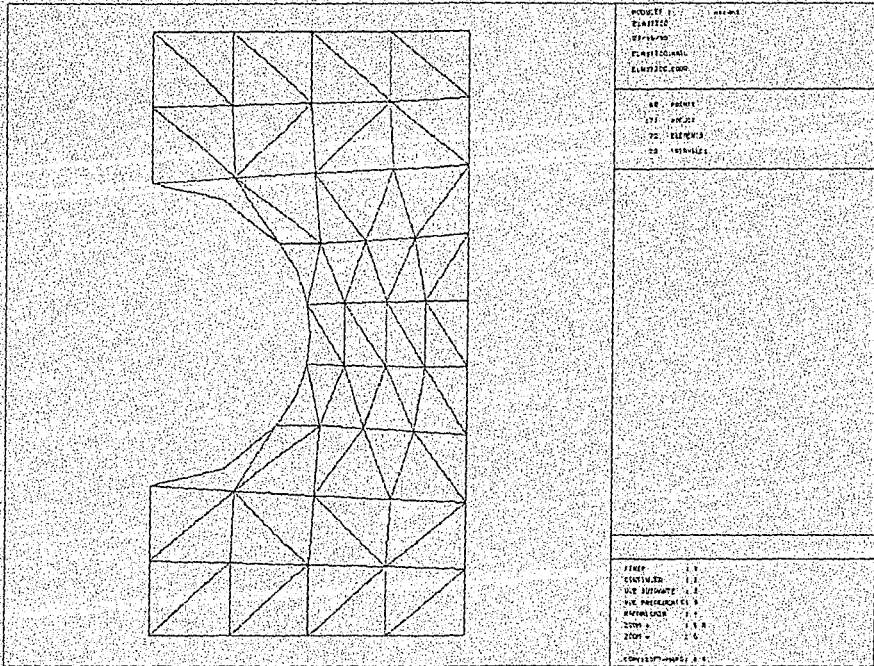


Figura. 5 Mallado de la placa

Elección del tipo de elemento finito y generación de las funciones de interpolación.

En esta etapa como su nombre lo dice hay que elegir el tipo de elemento finito que se utilizará en la solución del problema. En el presente ejemplo se ha utilizado un elemento triangular recto de orden dos para las partes rectas y un elemento triangular curvo de orden dos para las partes curvas. Esta parte es necesario crearla de nuevo en el módulo termoelástico debido a que el elemento finito que se utilizara en la solución del problema hay que obtenerlo de la biblioteca de *elasticidad* y no de la biblioteca *térmica*.

El procedimiento en MODULEF es el siguiente:

MAILLER - DESSINER - INTERPOLER - DONNEES - CALCULS
 LIMITES - RESQUINER - CONTRAINTES - ASSEMBLER - TRANSITOIRE
 PROPRE - FLUX - IMPRIMER - UTILITAIRES - MENU DETAILLE - PAS DE DETAILS
 FINIR ?

```

** TAPER LES 2 PREMIERS CARACTERES DE L'OPTION
IN
*****
APPEL DE COMACO : ( INTERPOLATION )
*****

-- CREATION DU DATA == EXECUTION MODULE (DATA EXISTANT) == FIN == ?

```

C

CREATION CONVERSATIONNELLE DES DONNEES DE COMACO

```

-- NOM DU FICHIER DE COMMANDES A CREER ?
TERMOELAS.IN
-- DIMENSION DE L'ESPACE ?
2
-- UTILISER LES FONCTIONS INTERPRETEES (OUI-NON) ?
O
PARAMETRE D'IMPRESSION (I) IMPRE
NOMBRE DE COURBES A DEFINIR (I) NFOC
-- IMPRE NFOC ?
1.1
LES 1 COURBES SONT NUMEROTEES DE 1 A 1(OUI-NON) ?
N
** DONNER L'EXPRESSION F(X,Y) (= 0.) EN FINISSANT PAR ;
** LONGUEUR MAXI A64 ( 64 ESPACES )
** EXEMPLE : X**2 + Y**2 - 4.
OU : X*X+Y*Y-4.
NUMERO DE LA COURBE 1 ?
2
-- COURBE 1 DE NUMERO 2 :
X**2+Y**2-25;
-- NOMBRE DE SOUS-DOMAINES ?
1
-- NOMBRE DE NUMEROS DE REFERENCE ?
4
-- NOMBRE DE LIGNES COURBES ?
1
-- NUMERO DE LA LIGNE COURBE : 1 ?
2
** APPEL DE LA BIBLIOTHEQUE D ELEMENTS (IDTECA=0)**
-- NOM DE LA BIBLIOTHEQUE ( NOM EN A4 OU ? ) ?
ELAS
-- NOMBRE DE TYPES D ELEMENTS DROITS DU SOUS-DOMAINES : 1 ?
1
-- NOM DE L' ELEMENT ( EN A4,1X,A4 OU ? ) DROIT ?
TRIA 2P2D
-- NOMBRE DE TYPES D ELEMENTS COURBES DU SOUS-DOMAINES : 1 ?
1
-- NOM DE L' ELEMENT ( EN A4,1X,A4 OU ? ) COURBE ?
TRIA 2P2C
-- NOM DU FICHIER DE LA S.D.E. NOPO ?
TERMOELAS.NOPO
-- NOM DU FICHIER DE LA S.D.S. MAIL ?
TERMOELAS.MAIL
-- NOM DU FICHIER DE LA S.D.S. COOR ?
TERMOELAS.COOR
-- Y A TIL DES TABLEAUX A ASSOCIER (OUI-NON) ?
N

-- CREATION DU DATA == EXECUTION MODULE (DATA EXISTANT) == FIN == ?

```

Especificación de los datos físicos del problema y creación de las matrices asociadas al elemento finito elegido.

En esta etapa se encuentra la diferencia entre la solución de un problema termoelástico y un problema elástico clásico; es aquí donde se proporciona el campo de temperaturas a que está sujeto el cuerpo.

Note que en el proceso que se muestra enseguida se proporcionan los coeficientes de expansión térmica en lugar de el módulo de esfuerzo temperatura y que se especifica el módulo elástico y la relación de Poisson en vez de las constantes de Lamé. Las equivalencias son las siguientes:

$$\alpha = -\frac{m}{3\lambda + 2\mu}$$

Ec. 3.4

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Ec. 3.5

En esta etapa se deben proporcionar los "datos físicos del modelo" (propiedades del material o los materiales que componen el dominio), también se proporcionan -si las hay- las condiciones de frontera de tipo Newman (especificación de cargas en la frontera).

El procedimiento en MODULEF es el siguiente:

MAILLER - DESSINER - INTERPOLER - DONNEES - CALCULS
 LIMITES - RESOUDRE - CONTRAINTE - ASSEMBLER - TRANSITOIRE
 PROPRE - FLUX - IMPRIMER - UTILITAIRES - MENU DETAILLE - PAS DE DETAILS
 FINIR ?

** TAPER LES 2 PREMIERS CARACTERES DE L'OPTION
 CA

GENERAL - CONSTANT - FINIR ?
 CO

 APPEL DE THERCT OU ELASCT : (CALCULS ELEMENTAIRES)

- CREATION DU DATA == EXECUTION MODULE (DATA EXISTANT) == FIN == ?

