21

2E

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EL TEOREMA DE LOWENHEIM-SKOLEM Y ALGUNAS DE SUS VARIANTES".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

P R E S E N T A :

FERNANDO RENE MARTINEZ ORTIZ

MEXICO, D.F. 1995

FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"El Teorema de Löwenheim-Skolem y Algunas de sus Variantes."

realizado por Fernando René Martínez Ortiz

con número de cuenta 8707712-4 , pasante de la carrera de Matemático.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario M. en C. Rafael Rojas Barbachano.

Propietario M. en C. José Alfredo Amor Montaño.

Propietario M. en C. Carlos Torres Alcaraz.

Suplente M. en C. María Asunción Preisser Rodríguez.

Suplente Mat. Concepción Ruíz Ruíz-Funes.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica.

A Sonia Olivares Moreno.

Luz de Luna iluminándome eternamente.

A mis padres Tomás Martínez Arroyo y Victoria Ortiz de Martínez.

Por su infinita paciencia y comprensión.

A mis hermanos: Sergio, Alfonso, Luis y Víctor

Por los fascinantes momentos que hemos pasado juntos.

A Rafael Rojas Barbachano.

Por su confianza y apoyo en todo momento.

A Adriana, Gabriela y Ximena.

Por su maravillosa amistad.

A Favio, Job, Leopoldo y Luis Enrique.

Por todos esos años.

INDICE.

INTRODUCCIÓN.

El conjunto de teoremas que es llamado generalmente *Teorema de Löwenheim – Skolem* es un grupo de resultados que conciernen al tamaño (en el sentido de cardinalidad) de dominios de interpretaciones que satisfacen conjuntos de fórmulas (o de enunciados) y los cuales tienen esquemáticamente la forma: Si existe una interpretación con la propiedad (semántica) *, entonces hay una interpretación con la propiedad (semántica) ** cuyo dominio tiene cierta cardinalidad.

Este tipo de teorema aparece por primera vez en 1915 publicado por Leopold Löwenheim en la siguiente forma: *Si existe una interpretación en la cual un enunciado σ es verdadero, entonces existe una interpretación en la cual σ es verdadero, cuyo dominio es contable.* La aparición de este resultado marcó el principio de una nueva fase en el desarrollo de la Lógica Matemática al no sólo llevar a cabo los trabajos de "formalización" de la Matemática utilizando Sistemas Formales sino además el poder demostrar resultados acerca de estos últimos (Recordemos que los "Principia Mathematica" de Whitehead y Russell aparecieron en 1913).

En 1919 Thoralf Skolem extendió el resultado de Löwenheim a un conjunto Γ de enunciados posiblemente infinito (en un lenguaje contable). Con esto, Skolem intentaba demostrar la inutilidad de estructuras con dominios incontables; así que, realmente, Skolem jamás creyó en la parte ascendente del Teorema de Löwenheim-Skolem debida a Tarski y la cual recibe este nombre precisamente porque el esquema de la afirmación es típico de esta clase de teoremas.

En la actualidad el Teorema de Löwenheim-Skolem está enunciado de tantas formas diferentes en los diversos textos que uno de los principales propósitos de esta tesis es revisar las diferencias e implicaciones entre las distintas formas en que aparece enunciado dicho teorema para la Lógica de Primer Orden, lo cual será tratado en el Capítulo Dos.

En el Capítulo Tres revisaremos dentro de los lenguajes infinitarios (lenguajes en los cuales se admiten expresiones de longitud infinita y las cuales tienen un impresionante poder de expresión) algunas generalizaciones del Teorema de Löwenheim-Skolem las cuales necesitan una gran cantidad de hipótesis para poder cumplirse.

CAPÍTULO 1.- PRELIMINARES.

En este Capítulo desarrollaremos las definiciones básicas de Teoría de Conjuntos y Lógica necesarias para poder trabajar con el Teorema de Löwenheim-Skolem en lenguajes infinitarios y además revisaremos algunos teoremas de la Lógica de Primer Orden que se utilizan para la demostración de dicho teorema en ésta Lógica. La mayor parte de las demostraciones no se darán aquí pero pueden ser encontradas en textos de introducción a la Lógica Matemática y de Teoría de Conjuntos.

1.1.- CARDINALES.

DEFINICIÓN.- α es un (*número*) *ordinal* si y sólo si

i) α es transitivo.

ii) $\langle \alpha, \in \rangle$ es un conjunto bien ordenado.

Denotaremos como OR a la clase de todos los ordinales. OR es una clase propia bien ordenada por la relación $\in$.

DEFINICIÓN.- $\alpha \in$OR es un *ordinal sucesor* si y sólo si existe $\beta \in$OR tal que

$$\alpha = \beta \cup \{\beta\} = \beta + 1.$$

DEFINICIÓN.- α $\in$OR es un *ordinal límite* (en símbolos $\lim(\alpha)$) si y sólo si $\alpha \neq 0$ y para todo $\beta \in$OR $\alpha \neq \beta + 1$.

DEFINICIÓN.- α $\in$OR es un *ordinal inicial* si y sólo si α no puede ser puesto en correspondencia biunívoca con un ordinal β tal que $\beta < \alpha$.

Nosotros identificaremos cardinales con ordinales iniciales. Utilizando el Axioma de Elección se puede probar que para cualquier conjunto x existe un ordinal inicial único que puede ser puesto en correspondencia biunívoca con x. A éste lo denotaremos con |x| y lo llamaremos el número cardinal de x.

Denotaremos como CAR a la clase de todos los cardinales infinitos y como CAR' a la de todos los cardinales.

DEFINICIÓN.- Si κ $\in$CAR' , κ^+ denotará el mínimo cardinal mayor que κ.

DEFINICIÓN.- ω_α es definido por recursión transfinita sobre $\alpha \in$ OR como:

i) $\omega_0 = \omega$.

ii) $\omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$.

iii) $\omega_\gamma = \sup\{\omega_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ si $\lim(\gamma)$.

Donde $\omega \in$ OR es el conjunto de números naturales definido a la Von Neumann. A ω_α lo denotaremos también como $\aleph_\alpha$.

DEFINICIÓN.- κ $\in$CAR es un *cardinal sucesor* si y sólo si es de la forma $\omega_{\beta+1}$; en otro caso es un *cardinal límite*.

DEFINICIÓN.- Sean α, $\beta \in$ OR y $f : \alpha \to \beta$, f *mapea* α *cofinalmente* si y sólo si ran(f) no está acotado en β.

DEFINICIÓN.- Dado $\beta \in$ OR la *cofinalidad de* β (en símbolos cf(β)) es el mínimo α tal que existe un mapeo desde α cofinalmente en β.

DEFINICIÓN.- κ $\in$CAR es *singular* si y sólo si cf(κ) $< \kappa$. Si cf(κ) $= \kappa$, κ es llamado *regular*. Sing y Reg denotarán las clases respectivamente.

DEFINICIÓN.- Sea $\kappa \in$ CAR. κ es un *cardinal inaccesible* si y sólo si κ $\in$Reg y para todo $\lambda < \kappa$ se tiene $2^\lambda < \kappa$. κ es un *cardinal débilmente inaccesible* si y sólo si κ $\in$Reg y κ es un cardinal límite. In y WIn denotarán las clases respectivamente.

Dados κ, λ $\in$CAR, al cardinal

$$\sum_{\substack{\nu \in \mathrm{CAR}' \\ \nu < \lambda}} \kappa^\nu$$

lo denotaremos como $\kappa^{<\lambda}$.

1.2.-DESCRIPCIÓN DEL LENGUAJE E INTERPRETACIONES.

DEFINICIÓN.- Un *tipo de semejanza* ρ es el conjunto de símbolos:

$$\rho = \bigcup_{n\in\omega^*} P_n \cup \bigcup_{n\in\omega^*} F_n \cup C.$$

y donde para cada $n \in \omega^* = \omega \setminus \{0\}$

i) Si $x \in P_n$, x es un símbolo llamado *letra predicativa* de aridad n.

ii) Si $x \in F_n$, x es un símbolo llamado *letra funcional* de aridad n.

iii) Si $x \in C$, x es un símbolo llamado *constante individual.*

DEFINICIÓN.- Un *lenguaje (formal de Primer Orden) de tipo* ρ, es el siguiente conjunto de símbolos:

$$L_\rho = \rho \cup \{v_n \mid n \in \omega\} \cup \{\approx\} \cup \{\neg, \vee\} \cup \{\exists\} \cup \{),(,'\}.$$

Denotaremos como VAR al conjunto $\{v_n \mid n \in \omega\}$ de todas las variables.

DEFINICIÓN.- Una *ρ-expresión* es una sucesión finita de símbolos de L_ρ.

DEFINICIÓN.- Al conjunto de ρ-expresiones lo denotaremos E_ρ.

DEFINICIÓN.- $TERM_\rho$, es el menor conjunto $A \subseteq E_\rho$ tal que

i) $\{v_n \mid n \in \omega\} \cup C \subseteq A$.

ii) Si $f \in F_n$, $n \in \omega^*$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in A$, entonces $f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in A$.

DEFINICIÓN.- τ es un *ρ-término* si y sólo si $\tau \in TERM_\rho$

DEFINICIÓN.- $\tau \in TERM_\rho$ es *cerrado* si y sólo si en τ no aparecen variables; en otro caso τ es *abierto.*

DEFINICIÓN.- Si $P \in P_n$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in TERM_\rho$ entonces tanto $(\tau_1 \approx \tau_2)$ como $P(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ son *fórmulas atómicas.*

DEFINICIÓN.- El conjunto de las *fórmulas (bien formadas) de tipo ρ*, $FORM_\rho$, es el menor conjunto $A \subseteq E_\rho$ tal que

i) $\{\alpha \mid \alpha$ es una fórmula atómica$\} \subseteq A$.

ii) Si $\alpha, \beta \in A$ entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta) \in A$.

iii) Si $\alpha \in A$ y $v_i \in \{v_n \mid n \in \omega\}$ entonces $(\exists v_i \alpha) \in A$.

Sea ρ un tipo de semejanza.

DEFINICIÓN.- $\mathfrak{R}$ es una *interpretación de L_ρ* o simplemente ρ-interpretación si y sólo si $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ donde

i) A es un conjunto no vacio.

ii) I es una función con dominio ρ y tal que:

a) Si $x \in P_n$ entonces $I(x) \subseteq A^n$.

b) Si $x \in F_n$ entonces $I(x) : A^n \to A$.

c) Si $x \in C$ entonces $I(x) \in A$.

Sea $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ una ρ-interpretación, algunas notaciones que usaremos son:

i) $x \in \rho$, $x^{\mathfrak{R}} \rightleftharpoons I(x)$.

ii) Si la imagen de I es finita, por ejemplo $\{x_1^{\mathfrak{R}}, \dots, x_n^{\mathfrak{R}}\}$ entonces

$$\langle A, x_1^{\mathfrak{R}}, \dots, x_n^{\mathfrak{R}} \rangle \rightleftharpoons \langle A, I \rangle.$$

iii) ${}^{\omega}A = \{s \mid s : \omega \to A\}$.

iv) Si $s \in {}^{\omega}A$, $s_i \rightleftharpoons s(i)$ donde $i \in \omega$.

DEFINICIÓN.- Si $s \in {}^{\omega}A$ y $a \in A$, se define la sucesión $s(i/a)$ como

$$s(i/a)(n) = \begin{cases} s_n & \text{si } n \neq i \\ a & \text{si } n = i \end{cases}$$

A la sucesión $[s(i/a)](j/b)$ la denotaremos como $s(i/a, j/b)$.

DEFINICIÓN.- La interpretación de un término τ en una estructura $\mathfrak{R}$ bajo una asignación s denotada por $\tau^{\mathfrak{R}}[s]$ se define recursivamente como:

- $\tau \in \mathrm{VAR} \cup C$

  i) Si $\tau = v_i \in \mathrm{VAR}$, $\tau^{\mathfrak{R}}[s] = v_i^{\mathfrak{R}}[s] = s_i$.

  ii) Si $\tau = c \in C \subseteq \rho$, $\tau^{\mathfrak{R}}[s] = c^{\mathfrak{R}}[s] = c^{\mathfrak{R}}$.

- Si $\tau = F(\tau_1, ..., \tau_n)$ donde $n \in \omega^*$, $F \in F_n$ y $\tau_1, ..., \tau_n \in \mathrm{TERM}_\rho$ entonces

$$\tau^{\mathfrak{R}}[s] = F^{\mathfrak{R}}(\tau_1^{\mathfrak{R}}[s], ..., \tau_n^{\mathfrak{R}}[s]).$$

DEFINICIÓN.- Dados ρ un tipo de semejanza, $\mathfrak{R}=\langle A,I\rangle$ una ρ-interpretación, $s \in {}^{\omega}A$ y $\alpha \in \mathrm{FORM}_\rho$, definimos la relación $\mathfrak{R}$ *satisface a la fórmula* α *con la sucesión s*, $\mathfrak{R} \models \alpha[s]$, en forma recursiva como sigue:

- Sean $\tau_1, ..., \tau_n \in \mathrm{TERM}_\rho$

  i) $\mathfrak{R} \models (\tau_1 \approx \tau_2)[s]$ si y sólo si $\tau_1^{\mathfrak{R}}[s] = \tau_2^{\mathfrak{R}}[s]$.

  ii) $\mathfrak{R} \models P(\tau_1, ..., \tau_n)[s]$ si y sólo si $\langle \tau_1^{\mathfrak{R}}[s], ..., \tau_n^{\mathfrak{R}}[s]\rangle \in P^{\mathfrak{R}}$.

- Sean $\varphi, \psi \in \mathrm{FORM}_\rho$

  i) $\mathfrak{R} \models (\neg\psi)[s]$ si y sólo si $\mathfrak{R} \not\models (\psi)[s]$.

  ii) $\mathfrak{R} \models (\varphi \vee \psi)[s]$ si y sólo si $\mathfrak{R} \models \varphi[s]$ ó $\mathfrak{R} \models \psi[s]$.

  iii) $\mathfrak{R} \models (\exists v_i \varphi)[s]$ si y sólo si hay $a \in A$ tal que $\mathfrak{R} \models (\varphi)[s(i/a)]$.

DEFINICIÓN.- Sean $\alpha \in FORM_\rho$ y $\Re$ una ρ-interpretación

α es *verdadera* en $\Re$, en símbolos $\Re \models \alpha$, si y sólo si cualquiera sea $s \in {}^\omega A$ se tiene $\Re \models \alpha[s]$.

α es *falsa* en $\Re$ si y sólo si cualquiera sea $s \in {}^\omega A$ se tiene $\Re \not\models \alpha[s]$.

DEFINICIÓN.- Sea $\alpha \in FORM_\rho$

α es *Universalmente Verdadera*, en símbolos $\models \alpha$, si y sólo si cualquiera sea $\Re$ una ρ-interpretación, α es verdadera en $\Re$.

α es *Universalmente Falsa* si y sólo si cualquiera sea $\Re$ una ρ-interpretación, α es falsa en $\Re$.

DEFINICIÓN.- Sean $\alpha \in FORM_\rho$ e $i \in \omega$. En la fórmula $(\exists v_i \alpha)$ a la fórmula α le llamaremos el *alcance del cuantificador* $\exists v_i$.

DEFINICIÓN.- Sea $\alpha \in FORM_\rho$. Diremos que una ocurrencia de la variable v_i en α es *acotada* si y sólo si tal ocurrencia

i) Es la variable de un cuantificador $\exists$ ó

ii) Está dentro del alcance de un cuantificador $\exists v_i$.

en otro caso diremos que la ocurrencia es *libre*. $VL(\alpha)$ denotará el conjunto de todas las variables libres en la fórmula α

DEFINICIÓN.- Si $\varphi \in FORM_\rho$ entonces $\varphi(v_1,\ldots,v_n)$ denotará que $VL(\varphi) = \{v_1,\ldots,v_n\}$.

DEFINICIÓN.- Sea $\alpha \in FORM_\rho$, α es un *ρ-enunciado* si y sólo si α no tiene ocurrencias libres de variables. Al conjunto de todos los ρ-enunciados lo denotaremos por L^e_ρ.

PROPOSICIÓN 1.1.- Sea $\tau \in TERM_\rho$, $\alpha \in FORM_\rho$, $\mathfrak{R} = \langle A, I\rangle$ una ρ-interpretación y $s, s' \in {}^\omega A$

i) Si $s_i = s_i'$ para toda i, tal que v_i ocurre en τ entonces $\tau^{\mathfrak{R}}[s] = \tau^{\mathfrak{R}}[s']$.

ii) Si $s_i = s_i'$ para toda i, tal que v_i ocurre libre en α entonces

$$\mathfrak{R} \models (\alpha)[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{R} \models (\alpha)[s'].$$

COROLARIO.- Sea σ un ρ-enunciado y $\mathfrak{R}$ una ρ-estructura, entonces

i) Para cualesquiera $s, s' \in {}^\omega A$, $\mathfrak{R} \models (\sigma)[s]$ si y sólo si $\mathfrak{R} \models (\sigma)[s']$.

ii) $\mathfrak{R} \models \sigma$ si y sólo si hay $s \in {}^\omega A$ tal que $\mathfrak{R} \models (\sigma)[s]$.

iii) $\mathfrak{R} \models \sigma$ ó $\mathfrak{R} \models (\neg\sigma)$.

DEFINICIÓN.- Sean $\tau_0, \tau \in TERM_\rho$, $v \in VAR$. La *sustitución de τ en lugar de cada ocurrencia de la variable v en τ_0*, $(\tau_0)^v_\tau$ se define recursivamente como

- Si $\tau_0 = v_i$, $(v_i)^v_\tau = \begin{cases} \tau & \text{si } v = v_i \\ v_i & \text{si } v \neq v_i \end{cases}$

Si $\tau_0 = c$. $(c)^v_\tau = c$.

- Si $\tau_0 =$ $F(\tau_1, ..., \tau_n)$ donde $n > 0$. $F \in F_n$ y $\tau_1, ..., \tau_n \in$TERM$_\rho$ entonces

$$(F(\tau_1, ..., \tau_n))^v_\tau = F((\tau_1)^v_\tau, ..., (\tau_n)^v_\tau).$$

DEFINICIÓN.- Sea $\tau \in$ TERM$_\rho$, $v \in$VAR y $\varphi \in$ FORM$_\rho$. La *sustitución de τ en lugar de cada ocurrencia libre de la variable v en φ*, en símbolos $(\varphi)^v_\tau$ ó $\varphi(v/\tau)$, se define recursivamente como

- Sean $\tau_1, ..., \tau_n \in$TERM$_\rho$

  i) $(\tau_1 \approx \tau_2)^v_\tau = ((\tau_1)^v_\tau \approx (\tau_2)^v_\tau)$.

  ii) $(P(\tau_1, ..., \tau_n))^v_\tau = P((\tau_1)^v_\tau, ..., (\tau_n)^v_\tau)$.

- Sean $\alpha, \beta \in$ FORM$_\rho$

  i) $(\neg\alpha)^v_\tau = (\neg(\alpha)^v_\tau)$.

  ii) $(\alpha \vee \beta)^v_\tau = ((\alpha)^v_\tau \vee (\beta)^v_\tau)$

  iii) $$(\exists v_i \alpha)^v_\tau = \begin{cases} (\exists v_i \alpha) & \text{si } v = v_i \\ (\exists v_i((\alpha)^v_\tau) & \text{si } v \neq v_i \text{ y } v_i \text{ no ocurre en } \tau \\ (\exists z((\alpha)^{v_i}_z)^v_\tau) & \text{si } v \neq v_i \text{ y } v_i \text{ ocurre en } \tau \end{cases}$$

donde en el último caso z es una variable nueva que no ocurre en α ni en τ y es distinta de v y de v_i.

TEOREMA DE SUSTITUCIÓN.- Sean $\tau_0, \tau \in$ TERM$_\rho$. $\alpha \in$ FORM$_\rho$. $\mathfrak{A}$ una ρ-estructura y $s \in {}^\omega A$ entonces

i) $\tau_0^{\mathfrak{R}}[s(i/\tau^{\mathfrak{R}}[s])] = ((\tau_0)_{\tau}^{v_i})^{\mathfrak{R}}[s]$.

ii) $\mathfrak{R} \models \alpha[s(i/\tau^{\mathfrak{R}}[s])]$ si y sólo si $\mathfrak{R} \models ((\alpha)_{\tau}^{v_i})[s]$.

El Teorema de Sustitución nos da la posibilidad de realizar sustituciones sintácticas siempre y cuando se realicen sustituciones semánticas y viceversa.

Como notaciones tendremos que $\tau(\mathfrak{R})$ denotará el tipo de semejanza de $\mathfrak{R}$; si $\Sigma \subseteq$ FORMρ entonces $\tau(\Sigma)$ denotará el tipo de semejanza definido por todos los símbolos de ρ que ocurren en fórmulas de Σ. Si $\Sigma = \{\varphi\}$ escribiremos $\tau(\varphi)$ en lugar de $\tau(\{\varphi\})$.

DEFINICIÓN.- Sean $\mathfrak{R} = \langle A,I\rangle$ y $\mathfrak{I} = \langle B,J\rangle$ dos ρ-estructuras, decimos que $\mathfrak{R}$ es una *subestructura* de $\mathfrak{I}$, lo que denotaremos $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{I}$ si y sólo si

i) $A \subseteq B$.

ii) Si $P \in R_n \subseteq \rho$ entonces $P^{\mathfrak{R}} = P^{\mathfrak{I}} \cap A^n$.

iii) Si $F \in F_m \subseteq \rho$ entonces $F^{\mathfrak{R}} = F^{\mathfrak{I}} |_{A^m}$.

iv) Si $c \in C \subseteq \rho$ entonces $c^{\mathfrak{R}} = c^{\mathfrak{I}}$.

DEFINICIÓN.- Sean $\mathfrak{R} = \langle A,I\rangle$ una ρ-estructura y $\mathfrak{I} = \langle B,J\rangle$ una ρ'-estructura, decimos que $\mathfrak{R}$ es el *reducto* de $\mathfrak{I}$ a ρ o bien que $\mathfrak{I}$ es una expansión de $\mathfrak{R}$ a ρ' si y sólo si

i) $\rho \subseteq \rho'$.

ii) $A = B$.

iii) $I = J|_{\rho}$

DEFINICIÓN.- Sean $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$ y $\mathfrak{I} = \langle B,J \rangle$ dos ρ-estructuras, decimos que h es un *homomorfismo* de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{I}$ si y sólo si

i) h es una función de A en B; $h : A \rightarrow B$.

ii) Para cada $P \in R_n \subseteq \rho$ y cada $a_1,\dots,a_n \in A$, $\langle a_1,\dots,a_n \rangle \in P^{\mathfrak{R}}$ si y sólo si

$$\langle h(a_1),\dots,h(a_n) \rangle \in P^{\mathfrak{I}}.$$

iii) Para cada $F \in F_m \subseteq \rho$ y cada $a_1,\dots,a_m \in A$,

$$h(F^{\mathfrak{R}}(a_1,\dots,a_m)) = F^{\mathfrak{I}}(h(a_1),\dots,h(a_m)).$$

iv) Para cada $c \in C \subseteq \rho$, $h(c^{\mathfrak{R}}) = c^{\mathfrak{I}}$.

