UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NUCLEOS Y TRAYECTORIAS DIRIGIDAS DE LONGITUD MAXIMA EN DIGRAFICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

AMELIA RAMIREZ ESPINOSA

1995

NUCLEOS Y TRAYECTORIAS DIRIGIDAS DE LONGITUD MAXIMA EN DIGRAFICAS

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"NUCLEOS Y TRAYECTORIAS DIRIGIDAS DE LONGITUD MAXIMA EN DIGRAFICAS".

realizado por AMELIA RAMIREZ ESPINOSA

con número de cuenta 7I227II-I , pasante de la carrera de MATEMATICAS .

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ	H. Galeana
Propietario	DR. HUGO ALBERTO RINCON MEJIA	Hugo A. Rincón M.
Propietario	MAT. LAURA PASTRANA RAMIREZ	Laura Pastrana R.
Suplente	M. EN C. PATRICIA CORTES FLORES	
Suplente	M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE	Virginia Abrín Batule

Consejo Departamental de Matemáticas

M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

A LA MEMORIA DE FRANCISCO RAMIREZ BERMUDEZ

A MIS PADRES CARMEN ESPINOSA CERVANTES
FRANCISCO RAMIREZ BERMUDEZ

A MIS HIJOS CARLOS FRANCISCO
CARMEN SUSANA

A MIS PADRES CARMEN ESPINOSA CERVANTES
FRANCISCO RAMIREZ BERMUDEZ

A MIS HIJOS CARLOS FRANCISCO
CARMEN SUSANA

AGRADEZCO A LA DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ
EL HABER DIRIGIDO ESTE TRABAJO

INDICE

CONTENIDO PAGINA

CONTENIDO PAGINA

INTRODUCCION

INTRODUCCION

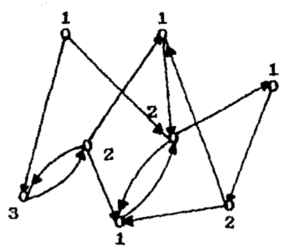
El trabajo que se desarrolla en esta tesis cuyo título es "Núcleos y trayectorias dirigidas de longitud máxima en Digráficas" fue desarrollado con base en las investigaciones de destacados y eminentes investigadores mexicanos y extranjeros. Por mencionar algunos, tal es el caso de los investigadores franceses: J. M. Laborde, C. Payan y N. H. Xuong quienes propusieron la siguiente conjetura: "Para toda digráfica D sin lazos , existe un conjunto independiente S, tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$", y de los investigadores mexicanos Hortensia Galeana Sánchez y Hugo A. Rincón Mejía quienes lograron obtener algunas condiciones suficientes para que una digráfica satisfaga dicha conjetura.

Sean $\gamma(D)$ el número cromático y $\lambda(D)$ el número de vértices de una trayectoria dirigida de longitud máxima, respectivamente, de una digráfica D sin lazos.

ROY [11], e independientemente GALLAI [8], demostraron que $\gamma(D) \leq \lambda(D)$ (1).

A continuación se presentan algunos ejemplos.

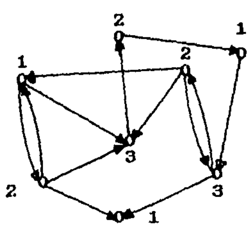
D_1:



$\gamma(D_1)=3$ y $\lambda(D_1)=8$

$\gamma(D_1) = 3 \leq 8 = \lambda(D_1)$

D_2:

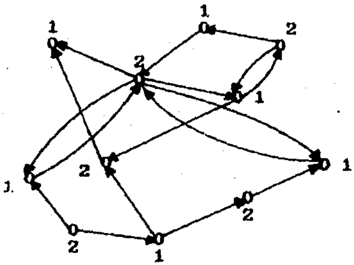


$\gamma(D_2)=3$

$\lambda(D_2)=7$

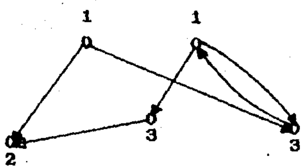
$\gamma(D_2) = 3 \leq 7 = \lambda(D_2)$

D_3:



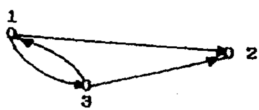
$\gamma(D_3)=2$
$\lambda(D_3)=8$
$\gamma(D_3) = 2 < 8 = \lambda(D_3)$

D_4:



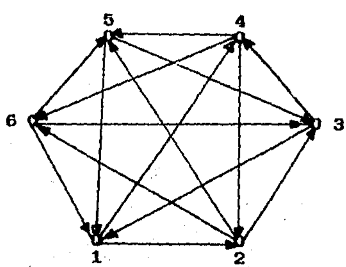
$\gamma(D_4)=3$
$\lambda(D_4)=5$
$\gamma(D_4) = 3 \leq 5 = \lambda(D_4)$

D_5:



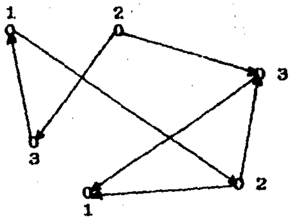
$\gamma(D_5)=3$
$\lambda(D_5)=3$
$\gamma(D_5) = 3 \leq \lambda(D_5)$

D_6:



$\gamma(D_6)=6$
$\lambda(D_6)=6$
$\gamma(D_6) = 6 = \lambda(D_6)$.

D_7 :



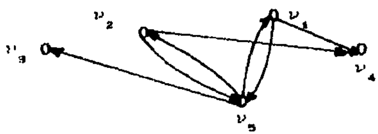
$\gamma(D_7)=3$

$\lambda(D_7)=6$

$\gamma(D_7) = 3 \leq 6 = \lambda(D_7)$.

Para continuar es necesario hacer la siguiente aclaración: "Una buena coloración de vértices de una digráfica D es una partición de su conjunto de vértices en conjuntos independientes". A continuación se ejemplifica con algunas digráficas.

D_1 :



$V = V_1 \cup V_2$

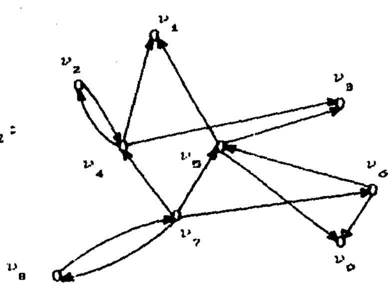
$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$V_1 = \{ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \}$

$V_2 = \{ \nu_4, \nu_5 \}$

Donde V_1 y V_2 son conjuntos independientes , además se satisface la desigualdad $\gamma(D_1)=2 < 4=\lambda(D_1)$.

D_2 :



$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$

$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$

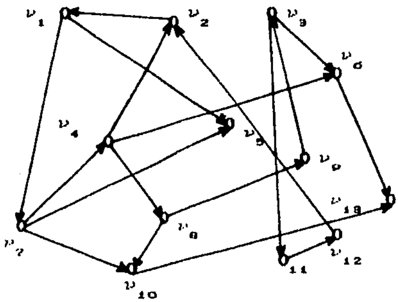
$V_1 = \{ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_6, \nu_8 \}$

$V_2 = \{ \nu_4, \nu_5 \}$

$V_3 = \{ \nu_7, \nu_9 \}$

Donde V_1, V_2 y $, V_3$ son conjuntos independientes y $\gamma(D_2)=3 < 5=\lambda(D_2)$.

D_3:



$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$

$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$

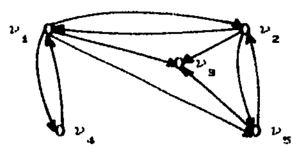
$V_1=\{\nu_1,\nu_4,\nu_9,\nu_{10}\}$

$V_2=\{\nu_2,\nu_6,\nu_7,\nu_8,\nu_{11}\}$

$V_3=\{\nu_3,\nu_5,\nu_{12},\nu_{13}\}$

Donde V_1,V_2 y,V_3 son conjuntos indepen - dientes.

D_4:



$V=V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$

$V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 =\emptyset$

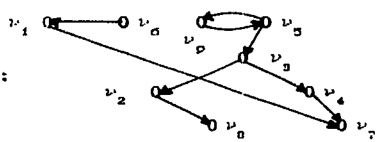
donde $V_1=\{\nu_1\}$, $V_2=\{\nu_2,\nu_4\}$, $V_3=\{\nu_3\}$ y $V_4=\{\nu_5\}$ son conjuntos independientes.

Con base en la aclaración anterior, una posible extensión de [$\gamma(D) \leq \lambda(D)$] fue conjeturada por J.M. Laborde,C. Payan y N. H. Huang. La cual se expresa como sigue:

CONJETURA C 1 ([10],(1982)) Para toda digráfica sin lazos D, existe un conjunto independiente S tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$. Expresado de otra manera quiere decir que existe un conjunto independiente S que intersecta todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima en D.

Las digráficas que se presentan a continuación son algunos ejemplos que satisfacen la Conjetura C 1.

D_1:

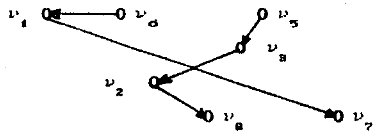


$(\nu_9,\nu_5,\nu_3,\nu_4,\nu_7)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima. $\therefore \lambda(D_1)=5$

Sea $S_1=\{\nu_9,\nu_4\}$ (un conjunto independiente).

Considerando el conjunto S_1 se procede a obtener la digráfica $D_1 - S_1$.

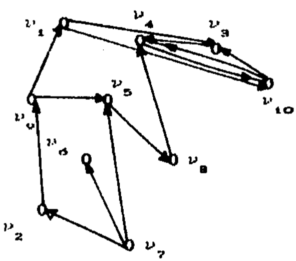
$D_1 - S_1$:



En la que se observa que $(\nu_5, \nu_3, \nu_2, \nu_8)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima y $\lambda(D_1 - S_1) = 4$ por lo tanto se cumple que $\lambda(D_1 - S_1) = 4 < 5 = \lambda(D_1)$.

Este procedimiento lo aplicaremos también en los siguientes ejemplos:

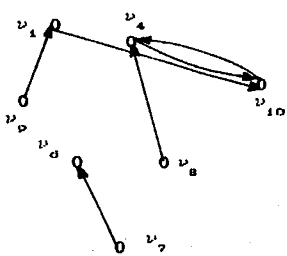
D_2:



$(\nu_2, \nu_9, \nu_5, \nu_8, \nu_4, \nu_{10}, \nu_3)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_2) = 7$.

Sea $S_2 = \{\nu_2, \nu_3, \nu_5\}$ un conjunto independiente, entonces se procede a obtener $D_2 - S_2$.

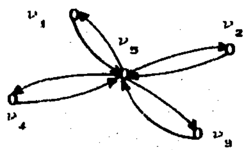
$D_2 - S_2$:



$(\nu_9, \nu_1, \nu_{10}, \nu_4)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima.

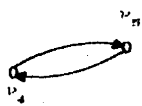
$\lambda(D_2 - S_2) = 4 < 7 = \lambda(D_2)$.

D_3 :



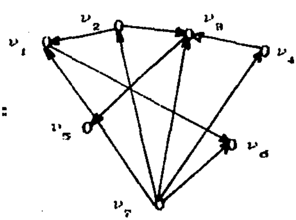
(ν_1,ν_5,ν_2) es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_3)=3$. Sea S_3 un conjunto independiente donde $S_3=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$.

D_3-S_3 :



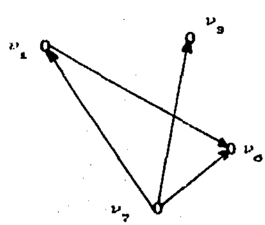
(ν_4,ν_5) es una trayectoria dirigida de longitud máxima y $\lambda(D_3-S_3)=2 < 3=\lambda(D_3)$.

D_4 :



$(\nu_7,\nu_4,\nu_3,\nu_5)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_4)=4$. Sea $S_4=\{\nu_2,\nu_4,\nu_5\}$ (notar que es independiente). Tomemos D_4-S_4.

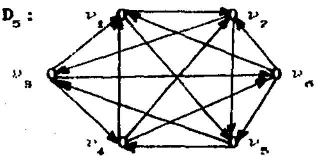
D_4-S_4 :



(ν_7,ν_1,ν_6) es una trayectoria dirigida de longitud máxima donde se cumple la desigualdad siguiente:

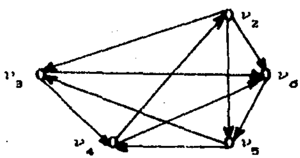
$\lambda(D_4-S_4)=3 < 4= \lambda(D_4)$.

D_5:



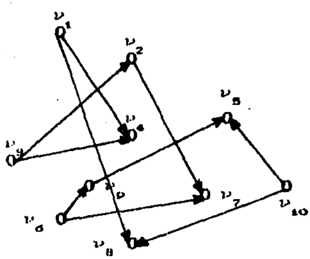
$(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_6,\nu_5)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore\ \lambda(D_5)=6$. Consideremos el conjunto independiente $S_5=\{\nu_1\}$.

D_5-S_5:



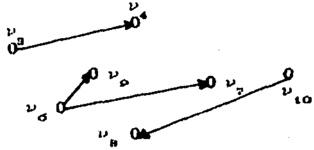
$(\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_6,\nu_5)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima y se cumple que $\lambda(D_5-S_5)=5 < 6=\lambda(D_5)$.

D_6:



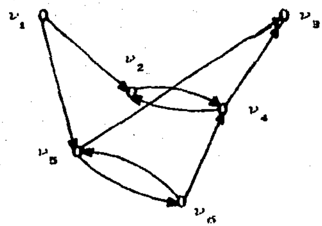
$(\nu_9,\nu_2\ ,\nu_7)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore\ \lambda(D_6)=3$. Si el siguiente conjunto independiente es $S_6=\{\nu_1,\nu_2\ ,\nu_5\}$, entonces obtenemos D_6-S_6.

D_6-S_6:



(ν_6,ν_7) es una trayectoria dirigida de longitud máxima y entonces $\lambda(D_6-S_6)=2<3=\lambda(D_6)$.

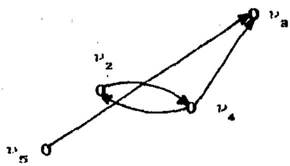
D_7:



$(\nu_1,\nu_5,\nu_6,\nu_4,\nu_3)$, $(\nu_1,\nu_5,\nu_6,\nu_4,\nu_2)$, son dos trayectorias dirigidas de longitud máxima, $\therefore\ \lambda(D_7)=5$.

Sea $S_7=\{\nu_1,\nu_6\}$ (que es independiente), entonces a partir de este conjunto obtenemos la digráfica D_7-S_7.

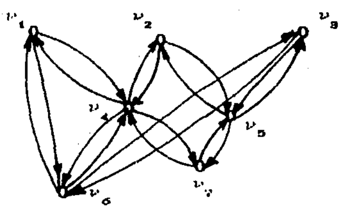
D_7-S_7:



(ν_2,ν_4,ν_3) es una trayectoria dirigida de longitud máxima, por lo que se cumple:

$\lambda(D_7-S_7)=3 < 5=\lambda(D_7)$.

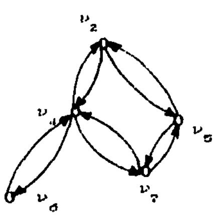
D_8:



$(\nu_7,\nu_5,\nu_2,\ \nu_4,\nu_1,\nu_6,\nu_3)$, es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore\ \lambda(D_8)=7$.

Sea $S_8=\{\nu_1,\nu_3\}$ (que es conjunto independiente).

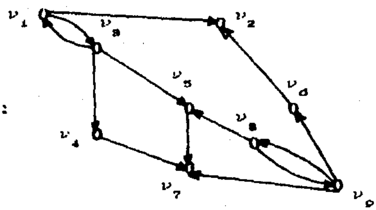
D_8-S_8:



$(\nu_2,\nu_5,\nu_7,\nu_4,\nu_6)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima. Por lo que se cumple la siguiente desigualdad:

$\lambda(D_8-S_8)=5 < 7=\lambda(D_8)$.

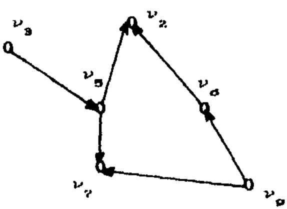
D_9:



$(\nu_9, \nu_8, \nu_5, \nu_2)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_9)=4$.

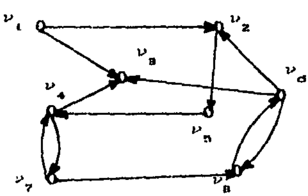
Sea $S_9=\{\nu_1, \nu_4, \nu_8\}$ (que es conjunto independiente).

D_9-S_9:



(ν_3, ν_5, ν_2) es una trayectoria dirigida de longitud máxima y se cumple que: $\lambda(D_9-S_9)=3 < 4=\lambda(D_9)$.

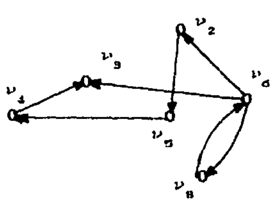
D_{10}:



$(\nu_1, \nu_2, \nu_5, \nu_4, \nu_7, \nu_8, \nu_6, \nu_3)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_{10})=8$.

Sea $S_{10}=\{\nu_1, \nu_7\}$ (un conjunto independiente).

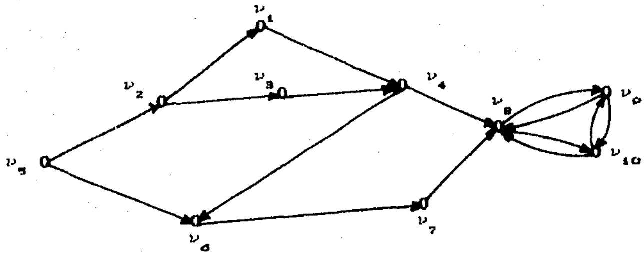
$D_{10}-S_{10}$:



$(\nu_8, \nu_6, \nu_2, \nu_5, \nu_4, \nu_3)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima y por lo tanto, se cumple que:

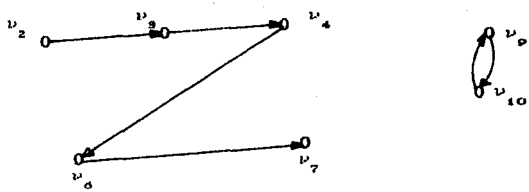
$\lambda(D_{10}-S_{10})=6<8=\lambda(D_{10})$.

D_{11}:



$(v_5, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_{10}, v_9)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima, por lo que $\lambda(D_{11})=9$. Sea $S_{11}=\{v_1, v_5, v_8\}$ (que es un conjunto independiente), entonces obtenemos $D_{11}-S_{11}$.

$D_{11}-S_{11}$:



Observamos que $(v_2, v_3, v_4, v_6, v_7)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima. De donde se cumple la desigualdad siguiente: $\lambda(D_{11}-S_{11})=5 < 9=\lambda(D_{11})$.

En el desarrollo de este trabajo se hará énfasis en la conjetura C 1 y en algunas de sus consecuencias, asimismo se presentarán algunas condiciones suficientes para que una digráfica satisfaga dicha conjetura.

Con la finalidad de tener claridad en la conjetura C 1 cabe aclarar que las gráficas consideradas son finitas, dirigidas y sin lazos (i.e. digráficas), y que aceptamos como una (di)gráfica, a la gráfica vacía.

Se recomienda consultar los términos no definidos y/o definiciones relevantes en Berge [2] y/o remitirse a [3].

DESARROLLO DE TEOREMAS,COROLARIOS, CONJETURAS Y OBSERVACIONES

DESARROLLO DE TEOREMAS COROLARIOS Y CONJETURAS

Este apartado contiene las demostraciones de los 10 Teoremas, de los 3 Corolarios, y de las 4 Observaciones, asimismo aparecen una serie de digráficas que ejemplifican cada Teorema, Corolario u Observación, y en especial se incluyen algunos ejemplos para las 3 Conjeturas.

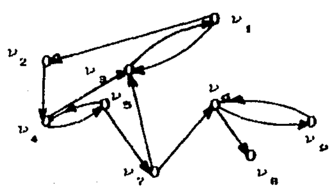
TEOREMA 1. Si D tiene un núcleo S, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$. Por lo tanto D satisface C 1.

<u>Demostración</u> . Esta demostración se realizará por reducción al absurdo: Sea $D=(V(D),A(D))$ una digráfica tal que $\lambda(D)=\lambda$ es el número de vértices de la trayectoria dirigida de longitud máxima en D. Suponemos que $\lambda(D-S)=\lambda(D)$.

Sea $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\lambda)$ una trayectoria dirigida en D-S, entonces como S es núcleo de D existe un vértice $x_0 \in S$, tal que, $(x_\lambda, x_0) \in A(D)$. Por lo tanto hemos obtenido $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\lambda, x_0)$, trayectoria dirigida con $\lambda+1$ vértices en D, esto contradice que $\lambda(D)=\lambda$. Por lo tanto concluimos que : $\lambda(D-S) < \lambda(D)$. †

Ejemplos:

D_1 :

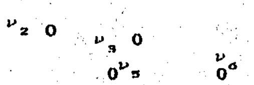


$S_1=\{\nu_1,\nu_4,\nu_7,\nu_8,\nu_9\}$ es núcleo de D_1, ya que, (ν_2,ν_4), (ν_3,ν_1), (ν_5,ν_7) y $(\nu_6,\nu_8) \in A(D_1)$.

$\lambda(D_1)=8$

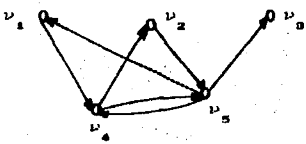
$(\nu_3,\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_5,\nu_7,\nu_6,\nu_8)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima en D_1.

D_1-S_1 :



$\lambda(D_1-S_1) = 1$ y $\lambda(D_1-S_1)=1 < 8=\lambda(D_1)$

D_2 :



$S_2=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ núcleo de D_2 ya que (ν_4,ν_2), y (ν_5,ν_3) $\in A(D_2)$, además $\lambda(D_2) = 5$ $(\nu_1,\nu_4,\nu_2,\nu_5,\nu_3)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima en D_2.

D_2-S_2 :

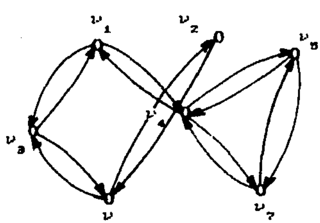
$\lambda(D_2-S_2)=2$ y (ν_4,ν_5) es una trayectoria dirigida de longitud máxima en D_2-S_2 y se cumple que: $\lambda(D_2-S_2)=2 < 5=\lambda(D_2)$.

OBSERVACION 1 : Para digráficas simétricas (o equivalentemente, gráficas sin dirección) es fácil ver que un conjunto independiente máximo es un núcleo.

<u>Demostración:</u> Sea $D(V,A)$ una digráfica simétrica, entonces $(\upsilon,\nu) \in A(D)$ si y sólo si $(\nu,\upsilon) \in A(D)$.
Sea $S=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$ un conjunto independiente máximo en D, entonces $\forall\ \upsilon \in (D-S)$ se tiene que υ es adyacente con algún x_i para $i=1,2,\ldots,n$, es decir, $\{\upsilon,x_i\} \in A(D)$. Como D es simétrica, entonces (υ,x_i), $(x_i,\upsilon) \in A(D)$. Por lo que se concluye que $\forall\ \upsilon \in (D-S)$ se tiene que $(\upsilon,x_i) \in A(D)$ para algún $x_i \in S$ por lo tanto S es núcleo de D. +

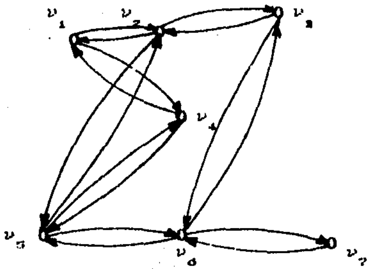
Ejemplos:

D_1 :



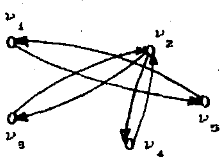
$S_1 = \{\nu_1,\nu_6,\nu_7\}$ es un conjunto independiente máximo, por lo que S_1 es núcleo de D_1.

D_2:



$S_2=\{\nu_1,\nu_3,\nu_5,\nu_7\}$ es un conjunto independiente máximo, $\rightarrow S_2$ es núcleo de D_2.

D_3:



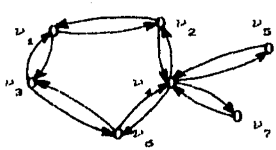
$S_3:\{\nu_1 ,\nu_2\}$ es un conjunto independiente máximo, $\rightarrow S_3$ es núcleo de D_3.

COROLARIO 1 : Si S es un conjunto independiente máximo de una digráfica simétrica D, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

<u>Demostración</u> : Como S es conjunto independiente máximo de una digráfica simétrica D, entonces S es núcleo en D (por observación 1), por lo tanto $\lambda(D-S) < \lambda(D)$ (aplicando el teorema 1). †

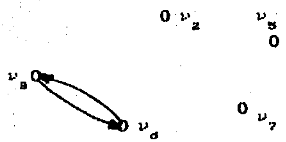
Ejemplos:

D_1:



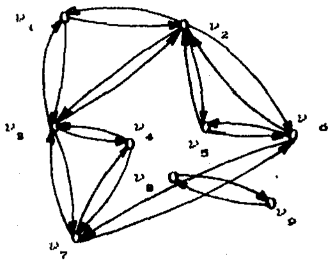
$S_1=\{\nu_1,\nu_4\}$ conjunto independiente máximo .Donde $(\nu_7 ,\nu_4,\nu_6,\nu_3,\nu_1,\nu_2)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore \lambda(D_1)=6$.

D_1-S_1:



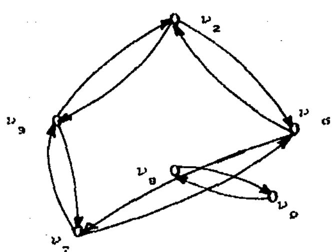
$\lambda(D_1-S_1) = 2$ donde (ν_3, ν_6) es una trayectoria dirigida de longitud máxima. Y $\lambda(D_1-S_1)=2 < 6=\lambda(D_1)$.

D_2:



$S_2=\{\nu_1,\nu_4,\nu_5\}$ es un con-to independiente máximo y $(\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_7,\nu_6,\nu_5,\nu_2)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima, $\therefore$ $\lambda(D_2)=7$.

D_2-S_2:



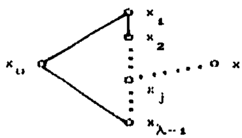
$\lambda(D_2-S_2)=4$ y una trayectoria dirigida de longitud máxima es $(\nu_2,\nu_3,\nu_7,\nu_6)$ $\therefore$ $\lambda(D_2-S_2)=4 < 7=\lambda(D_2)$.

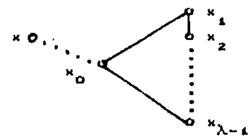
De hecho, cuando se procede con digráficas simétricas, es posible mejorar la afirmación del Corolario 1. Para lo cual se plantea el Teorema siguiente:

TEOREMA 2 : Sea D una digráfica simétrica conexa diferente de K_n. Entonces existe un conjunto independiente S tal que se cumple $\lambda(D-S) \leq \lambda(D)-2$.