C

 CREATION CONVERSATIONNELLE DES DONNEES DE THERCT OU ELASCT

- NOM DU FICHER A CREER ?

```

TERMOELAS.CA
++ OPEN(10,FILE="termoclas.ca",SPEC=" ",RECL=0)
-- NOM DU FICHIER DE LA S.D.E. MAIL ?
TERMOELAS.MAIL
-- NOM DU FICHIER DE LA S.D.E. COOR ?
TERMOELAS.COOR
-- NOM DU FICHIER DE LA S.D.S. TAE ?
TERMOELAS.TAE
-- Y A TIL DES TABLEAUX A ASSOCIER (OUI-NON) ?
N
-- UTILISEZ-VOUS LE FICHIER POBA (OUI-NON) ?
N
-- PROVENANCE DU PROBLEME (NPROV) ?
** 1 : THERMIQUE ; 2 : ELASTICITE ; 5 : MAXWELL
2
-- INDICATEUR DE TRAITEMENT (NTHELA) ?
** 0 : PROBLEME CLASSIQUE
2 : ELASTICITE AVEC COUPLAGE THERMIQUE
3 : ELASTICITE AVEC CE COUPLAGE ET DES CONTRAINTES INITIALES
4 : ELASTICITE AVEC CONTRAINTES INITIALES
2
-- NOM DU FICHIER DE LA S.D.E. B ?
TERMICO.B
-- LE NOMBRE DE DL PAR NOEUD EST CONSTANT (OUI-NON) ?
O
-- CALCUL DE LA MATRICE DE MASSE (OUI-NON) ?
N
-- CALCUL DE LA MATRICE DE RAIDEUR (OUI-NON) ?
O
-- CALCUL DU OU DES SECONDS MEMBRES (OUI-NON) ?
O
-- NOMBRE DE CAS DE CHARGE ?
1
-- CALCUL DES CONTRAINTES (OUI-NON) ?
O
-- DIMENSION DE L'ESPACE ?
2
-- NOMBRE DE MATERIAUX (SOUS DOMAINES) A DECRIRE ?
1
-- NUMERO DU MATERIAU (SOUS DOMAINE) 1 A DECRIRE ?
1
-- NOMBRE DE REFERENCES A DECRIRE ?
1
-- NUMERO DE LA REFERENCE 1 A DECRIRE ?
3
-- LES ELEMENTS SONT AXISYMETRIQUES (OUI-NON) ?
N
-- CAS ISOTROPE (OUI) OU ANISOTROPE (NON) ?
O
-- CALCUL EN CONTRAINTES PLANES : 1
OU EN DEFORMATIONS PLANES : 2 ?
1
-- YOUNG ET POISSON (RIGIDITE ISOTROPE) DU MATERIAU 1 ?
2.038E06 0.292
-- LES 2 COMPOSANTES DES EFFORTS SURFACIQUES
DU CAS DE CHARGE 1 POUR LE MATERIAU 1 ?
0.0 0.0
-- LES 2 COMPOSANTES DES EFFORTS LINEIQUES
DU CAS DE CHARGE 1 POUR LA REFERENCE 3 ?
0.0 2E03
-- LES 3 COMPOSANTES DU TENSEUR DE DILATATION ?
POUR LE MATERIAU 1
DONNER : ALF11,ALF12,...
11.7E-6 11.7E-6 11.7E-6

-- CREATION DU DATA == EXECUTION MODULE (DATA EXISTANT) == FIN == ?

```

Especificación de las condiciones de frontera tipo Dirichlet.

En esta etapa se definen las condiciones de frontera tipo Dirichlet (especificación de desplazamientos conocidos de antemano en la frontera).

El procedimiento en MODULEF es el siguiente:

```

MAILLER - DESSINER - INTERPOLER - DONNEES - CALCULS
LIMITES - RESOUDRE - CONTRAINTE - ASSEMBLER - TRANSITOIRE
PROPRE - FLUX - IMPRIMER - UTILITAIRES - MENU DETAILLE - PAS DE DETAILS
FINIR ?
** TAPER LES 2 PREMIERS CARACTERES DE L'OPTION
LI
*****
APPEL DE COBDCI : (CONDITIONS LIMITE)
*****

- CREATION DU DATA == EXECUTION MODULE (DATA EXISTANT) == FIN == ?

C
*****
CREATION CONVERSATIONNELLE DES DONNEES DE COBDCI
*****

- NOM DU FICHIER A CREER ?
TERMOELAS.LI
++ OPEN(10,FILE=termoelas.li,SPEC="",RECL=0)
- NOM DU FICHIER DE LA S.D.E. MAIL ?
TERMOELAS.MAIL
- NOM DU FICHIER DE LA S.D.S. BDCL ?
TERMOELAS.BDCL
- ILY A DES TABLEAUX A ASSOCIER (OUI-NON) ?
N
- LES VALEURS DE BLOCAGES SONT :
  1 ==> CONSTANTES  2 ==> DONNEES PAR FONCTION ?
1
- TYPE DES VALEURS A BLOQUER : 2 (SIMPLE) 5 (DOUBLE PRECISION) ?
5
- VOULEZ-VOUS RESTAURER LA S.D.E. MAIL POUR VOUS GUIDER (OUI-NON) ?
O
++ OPEN(11,FILE=TERMOELAS.mail,SPEC=OLD,UNFORMATTED,RECL=0)
- BLOQUER DES D.L. SUR LA REFERENCE  1 (OUI-NON) ?
O
- BLOQUER L'INCONNUE VARIATIONNELLE : DEPLACEMENT EN X (OUI-NON) ?
O
** BLOCAGE DE SON MNEMONIQUE : VN
- VALEUR DU BLOCAGE (TYPE : 5) POUR VN ?
0.0
- BLOQUER L'INCONNUE VARIATIONNELLE : DEPLACEMENT EN Y (OUI-NON) ?
O
** BLOCAGE DE SON MNEMONIQUE : VN
- VALEUR DU BLOCAGE (TYPE : 5) POUR VN ?
0.0
- BLOQUER DES D.L. SUR LA REFERENCE  2 (OUI-NON) ?
N
- BLOQUER DES D.L. SUR LA REFERENCE  3 (OUI-NON) ?
N
- BLOQUER DES D.L. SUR LA REFERENCE  4 (OUI-NON) ?
N
- LE NOMBRE DE DL PAR NOEUD EST CONSTANT (OUI-NON) ?
O
- CONDITIONS EN RELATION LINEAIRE :
  0 PAS DE CONDITIONS
  1 ENTREE A LA MAIN (< 20)

```

```

-1 ENTREE PAR S.P. SPCLRL
0
-CREATION DU DATA --- EXECUTION MODULE (DATA EXISTANT) --- FIN --- ?

```

Esta etapa produce un archivo BDCL el cual contiene la lista de nodos con grados de libertad restringidos.

Solución del problema matricial.

Finalmente se procede a resolver el problema matricial final (resultado de globalizar las matrices elementales). Para ello se cuenta con los siguientes métodos:

- Cholesky
- Gradiente Conjugado
- Crout
- Frontal

El procedimiento en MODULEF utilizando el método de Cholesky es el siguiente:

```

MAILLER - DESSINER - INTERPOLER - DONNEES - CALCULS
LIMITES - RESOUDRE - CONTRAINTES - ASSEMBLER - TRANSITOIRE
PROPRE - FLUX - IMPRIMER - UTILITAIRES - MENU DETAILLE - PAS DE DETAILS
FINIR ?
** TAPER LES 2 PREMIERS CARACTERES DE L'OPTION
RE
CHOLESKY - CROUT - - FRONTAL - GRADIENT - FINIR ?
CH
*****
APPEL DE LA RESOLUTION METHODE DE CHOLESKY
*****

-CREATION DU DATA --- EXECUTION MODULE (DATA EXISTANT) --- FIN --- ?

C
*****
CREATION CONVERSATIONNELLE DES DONNEES DE L'ENCHAINEMENT CHOLESKY (SEQUENTIEL)
*****

-- NOM DU FICHER DE DONNEES A CREER ?
TERMOELAS.RE
++ OPEN(10,FILE='termoelas.re',SPEC='* RECL=0)
-- NOM DU FICHER DE LA S.D.E. MAIL ?
TERMOELAS.MAIL
-- NOMBRE DE CAS DE CHARGE (NDSM) ?
-- TYPE DES VALEURS DU PROBLEME (NTYP) ?
1 5
-- LE NOMBRE DE DL PAR NOEUD EST IL CONSTANT (OUI-NON) ?
0
-- NOMBRE DE DL PAR NOEUD ?
2
-- NOM DU FICHER DE LA S.D.E. TAE ?
TERMOELAS.TAE
-- Y A T'IL DES CONDITIONS AUX LIMITES FORCEES (OUI-NON) ?
0

```

```

-- NOM DU FICHIER DE LA S.D.E. BDCL ?
TERMOELAS.BDCL
-- Y A TIL DES RELATIONS LINEAIRES (OUI-NON) ?
N
-- NOM DU FICHIER DE LA S.D.S. B ?
TERMOELAS.B
-- PARAMETRE D'IMPRESSION DE LA SOLUTION ?
1

```

-- CREATION DU DATA == EXECUTION MODULE (DATA EXISTANT) == FIN == ?