DEFINICIÓN.- Sea h un homomorfismo de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{I}$, entonces

i) h es un *monomorfismo* si y sólo si h es inyectiva.

ii) h es un *epimorfismo* si y sólo si h es sobre.

iii) h es un *isomorfismo* si y sólo si h es biyectiva.

TEOREMA DEL HOMOMORFISMO.- Sea h un homomorfismo de $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$ en $\mathfrak{I} = \langle B,J \rangle$ y $s \in {}^{\omega}A$, $h o s \in {}^{\omega}B$ denota la composición de funciones. Entonces para todo término τ y toda fórmula α se tiene:

i) $h(\tau^{\mathfrak{R}}[s]) = \tau^{\mathfrak{I}}[hos]$.

ii) Si α no tiene cuantificadores ni símbolo $\approx$ entonces

$$\mathfrak{R} \models \alpha[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{I} \models \alpha[h \circ s].$$

iii) Si h es un monomorfismo y α no tiene cuantificadores, entonces

$$\mathfrak{R} \models \alpha[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{I} \models \alpha[h \circ s].$$

iv) Si h es un epimorfismo y α no tiene símbolo $\approx$ entonces

$$\mathfrak{R} \models \alpha[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{I} \models \alpha[h \circ s].$$

v) Si h es un isomorfismo entonces

$$\mathfrak{R} \models \alpha[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{I} \models \alpha[h \circ s].$$

Veamos la razón de las restricciones:

Sean $\mathfrak{R} = \langle \mathbf{N},<,0 \rangle$ y $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{Z},<,0 \rangle$. Es fácil checar que $i : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ (la función inclusión del conjunto de números naturales $\mathbf{N}$ en el conjunto de números enteros $\mathbf{Z}$) es un monomorfismo. Tomando $\alpha = \exists v(v < 0)$ tenemos que $\mathfrak{R} \not\models \alpha$ pero $\mathfrak{I} \models \alpha$.

Sean $\mathfrak{R} = \langle \mathbf{Z},<,0\rangle$ y $\mathfrak{I} = \langle \mathbf{N},<,0\rangle$. Tomemos $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ tal que $h(z) = |z|$ tenemos que h es un epimorfismo y además que $\mathfrak{R} \models \neg(v_i \approx v_j)[s(i/5, j/-5)]$ pero $\mathfrak{I} \not\models \neg(v_i \approx v_j)[h \circ s(i/5, j/-5)]$.

DEFINICIÓN.- Si para cualquier ρ-enunciado σ sucede que $\mathfrak{R} \models \sigma$ si y sólo si $\mathfrak{I} \models \sigma$, decimos entonces que $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{I}$ son elementalmente equivalentes y lo denotamos $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{I}$.

DEFINICIÓN.- Sea $\mathfrak{R} = \langle A, I\rangle$ una ρ-estructura. la *teoría de* $\mathfrak{R}$, es el conjunto

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{R}) = \{\sigma \mid \sigma \text{ es un } \rho\text{-enunciado y } \mathfrak{R} \models \sigma\}.$$

DEFINICIÓN.- Sea $\Sigma \subseteq L^e_\rho$ y $\mathfrak{R}$ una ρ-estructura. $\mathfrak{R}$ es un *modelo* de Σ si y sólo si para toda $\sigma \in \Sigma$, $\mathfrak{R} \models \sigma$ y lo denotaremos como $\mathfrak{R} \models \Sigma$ ó como $\mathfrak{R} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$.

DEFINICIÓN.- a) Sea $\Sigma \subseteq L^e_\rho$, Σ es *satisfacible* si y sólo si existe $\mathfrak{R}$ una ρ-estructura tal que $\mathfrak{R} \models \Sigma$.

b) Σ es *finitamente satisfacible* si y sólo si cualquiera sea $\Gamma \subseteq \Sigma$. Γ finito, se tiene que Γ es satisfacible.

DEFINICIÓN.- Sean $\Sigma \subseteq L^e_\rho$ y $\sigma \in L^e_\rho$

a) σ es *consecuencia (lógica)* de Σ, en símbolos $\Sigma \models \sigma$, si y sólo si para cada ρ-estructura $\mathfrak{R}$ tal que $\mathfrak{R} \models \Sigma$, se tiene $\mathfrak{R} \models \sigma$.

b) σ es *consecuencia (lógica) finita* de Σ, en símbolos $\Sigma \models_f \sigma$, si y sólo si hay $\Gamma \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Gamma \models \sigma$.

Observación.- Se pueden dar definiciones análogas a las anteriores que no sólo consideren conjuntos de enunciados sino inclusive conjuntos de fórmulas.

DEFINICIÓN.- Sea $\Sigma \subseteq L^e_\rho$

$\Sigma^{\models} = \{\sigma \in L^e_\rho \mid \Sigma \models \sigma\}$.

$\Sigma^{\models_f} = \{\sigma \in L^e_\rho \mid \Sigma \models_f \sigma\}$.

DEFINICIÓN.- Sea $T \subseteq L^e_\rho$

T es *teoria* si y sólo si $T = T^{\models}$.

T es $f -$ *teoria* si y sólo si $T = T^{\models_f}$.

DEFINICIÓN.- Sea $\Sigma \subseteq L^e_\rho$, Σ teoría

Σ es completa si y sólo si para toda $\sigma \in L^e_\rho$ $\Sigma \models \sigma$ ó $\Sigma \models (\neg\sigma)$.

Σ es f-completa si y sólo si para toda $\sigma \in L^e_\rho$ $\Sigma \models_f \sigma$ ó $\Sigma \models_f (\neg\sigma)$.

1.3.-SKOLEMIZACIÓN.

DEFINICIÓN.- a) Sean φ, $\psi \in$ FORM$_\rho$, u $\in$ VAR y f $\in F_{n+k}$, $n+k \in \omega^*$ tal que f no ocurre en ψ. La fórmula

$$\forall v_1 \ldots \forall v_n \varphi(f(v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_k),v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_k)$$

es un *paso de Skolemización* de ψ si ψ es una fórmula de la forma

$$\forall v_1 \ldots \forall v_n \exists u \varphi(u,v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_k)$$

y $w_1,\ldots,w_k \in$ VL(ψ), con $k \geq 0$, $n \geq 0$ pero $n+k \neq 0$.

b) Si ψ tiene la forma $\exists u \varphi(u)$ y $c \in C$ tal que c no ocurre en ψ entonces $(\varphi)^u_c$ es un paso de skolemización de ψ.

DEFINICIÓN.- Sean $\psi \in$ FORM$_\rho$ y φ una fórmula en forma normal prenex tal que $\psi \equiv \varphi$ es decir FNP(ψ) = φ; dada $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ una sucesión de fórmulas tal que $\varphi_1 = \varphi$, φ_n es una fórmula universal pura y φ_{i+1} es un paso de skolemización de φ_i para $i = 1,\ldots, n$-1, entonces decimos que φ_n es una fórmula en forma normal de Skolem para satisfacción de ψ, en símbolos, FNSS(ψ).

LEMA DE EXPANSIÓN.- Sea $\varphi \in$ FORM$_\rho$ entonces

a) Para toda $\Re = \langle A,I \rangle$ existe una expansión $\Im = \langle A,J \rangle$ tal que para cualquier $s \in {}^\omega A$

$$\Re \models \varphi[s] \text{ si y sólo si } \Im \models \text{FNSS}(\varphi)[s].$$

b) Para toda $\Re$ del tipo de FNSS(φ) y toda $s \in {}^\omega A$ si $\Re \models$ FNSS(φ)[s] entonces

$$\Re \models \varphi[s].$$

Demostración.- Sean $\varphi_1, ..., \varphi_m$ tal que φ_m = FNSS(φ) con $\varphi = \varphi_1$ en forma prenex. Dada φ_i con $i = \{1,...,m\text{-}1\}$ tenemos los siguientes casos posibles:

i) Si $\varphi_i = \forall v_1 ... \forall v_{n_i} \exists v \beta_i$ con $\beta_i \in FORM_\rho$, $w_1,...,w_{k_i} \in VL(\varphi_i)$ y $n_i + k_i > 0$, entonces

$$\varphi_{i+1} = \forall v_1 ... \forall v_{n_i} (\beta_i)^{v}_{f_i(v_1,...,v_{n_i},w_1,...,w_{k_i})}$$

donde f_i es un símbolo funcional de aridad $n_i + k_i$ que no ocurre no sólo en φ_i como lo habíamos tomado para la definición de "paso de Skolemización", sino que f_i no pertenece tampoco a $\tau(\Re_i)$ ya que nosotros deseamos darle una interpretación nueva ($\Re_1 = \Re$ y $\Re_{i+1}$ la definiremos a partir de $\Re_i$ como en la demostración de a) abajo).

ii) Si $\varphi_i = \exists v \beta_i$ y $VL(\varphi_i) = \emptyset$ entonces

$$\varphi_{i+1} = (\beta_i)^{v}_{c_i}$$

nuevamente, a c_i le queremos dar una interpretación nueva de donde c_i será un símbolo de constante que no pertenezca a $\tau(\Re_i)$.

a) Por lo dicho anteriormente podemos suponer $\Re_i$ del tipo $\tau(\varphi_i)$. Para cada $\bar{a} \in A^{n_i+k_i}$, definimos

$$X_{\bar{a}} = \{d \in A \mid \Re_i \models \beta_i[d,\bar{a}]\} \subseteq A.$$

$$X_0 = \{d \in A \mid \Re_i \models \beta_i[d]\} \subseteq A. \text{ (Para el caso } n_i + k_i = 0)$$

Si $n_i+k_i>0$ definimos (AE) $f_i^{\mathfrak{R}_{i+1}}: A^{n_i+k_i} \to A$ tal que

$$f_i^{\mathfrak{R}_{i+1}}(\bar{a}) = \begin{cases} \text{un elemento de } X_{\bar{a}} & \text{si } X_{\bar{a}} \neq \emptyset \\ \text{un elemento de } A & \text{si } X_{\bar{a}} = \emptyset \end{cases}$$

Si $n_i+k_i=0$ definimos (AE)

$$c_i^{\mathfrak{R}_{i+1}} = \begin{cases} \text{un elemento de } X_0 & \text{si } X_0 \neq \emptyset \text{ (AE)} \\ \text{un elemento de } A & \text{si } X_0 = \emptyset \end{cases}$$

Sea $\mathfrak{R}_{i+1} = \langle \mathfrak{R}_i, f_i^{\mathfrak{R}_{i+1}} \rangle$ si $n_i+k_i>0$ y $\tau(\mathfrak{R}_{i+1}) = \tau(\mathfrak{R}_i) \cup \{f_i\}$ ó
$\mathfrak{R}_{i+1} = \langle \mathfrak{R}_i, c_i^{\mathfrak{R}_{i+1}} \rangle$ si $n_i+k_i=0$ y $\tau(\mathfrak{R}_{i+1}) = \tau(\mathfrak{R}_i) \cup \{c_i\}$.

Dada $s \in {}^{\omega}A$ entonces para ambos casos tenemos

$$\mathfrak{R}_i \models \varphi_i[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{R}_{i+1} \models \varphi_{i+1}[s].$$

de donde, por la transitividad del "si y sólo si" tenemos

$$\mathfrak{R}_1 \models \varphi_1[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{R}_m \models \varphi_m[s].$$

Como $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}$ tomando $\mathfrak{I}$ como $\mathfrak{R}_m$ obtenemos

$$\mathfrak{R} \models \varphi[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{I} \models \text{FNSS}(\varphi)[s].$$

b) Sea $\mathfrak{R}$ del tipo FNSS(φ) y $s \in {}^{\omega}A$. Si $n_i + k_i > 0$ suponemos que $\mathfrak{R} \models \varphi_{i+1}[s]$. de donde para cualesquiera $a_1,\dots,a_{n_i} \in A$

$$\mathfrak{R} \models (\vartheta_i)^{v}_{f_i(v_1,\dots,v_{n_i},w_1,\dots,w_{k_i})}[s(v_k/a_k, w_j/s(w_j))]$$

(donde $s(w_j)$ denotará a s_{r_j} en el caso en que $w_j = v_{r_j}$).

Si y sólo si (por el Teorema de Sustitución)

$$\Re \models (\beta_i)[s(v_k/a_k, w_j/s(w_j), v/f_i^{\Re}(\bar{a}, s(w_j)))]$$

es decir, para cualesquiera $a_1,\ldots,a_n \in A$, existe $d \in A$ tal que

$$\Re \models (\beta_i)[s(v_k/a_k, w_j/s(w_j), v/d)]$$

por lo tanto

$$\Re \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \exists v \beta_i[s]$$

es decir

$$\Re \models \varphi_i[s].$$

Si $n_i + k_i = 0$ suponemos $\Re \models \varphi_{i+1}[s]$. Entonces $\Re \models (\beta_i)^v_{c_i}[s]$ y por el Teorema de Sustitución $\Re \models \beta_i[s(v/c_i^{\Re})]$, es decir existe $d \in A$ tal que $\Re \models \beta_i[s(v/d)]$ por lo tanto $\Re \models \exists v \beta_i[s]$ de donde tenemos $\Re \models \varphi_i[s]$.□

1.4.- TEOREMA DE COMPLETUD.

Para la demostración del Teorema de Completud utilizaremos el Sistema Formal para la Lógica de Primer Orden desarrollado en Mendelson, Bridge ó Rojas y Amor cuyos axiomas son:

$A_{x_1} = \{(\alpha \to (\beta \to \alpha) \mid \alpha, \beta \in \text{FORM}_\rho\}$

$A_{x_2} = \{((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \text{FORM}_\rho\}$

$A_{x_3} = \{(((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (((\neg\alpha) \to \beta) \to \alpha)) \mid \alpha, \beta \in \text{FORM}_\rho\}$

$A_{x_4} = \{\forall v\alpha(v) \to (\alpha)^v_\tau \mid \alpha \in \text{FORM}_\rho,\ v \in \text{VAR}\}$

$A_{x_5} = \{\forall v(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall v\beta) \mid \alpha, \beta \in \text{FORM}_\rho,\ v \in \text{VAR} \setminus \text{VL}(\alpha)\}$

$A_{x_6} = \{\forall v(v \approx v) \mid v \in \text{VAR}\}$

$A_{x_7} = \{\forall u \forall v(u \approx v \to (\alpha(u) \to \alpha(v))) \mid \alpha \in \text{FORM}_\rho, u, v \in \text{VAR}\}$

donde $\alpha(v)$ denota la sustitución de v por algunas ocurrencias de u en $\alpha(u)$.

Utilizando las reglas de inferencia MP y GEN:

$$\text{MP: } \frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

$$\text{GEN: } \frac{\alpha}{\forall v\alpha}$$

LEMA 1.1.- $\vdash (\alpha \to \alpha)$

1:	$(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$	$\in A_{x_2}$
2:	$(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha))$	$\in A_{x_1}$
3:	$((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$	MP(1,2)
4:	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha))$	$\in A_{x_1}$
5:	$(\alpha \to \alpha)$	MP(3,4)

LEMA DE FINITUD.- Sean $\Gamma \subseteq \text{FORM}_\rho$ y $\alpha \in \text{FORM}_\rho$. $\Gamma \vdash \alpha$ si y sólo si existe un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash \alpha$.

Demostración.- $\Rightarrow$) Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una deducción de α a partir de Γ. Tomemos al conjunto

$$\Delta = \{\alpha_i \mid \alpha_i \in \Gamma \text{ con } i = 1, ..., n\}$$

obviamente $\alpha_1, ..., \alpha_n$ es una deducción de α a partir de Δ y Δ es finito.

$\Leftarrow$) es trivial.□

TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN.- Sea Γ un conjunto de ρ-enunciados, α y β ρ-enunciados y supongamos que $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ entonces $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Demostración.- Sea $\beta_1, ..., \beta_n$ una deducción de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ donde $\beta_n = \beta$. Demostraremos utilizando inducción sobre i que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$ para $1 \leq i \leq n$. Supongamos que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_k$ para toda $k < i$, así β_i es un axioma ó $\beta_i \in \Gamma$ ó β_i es α ó β_i se obtuvo en virtud de MP a partir de β_j y β_m para algunas $1 \leq j, m < i$ donde sin pérdida de generalidad β_m tiene la forma $\beta_j \to \beta_i$ ó β_i se obtuvo en virtud de GEN a partir de β_p para alguna $1 \leq p < i$.

i) Si β_i es un axioma ó $\beta_i \in \Gamma$, se tiene que $\beta_i \to (\alpha \to \beta_i)$ es un axioma del tipo A_{x_1} y usando MP tenemos $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$.

ii) Si $\beta_i = \alpha$, utilizando el Lema 1.1 obtenemos $\vdash \alpha \to \beta_i$ y, por lo tanto $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$.

iii) Si β_i se obtuvo en virtud de MP, tenemos por hipótesis de inducción que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_j$ y $\Gamma \vdash \alpha \to (\beta_j \to \beta_i)$. Pero por A_{x_2}, se tiene lo siguiente $\vdash (\alpha \to (\beta_j \to \beta_i)) \to ((\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_i))$. Por tanto, obtenemos en virtud de MP $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$.

iv) Si β_i se obtuvo en virtud de GEN a partir de β_p para alguna $1 \leq p < i$, entonces β_i es de la forma $\forall v \beta_p$ y, por hipótesis de inducción tenemos

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_p$$

Aplicando GEN tenemos

$$\Gamma \vdash \forall v(\alpha \rightarrow \beta_p)$$

Y en virtud del axioma A_{x_5}:

$$\vdash \forall v(\alpha \rightarrow \beta_p) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall v \beta_p)$$

(v no ocurre libre en α pues α es un enunciado). Aplicando MP:

$$\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta_i)$$

Así, tenemos que para toda i, $1 \leq i \leq n$, $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_i$ por lo tanto $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_n$ □

LEMA 1.2.- Si $\Gamma \vdash \varphi$ y c es un símbolo de constante que no ocurre en Γ, entonces existe una variable y que no ocurre en φ tal que $\Gamma \vdash \forall y(\varphi)^c_y$.

Demostración.- Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una deducción de φ a partir de Γ. Sea y la primer variable (según la enumeración $v_0, \ldots, v_n, \ldots$) tal que no ocurre en las fórmulas α_i. Entonces

$$(1) \qquad (\alpha_1)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y$$

es una deducción de $(\varphi)^c_y$ a partir de Γ puesto que

i) Si $\alpha_i \in \Gamma$ entonces c no ocurre en α_i pues c no ocurre en Γ; por lo tanto $(\alpha_i)^c_y = \alpha_i \in \Gamma$.

ii) Si α_i es **axioma** entonces $(\alpha_i)^c_y$ es también un axioma ya que la variable "y" no ocurre en α_i, e introducir una nueva variable transforma un axioma en otro ya que los axiomas son esquemas.

iii) Si α_i se obtiene en virtud de MP a partir de α_j y $\alpha_k = (\alpha_j \rightarrow \alpha_i)$ con $j, k < i$ entonces $(\alpha_k)^c_y = ((\alpha_j)^c_y \rightarrow (\alpha_i)^c_y)$ y por lo tanto $(\alpha_i)^c_y$ se obtiene en virtud de MP a partir de $(\alpha_j)^c_y$ y $(\alpha_k)^c_y$.

iv) Si α_i se obtiene en virtud de la regla de inferencia GEN a partir de α_j con $j < i$ entonces α_i es de la forma $\forall v \alpha_j$. Así $(\alpha_i)^c_y = (\forall v \alpha_j)^c_y = \forall v(\alpha_j)^c_y$ se obtiene en virtud de la regla GEN a partir de $(\alpha_j)^c_y$ con la variable v la cual es distinta de y pues y no ocurre en α_i.

Así $\Gamma \vdash (\varphi)^c_y$ y, aplicando GEN tenemos que $\Gamma \vdash \forall y(\varphi)^c_y$ □

DEFINICIÓN.- κ es la *potencia* del tipo de semejanza ρ, denotada por $\| \rho \|$ si y sólo si $\kappa = \max\{| \rho |, \aleph_0\}$.

PROPOSICIÓN 1.2.- La cardinalidad del conjunto de fórmulas de tipo ρ es precisamente $\| \rho \|$.

Demostración.- Sea $\kappa = \| \rho \|$. Para cada $n \in \omega$ definimos

$$A_n = \{\alpha \in FORM_\rho \mid \alpha \text{ tiene longitud } n\}$$

Ya que hay menor o igual que κ elecciones posibles para cada símbolo, $| A_n | \leq \kappa^n$. Asi

$$| \text{FORM}_\rho |=| \bigcup_{n\in\omega} A_n | \leq \sum_{n\in\omega} | A_n |= \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa.$$

Que existen al menos κ se sigue del hecho de que ó hay κ letras predicativas distintas ó κ términos distintos de tipo ρ.$\square$

DEFINICIÓN.- Sea $\Sigma \subseteq L^c_\rho$, Σ es *completo* si y sólo si $\sigma \in \Sigma$ ó $\neg\sigma \in \Sigma$ para toda $\sigma \in L^c_\rho$.

DEFINICIÓN.- Sea $\Sigma \subseteq L^c_\rho$, Σ es *cerrado bajo testigos* si y sólo si para cada enunciado $(\exists v_i \varphi) \in \Sigma$ hay $c \in C$ tal que $(\varphi)^{v_i}_c \in \Sigma$.

Los siguientes lemas nos proporcionarán extensiones de un conjunto Σ de enunciados consistente que, además de ser ellas mismas consistentes, son cerradas bajo testigos (Lema 1.3) o completas (Lema 1.5). Utilizando esto, construiremos una extensión de Σ que sea completa, consistente y cerrada bajo testigos, dicha extensión tendrá un modelo el cual será usado para demostrar el Teorema de Completud.

LEMA 1.3.- Sea Σ un conjunto consistente de enunciados de tipo ρ, entonces existe un conjunto Δ de enunciados tal que

i) $\Sigma \subseteq \Delta$, $\tau(\Sigma) \subseteq \tau(\Delta)$ y $\| \tau(\Sigma) \| = \| \tau(\Delta) \|$.

ii) Δ es cerrado bajo testigos.

iii) Δ es consistente.