<u>Demostración</u> : La demostración se realizará por reducción al absurdo. Supongamos que para todo conjunto independiente S $\lambda(D-S) > \lambda(D)-2$.

Puesto que D no es completa, podemos tomar S un conjunto independiente máximo con $|S| \geq 2$, como S es núcleo, entonces $\lambda(D-S) \leq \lambda-1$ y por la hipótesis $\lambda(D-S)=\lambda-1$, entonces $\exists$ $(x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda-1})$ una trayectoria dirigida de longitud máxima en D-S ($\lambda(D)=\lambda$).

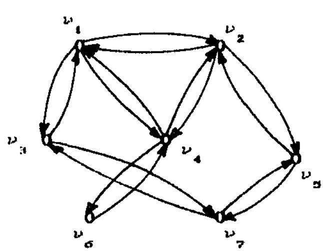




Como S es un conjunto independiente máximo, se tiene que x_1 dede ser adyacente a algún vértice $x_0 \in$ S, entonces $(x_1, x_0) \in A(D)$. Por la misma razón $x_{\lambda-1}$ debe ser adyacente a algún vértice en S, y precisamente a x_0, entonces $(x_{\lambda-1}, x_0) \in A(D)$. Porque si no , como D es simétrica, entonces $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda-1}, x_i)$, es una trayectoria dirigida de D con $\lambda+1$ vértices contradiciendo que $\lambda(D)=\lambda$. Puesto que $|S| \geq 2$ hay en S un vértice $x \neq x_0$. Además como D es conexa, entonces hay una trayectoria de x hasta algún x_j $(0 \leq j \leq \lambda-1)$. Esto da origen a una trayectoria dirigida $(x_{j-1}, \ldots, x_2, x_1, x_0, x_{\lambda-1}, \ldots, x_{j+1}, x_j, \ldots, x)$ con al menos $\lambda+1$ vértices. Si la trayectoria de x a $(x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda-1})$ pasa por x_0, entonces obtenemos una trayectoria dirigida $(x, \ldots, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda-1})$ con al menos $\lambda+1$ vértices. Contradiciendo que $\lambda(D)=\lambda$. Por lo tanto $\lambda(D-S) \leq \lambda(D)-2$. +

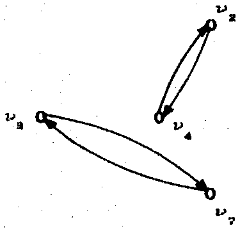
EJEMPLOS:

D_1 :



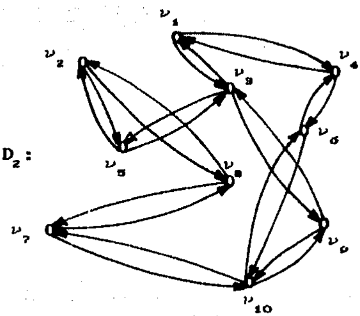
$S_1=\{\nu_1, \nu_5, \nu_6\}$ es un conjunto independiente y $\lambda(D_1)=7$. $(\nu_1, \nu_3, \nu_7, \nu_5, \nu_2, \nu_4, \nu_6)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima.

$D_1 - S_1$:



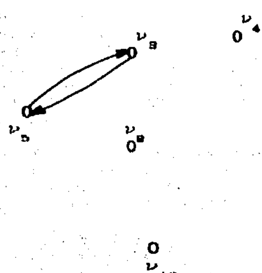
(ν_3, ν_7) es una trayectoria dirigida de longitud máxima, $\therefore\ \lambda(D_1 - S_1) = 2$ y $\lambda(D_1 - S_1) = 2 < 5 = 7 - 2 = \lambda(D_1) - 2$.

D_2:



$S_2 = \{\nu_1, \nu_2, \nu_6, \nu_7, \nu_9\}$ es un conjunto independiente $\therefore\ \lambda(D_2) = 10$ y una trayectoria dirigida de longitud máxima es: $(\nu_9, \nu_3, \nu_1, \nu_4, \nu_6, \nu_{10}, \nu_7, \nu_8, \nu_2, \nu_5,)$.

$D_2 - S_2$:



$\lambda(D_2 - S_2) = 2$ ya que (ν_3, ν_5) es una trayectoria dirigida de longitud máxima. Y se cumple que : $\lambda(D_2 - S_2) = 2 < 8 = 10 - 2 = \lambda(D_2) - 2$,

TEOREMA 3 : Sea D una digráfica simétrica. Entonces para todo $x \in I(D)$ existe un conjunto independiente S con las propiedades siguientes:

i) $x \in S$
ii) $S \subseteq I(D)$
iii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$.

__Demostración :__ La demostración se realizará por inducción sobre el número n de vértices en D.

Base de la inducción: a) Demostración para $n=1$, $[\lambda(D)=1]$.

Sea D una digráfica simétrica con un sólo vértice, es decir, $V(D) = \{x\}$, además sea $x \in I(D)$, entonces si consideramos $S=\{x\}$ conjunto independiente se cumplen:

i) $x \in S$
ii) $S=\{x\} \subseteq I(D)$
iii) $\lambda(D-S)=\lambda(D-x)=\lambda(\emptyset)=0=1-1=\lambda(D)-1$.

b) Demostración para $n=2$.

Caso 1) Sea D una digráfica simétrica con dos vértices sin flecha, entonces $\lambda(D)=1$. Sea $x \in I(D)$, y $S=\{x,y\}$ conjunto independiente, por lo tanto:

i) $x \in S =\{x,y\}$
ii) $S=\{x,y\} \subseteq I(D)$
iii) $\lambda(D-S)=\lambda(D-\{x,y\})=\lambda(\emptyset)=0=1-1=\lambda(D)-1$.

Caso 2) Sea D una digráfica simétrica con dos vértices adyacentes, entonces $\lambda(D)=2$ (D: $x \longleftrightarrow y$) sea $x \in I(D)$ y sea $S=\{x\}$ conjunto independiente por lo tanto:

i) $x \in S=\{x\}$
ii) $S=\{x\} \subseteq I(D)$
iii) $\lambda(D-S)=\lambda(D-x)=1=2-1=\lambda(D)-1$

Hipótesis de la Inducción: Sea D' una digráfica simétrica con número de vértices menor que n, entonces para todo $x \in I(D')$ existe un conjunto independiente S' con las siguientes propiedades:

i) $x \in S'$
ii) $S' \subseteq I(D')$
iii) $\lambda(D'-S')=\lambda(D')-1$.

III. Demostración para una digráfica simétrica con n vértices.

Sea D una digráfica simétrica con un número de vértices igual a n, sea $x \in I(D)$.

Consideremos $(D-x)$ la cual tiene menos de n vértices y se le aplica la hipótesis de inducción. Como $\lambda(D)=\lambda$, entonces debe suceder una de las dos cosas: $\lambda(D-x) < \lambda(D)=\lambda$ o si no, entonces $\lambda(D-x)=\lambda(D)=\lambda$.

Caso 1) Demostración para cuando $\lambda(D-x) < \lambda(D)=\lambda$.

Sea D una digráfica simétrica con n vértices, sea $x \in I(D)$. Si $\lambda(D-x) < \lambda(D)=\lambda$, entonces la afirmación es válida para $S=\{x\}$ conjunto independiente y por lo tanto :

i) $x \in S =\{x\}$
ii) $S=\{x\} \subseteq I(D)$
iii) $\lambda(D-S)=\lambda(D-x) < \lambda(D)=\lambda \leq \lambda(D)-1=\lambda-1$.

Caso 2) Demostración para cuando $\lambda(D-x)=\lambda(D)=\lambda$.

Sea D una digráfica simétrica con n vértices y sea $x \in I(D)$.

hip. Ind.

Consideremos $(D-x)$ digráfica simétrica con menos de n vértices, entonces cumple con la hipótesis de inducción por lo tanto para todo $y \in I(D-x)$ existe un conjunto independiente T con las siguientes propiedades:

i) $y \in T$

ii) $T \subseteq I(D-x)$

iii) $\lambda[\ (D-x) - T\ ] = \lambda(D-x)-1$

Sea $T \cup \{x\}$ un conjunto. Por demostrar que $T \cup \{x\}$ es un conjunto independiente. La demostración se realizará por reducción al absurdo.

Suponemos que $T \cup \{x\}$ no es conjunto independiente, entonces existe $x_1 \in T$ adyacente a x, es decir, tal que (x,x_1), (x_1,x) son flechas en D. Como $x_1 \in T \subseteq I(D-x)$, (hip. Ind.) , entonces x_1 es un vértice inicial de una trayectoria dirigida de longitud máxima en $(D-x)$. (Recordemos que $\lambda(D-x)=\lambda(D)=\lambda$), por lo tanto existe una trayectoria dirigida de longitud máxima "λ" contenida en $(D-x)$ donde x_1 es punto inicial. La trayectoria $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_\lambda)$ es con λ vértices en $(D-x)$ y no pasa por x. Por lo tanto la podemos extender: $(x,x_1,x_2,\ldots,x_\lambda)$, de tal manera que se obtiene una trayectoria con $\lambda+1$ vértices en D. Esto contradice que la trayectoria dirigida de longitud máxima es $\lambda(D)=\lambda$. $\therefore$ $T \cup \{x\}$ es un conjunto independiente , donde:

i) $x \in [\ T \cup \{x\}\ ]$

ii) Por demostrar que $[\ T \cup \{x\}\ ] \subseteq I(D)$.

Dado que $\lambda(D-x)=\lambda(D)=\lambda \rightarrow I(D-x) \subseteq I(D)$ y como $T \subseteq I(D-x) \subseteq I(D)$ (hip.de Ind.) y además $x \in I(D)$, entonces $T \cup \{x\} \subseteq I(D)$.

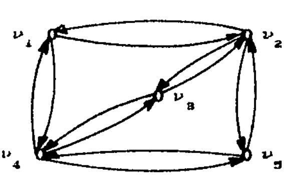
iii) Por demostrar que $\lambda[\ D-(T \cup \{x\})\ ] = \lambda(D)-1$.

$\lambda[\ D-(T \cup \{x\})\ ] = \lambda[\ D- T-\{x\}\ ] = \lambda[\ (D-x)-T\ ] =$

$=$(hip.de Ind.) $\lambda(D-x)-1 = \lambda(D)-1$. ♦

Ejemplos:

D_1 :



$(\nu_4,\nu_5,\nu_2,\nu_1,\nu_3)$,

$(\nu_2,\nu_1,\nu_4,\nu_5,\nu_3)$ y

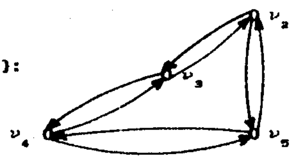
$(\nu_3,\nu_1,\nu_2,\nu_5,\nu_4)$ son trayectorias dirigidas con 5 vértices.

$\lambda(D_1)=\lambda=5$.

En la digráfica anterior observamos que $I(D_1)=\{\nu_2,\nu_3,\nu_4\}$ además $I(D_1)$ está contenido en todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima.

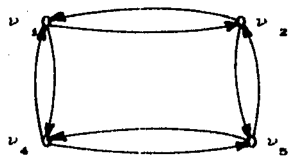
Sean: $S_1=\{\nu_1\}$, $S_2=\{\nu_3\}$ y $S_3=\{\nu_5\}$ conjuntos independientes contenidos en $I(D_1)$. A partir de estos conjuntos obtenemos las digráficas siguientes:

$D_1-S_1:=D_1-\{\nu_1\}$:



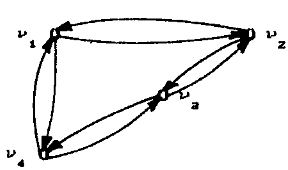
$\lambda(D_1-S_1)=4=5-1=\lambda(D_1)-1$

$D_1-S_2=$
$D_1-\{\nu_3\}$:



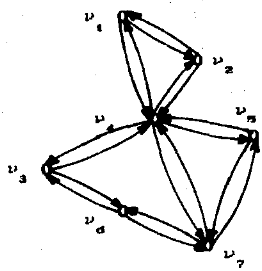
$\lambda(D_1-S_2)=4=5-1=\lambda(D_1)-1$

$D_1-S_3=$
$D_1-\{\nu_5\}$:



$\lambda(D_1-S_3)=4=5-1=\lambda(D_1)-1$

D_2:

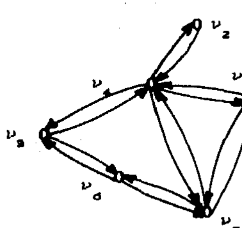


$(\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_5,\nu_7,\nu_6,\nu_3)$, $(\nu_2,\nu_1,\nu_4,\nu_3,\nu_6,\nu_7,\nu_5)$, $(\nu_3,\nu_6,\nu_7,\nu_5,\nu_4,\nu_1,\nu_2)$, y $(\nu_5,\nu_7,\nu_6,\nu_3,\nu_4,\nu_1,\nu_2)$ son trayectorias dirigidas con 7 vértices $\therefore$ $\lambda(D_2)=7$.

Observamos que $I(D_2)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_5\}$ y además $I(D_2)$ está contenido en todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima. Sean $S_1=\{\nu_1\}$, $S_2=\{\nu_2\}$, $S_3=\{\nu_3\}$ y $S_4\{\nu_5\}$ conjuntos independientes contenidos en $I(D_2)$. Con base en estos conjuntos tenemos las digráficas siguientes:

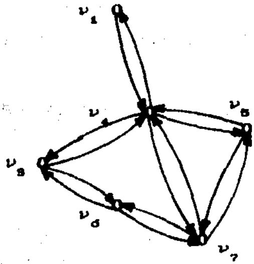
Ejemplos:

$D_2-S_1=$
$D_2-\{\nu_1\}$:



$\lambda(D_2-S_1)=6=7-1=\lambda(D_2)-1.$

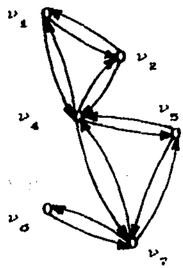
$D_2-S_2=$
$D_2-\{\nu_2\}$:



$\lambda(D_2-S_2)=6=7-1=\lambda(D_2)-1.$

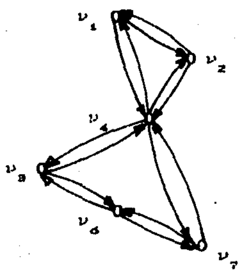
$D_2-S_3=$

$D_2-\{\nu_3\}$:



$\lambda(D_2-S_3)=6=7-1=\lambda(D_2)-1.$

$D_2-S_4=$
$D_2-\{\nu_5\}$:



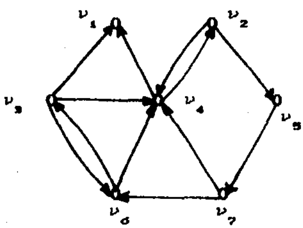
$\lambda(D_2-S_4)=6=7-1=\lambda(D_2)-1.$

Con base en la conjetura C 1 se propone la conjetura siguiente:

CONJETURA C 2. Para toda digráfica D, existe un conjunto independiente S tal que :
i) $S \subseteq I(D)$
ii) $\lambda(D-S)=\lambda(D)-1$

Ejemplos:

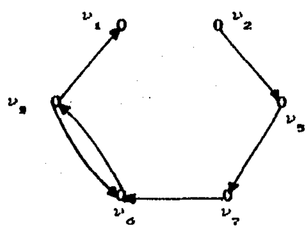
D_1 :



$(\nu_4,\nu_2,\nu_5,\nu_7,\nu_6,\nu_3,\nu_1)$ es una trayectoria dirigida con 7 vértices $\therefore\ \lambda(D_1)=7$.

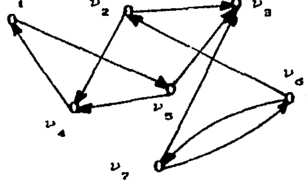
Sea $S=\{\nu_4\}$ un conjunto independiente $\Rightarrow$ $S=\{\nu_4\} \subseteq I(D_1)$.

$D_1-S =$
$D_1-\{\nu_4\}$:



$\lambda(D_1-S)=6=7-1=\lambda(D_1)-1$

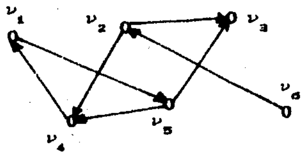
D_2 :



$(\nu_7,\nu_6,\nu_2,\nu_4,\nu_1,\nu_5,\nu_3)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore\ \lambda(D_2)=7$.

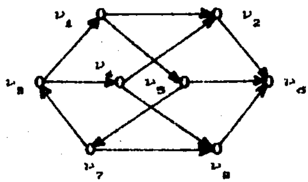
Sea $S=\{\nu_7\}$ un conjunto independiente, donde $S=\{\nu_7\} \subseteq I(D_2)$.

$D_2-S=$
$D_2-\{\nu_7\}$:



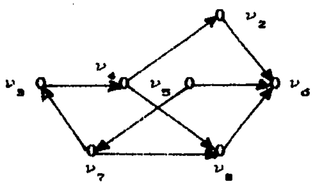
$\lambda(D_2-S)=6=7-1=\lambda(D_2)-1.$

D_3:



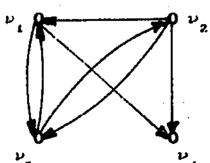
$(\nu_1,\nu_5,\nu_7,\nu_3,\nu_4,\nu_8,\nu_6)$ y $(\nu_1,\nu_5,\nu_7,\nu_3,\nu_4,\nu_2,\nu_6)$ son trayectorias dirigidas con 7 vértices $\therefore\ \lambda(D_3)=7$ e $I(D_3)=\{\nu_1\}$.
Sea $S=\{\nu_1\}$ un conjunto independiente $\Rightarrow$
$S=\{\nu_1\}\ \subseteq\ I(D_3)$.

$D_3-S=$
$D_3-\{\nu_1\}$:



$(\nu_5,\nu_7,\nu_3,\nu_4,\nu_8,\nu_6)$ es una trayectoria dirigida con 6 vértices $\therefore\ \lambda(D_3-S)=6=7-1=\lambda(D_3)-1$

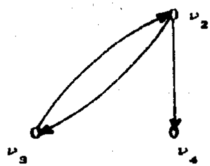
D_4:



$(\nu_2,\nu_3,\nu_1,\nu_4)$, $(\nu_1,\nu_3,\nu_2,\nu_4)$ y $(\nu_3,\nu_2,\nu_1,\nu_4)$ son trayectorias dirigidas con 4 vértices $\therefore\ \lambda(D_4)=4$ e $I(D_4)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$

Sean $S_1=\{\nu_1\}$, $S_2=\{\nu_2\}$ y $S_3=\{\nu_3\}$ conjuntos independientes.
Observamos que $S_1\subset I(D_4)$,
$S_2\subset I(D_4)$ y $S_3\subset I(D_4)$.

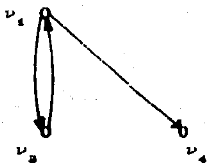
$D_4 - S_1 =$
$D_4 - \{\nu_1\}$:



(ν_3, ν_2, ν_4) es una trayectoria dirigida con 3 vértices.

$\lambda(D_4 - S_1) = 3 = 4 - 1 = \lambda(D_4) - 1.$

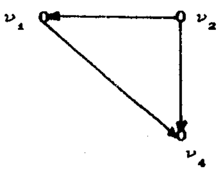
$D_4 - S_2 =$
$D_4 - \{\nu_2\}$:



(ν_3, ν_1, ν_4) es una trayectoria dirigida con 3 vértices $\therefore$

$\lambda(D_4 - S_2) = 3 = 4 - 1 = \lambda(D_4) - 1.$

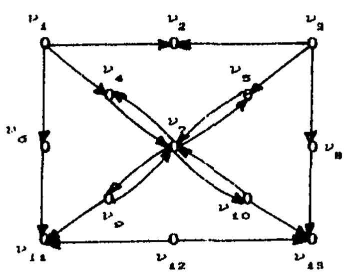
$D_4 - S_3 =$
$D_4 - \{\nu_3\}$:



(ν_2, ν_1, ν_4) es una trayectoria dirigida con 3 vértices $\therefore$

$\lambda(D_4 - S_3) = 3 = 4 - 1 = \lambda(D_4) - 1.$

D_5:

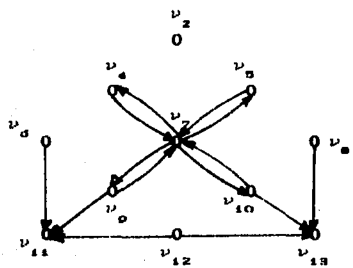


$(\nu_1, \nu_4, \nu_7, \nu_{10}, \nu_{13})$, $(\nu_1, \nu_4, \nu_7, \nu_9, \nu_{11})$, $(\nu_3, \nu_5, \nu_7, \nu_9, \nu_{11})$ y $(\nu_3, \nu_5, \nu_7, \nu_{10}, \nu_{13})$, son trayectorias dirigidas de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_5) = 5$ e

$I(D_5) = \{\nu_1, \nu_3\}$.

En la digráfica anterior $S=\{\nu_1,\nu_3\}$ es un conjunto independiente. Entonces $S \subseteq I(D_5)$, por lo que D_5-S es:

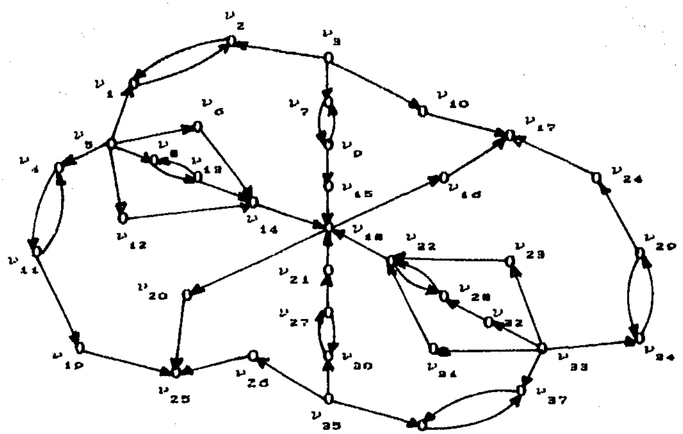
$D_5-S=$
$D_5-\{\nu_1,\nu_3\}$:



$(\nu_4,\nu_7,\nu_{10},\nu_{13})$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima.

$\therefore\ \lambda(D_5-S)=4=5-1=\lambda(D_5)-1.$

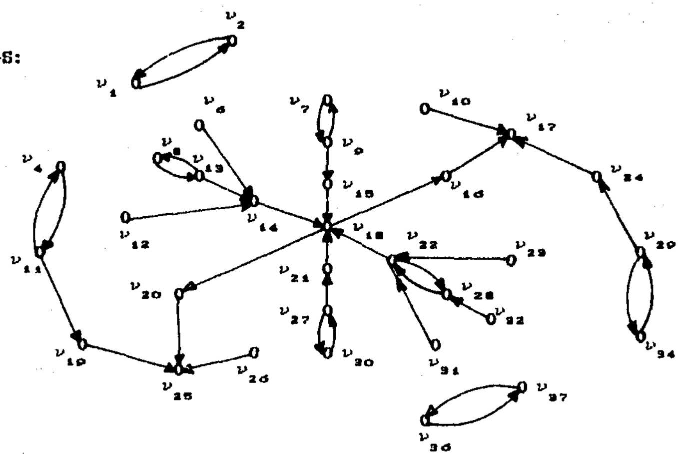
D_6:



$(\nu_5,\nu_8,\nu_{13},\nu_{14},\nu_{18},\nu_{16},\nu_{17})$, $(\nu_3,\nu_7,\nu_9,\nu_{15},\nu_{18},\nu_{20},\nu_{25})$, $(\nu_{33},\nu_{32},\nu_{28},\nu_{22},\nu_{18},\nu_{16},\nu_{17})$ y $(\nu_{35},\nu_{30},\nu_{27},\nu_{21},\nu_{18},\nu_{20},\nu_5)$ son--

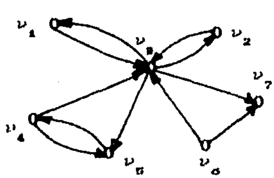
trayectorias dirigidas de longitud máxima, $\therefore$ $\lambda(D_6)=7$ e $I(D_6)=\{\nu_3,\nu_5,\nu_{33},\nu_{35}\}$. sea $S=\{\nu_3,\nu_5,\nu_{33},\nu_{35}\}$ un conjunto independiente. Entonces $S \subseteq I(D_6)$, de donde obtenemos la digráfica D_6-S.

D_6-S:



$D_6-S=D_6-\{\nu_3,\nu_5,\nu_{33},\nu_{35}\}$ donde $(\nu_8,\nu_{13},\nu_{14},\nu_{18},\nu_{16},\nu_{17})$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_6-S)=6$ y se cumple que $\lambda(D_6-S)=6=7-1=\lambda(D_6)-1$.

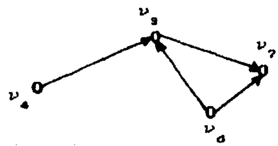
D_7:



$(\nu_1,\nu_3,\nu_5,\nu_4)$, $(\nu_2,\nu_3,\nu_5,\nu_4)$, $(\nu_5,\nu_4,\nu_3,\nu_2)$ y $(\nu_6,\nu_3,\nu_5,\nu_4)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima, $\therefore$ $\lambda(D_7)=4$ e $I(D_7)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_5,\nu_6\}$

Por lo que-en la digráfica D_7 tenemos $S=\{\nu_1, \nu_2, \nu_5\}$ conjunto independiente. Entonces $S \subseteq I(D_7)$. Obtenemos la digráfica D_7-S:

$D_7-S=$
$D_7-\{\nu_1,\nu_2,\nu_5\}$:

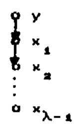


(ν_4,ν_3,ν_7) es una trayectoria dirigida de longitud máxima. Y $\lambda(D_7-S)=3=4-1=\lambda(D_7)-1$.

Hasta el momento podemos afirmar lo siguiente:

OBSERVACION 2 : Claramente, si y es un vértice en $I(D) \cap \Gamma_D^+(x)$, entonces toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x.

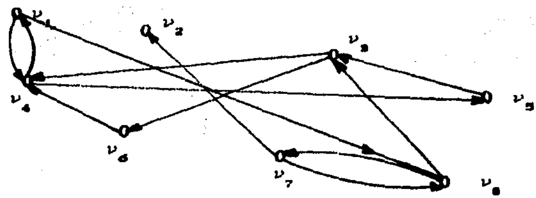
Demostración : Esta demostración se realizará por reducción al absurdo. Sea $y \in I(D) \cap \Gamma_D^+(x)$, entonces:
Suponemos que existe una trayectoria dirigida de longitud máxima ($\lambda(D)=\lambda$) con origen en y que no contiene a x.
Sea $(y,x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_{\lambda-1})$ una trayectoria dirigida en D de longitud máxima ($\lambda(D)=\lambda$) con origen en y, que no contiene a x. Por lo tanto $x \neq x_i$ para $(1\leq i\leq\lambda-1)$.