POSTPROCESO.

Para obtener una idea de los efectos que sobre la placa producen los efectos combinados de la cargas y el gradiente de temperaturas aplicado es conveniente visualizar la “deformada” del cuerpo en estudio. Para nuestro ejemplo se obtuvo lo siguiente:

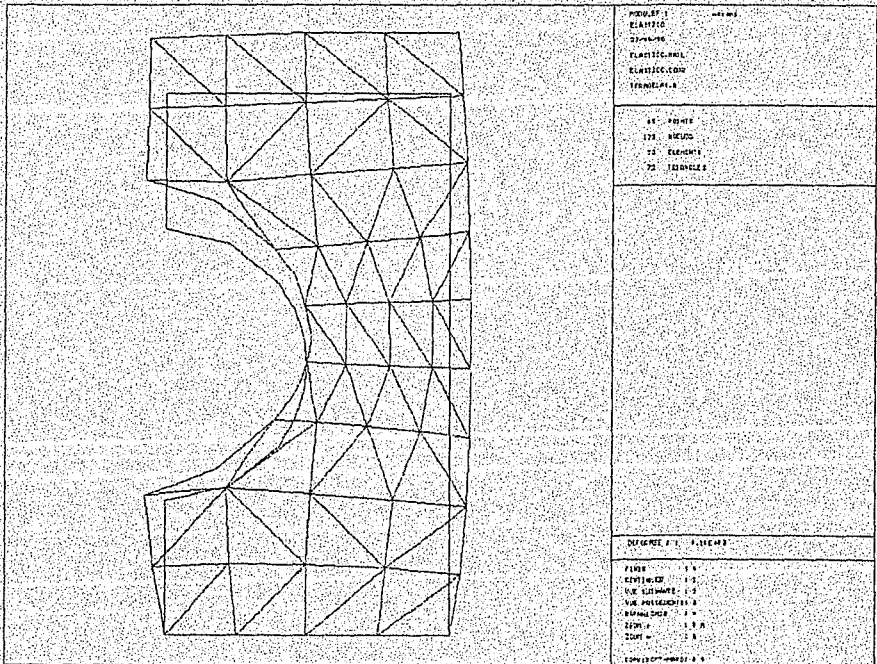


Figura. 6 Deformada.

Capítulo 4

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS TERMOELÁSTICOS USANDO MODULEF.

Como se mencionó en la introducción de este trabajo, en este capítulo se muestra la potencialidad del método del elemento finito para resolver problemas termoelásticos.

En la primera parte del capítulo se aborda el problema de encontrar la geometría óptima de la sección transversal de un bloque de combustible sólido utilizado en misiles, esto con la finalidad de mostrar que los resultados obtenidos con el MEF coinciden con los obtenidos con métodos experimentales como el de fotoelasticidad. En la segunda parte del capítulo se procedió a encontrar el estado de esfuerzos al que esta sometida una viga de izaje cuando esta levanta una carga de 430 toneladas. Este problema es un caso particular de los problemas termoelásticos en los que el fenómeno ocurre a temperatura constante y por lo tanto las ecuaciones de la termoelasticidad que aplican para este problema se reducen a las ecuaciones de la elasticidad.

EL PROBLEMA DEL COMBUSTIBLE SÓLIDO.

La figura 1 es una representación esquemática de un cohete propulsado con combustible sólido. El bloque de combustible es, en general, un cilindro hueco de pared gruesa, hecho de un material parecido al caucho, que está contenido en una carcasa de acero cilíndrica. La configuración de la perforación del bloque (la superficie interior del cilindro) es determinada principalmente por razones balísticas y estas ocasionan problemas de esfuerzos dado que el agrietamiento resultaría desastroso. Los extremos del cilindro tienen diferentes formas, en la mayoría de los casos, uno de ellos es cerrado y el otro es abierto.

El problema consiste entonces en que dada una geometría de la sección transversal se optimase ésta para evitar altas concentraciones de esfuerzos que puedan ocasionar agrietamiento.

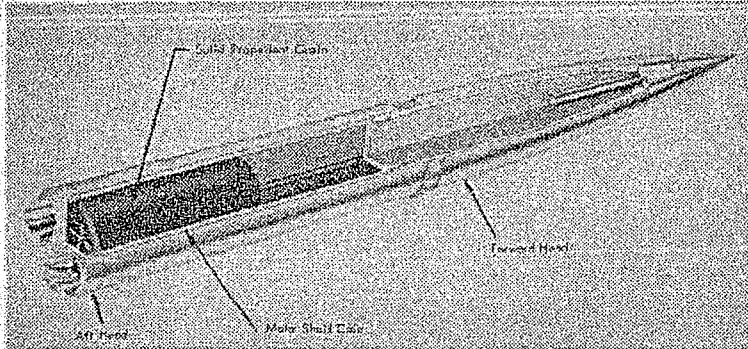


Figura. 1 Cohete propulsado con combustible sólido

En los bloques de combustible sólido para cohetes pueden actuar sucesiva o simultáneamente varios tipos de cargas. Entre las más importantes se puede mencionar: (1) presión interna, (2) carga térmica del tipo de contracción, (3) carga por gradiente térmico, (4) carga térmica transitoria, (5) cargas de inercia, (6) diferencia local de presión dentro del bloque, (7) vibraciones, (8) esfuerzos residuales y (9) fuerzas de cuerpo (en almacenamiento). De estas, las primeras dos son generalmente las más importantes.

Se ha mostrado que en cuanto a esfuerzos se refiere, los extremos no constituyen el problema principal^{ii, iii}. En estos casos, se ha procedido a realizar modelos bidimensionales de la sección transversal del bloque de combustible sólido y se han analizado con fotoelasticidad bidimensional.

Dado que la información de que se dispone sobre este problema es abundante se pretende modelar una de las geometrías típicas de la sección transversal de un bloque de combustible sólido por medio del elemento finito y comparar los valores de esfuerzo obtenidos con los publicados en las referencias mencionadas.

Es importante mencionar aquí que de los resultados obtenidos en los análisis fotoelásticos solo se han publicado las imágenes de isocromáticas e isoclinas (los resultados concretos están catalogados como confidenciales) por lo que la comparación con el análisis numérico se realizó en forma cualitativa.

PROCEDIMIENTO DEL MODELADO.

Se ha podido mostrar que en muchos casos tanto la presión interna como la carga térmica del tipo de contracción se puede modelar con suficiente precisión por medio de una presión hidrostática aplicada a la frontera exterior del modelo fotoelástico, sin embargo, el análisis del segundo tipo de carga se puede modelar también usando una carga térmica real. En este análisis un modelo hecho de hule de poliuretano se pega a un arco de acero para simular el efecto de la carcasa y se coloca en una cámara fría.

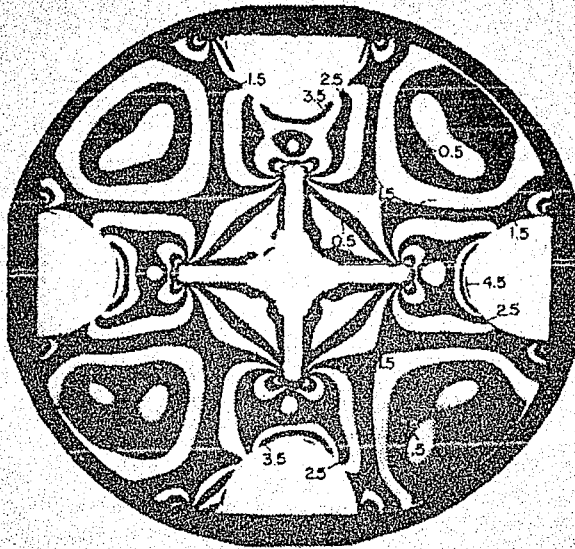


Figura. 2 Isocromáticas obtenidas con fotoelasticidad

De este experimento se han obtenido patrones de isocromáticas como el que se muestra en la figura 2. Nuestro objetivo es mostrar que con un análisis de elemento finito podemos obtener un patrón de esfuerzos cualitativamente igual al mostrado.