Demostración.- Sea $\kappa = \| \tau(\Sigma) \|$, para cada $\beta < \kappa$, sea c_β un símbolo de constante que no ocurre en $\tau(\Sigma)$ y tal que $c_\beta \neq c_\gamma$ si $\beta < \gamma < \kappa$. Sea $C = \{c_\beta \mid \beta < \kappa\}$ y $\rho' = \tau(\Sigma) \cup C$. Claramente $\|\rho'\| = \kappa$. Tomemos

$$\Sigma_1 = \{\varphi \in FORM_\rho \mid \ VL(\varphi) = \{v_\varphi\} \ \text{y} \ \exists v_\varphi \varphi(v_\varphi) \in \Sigma\}$$

y sea $\langle \varphi_\xi \rangle_{\xi<\kappa}$ una sucesión de fórmulas de Σ_1 (AE). Es trivial que

$$\Delta = \Sigma \cup \{\varphi_\xi(c_\xi) \mid \varphi_\xi \in \Sigma_1\}$$

es una extensión de Σ cerrada bajo testigos.

Afirmamos además que Δ es consistente. La demostración la haremos por contradicción: Supongamos que Δ es inconsistente, entonces para alguna $\psi \in FORM_{\tau(\Delta)}$ ocurre que $\Delta \vdash \psi$ y $\Delta \vdash \neg\psi$; como las deducciones de ψ y $\neg\psi$ desde Δ son de longitud finita, existe entonces un subconjunto finito $\{\varphi_{\xi_1}(c_{\xi_1}),...,\varphi_{\xi_n}(c_{\xi_n})\}$ de $\{\varphi_\xi(c_\xi) \mid \varphi_\xi \in \Sigma_1\}$ tal que

$$\Sigma \cup \{\varphi_{\xi_i}(c_{\xi_i})\}_{i=1}^n \vdash \psi \ \text{y} \ \Sigma \cup \{\varphi_{\xi_i}(c_{\xi_i})\}_{i=1}^n \vdash \neg\psi$$

De donde tenemos que el conjunto

$$\Sigma \cup \{\varphi_{\xi_1}(c_{\xi_1}) \wedge ... \wedge \varphi_{\xi_n}(c_{\xi_n})\}$$

es inconsistente y, denotando $\varphi_{\xi_1}(c_{\xi_1}) \wedge ... \wedge \varphi_{\xi_n}(c_{\xi_n})$ como ϕ, tenemos $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \neg\varphi$. Utilizando el Teorema de la Deducción obtenemos que $\Sigma \vdash \phi \rightarrow \neg\phi$ y de la tautología $(\phi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow \neg\phi$ podemos deducir $\neg\phi$ desde Σ. Las constantes $c_{\xi_1},...,c_{\xi_n}$ no ocurren en Σ ya que por construcción no estan en $\tau(\Sigma)$. Así, en la deducción de $\neg\phi$ desde Σ, cada ocurrencia de c_{ξ_i} puede ser reemplazada por una variable y_i distinta no ocurriendo en la deducción por el Lema 1.2. de aquí que

$$\Sigma \vdash \neg(\varphi_{\xi_1}(y_1) \wedge ... \wedge \varphi_{\xi_n}(y_n))$$

y mediante la regla de inferencia GEN obtenemos

$$\Sigma \vdash \forall y_1 ... \forall y_n \neg(\varphi_{\xi_1}(y_1) \wedge ... \wedge \varphi_{\xi_n}(y_n))$$

por lo que

$$\Sigma \vdash \neg\exists y_1 ... \exists y_n(\varphi_{\xi_1}(y_1) \wedge ... \wedge \varphi_{\xi_n}(y_n))$$

ya que y_i no ocurre en $\varphi_{\xi_j}(y_j)$ si $i \neq j$ pues $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$ se tiene

$$\Sigma \vdash \neg(\exists y_1(\varphi_{\xi_1}(y_1) \wedge ... \wedge \exists y_n \varphi_{\xi_n}(y_n)))$$

pero puesto que

$$\Sigma \vdash \exists y_i(\varphi_{\xi_i}(y_i))$$

para $i = 1, ..., n$ pues $\varphi_{\xi_i} \in \Sigma_1$ obtenemos una contradicción con la consistencia de Σ. Así Δ resulta consistente.$\square$

LEMA 1.4.- Supongamos que $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq L^*_\rho$ y que no es el caso de que $\Sigma \vdash \neg\varphi$. Entonces $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es consistente.

Demostración.- Ya que $\neg\varphi$ no es deducible desde Σ, entonces Σ es consistente. Supongamos que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente, entonces $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$. Usando el Teorema de la Deducción $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \neg\varphi$ y por la tautología $(\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$ obtenemos $\Sigma \vdash \neg\varphi$ lo cual contradice la hipótesis del Lema. Así $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es consistente.$\square$

LEMA 1.5.- Sea Σ un conjunto consistente de enunciados entonces existe Δ tal que:

i) $\Sigma \subseteq \Delta$, $\tau(\Sigma) = \tau(\Delta)$.

ii) Δ es completo.

iii) Δ es consistente.

Demostración.- Utilizando AE tenemos que el conjunto de enunciados L^e_ρ puede ser bien ordenado: $\{\varphi_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ donde β es un ordinal de la misma cardinalidad que $\| \rho \|$. Definimos la siguiente sucesión de subconjuntos de L^e_ρ:

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{\alpha+1} = \begin{cases} \Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} & \text{si no ocurre que } \Sigma_\alpha \vdash \neg\varphi_\alpha \\ \Sigma_\alpha & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $\lim(\gamma)$, entonces

$$\Sigma_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \Sigma_\alpha$$

se sigue del Lema 1.4 que si Σ_α es consistente entonces $\Sigma_{\alpha+1}$ también lo es. Para $\lim(\gamma)$, si Σ_γ es inconsistente y suponemos que Σ_α es consistente para toda $\alpha < \gamma$, tenemos que hay $\varphi \in \mathrm{FORM}_\rho$ tal que

$$\Sigma_\gamma \vdash \varphi \text{ y } \Sigma_\gamma \vdash \neg\varphi$$

Por el Lema de Finitud existen $\Delta_0 \subseteq \Sigma_\gamma$ y $\Delta_1 \subseteq \Sigma_\gamma$ finitos tales que

$$\Delta_0 \vdash \varphi \text{ y } \Delta_1 \vdash \neg\varphi$$

Así $\Delta_0 \cup \Delta_1$ es finito por lo que existe $\alpha' < \gamma$ tal que

$$\Delta_0 \cup \Delta_1 \subseteq \Sigma_{\alpha'}$$

Por lo tanto

$$\Sigma_{\alpha'} \vdash \varphi \text{ y } \Sigma_{\alpha'} \vdash \neg\varphi$$

de donde $\Sigma_{\alpha'}$ es inconsistente lo cual contradice nuestra suposición de que Σ_α era consistente para todo $\alpha < \gamma$, por lo tanto Σ_γ es consistente.

Tomando $\Delta = \bigcup_{\alpha<\beta} \Sigma_\alpha$ tenemos que Δ es consistente por una demostración completamente análoga a la anterior en el caso $\lim(\gamma)$.

Δ es completo pues para cada $\sigma \in L^c_\rho$ existen α, $\alpha' < \beta$ tales que $\sigma = \varphi_\alpha$ y $\neg\sigma = \varphi_{\alpha'}$; así si $\Sigma_\alpha \vdash \neg\varphi_\alpha$ entonces $\Sigma_{\alpha'+1} = \Sigma_{\alpha'} \cup \{\neg\varphi_\alpha\}$ ya que no es el caso de que $\Sigma_{\alpha'} \vdash \neg(\neg\varphi_\alpha)$ pues entonces $\Delta \vdash \neg(\neg\varphi_\alpha)$ y $\Delta \vdash \neg\varphi_\alpha$ lo cual es una contradicción; y si no ocurre que $\Sigma_\alpha \vdash \neg\varphi_\alpha$ entonces $\varphi_\alpha \in \Sigma_{\alpha+1} \subseteq \Delta$.□

TEOREMA 1.1.- Supongamos que $\Sigma \subseteq L^c_\rho$, Σ es consistente y $\| \rho \| = \kappa$ entonces Σ tiene un modelo de cardinalidad $\leq \kappa$.

Demostración.- Sean $\rho_0 = \rho$, $\Sigma_0 = \Sigma = \Gamma_0$. Una vez definidos ρ_n, Γ_n y Σ_n definimos Γ_{n+1} como la extensión cerrada bajo testigos dada por el Lema 1.3 de Σ_n, $\rho_{n+1} = \tau(\Gamma_{n+1})$ y Σ_{n+1} como la extensión de Γ_{n+1} completa dada por el Lema 1.5.

Sea ahora $\rho^* = \bigcup_{n\in\omega} \rho_n$ y $\Sigma^* = \bigcup_{n\in\omega} \Sigma_n$. Σ^* es claramente una extensión de Σ y $\rho \subseteq \rho^*$, por construcción cada Σ_n es consistente y, por lo tanto, Σ^* es consistente.

Si $\sigma \in L^c_{\rho^*}$ entonces para alguna $n \in \omega^*$, $\sigma \in L^c_{\rho_n}$ y así ó $\sigma \in \Sigma_n$ ó $\neg\sigma \in \Sigma_n$. Así Σ^* es completo. Para mostrar que Σ^* es cerrado bajo testigos suponemos que $\exists v\varphi(v) \in \Sigma^*$ donde $\varphi \in FORM_{\rho^*}$ y $VL(\varphi) = \{v\}$ entonces para alguna m $\exists v\varphi(v) \in \Sigma_m$ y así existe una constante $c \in \rho_{m+1}$ tal que $\varphi(c) \in \Gamma_{m+1} \subseteq \Sigma^*$.

Los conjuntos Σ_n, Γ_n para $n \in \omega$ tienen cardinalidad $\leq \kappa$ y así Σ^* puede ser construido en un lenguaje de tipo ρ^* tal que $\| \rho^* \| \leq \kappa \cdot \aleph_0 = \kappa$.

En lo que sigue obtendremos la estructura $\mathfrak{R}$ construyendo su dominio de interpretación y dando las relaciones, constantes y funciones en $\mathfrak{R}$ de tal manera que esta estructura así definida cumpla lo deseado.

Sea C^* el conjunto de símbolos de constante de ρ^*. Para cualesquiera dos constantes $c, d \in C^*$, definimos la relación $\sim$ de tal manera que $c \sim d$ si y sólo si $(c \approx d) \in \Sigma^*$.

Ya que Σ^* es completo y consistente, tenemos que para $c, d \in C^*$

i) $c \sim c$.

ii) Si $c \sim d$ entonces $d \sim c$.

iii) Si $c \sim d$ y $d \sim e$ entonces $c \sim e$.

Así $\sim$ es una relación de equivalencia sobre C^*. Para cada $c \in C^*$ sea

$$\hat{c} = \{d \in C^* \mid d \sim c\}$$

la clase de equivalencia de c.

Definimos

$$A=\{\hat{c} \mid c \in C^*\}$$

Ahora definimos las relaciones, constantes y funciones de $\mathfrak{R}$:

i) Para cada letra predicativa de aridad n, P en ρ^*, definimos la relación n-aria R sobre el conjunto A de tal manera que para todo $\tilde{c}_1,...,\tilde{c}_n \in A$

$$\langle\tilde{c}_1,...,\tilde{c}_n\rangle \in R \text{ si y sólo si } P(c_1,...,c_n) \in \Sigma^*.$$

ii) Consideremos un símbolo de constante individual $d \in \rho^*$. Ya que Σ^* es completo y consistente tenemos que $(\exists v_0)(d \approx v_0) \in \Sigma^*$ y ya que Σ^* es cerrado bajo testigos, hay una constante $c \in C^*$ que cumple $(d \approx c) \in \Sigma^*$. Así la constante d es interpretada en el modelo $\mathfrak{R}$ por el elemento $\tilde{c}$ de A.

iii) Sea F una letra funcional de aridad m y sean $c_1,...,c_m \in C^*$; de donde se tiene que $(\exists v_0)(F(c_1,...c_m) \approx v_0) \in \Sigma^*$ y ya que Σ^* es cerrado bajo testigos, hay $c \in C^*$ tal que $(F(c_1,...c_m) \approx c) \in \Sigma^*$. Así, definimos la función $F^{\mathfrak{R}}$ como

$$F^{\mathfrak{R}}(\tilde{c}_1,...,\tilde{c}_m) = \tilde{c} \text{ si y sólo si } (F(c_1,...c_m) \approx c) \in \Sigma^*.$$

Con lo cual la definición del modelo $\mathfrak{R}$ queda completada.

Probaremos ahora que $\mathfrak{R}$ es un modelo de Σ^*. Utilizando inducción se demuestra fácilmente que

(1).........Para todo $\tau \in TERM_\rho$ sin variables y toda constante $c \in C^*$

$$\tau_1^{\mathfrak{R}} = c^{\mathfrak{R}} \text{ si y sólo si } (\tau_1 \approx c) \in \Sigma^*.$$

Usando el hecho de que C^* es un conjunto de testigos para Σ^* obtenemos

(2).........Para cualesquiera dos términos cerrados τ_1, τ_2 de ρ.

$$\tau_1^{\Re} = \tau_2^{\Re} \text{ si y sólo si } (\tau_1 \approx \tau_2) \in \Sigma^*.$$

(3)..........Para toda fórmula de la forma $P(\tau_1,...,\tau_n)$ sin variables con P una letra predicativa de aridad n y $\tau_1,...,\tau_n \in TERM_\rho$

$$\Re \models P(\tau_1,...,\tau_n) \text{ si y sólo si } P(\tau_1,...,\tau_n) \in \Sigma^*.$$

Utilizando (2) y (3) se prueba usando inducción sobre la longitud del enunciado φ que

$$\Re \models \varphi \text{ si y sólo si } \varphi \in \Sigma^*.$$

de la siguiente manera

i) $\Re \models \neg\varphi$ si y sólo si φ es falsa en $\Re$ si y sólo si $\varphi \notin \Sigma^*$ si y sólo si $(\neg\varphi) \in \Sigma^*$ pues Σ^* es completo y consistente.

ii) $\Re \models (\varphi \vee \psi)$ si y sólo si $\Re \models (\varphi)$ ó $\Re \models (\psi)$ si y sólo si $\varphi \in \Sigma^*$ ó $\psi \in \Sigma^*$ si y sólo si (Σ^* es completo y consistente) $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma^*$.

iii) Supongamos que $\varphi = \exists v_i\psi$. Si $\Re \models \varphi$, entonces para alguna $\bar{c} \in A$, $\Re \models \psi\,[s(i/\bar{c})]$ si y sólo si $\Re \models (\psi)^{v_i}_c$. Así $(\psi)^{v_i}_c \in \Sigma^*$ y ya que

$$\vdash (\psi)^{v_i}_c \rightarrow \exists v_i\psi$$

tenemos que $\varphi \in \Sigma^*$. Por otra parte, si $\varphi \in \Sigma^*$, entonces ya que Σ^* es cerrado bajo testigos, hay una constante $c \in C^*$ tal que $(\psi)^{v_i}_c \in \Sigma^*$. Así $\Re \models (\psi)^{v_i}_c$ lo cual implica $\Re \models \psi\,[s(i/\bar{c})]$ y así $\Re \models \varphi$.

Por lo tanto $\Re$ es modelo de Σ^*.□

TEOREMA DE COMPLETUD.- Sea Σ un conjunto de ρ-enunciados. Entonces Σ es consistente si y sólo si Σ tiene un modelo.

Demostración.- La consistencia de Σ si Σ tiene modelo es directa. Supongamos que Σ es un conjunto consistente de enunciados. por los Lemas 1.3 y 1.5 (págs. 26 y 29), tenemos extensiones Σ' de Σ y ρ' de ρ ($\|\rho'\|=\|\rho\|$) tal que Σ' es completo, consistente y cerrado bajo testigos en ρ'. Por el Teorema 1.1 (pág. 30) sea $\mathfrak{R}$ un modelo de Σ'. $\mathfrak{R}$ es un modelo para el lenguaje expandido definido por el tipo de semejanza ρ', así, sea $\mathfrak{I}$ el reducto de $\mathfrak{R}$ a ρ. Ya que los enunciados de Σ no involucran a las constantes de ρ' que no se encuentran en ρ, vemos que $\mathfrak{I}$ es un modelo de Σ.$\square$

TEOREMA DE COMPACIDAD.- Sea Σ un conjunto de ρ-enunciados Σ tiene un modelo si y sólo si todo subconjunto finito de Σ tiene un modelo.

Demostración.- $\Rightarrow$) Es trivial.

$\Leftarrow$) Supongamos que todo subconjunto finito de Σ tiene un modelo, por el Teorema de Completud, todo subconjunto finito de Σ es consistente, de aquí, por el Lema de Finitud Σ es consistente y por el Teorema de Completud Σ tiene un modelo.$\square$

CAPÍTULO 2.- EL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM.

2.1.- EL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM(↓).

DEFINICIÓN.- $\mathfrak{R} = \langle A,I\rangle$ es una *subestructura elemental* de $\mathfrak{I} = \langle B,J\rangle$ (ó $\mathfrak{I}$ es una extensión elemental de $\mathfrak{R}$), en símbolos $\mathfrak{R} \prec \mathfrak{I}$ si y sólo si

i) $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{I}$ ($\mathfrak{R}$ es subestructura elemental de $\mathfrak{I}$).

ii) Para toda $s \in {}^{\omega}A$ y toda $\varphi \in FORM_{\rho}$,

$$\mathfrak{R} \models \varphi[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{I} \models \varphi[s] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

El siguiente Teorema es un criterio bastante útil para saber cuando una subestructura es en realidad una subestructura elemental y, ya que muchas de las versiones del Teorema de Löwenheim-Skolem proporcionan una subestructura elemental, será utilizado con bastante frecuencia.

TEOREMA 2.1.- Criterio de Tarski-Vaught para subestructuras elementales.

Sean $\mathfrak{R} = \langle A,I\rangle$ y $\mathfrak{I} = \langle B,J\rangle$ dos ρ-estructuras tales que $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{I}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\mathfrak{R} \prec \mathfrak{I}$.

ii) Para toda $s \in {}^{\omega}A$ y toda $\varphi \in FORM_{\rho}$, tal que $\mathfrak{I} \models \exists v_i \varphi[s]$ existe $a \in A$ para la cual $\mathfrak{I} \models \varphi[s(i/a)]$.

Demostración.- $\Rightarrow$) Sean $s \in {}^{\omega}A$ y $\varphi \in FORM_\rho$ tales que $\Im \models \exists v_i\varphi[s]$ entonces $\Re \models \exists v_i\varphi[s]$ (pues $\Re \prec \Im$) si y sólo si existe $a \in A$ tal que $\Re \models \varphi[s(i/a)]$ si y sólo si existe a para la cual $\Im \models \varphi[s(i/a)]$.

$\Leftarrow$) [Inducción]

- Para φ fórmula atómica se cumple claramente que $\Re \models \varphi[s]$ si y sólo si $\Im \models \varphi[s]$ pues $\Re \subseteq \Im$.

- Supongamos que ψ satisface (1) y sea $\varphi = \neg\psi$. Entonces $\Re \models \varphi[s]$ si y sólo si $\Re \models \neg\psi[s]$ si y sólo si $\Re \not\models \psi[s]$ si y sólo si $\Im \not\models \psi[s]$ si y sólo si $\Im \models \neg\psi[s]$ si y sólo si $\Im \models \varphi[s]$.

- Supongamos que ψ_1 y ψ_2 satisfacen (1) y $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$. Entonces $\Re \models \varphi[s]$ si y sólo si $\Re \models (\psi_1 \vee \psi_2)[s]$ si y sólo si $\Re \models \psi_1[s]$ ó $\Re \models \psi_2[s]$ si y sólo si $\Im \models \psi_1[s]$ ó $\Im \models \psi_2[s]$ si y sólo si $\Im \models (\psi_1 \vee \psi_2)[s]$ si y sólo si $\Im \models \varphi[s]$.

- Supongamos que ψ satisface (1) y sea $\varphi = \exists v_i\psi$. Si $\Re \models \varphi[s]$ entonces para alguna $a \in A$, $\Re \models \psi[s(i/a)]$; ya que ψ satisface (1) se tiene que existe $a \in A$ tal que $\Im \models \psi[s(i/a)]$. Así $\Im \models \varphi[s]$. Si $\Im \models \varphi[s]$ entonces para alguna $a \in A$, $\Im \models \psi[s(i/a)]$ (por hipótesis), así se tiene que existe $a \in A$ tal que $\Re \models \psi[s(i/a)]$ y por lo tanto $\Re \models \varphi[s]$.□

TEOREMA 2.2.- Sean $\mathfrak{J} = \langle B,J \rangle$ una ρ-estructura y $X \subseteq B$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $X = A$ para alguna $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$ que cumple $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{J}$.

ii) Para toda $c \in C \subseteq \rho$, $c^{\mathfrak{J}} \in X$; y para toda $n > 0$, toda letra funcional de aridad n, $F \in \rho$ y cualesquiera $a_1,\dots,a_n \in X$, $F^{\mathfrak{J}}(a_1,\dots,a_n) \in X$.

Demostración.- $\Rightarrow$) Supongamos i), entonces para toda constante $c \in \rho$, $c^{\mathfrak{J}} = c^{\mathfrak{R}}$ pues $\mathfrak{R}$ es subestructura de $\mathfrak{J}$, pero $c^{\mathfrak{R}} \in A = X$, de donde $c^{\mathfrak{J}} \in X$. De la misma manera, si F es una letra funcional de aridad n en ρ y $a_1,\dots,a_n \in X = A$, se tiene $F^{\mathfrak{J}}(a_1,\dots,a_n) = F^{\mathfrak{R}}(a_1,\dots,a_n) \in A = X$ (pues $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{J}$).

$\Leftarrow$) Supongamos ii), entonces podemos definir $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$ haciendo $A = X$, $c^{\mathfrak{R}} = c^{\mathfrak{J}}$ ($I(c) = c^{\mathfrak{J}}$) para toda c constante en ρ, $F^{\mathfrak{R}} = F^{\mathfrak{J}}|_{X^n}$ para cada letra funcional de aridad n y $R^{\mathfrak{R}} = R^{\mathfrak{J}}|_{X^n}$ para cada letra predicativa de aridad n. Así, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{J}$.$\square$

Dado $\mathfrak{J} = \langle B,J \rangle$ y $Y \subseteq B$, podemos concluir del Teorema 2.2 que existe una única subestructura mínima $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{J}$ con $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$ tal que $Y \subseteq A$. Nosotros llamaremos a $\mathfrak{R}$ la subestructura de $\mathfrak{J}$ generada por Y, en símbolos $\langle Y \rangle_{\mathfrak{J}}$.