Por lo anterior y no es vecino externo de x de donde $y \notin I(D) \cap \Gamma_D^+(x)$ lo que contradice la afirmación. Ya que si y fuera vecino externo de x, entonces $(x,y) \in A(D)$, lo cual nos permitiría extender la trayectoria de tal forma $(x,y,x_1,x_2,\ldots,x_{\lambda-1})$ sería una trayectoria dirigida con origen en x, y de longitud $\lambda+1$ en D. Contradiciendo que λ es el número máximo de vértices en las trayectorias dirigidas en D. Por lo tanto se puede concluir que toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x. †

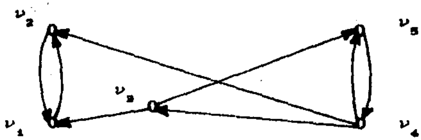
Ejemplos.

D_1:



$(\nu_5, \nu_3, \nu_6, \nu_4, \nu_1, \nu_8, \nu_7, \nu_2)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $=8-1$ $\therefore$ $\lambda(D_1)=8$ y $\Gamma^+_{D_1}(\nu_4)=\{\nu_5\}$ además:
$\nu_5 \in [\, I(D_1) \cap \Gamma^+_{D_1}(\nu_4)]$; observamos que la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_5 contiene a ν_4.

D_2:

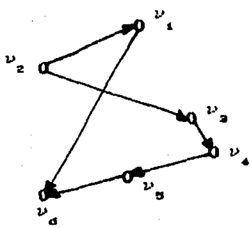


$(\nu_3, \nu_5, \nu_4, \nu_2, \nu_1)$ y $(\nu_5, \nu_4, \nu_3, \nu_1, \nu_2)$ son dos trayectorias dirigidas de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_2)=5$ e $I(D_2)=\{\nu_3, \nu_5\}$ además ;
$\nu_3 \in [\, I(D_2) \cap \Gamma^+_{D_2}(\nu_4)]$; observamos que la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_3 contiene a ν_4. También ;
$\nu_5 \in [\, I(D_2) \cap \Gamma^+_{D_2}(\nu_3)]$ y $\nu_5 \in [\, I(D_2) \cap \Gamma^+_{D_2}(\nu_4)]$ y observamos que la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_5 contiene a ν_3 y ν_4 .

Conviene hacer la observación siguiente:

En general, si y pertenece a $I(D) \cap \Gamma^-_D(x)$, entonces no es cierto que "Toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x".

Ejemplo:



D:

$\lambda(D)=5$

$\nu_2 \in I(D) \cap \Gamma_D^-(\nu_1)$

Nota: La trayectoria dirigida $(\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6)$ de longitud máxima <u>no</u> contiene a ν_1.

CONJETURA C 3 : Para toda digráfica D, existe un vértice x con las siguientes propiedades:

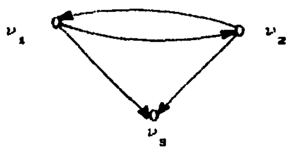
i) $x \in I(D)$

ii) $\forall\ y \in I(D) \cap \Gamma_D^-(x)$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x .

Así , la Conjetura C 3 implica la Conjetura C 2.

Ejemplos:

D_1:



(ν_1,ν_2,ν_3) y (ν_2,ν_1,ν_3) son trayectorias dirigidas de longitud máxima $\therefore \lambda(D_1)=3$, $I(D_1)=\{\nu_1,\nu_2\}$ y se cumple que:

i) $\nu_1 \in I(D_1)$

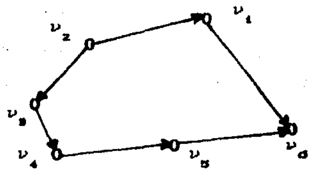
ii) $\nu_2 \in I(D_1) \cap \Gamma_{D_1}^-(\nu_1)$, nos damos cuenta que la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_2 contiene a ν_1.

Observación : La Conjetura C 3 también se cumple con el vértice ν_2 .

i) $\nu_2 \in I(D_1)$

ii) $\nu_1 \in I(D_1) \cap \Gamma_{D_1}^-(\nu_2)$, nos damos cuenta que la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_1 contiene a ν_2 .

D_2:

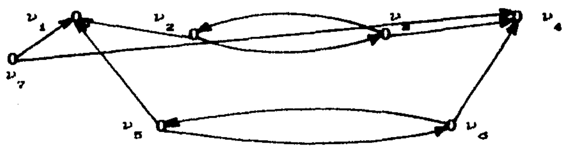


$(\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_2)=5$. Y se cumplen las propiedades:

$i)$ $\nu_3 \in I(D_3)$

$ii)$ Observación $I(D_2) \cap \Gamma^-_{D_2}(\nu_2) = \emptyset$, C 3 $ii)$ se cumple por vacuidad.

D_3:



(ν_2, ν_3, ν_4), (ν_3, ν_2, ν_1), (ν_5, ν_6, ν_4)y (ν_6, ν_5, ν_1) son trayectorias dirigidas de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_3)=3$ e $I(D_3)=\{\nu_2, \nu_3, \nu_5, \nu_6\}$ y se cumplen las propiedades siguientes con ν_2 .

$i)$ $\nu_2 \in I(D_3)$

$ii)$ $\nu_3 \in I(D_3) \cap \Gamma^-_{D_3}(\nu_2)$ donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_3 contiene a ν_2 .

Nos damos cuenta que también se cumple con ν_6 .

$i)$ $\nu_6 \in I(D_3)$

$ii)$ $\nu_5 \in I(D_3) \cap \Gamma^-_{D_3}(\nu_6)$ donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_5 contiene a ν_6 .

Observamos que con el vértice ν_3 también se cumplen las propiedades:

$i)$ $\nu_3 \in I(D_3)$

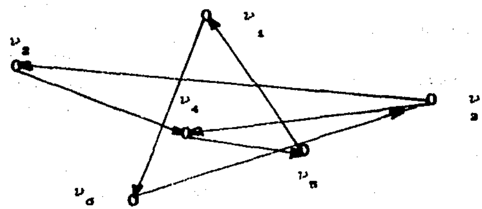
$ii)$ $\nu_2 \in I(D_3) \cap \Gamma^-_{D_2}(\nu_3)$ donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_2 contiene a ν_3 .

Asimismo las propiedades se cumplen para el vèrtice ν_5.

i) $\nu_5 \in I(D_3)$

ii) $\nu_6 \in I(D_3) \cap \Gamma^-_{D_3}(\nu_5)$ donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_6 contiene a ν_5.

D_4 :



$I(D_4) \cap \Gamma^-_{D_4}(\nu_4)=\{\nu_2,\nu_3\}$ donde $\lambda(D_4)=6$, ya que, $(\nu_2,\nu_4,\nu_5,\nu_1,\nu_6,\nu_3)$, $(\nu_3,\nu_2,\nu_4,\nu_5,\nu_1,\nu_6)$ y $(\nu_4,\nu_5,\nu_1,\nu_6,\nu_3,\nu_2)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima y se cumplen las propiedades con el vèrtice ν_4.

i) $\nu_4 \in I(D_4)$

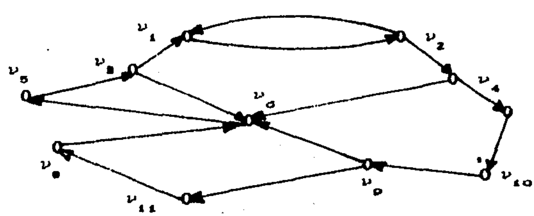
ii) $\nu_2 \in I(D_4) \cap \Gamma^-_{D_4}(\nu_4)$, donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_2 contiene a ν_4.

Asimismo las propiedades siguientes se cumplen:

i) $\nu_4 \in I(D_4)$

ii) $\nu_3 \in I(D_4) \cap \Gamma^-_{D_4}(\nu_4)$, donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_3 contiene a ν_4.

D_5 :



$I(D_5) \cap \Gamma^-_{D_5}(\nu_6)=\{\nu_3,\nu_4,\nu_8,\nu_9\}$ donde $\lambda(D_5)=11$, ya que, las siguientes son trayectorias dirigidas de longitud máxima :

$(\nu_6,\nu_5,\nu_3,\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_7,\nu_{10},\nu_9,\nu_{11},\nu_8)$,
$(\nu_3,\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_7,\nu_{10},\nu_9,\nu_{11},\nu_8,\nu_6,\nu_5)$,
$(\nu_4,\nu_7,\nu_{10},\nu_9,\nu_{11},\nu_8,\nu_6,\nu_5,\nu_3,\nu_1,\nu_2)$,
$(\nu_8,\nu_6,\nu_5,\nu_3,\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_7,\nu_{10},\nu_9,\nu_{11})$ y
$(\nu_9,\nu_{11},\nu_8,\nu_6,\nu_5,\nu_3,\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_7,\nu_{10})$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima.

Las propiedades siguientes se cumplen para los vértices ν_6, ν_3,ν_4, ν_8, y ν_9 respectivamente.

i) $\nu_6 \in I(D_5)$

ii) $\nu_3 \in I(D_5) \cap \Gamma^-_{D_5}(\nu_6)$, donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_3 contiene a ν_6 .

Nos damos cuenta que también se cumplen:

i) $\nu_6 \in I(D_5)$

ii) $\nu_4 \in I(D_5) \cap \Gamma^-_{D_5}(\nu_6)$, donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_4 contiene a ν_6.

Además se satisfacen las propiedades siguientes:

i) $\nu_6 \in I(D_5)$

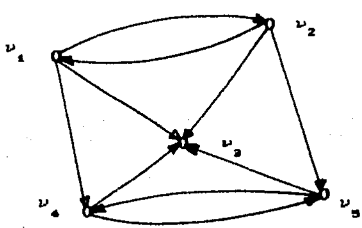
ii) $\nu_8 \in I(D_5) \cap \Gamma^-_{D_5}(\nu_6)$, donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_8 contiene a ν_6.

Asimismo se cumplen i) y ii) para:

i) $\nu_6 \in I(D_5)$

ii) $\nu_9 \in I(D_5) \cap \Gamma^-_{D_5}(\nu_6)$, donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_9 contiene a ν_6.

D_6:



$(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5)$ y $(\nu_2,\nu_1,\nu_4,\nu_5,\nu_3)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima . $\therefore \lambda(D_\sigma)=5$ e $I(D_\sigma)=\{\nu_1,\nu_2\}$. Donde se cumplen las propiedades siguientes para ν_2.

i) $\nu_2 \in I(D_\sigma)$

ii) $\nu_1 \in I(D_\sigma) \cap \Gamma^-_{D_\sigma}(\nu_2)$, donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_1 contiene a ν_2 .

También se cumple para el vértice ν_1:

i) $\nu_1 \in I(D_\sigma)$

ii) $\nu_2 \in I(D_\sigma) \cap \Gamma^-_{D_\sigma}(\nu_1)$, donde la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_2 contiene a ν_1.

OBSERVACION 3 : La Conjetura C 3 implica la Conjetura C 2, es decir:

(C 3) Si para toda digráfica D, existe un vértice x con las siguientes propiedades :

i) $x \in I(D)$

ii) $\forall\ y \in I(D) \cap \Gamma^-_D(x)$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x .

Entonces (C 2) existe un conjunto independiente S tal que :

iii) $S \subseteq I(D)$

iv) $\lambda(D-S)=\lambda(D)-1$.

__Demostración :__ Por inducción sobre el número n de vértices de D.

I. a) Demostración para n=1.

Si D es una digráfica con un sólo vértice, entonces $V(D)=\{x\}$ y $\lambda(D)=1$. Se tiene que existe un vértice x tal que:

i) $x \in I(D)$

ii) $\forall\ y \in I(D) \cap \Gamma^-_D(x)$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x .

Entonces existe S tal que:

Sea $S=\{x\}$ conjunto independiente.

iii) $S=\{x\} \subseteq I(D)$

iv) $\lambda(D-S)=\lambda(D-\{x\})=\lambda(\emptyset)=0=1-1=\lambda(D)-1$

b) Demostración para n=2.

Sea D una digráfica asimétrica con dos vértices.

Caso 1) Sea D una digráfica con dos vértices adyacentes $\overrightarrow{xy}$, entonces $\lambda(D)=2$ y existe un vértice x tal que:

i) $x \in I(D)$

ii) $\forall\ y \in (I(D) \cap \Gamma^-_D(x))=\emptyset$, toda trayectoria dirigida

de longitud máxima con origen en y contiene a x.
Y existe S tal que:
Sea $S=\{x\}$ (conjunto independiente).
iii) $S=\{x\} \subseteq I(D)$
iv) $\lambda(D-S) = \lambda(D-\{x\})=1=2-1=\lambda(D)-1$.

Caso 2) Sea D una digráfica con dos vértices no adyacentes ($\lambda(D)=1$).
Y existe S tal que:
Sea $S=\{x,y\}$ conjunto independiente.
iii) $S=\{x,y\} \subseteq I(D)$
iv) $\lambda(D-S)=\lambda[\ D-\{x,y\}\ ]=\lambda(\emptyset)=0=1-1=\lambda(D)-1$.

Caso 3) Sea D una digráfica simétrica con dos vértices adyacentes y $\lambda(D)=2$. Sea $S=\{x\}$, conjunto independiente
iii) $S \subseteq I(D)$
iv) $\lambda(D-S) = \lambda(D-x)=1=\lambda(D)-1$.

II. Suponer para menos de n vértices , es decir:
Para toda digráfica D' con menos de n vértices, existe un vértice x tal que:
i) $x \in I(D')$
ii) $\forall\ y \in I(D') \cap \Gamma^-_{D'}(x)$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x .
Entonces existe un conjunto independiente S' tal que:
iii) $S' \subseteq I(D')$
iv) $\lambda(D'-S')=\lambda(D')-1$.

III. Demostración para n vértices.
Sea D una digráfica con n vértices ($\lambda(D)=\lambda$), existe un vértice x tal que:
i) $x \in I(D)$
ii) $\forall\ y \in I(D) \cap \Gamma^-_D(x)$ toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x .

Por hipótesis de inducción

Consideremos la digráfica $(D-x)$ con menos de n vértices, entonces existe un vértice x' tal que:
i) $x' \in I(D-x)$
ii) $\forall\ y \in I(D-x) \cap \Gamma^-_{D-x}(x')$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x' .
Entonces existe un conjunto independiente R tal que:
iii) $R \subseteq I(D-x)$
iv) $\lambda\ [\ (D-x)-R\ ] = \lambda\ (D-x)-1$.

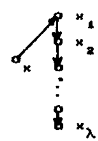
Cuando quitamos a D el vértice x debe suceder uno de los dos casos siguientes:

$$\text{Como } \lambda(D)=\lambda \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Caso 1)} \quad \lambda(D-x) < \lambda(D) \quad \text{o} \\ \text{Caso 2)} \quad \lambda(D-x) = \lambda(D) \end{array} \right.$$

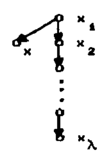
Caso 1) Demostración para $\lambda(D-x) < \lambda(D)$.
Existe S tal que :
Sea $S=\{x\}$ conjunto independiente $\rightarrow$
$iii)$ $S=\{x\} \subseteq I(D)$
$iv)$ $\lambda(D-S)=\lambda(D-x) < \lambda(D)$
$\rightarrow$ $\lambda(D-S)=\lambda(D-x) \leq \lambda(D)-1$
como $x \in I(D)$ $\rightarrow$ $\lambda(D-x)=\lambda(D)-1$
$\rightarrow$ $\lambda(D-S)=\lambda(D)-1$

Caso 2) Demostración para $\lambda(D-x)=\lambda(D)$
Existe $R \cup \{x\}$, por lo tanto:
Por demostrar que $R \cup \{x\}$ es un conjunto independiente.
Demostración por reducción al absurdo .
Suponemos que $R \cup \{x\}$ no es conjunto independiente (R es conjunto independiente por hipótesis de inducción), entonces hay un vértice $x_1 \in R$ que es adyacente a x, es decir (x_1,x) o (x,x_1) es una flecha en D. Como $x_1 \in R \subseteq I(D-x)$ (por hipótesis de inducción), entonces x_1 es vértice inicial de una trayectoria dirigida de longitud máxima en $(D-x)$, [puesto que $\lambda(D-x)=\lambda(D)$]. Sea $(x_1,x_2,\ldots x_\lambda)$ dicha trayectoria.

a) Si (x,x_1) es una flecha en D.
Consideremos $(x,x_1) \cup (x_1,x_2,\ldots,x_\lambda)$ así hemos obtenido $(x,x_1,x_2,\ldots,x_\lambda)$ una trayectoria con $\lambda+1$ vértices en D. Lo cual contradice que $\lambda(D)=\lambda$.
Por lo que se concluye que $R \cup \{x\}$ es conjunto independiente.



b) Si (x_1,x) es una flecha en D, es decir, $x_1 \in \Gamma_D^-(x)$
Como $x_1 \in R \subseteq I(D-x)$, entonces x_1 es punto inicial de una trayectoria dirigida de longitud máxima en $(D-x)$.
Sea $(x_1,x_2,\ldots,x_\lambda)$ dicha trayectoria.



Puesto que $\lambda(D-x)=\lambda(D)=\lambda$ entonces resulta que $I(D-x) \subseteq I(D)$ y $x_1 \in I(D)$, y también $(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima en D $(\lambda(D)=\lambda)$.

Dicha trayectoria no contiene a x. Lo anterior contradice a que en D existe un vértice x tal que:

$i)$ $x \in I(D)$
$ii)$ $\forall\ x_1 \in I(D) \cap \Gamma_D^-(x)$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en x_1 contiene a x.

$\therefore$ se concluye que $R \cup \{x\}$ es conjunto independiente.

$iii)$ Por demostrar que $(R \cup \{x\}) \subseteq I(D)$.
Por hipótesis de inducción $R \subseteq I(D-x)$ como $\lambda(D-x)=\lambda(D) \rightarrow I(D-x) \subseteq I(D) \rightarrow R \subseteq I(D)$ y $x \in I(D) \rightarrow R \cup \{x\} \subseteq I(D)$.

$iv)$ Por demostrar que $\lambda\ [\ D-(R \cup \{x\})\ ]=\lambda(D)-1$
$\lambda\ [\ D-(R \cup \{x\})\ ] = \lambda\ [\ D-R-\{x\}\ ] = \lambda\ [\ (D-x)-R\ ] = \lambda(D-x)-1=\lambda(D)-1.$ $\dagger$

Para ver que la Conjetura C 3 implica la Conjetura C 2. Consideremos nuevamente las digráficas D_1, D_3, D_4, D_5, y D_6 las cuales ejemplificaron la Conjetura C 3. Y ahora ejemplificarán que C 3 implica C 2.

Ejemplos.

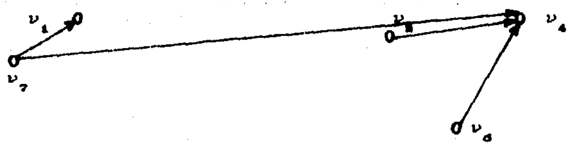
Sea $S=\{\nu_1\} \subseteq I(D_1)$ conjunto independiente.

D_1-S:

$\lambda(D_1-S)=2=3-1=\lambda(D_1)-1.$

Sea $S=\{\nu_2,\nu_5\} \subseteq I(D_3)$ conjunto independiente, entonces con base en este conjunto obtenemos la siguiente digráfica:

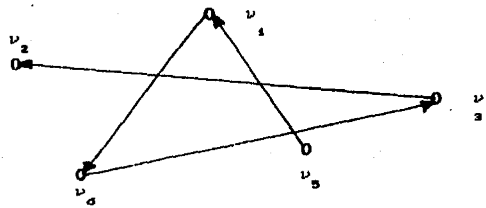
D_3-S:



Donde $\lambda(D_3-S)=2=3-1=\lambda(D_3)-1$.

Sea $S=\{\nu_4\} \subseteq I(D_4)$ un conjunto independiente, entonces:

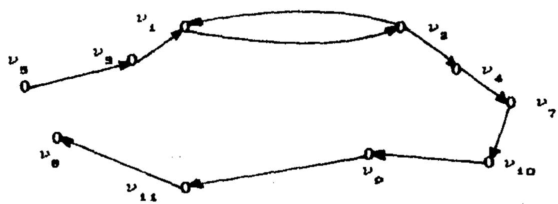
D_4-S:



$(\nu_5,\nu_1,\nu_6,\nu_3,\nu_2)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_4-S)=5=6-1=\lambda(D_4)-1$.

Sea $S=\{\nu_6\} \subseteq I(D_5)$ un conjunto independiente, entonces:

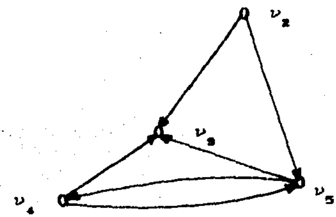
D_5-S:



$(\nu_5,\nu_3,\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_7,\nu_{10},\nu_9,\nu_{11},\nu_8)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_5-S)=10=11-1=\lambda(D_5)-1$.

Sea $S=\{\nu_1\}$ un conjunto independiente , entonces:

$D_\sigma - S$:



$(\nu_2, \nu_5, \nu_4, \nu_3)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore\ \lambda(D_\sigma - S) = 4 = 5-1 = \lambda(D_\sigma)-1$.

TEOREMA 4 : Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene grado ≤ 3. Entonces D satisface la Conjetura C 3 (y entonces C 2 y C 1).

TEOREMA 4 : Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene grado $\leq$ 3. Entonces existe un vértice x con las siguientes propiedades :

i) $x \in I(D)$

ii) $\forall\ y \in I(D) \cap \Gamma_D^-(x)$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x .

<u>Demostración</u> : Por reducción al absurdo. Suponemos que la afirmación es falsa , es decir, suponemos que para cada $x \in I(D)$ existe $y \in I(D) \cap \Gamma_D^-(x)$ y una trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y que no contiene a x . Y sea x un vértice en $I(D)$, entonces hay un vértice $y \in I(D) \cap \Gamma_D^-(x)$ el cual es origen de una trayectoria dirigida de longitud máxima que no contiene a x .

Por otra parte $y \in I(D)$, entonces hay un vértice $z \in I(D) \cap \Gamma_D^-(y)$ el cual es origen de una trayectoria dirigida de longitud máxima que no contiene a y. Continuando este procedimiento construimos un ciclo dirigido $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tal que , para todo i (mod. p),

hay una trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en x_i que no contiene a x_{i+1}. Ya que-

$\delta_D(x_i) = \delta_D^+(x_i) + \delta_D^-(x_i) \leq 3$, esto implica que, para todo i ($1 \leq i \leq p$) $\delta_D^+(x_i)=2$ y $\delta_D^-(x_i)=1$.

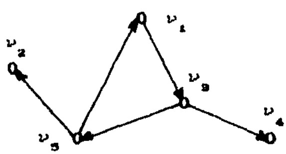
Como la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en x_1 no contiene a x_2, entonces tampoco contiene a x_p, ya que si x_p estuviese en dicha trayectoria, entonces la trayectoria con origen en x_1 tendría que llegar a algún x_j ($3 \leq j \leq p$). Esto implicaría que $\delta_D^-(x_j)=2$ $\Rightarrow$ $\delta_D(x_j)=4$, lo cual contradice que $\delta_D(x_j) \leq 3$.

Por lo que se concluye que efectivamente la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en x_1 no contiene a x_2 y tampoco contiene a x_p. Entonces agregando la flecha (x_p, x_1) a dicha trayectoria se obtiene una nueva trayectoria de con $\lambda+1$ vértices en D, lo cual contradice que $\lambda(D)=\lambda$.

Entonces la afirmación del Teorema 4 es verdadera.$\dagger$

Ejemplos:

D_1:



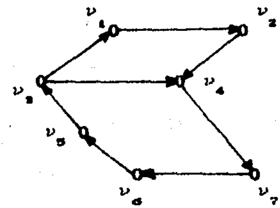
$\delta_{D_1}(\nu_1)=2$, $\delta_{D_1}(\nu_2)=1$, $\delta_{D_1}(\nu_3)=3$, $\delta_{D_1}(\nu_4)=1$ y $\delta_{D_1}(\nu_5)=3$.

$(\nu_1, \nu_3, \nu_4, \nu_2)$ y $(\nu_5, \nu_1, \nu_3, \nu_4)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_1)=4$ e $I(D_1)=\{\nu_1, \nu_5\}$, se cumplen:

i) Existe $\nu_1 \in I(D_1)$

ii) $\nu_5 \in I(D_1) \cap \Gamma_{D_1}^-(\nu_1)$, la trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_5 contiene a ν_1.

D_2:



$\delta_{D_2}(\nu_1)=2$, $\delta_{D_2}(\nu_2)=2$,

$\delta_{D_2}(\nu_3)=3$, $\delta_{D_2}(\nu_4)=3$,

$\delta_{D_2}(\nu_5)=2$, $\delta_{D_2}(\nu_6)=2$,

$\delta_{D_2}(\nu_7)=2$.

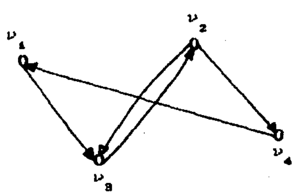
$(\nu_4,\nu_7,\nu_6,\nu_5,\nu_3,\nu_1,\nu_2)$, $(\nu_3,\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_7,\nu_6,\nu_5)$ y $(\nu_2,\nu_4,\nu_7,\nu_6,\nu_5,\nu_3,\nu_1)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_2)=7$ e $I(D_2)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7\}$. Por lo tanto se cumplen:

i) Existe $\nu_4 \in I(D_2)$

ii) $\nu_2 \in I(D_2) \cap \Gamma^-_{D_2}(\nu_4)$. La trayectoria dirigida con origen en ν_2 contiene a ν_4 .

ii) $\nu_3 \in I(D_2) \cap \Gamma^-_{D_2}(\nu_4)$. La trayectoria dirigida con origen en ν_3 contiene a ν_4 .

D_3:



$\delta_{D_3}(\nu_1)=2$, $\delta_{D_3}(\nu_2)=3$,

$\delta_{D_3}(\nu_3)=3$, $\delta_{D_3}(\nu_4)=2$.

$(\nu_1,\nu_3,\nu_2,\nu_4)$, $(\nu_4,\nu_1,\nu_3,\nu_2)$, $(\nu_3,\nu_2,\nu_4,\nu_1)$ y $(\nu_2,\nu_4,\nu_1,\nu_3)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_3) = 4$ e $I(D_3)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\}$. Por lo tanto se cumplen:

i) Existe $\nu_1 \in I(D_3)$

ii) $\nu_4 \in I(D_3) \cap \Gamma^{-}_{D_3}(\nu_1)$. La trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en ν_4 contiene a ν_1 .

El Teorema 4 implica C 3, y C 3 implica C 2 y C 2 implica C 1 .

Por demostrar que C 2 implica C 1. Es decir:

Conjetura C 2 .Para toda digráfica D, existe un conjunto independiente S tal que :

i) $S \subseteq I(D)$

ii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$.