De la descripción del procedimiento seguido en la fotoelasticidad se pudo obtener los datos necesarios para nuestro análisis, la única dificultad aparece al intentar comparar los resultados, pues al resolver el problema con MODULEF obtenemos gráficos de magnitud y dirección de esfuerzos principales pero no de "isodiferencias de esfuerzos principales" como en fotoelasticidad.

Para subsanar esta dificultad se creó un programa en lenguaje C utilizando las rutinas gráficas GL para estación de trabajo Silicon Graphics¹, que mostrara a partir de los datos proporcionados por MODULEF un gráfico equivalente al de isocromáticas para poder comparar.

La geometría escogida para realizar el análisis se tomó de i y es la que se muestra en la figura 3².

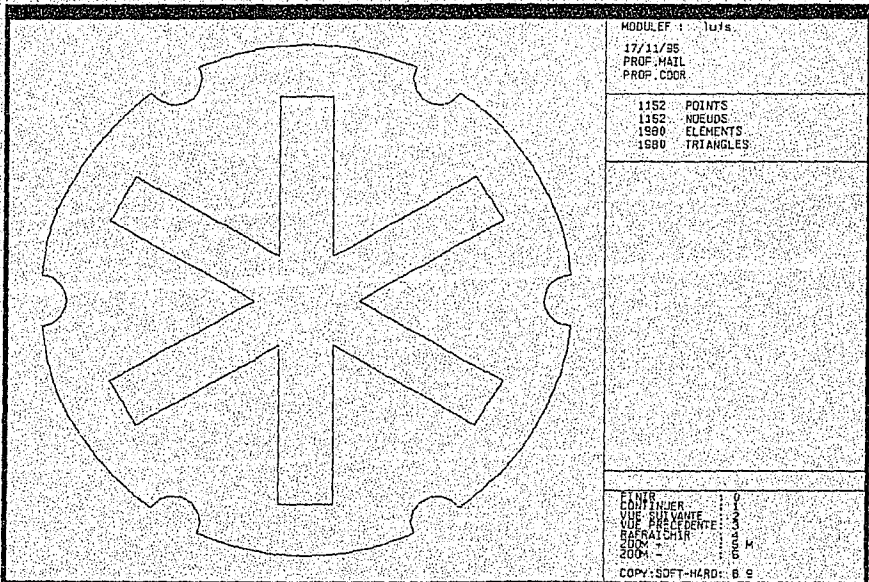


Figura. 3 Geometría

Como se deduce de la descripción del análisis fotoelástico, las condiciones de frontera del modelo serán:

Caso Térmico:

- Temperatura del hielo (0°C ó 32°F) en la frontera interior de la sección.
- Temperatura ambiente (30°C ó 86°F) en la frontera exterior.

¹ El listado de este programa aparece en el apéndice A.

² Desafortunadamente la imagen de la Figura. 2 se obtuvo después de haber concluido el análisis numérico sobre la geometría de la Figura. 3, pero incluso así se puede realizar una comparación cualitativa.

Caso Elástico:

- Desplazamiento cero en la frontera exterior para simular la rigidez de la carcasa de acero.

En cuanto al material, los datos son los siguientes:

DESCRIPCIÓN	SÍMBOLO	VALOR
Módulo de Elasticidad	E	1000 Psi
Relacion de Poisson	ν	0.48
Conductividad Térmica	k	2.33×10^{-3} BTU/h in $^{\circ}$ F
Coefficiente de expansión térmica	α	90×10^{-6} in/in $^{\circ}$ F

Sabemos además que el material del combustible sólido es parecido al caucho y que es heterogéneo, anisotrópico y con propiedades dependientes de la temperatura.

Sin embargo, en los análisis experimentales que se han realizado se ha podido simplificar dado que el objetivo principal de estos ha sido auxiliar a los diseñadores de configuraciones a decidir entre varias alternativas disponibles la mejor desde el punto de vista de distribución de esfuerzos, mas bien que encontrar la magnitud de los esfuerzos presentes en el combustible.

Es por esto mismo que nosotros asumimos que el material es homogéneo e isotrópico.

El mallado de la sección de combustible sólido se muestra en la figura 4, el hecho que se haya elegido un una discretización densa obedece a que después del análisis de elemento finito obtendremos un estado de esfuerzos (el tensor de esfuerzos, los esfuerzos principales y las direcciones principales) por cada elemento finito, de manera que los elementos se propusieron pequeños para que nuestro gráfico de isodiferencias de esfuerzos principales fuera lo más continuo posible pero a la vez cuidando que el problema no se hiciera demasiado grande.

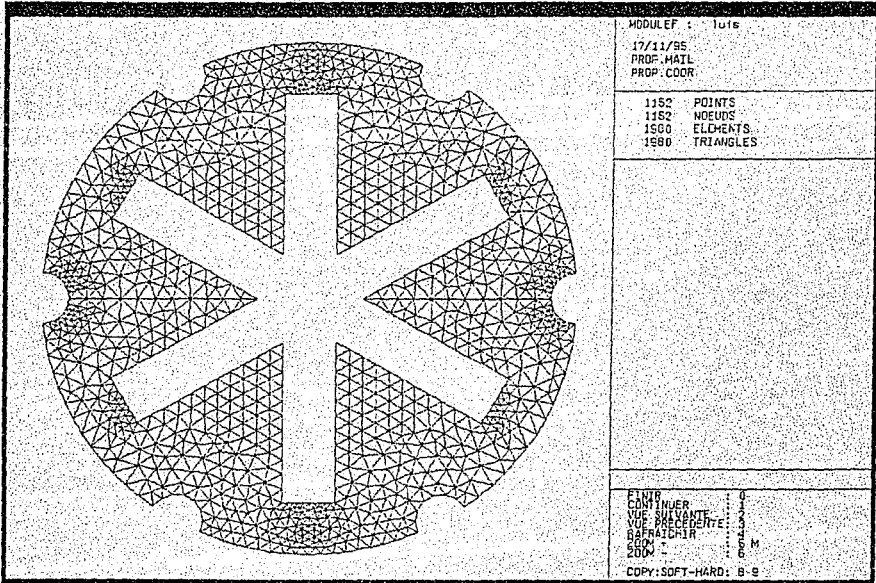


Figura. 4 Mallado

El resultado final del análisis térmico se muestra en la figura 5, este es un gráfico de isovalores de temperatura que muestra que la distribución de temperaturas en la sección es simétrica.