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM.(Versión 1).- Sea $\mathfrak{J} = \langle B,J \rangle$ una ρ-estructura y $X \subseteq B$. Entonces hay una ρ-estructura $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$ tal que $X \subseteq A$, $\mathfrak{R} \prec \mathfrak{J}$ y $|A| \leq |X| + \|\rho\|$.

Demostración.- Sea $<$ un buen ordenamiento del conjunto B (AE). Para cada fórmula $\exists v_i\varphi$ y cada $s \in {}^{\omega}B$ tal que $\mathfrak{J} \models \exists v_i\varphi[s]$ tomemos $g(\varphi,s)$ como el primer b (con respecto a $<$) tal que $\mathfrak{J} \models \varphi[s(i/b)]$.

Ahora definimos

i) $A_0 = X$.

ii) $A_{n+1} = A_n \cup \{g(\varphi,s) \mid s \in {}^{\omega}A_n \text{ y } \Im \models \exists v_i\varphi[s]\}$

Ahora sea $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Además tenemos que si $c \in \rho$ entonces $c^{\Im} \in A$, puesto que $\Im \models \exists v_i(v_i \approx c)$. También, si $a_0,\ldots,a_{n-1} \in A$ y $F \in F_n \subseteq \tau(\Im)$ entonces $F^{\Im}(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in A$ puesto que si $a_i \in A_{j_i}$ y $m = \max\{j_i \mid i < n\}$ entonces $a_0,\ldots,a_{n-1} \in A_m$, ya que $A_k \subseteq A_l$ para toda $k \leq l < \omega$ y además $\Im \models \exists v(F(v_0,\ldots,v_{n-1}) \approx v)[s(i/a_i)]$. De donde

$$F^{\Im}(a_0,\ldots,a_{n-1}) = g((F(v_0,\ldots,v_{n-1}) \approx v), s(i/a_i)) \in A_{m+1} \subseteq A.$$

Así por el Teorema 2.2 hay una subestructura $\Re \subseteq \Im$ con $\Re = \langle A, I\rangle$. Claramente $X \subseteq A$. Además para cada $n \in \omega$

$$|A_n| \leq |X| + \|\rho\|.$$

De donde

$$|A| \leq |X| + \|\rho\|.$$

Supongamos que φ es una fórmula de tipo ρ con $VL(\varphi) = \{v, v_0,\ldots,v_{n-1}\}$. Sea $s \in {}^{\omega}A$ y supongamos que $\Im \models \exists v\varphi[s]$. Ya que $\{s_i \mid i = 0,\ldots,n-1\}$ es finito, hay m tal que este conjunto está contenido en A_m. Así $\Im \models \varphi[s(v/g(\varphi,s))]$ y el elemento $g(\varphi,s) \in A_{m+1}$, por lo tanto $g(\varphi,s) \in A$. Así, por el Teorema 2.1, se tiene $\Re \prec \Im$. □

Así, el Teorema afirma que podemos obtener una subestructura elemental cuyo dominio de interpretación tiene la misma cardinalidad que X si $|X| \geq \| \rho \|$, y si $|X| < \| \rho \|$ la cardinalidad del universo de interpretación está entre la cardinalidad de X y la potencia de ρ.

TEOREMA 2.3.- Sea $\mathfrak{I} = \langle B,J \rangle$ una ρ-estructura y Y un conjunto de elementos de B, si $\langle Y \rangle_{\mathfrak{I}} = \langle A,I \rangle$ entonces

$$|A| \leq |Y| + \|\rho\|.$$

Demostración.- Sea $X = \bigcup_{m \in \omega} Y_m$ donde Y_m está definido como sigue:

$$Y_0 = Y \cup \{c^{\mathfrak{I}} \mid c \in C \subseteq \rho\}.$$

$$Y_{m+1} = Y_m \cup \{F^{\mathfrak{I}}(a_1, \ldots, a_n) \mid F \in F_n \subseteq \rho \text{ y } a_1, \ldots, a_n \in Y_m\}$$

Ya que X satisface ii) del Teorema 2.2, entonces existe una única subestructura mínima $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$ de $\mathfrak{I}$ con $Y \subseteq A = X$. Para demostrar que es la mínima, supongamos que $\mathfrak{R}'$ es una subestructura de $\mathfrak{I}$ la cual contiene a Y, $\mathfrak{R}' = \langle A',I' \rangle$ entonces por inducción sobre m se demuestra que toda $Y_m \subseteq A'$ y así $A = X \subseteq A'$. En consecuencia $\mathfrak{R} = \langle Y \rangle_{\mathfrak{I}}$.

Para estimar la cardinalidad de A. Sea $\kappa = |Y| + \|\rho\|$. Claramente $|Y_0| \leq \kappa$.

Para cada n fijo, si $Z \subseteq B$ es de cardinalidad $\leq \kappa$ entonces el conjunto

$$\{F^{\mathfrak{I}}(a_1, \ldots, a_n) \mid F \in F_n \subseteq \rho \text{ y } \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in Z^n\}$$

tiene cardinalidad a lo más $\kappa \cdot \kappa^n = \kappa$ ya que κ es infinito. Así, si $|Y_m| \leq \kappa$ entonces

$$| Y_{m+1} | \leq \kappa + \kappa = \kappa$$

y por lo tanto $|X| \leq \omega \cdot \kappa = \kappa$, es decir $|A| \leq \kappa$.□

DEFINICIÓN.- Supongamos que $T \subseteq L^{e}_{\rho}$ es una teoría. Entonces una *skolemización* de T es una teoría $T' \subseteq L^{e}_{\rho'}$ con $T \subseteq T'$ y $\rho \subseteq \rho'$ tal que

i) Toda ρ-estructura que es un modelo de T tiene una expansión a un modelo de T'.

ii) Para toda $\varphi \in FORM_{\rho'}$ con $VL(\varphi) = \{v, v_0, \ldots, v_{n-1}\}$, $n > 1$ existe un término τ tal que $T' \models \forall v_0 \ldots \forall v_{n-1}(\exists v\varphi(v, v_0, \ldots, v_{n-1}) \rightarrow \varphi(\tau, v_0, \ldots, v_{n-1}))$ y $v_0, \ldots, v_{n-1}$ son las variables que aparecen en τ.

DEFINICIÓN.- T tiene *funciones de Skolem* si y sólo si T es una skolemización de él mismo.

Los siguientes Teoremas nos proporcionan, dada una estructura $\Im$, una expansión en la cual cualquier subestructura generada por algún subconjunto del dominio de interpretación de $\Im$ resulta ser una subestructura elemental de $\Im$ (Teorema 2.7). El Teorema 2.4 es una generalización (a un conjunto Σ) del Lema de Expansión: en el Teorema 2.5 se demuestra que dicha expansión es un modelo de cierto conjunto de enunciados tal que para cada fórmula nos proporciona testigos (funciones y constantes de Skolem), y con el Teorema 2.6 se volverá a expandir dicha estructura de tal manera que el conjunto de enunciados sea una teoría de Skolem.

TEOREMA 2.4.- Sea $\Re = \langle A, I\rangle$ una ρ-estructura y sea

$$\Sigma = \{\varphi \in FORM_\rho \mid \mathfrak{R} \models \varphi[s] \text{ para alguna } s \in {}^\omega A\}$$

entonces hay una expansión $\mathfrak{R}^*$ de $\mathfrak{R}$ tal que para toda $\varphi \in \Sigma$ y toda $s \in {}^\omega A$

$$\mathfrak{R} \models \varphi[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{R}^* \models FNSS(\varphi)[s].$$

Demostración.- Tomemos $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_\alpha, \ldots$: con $\alpha < \|\rho\|$, un buen ordenamiento de las fórmulas de tipo ρ (AE) tales que $\mathfrak{R} \models \varphi[s]$ para alguna $s \in {}^\omega A$. Sea $\mathfrak{R}_0$ la expansión de $\mathfrak{R}$ tal que $\mathfrak{R} \models (\varphi_0)[s_0]$ si y sólo si $\mathfrak{R}_0 \models (FNSS(\varphi_0))[s_0]$.

Supongamos definida $\mathfrak{R}_\alpha$, entonces $\mathfrak{R}_{\alpha+1}$ es la expansión de $\mathfrak{R}_\alpha$ tal que $\mathfrak{R}_\alpha \models \varphi_{\alpha+1}[s_\alpha]$ si y sólo si $\mathfrak{R}_{\alpha+1} \models (FNSS(\varphi_{\alpha+1}))[s_\alpha]$ para alguna $s_\alpha \in {}^\omega A$.

Supongamos $\lim(\alpha)$ y supongamos que han sido definidas todas las $\mathfrak{R}_\xi = \langle A, I_\xi \rangle$ para $\xi < \alpha$, entonces definimos $\mathfrak{R}^*_\alpha = \langle A, \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi \rangle$. Sea ahora $\mathfrak{R}_\alpha$ la expansión de $\mathfrak{R}^*_\alpha$ tal que $\mathfrak{R}^*_\alpha \models (\varphi_\alpha)[s_\alpha]$ si y sólo si $\mathfrak{R}_\alpha \models (FNSS(\varphi_\alpha))[s_\alpha]$.

Todas las anteriores expansiones son definidas a través del Lema de Expansión dado en el Capítulo 1.

Sea $\mathfrak{R}^*$ la estructura definida por $\mathfrak{R}^* = \langle A, I \rangle$ donde $I = \bigcup_{\xi<\|\rho\|} I_\xi$. Demostraremos por casos que para toda $\alpha < \|\rho\|$ se tiene que

$$\mathfrak{R} \models \varphi_\alpha[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{R}^* \models FNSS(\varphi_\alpha)[s].$$

- $\alpha = 0$) $\mathfrak{R} \models \varphi_0[s]$ si y sólo si $\mathfrak{R}_0 \models FNSS(\varphi_0)[s]$ (por el Lema de Expansión.) si y sólo si $\mathfrak{R}^* \models FNSS(\varphi_0)[s]$ (pues $\mathfrak{R}^*$ es expansión de $\mathfrak{R}_0$).

- $\mathfrak{R} \models \varphi_{\alpha+1}[s]$ si y sólo si $\mathfrak{R}_\alpha \models \varphi_{\alpha+1}[s]$ si y sólo si $\mathfrak{R}_{\alpha+1} \models \text{FNSS}(\varphi_{\alpha+1})[s]$ (por el Lema de Expansión.) si y sólo si $\mathfrak{R}^* \models \text{FNSS}(\varphi_{\alpha+1})[s]$ (pues $\mathfrak{R}^*$ es expansión de $\mathfrak{R}_{\alpha+1}$).

- $\mathfrak{R} \models \varphi_\alpha[s]$ si y sólo si $\mathfrak{R}^*_\alpha \models \varphi_\alpha[s]$ si y sólo si $\mathfrak{R}_\alpha \models \text{FNSS}(\varphi_\alpha)[s]$ si y sólo si $\mathfrak{R}^* \models \text{FNSS}(\varphi_\alpha)[s]$□

TEOREMA 2.5.- Para cada φ una fórmula de tipo ρ en forma normal prenex tal que $\{v_1,...,v_{n_\varphi}\} = \text{VL}(\varphi)$, se tiene que toda ρ-estructura $\mathfrak{R} = \langle A,I\rangle$ puede ser expandida a un modelo (dado por el Teorema 2.4) de

$$\Sigma(\rho)=\{\forall v_1...\forall v_{n_\varphi}(\varphi \longrightarrow \text{FNSS}(\varphi)) \mid \varphi \in \text{FORM}_\rho\}.$$

Demostración.- Sea $\mathfrak{R}^*$ la expansión de $\mathfrak{R}$ definida por el Teorema 2.4 de tal manera que $\mathfrak{R} \models \varphi[s]$ si y sólo si $\mathfrak{R}^* \models \text{FNSS}(\varphi)[s]$ para toda $\varphi \in \text{FORM}_\rho$ y toda $s \in {}^\omega A$ con φ en forma normal prenex y tal que $\{v_1,...,v_{n_\varphi}\} = \text{VL}(\varphi)$.

Afirmación.- $\mathfrak{R}^*$ es un modelo de $\Sigma(\rho)$.

Supongamos que no, es decir existe $\sigma = \forall v_1...\forall v_{n_\varphi}(\varphi \longrightarrow \text{FNSS}(\varphi)) \in \Sigma(\rho)$ tal que $\mathfrak{R}^* \not\models \sigma[s]$ para alguna $s \in {}^\omega A$ si y sólo si $\mathfrak{R}^* \not\models \forall v_1...\forall v_{n_\varphi}(\varphi \longrightarrow \text{FNSS}(\varphi))[s]$ si y sólo si no sucede que para cualesquiera $a_1,...,a_{n_\varphi} \in A$

$$\mathfrak{R}^* \models (\varphi \longrightarrow \text{FNSS}(\varphi))[s(i/a_i)]$$

si y sólo si existen $a_1,...,a_{n_\varphi} \in A$ tales que

$$\mathfrak{R}^* \not\models (\varphi \longrightarrow \mathrm{FNSS}(\varphi))[s(i/a_i)]$$

si y sólo si existen $a_1, \ldots, a_{n_\varphi} \in A$ tales que

$$\mathfrak{R}^* \models \varphi[s(i/a_i)] \text{ y } \mathfrak{R}^* \not\models \mathrm{FNSS}(\varphi)[s(i/a_i)] \ldots\ldots\ldots (1)$$

Pero ya que $\mathfrak{R}^*$ es expansión de $\mathfrak{R}$ y φ sólo contiene símbolos de ρ, entonces

$$\mathfrak{R}^* \models \varphi[s(i/a_i)] \Rightarrow \mathfrak{R} \models \varphi[s(i/a_i)] \text{ si y sólo si } \mathfrak{R}^* \models \mathrm{FNSS}(\varphi)[s(i/a_i)] \ldots\ldots\ldots (2)$$

Obteniéndose una contradicción de (1) y de (2).

Por lo tanto $\mathfrak{R}^*$ es un modelo de $\Sigma(\rho)$.□

TEOREMA 2.6.- Sea ρ un tipo de semejanza, entonces existen un tipo de semejanza ρ^*, con $\rho \subseteq \rho^*$ y Σ un conjunto de enunciados de tipo ρ^*, tal que

i) Toda ρ-estructura $\mathfrak{R}$ puede ser expandida a un modelo $\mathfrak{R}^\Sigma$ de Σ.

ii) Σ es una teoría de Skolem en el tipo de semejanza ρ^*.

iii) $\|\rho^*\| = \|\rho\|$.

Demostración.- Definamos las siguientes cadenas de tipos de semejanza, teorías y estructuras:

$$\rho_0 = \rho \qquad \Sigma_0 = \emptyset \qquad \mathfrak{I}_0 = \langle A, J_0 \rangle = \mathfrak{A}.$$
$$\rho_{n+1} = (\rho_n)' \quad \Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \Sigma(\rho_n) \quad \mathfrak{I}_{n+1} = \langle A, J_{n+1} \rangle = \mathfrak{I}_n^*$$

Donde $(\rho_n)'$ consiste de ρ_n junto con las letras funcionales y de constantes de Skolem añadidos para las fórmulas de tipo ρ_n,

$$\Sigma(\rho_n) = \{\forall v_1 \ldots \forall v_{n_\varphi}(\varphi \to \mathrm{FNSS}(\varphi)) \mid \varphi \in \mathrm{FORM}_{\rho_n},\ \{v_1, \ldots, v_{n_\varphi}\} = \mathrm{VL}(\varphi)\}.$$

y $\mathfrak{I}_n^*$ es la expansión de $\mathfrak{I}_n$ definida en el Teorema 2.4.

Finalmente definimos

$$\rho^* = \bigcup_{n\in\omega} \rho_n, \qquad \Sigma = \bigcup_{n\in\omega} \Sigma_n. \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{A}^\Sigma = \langle A, J \rangle \text{ donde } J = \bigcup_{n\in\omega} J_n.$$

Ya que se hicieron expansiones repetidas, tenemos que se cumple i). Para ii) sabemos que toda fórmula φ de tipo ρ^* con $\{v_1, \ldots, v_{n_\varphi}\} = \mathrm{VL}(\varphi)$ se encuentra en algún Σ_n, así $\forall v_1 \ldots \forall v_{n_\varphi}(\varphi \to \mathrm{FNSS}(\varphi)) \in \Sigma_{n+1}$. Por lo tanto Σ es una teoría de Skolem en el tipo ρ^*.

iii) se cumple pues

$$\| \rho^* \| = \| \bigcup_{n\in\omega} \rho_n \| \leq \sum_{n\in\omega} \| \rho_n \| = \sum_{n\in\omega} \| \rho \| = \aleph_0 \cdot \| \rho \| = \| \rho \| . \square$$

TEOREMA 2.7.- Supongamos que T es una teoría de Skolem en L_ρ y que $\mathfrak{J} = \langle B, J \rangle$ es una ρ-estructura con $\mathfrak{J} \models T$; sea $X \subseteq B$ de tal manera que $\langle X \rangle_{\mathfrak{J}}$ es no vacío. Entonces $\langle X \rangle_{\mathfrak{J}}$ es una subestructura elemental de $\mathfrak{I}$.

Demostración.- Sean $\mathfrak{R} = \langle X \rangle_{\Im}$, $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$, $\varphi(v_1,...,v_k,v) \in FORM_\rho$ tal que cumple $\Im \models \exists v\varphi[s(i/b_i)]$, donde $b_1,...,b_k \in A$, entonces existe un término τ (por ser teoría de Skolem) tal que $\Im \models \varphi[s(i/b_i,v/\tau^{\Im}(b_1,...,b_k))]$. Pero el elemento $\tau^{\Im}(b_1,...,b_k) \in A$ ya que A es cerrado bajo las funciones para cada letra funcional en ρ. Por el criterio de Tarski-Vaught se sigue que $\mathfrak{R}$ es una subestructura elemental de $\Im$.$\square$

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM. (Versión 2).- Sea $\Im = \langle B,J \rangle$ una ρ-estructura, $X \subseteq B$ y λ un cardinal tal que $\| \rho \| + |X| \leq \lambda \leq |B|$. Entonces hay una subestructura elemental $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$ de $\Im$ de cardinalidad λ con $X \subseteq A$.

Demostración.- Usando la notación del Teorema 2.6 expandimos $\Im$ a un modelo $\Im^{\Sigma}$ de Σ de tipo ρ^*. Sea Y un conjunto de λ elementos de B, con $X \subseteq Y$. Sea $\mathfrak{R}' = \langle Y \rangle_{\Im^{\Sigma}}$ y sea $\mathfrak{R}$ el ρ-reducto de $\mathfrak{R}'$. Por el Teorema 2.3

$$| A | \leq | Y | + \| \rho^* \| = \lambda + \| \rho \| = \lambda = | Y | \leq | A | .$$

Ya que Σ es una teoría de Skolem, $\mathfrak{R}' \prec \Im^{\Sigma}$ por el Teorema 2.7, de donde $\mathfrak{R} \prec \Im$.$\square$

Como se verá en el siguiente Teorema, la Versión 2 del Teorema de Löwenheim-Skolem se desprende fácilmente de la Versión 1; sin embargo, se intentó dar una demostración diferente la cual es muy parecida a la demostración dada por Skolem.

TEOREMA 2.8.- La Versión 1 del Teorema de Löwenheim-Skolem implica la Versión 2.

Demostración.- Sea $\Im = \langle B,J \rangle$ y λ un cardinal tal que $\| \rho \| + |X| \leq \lambda \leq |B|$ donde $X \subseteq B$. Sea $Y \subseteq B$ tal que $|Y| = \lambda$ con $X \subseteq Y$. Utilizando la Versión 1 del Teorema, tenemos que existe $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$ tal que $Y \subseteq A$, $\mathfrak{R} \prec \Im$ y $|A| \leq |Y| + \| \rho \|$. Pero $|Y| =$

$\lambda \geq \| \rho \|$.

Por lo tanto $X \subseteq A$ y $|A| = \lambda$.□

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM. (Versión 3).- Sean $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ y $\mathfrak{I} = \langle B, J \rangle$ dos ρ-estructuras, entonces para cada $f: A \to B$ existen $\mathfrak{R}^* = \langle U, K \rangle$ $g: A \to U$ y $h: U \to B$ tales que $f = hog$ y $|U| \leq \max\{| A |, \| \rho \|\}$ (donde h es un monomorfismo).

Demostración.- Sea $\mathfrak{I}^*$ la expansión de $\mathfrak{I}$ dada por el Teorema 2.6 y sea $\mathfrak{R}^*$ el ρ-reducto de $\langle f[A] \rangle_{\mathfrak{I}^*}$ (la mínima subestructura de $\mathfrak{I}^*$ que contiene a $f[A]$). Por el Teorema 2.7 tenemos que $\langle f[A] \rangle_{\mathfrak{I}^*} \prec \mathfrak{I}^*$. Así $\mathfrak{R}^* \prec \mathfrak{I}$ puesto que si $\mathfrak{I} \models \exists v_i \varphi [s]$ entonces $\mathfrak{I}^* \models (\varphi)_c^{v_i}$ donde $c^{\mathfrak{I}^*} \in B$, así $\langle f[A] \rangle_{\mathfrak{I}^*} \models (\varphi)_c^{v_i}$ y, por lo tanto, por el Teorema de Sustitución, $\langle f[A] \rangle_{\mathfrak{I}^*} \models \varphi \left[s(i/c^{\mathfrak{I}^*})\right]$ donde $c^{\mathfrak{I}^*} \in U$, de aquí que $\mathfrak{I} \models \varphi \left[s(i/c^{\mathfrak{I}^*})\right]$ (Aquí $g = f$ y $h = i$ la función inclusión).□

TEOREMA 2.9.- Las Versiones (1) y (3) del Teorema de Löwenheim-Skolem son equivalentes.

Demostración.- (1)⇒(3): Sea $f: A \to B$ con $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ y $\mathfrak{I} = \langle B, J \rangle$ dos ρ-estructuras y consideremos al conjunto $f[A]$. Por (1), existe una estructura $\mathfrak{R}^* = \langle U, K \rangle$ tal que $f[A] \subseteq U$, $\mathfrak{R}^* \prec \mathfrak{I}$ y

$$| U | \leq | f[A] | + \| \rho \|$$

donde $g = f$ y $h = i$ (la función inclusión).

(3)⇒(1): Sea $\mathfrak{I} = \langle B, J \rangle$ una ρ-estructura y $X \subseteq B$. Tomemos $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ como la subestructura de $\mathfrak{I}$ generada por X, es decir $\mathfrak{R} = \langle X \rangle_{\mathfrak{I}}$. Por el Teorema 2.3 se tiene que

$$| A | \leq | X | + \| \rho \|$$

Tomando f como la función inclusión tenemos que existen $\mathfrak{R}^* = \langle U, K \rangle$ g : A→U y h : U→B tal que f = hog y

$$| U | \leq \max \{ | A |, \| \rho \| \} \leq \max \{ | X |, \| \rho \| \} .$$

Revisando la demostración de la Versión 3 tenemos que se tomaron g = f y h = i de donde X⊆U y $\mathfrak{R}^* \prec \mathfrak{I}$.□

Las siguientes Versiones del Teorema de Löwenheim-Skolem (4, 5, 6 y 7) solamente proporcionan un modelo (no una subestructura elemental) cuyo dominio de interpretación tiene cierta cardinalidad.