Conjetura C 1 . Para toda digráfica D sin lazos, existe un conjunto independiente S tal que :

$\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Por lo tanto:

OBSERVACION 4 : Si para toda digráfica D, existe un conjunto independiente S tal que :

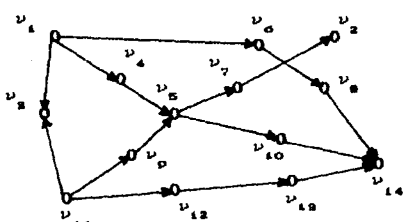
i) $S \subseteq I(D)$

ii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$.

Entonces para una digráfica D sin lazos se tiene que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$. +

EJEMPLO:

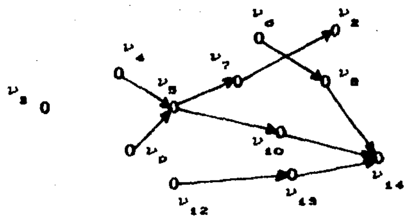
D_1 :



$(\nu_1,\nu_4,\nu_5,\nu_7,\nu_2)$ y $(\nu_{11},\nu_9,\nu_8,\nu_{10},\nu_{14})$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima . $\therefore$ $\lambda(D_1)=5$ y $S=\{\nu_1,\ \nu_{11}\}$ $\subset$ $I(D_1)$ donde $S=\{\nu_1,\nu_{11}\}$ es un conjunto independiente $\therefore$ obtenemos D_1-S:

$D_1-S=$

$D_1-\{\nu_1,\nu_{11}\}$:



$(\nu_4,\nu_5,\nu_{10},\nu_{14})$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima.

Donde se cumplen las propiedades siguientes:

i) $S \subseteq I(D_1)$

ii) $\lambda(D_1-S) = 4 = 5 - 1 = \lambda(D_1)-1$

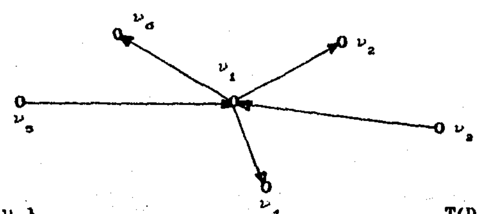
D_1 es una digráfica sin lazos .

Además se cumple:

iii) $\lambda(D_1-S) = 4 < 5 = \lambda(D_1)$.

A continuación se denota por T(D) el conjunto de vértices terminales de las trayectorias dirigidas de longitud máxima de D.

D:



$I(D)=\{\nu_3,\nu_5\}$, $T(D)=\{\nu_2,\nu_4,\nu_6\}$.

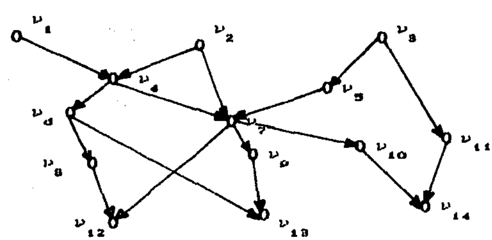
TEOREMA 5 . Sea $C \subseteq V(D)-T(D)$. Si $D-C$ tiene un núcleo S, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

<u>**Demostración**</u> **:** Se realizará por reducción al absurdo ;por lo tanto suponemos que en D existe, una trayectoria dirigida de longitud máxima que no pasa por el núcleo S de $D-C$, para $C \subseteq [\ V(D) - T(D)\ ]$. Sea τ dicha trayectoria, denotamos por z_0 el punto terminal de τ. Entonces $z_0 \in T(D)$ implica $z_0 \notin [\ V(D) - T(D)\ ]$ por hipótesis $C \subseteq [\ V(D)-T(D)\ ]$, entonces $z_0 \notin C$ de donde obtenemos que $z_0 \in [\ V(D)-C\ ]$. Como la trayectoria τ no pasa por el núleo S entonces $V(\tau) \cap S=\emptyset$ implica que $z_0 \notin S$ entonces $z_0 \in [\ V(D)-S\ ]$. Por lo tanto hemos encontrado que $z_0 \in [\ V(D)-C\ ] \cap [\ V(D)-S\ ]$, dado que el vértice terminal está en la intersección se deduce que $z_0 \in [\ V(D)-C-S\ ]=[\ (V(D)-C)-S\ ]$. Pero por hipótesis S es núcleo en $D-C$, por lo tanto hay un vértice $y \in S$ tal que $(z_0,y) \in A(D-C)$ como $A(D-C) \subseteq A(D)$ entonces $(z_0,y) \in A(D)$.

Consideremos la trayectoria dirigida $\tau'=\tau \cup (z_0,y)$ donde $\ell(\tau') > \ell(\tau)$ lo cual contradice que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima, por lo tanto toda trayectoria dirigida de longitud máxima en D pasa por el núcleo S ,entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$. ♦

Ejemplos:

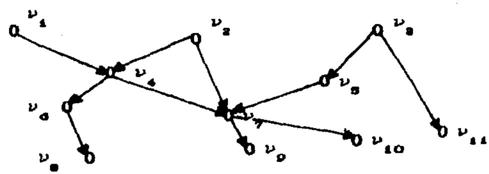
D_1 :



Sea $C=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5\} \subseteq (V(D_1)-T(D_1))$ entonces $V(D_1)-C = \{\nu_6,\nu_7,\nu_8,\nu_9,\nu_{10},\nu_{11},\nu_{12},\nu_{13},\nu_{14}\}$. Claramente se observa que-

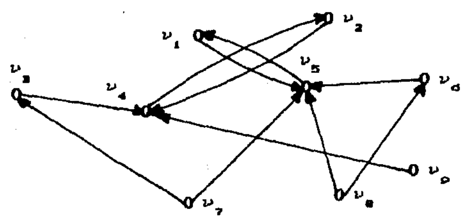
$S=\{\nu_{12},\nu_{13},\nu_{14}\}$ es un conjunto independiente y un núcleo de D_1-C.
$\tau=(\nu_1,\nu_4,\nu_7,\nu_9,\nu_{13})$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima, entonces $\lambda(D_1)=5$, consideremos a D_1-S.

D_1-S:



$\tau_1=(\nu_1,\nu_4,\nu_7,\nu_9)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima en D_1-S. Entonces $\lambda(D_1-S)=4 < 5=\lambda(D_1)$.

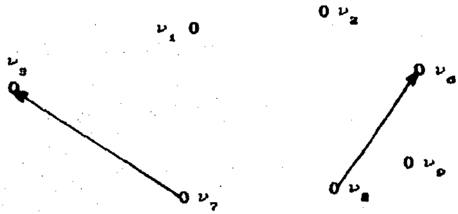
D_2:



$\tau=(\nu_7,\nu_3,\nu_4,\nu_2)$, y $\tau_1=(\nu_8,\nu_6,\nu_5,\nu_1)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima $\therefore\ \lambda(D_2)=4$ además $T(D_2)=\{\nu_1,\nu_2\}$.

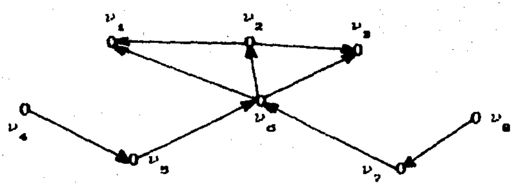
Sea $C=\{\nu_8,\nu_6\}\subset(V(D_2)-T(D_2))$, claramente observamos que $S=\{\nu_4,\nu_5\}$ es un conjunto independiente y es núcleo de D-C. A continuación consideremos la digráfica de D_2-S.

D_2-S:



Se cumple que $\lambda(D_2-S)=2 < 4=\lambda(D_2)$.

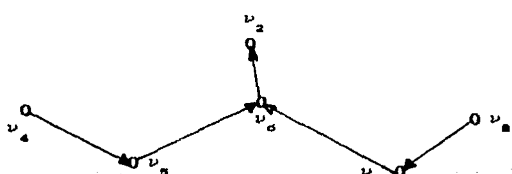
D_3:



$T=(\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_2,\nu_1)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima por lo tanto $\lambda(D_3)=5$ y $T(D_3)=\{\nu_1,\nu_3\}$.

Sea $C=\{\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_8\} \subseteq (V(D_3)-T(D_3))$ donde $D_3-C=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ Sea $S=\{\nu_1,\nu_3\}$ el cual es núcleo en D_3-C y se cumple la desigualdad en D_3-S:

D_3-S:



$\lambda(D_3-S)=4$. Por lo tanto $\lambda(D_3-S)=4 < 5=\lambda(D_3)$.

TEOREMA 5^{-1} (DUAL DEL TEOREMA 5) : Sea $C \subseteq (V(D)-I(D))$. Si S es un conúcleo en D-C, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

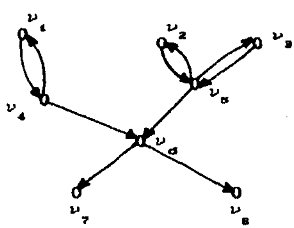
Debemos demostrar que si D tiene un conúcleo S, entonces todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima pasan por S.

<u>Demostración</u> : Por reducción al absurdo .
Suponemos que en D existe una trayectoria dirigida de longitud máxima que no pasa por el conúcleo S. Sea τ dicha trayectoria , denotemos por z_0 el vértice inicial de τ , entonces $z_0 \in I(D)$, por lo tanto $z_0 \notin [\ V(D)-I(D)\ ]$, pero por hipótesis del teorema $C \subseteq [\ V(D)-I(D)\ ]$ de donde $z_0 \notin C$, de aquí que $z_0 \in [\ V(D)-C\ ]$. Además como la trayectoria τ no pasa por el conúcleo S entonces $V(\tau) \cap S=\emptyset$ de donde $z_0 \notin S$ por lo que deducimos que $z_0 \in [\ V(D)-S\ ]$. Hemos encontrado dos conjuntos que tienen a z_0 como elemento , por lo tanto $z_0 \in [\ V(D)-C\ ] \cap [\ V(D)-S\ ] = [\ (\ V(D)-C\ )-S\ ]$. Por hipótesis S es un conúcleo en D-C, de donde hay un vértice $y \in S$ tal que $(y,z_0) \in A(D-C) \subseteq A(D)$ entonces $(y,z_0) \in A(D)$.

Consideremos la trayectoria $\tau'=(y,z_0) \cup \tau$ donde $\ell(\tau') > \ell(\tau)$, lo cual contradice que τ sea una trayectoria dirigida de longitud máxima . Por lo tanto podemos concluir que toda trayectoria dirigida de longitud máxima en D pasa por el conúcleo S , entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.♦

Ejemplos:

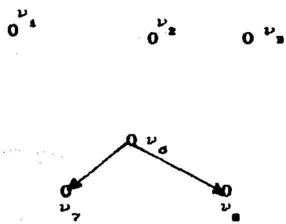
D_1 :



$\tau=(\nu_1,\nu_4,\nu_6,\nu_8)$ es una trayectoria dirigida con longitud máxima. Por lo tanto $\lambda(D_1)=4$.

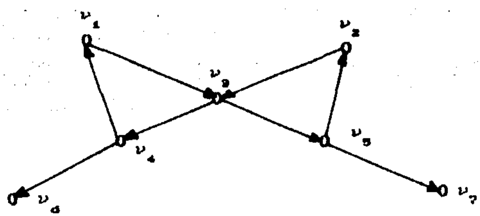
Sea $C=\{\nu_6,\nu_7,\nu_8\} \subseteq (V(D_1)-I(D_1))$, además $I(D_1) = \{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$. Consideremos $S=\{\nu_4,\nu_5\}$ un conúcleo en D_1-C. Por lo que al representar D_1-S se obtiene:

D_1-S:



$\lambda(D_1-S)=2<4=\lambda(D_1)$.

D_2:

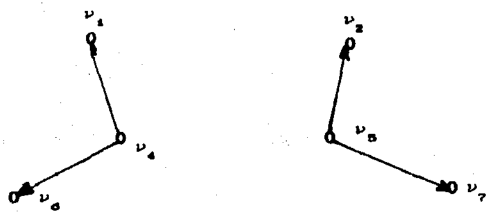


Observamos que $I(D_2)=\{\nu_4,\nu_5\}$ puesto que , $\tau=(\nu_4,\nu_1,\nu_3,\nu_5,\nu_2)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima . Así se obtiene que $\lambda(D_2)=5$.

Sea $C=\{\nu_1,\nu_2,\nu_6,\nu_7\} \subseteq (V(D_2)-I(D_2))$, entonces:

Consideremos $S=\{\nu_3\}$ es un conúcleo en D-C, si quitamos el conjunto S a la digráfica D_2, entonces obtenemos la digráfica siguiente:

D_2-S:



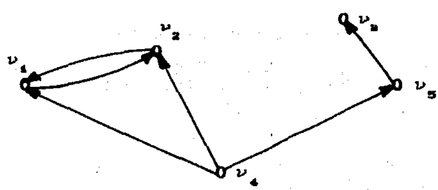
Se satisface la desigualdad $\lambda(D_2-S)=2 < 5=\lambda(D_2)$.

COROLARIO 2 : Sea D una digráfica . Si $D[\ T(D)\ ]$ tiene un núcleo S, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$

<u>Demostración</u> : Sea S un núcleo en $D[\ T(D)\ ]$. Además, $D[\ T(D)\ ] = D[\ V(D)-(\ V(D)-T(D)\ )\ ] = D[\ V(D)-C\ ] = D-C$ cuando $C=V(D)-T(D)$, entonces S también es núcleo en D-C, por el Teorema 5 (Si $C \subseteq [V(D)-T(D)]$ y si S es núcleo en D-C, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$) concluimos que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$. †

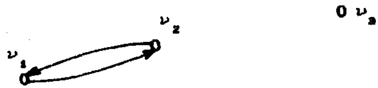
Ejemplo:

D:



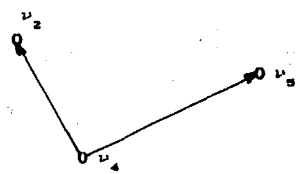
Observamos que $T(D) =\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ y $\lambda(D)=3$.

D[T(D)]:



En esta subdigráfica $S=\{\nu_1,\nu_3\}$ es un núcleo.

D-S=
D-$\{\nu_1,\nu_3\}$:



En esta subdigráfica se cumple que $\lambda(D-S) = 2 < 3 = \lambda(D)$.

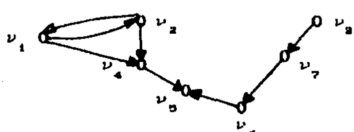
COROLARIO 2^{-1}: Sea D una digráfica . Si D[I(D)] tiene un conúcleo S, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$

<u>Demostración</u> : Sea S conúcleo en D[I(D)]. Además D[I(D)]=D[V(D)-(V(D)-I(D))] = D[V(D)-C]=D-C, siempre que C=V(D)-I(D) .

Por lo tanto S es también conúcleo en D-C, aplicando el Teorema 5^{-1} (Sea $C \subseteq [V(D)-I(D)]$, si S es conúcleo en D-C, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$) podemos concluir que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$. +

Ejemplo:

D:

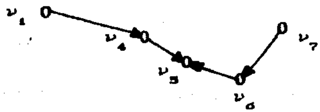


Nos damos cuenta que $I(D)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ y $\lambda(D)=4$.

D[I(D)]:

Aquí $S=\{\nu_2,\nu_3\}$ es un conúcleo.

D-S:



Podemos concluir que:

$\lambda(D-S)=3 < 4=\lambda(D)$

En [10] fue demostrado que cualquier digráfica que tiene un núcleo satisface la Conjetura 1. Claramente los Teoremas 5 y 5^{-1} son una generalización de este resultado.

Las condiciones suficientes para que una digráfica tenga un núcleo han sido investigadas por varios autores (Por ejemplo ver [4], [5], [6]).

PROPIEDAD $\mathcal{P}_D$:

Se dirá que un vértice $x \in I(D)$ satisface la propiedad $\mathcal{P}_D$ si para cada $(y,x) \in$ Asym D[I(D)] por lo menos una de las condiciones siguientes se cumple:

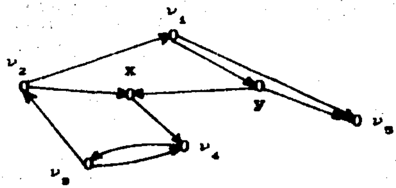
i) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y contiene a x.

ii) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D conteniendo a x y no iniciando en x también contiene a y.

A continuación se presentan dos digráficas para ejemplificar la propiedad $\mathcal{P}_D$, en las cuales se identifica el cumplimiento de los dos incisos.

Ejemplos:

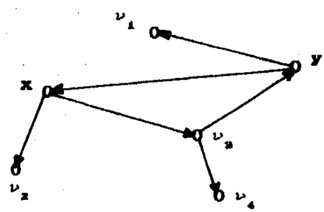
D_1:



$\tau_1=(x,\nu_4,\nu_3,\nu_2,\nu_1,y,\nu_5)$ y $\tau_2=(y,x,\nu_4,\nu_3,\nu_2,\nu_1,\nu_5)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima . Por lo tanto $\lambda(D_1)=7$.
$I(D_1)=\{x,y\}$. Además observamos que τ_2 tiene como vértice inicial a y y contiene a x.
También $(y,x) \in \mathrm{Asym}\, D_1[\, I(D_1)\,]$.

Por lo tanto x satisface la propiedad $\mathcal{P}_{D_1}$.

D_2:



$\tau_1=(x,\nu_3,y,\nu_1)$, $\tau_2=(y,x,\nu_3,\nu_4)$ y $\tau_3=(\nu_3,y,x,\nu_2)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima, entonces $\lambda(D_2)=4$.

$I(D_2)=\{x,y,\nu_3\}$, por lo tanto $(y,x) \in \mathrm{Asym}\, D_2[\, I(D_2)\,]$.
En esta digráfica observamos que se cumplen las condiciones siguientes:

i) $\tau_2=(y,x,\nu_3,\nu_4)$ tiene como origen a y y contiene a x .

ii) $\tau_3=(\nu_3,y,x,\nu_2)$ esta trayectoria contiene a x y no empieza en x, pero también contiene a y .

Por lo anterior el vértic e $x \in I(D_2)$ satisface la propiedad $\mathcal{P}_{D_2}$.

Teorema 6 : Sea D una digráfica . Si cada subdigráfica H inducida de D tiene un vértice $x \in I(H)$ satisfaciendo la propiedad $\mathcal{P}_H$, entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 6 : Sea D una digráfica . Si cada subdigráfica H inducida de D tiene un vértice $x \in I(H)$, tal que para cada $(y,x) \in$ Asym H [I(H)] por lo menos una de las condiciones siguientes se cumple :

i) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de H con origen en y contiene a x .

ii) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de H conteniendo a x y no iniciando en x también contiene a y.

Entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

<u>Demostración</u> : Por inducción sobre el número n de vértices en una digráfica D.

I. Demostración para n=1.

Suponemos que D es una digráfica con un vértice , es decir $D=\{x\}$, $\lambda(D)=1$. Y cada subdigráfica H inducida de D tiene un vértice $x \in I(H)$ que satisface la propiedad $\mathcal{P}_H$.

Como la hipótesis se cumple para toda subdigráfica H inducida de D. Consideremos la subdigráfica $H=\{x\}=D$ inducida de $D=\{x\}$, la cual tiene un vértice $x \in I(D)$ tal que para cada $(y,x) \in$ Asym D[I(D)]=$\emptyset$ se cumple la condición (i) que para toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y contiene a x.

Entonces existe un conjunto independiente $S=\{x\} \subseteq I(D)$ tal que $\lambda(D-S)=\lambda(\{x\}-\{x\})=\lambda(\emptyset)=0 < 1=\lambda(D)$.

II. Hipótesis de inducción. Suponemos que el teorema es válido para digráficas con n-1 vértices.

Sea D´ una digráfica con n-1 vértices . Si cada subdigráfica H´ inducida de D´ tiene un vértice $x' \in I(H')$ tal que para cada $(y',x') \in$ Asym H´[I(H´)] por lo menos una de las condiciones siguientes se cumple:

i) Para toda trayectoria dirigida de longitud máxima de H´ con origen en y´ contiene a x´ .

ii) Para toda trayectoria dirigida de longitud máxima de H´ conteniendo a x´ y no iniciando en x´ también contiene a y´ .

Entonces existe un conjunto independiente $S' \subseteq I(D')$ tal que $\lambda(D'-S') < \lambda(D')$.

III. Demostramos el teorema para digráficas con n vértices.

Por demostrar que si D es una digráfica con n vértices y si cada subdigráfica H inducida de D tiene un vértice $x \in I(H)$ que satisface la propiedad $\mathcal{P}_H$. Entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Demostración . Como la hipótesis se cumple para cada subdigráfica H inducida de D. Consideremos H=D. Por lo tanto D tiene un vértice $x \in I(D)$ tal que para cada $(y,x) \in \text{Asym } D[\ I(D)\ ]$ por lo menos una de las condiciones siguientes se cumple:

i) Para toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y contiene a x.

ii) Para toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D conteniendo a x y no iniciando en x también contiene a y .

Consideremos D-x . Como D-x es una digráfica con n-1 vértices entonces satisface la hipótesis de inducción , por lo tanto y como cada subdigráfica inducida de D-x lo es también de D, entonces existe un conjunto independiente $J \subseteq I(D-x)$ tal que $\lambda[\ (D-x)-J\ ] < \lambda\ (D-x)$.

Concluimos que el conjunto independiente J intersecta todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima en D-x.

Hay dos posibilidades $\left[\begin{array}{l} \text{(a) que } \lambda(D-x) < \lambda(D) \quad \text{o} \\ \text{(b) que } \lambda(D-x) = \lambda(D) \end{array}\right.$

a) Si $\lambda(D-x) < \lambda(D)$.

Entonces $S=\{x\} \subseteq I(D)$ es un conjunto independiente tal que $\lambda(D-S) = \lambda(D-\{x\}) = \lambda(D-x) < \lambda(D)$. De donde $S=\{x\}$ intersecta todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima de D.

b) Si $\lambda(D-x) = \lambda(D)$ entoncese $I(D-x) \subseteq I(D)$.

Consideremos $J \cup \{x\}$. Entonces existen dos posibilidades (caso 1) que $J \cup \{x\}$ sea un conjunto independiente o, (caso 2) que $J \cup \{x\}$ no sea un conjunto independiente .

Caso 1. Si $J \cup \{x\}$ es un conjunto independiente entonces por hipótesis de inducción $J \subseteq I(D-x) \subseteq I(D)$, además $x \in I(D)$. Por lo tanto $S= J \cup \{x\} \subseteq I(D)$ es un conjunto independiente , tal que $\lambda(D-S) = \lambda[D-(J \cup \{x\})] = \lambda[\ D-(\{x\}-J)\ ] = \lambda[\ (D-x)-J\ ] < \lambda(D-x) = \lambda(D)$.

Caso 2. Si $J \cup \{x\}$ no es un conjunto independiente, entonces $J \subseteq I(D-x)$ es un conjunto independiente, entonces hay un vértice $y \in J$, que es adyacente a x, de donde $\{(x,y),(y,x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$. Como $y \in J \subseteq I(D-x)$ entonces y es un vértice inicial de una trayectoria dirigida de longitud máxima de D-x que no pasa por x. Pero $I(D-x) \subseteq I(D)$ entonces y es un punto inicial de la trayectoria dirigida de longitud máxima en D que no contiene a x . Sea τ dicha trayectoria entonces τ no pasa por x. Sea $\tau' = (x,y) \cup \tau$ con $\ell(\tau')$ mayor que $\ell(\tau) = \lambda(D) = \lambda$, ya que $\lambda(D-x) = \lambda(D)$ -

contradiciendo la elección de τ. Por lo tanto $(x,y) \notin A(D)$. Concluimos entonces que $(y,x) \in A(D)$ además $x \in I(D)$, $y \in I(D-x) \subseteq I(D)$. De donde $(y,x) \in$ Asym $D[\, I(D)\,]$ por la hipótesis del Teorema 6 por lo menos una de las condiciones siguientes se cumple:

i) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y contiene a x.

ii) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D conteniendo a x, no iniciando en x, también contiene a y.

La condición (i) no se cumple debido a que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y que no contiene a x.

Sea $S = J \subseteq I(D-x) \subseteq I(D)$, por hipótesis J es un conjunto independiente que intersecta todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima en $D-x$.

Además se cumple la condición (ii), de donde deducimos que $\{y\} \subseteq J$ intersecta todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima que contienen a x y donde x no es punto inicial.
Como $(y,x) \in A(D)$, se cumple que toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en x contiene a y, ya que de lo contrario podríamos extender la trayectoria con la flecha (y,x). Por lo tanto $\{y\} \subseteq J$ intersecta todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima con origen en x.

Entonces $S = J \subseteq I(D)$ es un conjunto independiente que intersecta todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima en D. Y se cumple que $\lambda(D-S) = \lambda(D-J) < \lambda(D)$. ♦

Ejemplo:

D: x 0

Consideremos $H=D=\{x\}$. Observamos que $I(H)=\{x\} \Rightarrow x \in I(H)$. Por lo tanto el vértice x satisface la propiedad $\mathcal{P}_H$ por vacuidad.

Se tiene que, $\lambda(D)=\lambda\{x\}=1$. Por lo tanto existe $S=\{x\}$ conjunto independiente, donde $\lambda(D-S)=\lambda(D-\{x\})=\lambda(\emptyset)=0 \Rightarrow$ se cumple la desigualdad, $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

D: x 0 0 y

Sea $H=D$, $I(H)=\{x,y\} \Rightarrow x \in I(H)$.
El vértice "x" satisface la propiedad $\mathcal{P}_H$ por vacuidad.

$\lambda(D)=1$
Existe $S=\{x,y\}$ conjunto independiente donde:

$\lambda(D-S)=\lambda(\, D-\{x,y\}\,)=\lambda(\emptyset)=0 \quad \therefore \quad \lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Un resultado similar al Teorema 6 fue demostrado en [10] y como una consecuencia se obtuvo que cualquier digráfica D con $\max \{ \delta_D(x) = \delta_D^+(x) + \delta_D^-(x) \ / \ x \in V(D) \} \leq 3$ satisface la Conjetura 1. Aplicando el Teorema 6 obtenemos los Teoremas 7 y 8 los cuales generalizan este resultado.

TEOREMA 7 : Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido contenido en Asym D tiene un vértice x que satisface: $\delta_D^-(x) \leq 1$ o $\delta_D^+(x) \leq 1$. Entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Por el Teorema 6, para demostrar el Teorema 7 basta demostrar que:

Si D es una digráfica tal que todo ciclo dirigido contenido en Asym D tiene un vértice x que satisface $\delta_D^-(x) \leq 1$ o $\delta_D^+(x) \leq 1$, entonces D tiene un vértice $x \in I(D)$, tal que para cada $(y,x) \in$ Asym D [I(D)] por lo menos una de las condiciones siguientes se cumple:

i) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y contiene a x .

ii) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D , que contenga a x y no inicie en x , también contiene a y .

<u>Demostración</u> : Por reducción al absurdo. Suponemos que la proposición anterior es falsa, es decir, que en D para todo vértice $x \in I(D)$, hay una flecha $(y,x) \in$ Asym D [I(D)], tal que se cumplen las dos condiciones siguientes:

i) Existe una trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y que no contiene a x .

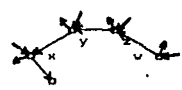
ii) Existe una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que contiene a x y no inicia en x , pero no contiene a y .