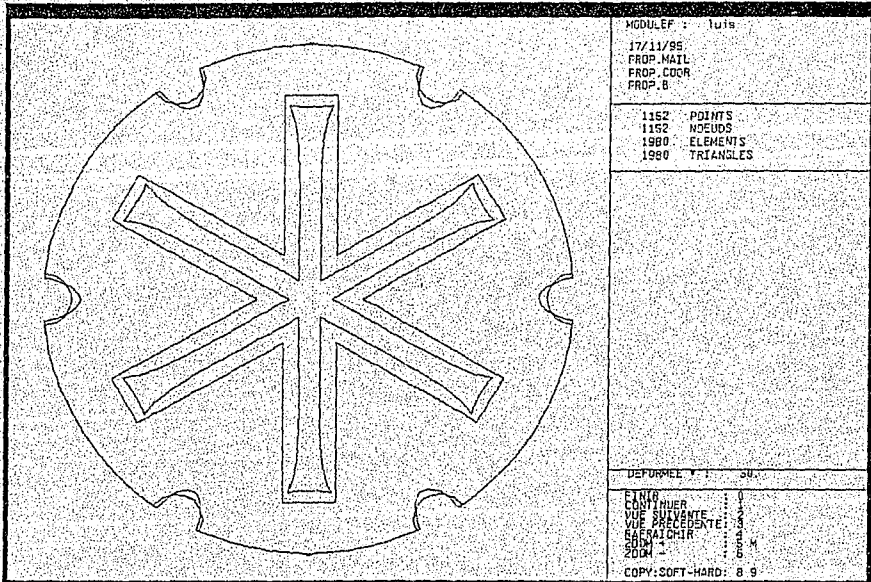


Figura. 6 Deformada (Exagerada 30 veces)

Con el campo de desplazamientos conocido, podemos entrar al módulo de cálculo de esfuerzos y obtener el tensor de esfuerzos, los esfuerzos principales y las direcciones principales para cada uno de los elementos finitos. En la figura 7 se muestra un gráfico de esfuerzos principales donde la dirección de la flecha muestra la dirección del esfuerzo y la longitud muestra la magnitud del esfuerzo mostrado.

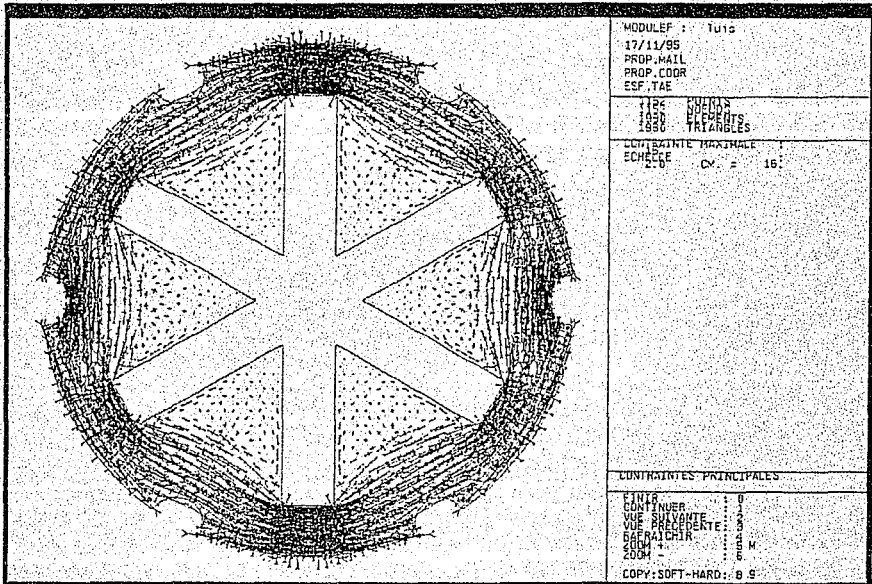


Figura. 7 Esfuerzos Principales

Al llegar a esta etapa tenemos toda la información necesaria para proceder al análisis cualitativo. Contamos con un archivo en ASCII con la información de esfuerzos requerida y dos estructuras de datos COOR y MAIL de donde obtendremos las coordenadas y la conectividad respectivamente.

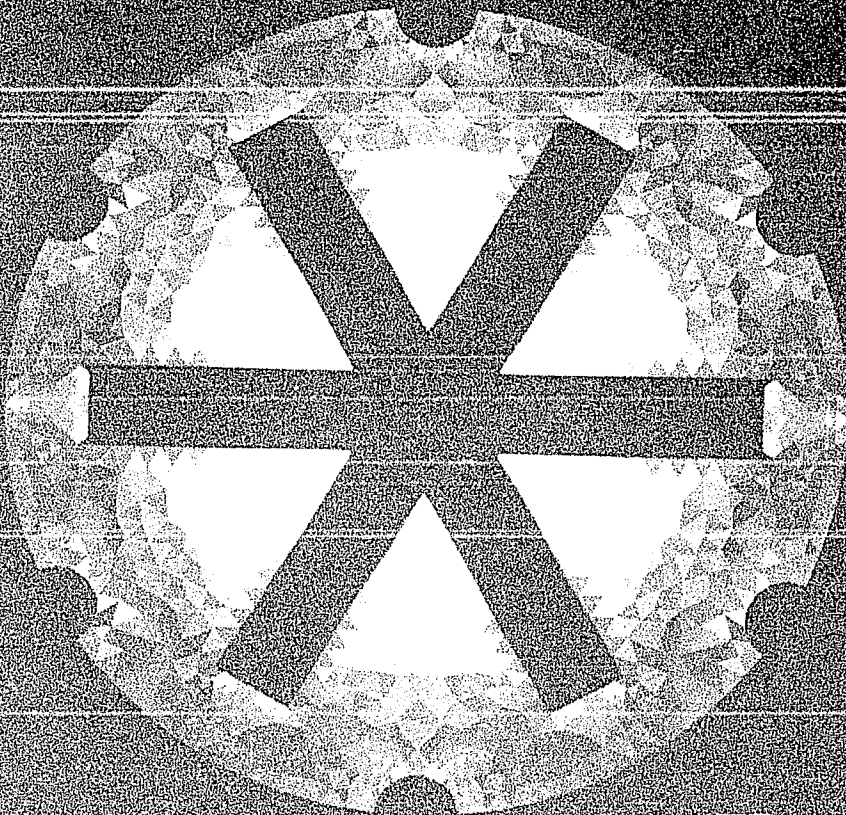
El procedimiento a seguir para obtener un gráfico de isodiferencias de esfuerzos principales es el siguiente:

- Proveer al programa que graficará con la siguiente información:
 - Las coordenadas de los nodos.
 - La lista de nodos que componen cada uno de los elementos.
 - Los valores de esfuerzos principales.
- Obtener la diferencia de esfuerzos.
- Encontrar el valor mínimo y máximo de esta diferencia.
- Crear diez rangos de valores y asignarle a cada uno de ellos un color.

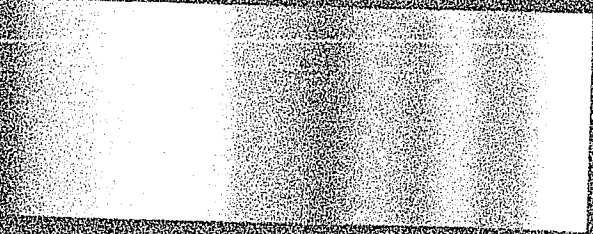
- Para cada elemento encontrar el rango de diferencia de esfuerzos que le corresponde y degradar el color del rango proporcionalmente a la diferencia con el valor del rango.
- Dibujar los nodos que componen al elemento finito y trazar líneas entre ellos.
- Rellenar el área obtenida con el color encontrado.

En la figura 8 se muestra el resultado del procedimiento anterior.

Para analizar la figura 8 primero debemos saber que en el espectro de colores que aparece a la izquierda de la figura los colores se han asignado de abajo hacia arriba a valores de la diferencia de esfuerzo ordenados de mínimo a máximo. Entonces el color blanco representa el valor de diferencia de esfuerzos menor y los tonos azules representan los valores más altos. Nótese ahora que los tonos azules están localizados en los vértices exteriores de los brazos de la estrella y en la parte central de los orificios y si revisamos la Figura. 2 confirmaremos que estos lugares tienen los valores de banda más altos.



Propellant



Propellant

LA VIGA DE IZAJE.

La viga de izaje mostrada en la figura 9 ha sido uno de los problemas más grandes que se han resuelto en el departamento de mecánica, su solución requirió crear un malla de 16,022 elementos que sumaron un total de 18,434 nodos, en su construcción se usaron 11,718 elementos pentahedro y 4,304 hexahedros lineales. Para resolver este problema se usó una estación de trabajo SUN SPARCserver 1000 dedicada que tardó 50 horas en encontrar la solución. Los archivos de solución ocuparon un total de 150 MB de almacenamiento en disco duro.