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM. (Versión 4).- Sea $T \subseteq L^c_\rho$ una teoría consistente entonces T tiene un modelo $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ tal que

$$| A | \leq \| \rho \| .$$

Demostración.- T tiene un modelo $\mathfrak{R}$ de cardinalidad $\leq \| \rho \|$ por el Teorema de Completud.□

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM. (Versión 5).- Sea $\Sigma \subseteq L^c_\rho$, tal que Σ tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ tal que $|A| \leq \| \rho \|$.

Demostración.- Sea $\Sigma \subseteq L^c_\rho$, con $| \Sigma | = \kappa$ y tal que Σ tiene un modelo $\mathfrak{R} =$

(A,I) . Sabemos que $\Re \models \Sigma^{\models}$ y por el Teorema de Completud $\Sigma^{\models}$ es una teoría consistente. Por la Versión 4 del Teorema de Löwenheim-Skolem, $\Sigma^{\models}$ tiene un modelo $\Im$ de cardinalidad a lo más $\| \rho \|$, de donde $\Im \models \Sigma$.□

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM. (Versión 6).- Sea Γ un conjunto satisfacible de fórmulas de tipo ρ, entonces Γ es satisfacible en alguna estructura $\Re = \langle A,I \rangle$ tal que

$$| A | \leq \| \rho \| .$$

Demostración.- La demostración será, esencialmente, convertir el conjunto de fórmulas Γ a un conjunto de enunciados (en alguna expansión) que tenga un modelo, aplicar la Versión 5 del Teorema de Löwenheim-Skolem, tomar el reducto al tipo de semejanza original y mostrar que Γ es satisfacible en dicho reducto.

Sea Γ un conjunto satisfacible de fórmulas de tipo ρ, tal que $\| \rho \| = \kappa$, es decir, hay una ρ-estructura $\Im = \langle B,J \rangle$ tal que para cada $\varphi \in \Gamma$ existe $s^{\varphi} \in {}^{\omega}B$ cumpliendo

$$\Im \models \varphi[s^{\varphi}].$$

Para cada $\varphi \in \Gamma$ supongamos que $\{v_1, \ldots, v_{n_\varphi}\} = VL(\varphi)$ y tomemos $C_\varphi = \{c_1^{\varphi}, \ldots, c_{n_\varphi}^{\varphi}\}$ un conjunto de nuevas constantes de tal manera que $C_\varphi \cap C_\psi = \emptyset$ siempre que $\varphi \neq \psi$. Tomemos $\rho' = \rho \cup C$ donde $C = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} C_\varphi$ y sea $\Re$ la expansión de $\Im$ a ρ' tal que $(c_i^{\varphi})^{\Re} = s_i^{\varphi}$ para $i \in \{1, \ldots, n_\varphi\}$ para cada $\varphi \in \Gamma$. Ahora definimos el conjunto de ρ'-enunciados

$$\Gamma' = \{\varphi' \mid \varphi \in \Gamma\}$$

donde para cada $\varphi \in \Gamma$, $\varphi' = (\varphi)_{c_i^{\varphi}}^{v_i}$ con $i \in \{1, \ldots, n_\varphi\}$.

Además tenemos que $\Re \models \Gamma'$.

Por otra parte i) $\kappa = \| \rho \| \leq \| \rho' \|$.

ii) $|\rho'| = |\rho| + |C| \leq \kappa + |\bigcup_{\varphi \in \Gamma} C_\varphi| \leq \kappa + \sum_{\varphi \in \Gamma} |C_\varphi| \leq \kappa + \kappa \cdot \aleph_0 = \kappa$ de donde $\| \rho' \| \leq \kappa$.

Por lo tanto $\| \rho' \| = \kappa$.

Utilizando la Versión 5 del Teorema de Löwenheim-Skolem obtenemos que Γ' tiene un modelo $\Re' = \langle A', J' \rangle$ de cardinalidad $\leq \kappa$. Tomando $\Re^*$ el reducto de $\Re'$ a ρ, se tiene que para toda $\varphi \in \Gamma$ existe $s' \in {}^\omega A'$ que cumple $s'_i = (c_i^\varphi)^{\Re'}$ con $i \in \{1, \ldots, n_\varphi\}$.

Como Γ es satisfacible por la ρ-estructura $\Im$, entonces sea $\varphi \in \Gamma$, $\Im \models \varphi[s]$ si y sólo si (pues $s_i^\varphi = (c_i^\varphi)^{\Re}$)

$$\Im \models \varphi[s^\varphi(i/(c_i^\varphi)^{\Re}]$$

si y sólo si

$$\Re \models \varphi[s^\varphi(i/(c_i^\varphi)^{\Re}]$$

si y sólo si (por el Lema de Sustitución)

$$\Re \models (\varphi)_{c_i^\varphi}^{v_i}$$

si y sólo si (por definición)

$$\Re \models \varphi'$$

lo cual implica que

$$\mathfrak{R}' \models \varphi'$$

si y sólo si (por definición)

$$\mathfrak{R}' \models (\varphi)^{v_i}_{c_i^\varphi}$$

si y sólo si (por el Lema de Sustitución)

$$\mathfrak{R}' \models \varphi[s'(i/(c_i^\varphi)^{\mathfrak{R}'})]$$

lo cual implica que (pues φ sólo tiene símbolos de tipo ρ y $s'_i = (c_i^\varphi)^{\mathfrak{R}'}$)

$$\mathfrak{R}^* \models \varphi[s'(i/(c_i^\varphi)^{\mathfrak{R}'})]$$

si y sólo si (por definición de s')

$$\mathfrak{R}^* \models \varphi[s'].$$

Y la cardinalidad de $\mathfrak{R}^*$ es $\leq \kappa$.□

TEOREMA 2.10.- Las Versiones (4), (5) y (6) son equivalentes.

Demostración.- (4)⇒(5) y (5)⇒(6) son precisamente las demostraciones dadas para las versiones (5) y (6) del Teorema de Löwenheim-Skolem. Así, basta demostrar que (6)⇒(4).

Sea $T \subseteq L_\rho^e$ una teoría consistente, por el Teorema de Completud T es satisfacible y por la Versión (6) se tiene que es satisfacible en alguna estructura de cardinalidad $\leq \kappa$.□

TEOREMA 2.11.- La Versión 1 del teorema de Löwenheim-Skolem implica la Versión 5.

Demostración.- Sea $\Sigma \subseteq L^{\varsigma}_{\rho}$ tal que Σ tiene un modelo $\Im = \langle B, J\rangle$. Tomemos $<$ como un buen orden de B (AE). Para cada enunciado $\exists v_i\varphi \in \Sigma$ sea $g(\varphi)$ el primer $b \in B$ (con respecto a $<$) tal que

$$\Im \models \varphi[s(i/b)] \text{ para alguna } s \in {}^{\omega}B$$

Sea $X = \{g(\varphi) | \exists v_i\varphi \in \Sigma\}$ entonces $X \subseteq B$ y por la Versión 1 del Teorema existe $\Re = \langle A, I\rangle$ tal que $X \subseteq A$. $\Re \prec \Im$ y $|A| \leq |X| + \| \rho \|$.

i) $|A| \leq \| \rho \|$ ya que $|X| \leq | \Sigma | \leq \| \rho \|$.

ii) $\Re \models \Sigma$ pues si $\sigma \in \Sigma$ entonces $\Im \models \sigma$ lo cual implica que $\Re \models \sigma$ ya que $\Re \prec \Im$.$\square$

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM. (Versión 7).- Sea Σ un conjunto de enunciados de cardinalidad α con un modelo infinito de cardinal $\beta \geq \alpha$. Entonces Σ tiene un modelo de cualquier cardinal infinito γ tal que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$.

Demostración.- Supongamos que Σ es un conjunto de ρ-enunciados de cardinalidad α con un modelo infinito $\Re$ de cardinalidad $\beta \geq \alpha$. Tomando $X = \emptyset$, por la versión (2) del Teorema de Löwenheim-Skolem tenemos que para cada γ tal que $\| \rho \| \leq \gamma \leq \beta$, $\Re$ tiene una subestructura elemental $\Im$ de cardinalidad γ.

Así $\Im$ es un modelo de Σ. Sin embargo hay un modelo para cada γ tal que $\| \rho \| \leq$

$\gamma \leq \beta$ y nosotros queremos tener un modelo para cada γ infinito tal que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$:

I.- Si $\alpha \leq \aleph_0$ entonces $\| \rho \| = \aleph_0$ pero γ debe ser infinito, de donde

$$\alpha \leq \gamma \leq \beta.$$

II.- Si $\alpha > \aleph_0$ entonces $\alpha = \| \rho \|$ y por lo tanto

$$\alpha \leq \gamma \leq \beta. \square$$

COROLARIO 1.- (Skolem, 1919).- Si Σ es un conjunto contable de enunciados que tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo contable.

Demostración.- Como Σ es un conjunto contable de enunciados, entonces $\| \rho \| = \aleph_0$ y así, aplica la Versión 5 del Teorema de Löwenheim-Skolem.$\square$

Al aplicar este último Corolario a la Teoría de los Números Reales (formalizada en un lenguaje contable) aparece un resultado el cual no deja de chocar con nuestra intuición, a saber, "*Hay un modelo numerable para la Teoría de los Números Reales*": dicho resultado cae en aparente contradicción con el teorema de la Teoría de los Números Reales que afirma que estos últimos son no numerables. A ésta aparente contradicción se le denomina *Paradoja de Skolem*.

La *Paradoja de Skolem* se resuelve al observar que el conjunto que enumera a los elementos del universo de interpretación del modelo numerable de la Teoría de los Números Reales no está en dicho universo de interpretación y, por lo tanto, dicho universo no puede ser "enumerado".

COROLARIO 2.- (Löwenheim, 1915).- Si $\sigma \in L^c_\rho$ es tal que existe $\mathfrak{R} \models \sigma$ entonces existe $\mathfrak{I} = \langle B, J \rangle$ tal que $\mathfrak{I} \models \sigma$ y $|B| \leq \aleph_0$.

Demostración.- Tómese $\Sigma = \{\sigma\}$ en el Corolario 1.$\square$

2.2.- EL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKI(†).

DEFINICIÓN.- Sea $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ una ρ-estructura y sea $\rho' = \rho \cup \{c_a \mid a \in A\}$ con $c_a \neq c_e$ para $a \neq e$. Si $\mathfrak{I}$ es una ρ'-expansión de $\mathfrak{R}$ tal que $c_a^{\mathfrak{I}} = a$ entonces definimos el **diagrama de $\mathfrak{R}$**, en símbolos $\mathfrak{B}(\mathfrak{R})$, de tal manera que

$$\varphi(v_1/c_{a_1}, \ldots, v_n/c_{a_n}) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{R})$$

si y sólo si φ es una fórmula atómica o una fórmula atómica negada de tipo ρ, donde

$$VL(\varphi) = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ y } \mathfrak{I} \models \varphi[s(i/a_i)].$$

TEOREMA 2.12.- $\mathfrak{R}$ es isomorfo a una subestructura de $\mathfrak{I}$ ($\tau(\mathfrak{R}) = \tau(\mathfrak{I})$) si y sólo si alguna expansión de $\mathfrak{I}$ es un modelo de $\mathfrak{B}(\mathfrak{R})$.

Demostración.- $\Rightarrow$) Supongamos que g es un isomorfismo de $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ sobre $\mathfrak{I}' \subseteq \mathfrak{I}$. Sea $\mathfrak{R}^+$ la expansión de $\mathfrak{R}$ tal que cada $a \in A$ es la interpretación de una constante $c_a^{\mathfrak{R}^+}$ en $\mathfrak{R}^+$. Sea $\mathfrak{I}^+ = (\mathfrak{I}, c_a^{\mathfrak{I}^+})_{a \in A}$ donde $c_a^{\mathfrak{I}^+} = g(c_a^{\mathfrak{R}^+})$. Para cada $R, f \in \tau\mathfrak{R}$ tenemos $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{R}^+}$ si y sólo si $\langle g(a_1), \ldots, g(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{I}}$ si y sólo si $\langle c_{a_1}^{\mathfrak{I}^+}, \ldots, c_{a_n}^{\mathfrak{I}^+} \rangle \in R^{\mathfrak{I}^+}$ y $f^{\mathfrak{R}^+}(a_1, \ldots, a_n) = a_0$ si y sólo si $f^{\mathfrak{I}}(g(a_1), \ldots, g(a_n)) = g(a_0)$ si y sólo si $f^{\mathfrak{I}^+}(c_{a_1}^{\mathfrak{I}^+}, \ldots, c_{a_n}^{\mathfrak{I}^+}) =$

$c_{a_0}^{\mathfrak{I}^+}$. También $c_{a_1}^{\mathfrak{R}^+} = c_{a_2}^{\mathfrak{R}^+}$ si y sólo si $g(c_{a_1}^{\mathfrak{R}^+}) = g(c_{a_2}^{\mathfrak{R}^+})$ si y sólo si $c_{a_1}^{\mathfrak{I}^+} = c_{a_2}^{\mathfrak{I}^+}$. Por lo tanto $\mathfrak{I}^+ \in \mathrm{Mod}\mathfrak{B}(\mathfrak{R})$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathfrak{I}^+$ es una expansión de $\mathfrak{I} = \langle B, J\rangle$ y $\mathfrak{I}^+ \in \mathrm{Mod}\mathfrak{B}(\mathfrak{R})$. Para cada $a \in A$ sea c_a el símbolo en $\tau\mathfrak{B}(\mathfrak{R})$ denotando a. Afirmamos que la función g, definida por $g(a) = c_a^{\mathfrak{I}^+}$, es un isomorfismo de A sobre Ran(g) y que Ran(g) es el dominio de una subestructura de $\mathfrak{I}$.

i) Ran(g) es el universo de una subestructura de $\mathfrak{I}$. Debemos mostrar que Ran(g) es cerrado bajo $f^{\mathfrak{I}}$ para toda $f \in \tau\mathfrak{I}$. Sean $b_1,\dots,b_n \in$ **Ran(g)**, digamos $b_i = c_{a_i}^{\mathfrak{I}^+}$. Sea $a = f^{\mathfrak{R}}(a_1,\dots,a_n)$. Entonces $c_a \approx f(c_{a_1},\dots,c_{a_n}) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{R})$ y por lo tanto es verdadera en $\mathfrak{I}^+$, es decir, $c_a^{\mathfrak{I}^+} = f^{\mathfrak{I}^+}(c_{a_1}^{\mathfrak{I}^+},\dots,c_{a_n}^{\mathfrak{I}^+})$. Así $c_a^{\mathfrak{I}^+} = f^{\mathfrak{I}}(b_1,\dots,b_n)$.

ii) g es inyectiva. Si $a_1 \neq a_2$, entonces $\neg(c_{a_1} \approx c_{a_2}) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{R})$, así $\mathfrak{I}^+ \models \neg(c_{a_1} \approx c_{a_2})$ es decir $c_{a_1}^{\mathfrak{I}^+} \neq c_{a_2}^{\mathfrak{I}^+}$, de donde $g(a_1) \neq g(a_2)$.

iii) $\langle a_1,\dots,a_n\rangle \in R^{\mathfrak{R}}$ si y sólo si $R(c_{a_1},\dots,c_{a_n}) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{R})$ si y sólo si $\mathfrak{I}^+ \models R(c_{a_1},\dots,c_{a_n})$ si y sólo si $\langle c_{a_1}^{\mathfrak{I}^+},\dots,c_{a_n}^{\mathfrak{I}^+}\rangle \in R^{\mathfrak{I}^+}$ si y sólo si $\langle g(a_1),\dots,g(a_n)\rangle \in R^{\mathfrak{I}^+}$.

iv) $f^{\mathfrak{R}}(a_1,\dots,a_n) = a$ si y sólo si $(f(c_{a_1},\dots,c_{a_n}) \approx c_a) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{R})$ si y sólo si $\mathfrak{I}^+ \models (f(c_{a_1},\dots,c_{a_n}) \approx c_a)$ si y sólo si $f^{\mathfrak{I}^+}(c_{a_1}^{\mathfrak{I}^+},\dots,c_{a_n}^{\mathfrak{I}^+}) = c_a^{\mathfrak{I}^+}$ si y sólo si $f^{\mathfrak{I}^+}(g(a_1),\dots,g(a_n)) = g(a)$. Así $g(f^{\mathfrak{R}}(a_1,\dots,a_n)) = f^{\mathfrak{I}^+}(g(a_1),\dots,g(a_n))$.□

DEFINICIÓN.- Sean $\mathfrak{R} = \langle A, I\rangle$, $\mathfrak{I} = (\mathfrak{R}, c_a^{\mathfrak{I}})_{a\in A}$, donde $c_a^{\mathfrak{I}} = a$. Entonces Th$\mathfrak{I}$ es un *diagrama completo* de $\mathfrak{R}$, en símbolos $\mathfrak{B}^c(\mathfrak{R})$.

TEOREMA 2.13.- $\mathfrak{R} = \langle A, I\rangle$ es isomorfo a una subestructura elemental de $\mathfrak{I} =$

$\langle B,J\rangle$ **si y sólo si hay una expansión $\Im^+$ de $\Im$ tal que $\Im^+ \in$ Mod $\mathfrak{B}^c(\Re)$.**

Demostración.- Sea $\Re \cong_g \Im' \prec \Im$. Sea $\Re^+ = (\Re, c_a^{\Re^+})_{a\in A}$ donde $c_a^{\Re^+} = a$ para cada $a \in A$. Ahora tomamos $\Im^+ = (\Im, c_a^{\Im^+})$, donde $c_a^{\Im^+} = g(a)$. Mostraremos que $\Im^+ \in Mod\mathfrak{B}^c(\Re)$. Supongamos que $\varphi(c_{a_0},\ldots,c_{a_{n-1}}) \in \mathfrak{B}^c(\Re)$ con $\tau(\varphi(c_{a_0},\ldots,c_{a_{n-1}})) \setminus \tau\Re = \{c_{a_0},\ldots,c_{a_{n-1}}\}$.

Entonces $\Re \models \varphi(a_0,\ldots,a_{n-1})$. Como g es isomorfismo, $\Im' \models \varphi(g(a_0),\ldots,g(a_{n-1}))$. Ya que $\Im' \prec \Im$, $\Im \models \varphi(g(a_0),\ldots,g(a_{n-1}))$. Así $\Im^+ \models \varphi(c_{a_0},\ldots,c_{a_{n-1}})$, de donde $\Im^+ \in Mod\mathfrak{B}^c(\Re)$.

Conversamente, sea $\Im^+$ una expansión de $\Im$ tal que $\Im^+ \in Mod(Th\Re^+)$, donde $\Re^+ = (\Re, c_a^{\Re^+})_{a\in A}$ y $c_a^{\Re^+} = a$. Definimos una función g de A en B por $g(a) = c_a^{\Im^+}$. Tomemos Ran(g) como el universo de interpretación de $\Im'$. Ya que $\mathfrak{B}(\Re) \subseteq \mathfrak{B}^c(\Re)$, tenemos que $\Re \cong_g \Im' \subseteq \Im$ (por el Teorema 2.12).

Ahora sea φ una fórmula tal que $VL(\varphi) = \{v_1,\ldots,v_n\}$, $s \in {}^{\omega}Ran(g)$ y $g^{-1}(s(v_i)) = a_i$.

Entonces $\Im' \models \varphi[s]$ si y sólo si $\Re \models \varphi[g^{-1} \circ s]$ si y sólo si $\Re^+ \models \varphi(c_{a_0},\ldots,c_{a_{n-1}})$ si y sólo si $\Im^+ \models \varphi(c_{a_0},\ldots,c_{a_{n-1}})$ (ya que $\Im^+ \in Mod\mathfrak{B}^c(\Re)$) si y sólo si $\Im \models \varphi[s]$. Así $\Im' \prec \Im$.□

En lo que sigue podremos escribir $\Re \prec \Im$ cuando tengamos que para algún $\Im'$.

$$\Re \cong \Im' \prec \Im$$

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKI. (Versión 1).- Sea $\Re = \langle A,I\rangle$ una ρ-estructura tal que $|A| \geq \aleph_0$ y sea κ un cardinal tal que $\kappa \geq |A| + \|\rho\|$. Entonces existe $\Im = \langle B,J\rangle$ tal que $|B| = \kappa$ y $\Re \prec \Im$.

Demostración.- Con $\mathfrak{R}$ y κ como en las hipótesis, sea $\mathfrak{R}^+ = (\mathfrak{R}, c_a^{\mathfrak{R}^+})_{a \in A}$, donde $c_a^{\mathfrak{R}^+} = a$.

Sea $\{d_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ un conjunto de símbolos de constantes disjunto de $\tau\mathfrak{R}^+$, tal que $d_\alpha \neq d_\beta$ para $\alpha < \beta < \kappa$. Sea $\Gamma = \mathrm{Th}\mathfrak{R}^+ \cup \{\neg(d_\alpha \approx d_\beta) \mid \alpha < \beta < \kappa\}$, claramente cada subconjunto finito de Γ es satisfecho en alguna expansión de $\mathfrak{R}^+$. Así, por compacidad, Γ tiene un modelo $\mathfrak{I}^+$ de cardinalidad κ. Por el Teorema 2.13, $\mathfrak{R} \prec \mathfrak{I}$ donde $\mathfrak{I}$ es el ρ-reducto de $\mathfrak{I}^+$.$\square$

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKI. (Versión 2).- Sea Σ un conjunto de ρ-enunciados, si Σ tiene un modelo infinito entonces Σ tiene un modelo de cualquier cardinalidad κ tal que $\kappa \geq \|\rho\|$.

Demostración.- Sea $\kappa \geq \|\rho\|$, y tomemos un conjunto C de constantes, tal que $C \cap \rho = \emptyset$ y $|C| = \kappa$.

Si $\rho' = \rho \cup C$ definimos ahora el siguiente conjunto de ρ'-enunciados:

$$\Delta = \Sigma \cup \{\neg(c \approx d) \mid c, d \in C \text{ y } c \neq d\}$$

Afirmación.- Δ es finitamente satisfacible.