Sea $x \in I(D)$, entonces hay un vértice $y \in \Gamma_D^-(x) \cap I(D)$ con $(y,x) \in$ Asym D tal que

i) y es origen de una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no contiene a x, y

ii) Existe una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no inicia en x, que contiene a x pero no contiene a y.

Y como $y \in I(D)$, entonces hay un vértice $z \in [\Gamma_D^-(y) \cap I(D)]$ con $(z,y) \in$ Asym D tal que



i) z es origen de una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no contiene a y ,

ii) Existe una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no inicia en y, que contiene a y pero -

no contiene a z .
Como $z \in I(D)$, se puede aplicar nuevamente el procedimiento anterior. Continuando dicho procedimiento obtenemos un ciclo dirigido $C_n^{\to}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ tal que para cada $1 \le i \le n$ hay :

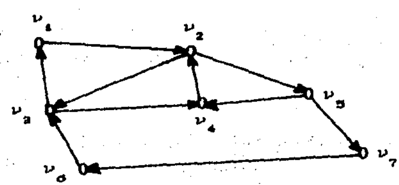
i) Una trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en x_i que no contiene a x_{i+1} (notación mod. n) y,

ii) Una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no inicia en x_i la cual contiene a x_i, pero no contiene a x_{i-1} (notación mod. n) .

Por lo tanto $C_n^{\to}$ es un ciclo dirigido contenido en Asym D , (i) implica que $\delta_D^+(x_i) \ge 2$ y (ii) implica $\delta_D^-(x_i) \ge 2$ para todo $1 \le i \le n$, contradiciendo la hipótesis (todo ciclo dirigido contenido en Asym D tiene un vértice x tal que $\delta_D^-(x) \le 1$ o $\delta_D^+(x) \le 1$). ♦

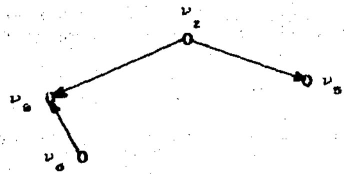
Ejemplos:

D_1 :



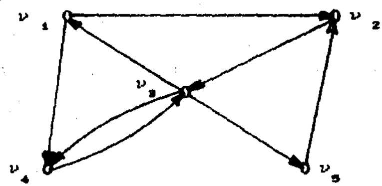
$\tau_1=(\nu_1,\nu_2,\nu_5,\nu_7,\nu_6,\nu_3,\nu_4)$, $\tau_2=(\nu_4,\nu_2,\nu_5,\nu_7,\nu_6,\nu_3,\nu_1)$ y $\tau_3=(\nu_7,\nu_6,\nu_3,\nu_1,\nu_2,\nu_5,\nu_4)$. son trayectorias dirigidas de longitud máxima en D_1 entonces $\lambda(D_1)=7$, observamos que $I(D_1)=\{\nu_1,\nu_4,\nu_7\}$ y sea $S=\{\nu_1,\nu_4,\nu_7\} \subseteq I(D)$ un conjunto independiente, entonces la digráfica D_1-S es la siguiente:

D_1-S:



$\lambda(D_1-S)=2 < 7=\lambda(D_1)$.

D_2:

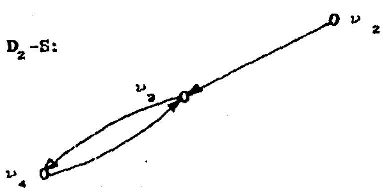


$(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_1)$ es un ciclo dirigido contenido en Asym D_2 $\therefore$ $\delta^-_{D_2}(\nu_1) \leq 1$ y $(\nu_2,\nu_3,\nu_5,\nu_2)$ es un ciclo dirigido contenido en Asym D_2 donde $\delta^+_{D_2}(\nu_2) \leq 1$.

Observamos que $\tau_1=(\nu_1,\nu_4,\nu_3,\nu_5,\nu_2)$ y $\tau_2=(\nu_5,\nu_2,\nu_3,\nu_1,\nu_4)$ son dos trayectorias dirigidas de longitud máxima en D_2, $\therefore$ $\lambda(D_2)=5$, Observamos que $I(D_2)=\{\nu_1,\nu_5\}$.

Sea $S=\{\nu_1,\nu_5\} \subseteq I(D_2)$ un conjunto independiente ,entonces la digráfica $D_2-S=D_2-\{\nu_1,\nu_5\}$ es la siguiente:

D_2-S:



Donde $\tau=(\nu_2,\nu_3,\nu_4)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima en D_2-S.
$\therefore$ $\lambda(D_2-S)=3$ y se cumple la desigualdad:
$\lambda(D_2-S)=3 < 5=\lambda(D_2)$.

TEOREMA 8 : Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido contenido en Asym D tiene un vértice x que satisface:
$D[\ \Gamma_D^-(x)\ ] \cong K^*_{n(x)}$ o $D[\ \Gamma_D^+(x)\ ] \cong K^*_{m(x)}$. Entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

Demostraremos que la hipótesis del Teorema 8 implica la hipótesis del Teorema 6.

Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido contenido en Asym D tiene un vértice x que satisface:
$D[\ \Gamma_D^-(x)\ ] \cong K^*_{n(x)}$ o $D[\ \Gamma_D^+(x)\ ] \cong K^*_{m(x)}$. Entonces D tiene un vértice $x \in I(D)$, tal que para cada $(y,x) \in \mathrm{Asym}\ D[\ I(D)\ ]$ por lo menos una de las condiciones siguientes se cumple:

i) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y contiene a x .

ii) Toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no inicia en x, tal que contiene a x, también contiene a y.

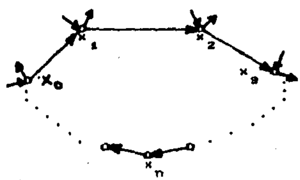
La demostración se realizará por reducción al absurdo, por lo tanto suponemos que la hipótesis del Teorema 6 no se cumple, es decir , suponemos que para todo vértice $x \in I(D)$ hay una flecha $(y,x) \in \mathrm{Asym}\ D[\ I(D)\ ]$ que cumple las dos condiciones siguientes: (i) Hay una trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y que no contiene a x . (ii) Hay una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no inicia en x, tal que contiene a x pero no contiene a y.

<u>Demostración</u> : Sea $x \in I(D)$, hay un vértice $y \in [\Gamma_D^-(x) \cap I(D)]$ con $(y,x) \in$ Asym D (i) el cual es el vértice inicial de una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no contiene a x, además (ii) hay una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no inicia en x, tal que contiene a x , pero no contiene a y.

Nuevamente como $y \in I(D)$, hay un vértice $z \in [\Gamma_D^-(y) \cap I(D)]$ con $(z,y) \in$ Asym (D) , (i) el cual es un vértice inicial de una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no contiene a y, (ii) además hay una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no inicia en y, tal que contiene a y pero no contiene a z.

Nuevamente $z \in I(D)$, siguiendo este procedimiento–

sucesivamente obtenemos un ciclo dirigido $C_n^{\rightarrow}=(x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$ contenido en Asym D tal que para cada x_i con ($0 \le i \le n-1$) hay (i) Una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que inicia en x_i y no contiene a x_{i+1} (notación mod. n) y (ii) Hay una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que no inicia en x_i, tal que contiene a x_i, pero no contiene a x_{i-1} (notac. mod. n).



Ahora se analizarán los dos casos posibles:

Caso 1. $C_n^{\rightarrow}$ tiene un vértice x_k que satisface $D[\Gamma_D^-(x_k)] \cong K^*_{n(x_k)}$. Puesto que $x_k \in C_n^{\rightarrow}$, entonces

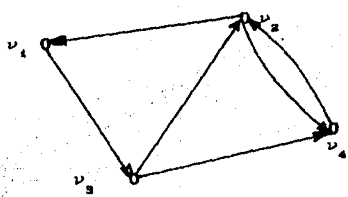
(ii) hay una trayectoria dirigida de longitud máxima de D, que no inicia en x_k, la cual contiene a x_k, pero no contiene a x_{k-1} (notación mod. n). Sea $\alpha = (z_0 \neq x_k, z_1, \dots, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_p)$ dicha trayectoria, por lo tanto $x_k = z_j$ para $(1 \le j \le p)$ de donde $\alpha = (z_0, z_1, \dots, z_{j-1}, x_k, z_{j+1}, \dots, z_p)$, observamos que $(z_{j-1}, x_k) \in A(\alpha) \subseteq A(D)$. Además $(x_{k-1}, x_k) \in A(C_n^{\rightarrow}) \subseteq A(D)$, entonces $\{ (z_{j-1}, x_k), (x_{k-1}, x_k) \} \subseteq A(D)$ con $\{ z_{j-1}, x_{k-1} \} \subseteq \Gamma_D^-(x_k)$. Puesto que $D[\Gamma_D^-(x_k)] \cong K^*_{n(x_k)}$ se tiene $\{ (z_{j-1}, x_{k-1}), (x_{k-1}, z_{j-1}) \} \subseteq A(D)$, como α no contiene a x_{k-1}, entonces $z_{j-1} \neq x_{k-1}$. Consideremos la siguiente trayectoria α' donde -

$\alpha' = (z_0, z_1, \ldots, z_{j-1}, x_{k-1}, x_k, z_{j+1}, \ldots, z_p)$ es una trayectoria dirigida con $\ell(\alpha')=1+\ell(\alpha)$ contradiciendo que α es de longitud máxima.

Caso 2. C_n^+ tiene un vértice x_k que satisface $D[\Gamma_D^+(x_k)] \cong K^*_{m(x_k)}$. Puesto que $x_k \in C_n^+$ entonces (i) hay una trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en x_k que no contiene a x_{k+1} (notación mod. n). Sea $\beta=(y_0=x_k, y_1, \ldots, y_q)$ dicha trayectoria, entonces $(x_k, y_1) \in A(\beta) \subseteq A(D)$, además $(x_k, x_{k+1}) \in A(C_n^+) \subseteq A(D)$ de donde $\{ y_1, x_{k+1} \} \subseteq \Gamma_D^+(x_k)$. Como por hipótesis $D[\Gamma_D^+(x_k)] \cong K^*_{m(x_k)}$ se tiene que $\{ (y_1, x_{k+1}), (x_{k+1}, y_1) \} \subseteq A(D)$. Como β es una trayectoria que no contiene a x_{k+1} entonces $x_{k+1} \neq y_1$, consideremos $\beta'=(y_0=x_k, x_{k+1}, y_1, \ldots, y_q)$ una trayectoria dirigida con $\ell(\beta')=1+\ell(\beta)$, contradiciendo que β es de longitud máxima. +

Ejemplo:

D_1:



$(\nu_1, \nu_3, \nu_2, \nu_1)$ es un ciclo dirigido contenido en Asym D_1. Dicho —

ciclo tiene un vértice ν_3 que satisface lo siguiente:

$D_1[\ \Gamma^+_{D_1}(\nu_3)\ ]$:

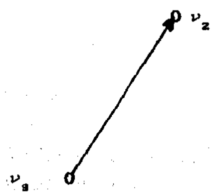
$\cong\ K^*_2$, donde $2=\delta^+_{D_1}(\nu_3)$

Además $\tau_1=(\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_2)$, $\tau_2=(\nu_2,\nu_1,\nu_3,\nu_4)$, $\tau_3=(\nu_3,\nu_4,\nu_2,\nu_1)$ y $\tau_4=(\nu_4,\nu_2,\nu_1,\nu_3)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima en D_1 $\therefore$ $\lambda(D_1)=4$ e $I(D_1)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\}$.

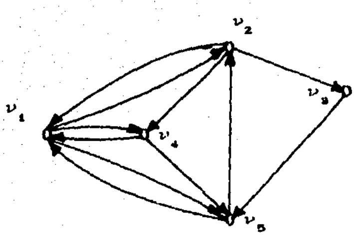
Entonces, existe $S=\{\nu_1,\nu_4\}\subseteq I(D_1)$ conjunto independiente tal que :

$\lambda(D_1-S)=2 < 4=\lambda(D_1)$ puesto que:

$D_1-S=$
$D_1-\{\nu_1,\nu_4\}$:



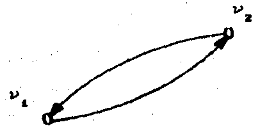
D_2 :



$(\nu_2,\nu_4,\nu_5,\nu_2)$ y $(\nu_2,\nu_3,\nu_5,\nu_2)$ son dos ciclos dirigidos contenidos en Asym D.

El ciclo $(\nu_2,\nu_4,\nu_5,\nu_2)$ tiene el vértice ν_4 que satisface:

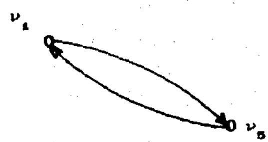
$D_2[\Gamma^-_{D_2}(\nu_4)]$:



$\cong K_2^*$, donde $2=\delta^-_{D_2}(\nu_4)$.

Asimismo el ciclo $(\nu_2,\nu_3,\nu_5,\nu_2)$ tiene el vértice ν_2 que satisface:

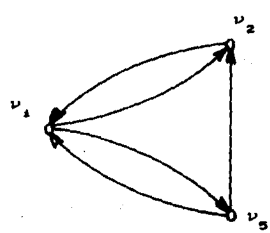
$D_2[\Gamma^-_{D_2}(\nu_2)]$:



$\cong K_2^*$, donde $2=\delta^-_{D_2}(\nu_2)$.

$\tau_1=(\nu_2,\nu_3,\nu_5,\nu_1,\nu_4)$, $\tau_2=(\nu_3,\nu_5,\nu_2,\nu_4,\nu_1)$ y $\tau_3=(\nu_4,\nu_1,\nu_5,\nu_2,\nu_3)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima en D_2, $\therefore$ $\lambda(D_2)=5$, $I(D_2)=\{\nu_2,\nu_3,\nu_4\}$. Por lo tanto existe $S=\{\nu_3,\nu_4\}\subseteq I(D_2)$ conjunto independiente tal que $\lambda(D_2-S)=3<5=\lambda(D_2)$, puesto que :

$D_2-S=$
$D_2-\{\nu_3,\nu_4\}$:



El teorema siguiente se puede considerar como una extensión del Teorema 5.

TEOREMA 9 : Sea $C \subseteq [\ V(D)-T(D)\ ] \cup \{\ x \in V(D)\ /\ \Gamma_D^-(x) \cong K^*_{n(x)}$, donde $n(x)=\delta_D^-(x)\ \}$. Si $D-C$ tiene un núcleo, entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

__Demostración :__ Denotemos $C' = C \cap \{\ x \in V(D)\ /\ \Gamma_D^-(x) \cong K^*_{n(x)}\ \}$.

Para la demostración se procederá por inducción sobre la cardinalidad de C'.

I. Por demostrar que el teorema se cumple cuando la cardinalidad de C' es igual a cero, es decir $C' = \emptyset$.
Si $C'=\emptyset$ entonces en C no existe ningún elemento del conjunto siguiente $\{\ x \in V(D)\ /\ \Gamma_D^-(x) \cong K^*_{n(x)}, n(x)=\delta_D^-(x)\ \}$, entonces $C \subseteq [V(D)- T(D)]$. Por hipótesis $D-C$ tiene un núcleo . Aplicando el Teorema 5, [Si $C \subseteq [V(D)-T(D)]$ y si $D-C$ tiene un núcleo S, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$] , obtenemos que si S es el núcleo en $D-C$, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

II. Suponemos que el teorema se cumple cuando la cardinalidad de C' es $n-1$, es decir, en C hay $n-1$ vértices del conjunto siguiente $\{\ x \in V(D)\ /\ \Gamma_D^-(x) \cong K^*_{n(x)},\ n(x)=\delta_D^-(x)\ \}$. Sea $C_1 \subseteq [\ V(D_1)-T(D_1)\ ] \cup \{\ x_1 \in V(D_1)\ /\ \Gamma_{D_1}^-(x_1) \cong K^*_{n(x_1)}\ \}$.
Suponemos que la cardinalidad de C_1' es $n-1$. Si D_1-C_1 tiene un núcleo, entonces existe un conjunto independiente $S_1 \subseteq V(D_1)$ tal que $\lambda(D_1-S_1) < \lambda(D_1)$.

III. Demostramos que el teorema se cumple cuando la cardinalidad de C' es $n > 0$.
Sea $C \subseteq (\ V(D)-T(D)\ ) \cup \{\ x \in V(D)\ /\ \Gamma_D^-(x) \cong K^*_{n(x)}$, $n(x)=\delta_D^-(x)\ \}$. Donde la cardinalidad de C' es n, es decir , C tiene n vértices del conjunto siguiente $\{\ x \in V(D)\ /\ \Gamma_D^-(x) \cong K^*_{n(x)},\ n(x)=\delta_D^-(x)\ \}$. Suponemos que $D-C$ tiene un núcleo.
Puesto que C' tiene cardinalidad n, entonces $C' \neq \emptyset$.

Por hipótesis D-C tiene un núcleo . Sea N dicho núcleo, entonces N es un conjunto independiente.

i) Si N intersecta a todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima de D. Entonces existe un conjunto independiente $N \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-N) < \lambda(D)$.

ii) Si N no intersecta a todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima de D , entonces hay una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que es ajena a N . Sea τ dicha trayectoria de donde $N \cap \tau = \emptyset$ con $\tau=(z_0,z_1,\dots,z_n)$. Pueden presentarse dos casos , uno que $z_n \in D-C$ y otro que $z_n \in C$.

Caso 1. Si $z_n \in (D-C)$ como $N \cap \tau = \emptyset$, entonces $z_n \notin N$ por lo tanto $z_n \in (V(D)-N)$ de donde $z_n \in (V(D)-C) \cap (V(D)-N)$ de aquí que $z_n \in [V(D-C)-N]$. Por hipótesis N es núcleo en D-C, entonces existe un vértice $y \in N$ tal que $(z_n,y) \in A(D)$, como $N \cap \tau = \emptyset$, entonces $y \notin \tau$ por lo que si consideramos $\tau'=\tau \cup (z_n,y)$ es una trayectoria dirigida de D con $\ell(\tau')=1+\ell(\tau)$ contradiciendo que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima. Por lo tanto si $z_n \in D-C$ entonces el núcleo N atraviesa todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima de D, de donde $\lambda(D-N) < \lambda(D)$.

Caso 2. Si $z_n \in C$.

Dado que $z_n \in C \subseteq (V(D)-T(D)) \cup \{ x \in V(D) / \Gamma_D^-(x) \cong K^*_{n(x)}$, donde $n(x)=\delta_D^-(x) \}$ y como $z_n \in T(D)$ implica que $z_n \notin (V(D)-T(D))$ de donde $z_n \in \{x \in V(D)/ \Gamma_D^-(x) \cong K^*_{n(x)}$, $n(x) = \delta_D^-(x) \}$, entonces $z_n \in C \cap \{ x \in V(D) / \Gamma_D^-(x) \cong K^*_{n(x)}$, $n(x)=\delta_D^-(x) \}$, se deduce que $z_n \in C'$.

Por demostrar que $N \cup \{ z_n \}$ es un conjunto independiente. La demostración se realizará por reducción al absurdo , por lo tanto suponemos que $N \cup \{z_n\}$ no es un conjunto independiente, por lo tanto como N es un conjunto independiente, entonces z_n es adyacente a algún vértice $s \in N$ de donde $\{ (z_n,s), (s,z_n) \} \cap A(D) \neq \emptyset$. Si $(z_n,s) \in A(D)$, entonces como en el caso 1, llegamos a una contradicción extendiendo la trayectoria τ. Lo que-implica que $(z_n, s) \notin A(D)$. De esta afirmación se deduce que $(s, z_n) \in A(D)$ de aquí que $s \in \Gamma_D^-(z_n)$, además $z_{n-1} \in \Gamma_D^-(z_n)$; como $z_n \in C'$, por hipótesis se cumple que $\Gamma_D^-(z_n) \cong K_n^*(z_n)$, donde $n(z_n) = \delta_D^-(z_n)$, lo que implica $\{ (s, z_{n-1}), (z_{n-1}, s) \} \subseteq A(D)$. Como $s \in N$ y $N \cap \tau = \emptyset$, entonces $s \notin \tau$ por lo tanto podemos extender la trayectoria τ, consideremos $\tau' = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, s, z_n)$ es una trayectoria dirigida de D con $\ell(\tau') = 1 + \ell(\tau)$. Contradiciendo que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D. Por lo tanto $N \cup \{z_n\}$ es un conjunto independiente .

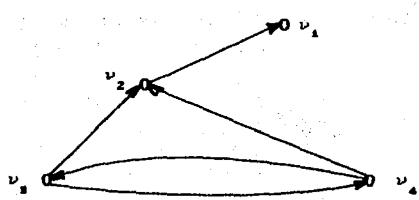
Por hipótesis N es núcleo en D-C, como $z_n \in C$, entonces $N \cup \{z_n\}$ es núcleo en $(D-C) \cup \{z_n\} = D-(C-z_n) = D-C_1$ donde $C_1 = C - \{z_n\}$.

Por hipótesis la cardinalidad de C' es n, como $z_n \in C'$, entonces la cardinalidad de $C_1' = C' - \{z_n\}$ es igual a n-1. Aplicando la hipótesis de inducción el teorema se cumple cuando la cardinalidad de C_1' es igual a n-1, es decir , cuando en C_1 hay n-1 vértices del conjunto siguiente $\{ x \in V(D) \ / \ \Gamma_D^-(x) \cong K_{n(x)}^*, \ n(x) = \delta_D^-(x) \}$.

Por lo tanto : Si $C_1 = C - z_n \subseteq (V(D) - T(D)) \cup \{ x \in V(D) \ / \ \Gamma_D^-(x) \cong K_{n(x)}^*, \ n(x) = \delta_D^-(x) \}$. Como $D-C_1$ tiene como núcleo a $N \cup \{z_n\}$, entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$. ✝

Ejemplos:

D_1 :



Sea $C=\{\nu_3,\nu_4\}$,

$T(D_1)=\{\nu_1\}$ donde:

$C \subset [\ V(D_1)-T(D_1)\ ] \cup \{\ x \in V(D)\ /\ \Gamma^-_{D_1}(x) \cong K^*_{n(x)}\ ,\ n(x)=\delta^-_{D_1}(x)\ \}$

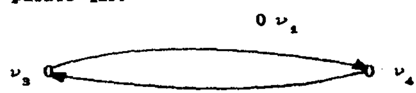
$D_1-C=\{\nu_1,\nu_2\}$.

$N=\{\nu_1\}$ es núcleo en D_1-C.

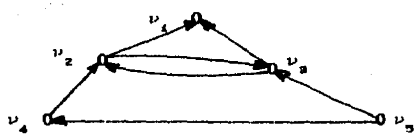
$(\nu_3,\nu_4,\nu_2,\nu_1)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_1)=4$.

Existe $S=\{\nu_2\} \subseteq V(D)$ conjunto independiente tal que $\lambda(D_1-S)=2 < 4=\lambda(D_1)$, puesto que:

D_1-S:



D_2



$(\nu_5,\nu_4,\nu_2,\nu_3,\nu_1)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_2)=5$. Sea $C=\{\nu_4,\nu_5\}$; $D_2-C=\{\ \nu_1,\nu_2,\nu_3\}$, entonces $N=\{\nu_1\}$ es núcleo en D_2-C y además:

$C \subset [V(D)-T(D)] \cup \{\ x \in V(D)\ /\ \Gamma^-_D(x) \cong K^*_{n(x)},\ \ n(x)=\delta^-_D(x)\ \}$.

Sea $S=\{\nu_2,\nu_5\}$ un conjunto independiente , donde $S \subseteq V(D_2)$, entonces $\lambda(D_2-S)=2 < 5=\lambda(D)$ puesto que :

D_2-S:

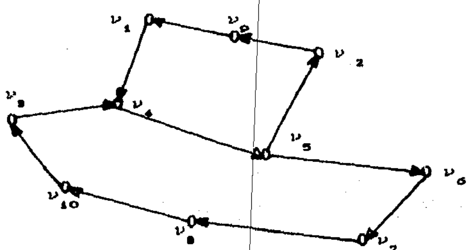
COROLARIO 3 : Sea D una digráfica . Si existe un conjunto $C \subseteq \{ V(D)-T(D) \} \cup \{ x \in V(D) \ / \ \Gamma_D^-(x) \cong K^*_{n(x)} \}$ intersectando cada ciclo impar dirigido de D, entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

<u>Demostración</u> : Como C intersecta cada ciclo impar dirigido de D, entonces D-C es una digráfica sin ciclos impares dirigidos, (Teorema: cualquier digráfica sin ciclos impares dirigidos tiene un núcleo), entonces D-C tiene un núcleo.

Ahora aplicando el Teorema 9 (Sea $C \subseteq [V(D)-T(D)] \cup \{ x \in V(D) \ / \ \Gamma_D^-(x) \cong K^*_{n(x)}, \ n(x)=\delta_D^-(x) \}$. Si D-C tiene un núcleo, entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$), entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$. †

Ejemplos:

D_1 :

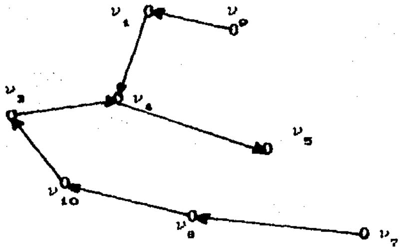


$\tau_1=(\nu_2,\nu_9,\nu_1,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_8,\nu_{10},\nu_3)$ y $\tau_2=(\nu_6,\nu_7,\nu_8,\nu_{10},\nu_3, \nu_4, ,\nu_5,\nu_2,\nu_9,\nu_1)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima en D_1 $\therefore \lambda(D_1)=10$, como $T(D_1)=\{\nu_1,\nu_3\}$, entonces sea $C=\{\nu_9,\nu_{10}\}$.

$(\nu_2,\nu_9,\nu_1,\nu_4,\nu_5,\nu_2)$ y $(\nu_6,\nu_7,\nu_8,\nu_{10},\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6)$ son dos ciclos impares dirigidos de D_1. Se observa que C intersecta cada ciclo impar dirigido de D_1.

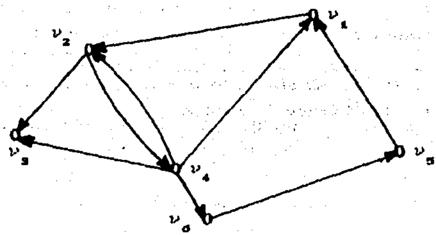
Entonces existe $S=\{\nu_2,\nu_6\} \subseteq V(D_1)$ conjunto independiente tal que la digráfica D_1-S es la siguiente:

D_1-S:



$(\nu_7,\nu_8,\nu_{10},\nu_3,\nu_4,\nu_5)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima en D_1-S $\therefore$ $\lambda(D_1-S)=6$ y se cumple : $\lambda(D_1-S)=6 < 10=\lambda(D_1)$.

D_2:



$\tau=(\nu_4,\nu_6,\nu_5,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima en D_2 $\therefore$ $\lambda(D_2)=6$.