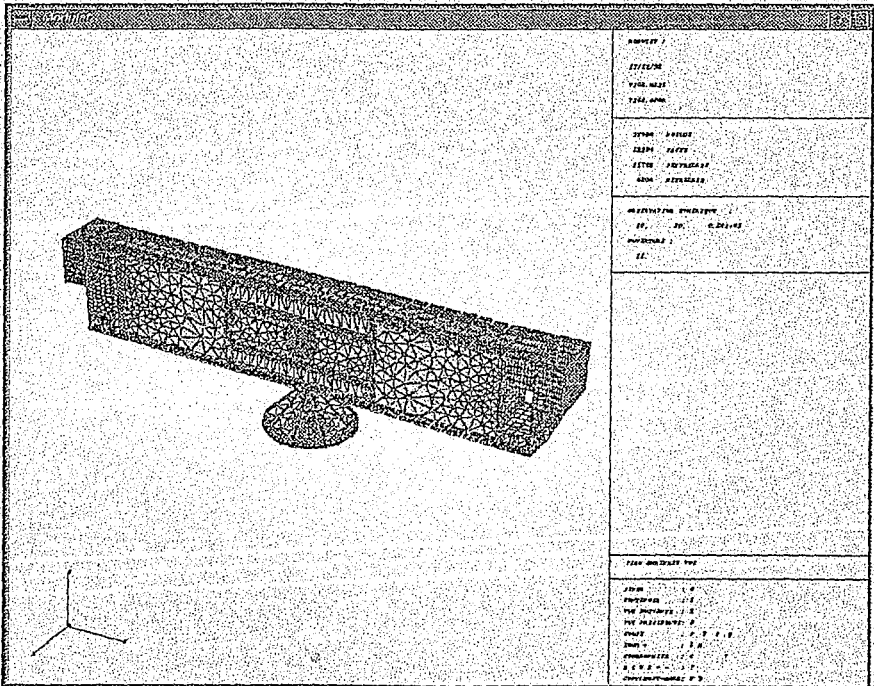


figura. 9 Viga de izaje

El problema consistió en decidir si la viga podría cargar 430 toneladas con seguridad. El análisis se dividió en dos partes: en la primera se realizó un análisis con el MEF que indicó los puntos críticos de la viga y en la segunda etapa éstos

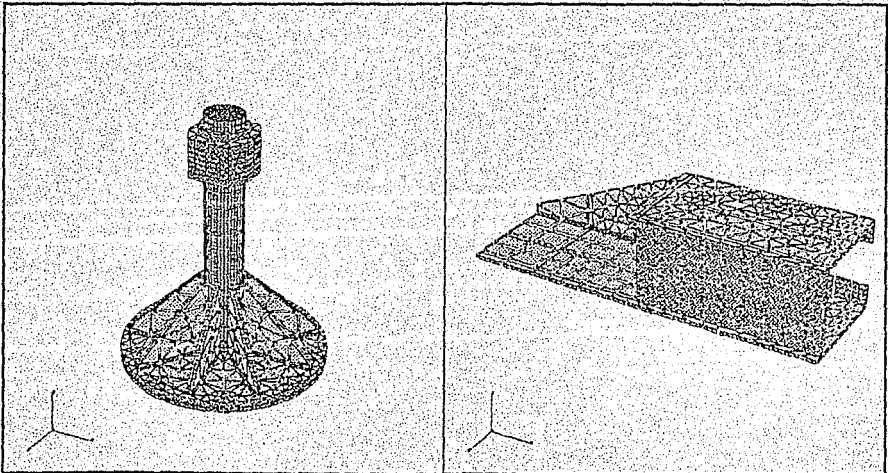
FALLA DE ORIGEN

fueron instrumentados con extensómetros para corroborar los resultados del análisis numérico, con estos dos análisis realizados (el numérico y el experimental) finalmente se decidió que la viga podría cargar las 430 toneladas de forma segura.

EL MALLADO.

A partir de que se recibieron los planos de la viga se procedió a realizar el mallado y éste necesitó de un mes para su conclusión. Al ver la figura mallada difícilmente se puede apreciar la cantidad de trabajo que involucra el realizarla. Para llegar a la malla final se comenzó mallando en dos dimensiones los componentes de la viga cuidando que la pieza tridimensional pudiera obtenerse a partir de una translación del la sección en 2D a lo largo del eje perpendicular al eje de la figura. Es necesario decir aquí que solamente se malló una cuarta parte de la viga dadas las simetrías con que cuenta la figura. Una de las razones que hacen extenso el trabajo es la dificultad al pegar dos secciones tridimensionales. En el pegado se debe cuidar que los nodos de las dos secciones que se van a pegar coincidan y que a su vez las caras de los elementos finitos coincidan. Esto obliga generalmente a mallar las dos secciones de pegado independientemente del resto de las figuras utilizando la misma distribución de nodos y el mismo mallador. Obsérvese que la pared interna de la caja que contiene el perno de sujeción se pegó con otras siete secciones diferentes.

En la figura 10 se aprecian distintas partes de la viga en el proceso de mallado.



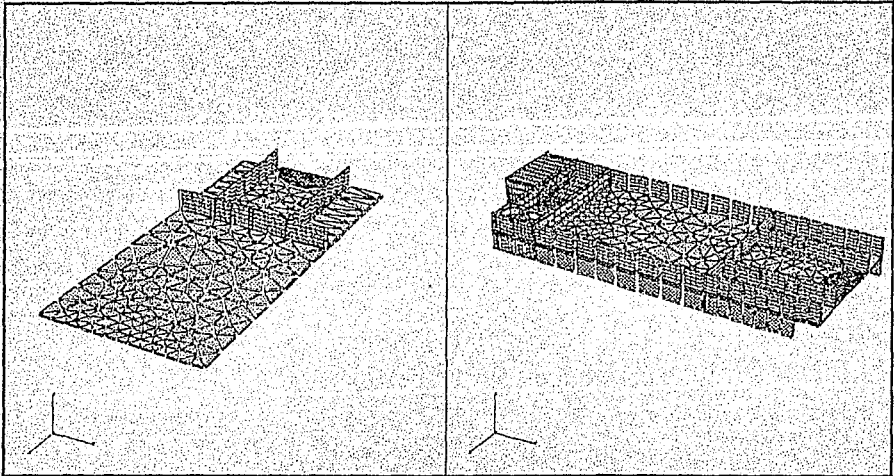


figura. 10 Mallas de componentes de la viga

LA SOLUCIÓN.

Cuando un problema tiene las dimensiones del antes descrito, no resulta conveniente resolver el sistema de ecuaciones formado utilizando un método directo como el de Cholesky debido a que este tipo de métodos mantienen el sistema de ecuaciones en memoria RAM y aun los 128 MB de memoria RAM que poseen las estaciones de trabajo más completas resultarían insuficientes. Es por eso que se utilizó el método del gradiente conjugado el cual es un método iterativo para solución de sistemas de ecuaciones.

La deformada de la viga exagerada 30 veces se aprecia en la figura 11 y en la figura 12 se puede ver un gráfico de isodesplazamientos en la dirección vertical.