Sea $\Gamma \subseteq \Delta$, finito y sea $C_0 = \{c \in C \mid c \in \tau(\Gamma)\}$, es claro que C_0 es finito. Por hipótesis existe una ρ-estructura $\mathfrak{R} = \langle A, I\rangle$ tal que $\mathfrak{R} \models \Sigma$ y $|A| \geq \aleph_0$. Como A es infinito, para cada $c \in C_0$, hay $a_c \in A$, de tal manera que si $c, d \in C_0$ y $c \neq d$ entonces $a_c \neq a_d$.

Sea $\Im = \langle \Re, \{c^{\Im} \mid c \in C_0\}\rangle$ donde $c^{\Im} = a_c$, para toda $c \in C_0$; así $\Im \models \Sigma$. Si $\neg(c \approx d) \in \Gamma$, entonces $c, d \in C_0$ y $c \neq d$, por lo que $c^{\Im} = a_c \neq a_d = d^{\Im}$ y, por lo tanto $\Im \models \neg(c \approx d)$. De donde se tiene que $\Im \models \Gamma$, es decir, Γ es satisfacible y, por lo tanto, Δ es finitamente satisfacible; utilizando el Teorema de Compacidad, tenemos que Δ es satisfacible por alguna estructura $\Re^* = \langle A', I'\rangle$ tal que $|A'| \leq |\Delta| = \| \tau\Delta \|$. Ya que $|\Sigma| \leq \|\rho\| \leq \kappa$ tenemos que $|\Delta| \leq |\Sigma| + \kappa = \kappa$. Y, ya que $\Re^* \models \neg(c \approx d)$ para toda $c, d \in C$ con $c \neq d$ entonces $|A'| \geq |C| = \kappa$. Así $|A'| = \kappa$.□

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKI. (Versión 3).- Sea Γ un conjunto de fórmulas en un lenguaje de cardinalidad κ y supongamos que Γ es satisfacible en alguna estructura infinita. Entonces para todo cardinal $\lambda \geq \kappa$ existe una estructura de cardinalidad λ en la que se satisface Γ.

Demostración.- Sea Γ un conjunto de fórmulas en algún lenguaje de cardinalidad κ y supongamos que Γ es satisfacible en alguna estructura infinita $\Re = \langle A, I\rangle$. Así, para cada $\varphi \in \Gamma$ sea $s^{\varphi} \in {}^{\omega}A$ tal que $\Re \models \varphi[s^{\varphi}]$.

Tomemos

$$C = \{c_i^{\varphi} \mid \varphi \in \Gamma,\ v_i \in VL(\varphi)\}$$

un conjunto de nuevas constantes y sea $\Im$ la expansión de $\Re$ al tipo $\rho' = \rho \cup C$ de tal manera que $(c_i^{\varphi})^{\Im} = s_i^{\varphi}$. De donde $\Re \models \varphi[s^{\varphi}]$ si y sólo si $\Im \models (\varphi)_{c_i^{\varphi}}^{v_i}$.

Sea $\Sigma = \{(\varphi)_{c_i^{\varphi}}^{v_i} \mid \varphi \in \Gamma\}$. Ya que $|\Gamma| \leq \kappa$ se tiene $|C| \leq \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa$. Así $\|\rho'\| = \kappa$. Además $\Im$ es infinito pues es la expansión al tipo ρ' de una estructura infinita. Por la Versión 2 del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski, Σ tiene un modelo $\Im_{\lambda}$ para todo cardinal λ tal que $\lambda \geq \|\rho'\| = \|\rho\|$.

Tomando $\Im_\lambda$' el reducto de $\Im_\lambda$ a ρ se tiene que Γ se satisface en $\Im_\lambda$' puesto que si $\varphi \in \Gamma$, entonces $\Im_\lambda \models (\varphi)^{v_i}_{c_i^\varphi}$ para $i = \{1,...,n_\varphi\}$ donde $VL(\varphi) = \{v_i \mid i = 1,...,n_\varphi\}$.

Así, si $\Im_\lambda = \langle B_\lambda, J_\lambda \rangle$ tomemos $a_i^\varphi \in B_\lambda$ de manera que $a_i^\varphi = (c_i^\varphi)^{\Im_\lambda}$ para $i = 1,...,n_\varphi$ y sea $s \in {}^\omega B_\lambda$' tal que

$$s(i) = \begin{cases} a_i^\varphi & \text{si } v_i \in VL(\varphi) \\ a \in B_\lambda' & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces $\Im_\lambda' \models \varphi[s]$.□

TEOREMA 2.14.- Las Versiones (2) y (3) del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski son equivalentes.

Demostración.- (2)⇒(3) es precisamente la demostración de (3). Así, basta demostrar que (3)⇒(2):

Sea $\Sigma \subseteq L_\rho^e$. Supongamos que Σ tiene un modelo infinito. Tomemos $\kappa = \| \rho \|$. Por (3), tenemos que para todo cardinal $\lambda \geq \kappa$, existe una estructura de cardinalidad λ que es modelo de Σ.□

TEOREMA 2.15.- La Versión (1) del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski implica a la Versión (2) del mismo.

Demostración.- Sea $\Sigma \subseteq L_\rho^e$ tal que existe una ρ-estructura $\Re = \langle A, I \rangle$ que es modelo de Σ, con $|A| \geq \aleph_0$ y sea $\kappa \geq |A| + \| \rho \|$

i) Si $|A| \leq \| \rho \|$, tenemos por la Versión (1) que existe $\mathfrak{I} = \langle B,J \rangle$ tal que $|B| = \kappa$ y $\mathfrak{R} \prec \mathfrak{I}$, con lo cual se tiene la Versión (2) del Teorema.

ii) Si $|A| > \| \rho \|$. Por la Versión (2) del Teorema de Löwenheim-Skolem ($\downarrow$) tenemos que $\mathfrak{R}$ tiene una subestructura elemental $\mathfrak{I} = \langle B,J \rangle$ de cardinalidad $\| \rho \|$. con lo cual $\mathfrak{I} \models \Sigma$ y a ésta última le aplicamos el inciso i).□

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKI. (Versión 4).- Sea Σ un conjunto de ρ-enunciados de cardinalidad α, si Σ tiene un modelo de cardinalidad $\beta \geq \aleph_0$ entonces Σ tiene un modelo de cualquier cardinal $\geq \max\{\alpha, \beta\}$.

Demostración.- Sea Σ un conjunto de ρ-enunciados de cardinalidad α y supongamos que Σ tiene un modelo de cardinalidad β. Por la Versión (2) del Teorema de **Löwenheim-Skolem-Tarski** tenemos que Σ tiene un modelo de cualquier cardinalidad κ tal que $\kappa \geq \| \rho \|$.

I.- Si $\alpha \leq \aleph_0$ entonces $\| \rho \| = \aleph_0$ pues hay solamente un número finito ó numerable de símbolos en ρ. Así Σ tiene un modelo de cualquier cardinal $\kappa \geq \aleph_0$ en particular de cualquier cardinal $\kappa \geq \max\{\alpha, \beta\} \geq \aleph_0$.

II.- Si $\alpha > \aleph_0$ entonces $\| \rho \| = \alpha$ pues hay α símbolos en ρ. Así Σ tiene un modelo de cualquier cardinal $\kappa \geq \alpha$ en particular de cualquier cardinal $\kappa \geq \max\{\alpha, \beta\}$.□

La anterior demostración prueba además que la versión (2) del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski implica a la versión (4) del mismo.

La siguiente es una Versión muy restringida (para una Lógica sin identidad) del

Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski cuya demostración es muy sencilla y no necesita del Teorema de Compacidad:

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKI PARA LÓGICA SIN IDENTIDAD.- Si Σ es un conjunto de enunciados sin símbolo $\approx$ que tiene un modelo $\mathfrak{R} = \langle A,I\rangle$ de cardinalidad κ, entonces Σ tiene un modelo $\mathfrak{I} = \langle B,J\rangle$ de cualquier cardinalidad $\lambda > \kappa$.

Demostración.- Sea $\lambda > \kappa$. Si λ es un cardinal finito, tomemos E un conjunto tal que $E \cap A = \emptyset$ y $|E| + |A| = \lambda$; y si λ es infinito, sea E un conjunto de cardinalidad λ.

Sea $B = E \cup A$, $a_0 \in A$ y $h : B \to A$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \subseteq B \\ a_0 & \text{si } x \in B \setminus A \end{cases}$$

Definimos la estructura $\mathfrak{I}$ con universo de interpretación B como sigue:

a) $\langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in P_n^{\mathfrak{I}}$ si y sólo si $\langle h(e_1), \ldots, h(e_n)\rangle \in P_n^{\mathfrak{R}}$.
b) $f^{\mathfrak{I}}(e_1, \ldots, e_n) = f^{\mathfrak{R}}(h(e_1), \ldots, h(e_n))$.
c) $c^{\mathfrak{I}} = c^{\mathfrak{R}}$.

Obviamente h es un homomorfismo de B en A que además es suprayectivo, es decir, h es un epimorfismo. Ya que para todo $\sigma \in \Sigma$, σ no tiene el símbolo $\approx$ entonces por el inciso iv del Teorema del Homomorfismo, tenemos que

$$\mathfrak{I} \models \sigma[s] \text{ si y sólo si } \mathfrak{R} \models \sigma[h \circ s]$$

pero ya que σ es un enunciado, tenemos que

$$\mathfrak{I} \models \sigma \text{ si y sólo si } \mathfrak{R} \models \sigma$$

y la cardinalidad de B es λ□

2.3.- EL AXIOMA DE ELECCIÓN.

Las siguientes son proposiciones de la Teoría de Conjuntos que se pueden probar sin necesidad de utilizar el Axioma de Elección. Apoyándonos en ellas podremos demostrar que cualquiera de las versiones dadas del Teorema de Löwenheim-Skolem o del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski implica al Axioma de Elección.

TEOREMA(CANTOR).- Para todo conjunto A

$$A \not\approx \wp(A)$$

donde $\wp(A)$ es el conjunto potencia de A.

Demostración.- Sea $f: A \to \wp(A)$ y tomemos

$$B = \{y \in A \mid y \notin f(y)\}$$

afirmamos que $B \notin f[A]$, pues si $B = f(z)$ para algún $z \in A$ tenemos que

$$\text{si } z \in B \Rightarrow z \notin f(z) \Rightarrow z \notin B$$
$$\text{si } z \notin B \Rightarrow z \notin f(z) \Rightarrow z \in B$$

de donde

$$z \in B \Longleftrightarrow z \notin B$$

lo cual es obviamente una contradicción, por lo tanto f no puede ser suprayectiva.$\square$

AFIRMACIÓN.- $A \preceq \wp(A)$.

Demostración.- Sea $f: A \rightarrow \wp(A)$ la función dada por

$$f(x) = \{x\}$$

entonces se puede demostrar que f es inyectiva y por lo tanto

$$A \preceq_f \wp(A)\square$$

Por el Teorema de Cantor y la Afirmación tenemos que

$$A \prec_f \wp(A) \sim {}^{A}2.\square$$

Las siguientes proposiciones se cumplen para cualesquiera cardinales γ y δ.

PROPOSICIÓN 2.1.- $\gamma \leq \gamma \cdot \aleph_0$.

Demostración.- Sean $|K| = \gamma$ y $k \in K$, definimos la función f como

$$f(k) = \langle k, \emptyset \rangle$$

así

$$f: K \rightarrow K \times \omega$$

ya que f es una función inyectiva tenemos entonces que

$$K \preceq_f K \times \omega$$

y. por lo tanto

$$\gamma \leq \gamma \cdot \aleph_0 . \square$$

PROPOSICIÓN 2.2.- Si $\gamma \leq \delta$ entonces $2^\gamma \leq 2^\delta$.

Demostración.- Sean $|M| = \gamma$ y $|L| = \delta$ ya que $\gamma \leq \delta$ se tiene que existe $f : M \to L$ tal que f es inyectiva; nosotros queremos demostrar que ${}^M 2 \preceq {}^L 2$.

Sea $x_0 \in 2$. Definimos la función G tal que

$$G : {}^M 2 \to {}^L 2$$

de tal manera que para toda $h \in {}^M 2$

$$G(h)(z) = \begin{cases} h(y) & \text{si } z = f(y) \text{ para alguna } y \in M \\ x_0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

como G es inyectiva. tenemos que

$${}^M 2 \preceq_G {}^L 2$$

y. por lo tanto

$$2^\gamma \leq 2^\delta . \square$$

PROPOSICIÓN 2.3.- $\gamma < 2^\gamma$.

Demostración.- Sea $|M| = \gamma$, por el Teorema de Cantor y la Afirmación tenemos que

$$M \prec \wp(M) \sim {}^{M}2.$$

así

$$\gamma < 2^{\gamma}. \square$$

PROPOSICIÓN 2.4.- $(\gamma^{\delta})^{2} = \gamma^{2\delta}$.

Demostración.- Sean $|M| = \gamma$ y $|L| = \delta$ entonces definimos la función f tal que

$$f : {}^{2}({}^{L}M) \to {}^{2\times L}M$$

y de manera que si $z_1 \in 2$ y $z_2 \in L$ entonces

$$f(h)(z_1, z_2) = g(z_2)$$

donde

$$h(z_1) = g$$

f es inyectiva: si $h_1 \neq h_2$ entonces existe $z \in 2$ tal que $h_1(z) \neq h_2(z)$, es decir hay un z' tal que $g_1(z') \neq g_2(z')$. Así

$$f(h_1)(z, z') = g_1(z') \neq g_2(z') = f(h_2)(z, z')$$

f es suprayectiva: sea $f' : 2 \times L \to M$ de manera que

$$f^{*}(0,z) = g(z) \text{ para todo } z \in L \text{ y}$$
$$f^{*}(1,z) = w(z) \text{ para todo } z \in L.$$

Así

$$h(z_1) = \begin{cases} g & \text{si } z_1 = 0 \\ w & \text{si } z_1 = 1 \end{cases}$$

y entonces

$$f(h)(z_1,z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } z_1 = 0 \\ w(z) & \text{si } z_1 = 1 \end{cases}$$

es decir $f(h) = f^{*}$.

De donde

$$^{2}(\,^{L}M\,) \sim_{f} \,^{2\times L}M$$

y, por lo tanto se tiene que

$$(\gamma^{\varepsilon})^{2} = \gamma^{2\varepsilon}. \square$$

PROPOSICIÓN 2.5.- $\gamma \cdot \aleph_0 \cdot 2 = \gamma \cdot \aleph_0$.

Demostración.- Tenemos que

$$\gamma \cdot \aleph_0 \cdot 2 = \gamma \cdot (\aleph_0 \cdot 2)$$

pero

$$\aleph_0 \cdot 2 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot 2$$

por lo tanto

$$\gamma \cdot \aleph_0 \cdot 2 = \gamma \cdot \aleph_0 \square$$

En la anterior proposición se utilizó que la función

$$F : \omega \times \omega \to \omega$$

dada por

$$F(m.n) = \frac{1}{2}((m+n)^2 + 3m + n)$$

es una función biyectiva lo cual se puede demostrar sin utilizar el Axioma de Elección.

LEMA 2.1.- **Para cada cardinal α existe un cardinal β tal que $\alpha < \beta$ y $\beta^2 = \beta$; Esto ocurre sin necesidad del Axioma de Elección.**

Demostración.- **Supongamos que α es cualquier cardinal y tomemos β como $2^{\alpha\cdot\aleph_0}$. Por la Proposición 2.1 tenemos**

$$\alpha \leq \alpha \cdot \aleph_0$$

Utilizando la Proposición 2.2:

$$2^\alpha \leq 2^{\alpha \cdot \aleph_0}$$

Pero por la Proposición 2.3 obtenemos

$$\alpha < 2^{\alpha \cdot \aleph_0} = \beta$$

De aquí, por la Proposición 2.4

$$\beta^2 = (2^{\alpha \cdot \aleph_0})^2 = (2^{2 \cdot \alpha \cdot \aleph_0})$$

De lo cual por la Proposición 2.5 resulta que

$$\beta^2 = (2^{2 \cdot \alpha \cdot \aleph_0}) = (2^{\alpha \cdot \aleph_0}) = \beta. \square$$

TEOREMA 2.16.- El Teorema de Löwenheim-Skolem (↓) (Versiones 1, 2, 3 ó 7) implica el Axioma de Elección.

Demostración.- Supongamos que el Teorema de Löwenheim-Skolem (↓) es verdadero. Sea α un cardinal infinito. Por el Lema 2.1 existe un cardinal β tal que podemos demostrar que $\beta^2 = \beta$ donde $\alpha < \beta$ sin utilizar el Axioma de Elección.

Sea σ el enunciado

$$\forall v \forall u \exists w \forall x (P(v,u,x) \longleftrightarrow w \approx x) \wedge \forall z \exists u \exists v \forall x \forall y (P(x,y,z) \longleftrightarrow x \approx u \wedge y \approx v)$$

Al interpretar la letra predicativa P resulta una relación la cual indexa a la colección de todos los pares ordenados de elementos del dominio con elementos del dominio.

Ya que $\beta^2 = \beta$, existe una función biyectiva ϕ de $\beta \times \beta$ sobre β. Claramente si

$$R = \left\{ \langle x,y,z \rangle \in \beta^3 \mid \phi(x,y) = z \right\}$$

entonces al interpretar P como R se tiene un modelo de σ. Por la versión (7) del Teorema de Löwenheim-Skolem se sigue que σ tiene un modelo de cardinalidad α, digamos $\mathfrak{R} = (A, I)$. Definimos $\psi : A \times A \rightarrow A$ como $\psi(x,y) = z$ si y sólo si $(x,y,z) \in P^{\mathfrak{R}}$.

Ya que $\mathfrak{R}$ es un modelo de σ, ψ es una función biyectiva. En consecuencia $|A \times A| = |A|$, esto es, $\alpha^2 = \alpha$.

Así hemos demostrado que, para todo cardinal infinito α, $\alpha^2 = \alpha$. Pero este último resultado es equivalente al Axioma de Elección.□

TEOREMA 2.17.- El Teorema de Löwenheim-Skolem ($\downarrow$) (Versiones 4, 5 ó 6) implica el Axioma de Elección.

Demostración.- Supongamos que el Teorema de Löwenheim-Skolem ($\downarrow$) es verdadero. Sea α un cardinal infinito. Por el Lema 2.1 existe un cardinal β tal que podemos demostrar que $\beta^2 = \beta$ donde $\alpha < \beta$ sin utilizar el Axioma de Elección.

Sea σ el enunciado

$$\forall v \forall u \exists w \forall x (P(v,u,x) \longleftrightarrow w \approx x) \wedge \forall z \exists u \exists v \forall x \forall y (P(x,y,z) \longleftrightarrow x \approx u \wedge y \approx v)$$

Sea $C = \{c_\gamma \mid \gamma \leq \alpha\}$ un conjunto de α nuevas constantes tal que $c_\gamma \neq c_\delta$ para $\gamma < \delta \leq \alpha$ y sea

$$\Sigma = \{\neg(c_\gamma \approx c_\delta) \mid \gamma < \delta \leq \alpha\} \cup \{\sigma\}.$$

Ya que $\beta^2 = \beta$, existe una función biyectiva ϕ de $\beta \times \beta$ sobre β. Así hay un modelo de cardinalidad β de Σ pues $\alpha < \beta$ y, por lo tanto podemos obtener interpretaciones distintas para las distintas constantes de C.

Así, por la versión 5 del Teorema de Löwenheim-Skolem. Σ tiene un modelo $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ tal que $|A| \leq \| \rho \|$ donde

$$\rho = \{P\} \cup C$$

de aquí que $|A| \leq \alpha$

Sin embargo. ya que $\mathfrak{R} \models \Sigma$ se tiene que $c_\gamma^{\mathfrak{R}} \neq c_\delta^{\mathfrak{R}}$ siempre que $\gamma < \delta \leq \alpha$. Así $\alpha \leq |A|$

Así, tenemos que para todo cardinal α, $\alpha^2 = \alpha$.□

TEOREMA 2.18.- El Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski (↑) (Versiones 1, 2, 3 ó 4) implica el Axioma de Elección.

Demostración.- Sin utilizar el Axioma de Elección podemos demostrar que $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. En efecto, la función f definida por

$$f(m,n) = \frac{1}{2}((m+n)^2+3m+n)$$

resulta ser una función biyectiva de $\omega \times \omega$ sobre ω. De ésta manera el enunciado σ del Teorema 2.16 tiene un modelo de cardinalidad $\aleph_0$. En consecuencia, utilizando la Versión (4) (la Versión más débil) del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski tenemos que σ tiene un modelo de cualquier cardinal infinito α. En consecuencia, como antes, para cada cardinal infinito α, $\alpha^2 = \alpha$ y así tenemos que el Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski (↑) implica el Axioma de Elección.□

Estos tres últimos resultados explican el hecho de que en todas las demostraciones dadas aquí de cualquiera de las Versiones dadas de los Teoremas de Löwenheim-Skolem aparecía siempre inmiscuido el Axioma de Elección. Además, tenemos que las versiones 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 del Teorema de Löwenheim-Skolem (↓) y las versiones 1, 2, 3 y 4 del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski (↑) son equivalentes.

Los siguientes son diagramas de las implicaciones y equivalencias de las Versiones dadas del Teorema de Löwenheim-Skolem:

Teorema de Löwenheim-Skolem.

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Versión 5} & \Longleftrightarrow & \text{Versión 6} & \Longleftrightarrow & \text{Versión 4} \\
 & & \Uparrow & & \Downarrow & & \\
\text{Versión 3} & \Longleftrightarrow & \text{Versión 1} & \Longleftarrow & \text{AE} & & \\
 & & \Downarrow & & \Uparrow & & \\
 & & \text{Versión 2} & \Longrightarrow & \text{Versión 7} & &
\end{array}}$$

Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski.

$$\boxed{\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Versión 1} & \Longleftarrow & \text{AE} \\
 & & \Downarrow & & \Uparrow \\
\text{Versión 3} & \Longleftrightarrow & \text{Versión 2} & \Longrightarrow & \text{Versión 4}
\end{array}}$$

CAPÍTULO 3.- EL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM PARA LENGUAJES INFINITARIOS.

3.1.- DESCRIPCIÓN DE LOS LENGUAJES $L_{\kappa\lambda}$ E INTERPRETACIONES.

DEFINICIÓN.- Dados κ, $\lambda \in$CAR con $\kappa \geq \lambda$ el *lenguaje (formal) $L_{\kappa\lambda}$ de tipo* ρ es el siguiente conjunto de símbolos:

$$L_{\kappa\lambda}(\rho) = \rho \cup \{v_\eta \mid \eta < \kappa\} \cup \{\approx\} \cup \{\neg, \bigwedge\} \cup \{\exists\} \cup \{), (, \cdot\}.$$

Sea $\mu \in$ CAR' con $\mu < \kappa$, entonces denotaremos con $v|_\mu$ a la sucesión

$$< v_\eta \mid \eta < \mu > .$$

VAR denotará al conjunto $\{v_\eta \mid \eta < \kappa\}$ de todas las variables.