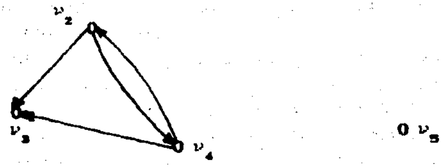
$T(D_2)=\{\nu_3\}$, además $(\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_1)$ y $(\nu_1,\nu_2,\nu_4,\nu_6,\nu_5,\nu_1)$ son ciclos impares dirigidos de D_2. Por lo tanto existe $C=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\}$ el cual intersecta cada ciclo impar dirigido de D_2.

El vértice terminal ν_3 tiene la propiedad siguiente:

$\Gamma^-_{D_2}(\nu_3) \cong K_2^*$, donde $2=n(x)=\delta^-_{D_2}(\nu_3)$.

Entonces existe un conjunto independiente $S=\{\nu_1,\nu_6\} \subseteq V(D_2)$ tal que la digráfica D_2-S es la siguiente :

$D_2 - S$:



Donde $\lambda(D_2 - S) = 3$ y se cumple que : $\lambda(D_2 - S) = 3 < 6 = \lambda(D_2)$.

TEOREMA 10 : Sea D una digráfica . Si D es una digráfica B_1-orientada, entonces todo conjunto independiente máximo intersecta a cada trayectoria dirigida de longitud máxima.

<u>Demostración</u> : Se realizará por reducción al absurdo. Supongamos que existe una digráfica D, B_1-orientada, tal que hay un conjunto independiente máximo que no intersecta a todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima.

Sea S un conjunto independiente máximo de D y sea $\tau = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima de D, con $S \cap \tau = \emptyset$. Como S es un conjunto independiente máximo en D, entonces existe un vértice $y \in S$ tal que y es adyacente a x_n, por lo tanto $\{ (y, x_n), (x_n, y) \} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Si $(x_n, y) \in A(D)$, como $S \cap \tau = \emptyset$ y $y \in S$, entonces $y \notin \tau$, consideremos $\tau' = (x_0, x_1, \ldots, x_n, y)$ que es una trayectoria dirigida de D con $\ell(\tau') = 1 + \ell(\tau)$, contradiciendo que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D, entonces $(x_n, y) \notin A(D)$, por lo que $(y, x_n) \in A(D)$.

Ahora demostraremos que si $(y, x_i) \in A(D)$, entonces $(y, x_{i-1}) \in A(D)$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Suponemos que $(y, x_i) \in A(D)$, además $(x_{i-1}, x_i) \in A(D)$. Por hipótesis D es una digráfica B_1-orientada, entonces $\{ (y, x_{i-1}), (x_{i-1}, y) \} \cap A(D) \neq \emptyset$; Cuando $(x_{i-1}, y) \in A(D)$, como $y \in S$, y $S \cap \tau = \emptyset$, entonces $y \notin \tau$, consideremos $\tau'' = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ es una trayectoria dirigida de D con $\ell(\tau'') = 1 + \ell(\tau)$ contradiciendo que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima , por lo tanto tenemos $(x_{i-1}, y) \notin A(D)$, de donde deducimos que $(y, x_{i-1}) \in A(D)$.

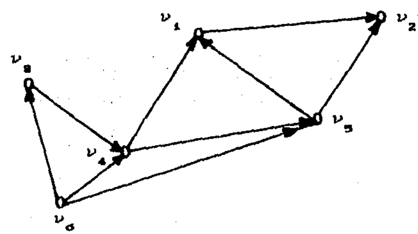
Con lo anterior queda demostrado que si $(y,x_i) \in A(D)$, entonces $(y,x_{i-1}) \in A(D)$ para todo $1 \le i \le n$.

Como $(x_0,x_1) \in A(\tau) \subseteq A(D)$ además acabamos de demostrar que $(y,x_1) \in A(D)$ y por hipótesis D es una digráfica B_1-orientada entonces $\{ (x_0,y), (y,x_0) \} \cap A(D) \neq \emptyset$, si $(y,x_0) \in A(D)$, como $y \in S$ y $S \cap \tau = \emptyset$, entonces $y \notin \tau$, consideremos $\tau_1=(y,x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es una trayectoria dirigida de D, con $\ell(\tau_1)=1+\ell(\tau)$ contradiciendo otra vez que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima, lo que implica que $(y,x_0) \notin A(D)$, entonces $(x_0,y) \in A(D)$, como $y \in S$ y $S \cap \tau = \emptyset$, por lo tanto $y \notin \tau$, consideremos $\tau_2=(x_0,y,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es una trayectoria dirigida de D con $\ell(\tau_2)=1+\ell(\tau)$ contradiciendo que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D.

Al suponer que existe una trayectoria dirigida de longitud máxima de D y un conjunto independiente máximo, tal que $S \cap \tau = \emptyset$ llegamos a una contradicción. Por lo que podemos concluir que todo conjunto independiente máximo intersecta a cada trayectoria dirigida de longitud máxima de D, siempre y cuando D sea una digráfica B_1-orientada. ✝

Ejemplos:

D_1:



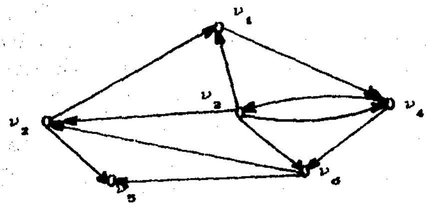
D_1 es una digráfica B_1-orientada.

$\tau=(\nu_\sigma,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_1,\nu_2)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\rightarrow \lambda(D_1)=6$.

Los conjuntos $S_1=\{\nu_3,\nu_5\}$, $S_2=\{\nu_1,\nu_\sigma\}$ y $S_3=\{\nu_2,\nu_4\}$ son algunos conjuntos independientes máximos y se cumple que:

$S_1 \cap \tau \neq \emptyset$, $S_2 \cap \tau \neq \emptyset$, y $S_3 \cap \tau \neq \emptyset$.

D_2 :



D_2 es una digráfica B_1-orientada y $\tau_1=(\nu_1,\nu_4,\nu_3,\nu_6,\nu_2,\nu_5)$, $\tau_2=(\nu_2,\nu_1,\nu_4,\nu_3,\nu_6,\nu_5)$ y $\tau_3=(\nu_3,\nu_2,\nu_1,\nu_4,\nu_6,\nu_5)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima .

Además $S_1=\{\nu_1,\nu_6\}$, $S_2=\{\nu_3,\nu_5\}$ y $S_3=\{\nu_4,\nu_2\}$ son ejemplos de conjuntos independientes máximos .

Se cumple lo siguiente: $S_1 \cap \tau_1 \neq \emptyset$, $S_1 \cap \tau_2 \neq \emptyset$, $S_1 \cap \tau_3 \neq \emptyset$, $S_2 \cap \tau_1 \neq \emptyset$, $S_2 \cap \tau_2 \neq \emptyset$, $S_2 \cap \tau_3 \neq \emptyset$, $S_3 \cap \tau_1 \neq \emptyset$, $S_3 \cap \tau_2 \neq \emptyset$ y $S_3 \cap \tau_3 \neq \emptyset$.

TEOREMA 10^{-1} : Sea D una digráfica . Si D es una digráfica B_2-orientada entonces, todo conjunto independiente máximo intersecta a cada trayectoria dirigida de longitud máxima .

<u>Demostración</u> : Se realizará por reducción al absurdo . Supongamos que existe una digráfica D, B_2-orientada tal que hay un conjunto independiente máximo que no intersecta a todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima .

Sea S un conjunto independiente máximo de D y sea $\tau=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima de D, con $S \cap \tau=\emptyset$.

Como S es un conjunto independiente máximo de D, entonces existe un vértice $y \in S$ tal que y es adyacente a x_0, por lo tanto $\{ (y,x_0), (x_0,y) \} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Si $(y,x_0) \in A(D)$ como $y \in S$ y $S \cap \tau=\emptyset$, entonces $y \notin \tau$, consideremos $\tau'=(y,x_0) \cup \tau$ que es una trayectoria dirigida de D con $\ell(\tau')=1+\ell(\tau)$ contradiciendo que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D, entonces $(y,x_0) \notin A(D)$, por lo tanto $(x_0,y) \in A(D)$.

Ahora demostraremos que si $(x_i,y) \in A(D)$, entonces $(x_{i+1},y) \in A(D)$ para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Suponemos que $(x_i,y) \in A(D)$, además $(x_i,x_{i+1}) \in A(D)$, por hipótesis D es una digráfica B_2-orientada, entonces $\{(y,x_{i+1}),(x_{i+1},y)\} \cap A(D) \neq \emptyset$. Cuando $(y,x_{i+1}) \in A(D)$, como $y \in S$ y $S \cap \tau=\emptyset$ entonces $y \notin \tau$, consideremos $\tau''=(x_0,x_1,\ldots,x_i,y,x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_n)$ es una trayectoria dirigida de D con $\ell(\tau'')=1+\ell(\tau)$ contradiciendo que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D, por lo tanto tenemos que $(y,x_{i+1}) \notin A(D)$, de donde deducimos que $(x_{i+1},y) \in A(D)$.

Con lo anterior queda demostrado que si $(x_i,y) \in A(D)$, entonces $(x_{i+1},y) \in A(D)$ para todo $0 \leq i \leq n-1$.

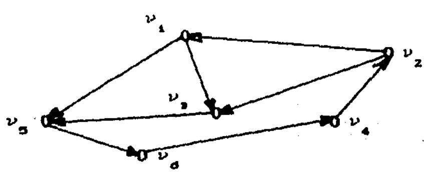
Como $(x_{n-1},x_n) \in A(\tau) \subseteq A(D)$, además acabamos de demostrar que $(x_{n-1},y) \in A(D)$ y por hipótesis D es una digráfica B_2-orientada, entonces $\{(x_n,y),(y,x_n)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Si $(x_n,y) \in A(D)$, como $y \in S$ y $S \cap \tau=\emptyset$, entonces $y \notin \tau$, consideremos $\tau_1=\tau \cup (x_n,y)$ es una trayectoria dirigida de D con $\ell(\tau_1)=1+\ell(\tau)$ contradiciendo que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D, por lo tanto $(x_n,y) \notin A(D)$, entonces $(y,x_n) \in A(D)$ como $y \in S$ y $S \cap \tau=\emptyset$ por lo tanto $y \notin \tau$, además $(x_{n-1},y) \in A(D)$, consideremos $\tau_2=(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y,x_n)$ es una trayectoria dirigida con $\ell(\tau_2)=1+\ell(\tau)$ contradiciendo que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D.

Al suponer que existe una trayectoria dirigida de longitud máxima de D y un conjunto independiente máximo, tal que $S \cap \tau=\emptyset$ llegamos a una contradicción. Por lo que podemos concluir que en una digráfica B_2-orientada todo conjunto independiente máximo intersecta a cada trayectoria dirigida de longitud máxima. ✝

Ejemplos:

D_1 :

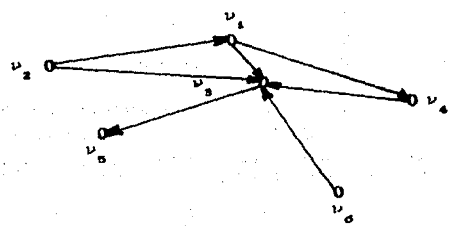


$(\nu_1,\nu_3,\nu_5,\nu_6,\nu_4,\nu_2)$, $(\nu_2,\nu_1,\nu_3,\nu_5,\nu_6,\nu_4)$, $(\nu_3,\nu_5,\nu_6,\nu_4,\nu_2,\nu_1)$, $(\nu_4,\nu_2,\nu_1,\nu_3,\nu_5,\nu_6)$, $(\nu_5,\nu_6,\nu_4,\nu_2,\nu_1,\nu_3)$ y $(\nu_6,\nu_4,\nu_2,\nu_1,\nu_3,\nu_5)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima en D_1, la cual es B_2-orientada .

Los conjuntos $S_1=\{\nu_3,\nu_6\}$, $S_2=\{\nu_2,\nu_5\}$ y $S_3=\{\nu_4,\nu_3\}$ son algunos ejemplos de conjuntos independientes máximos.

Se puede concluir que todo conjunto independiente máximo intersecta todas las trayectorias dirigidas de longitud máxima.

D_2:



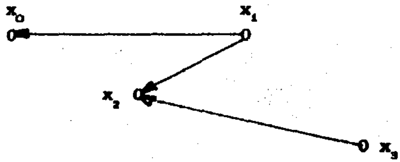
La digráfica D_2 es B_2-orientada y la trayectoria $\tau=(\nu_2,\nu_1,\nu_4,\nu_3,\nu_5)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima.

Los conjuntos $S_1=\{\nu_3\}$, $S_2=\{\nu_1,\nu_5,\nu_6\}$ y $S_3=\{\nu_2,\nu_4,\nu_5,\nu_6\}$ son ejemplos de conjuntos independientes máximos.

Se concluye que todo conjunto independiente máximo intersecta a la trayectoria dirigida de longitud máxima en D_2.

NOTA 1 : Sea D la digráfica definida como sigue : $V(D)=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$, $A(D)=\{(x_1,x_0),\ (x_1,x_2),\ (x_3,x_2)\}$. Considerando la digráfica D podemos ver que la hipótesis de existencia B_1-orientada o B_2-orientada no puede ser omitida en los teoremas 10 y 10´.

Ejemplo:



$S_1=\{x_0,x_3\}$, $S_2=\{x_0,x_2\}$ y $S_3=\{x_1,x_3\}$ son conjuntos independientes máximos .
$\tau_1=(x_1,x_0)$, $\tau_2=(x_1,x_2)$ y $\tau_3=(x_3,x_2)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima.

$S_1 \cap \tau_1=\{x_0\}$. $\quad$ $S_1 \cap \tau_2=\emptyset$. $\quad$ $S_1 \cap \tau_3=\{x_3\}$.
$S_2 \cap \tau_1=\{x_0\}$, $\quad$ $S_2 \cap \tau_2=\{x_2\}$, $\quad$ $S_2 \cap \tau_3=\{x_2\}$,
$S_3 \cap \tau_1=\{x_1\}$, $\quad$ $S_3 \cap \tau_2=\{x_1\}$, $\quad$ $S_3 \cap \tau_3=\{x_3\}$.

Encontramos el conjunto independiente $S_1=\{x_0,x_3\}$ que es ajeno a la trayectoria $\tau_2=(x_1,x_2)$, es decir, $S_1 \cap \tau_2=\emptyset$, por lo tanto encontramos un conjunto independiente máximo que no intersecta a cada trayectoria dirigida de longitud máxima .

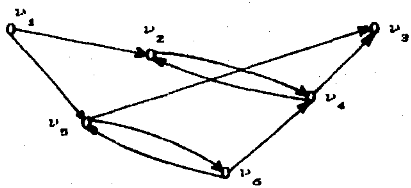
Lo anterior justifica que en los Teoremas 10 y 10´ no puede ser omitida la hipótesis de que la digráfica D es B_1-orientada o B_2-orientada.

NOTA 2 : Claramente una digráfica D satisface la Conjetura 1 si y sólo si D^{-1} la cumple. (D^{-1} denota la digráfica inversa de D, obtenida de D asignando la dirección contraria a cada flecha). Por lo tanto, aplicando el principio de Dualidad Direccional , tenemos que para cada Teorema , Corolario o Conjetura , hay un Teorema, Corolario o Conjetura correspondiente . Obtenido por el reemplazamiento de "núcleo" por "conúcleo", "I(D)" por "T(D)", "$\delta_D^+(x)$" por "$\delta_D^-(x)$", "$\Gamma_D^+(x)$" por "$\Gamma_D^-(x)$" y "B_1-orientada" por "B_2-orientada".

Ejemplos:

Para ejemplificar la afirmación anterior recordemos la Conjetura 1. "Para toda digráfica D sin lazos , existe un conjunto independiente S tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$ " .

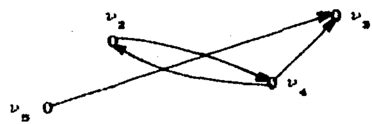
D_1 :



$(\nu_1,\nu_5,\nu_6,\nu_4,\nu_3)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D_1, por lo tanto $\lambda(D_1)=5$.

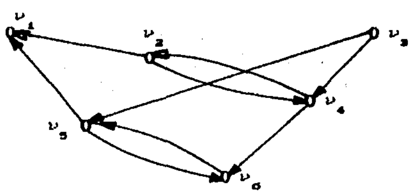
Sea $S=\{\nu_1,\nu_6\}$ un conjunto independiente $\therefore$ D_1-S es:

D_1-S:



(ν_2,ν_4,ν_3) es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D_1-S, entonces $\lambda(D_1-S)=3 < 5 =\lambda(D_1)$.

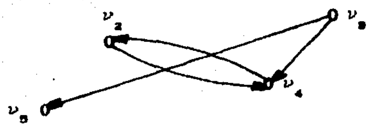
D_1^{-1} :



$(\nu_3,\nu_4,\nu_6,\nu_5,\nu_1)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D_1^{-1} , entonces $\lambda(D_1^{-1})=5$.

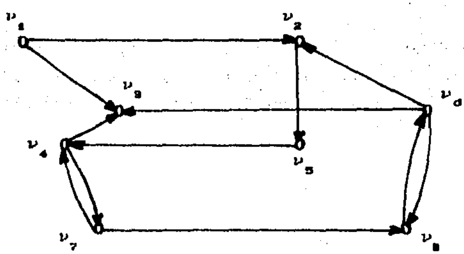
Sea $S=\{\nu_1,\nu_6\}$ un conjunto independiente entonces se obtiene la digráfica $D_1^{-1}-S$.

$D_1^{-1}-S$:



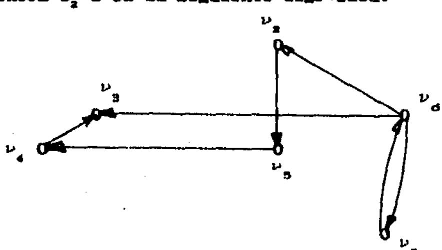
(ν_3,ν_4,ν_2) es una trayectoria dirigida de longitud máxima de $D_1^{-1}-S$, entonces $\lambda(D_1^{-1}-S)=3 < 5 = \lambda(D_1^{-1})$.

D_2:



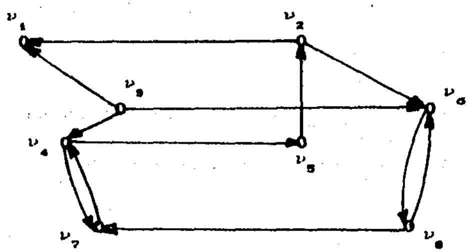
$(\nu_1,\nu_2,\nu_5,\nu_4,\nu_7,\nu_8,\nu_6,\nu_3)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D_2, por lo tanto $\lambda(D_2)=8$. Sea $S=\{\nu_1,\nu_7\}$ un conjunto independiente entonces D_2-S es la siguiente digráfica.

D_2-S:



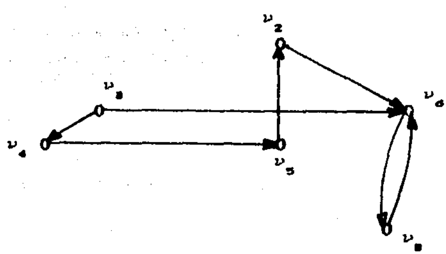
$(\nu_8, \nu_6, \nu_2, \nu_5, \nu_4, \nu_3)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D_2-S, por lo tanto $\lambda(D_2-S) = 6 < 8 = \lambda(D_2)$.

D_2^{-1}:



$(\nu_3, \nu_6, \nu_8, \nu_7, \nu_4, \nu_5, \nu_2, \nu_1)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D_2^{-1}, esto implica que $\lambda(D_2^{-1})=8$. Sea $S=\{\nu_1, \nu_7\}$ un conjunto independiente , entonces $D_2^{-1}-S$ es la siguiente digráfica.

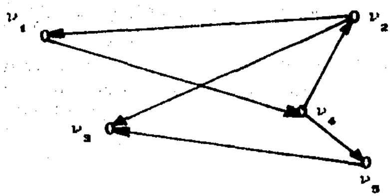
$D_2^{-1}-S$:



Observamos que $\lambda(D_2^{-1}-S)=6 < 8=\lambda(D_2^{-1})$.

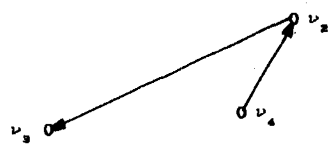
En esta digráfica observamos que se cumple la desigualdad propuesta en la Conjetura 1 , la cual ha resultado de suma importancia en todo el desarrollo de este trabajo.

D_3:



$(\nu_2, \nu_1, \nu_4, \nu_5, \nu_3)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima con $\lambda(D_3)=5$.
Sea $S=\{\nu_1, \nu_5\}$ un conjunto independiente entonces a partir de éste se obtiene D_3-S.

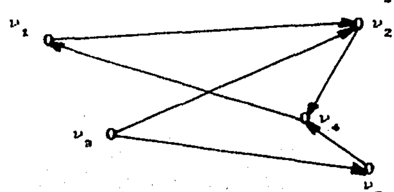
D_3-S:



Observamos que $\lambda(D_3-S)=3 < 5=\lambda(D_3)$. Esta desigualdad implica que la Conjetura 1 se cumple con la digráfica D_3.

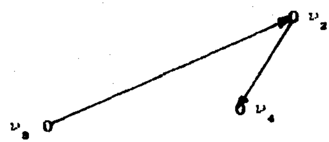
Ahora consideremos la digráfica inversa de D_3.

D_3^{-1}:



$(\nu_3,\nu_5,\nu_4,\nu_1,\nu_2)$ **es una trayectoria dirigida de longitud máxima por lo tanto $\lambda(D_3^{-1})=5$.**
En esta digráfica consideramos nuevamente $S=\{\nu_1,\nu_5\}$ un conjunto independiente y observamos que la digráfica siguiente también cumple la desigualdad.

$D_3^{-1}-S$:



Se obtiene que $\lambda(D_3^{-1}-S)=3 < 5=\lambda(D_3^{-1})$.

Como se mencionó anteriormente la Conjetura 1 es de suma importancia para las afirmaciones que se presentan en todo el desarrollo de este tabajo.

DUALIDAD

DUALIDAD

A continuación se considera cada Teorema, Corolario, Conjetura y Observación con su correspondiente Teorema, Corolario, Conjetura y Observación DUAL obtenido después de aplicar el principio de dualidad direccional.

En el apartado correspondiente al desarrollo , se mencionó que el principio de dualidad direccional se aplica por el reemplazamiento de "núcleo" por "conúcleo", "I(D)" por "T(D)", "$\delta_D^+(x)$" por "$\delta_D^-(x)$", "$\Gamma_D^+(x)$" por "$\Gamma_D^-(x)$" y "B_1-orientada" por "B_2-orientada" .

El orden en que se presentan corresponde al mismo que tienen dentro del apartado del DESARROLLO de la tesis.

Se representa al dual correspondiente con ($^{-1}$) .

CONJETURA 1 : Para toda digráfica sin lazos D, existe un conjunto independiente S tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

CONJETURA 1^{-1} :(Autodual) Para toda digráfica sin lazos D, existe un conjunto independiente S tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 1 : Si la digráfica D tiene un Núcleo S, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 1^{-1}: Si la digráfica D tiene un Conúcleo S, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

OBSERVACION 1 : Para digráficas simétricas (o equivalentemente, gráficas sin dirección) un conjunto independiente máximo es un Núcleo.

OBSERVACION 1^{-1} :Para digráficas simétricas (o equivalentemente, gráficas sin dirección) un conjunto independiente máximo es un Conúcleo.

COROLARIO 1 : Si S es un conjunto independiente máximo de una digráfica simétrica D, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

COROLARIO 1^{-1}: (Autodual) Si S es un conjunto independiente máximo de una digráfica simétrica D, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 2 : Sea D una digráfica simétrica conexa diferente de K_n. Entonces existe un conjunto independiente S tal que $\lambda(D-S) \leq \lambda(D) - 2$.

TEOREMA 2^{-1}: (Autodual) Sea D una digráfica simétrica conexa diferente de K_n. Entonces existe un conjunto independiente S tal que $\lambda(D-S) \leq \lambda(D)-2$.

TEOREMA 3 : Sea D una digráfica simétrica , entonces para todo $x \in I(D)$ hay un conjunto independiente S con las propiedades siguientes:

i) $x \in S$
ii) $S \subseteq I(D)$
iii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$.

TEOREMA 3^{-1}: Sea D una digráfica simétrica . Entonces para todo $x \in T(D)$ hay un conjunto independiente S con las propiedades siguientes:

i) $x \in S$
ii) $S \subseteq T(D)$
iii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$.

CONJETURA 2 : Para toda digráfica D , existe un conjunto independiente S tal que:

i) $S \subseteq I(D)$
ii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$.

CONJETURA 2^{-1}: Para toda digráfica D , existe un conjunto independiente S tal que :

i) $S \subseteq T(D)$
ii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$.

OBSERVACIÓN 2 : Si y es un vértice en $I(D) \cap \Gamma_D^+(x)$, entonces toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x.

OBSERVACION 2^{-1}: Si y es un vértice en $T(D) \cap \Gamma_D^-(x)$, entonces toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x.

CONJETURA 3 : Para toda digráfica D , existe un vértice x con las siguientes propiedades:

i) $x \in I(D)$

ii) $\forall$ $y \in (I(D) \cap \Gamma_D^-(x))$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x.

CONJETURA 3^{-1}: Para toda digráfica D, existe un vértice x con las siguientes propiedades:
i) $x \in T(D)$
ii) $\forall$ $y \in (T(D) \cap \Gamma_D^+(x))$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con punto final en y contiene a x.

OBSERVACION 3 : (C 3 implica C 2) Si para toda digráfica D, existe un vértice x con las siguientes propiedades :
i) $x \in I(D)$
ii) $\forall$ $y \in (I(D) \cap \Gamma_D^-(x))$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x.
Entonces para toda digráfica D, existe un conjunto independiente S tal que :
i) $S \subseteq I(D)$
ii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$.

OBSERVACION 3^{-1}: (C 3^{-1} implica C 2^{-1}) Si para toda digráfica D, existe un vértice x con las siguientes propiedades:
i) $x \in T(D)$
ii) $\forall$ $y \in (T(D) \cap \Gamma_D^+(x))$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con punto final en y contiene a x.
Entonces para toda digráfica D, existe un conjunto independiente S tal que :
i) $S \subseteq T(D)$
ii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$.

TEOREMA 4 :Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene grado ≤ 3. Entonces D satisface (C 3) que para toda digráfica D, existe un vértice x con las siguientes propiedades:
i) $x \in I(D)$
ii) $\forall$ $y \in (I(D) \cap \Gamma_D^-(x))$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con origen en y contiene a x.
(y entonces la Conjetura 2 y la Conjetura 1) .

TEOREMA 4^{-1} :Sea D una digráfica tal que todo vértice tiene grado ≤ 3 . Entonces D satisface (C 3^{-1}) que para toda digráfica D, existe un vértice x con las siguientes propiedades:

i) $x \in T(D)$

ii) $\forall\ y \in (T(D) \cap \Gamma^{+}_{D}(x))$, toda trayectoria dirigida de longitud máxima con punto final en y contiene a x.

(y entonces la Conjetura 2^{-1} y la Conjetura 1^{-1}) .