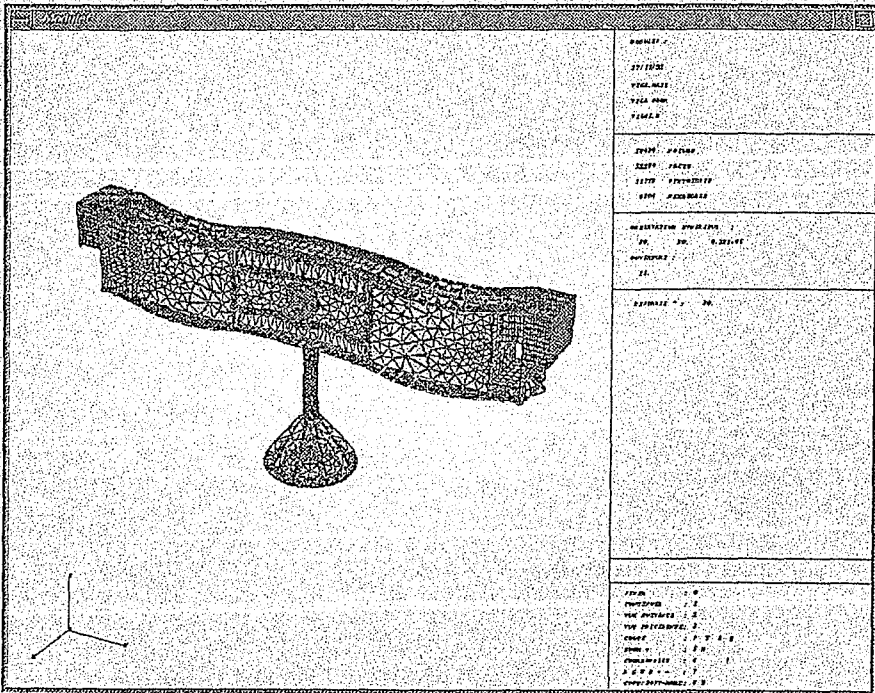


figura. 11 Deformada. (Exagerada 30 veces)

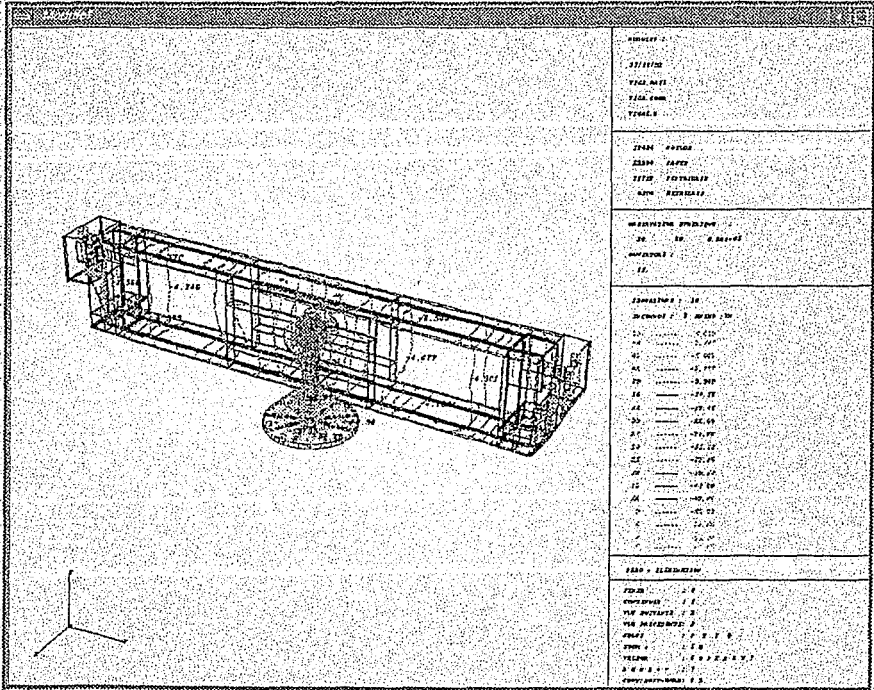


figura.12 Isovalores en la dirección vertical (z)

Una vez con los resultados del campo de desplazamientos se estuvo en condiciones de calcular los esfuerzos para, con la ayuda del archivo de datos resultante, identificar los puntos de más alta concentración de esfuerzos y con esto proporcionar al equipo de experimentalistas la ubicación de estos puntos.

En análisis comparativo entre los valores calculados con MODULEF y los datos medidos con extensometría resultaron ser satisfactoriamente iguales, con esto se pudo concluir, después de analizar las magnitudes de los esfuerzos máximos y ubicarlos en la viga, que ésta podría soportar la carga con seguridad.

¹ A. J. Durelli, Applied Stress Analysis, Prentice Hall, Inc. 1967

² A. J. Durelli, "Experimental Means of Analyzing Stresses and Strain in Rocket Propellant Grains", Experimental Mechanics, 2, No. 4. (April 1964) 102-110.

³ A. J. Durelli and V. J. Parks, "Photoelasticity Methods to Determine Pressure, Restrained Shrinkage, and Transient Thermal Stress Distributions in Propellant Grain Models", Experimental Mechanics, 5 No. 2 (Feb 1965) 33-46.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A lo largo de la realización de los diferentes proyectos que componen este trabajo, se han adquirido experiencias que al exponerlas podrían servir de referencia para trabajos futuros. Esa es la finalidad de este capítulo así como el exponer las conclusiones a las que se ha llegado acerca de los problemas termoelásticos y el programa MODULEF.

LA TERMOELASTICIDAD.

En todos los problemas que se han resuelto en este trabajo se ha tenido la condición de que el material a considerar es homogéneo e isotópico, con esto las ecuaciones de la termoelasticidad se desacoplan y es posible resolver primero la ecuación térmica y después resolver un problema elástico modificado¹. Sin embargo sería de mucha utilidad que se resolviera con MODULEF un problema no homogéneo y/o no isotópico y se describirá el procedimiento seguido en un manual. Además sería igualmente útil documentar problemas donde los datos sean funciones de la posición.

En termoelasticidad, una buena parte de los problemas involucran campos de temperatura que dependientes del tiempo, por esta razón se requiere de un manual de procedimientos que indique los pasos a seguir para resolver tales problemas.

MODULEF.

A través del uso de este programa se adquiere un buen conocimiento del MEF debido a su estructura para resolver problemas paso a paso. Sin embargo su manejo

¹ Para que considere el campo de temperaturas.

podría simplificarse si se construyera una interfase entre un programa tipo CAD y el módulo de mallado de MODULEF.

El programa también adolece de una sección para localizar gráficamente un elemento del que se conoce alguno de los nodos que lo componen, como sucede cuando se trata de ubicar la posición de los elementos con mayores concentraciones de esfuerzos. Creemos que una buena alternativa para resolver esa situación es realizar un programa en C utilizando las rutinas gráficas de GL, similar al que se mencionó en el capítulo anterior. La única dificultad que le vemos a un proyecto como este es la comunicación entre programas, y esto nos lleva a sugerir otra mejora; construir rutinas que lean directamente las estructuras de datos usadas por MODULEF, pues actualmente para extraer información de tales estructuras, éstas tienen que ser impresas hacia un archivo ASCII (con la opción IMPRIMER), y a partir de éste es que se obtienen los datos requeridos.

Creemos también que MODULEF podría incluir un módulo de análisis de esfuerzos en 3D que por lo menos fuera capaz de incluir un gráfico de isovalores de esfuerzo.

En cuanto a las experiencias obtenidas con este programa éstas han mencionadas conforme se describieron los procedimientos del módulo termoelástico del MODULEF.

ApéndiceA

PROGRAMA DE ISODIFERENCIAS DE ESFUZOS

```
/* Este programa se llama con
desple puntos geom
donde
    puntos es un archivo que contiene los vertices que formaran los
    triangulos y en su parte final especifica las conexiones
    para formar los triangulos a partir de los vertices

geom es el archivo que en su tercera columna contiene el valor
de Z para cada triangulo

Esta desarrollado con la biblioteca grafica (gl) para Silicon Graphics
*/
```

```
#include <gl/gl.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <gl/device.h>

#define BLANCO 0xfffff
#define NEGRO 0x000000
#define X 0
#define Y 1
#define Z 2

unsigned long Color[6] = {
    0xff0000, /* [0] = blue */
    0x00ff00, /* [1] = green */
    0x0000ff, /* [2] = red */
    0xff00ff, /* [3] = magenta */
    0xffff00, /* [4] = cyan */
    0xffffffff, /* [5] = white */
};

FILE *file_pointer;
int nodos,conecc, Con[5000][3];
double Matriz[5000][3]; /* Guarda los vertices */
double Zeta[5000]; /* Los valores de Z */
long xorigin, yorigin, xsize, ysize;
float rx, ry;
short val;
double Zmax, Zmin;
char cad1[15];
char cad2[15];
char *s;
double Rangos[10];
```