DEFINICIÓN.- Una *$\rho_{\kappa\lambda}$-expresión* es una sucesión $< x_\eta \mid \eta < \delta >$ donde $\delta < \kappa$ y tal que $x_\eta \in L_{\kappa\lambda}(\rho)$ para toda $\eta < \delta$. Al conjunto de $\rho_{\kappa\lambda}$-expresiones lo denotaremos $E_{\rho_{\kappa\lambda}}$.

El conjunto de los términos de tipo ρ y el de fórmulas atómicas para los lenguajes $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ se definen de la misma manera que para la Lógica de Primer Orden, la cual, utilizando esta notación se denota como $L_{\omega\omega}$.

DEFINICIÓN.- El conjunto de las *fórmulas primitivas* para un lenguaje $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ es el menor conjunto $A \subseteq E_{\rho_{\kappa\lambda}}$ tal que

i) $\{\Phi \mid \Phi$ es una fórmula atómica$\} \subseteq A$.

ii) Si $\Phi \in A$ entonces $\neg\Phi \in A$.

iii) Si $\mu < \kappa$ y para cada $\eta < \mu$ se tiene que $\Phi_\eta \in A$ entonces $(\bigwedge \Phi_0 \Phi_1 \ldots \Phi_\eta \ldots) \in A$.

iv) Si $\delta < \lambda$, $\Phi \in A$ y $< v_{\alpha_\xi} \mid \xi < \delta >$ es una sucesión de variables (donde $\alpha_\xi < \kappa$ para cada $\xi < \delta$) entonces $(\exists v_{\alpha_0} v_{\alpha_1} \ldots v_{\alpha_\xi} \ldots \Phi) \in A$.

Fórmulas primitivas tales como

$$(\bigwedge \Phi_0 \Phi_1 \ldots \Phi_\eta \ldots). \qquad (\exists v_{\alpha_0} v_{\alpha_1} \ldots v_{\alpha_\xi} \ldots \Phi)$$

serán abreviadas como sigue:

$$(\bigwedge_{\eta<\mu} \Phi_\eta). \qquad ((\exists v_{\alpha_\xi} |_{\delta})\Phi).$$

Con objeto de simplificar la notación utilizaremos las siguientes reglas:

Si Ψ es un conjunto no vacío de fórmulas de $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ de cardinalidad menor que κ, $\bigwedge\Psi$ denota la conjunción de todas las fórmulas primitivas en Ψ.

Si X es un conjunto no vacío de variables de cardinalidad menor que λ y φ es una fórmula primitiva de $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ entonces $(\exists X)\varphi$ denotará la fórmula primitiva definida en iv.

DEFINICIÓN.- Sea Φ una fórmula primitiva de $L_{\kappa\lambda}(\rho)$. En la fórmula primitiva

$$(\exists v_{\alpha_0} v_{\alpha_1} \ldots v_{\alpha_\xi} \ldots \Phi)$$

a la fórmula Φ le llamaremos el *alcance del cuantificador* $\exists v_{\alpha_0} v_{\alpha_1} \ldots v_{\alpha_\xi} \ldots$.

DEFINICIÓN.- Sea Φ una fórmula primitiva de $L_{\kappa\lambda}(\rho)$. Diremos que una ocurrencia de la variable v_η con $\eta < \delta < \lambda$ en Φ es *acotada* si y sólo si tal ocurrencia

i) Es alguna de las variables de un cuantificador $\exists$.

ii) Está dentro del alcance de un cuantificador $\exists v_{\alpha_0} v_{\alpha_1} \ldots v_\eta \ldots$

en otro caso diremos que la ocurrencia es *libre*. $VL(\varphi)$ denotará el conjunto de todas las variables libres en la fórmula φ.

DEFINICIÓN.- Cualquier fórmula primitiva de $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ con menos de λ variables libres será llamada una fórmula (bien formada) de $L_{\kappa\lambda}(\rho)$. FORM($L_{\kappa\lambda}(\rho)$) denota el conjunto de todas las fórmulas (bien formadas) de $L_{\kappa\lambda}(\rho)$.

Dos lenguajes relacionados a los lenguajes $L_{\kappa\lambda}$ son frecuentemente considerados. El primero de ellos es llamado $L_{\infty\lambda}$ ($\lambda \in CAR$); la clase de las fórmulas es definida por:

$$FORM(L_{\infty\lambda}(\rho)) = \bigcup_{\kappa \geq \lambda} FORM(L_{\kappa\lambda}(\rho)).$$

El segundo lenguaje es llamado $L_{\infty\infty}$ y la clase de sus fórmulas está definida como:

$$\mathrm{FORM}(L_{\infty\infty}(\rho)) = \bigcup_{\lambda\in CAR} \mathrm{FORM}(L_{\infty\lambda}(\rho)).$$

DEFINICIÓN.- Sean X, Y$\subseteq$VAR, $\Re = \langle A, I\rangle$ una estructura. Sean $f: X \longrightarrow A$, $g: Y \longrightarrow A$ dos funciones arbitrarias, entonces la función $f^*g: X\cup Y \longrightarrow A$ está definida por:

$$(f^*g)(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in X \setminus Y \\ g(z) & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

DEFINICIÓN.- La interpretación de un término τ en una estructura $\Re$ bajo una función de asignación $f: \mathrm{VAR} \longrightarrow A$ denotada por $\tau^{\Re}[f]$ se define recursivamente como:

- Si $\tau \in \mathrm{VAR} \cup C$

  i) Si $\tau = x \in \mathrm{VAR}$. $\tau^{\Re}[f] = f(x)$.

  ii) Si $\tau = c \in C \subseteq \rho$, $\tau^{\Re}[f] = c^{\Re}$.

- Sean $n \in \omega^*$, f$\in F_n$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathrm{TERM}_\rho$

  Si $\tau = F(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ entonces

$$\tau^{\Re}[f] = F^{\Re}(\tau_1^{\Re}[f], \ldots, \tau_n^{\Re}[f]).$$

DEFINICIÓN.- Sea ρ un tipo de semejanza, $\Re = \langle A, I\rangle$ una ρ-interpretación, $f: X \longrightarrow A$ y $\varphi \in \mathrm{FORM}(\, L_{\kappa\lambda}(\rho)\,)$, definimos la relación $\Re$ *satisface a la fórmula* φ *con la función* f, $\Re \models \varphi[f]$, recursivamente como sigue:

- Si $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathrm{TERM}_\rho$ entonces

  i) $\mathfrak{R} \models (\tau_1 \approx \tau_2)[\mathrm{f}]$ si y sólo si $\tau_1^{\mathfrak{R}}[\mathrm{f}] = \tau_2^{\mathfrak{R}}[\mathrm{f}]$.

  ii) $\mathfrak{R} \models \mathrm{P}(\tau_1, \ldots, \tau_n)[\mathrm{f}]$ si y sólo si $\langle \tau_1^{\mathfrak{R}}[\mathrm{f}], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{R}}[\mathrm{f}] \rangle \in \mathrm{P}^{\mathfrak{R}}$.

- Si $\varphi', \psi \in \mathrm{FORM}_\rho$, $\Psi \subseteq \mathrm{FORM}_\rho$ entonces

  i) $\mathfrak{R} \models (\neg\psi)[\mathrm{f}]$ si y sólo si no ocurre que $\mathfrak{R} \models \psi[\mathrm{f}]$.

  ii) $\mathfrak{R} \models (\bigwedge \Psi)[\mathrm{f}]$ con $|\Psi| < \kappa$ si y sólo si para toda $\sigma \in \Psi$, $\mathfrak{R} \models \sigma[\mathrm{f}]$.

  iii) $\mathfrak{R} \models (\exists X\varphi')[\mathrm{f}]$ si y sólo si hay una función $\mathrm{g} : X \longrightarrow A$ con $X \subseteq \mathrm{VAR}$ tal

que

$$\mathfrak{R} \models \varphi'[\mathrm{f}^*\mathrm{g}].$$

DEFINICIÓN.- La clase $\mathrm{Qf}_{\kappa\lambda}$ de las fórmulas de $\mathrm{L}_{\kappa\lambda}$ libres de cuantificador es la clase más pequeña de fórmulas de este lenguaje conteniendo todas las fórmulas atómicas y cerrada bajo negación y bajo conjunciones y disyunciones de longitud menor que κ.

En lo que sigue κ puede ser un cardinal infinito ó ∞.

DEFINICIÓN.- Sea Γ una clase de fórmulas infinitarias de tipo ρ, $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ y $\mathfrak{I} = \langle B, J \rangle$ dos ρ-estructuras. Una función $\mathrm{f} : A \longrightarrow B$ es llamada un Γ-morfismo si y sólo si para todo $\varphi \in \Gamma$ y toda $\mathrm{g} \in A^{\mathrm{VL}(\varphi)}$

$$\mathfrak{R} \models \varphi[\mathrm{g}] \Rightarrow \mathfrak{I} \models \varphi[\mathrm{f} \circ \mathrm{g}].$$

LEMA 3.1.- (1) Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y f es un Δ-morfismo entonces f es un Γ-morfismo.

(2) Si x, y $\in$VAR con $x \neq y$, $\neg(x \approx y) \in \Gamma$ y f es un Γ-morfismo, entonces f es uno a uno.

(3) Si f es un Γ-morfismo y Γ es cerrado bajo negación entonces

$$\mathfrak{R} \models \varphi[g] \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \varphi[f \circ g]$$

para toda $g \in A^{VL(\rho)}$ y toda $\varphi \in \Gamma$.

PROPOSICIÓN 3.1.- Sean $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$ y $\mathfrak{I} = \langle B,J \rangle$ dos ρ-estructuras tales que $A \subseteq B$ y supongamos que $id_{\mathfrak{R},\mathfrak{I}}$ denota la función identidad de A en B entonces $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{I}$ si y sólo si $id_{\mathfrak{R},\mathfrak{I}}$ es un $Qf_{\infty\omega}(\rho)$-morfismo.

DEFINICIÓN.- Sean $\mathfrak{R} = \langle A,I \rangle$ y $\mathfrak{I} = \langle B,J \rangle$ dos ρ-estructuras,

(1) Un $Qf_{\infty\omega}(\rho)$-morfismo de A en B es llamado un monomorfismo.

(2) Un $At(\rho)$-morfismo de A en B es llamado un homomorfismo.

(3) Un monomorfismo de A sobre B es llamado un isomorfismo.

(4) Un FORM($L_{\kappa\lambda}(\rho)$)-morfismo es llamado un $L_{\kappa\lambda}$-morfismo.

(5) Si $A \subseteq B$ e $id_{\mathfrak{R},\mathfrak{I}}$ es un Γ-morfismo, $\mathfrak{R}$ será llamado una Γ-subestructura de $\mathfrak{I}$: en símbolos $\mathfrak{R} \subseteq^{\Gamma} \mathfrak{I}$.

Si $\Gamma = L_{\kappa\lambda}$ $\mathfrak{R}$ es una $L_{\kappa\lambda}$-subestructura de $\mathfrak{I}$, en símbolos $\mathfrak{R} \prec_{\kappa\lambda} \mathfrak{I}$. Más generalmente $\mathfrak{R}$ es $L_{\kappa\lambda}$-encajable en $\mathfrak{I}$ si y sólo si hay un $L_{\kappa\lambda}$-morfismo f tal que

$$f : A \longrightarrow B.$$

Observación.- Para $\kappa = \lambda = \omega$ obtenemos los conceptos de mapeo elemental y subestructura elemental.

PROPOSICIÓN 3.2.- Sean $\Re = \langle A,I \rangle$ y $\Im = \langle B,J \rangle$. Las siguientes condiciones son equivalentes para una función

$$f : A \rightarrow B$$

i) f es un $L_{\kappa\lambda}$-morfismo.

ii) Para toda $\varphi \in FORM(L_{\kappa\lambda}(\rho))$ y toda $g \in A^{VL(\varphi)}$

$$\Re \models \varphi[g] \Leftrightarrow \Im \models \varphi[f \circ g].$$

3.2.- EL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM PARA LENGUAJES $L_{\kappa\lambda}$.

Sea $\Im = \langle B,J \rangle$. Dado $Y \subseteq B$ denotaremos por $cl(Y)$ al mínimo subconjunto de B conteniendo a Y y cerrado bajo todas las operaciones (y constantes) del tipo de semejanza ρ de $\Im$.

Observación.- $cl(Y)$ es el universo de interpretación de $(Y)_{\Im}$, la mínima subestructura de $\Im$ cuyo dominio de interpretación contiene a Y.

En el Capítulo 2 (Teorema 2.3) demostramos que $|cl(Y)| \leq |Y| + \|\rho\|$.

Los siguientes Lemas (3.2 y 3.3) proporcionan una sucesión de subconjuntos del dominio de interpretación de una estructura infinita $\Im$; al tomar la unión de los elementos de dicha sucesión obtendremos el dominio de interpretación de una subestructura elemental de $\Im$ con la cual demostraremos el Teorema de Löwenheim-Skolem para lenguajes infinitarios.

LEMA 3.2.- Sea $\Im = \langle B, J\rangle$ una ρ-estructura infinita, sea $X \subseteq B$ y sea Γ un conjunto de $L_{\kappa\lambda}$-fórmulas tal que $Sbf(\Gamma) \subseteq \Gamma$; sea $\mu = \sup\{\aleph_0, |VL(\varphi)| \mid \varphi \in \Gamma\}$, ν un cardinal ≥ 2 y τ un cardinal $\geq \mu$. Supongamos que

$$\max\{ |X|, |\rho|, |\Gamma| \} \leq \nu^{\tau} \leq |B|$$

entonces existe una sucesión $\langle D_\alpha \rangle_{\alpha<\mu+1}$ de subconjuntos de B tales que:

i) $|D_\alpha| = \nu^{\tau}$ para toda $\alpha < \mu + 1$.

ii) $D_\alpha \subseteq D_\beta$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta < \mu + 1$.

iii) D_α es cerrado para toda $\alpha < \mu + 1$ ($cl(D_\alpha) = D_\alpha$).

iv) Para toda $\alpha < \mu + 1$, $\varphi \in \Gamma$, $Z \subseteq VL(\varphi)$ y $f \in D_\alpha^Z$ se cumple que: si $\varphi^{\Im}(Z, f, \cdot) \neq \emptyset$, entonces hay $g \in \varphi^{\Im}(Z, f, \cdot)$ tal que $Ran(g) \subseteq D_{\alpha+1}$.

Donde para $\varphi \in \Gamma$, $Z \subseteq VL(\varphi)$ y $f \in B^Z$, se define:

$$\varphi^{\mathfrak{A}}(Z,f,\cdot) = \{g \in B^{VL(\varphi)\setminus Z} \mid \mathfrak{A} \models \varphi[f^\frown g]\}$$

Demostración.- Sea D_0 cualquier subconjunto cerrado de B de cardinalidad ν^τ incluyendo X, el cual existe pues $\nu^\tau \leq |B|$ y, por tanto existe U tal que $X \subseteq U \subseteq B$ y $|U| = \nu^\tau$. Tomando D_0 como $cl(U)$, tenemos que $|D_0| \leq |U| + \|\rho\|$, pero por hipótesis $|U| \geq |\rho|$ y además $|U| \geq 2^\tau \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, de donde $|U| \geq \|\rho\|$. Por lo tanto $|D_0| = \nu^\tau$.

Suponiendo que D_α ha sido definido para toda $\alpha < \xi < \mu + 1$ tenemos

A) Si ξ es un ordinal sucesor.

Sean: G una función de elección para la familia

$$\bigcup \{\varphi(D^Z) \setminus \{\emptyset\} \mid Z \subseteq VAR \text{ y } D \subseteq B\}$$

τ_ξ el siguiente conjunto de índices:

$$\tau_\xi = \{\langle \varphi, Z, f\rangle \mid \varphi \in \Gamma,\ Z \subseteq VL(\varphi),\ f \in D^Z_{\xi-1}\}$$

y

$$\Theta_\xi = \{\varphi^{\mathfrak{A}}(Z,f,\cdot) \mid \langle \varphi, Z, f\rangle \in \tau_\xi\}.$$

Restringiendo G a $\Theta_\xi \setminus \{\emptyset\}$ uno obtiene un mapeo (también llamado G) definido sobre τ_ξ y tal que para todo $\langle \varphi, Z, f\rangle \in \tau_\xi$

Donde para $\varphi \in \Gamma$, $Z \subseteq VL(\varphi)$ y $f \in B^Z$, se define:

$$\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot) = \{g \in B^{VL(\varphi)\setminus Z} \mid \mathfrak{B} \models \varphi[f^*g]\}$$

Demostración.- Sea D_0 cualquier subconjunto cerrado de B de cardinalidad ν^τ incluyendo X, el cual existe pues $\nu^\tau \leq |B|$ y, por tanto existe U tal que $X \subseteq U \subseteq B$ y $|U| = \nu^\tau$. Tomando D_0 como $cl(U)$, tenemos que $|D_0| \leq |U| + \|\rho\|$, pero por hipótesis $|U| \geq |\rho|$ y además $|U| \geq 2^\tau \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, de donde $|U| \geq \|\rho\|$. Por lo tanto $|D_0| = \nu^\tau$.

Suponiendo que D_α ha sido definido para toda $\alpha < \xi < \mu + 1$ tenemos

A) Si ξ es un ordinal sucesor.

Sean: G una función de elección para la familia

$$\bigcup\{\wp(D^Z) \setminus \{\emptyset\} \mid Z \subseteq VAR \text{ y } D \subseteq B\}$$

τ_ξ el siguiente conjunto de índices:

$$\tau_\xi = \{(\varphi, Z, f) \mid \varphi \in \Gamma,\ Z \subseteq VL(\varphi),\ f \in D^Z_{\xi-1}\}$$

y

$$\Theta_\xi = \{\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot) \mid (\varphi,Z,f) \in \tau_\xi\}.$$

Restringiendo G a $\Theta_\xi \setminus \{\emptyset\}$ uno obtiene un mapeo (también llamado G) definido sobre τ_ξ y tal que para todo $(\varphi,Z,f) \in \tau_\xi$

$$G(\varphi,Z,f) : VL(\varphi) \setminus Z \to B.$$

$$\mathfrak{B} \models \varphi[f^\frown G(\varphi,Z,f)].$$

Definimos entonces

$$D_\xi' = D_{\xi-1} \cup \bigcup_{t\in\tau_\xi} \mathrm{Ran}(G(t)).$$

y

$$D_\xi = \mathrm{cl}(D_\xi').$$

B) Si lim(ξ) definimos simplemente

$$D_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} D_\zeta.$$

Por demostrar que la sucesión así definida cumple i) - iv) [Inducción Transfinita]

- Para $\xi = 0$.

i) $|D_0| = \nu^*$ por construcción de D_0

ii) $D_0 \subseteq D_0$.

iii) D_0 es cerrado por construcción.

iv) se cumple por la forma de D_1.

- Para $\xi + 1$ un ordinal sucesor. Supongamos que i) - iv) se cumplen para ξ

i) Para demostrar este inciso usaremos que:

i') Para toda $t \in \tau_{\xi+1}$, $|Ran(G(t))| \leq \mu$

i'') $| \tau_{\xi+1} | = \nu^{\tau}$

Así

$$| \bigcup_{t \in \tau_{\xi+1}} Ran(G(t)) | \leq \sum_{t \in \tau_{\xi+1}} | Ran(G(t)) | \leq \mu \cdot | \tau_{\xi+1} | \leq \mu \cdot \nu^{\tau} = \nu^{\tau}$$

además

$$| D_{\xi+1} | \leq | D_{\xi+1}' | + \| \rho \|$$

Pero

$$| D_{\xi+1}' | \leq | D_{\xi} | + | \bigcup_{t \in \tau_{\xi+1}} Ran(G(t)) | = \nu^{\tau}$$

Por lo tanto $|D_{\xi+1}| = \nu^{\tau}$. $\square$

Demostración de i')

$$| Ran(G(\varphi, Z, f)) | \leq | Dom(G(\varphi, Z, f)) | = | VL(\varphi) \setminus Z | \leq | VL(\varphi) | \leq \mu$$

Demostración de i") Analizando la definición de $\tau_{\xi+1}$ se tiene

$$|\tau_{\xi+1}| \leq \sum_{\varphi\in\Gamma} \sum_{Z\in\wp(VL(\varphi))} |D_\xi^Z|.$$

$\varphi \in \Gamma$ y $Z \subseteq VL(\varphi)$ implican que $|Z| \leq \mu$ y $|\wp(VL(\varphi))| \leq 2^\mu$, así, por hipótesis de inducción:

$$|D_\xi^Z| \leq |D_\xi|^\mu = (\nu^\tau)^\mu = \nu^\tau.$$

Además, para cada $\varphi \in \Gamma$

$$\sum_{Z\in\wp(VL(\varphi))} |D_\xi^Z| \leq \nu^\tau \cdot 2^\mu = \nu^\tau.$$

de donde

$$|\tau_{\xi+1}| \leq |\Gamma| \cdot \nu^\tau = \nu^\tau. \square$$

ii) y iii) son obvias de la definición de $D_{\xi+1}$.

iv) Si φ, Z, f son como especifica la tripleta $\langle\varphi, Z, f\rangle$ en $\tau_{\xi+1}$ y $\varphi^{\mathfrak{A}}(Z, f, \cdot) \neq \emptyset$, entonces $g = G(\varphi, Z, f)$ es el mapeo requerido en iv).

- Si $\lim(\xi)$.

i) $\nu^\tau \leq |D_\xi| \leq \sum_{\zeta<\xi} |D_\zeta| = |\xi| \cdot \nu^\tau \leq \mu \cdot \nu^\tau = \nu^\tau$.

ii) es obvia.

iii) Sea $f \in F_n$ y $a_1,\dots,a_n \in D_\xi$ entonces hay $\zeta < \xi$ tal que $a_1,\dots,a_n \in D_\zeta$ y, por lo tanto $f^{\mathfrak{B}}(a_1,\dots,a_n) \in D_{\zeta+1} \subseteq D_\xi$.

iv) es vacua.□

LEMA 3.3.- Sea $\mathfrak{B} = \langle B,J\rangle$ una ρ-estructura infinita, sea $X\subseteq B$ y sea Γ un conjunto de $L_{\kappa\lambda}$-fórmulas tal que $Sbf(\Gamma)\subseteq \Gamma$; sea $\mu = \sup\{\aleph_0, |VL(\varphi)| \mid \varphi \in \Gamma\}$, ν un cardinal ≥ 2 y τ un cardinal $\geq \mu$. Supongamos que $\mu > |VL(\varphi)|$ para toda $\varphi \in \Gamma$, $\mu \leq cf(\tau)$ y

$$\max\{\,|X|\,,\,|\rho|\,,\,|\Gamma|\,\} \leq \nu^{<\tau} \leq \ |B|$$

entonces existe una sucesión $\langle D_\alpha\rangle_{\alpha<\gamma}$ de subconjuntos de B (γ es un cardinal que será fijado más tarde) tales que:

i) $|D_\alpha| = \nu^{<\tau}$ para toda $\alpha < \gamma$.

ii) $D_\alpha \subseteq D_\beta$ para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

iii) D_α es cerrado para toda $\alpha < \gamma$ ($cl(D_\alpha) = D_\alpha$).

iv) Para toda $\alpha < \gamma$, $\varphi \in \Gamma$, $Z \subseteq VL(\varphi)$ y $f \in D_\alpha^Z$ se cumple que: si $\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot) \neq \emptyset$, entonces hay $g \in \varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot)$ tal que $Ran(g) \subseteq D_{\alpha+1}$.