OBSERVACION 4 : (C 2 implica C 1) Si para toda digráfica D, existe un conjunto independiente S tal que:

i) $S \subseteq I(D)$

ii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$

Entonces si D es una digráfica sin lazos $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

OBSERVACION 4^{-1}: (C 2^{-1} implica C 1^{-1}) Si para toda digrá- D , existe un conjunto independiente S tal que :

i) $S \subseteq T(D)$

ii) $\lambda(D-S) = \lambda(D)-1$

Entonces si D es una digráfica sin lazos $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 5 : Sea $C \subseteq (V(D)-T(D))$, Si D-C tiene un núcleo S, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 5^{-1}: Sea $C \subseteq (V(D)-I(D))$, Si D-C tiene un conúcleo S, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

COROLARIO 2 : Sea D una digráfica . Si D[T(D)] tiene un núcleo S, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

COROLARIO 2^{-1}: Sea D una digráfica . Si D[I(D)] tiene un conúcleo S, entonces $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

PROPIEDAD $\mathcal{P}_D$: Se dirá que un vértice $x \in I(D)$ satisface la propiedad $\mathcal{P}_D$ si para cada $(y,x) \in$ Asym D[I(D)] por lo menos una de las condiciones siguientes se cumple:

i) Para toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y contiene a x .

ii) Para toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D conteniendo a x y no iniciando en x también contiene a y .

PROPIEDAD $\mathcal{P}^{-1}_D$: Se dirá que un vértice $x \in T(D)$ satisface la propiedad $\mathcal{P}^{-1}_D$ si para cada $(x,y) \in$ Asym D[T(D)] por lo menos una de las condiciones siguientes se cumple:

i) Para toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D con punto final en y contiene a x.

ii) Para toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D conteniendo a x y no terminando en x también contiene a y.

TEOREMA 6 : Sea D una digráfica . Si cada subdigráfica H inducida de D tiene un vértice $x \in I(H)$ satisfaciendo la propiedad $\mathcal{P}_H$, entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 6^{-1}: Sea D una digráfica . Si cada subdigráfica H inducida de D tiene un vértice $x \in T(H)$ satisfaciendo la propiedad $\mathcal{P}_H^{-1}$, entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq T(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 7 : Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido contenido en Asym D tiene un vértice x que satisface: $\delta_D^-(x) \leq 1$ o $\delta_D^+(x) \leq 1$. Entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 7^{-1}: Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido contenido en Asym D tiene un vértice x que satisface: $\delta_D^-(x) \leq 1$ o $\delta_D^+(x) \leq 1$. Entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq T(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 8 : Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido contenido en Asym D tiene un vértice x el cual satisface : $D[\Gamma_D^-(x)] \cong K^*_{n(x)}$, donde $n(x)=\delta_D^-(x)$ o $D[\Gamma_D^+(x)] \cong K^*_{m(x)}$, $m(x)=\delta_D^+(x)$. Entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 8^{-1} : Sea D una digráfica tal que todo ciclo dirigido contenido en Asym D tiene un vértice x el cual satisface: $D[\Gamma_D^-(x)] \cong K^*_{n(x)}$, donde $n(x)=\delta_D^-(x)$ o $D[\Gamma_D^+(x)] \cong K^*_{m(x)}$, donde $m(x)=\delta_D^+(x)$. Entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq T(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 9 : Sea $C \subseteq (V(D)-T(D)) \cup \{ x \in V(D) / \Gamma^-_D(x) \cong K^*_{n(x)},\ n(x)= \delta^-_D(x) \}$. Si D-C tiene un núcleo, entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 9^{-1}: Sea $C \subseteq (V(D)-I(D)) \cup \{ x \in V(D) / \Gamma^+_D(x) \cong K^*_{m(x)},\ m(x)=\delta^+_D(x) \}$. Si D-C tiene un conúcleo, entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

COROLARIO 3 : Sea D una digráfica. Si existe un conjunto $C \subseteq (V(D)-T(D)) \cup \{ x \in V(D) / \Gamma^-_D(x) \cong K^*_{n(x)},\ n(x)=\delta^-_D(x) \}$ intersectando a cada ciclo impar dirigido de D, entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

COROLARIO 3^{-1}: Sea D una digráfica. si existe un conjunto $C \subseteq (V(D)-I(D)) \cup \{ x \in V(D) / \Gamma^+_D(x) \cong K^*_{m(x)},\ m(x)=\delta^+_D(x) \}$ intersectando a cada ciclo impar dirigido de D, entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que $\lambda(D-S) < \lambda(D)$.

TEOREMA 10 : Sea D una digráfica . Si D es una digráfica B_1-orientada, entonces todo conjunto independiente máximo intersecta a cada trayectoria dirigida de longitud máxima.

TEOREMA 10^{-1}: Sea D una digráfica. Si D es una digráfica B_2-orientada, entonces todo conjunto independiente máximo intersecta a cada trayectoria dirigida de longitud máxima.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

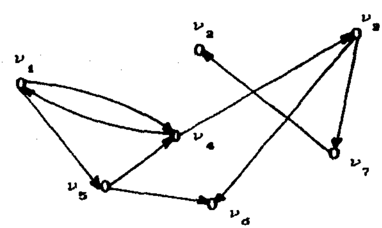
En la introducción se hizo mención que : ROY [11] e independientemente GALLAI [8] demostraron que $\gamma(D) \leq \lambda(D)$. Donde $\gamma(D)$ es el número cromático y $\lambda(D)$ es el número de vértices de una trayectoria dirigida de longitud máxima, de una digráfica D sin lazos.

En este apartado se concluye que el Teorema de GALLAI-ROY puede ser expresado como sigue :

"El conjunto de vértices en cualquier digráfica puede ser partido en λ conjuntos independientes (donde λ es el número de vértices de una trayectoria dirigida de longitud máxima).

Ejemplos:

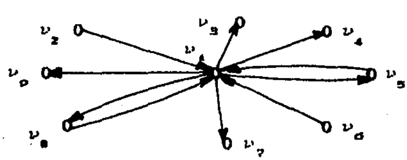
D_1:



$(\nu_1, \nu_5, \nu_4, \nu_3, \nu_7, \nu_2)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore\ \lambda(D_1)=6$.

$V(D_1)=(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7) = \{\nu_1, \nu_6\} \cup \{\nu_2\} \cup \{\nu_3\} \cup \{\nu_4\} \cup \{\nu_5\} \cup \{\nu_7\}$ = Unión de 6 conjuntos independientes.

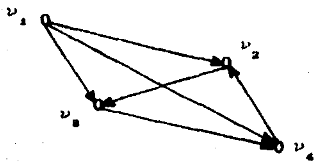
D_2:



(ν_2, ν_1, ν_3) es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_2)=3$.

$V(D_2)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_8,\nu_9\} = \{\nu_1\} \cup \{\nu_2\} \cup \{\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_8,\nu_9\}$ = Unión de 3 conjuntos independientes.

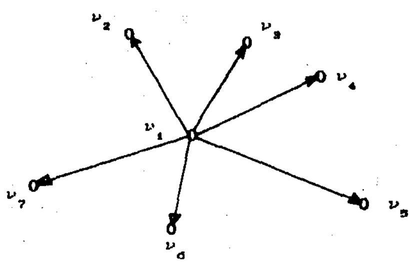
D_3:



$(\nu_1, \nu_3, \nu_4, \nu_2)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima $\therefore$ $\lambda(D_3)=4$.

$V(D_3)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\} = \{\nu_1\} \cup \{\nu_2\} \cup \{\nu_3\} \cup \{\nu_4\}$ = Unión de 4 conjuntos independientes.

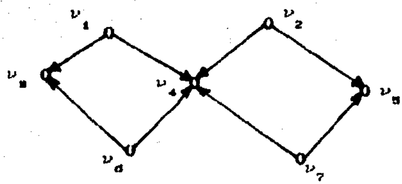
D_4:



$\lambda(D_4)=2$.

$V(D_4)= \{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7\} = \{\nu_1\} \cup \{\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7\}$ = Unión de 2 conjuntos independientes.

D_5:



$\lambda(D_5)=2$.

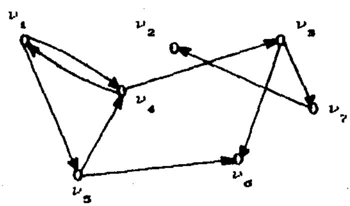
$V(D_5)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7\} = \{\nu_1,\nu_2,\nu_6,\nu_7\} \cup \{\nu_3,\nu_4,\nu_5\}$ = Unión de 2 conjuntos independientes.

Alternativamente los conceptos involucrados en el Teorema anterior de Gallai-Roy estan dados por el siguiente Teorema de Gallai-Milgram [9]:

"El conjunto de vértices de cualquier digráfica puede ser partido en α trayectorias dirigidas (donde α es el número de vértices de un conjunto independiente máximo)" .

Ejemplos:

D_1:



$\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$, $\{\nu_1,\nu_2,\nu_6\}$, $\{\nu_6,\nu_7,\nu_4\}$, $\{\nu_4,\nu_6,\nu_7\}$ y $\{\nu_2,\nu_6,\nu_1\}$ son conjuntos independientes máximos .

$\therefore\ \alpha=3$.

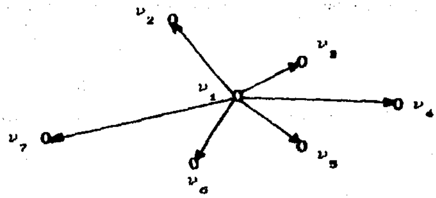
De donde:

$V(D_1)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7\}$

$=\{\nu_1,\nu_5,\nu_4\} \cup \{\nu_3,\nu_6\} \cup \{\nu_7,\nu_2\}$

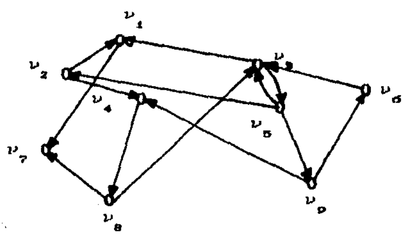
=Unión de 3 trayectorias dirigidas.

D_2:



$\{\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7\}$ es un conjunto independiente máximo, $\therefore$ $\alpha=6$.
$V(D_2)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7\} =\{\nu_1,\nu_2\} \cup \{\nu_3\} \cup \{\nu_4\} \cup \{\nu_5\} \cup \{\nu_6\} \cup \{\nu_7\}$ = Unión de 6 trayectorias dirigidas.

D_3:



$\{\nu_6,\nu_7,\nu_2\}$, $\{\nu_6,\nu_7,\nu_5,\nu_4\}$, $\{\nu_3,\nu_9,\nu_2,\nu_7\}$, $\{\nu_7,\nu_9,\nu_2,\nu_3\}$ y $\{\nu_1,\nu_6,\nu_5,\nu_8\}$ son conjuntos independientes máximos $\therefore$ $\alpha = 3$.
$V(D_3)= \{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_8,\nu_9\} = \{\nu_3,\nu_1,\nu_7\} \cup \{\nu_2,\nu_4,\nu_8\} \cup \{\nu_5,\nu_9,\nu_6\}$ = Unión de tres trayectorias dirigidas .

Los dos resultados anteriores pueden considerarse como existencia "dual" ,"doble". En este sentido , pueden originarse muchas preguntas , pero no es el objeto de este trabajo.

A continuación consideremos D una gráfica sin dirección (digráfica simétrica) . Entonces se propone la conjetura siguiente:

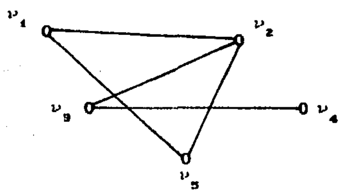
CONJETURA : Si $\lambda(D)=p_1+p_2$, entonces existe una partición de su conjunto de vértices en dos subconjuntos X_1 y X_2 tal que $\lambda(\ D[X_1]\ )\le p_1$ y $\lambda(\ D[X_2]\ )\le p_2$.

Observamos que para $p_1=1$ entonces la Conjetura coincide con el Teorema 3.

Para valores pequeños de p_1 ($p_1\le 5$), la respuesta es afirmativa.

Ejemplos:

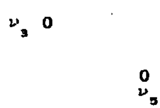
D_1 :



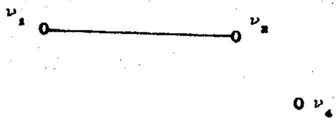
$(\nu_4,\nu_3,\nu_2,\nu_1,\nu_5)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima.
$\lambda(D_1)=5=1+4=2+3$.

Caso 1. Si $\lambda(D_1)=1+4=p_1+p_2$.
Sean $X_1=\{\nu_3,\nu_5\}$ y $X_2=\{\nu_1,\nu_2,\nu_4\}$, entonces obtenemos las dos digráficas siguientes:

$D_1[X_1]$:

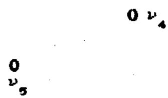


$\lambda(\ D_1[X_1]\ )=1=p_1$

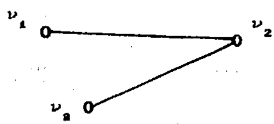


$D_1[X_2]$: $\lambda(\ D_1[X_2]\ )=2 < 4=p_2$

Caso 2. Si $\lambda(D_1) = 2 + 3 = p_3 + p_4$.
Sean $X_3=\{\nu_4,\nu_5\}$ y $X_4=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$, entonces a partir de estos conjuntos obtenemos las digráficas siguientes:

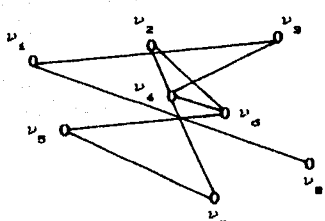


$D_1[X_3]$: $\lambda(\ D_1[X_3]\ )=1 < 2=p_3$



$D_1[X_4]$: $\lambda(\ D_1[X_4]\ )=3=p_4$

D_2 :



$(\nu_8,\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_2,\nu_6,\nu_5,\nu_7)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima.
Donde obtenemos la siguiente igualdad.

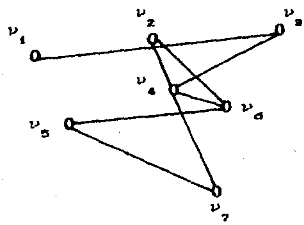
$\lambda(D_2) = 8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4.$

Caso 1. Si $\lambda(D_2) = 1 + 7$ entonces $p_1 = 1$, $p_2 = 7$.
Sean $X_1=\{\nu_8\}$ y $X_2=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7\}$

$D_2[X_1]$:

$\lambda(\ D_2[X_1]\ )=1=p_1$

$D_2[X_2]$:



$\lambda(\ D_2[X_2]\ )=7=p_2$

Donde $(\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_2,\nu_6,\nu_5,\nu_7)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima.

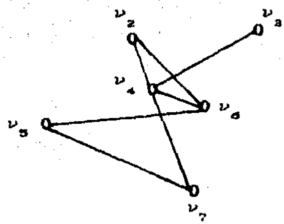
Caso 2. Si $\lambda(D_2) = 2 + 6$ entonces Sea $p_3 = 2$, $p_4 = 6$.
Sean $X_3=\{\nu_1,\nu_8\}$ y $X_4=\{\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7\}$

$D_2[X_3]$:

$\lambda(\ D_2[X_3]\ )=2=p_3$

En los ejemplos anteriores hemos podido comprobar que la conjetura se cumple para los distintos casos en los cuales p_1 y p_2 toman diferentes valores, a continuación consideremos el ejemplo para $p_4 = 6$.

$D_2[X_4]$:

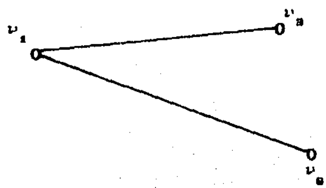


$\lambda(\ D_2[X_4]\ )=6=p_4$

Donde $(\nu_3,\nu_4,\nu_2,\nu_6,\nu_5,\nu_7)$ **es una trayectoria dirigida de longitud máxima.**

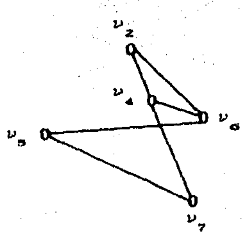
Caso 3 . Si $\lambda(D_2) = 3 + 5$ entonces Sea $p_5 = 3$ y $p_6 = 5$.
Sean $X_5=\{\nu_8,\nu_1,\nu_3\}$ y $X_6=\{\nu_2,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7\}$.

$D_2[X_5]$:



$\lambda(\ D_2[X_5]\ )=3=p_5$

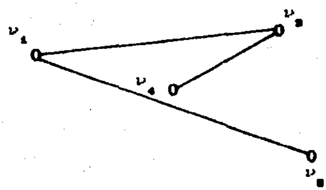
$D_2[X_6]$:



$\lambda(\ D_2[X_6]\ )=5=p_6$

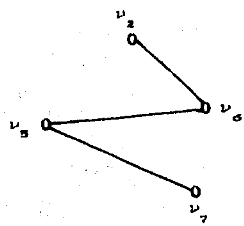
Caso 4 . Si $\lambda(D_2) = 4 + 4$ entonces $p_7 = 4$ y $p_8 = 4$.
Sean $X_7=\{\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_8\}$ y $X_8=\{\nu_2,\nu_5,\nu_6,\nu_7\}$

$D_2[X_7]$:



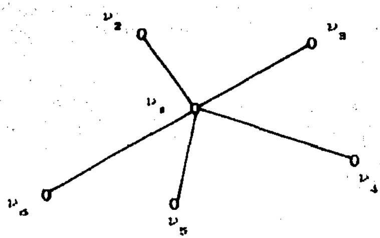
$\lambda(\ D_2[X_7]\ )=4=p_7$

$D_2[X_8]$:



$\lambda(\ D_2[X_8]\ )=4=p_8$

D_3:



$\lambda(D_3) = 3 = 1 + 2$ $\rightarrow$ Sea $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$

Sean $X_1=\{\nu_1\}$ y $X_2=\{\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6\}$

$D_3[X_1]$: $\qquad\nu_1$ 0 $\qquad\lambda(\, D_3[X_1]\,)=1=p_1$

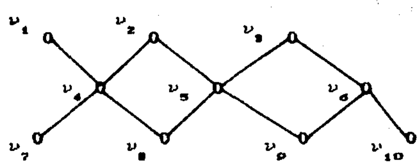
ν_2 0 $\qquad$ 0 ν_3

$D_3[X_2]$: $\qquad\lambda(\, D_3[X_2]\,)=1<2=p_2$

0 ν_4

ν_6 0 $\qquad$ 0 ν_5

D_4:



$(\nu_1,\nu_4,\nu_2,\nu_5,\nu_3,\nu_6,\nu_7)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima . Por lo tanto $\lambda(D_4) = 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$.

Caso 1 . Si $\lambda(D_4) = 1 + 6$ $\quad$ Sea $p_1 = 1$ y $p_2 = 6$
Sean $X_1=\{\nu_4,\nu_5,\nu_6\}$ y $X_2=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_7,\nu_8,\nu_9,\nu_{10}\}$

ν_1 0 $\qquad\nu_2$ 0 $\qquad\nu_3$ 0

$D_4[X_2]$: $\qquad\lambda(\, D_4[X_2]\,)=1<6=p_2$

ν_7 0 $\qquad\nu_8$ 0 $\qquad\nu_9$ 0 $\qquad\nu_{10}$ 0

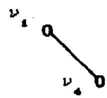
$D_4[X_1]$:

$\lambda(\ D_4[X_1]\ )=1=p_1$

Caso 2 . $\lambda(D_4) = 2 + 5 = p_3 + p_4$.

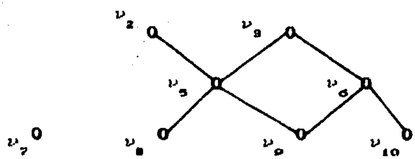
Sean $X_3=\{\nu_1,\nu_4\}$ y $X_4=\{\nu_2,\nu_3,\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_8,\nu_9,\nu_{10}\}$

$D_4[X_3]$:



$\lambda(\ D_4[X_3]\ )=2=p_3$

$D_4[X_4]$:



$\lambda(\ D_4[X_4]\ )=5=p_4$

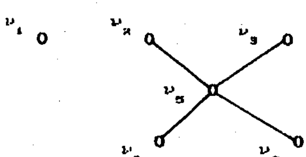
Caso 3 . $\lambda(D_4) = 3 + 4 = p_5 + p_6$.

Sean $X_5=\{\nu_4,\nu_7,\nu_6,\nu_{10}\}$ y $X_6=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_5,\nu_8,\nu_9\}$

$D_4[X_5]$:

$\lambda(\ D_4[X_5]\ )=2<3=p_5$

$D_4[X_6]$:



$\lambda(\ D_4[X_6]\ )=3<4=p_6$

RESUMEN

RESUMEN

En este trabajo se presentan algunas condiciones suficientes para que una digráfica satisfaga la Conjetura 1 , propuesta por J. M. Laborde , C. Payan y N. H. Huang (1982) .

En el apartado correspondiente al desarrollo se incluyen las demostraciones de los 10 Teoremas , 3 Corolarios y 4 observaciones, cada uno se presenta con una serie de ejemplos . Asimismo en dicho apartado se incluyen 3 Conjeturas con su respectiva ejemplificación .

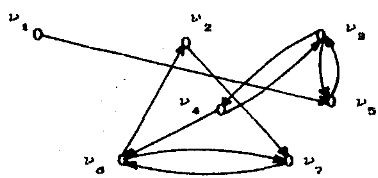
Para este trabajo también se consideró pertinente incluir un apartado correspondiente a la DUALIDAD , ya que, a partir de cada Teorema y Corolario se puede obtener su Teorema dual y Corolario dual aplicando el principio de dualidad direccional.

Es fundamental enfatizar que todos los Teoremas , Corolarios, Conjeturas y Observaciones giraron al rededor de la Conjetura 1. La cual se presenta a continuación:

CONJETURA : Toda digráfica D tiene un conjunto independiente S intersectando toda trayectoria dirigida de longitud máxima.

Ejemplos:

D_1 :

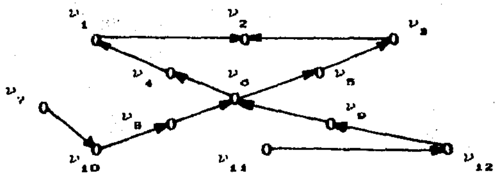


Sea $S=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ un conjunto independiente .

Sea $\tau=(\nu_1,\nu_5,\nu_3,\nu_4,\nu_6,\nu_2,\nu_7)$ una trayectoria dirigida de longitud máxima.

Se cumple que $S \cap \tau =\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$

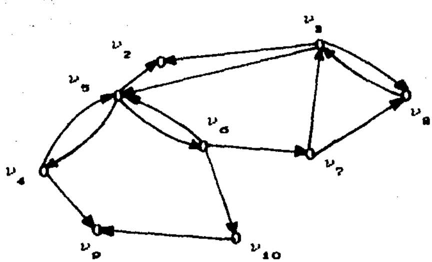
D_2:



Sea $S=\{\nu_2\}$ un conjunto independiente.
Sean $\tau_1=(\nu_7,\nu_{10},\nu_8,\nu_6,\nu_5,\nu_3,\nu_2)$, $\tau_2=(\nu_7,\nu_{10},\nu_8,\nu_6,\nu_4,\nu_1,\nu_2)$, $\tau_3=(\nu_{11},\nu_{12},\nu_9,\nu_6,\nu_5,\nu_3,\nu_2)$ y $\tau_4=(\nu_{11},\nu_{12},\nu_9,\nu_6,\nu_4,\nu_1,\nu_2)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima.

Se cumple que $S \cap \tau_1 = S \cap \tau_2 = S \cap \tau_3 = S \cap \tau_4 = \{\nu_2\}$.

D_3:

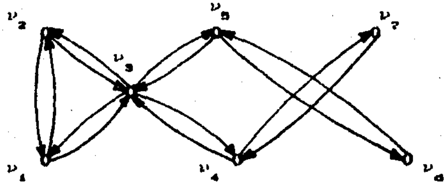


Sean $\tau_1=(\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_8,\nu_3,\nu_2)$, $\tau_2=(\nu_6,\nu_7,\nu_8,\nu_3,\nu_5,\nu_4,\nu_9)$ y $\tau_3=(\nu_7,\nu_8,\nu_3,\nu_5,\nu_6,\nu_{10},\nu_9)$ trayectorias dirigidas de longitud máxima.

Sea $S=\{\nu_6,\nu_8\}$ un conjunto independiente .

Se cumple que $S \cap \tau_1 = S \cap \tau_2 = S \cap \tau_3 = \{\nu_6,\nu_8\}$.

D_4:



Sean $\tau_1=(\nu_6,\nu_5,\nu_3,\nu_2,\nu_1)$, $\tau_2=(\nu_6,\nu_5,\nu_3,\nu_1,\nu_2)$, $\tau_3=(\nu_7,\nu_4,\nu_3,\nu_2,\nu_1)$, $\tau_4=(\nu_7,\nu_4,\nu_3,\nu_1,\nu_2)$, $\tau_5=(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_7)$, $\tau_6=(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_5,\nu_6)$, $\tau_7=(\nu_2,\nu_1,\nu_3,\nu_4,\nu_7)$ y $\tau_8=(\nu_2,\nu_1,\nu_3,\nu_5,\nu_6)$, trayectorias dirigidas de longitud máxima.

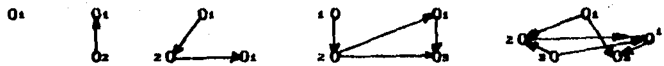
Sea $S=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ un conjunto independiente.

Entonces se satisface que $S \cap \tau_1 = S \cap \tau_2 = S \cap \tau_3 = S \cap \tau_4 = S \cap \tau_5 = S \cap \tau_6 = S \cap \tau_7 = S \cap \tau_8 = \{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$.

GLOSARIO

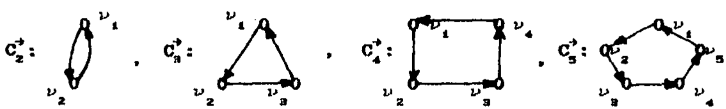
GLOSARIO

BUENA COLORACION DE VERTICES de una digráfica D. Es una coloración de los vértices con n colores de manera que vértices adyacentes tengan asignado distinto color.



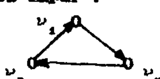
D_1 D_2 D_3 D_4 D_5

CICLO DIRIGIDO ($\vec{C}_n$) en una digráfica D. $\vec{C}_n=\{\nu_1,\nu_2, \ldots,\nu_n\}$ es una sucesión de vértices $(\nu_i,\nu_{i+1}) \in A(D)$, $1\leq i \leq n$, not. mod. n de una digráfica D (i.e. los vértices no se repiten). Un ciclo de longitud n es un n-ciclo. Un ciclo de longitud 3 es un 3-ciclo-triángulo y C_n es un ciclo de longitud n.



CICLO IMPAR , C_n es ciclo impar si y sólo si el número de vértices "n" es impar .

C_3 :



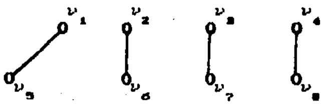
es ciclo impar porque 3 es un número impar.