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

```

double Colores[9][3]= { {1.0, 1.0, 1.0}, /* Define los colores */
                        {1.0,0.0,0.0}, /* a partir de los */
                        {0.0,1.0,0.0}, /* cuales se hace el */
                        {0.0,0.0,1.0}, /* el degradado */
                        {1.0,0.0,1.0},
                        {1.0,1.0,0.0},
                        {0.0,1.0,1.0},
                        {0.0,0.0,0.0}};

float actual[3];

/*****/

void Lectura(void)
{
/* Lee los valores(x,y,z) de los vertices guardandolos en Matriz */
int i;

for(i=1;i<nodos+1;i++)
fscanf(file_pointer,"%lf%lf%lf",&Matriz[i][0],&Matriz[i][1],&Matriz[i][2]);
}

void LecturaN(void)
{
/* Lee las conecciones para formar los triangulos */
int i;

for(i=0;i<conecc;i++)
fscanf(file_pointer,"%d%d%d",&Con[i][0],&Con[i][1],&Con[i][2]);
}

void LecturaZ(void)
{
/* Lee el valor de la z para cada triangulo */
int i;
double basura1, basura2;

for(i=0;i<conecc;i++){
fscanf(file_pointer,"%lf %lf %lf",&basura1,&basura2, &Zeta[i]);
if (Zeta[i] <= 0.0)
Zeta[i]=-1.0*Zeta[i];
}
}

double Mayor_Menor(int cual)
{
/* Busca de Zeta[] el valor menor si cual=0 o el mayor si cual=1 */
int i;
double mayor_menor;

mayor_menor=Zeta[0];
for(i=0;i<conecc;i++){
if(cual==0){ /* Esta buscando el menor */
if(Zeta[i]<mayor_menor) mayor_menor=Zeta[i];
}
}
}

```

```

    }
    else{ /* Busca el mayor*/
        if(Zeta[i]>mayor_menor) mayor_menor=Zeta[i];
    }
}
return(mayor_menor);
}

void CreaRangos()
{
/* Crea 7 rangos a partir de los valores de Z[] */

    int j;

    for(j=0;j<8;j++)
        Rangos[j]=j*(Zmax-Zmin)/7.0 + Zmin;
}

int Indice(int num , double valor)
{
/* Para cualquier valor de Z[] se localiza en que rango se encuentra */
/* para posteriormente hacer el mapeo al color correspondiente */

    unsigned long C=0;
    int B,R;
    int i, j, indice;
    double dat;

    for ( i=0; i<8 ; i ++ ){
        if ( valor < Rangos[i] ) {
            indice=i-1;
            break;
        }
        else if (valor == Rangos[i] )
            { indice=i;
              if (valor==Zmax ) indice=indice-1;
              break;
            }
    }
    return(indice);
}

void Colour( int indice, double valor)
{
/* Dependiendo en que rango se encuentra, el valor es mapeado */
/* al color correspondiente */

    actual[0]=((Rangos[indice+1]- valor)*Colores[indice][0] +(valor - Rangos[indice] ) *Colores[indice+1][0])
    / (Rangos[indice+1]-Rangos[indice]) ;

    actual[1]=((Rangos[indice+1] - valor)*Colores[indice][1] +(valor - Rangos[indice]
    ) *Colores[indice+1][1]) / (Rangos[indice+1]-Rangos[indice]) ;
}

```

```

    actual[2]=((Rangos[indice+1] - valor)*Colores[indice][2]+(valor - Rangos[indice]
)*Colores[indice+1][2]) / (Rangos[indice+1]-Rangos[indice]);
}

```

```

void Dibuja(void)
{
    int i;
    float vect[3];
    unsigned long col;

```

```

/* Dibuja los triangulos , calculando su valor en color */
for(i=0;i<conec; i++){
    bgnpolygon();
    Colour(Indice(i,Zeta[i]), Zeta[i]);
    c3f(actual);
    v3d(Matriz[Con[i][0]]);
    v3d(Matriz[Con[i][1]]);
    v3d(Matriz[Con[i][2]]);
    endpolygon();
}
}

```

```

void Llama_barra()
{
    /*Manda llamar al programa que muestra la gama de colores
    asignada a los rangos definidos */

    Zmax= Mayor_Menor(1);
    Zmin= Mayor_Menor(0);

    s="barra ";
    sprintf(cad1, "%lf ", Zmin);
    sprintf(cad2, "%lf ", Zmax);
    strcat(s,cad1);
    strcat(s,cad2);
    strcat(s,"&");
    system(s);
}

```

```

void Carga(char *s)
{
    /*Carga los nodos*/
    int i;

    if((file_pointer= fopen(s,"r")) !=NULL) {
        fscanf(file_pointer,"%d",&nodos);
        Lectura();
        fscanf(file_pointer,"%d",&conec);
        LecturaN();
    }
    else

```

```

    printf("Error al abrir el archivo %s\n", s);
    fclose(file_pointer);
}

void CargaZ(char *s)
{
    if((file_pointer== fopen(s,"r")) !=NULL )
        LecturaZ();
    else
        printf("Error al abrir el archivo %s\n", s);
    fclose(file_pointer);
}

Inicializacion_grafica(int Zom)
{
    prefsiz(600,600);
    winopen("Propellant");
    qdevice(LEFTMOUSE);
    getorigin(&xorigin, &yorigin);
    getsize(&xsize, &ysize);
    mmode(MVIEWING);
    RGBmode();
    shademodel(GOURAUD);
    doublebuffer();
    gconfig();
    ortho(-6-Zom,6+Zom,-6-Zom,6+Zom,-9.5,9.5);
    lsetdepth(getgdesc(GD_ZMIN), getgdesc(GD_ZMAX));
    zbuffer(TRUE);
    czclear(NEGRO, getgdesc(GD_ZMAX));
}

void Rotacion(void)
{
    /*Permite manipular el movimiento del objeto con el mouse */

    /*while ((qtest() && qread(&val) == LEFTMOUSE && val == 0)) {
        ry = 300 * (2.0*(getvaluator(MOUSEX)-xorigin)/xsize-1.0);
        rx = -300 * (2.0*(getvaluator(MOUSEY)-yorigin)/ysize-1.0); */
        czclear(NEGRO, getgdesc(GD_ZMAX));
    /*  popmatrix();
        puslmatrix();
        rot(ry, 'y');
        rot(rx, 'x'); */
        Dibuja();
        swapbuffers();
        sleep(1000);
    /* } */
}

/*****/

main(int argc, char *argv[])

```

```
{
float Zom;
char *s;

if(argc!=3) {
    printf("Error!! Uso : desple puntos geom \n");
    return 1;
}
Carga(argv[1]);
CargaZ(argv[2]);
printf("Zoom > 0 El objeto se achica\n");
printf("Zoom = 0 El objeto no cambia\n");
printf("Zoom < 0 El objeto se agranda\n\n");
printf("Zoom es un numero de pto flotante\n");
printf("Zoom?\n");
scanf("%f",&Zom);
Inicializacion_grafica(Zom);
Llama_barra();
CreaRangos();
Rotacion();
getch();
return 0;
}
```


BIBLIOGRAFIA

1. E. Carlson, Linear Thermoelasticity, in Encyclopedia of Physics, Vol. VIa/2, C. Truesdell, ed. (Springer, Berlin 1972).
2. B. A. Boley and J. H. Weiner, Theory of Thermal Stresses, Wiley, New York, 1960.
3. M. E. Gurtin, 1. An Introduction to Continuum Mechanics, Academic, Press.
4. P. G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland 1978.
5. R. B. Hetnarski, Basic Equations of Theory of Thermal Stresses, in Thermal Stresses I, vol. 1, North-Holland.
6. G. Duvaut, J. L. Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag Berlin 1976.
7. I. Ekeland, R. Teman, Convex analysis and Variational Problems, North Holland Amsterdam, 1976.
8. M. Bernadou, P. L. George, P. Joly, P. Laug, A. Perronet, E. Saltel, D. Steer, G. Vanderbork, M. Vidrascu, A. Hassim, A Modular Library of Finite Elements, INRIA, Francia, 1986.