CONJUNTO DE FLECHAS (A(D)) de una digráfica D, es el conjunto de pares ordenados (ν_i,ν_j) con $i\neq j$ tal que ν_i es vértice adyacente a ν_j.

D:

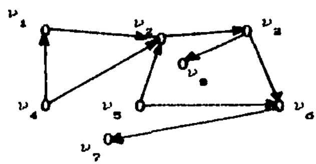
$\Rightarrow$ $A(D)=\{ (\nu_1,\nu_2), (\nu_2,\nu_3), (\nu_3,\nu_1) \}$

CONJUNTO INDEPENDIENTE DE VERTICES en una digráfica D , es un conjunto de vértices , en donde cada dos vértices son no adyacentes (son independientes).
$\beta(D)$ representa el número de vértices independientes y es igual a la máxima cardinaliad entre los conjuntos independientes de vértices de D.

D:  $\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\}$, $\{\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_8\}$, $\{\nu_1,\nu_6,\nu_3,\nu_8\}$,

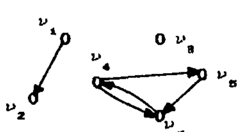
$\{\nu_5,\nu_3\}$ y $\{\nu_1,\nu_8,\nu_6\}$ son conjuntos independientes de vértices donde $\beta(D)=4$.

CONJUNTO INDEPENDIENTE MAXIMO de vértices en una digráfica D es cuando éste no está contenido propiamente en algún otro conjunto independiente de vértices .

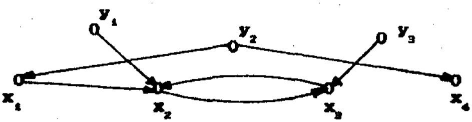
D: 

Los siguientes son conjuntos independientes de vértices $\{\nu_1\}$, $\{\nu_1,\nu_8\}$, $\{\nu_1,\nu_8,\nu_6\}$, $\{\nu_4\}$, $\{\nu_4,\nu_5\}$, $\{\nu_4,\nu_5,\nu_7\}$, $\{\nu_2,\nu_7,\nu_8\}$, $\{\nu_4,\nu_5,\nu_7,\nu_3\}$, $\{\nu_4,\nu_5,\nu_7,\nu_8\}$, $\{\nu_2,\nu_7\}$, $\{\nu_2,\nu_6\}$ y $\{\nu_2,\nu_6,\nu_8\}$ pero de todos éstos los únicos conjuntos independientes máximos son: $\{\nu_1,\nu_8,\nu_6\}$, $\{\nu_4,\nu_5,\nu_7,\nu_3\}$, $\{\nu_4,\nu_5,\nu_7,\nu_8\}$, $\{\nu_2,\nu_7,\nu_8\}$ y $\{\nu_2,\nu_6,\nu_8\}$.

CONJUNTO DE VERTICES (V(D)) de una digráfica D. Corresponden a los puntos de la digráfica .

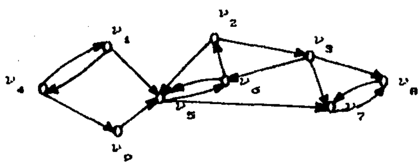
D:  $\rightarrow$ $V(D)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6\}$

CONÚCLEO . Un conjunto independiente S de una digráfica D , se dice que es un conúcleo de D, si para todo $x \in (V(D)-S)$ hay $y \in S$ tal que $(y,x) \in A(D)$.

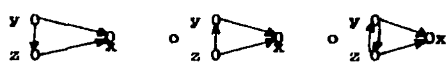
D: 

$S=\{y_1,y_2,y_3\}$ es un conjunto independiente. Nos damos cuenta que S es un conúcleo de D, ya que $\{(y_2,x_1), (y_1,x_2), (y_3,x_3), (y_2,x_4)\} \subset A(D)$.

DIGRAFICA (D) o gráfica finita dirigida sin lazos, es un conjunto finito V (de vértices) junto con un conjunto A (posiblemente vacio) (separado de V) de pares ordenados de distintos elementos de V. (En este caso nos referimos a los elementos de A como flechas) .
$V(D)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_{n-1},\nu_n\}$ = El conjunto de vértices de D.
$A(D) = \{ (\nu_1,\nu_2), (\nu_3,\nu_2), (\nu_4,\nu_3),\ldots,(\nu_{n-1},\nu_n) \}$ = Conjunto de flechas de D.
Sea $D=(V(D), A(D))$ una digráfica , entonces D es sin lazos si para todo $\nu \in V(D)$ se tiene que $(\nu,\nu) \notin A(D)$.

D: 

DIGRAFICA B_1-ORIENTADA . Una digráfica D se dice que es B_1-orientada ,si $\{ (y,x), (z,x) \} \subseteq A(D)$ implica que $\{ (y,z) , (z,y) \} \cap A(D) \neq \emptyset$.

D es B_1-orientada si : 

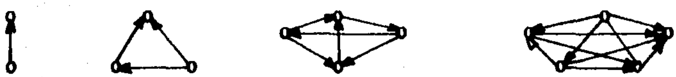
DIGRAFICA B_2-ORIENTADA . Una digráfica D se dice que es B_2-orientada , si $\{ (x,y), (x,z) \} \subseteq A(D)$ implica que $\{ (y,z) , (z,y) \} \cap A(D) \neq \emptyset$.

D es B_2-orientada si: 

o 

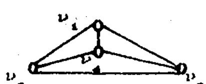
o 

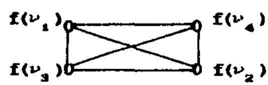
<u>DIGRAFICA COMPLETA</u> (K_n) . Una digráfica completa con n vértices es tal que K_n($V(K_n)$, $A(K_n)$) donde $V(K_n)=\{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n\}$, K_n es completa si $\forall\ \nu_i , \nu_j \in V(K_n)$ entonces ν_i , ν_j son adyacentes.



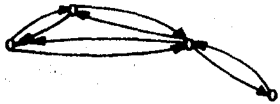
K_2 K_3 K_4 K_5

<u>DIGRAFICAS ISOMORFAS</u> ($D_1 \cong D_2$) Una digráfica D_1 es isomorfa a la digráfica D_2 si existe una función biyectiva (uno a uno) $f\colon V(D_1) \to V(D_2)$ tal que $(\upsilon,\nu) \in A(D_1)$ sí y sólo si $(f(\upsilon),f(\nu)) \in A(D_2)$.

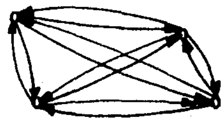
K_4: 

$\cong$ C_4: 

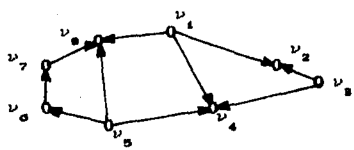
<u>DIGRAFICA SIMETRICA</u> (D^*) es una gráfica sin dirección. Si para cada flecha (υ,ν) de una digráfica D se cumple que , $(\nu,\upsilon) \in A(D)$ entonces D es simétrica. Entonces las dos flechas (υ,ν) y (ν,υ) de D pueden ser denotadas juntas como $\{\upsilon,\nu\}$. Por lo tanto en este sentido una gráfica es una digráfica simétrica.

D:  es simétrica .

<u>DIGRAFICA SIMETRICA COMPLETA</u> (K_n^*) con n vértices.

K_4^*: 

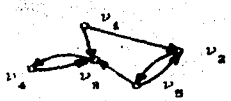
<u>DIGRAFICA</u> (p,q) o una (p,q) digráfica es aquella que tiene p vértices y q aristas.

D: 

$V(D)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_8\}$ y $A(D)=\{(\nu_1,\nu_2), (\nu_3,\nu_2), (\nu_3,\nu_4), (\nu_5,\nu_4), (\nu_5,\nu_6), (\nu_6,\nu_7), (\nu_7,\nu_8), (\nu_1,\nu_8), (\nu_1,\nu_4), (\nu_5,\nu_8)\}$.
D=(V,A) es una digráfica o gráfica dirigida. con :
p=8 , es el orden de la digráfica.
q=10 , es el tamaño de la digráfica.
∴ es una (8,10) digráfica.

<u>DIGRAFICA DUAL O INVERSA</u> (D^{-1}) de una digráfica D. Es aquella que se obtiene asignando la dirección contraria a cada flecha.

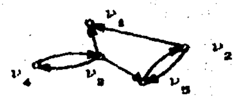
Se observa que en la digráfica dual cambia el "núcleo" por "conúcleo", "I(D)" por "T(D)", "$\delta_D^+(x)$" por "$\delta_D^-(x)$", "$\Gamma_D^+(x)$" por "$\Gamma_D^-(x)$" y "B_1-orientada" por "B_2-orientada".

D: 

$I(D)=\{\nu_1\}$, $T(D)=\{\nu_4\}$

$\Gamma^+_D(\nu_3)=\{\nu_4\}$

$\Gamma^-_D(\nu_3)=\{\nu_1,\nu_4,\nu_5\}$.

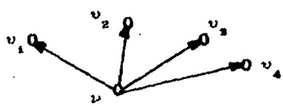
D^{-1}: 

$I(D^{-1})=\{\nu_4\}$, $T(D^{-1})=\{\nu_1\}$

$\Gamma^+_{D^{-1}}(\nu_3)=\{\nu_1,\nu_4,\nu_5\}$

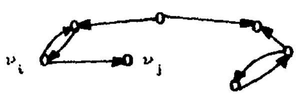
$\Gamma^-_{D^{-1}}(\nu_3)=\{\nu_4\}$.

EXGRADO ($\delta^+_D(\nu)$) de un vértice ν en una digráfica D , es el número de vértices de D que son adyacentes desde ν. = Cardinalidad {vecinos externos de ν} .

D: 

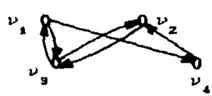
→ $\delta^+_D(\nu)=4$

FLECHA (ν_i,ν_j) en una digráfica D. Sea D=(V(D), A(D)) una digráfica entonces (ν_i,ν_j) es una flecha , si $(\nu_i,\nu_j)\in A(D)$.

D: 

→ (ν_i,ν_j) es una flecha en D.

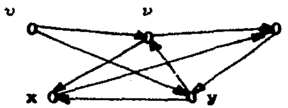
FLECHA ASIMETRICA . Una flecha $(\nu_1,\nu_2)\in A(D)$ es llamada asimétrica si $(\nu_2,\nu_1)\in A(D)$.

D : 

→ (ν_1,ν_4) y (ν_4,ν_2) son flechas asimétricas.

GRADO DE UN VERTICE ($\delta_D(\nu)$) en una digráfica D . El grado de un vértice ν es el número de aristas que inciden en el vértice ν.

D:

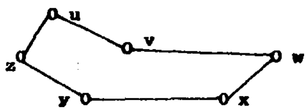


$\rightarrow$

$\delta_D(\upsilon)=2$
$\delta_D(\nu)=4$
$\delta_D(\omega)=3$
$\delta_D(x)=3$
$\delta_D(y)=4$

GRAFICA FINITA (G) . Una gráfica es una pareja ordenada formada por un conjunto finito, V junto con un conjunto (posiblemente vacío) A (separado de V) de subconjuntos de dos elementos (distintos) de vértices de V.
Conjunto de vértices de G =V(G)={u,v,w,x,y,z,}.
Conjunto de aristas de G=A(G)={ {u,v}, {v,w}, {w,x}. {x,y}, {y,z}, {z,u} }

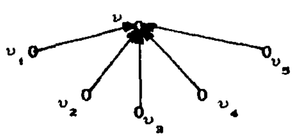
G:



G(V,A) es un gráfica finita.

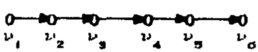
INGRADO DE UN VERTICE ν ($\delta_D^-(\nu)$), es el número de vértices de D, adyacentes hacia ν. = Cardinalidad { vecinos internos de ν }.

D:



$\rightarrow$ $\delta_D^-(\nu)=5$

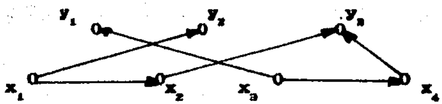
LONGITUD DE UNA TRAYECTORIA dirigida τ ($\ell(\tau)$), es el número de vértices sobre la trayectoria τ menos 1.



$\rightarrow$ $\tau=(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6)$ es una trayectoria dirigida donde $\ell(\tau)=5$.

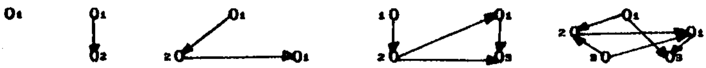
NUCLEO DE UNA DIGRAFICA D . Un conjunto independiente S de una digráfica D se dice que es un núcleo de D si para todo $x \in V(D-S)$ hay $y \in S$ tal que $(x,y) \in A(D)$.

D:



$S=\{y_1, y_2, y_3\}$ es un conjunto independiente .
Observamos que S es un núcleo de D , porque $\{ (x_1,y_2), (x_2,y_3), (x_3,y_1), (x_4,y_3) \} \subset A(D)$.

NUMERO CROMATICO ($\gamma(D)$) de una digráfica D. Es el mínimo número n para el cual una digráfica tiene una buena coloración con n colores. Si $\gamma(D) = n$, entonces la digráfica se llama n-cromática.

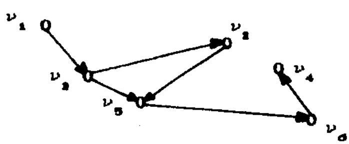


D_1 D_2 D_3 D_4 D_5

$\gamma(D_1)=1$	$\rightarrow$	D_1 es 1-cromática
$\gamma(D_2)=2$	$\rightarrow$	D_2 es 2-cromática
$\gamma(D_3)=2$	$\rightarrow$	D_3 es 2-cromática
$\gamma(D_4)=3$	$\rightarrow$	D_4 es 3-cromática
$\gamma(D_5)=3$	$\rightarrow$	D_5 es 3-cromática

NUMERO DE VERTICES DE UNA TRAYECTORIA DIRIGIDA de longitud máxima de una digráfica D sin lazos ($\lambda(D)=\lambda$).

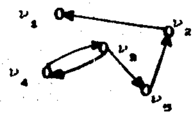
D:



(ν_1,ν_3,ν_5), $(\nu_1,\nu_3,\nu_2,\nu_5)$, $(\nu_1,\nu_3,\nu_5,\nu_6,\nu_4)$, $(\nu_1,\nu_3,\nu_2,\nu_5,\nu_6,\nu_4)$ y (ν_1,ν_3), son trayectorias dirigidas .

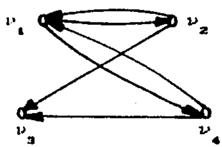
La única trayectoria dirigida de longitud máxima en D es $(\nu_1,\nu_3,\nu_2,\nu_5,\nu_6,\nu_4)$. $\rightarrow$ $\lambda(D)=6$.

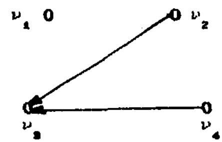
ORDEN DE UNA DIGRAFICA D (p). El número de elementos en el conjunto V(D) es llamado el orden de D. = Cardinalidad de V(D) .

D: 

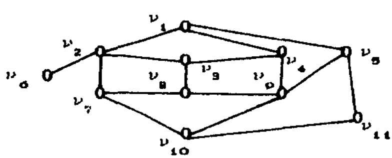
$\Rightarrow$ p = 5
puesto que
$V(D)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5\}$

PARTE ASIMETRICA DE D (Asym (D)) es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas asimétricas de D . Y los vértices son todos los vértices de la digráfica D .

D: 

$\Rightarrow$ Asym (D): 

PARTICION DEL CONJUNTO DE VERTICES EN CONJUNTOS INDEPENDIENTES en una digráfica D. Dado V(D) una partición del mismo es una división en subconjuntos V_1, $V_2,\ldots,V_n$, tal que $(\upsilon,\nu)\in A(D) \Leftrightarrow \upsilon\in V_i$, $\nu\in V_j$ para $i\neq j$. (i,e, V_i es un conjunto independiente, ya que, cada dos vértices no son adyacentes). Además $V_1\cup V_2\cup,\ldots,\cup V_n=V(D)$. Y $V_1\cap V_2\cap,\ldots,\cap V_n=\emptyset$.

D: 

$\{\nu_1,\nu_3,\nu_6,\nu_7,\nu_9,\nu_{11}\}$ y $\{\nu_2,\nu_4,\nu_5,\nu_8,\nu_{10}\}$ es una partición de V(D) en dos conjuntos independientes.

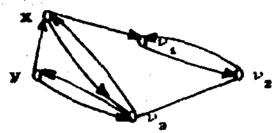
PASEO DE UNA DIGRAFICA D. un υ-ν paseo es una sucesión de vértices $(\nu_i,\nu_{i+1})\in A(D)$, $1\leq i\leq n$, not.mod.n donde $\nu_1=\upsilon$ y $\nu_n=\nu$.

PROPIEDAD $\mathcal{P}_D$. Se dice que un vértice $x \in I(D)$ satisface la propiedad $\mathcal{P}_D$ si para cada $(y,x) \in$ Asym D [I(D)] por lo menos una de las condiciones siguientes se cumple :

i) Para toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D con origen en y contiene a x .

ii) Para toda trayectoria dirigida de longitud máxima de D conteniendo a x y no iniciando en x también contiene a y.

D:



$I(D)=\{x,y,\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ y $(y,x) \in$ Asym D[I(D)] .

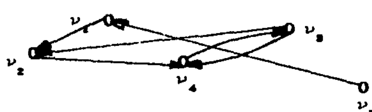
i) $\tau_1=(y,x,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D que tiene origen en "y" y contiene a x .

ii) $\tau_2=(\nu_1,\nu_2,\nu_3,y,x)$, $\tau_3=(\nu_2,\nu_3,y,x,\nu_1)$ y $\tau_4=(\nu_3,y,x,\nu_1,\nu_2)$ son trayectorias dirigidas de longitud máxima de D que contienen a x , no inician en x y también contienen a y . Por lo tanto $\ell(\tau_1)=\ell(\tau_2)=\ell(\tau_3)=\ell(\tau_4)=5$.

En consecuencia x satisface la propiedad $\mathcal{P}_D$.

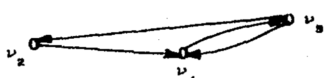
SUBDIGRAFICA DE D INDUCIDA POR S (D[S]) . Sea D una digráfica , V(D) y A(D) denotaran el conjunto de vértices y flechas de D respectivamente . Para cualquier subconjunto $S \subseteq V(D)$. Entonces la subdigráfica de D inducida (generada) por S es aquella cuyo conjunto de vértices es igual al conjunto S y el conjunto de flechas esta constituido por las flechas que tienen como vértices a los elementos de S.

D:

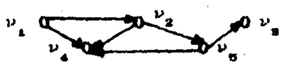


Sea $S=\{\nu_2,\nu_3,\nu_4\}$, entonces la subdigráfica de D inducida por S es la siguiente:

D[S]:

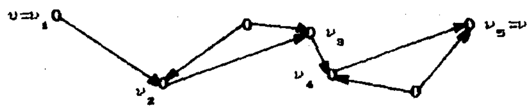


TAMAÑO DE UNA DIGRAFICA D (q) corresponde a la cardinalidad del conjunto de flechas de D $\therefore$ q = cardinalidad de A(D).

D: 

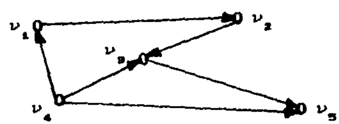
$\rightarrow$ q = 6 .

TRAYECTORIA DIRIGIDA DE UNA DIGRAFICA D (τ). Una υ-ν trayectoria dirigida es un υ-ν paseo en el cual los vértices no se repiten (por lo tanto, tampoco se repiten las flechas). Además las flechas deben tener la misma dirección , es decir, si los vértices ν_i, ν_{i+1} estan en la trayectoria entonces la flecha $(\nu_i,\nu_{i+1}) \in A(\tau)$. Con $\tau=(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\ldots,\nu_i,\nu_{i+1},\ldots,\nu_n)$.



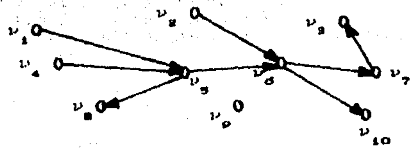
υ-ν es una trayectoria dirigida donde se sigue la secuencia siguiente $\tau = (\upsilon=\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5=\nu)$.

TRAYECTORIA DIRIGIDA CON ORIGEN EN υ. es un υ-ν paseo cuya primer flecha es (υ,ν_i) en el que no se repiten vértices y por lo tanto tampoco se repiten flechas . Todas las flechas tienen el mismo sentido .

D: 

$\tau_1=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ es una trayectoria dirigida con origen en ν_1 .
$\tau_2=(\nu_4,\nu_3,\nu_5)$ es una trayectoria dirigida con origen en ν_4 .
$\tau_3=(\nu_2,\nu_3,\nu_5)$ es una trayectoria dirigida con origen en ν_3 .

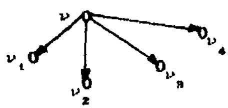
TRAYECTORIA DIRIGIDA DE LONGITUD MAXIMA EN UNA DIGRAFICA D (λ $(\tau) = \lambda$)
Sea D(V(D),A(D)) una digráfica . Entonces se dice que τ es una trayectoria dirigida de longitud máxima cuando, la longitud de cualquier otra trayectoria dirigida en D es menor o igual que la longitud de la trayectoria τ .

D: 

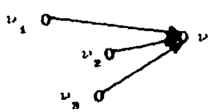
$\tau_1=(\nu_2,\nu_6)$ es una trayectoria dirigida de longitud 2
$\tau_2=(\nu_1,\nu_5,\nu_6)$ es una trayectoria dirigida de longitud 3
$\tau_3=(\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_{10})$ es una trayectoria dirigida de longitud 4
$\tau_4=(\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_9)$ es una trayectoria dirigida de longitud 5

Por lo tanto τ_4 es una trayectoria dirigida de longitud máxima e igual a 5 .

<u>VECINDAD EXTERIOR</u> ($\Gamma_D^+(\nu)$) **de un vértice ν en la digráfica D.** Si ν es un vértice de una digráfica D, entonces la vecindad exterior del vértice ν es el conjunto de vértices adyacentes desde ν, por lo tanto $\Gamma_D^+(\nu)=\{ \nu_i \in V(D) \ / \ (\nu,\nu_i) \in A(D) \}$.

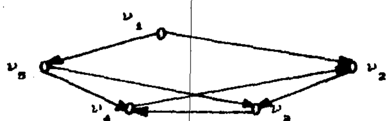
D:  → $\Gamma_D^+(\nu)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3, \nu_4\}$
ν_i es adyacente desde ν.

<u>VECINDAD INTERIOR</u> ($\Gamma_D^-(\nu)$) **de un vértice ν en la digráfica D.** Si ν es un vértice de una digráfica D, entonces la vecindad interior del vértice ν es el conjunto de vértices adyacentes hacia ν, por lo tanto $\Gamma_D^-(\nu)=\{ \nu_i \in V(D) \ / \ (\nu_i,\nu) \in A(D) \}$.

D:  → $\Gamma_D^-(\nu) = \{ \nu_1,\nu_2,\nu_3\}$
ν_i es adyacente a ν.

<u>VERTICES ADYACENTES EN UNA DIGRAFICA</u> D . Dos vértices υ y ν son adyacentes si $\{ (\upsilon,\nu), (\nu,\upsilon) \} \cap A(D) \neq \emptyset$, es decir , si al menos existe una flecha entre ambos vértices.
Si $(\upsilon,\nu) \in A(D)$ entonces se dice que υ es adyacente hacia ν y que ν es adyacente desde υ.

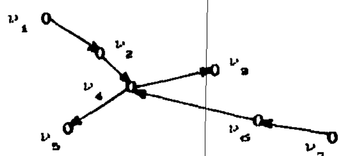
D:



$V(D)=\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5\}$ y los vértices adyacentes son ν_1 con ν_2 ν_2 con ν_3, ν_5 con ν_4, ν_4 con ν_2, ν_3 con ν_4, ν_5 con ν_3 y ν_1 con ν_5.

<u>VERTICES INICIALES</u> (I(D)) de las trayectorias dirigidas de longitud máxima de una digráfica D. Es el conjunto de los vértices que dan origen a las trayectorias dirigidas de longitud máxima . $\therefore$ $I(D)=\{\nu_i \ / \ \tau_j=(\nu_i,\ldots,\nu_n)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de D $\}$.

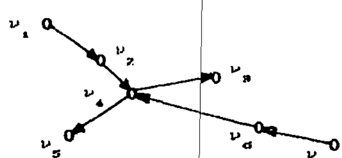
D:



$\rightarrow$ $I(D)=\{\nu_1,\nu_7\}$

<u>VERTICES TERMINALES</u> (T(D)) de las trayectorias dirigidas de longitud máxima de una digráfica D . Es el conjunto de los vértices donde finalizan las trayectorias dirigidas de longitud máxima. $\therefore$ $T(D)=\{ \nu_i \ / \ \tau_j=(\nu_1,\ldots,\nu_i)$ es una trayectoria dirigida de longitud máxima de la digráfica D $\}$.

D:



$\rightarrow$ $T(D)=\{\nu_3,\nu_4\}$

REFERENCIAS

REFERENCIAS

[1] M. BEHZAD, G. Chartrand, L. Lesniak Foster Graphs y Digraphs. Copyright 1979.

[2] C. BERGE . Graphs (North-Holland , 1985) .

[3] J. A. BONDY and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, (The Mac Millan Press Ltd, London, 1976) .

[4] P. DUCHET and H. Meyniel. Une generalization du Theoreme de Richardson sur l' existence de noyaux dans les graphes orientes . Discrete Mathematics 43 (1983), 21-27.

[5] H. GALEANA-SANCHEZ and V. Neumann-Lara. On Kernels and semikernels of digraphs. Discrete Mathematics 48 (1984) 67-76 .

[6] H. GALEANA-SANCHEZ and V. Neumann-Lara. On Kernel-perfect critical digraphs. Discrete Mathematics 59 (1986) 257-265.

[7] H.GALEANA-SANCHEZ y Hugo A. Rincón-Mejía. Some Results On Independent Sets and Longest Directed Paths. (Del Instituto de Matemáticas y Departamento de Matemáticas respectivamente) Facultad de Ciencias ,U.N.A.M.,1-8.

[8] T. GALLAI. On directed paths and circuits , in Theory of Graphs. Proc. Colloq. Tihany, 1966 (eds. P. Erdös and G. Katona). Academic Press, New-York (1966), 115-118.

[9] T. GALLAI , A. N. Milgram, Verallgemeine rung eines graphen Theoritischen Satzes von Rédei, Acta Sc. Math. 21, 1960, 181-186.

[10] J. M. LABORDE, C. Payan and N. H. Huong. Independent sets and longest directed paths in digraphs. Graphs and Other Combinatorial Topics: Proceedings of the Third Czechoslovak Symposium on Graph Theory (1982) 173-177.

[11] B. ROY. Nombre chromatique et plus longs chemins d' un graphe Rev. Francaise Informat. Recherche Operationelle 1 (1967) No. 5 , 129-132. (Série Rouge, 1, 1967, 127-132.