Observación.- $\mu > |VL(\varphi)|$ para toda $\varphi \in \Gamma$ implica que μ es un cardinal límite.

Demostración.- Sea D_0 cualquier subconjunto cerrado de B de cardinalidad ν^τ incluyendo X.

Dado ξ un ordinal sucesor ó un ordinal límite tal que $\alpha < \xi < \gamma$ la definición de D_ξ será análoga a la dada en el Lema 3.2.

Por demostrar que la sucesión así definida cumple i) - iv) [Inducción Transfinita]

- Para $\xi = 0$.

  D_0 cumple i) -iv) trivialmente.

- Para $\xi + 1$ un ordinal sucesor. Supongamos que i) - iv) se cumplen para ξ

  i) Para demostrar este inciso usaremos que:

  i') Para toda $t \in \tau_{\xi+1}$, $|Ran(G(t))| < \mu$

  i") $|\tau_{\xi+1}| \leq \nu^{<\tau}$

  Así

$$\left| \bigcup_{t\in\tau_{\xi+1}} Ran(G(t)) \right| \leq \sum_{t\in\tau_{\xi+1}} |Ran(G(t))| \leq \mu \cdot |\tau_{\xi+1}| \leq \mu \cdot \nu^{<\tau} = \nu^{<\tau}$$

  además

$$|D_{\xi+1}| \leq |D_{\xi+1}'| + \|\rho\|$$

Pero

$$|D_{\xi+1}'| \leq |D_\xi| + |\bigcup_{\iota\in\tau_{\xi+1}} \mathrm{Ran}(G(t))| = \nu^{<\tau}$$

Por lo tanto $|D_{\xi+1}| = \nu^{<\tau}$.□

Demostración de i')

$$|\mathrm{Ran}(G(\varphi,Z,f))| \leq |\mathrm{Dom}(G(\varphi,Z,f))| = |VL(\varphi)\setminus Z| \leq |VL(\varphi)| < \mu$$

Demostración de i") Analizando la definición de $\tau_{\xi+1}$ se tiene

$$|\tau_{\xi+1}| \leq \sum_{\varphi\in\Gamma} \sum_{Z\in\wp(VL(\varphi))} |D_\xi^Z|.$$

$\varphi \in \Gamma$ y $Z \subseteq VL(\varphi)$ implican que $|Z| < \mu$ y $|\wp(VL(\varphi))| \leq 2^{<\mu}$. así, por hipótesis de inducción:

$$|D_\xi^Z| \leq |D_\xi^{<\mu}| = (\nu^{<\tau})^{<\mu} = \nu^{<\tau}.$$

Además, para cada $\varphi \in \Gamma$

$$\sum_{Z\in\wp(VL(\varphi))} |D_\xi^Z| \leq \nu^{<\tau} \cdot 2^{<\mu} = \nu^{<\tau}.$$

de donde

$$|\tau_{\xi+1}| \leq |\Gamma| \cdot \nu^{<\tau} = \nu^{<\tau}.□$$

ii) y iii) son obvias de la definición de $D_{\xi+1}$.

iv) Si φ.Z.f son como especifica la tripleta $\langle\varphi,Z,f\rangle$ en $\tau_{\xi+1}$ y $\varphi^{\mathfrak{B}}(Z,f,\cdot)\neq\emptyset$, entonces $g = G(\varphi,Z,f)$ es el mapeo requerido en iv).

- Si $\lim(\xi)$.

i) $\nu^{<\tau} \leq |D_\xi| \leq \sum_{\zeta<\xi} |D_\zeta| = |\,\xi\,| \cdot \nu^{<\tau} \leq \gamma \cdot \nu^{<\tau} = \nu^{<\tau}$ (donde $\gamma = \mu + 1$ si $\mu < \tau$ y $\gamma = \mu$ si $\mu = \tau$).

ii) es obvia.

iii) Sea $f \in F_n$ y $a_1,\ldots,a_n \in D_\xi$ entonces hay $\zeta < \xi$ tal que $a_1,\ldots,a_n \in D_\zeta$ y, por lo tanto $f^{\mathfrak{B}}(a_1,\ldots,a_n) \in D_{\zeta+1} \subseteq D_\xi$.

iv) es vacua.□

TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM.- Sea $\mathfrak{B} = \langle B,J\rangle$ una ρ-estructura infinita, sea $X\subseteq B$ y sea Γ un conjunto de $L_{\kappa\lambda}$-fórmulas tal que $Sbf(\Gamma)\subseteq\Gamma$; sea $\mu = \sup\{\aleph_0, |VL(\varphi)| \mid \varphi \in \Gamma\}$, ν un cardinal ≥ 2 y τ un cardinal $\geq \mu$. Supongamos que una de las siguientes alternativas sucede:

I) $\max\{|X|,|\,\rho\,|,|\,\Gamma\,|\} \leq \nu^\tau \leq |B|$

II) $\mu > |VL(\varphi)|$ para toda $\varphi \in \Gamma$, $\mu \leq cf(\tau)$ y

$$\max\{|\,X\,|,|\,\rho\,|,|\,\Gamma\,|\} \leq \nu^{<\tau} \leq |\,B\,|$$

Entonces hay una estructura $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ tal que $X \subseteq A$, $\mathfrak{R} \prec^{\Gamma}_{\kappa\lambda} \mathfrak{I}$ y, en el caso I) $|A| = \nu^{\tau}$, (en particular existe un modelo de cardinalidad ν^{μ}), y en el caso II) $|A| = \nu^{<\tau}$. Además, $\mathfrak{R}$ puede ser escogido tal que

$$\mathfrak{R} \models \varphi[g] \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \varphi[g]$$

para toda $\varphi \in \Gamma$ y toda $g \in A^{VL(\varphi)}$

Demostración.- Si ocurre I) entonces por el Lema 3.2 existe la sucesión $\langle D_{\alpha} \rangle_{\alpha<\mu+1}$ tal que cumple i) - iv). Sea $D = \bigcup_{\alpha<\mu+1} D_{\alpha}$ y $\mathfrak{R} = \mathfrak{I} \restriction D$. Claramente $X \subseteq D$ y

$$\nu^{\tau} \leq |A| = |D| \leq \sum_{\alpha<\mu+1} |D_{\alpha}| = (\mu+1) \cdot \nu^{\tau} = \nu^{\tau}$$

Ya que D es un subconjunto cerrado de B, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{I}$.

Afirmación.- $\mathfrak{R} \prec^{\Gamma}_{\kappa\lambda} \mathfrak{I}$. Por demostrar que $id_{\mathfrak{R},\mathfrak{I}}$ es un Γ-morfismo. $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{I}$ implica que

$$(*)\ \mathfrak{R} \models \varphi\,[g] \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \varphi\,[g]\ (\text{donde } g \in A^{VL(\varphi)}),$$

sucede para toda fórmula atómica. $(*)$ será probada por inducción. Supongamos que la fórmula φ cumple $(*)$, entonces

- $\mathfrak{R} \models \neg\varphi[g]$ si y sólo si $\mathfrak{R} \not\models \varphi[g]$ si y sólo si [H.I.] $\mathfrak{I} \not\models \varphi[g]$ si y sólo si $\mathfrak{I} \models \neg\varphi[g]$.

- Supongamos que para toda $\eta < \lambda' < \kappa$ Φ_{η} cumple $(*)$ entonces $\mathfrak{R} \models [\bigwedge_{\eta<\lambda'} \Phi_{\eta}][g]$ si y sólo si $\mathfrak{R} \models \Phi_i[g]$ para toda $i < \lambda'$ si y sólo si $\mathfrak{I} \models \Phi_i[g]$ para toda $i < \lambda'$ si y sólo si $\mathfrak{I} \models [\bigwedge_{\eta<\lambda'} \Phi_{\eta}][g]$

- Supongamos que ψ cumple $(*)$ y que $\varphi = (\exists Z)\psi$ donde $Z \subseteq VAR$, $|Z| < \lambda$ y $VL(\psi) = VL(\varphi) \cup Z$; podemos además asumir que $Z \cap VL(\varphi) = \emptyset$. En este caso la implicación de izquierda a derecha es trivial. Supongamos que existe $f_1 \in B^Z$ tal que $\Im \models \psi[g^* f_1]$, entonces $f_1 \in \psi^{\Im}(VL(\varphi), g, \cdot)$. Observe que $\psi \in \Gamma$, ya que $\varphi \in \Gamma$ y ya que

$$|\,Ran(g)\,| \;\leq\; |\,Dom(g)\,| \;=\; |\,VL(\varphi)\,| \;\leq\; \mu \;<\; \mu + 1.$$

existe $\alpha < \mu + 1$ tal que $Ran(g) \subseteq D_\alpha$. Por iv) hay $f_2 \in \psi^{\Im}(VL(\varphi), g, \cdot)$ tal que $Ran(f_2) \subseteq D_{\alpha+1} \subseteq A$. Entonces $\Im \models \psi[g^* f_2]$ y por hipótesis de inducción $\Im \models \psi[g^* f_2]$. Así $\Re \models \varphi[g]$□

Si ocurre (II), por el Lema 3.3 existe una sucesión $(D_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ tal que cumple i) -iv). Definimos el universo de $\Re$ en la misma forma que en el caso (I). Teniendo en cuenta que $\gamma \leq \tau$ se tiene

$$\nu^{<\tau} \leq \;|\,A\,|\; = \;|\,D\,|\; \leq \sum_{\alpha<\gamma} |\,D_\alpha\,| \;= \gamma \cdot \nu^{<\tau} = \nu^{<\tau}.$$

Ahora tenemos dos subcasos:

1) $\mu < \tau$. En este caso hacemos $\gamma = \mu + 1$, así $\gamma \leq \tau$. La demostración de que $\Re \prec^{\Gamma}_{\kappa\lambda} \Im$ es como antes.

2) $\mu = \tau = \mathrm{cf}(\tau)$. Hacemos $\gamma = \mu$, ya que μ es un cardinal límite y τ es regular, $\mu \in$ WIn. Además $\nu^{<\tau} \geq \mu$, y así $|A| = \nu^{<\tau}$. El punto crucial de la prueba es que si $\varphi \in \Gamma$ y $g \in A^{VL(\varphi)}$, hay una $\alpha < \mu$ tal que $Ran(g) \subseteq D_\alpha$. Pero esto sucede ya que μ es regular y $|VL(\varphi)| < \mu$. Así $|Ran(g)| < \mu$.□

Los siguientes corolarios son en realidad distintas versiones (restringidas) del Teorema de Lõwenheim-Skolem para lenguajes infinitarios que se desprenden fácilmente del Teorema anterior.

COROLARIO 1.- Sea $\mathfrak{I} = \langle B, J \rangle$ una ρ-estructura infinita, $X \subseteq B$ y sean κ, λ cardinales infinitos tales que

$$\max\{\,|X|, |\rho|\,\} \leq \lambda = \lambda^{\kappa} \leq |B|$$

entonces hay una estructura $\mathfrak{R} = \langle A, I \rangle$ tal que $\mathfrak{R} \prec_{\kappa\kappa} \mathfrak{I}$, $X \subseteq A$ y $|A| = \lambda$. Además si κ es regular el Teorema sucede bajo la hipótesis más débil $\lambda = \lambda^{<\kappa}$.

Demostración.- Sea $\Gamma = \mathrm{FORM}(L_{\kappa\kappa}(\rho))$ y λ de la forma prescrita $(\kappa < \lambda)$

$$|\Gamma| \;=\; |\mathrm{FORM}(L_{\kappa\kappa}(\rho))| \;=\begin{cases} \beta^{<\kappa} & \text{si } \kappa \text{ es regular} \\ \beta^{\kappa} & \text{si } \kappa \text{ es singular} \end{cases}$$

donde $\beta = \max\{\kappa, |\rho|\}$. También

$$\mu = \begin{cases} \alpha & \text{si } \kappa = \alpha^{+} \\ \kappa & \text{si } \kappa \text{ es límite} \end{cases}$$

En consecuencia, si $\kappa = \alpha^{+}$ entonces $\kappa > \mu$ y, por el caso (I) del Teorema, existe $\mathfrak{R} \prec^{\Gamma}_{\kappa\kappa} \mathfrak{I}$ (es decir $\mathfrak{R} \prec_{\kappa\kappa} \mathfrak{I}$) tal que $X \subseteq A$ y $|A| = \lambda^{\mu} = \lambda^{\alpha} = \lambda^{<\kappa} = \lambda$.

Si κ es límite y singular $\mu = \kappa$. También $\lambda^{\kappa} = \lambda$ implica $\lambda \geq \kappa$; ya que $\lambda \geq \max\{|\rho|, |X|\}$ por hipótesis obtenemos $\lambda \geq \beta$ y $\lambda = \lambda^{\kappa} \geq \beta^{\kappa} = |\Gamma|$. Entonces un modelo $\mathfrak{R}$ con las propiedades descritas existe por el caso (I) del mismo Teorema.

Sea κ límite y regular: $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ implica $\lambda \geq cf(\lambda) \geq \kappa$. Así otra vez $\lambda \geq \beta$ y $\lambda = \lambda^{<\kappa} \geq \beta^{<\kappa} = |\Gamma|$. Ya que $\mu = \kappa = cf(\kappa)$, el caso (II) del Teorema aplica (con $\tau = \kappa$, $\nu = \lambda$) y obtenemos un modelo $\mathfrak{R}$ de potencia $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ con las propiedades deseadas.□

Observación.- Para los lenguajes $L_{\kappa\lambda}$ con $\lambda < \kappa$ no podemos mejorar la conclusión del Corolario ya que

$$|\,FORM(L_{\kappa\lambda}(\rho))\,| \;=\; |\,FORM(L_{\kappa\kappa}(\rho))\,| \square$$

COROLARIO 2 (HCG).- Sea $\mathfrak{I} = \langle B,J\rangle$ una ρ-estructura infinita, $X \subseteq B$ y κ, λ cardinales infinitos tales que $\max\{|X|, |\rho|\} \leq \lambda \leq |B|$ y $\kappa = cf(\lambda)$. Entonces existe una estructura $\mathfrak{R} = \langle A,I\rangle$ tal que $\mathfrak{R} \prec_{\kappa\kappa} \mathfrak{I}$, $X \subseteq A$ y $|A| = \lambda$.

Demostración.- $\kappa \leq cf(\lambda)$ implica $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ y $\kappa < cf(\lambda)$ implica $\lambda^{\kappa} = \lambda$ (HCG). Así si κ es regular la proposición se sigue de la segunda parte del Corolario precedente. Si κ es singular, entonces $\kappa < cf(\lambda)$ ya que $cf(\lambda)$ es siempre un cardinal regular, así, el resultado sigue de la primera parte del Corolario anterior.□

COROLARIO 3.- Sean κ, λ cardinales infinitos regulares tales que $\lambda < \kappa$ y

$$\alpha, \beta \in CAR',\ \alpha < \kappa \text{ y } \beta < \lambda \Rightarrow \alpha^{\beta} < \kappa.$$

Entonces todo enunciado φ de $L_{\kappa\lambda}$ el cual tiene un modelo $\mathfrak{I}$ también tiene un modelo $\mathfrak{R}$ de cardinalidad $< \kappa$. Si además, $|\rho| < \kappa$, entonces $\mathfrak{R}$ puede ser tomado como una subestructura de $\mathfrak{I}$ (aún como una subestructura elemental).

Demostración.- Sea $\Gamma = \mathrm{Sbf}(\varphi)$. Primero calcularemos $|\Gamma|$ y μ

(a) $|\Gamma| < \kappa$. Esto es probado por inducción sobre φ. Es obvio si φ es una fórmula atómica, una negación ó una fórmula existencial. Si $\varphi = \bigwedge_{i \in I} \psi_i$, $|I| < \kappa$ entonces

$$\mathrm{Sbf}(\varphi) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Sbf}(\psi_i) \cup \{\varphi\};$$

Así

$$|\Gamma| \leq \sum_{i \in I} |\mathrm{Sbf}(\psi_i)| + 1$$

Ya que κ es regular, $|I| < \kappa$ y por hipótesis de inducción $|\mathrm{Sbf}(\psi_i)| < \kappa$, la suma indicada es $< \kappa$.

(b) $\mu \leq \lambda = \mathrm{cf}(\lambda)$. De hecho, por la propiedad de fórmulas, $|VL(\psi)| < \lambda$ para todas las fórmulas ψ de $L_{\kappa\lambda}(\rho)$.

Notemos que (a) y las hipótesis implican que $|\Gamma|^{\gamma} < \kappa$ para todo cardinal $\gamma < \lambda$. Ya que, además, κ es regular y $\lambda < \kappa$, tenemos:

$$|\Gamma|^{<\lambda} = \sum_{\substack{\gamma \in \lambda \\ \gamma \in CAR'}} |\Gamma|^{\gamma} < \kappa.$$

Después nosotros mostraremos que sin pérdida de generalidad podemos restringirnos a probar el Teorema bajo las hipótesis adicionales de que $|B| \geq \kappa$, $\rho \subseteq \tau(\varphi)$. (Así que $|\rho| \leq |\Gamma|$) y $|\Gamma| \geq 2$.

En efecto, si $|B| < \kappa$ entonces el Teorema está ya probado. Si $|\rho| < \kappa$ añadiendo a φ una apropiada conjunción de fórmulas podemos asumir que todos los símbolos de ρ ocurren en φ: si $|\rho| \geq \kappa$ nosotros probamos el Teorema para $\tau(\varphi)$ y definimos arbitrariamente la denotación en $\mathfrak{R}$ de símbolos $\rho \setminus \tau(\varphi)$. Finalmente, si $|\Gamma| = 1$, entonces $\Gamma = \{\varphi\}$ y φ es un enunciado atómico: así, $\varphi \in L^{c}_{\omega\omega}(\rho)$ y ya que $\kappa > \lambda > \aleph_0$ el Teorema de Löwenheim-Skolem para $L_{\omega\omega}$ asegura que φ tiene un modelo de cardinalidad $< \lambda$.

Bajo estas hipótesis adicionales aplica el caso (II) del Teorema para $X = \emptyset$, $\nu = |\Gamma|$ y $\tau = \lambda$, obteniendo una estructura $\mathfrak{R} = (A,I)$ tal que $|A| = |\Gamma|^{<\kappa}$ y teniendo la propiedad mencionada al final del Teorema: en particular

$$\mathfrak{R} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \varphi.$$

entonces es claro que $|A| < \kappa$ y $\mathfrak{R} \models \varphi$. Para probar la última afirmación del Teorema se repite el argumento precedente comenzando con $\Gamma = \mathrm{Sbf}(\varphi) \cup \mathrm{FORM}(L_{\omega\omega}(\rho))$, el cual también tiene cardinalidad $< \kappa$.□

COROLARIO 4.- Sea $\varphi \in L^{c}_{\kappa\omega}(\rho)$ con un modelo y κ un cardinal regular $> \omega$; entonces φ tiene un modelo de cardinalidad $< \kappa$. En particular, si $\kappa = \lambda^{+}$, entonces φ tiene un modelo de cardinalidad $\leq \lambda$.

Demostración.- κ y ω son ambos regulares, y $\kappa > \omega$ por hipótesis; además, $\tau^{n} = \tau$ para toda $n \in \omega$ y $\omega \leq \tau < \kappa$. Así las hipótesis del corolario anterior son satisfechas y el resultado sigue instantáneamente.□

COROLARIO 5.- Todo enunciado de $L_{\theta\theta}$ con un modelo, tiene un modelo de cardinalidad $< \theta$ para θ inaccesible $> \omega$.

Demostración.- Todo enunciado de $L_{\vartheta\theta}$ está en $L_{\theta\lambda}$ para alguna $\lambda < \theta$. Aplique el Corolario 3.□

Los siguientes ejemplos muestran que las cotas para la cardinalidad del modelo: 2^{μ} en el caso I y $2^{<\mu}$ en el caso II del Teorema de Löwenheim-Skolem son las mejores posibles.

EJEMPLO 1.- Consideraremos la Teoría de los Ordenes Lineales Densos sin Extremos. Sea $\langle X,<\rangle$ un conjunto linealmente ordenado, denso y sin extremos. A y B subconjuntos de X; nosotros escribiremos $A < B$ si y sólo si para todo $a \in A$ y todo $b \in B$, $a < b$. De la misma manera escribiremos $A < c < B$ si $a < c < b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$.

Sea κ un cardinal, decimos que $\langle X,<\rangle$ es un η_κ-conjunto si y sólo si para cada par A, B de subconjuntos de X de cardinalidad $\leq \kappa$ tal que $A < B$ hay una $c \in X$ tal que $A < c < B$.

Daremos ahora un ejemplo de η_κ-conjuntos:

Para cada ordinal infinito α, sea U_α el conjunto lexicográficamente ordenado de todas las sucesiones de 0's y 1's de longitud α. H_α consiste de todas aquellas sucesiones $s : \alpha \to 2$ teniendo un último 1, es decir, existe un $\gamma < \alpha$ tal que $s_\gamma = 1$ y $s_\delta = 0$ siempre que $\gamma < \delta < \alpha$.

Algunas de las propiedades de estos últimos conjuntos de sucesiones son:

i) Cada H_{κ^+} es un η_{κ^+}-conjunto, (evidentemente de cardinalidad 2^κ, donde κ es un cardinal).

ii) Cada η_{κ^+}-conjunto contiene una copia isomorfa a U_κ, y aún de H_{κ^+}. De donde se tiene que cada η_{κ^+}-conjunto es de cardinalidad $\geq 2^\kappa$.

Sea φ el $L_{\lambda^+\lambda^+}(<)$-enunciado axiomatizando la noción de η_{λ^+}-conjunto. φ es la conjunción de:

(1) "$<$ es un orden lineal".

(2) $(\forall v | \lambda)(\forall w | \lambda)[\bigwedge_{\alpha,\beta<\lambda}(v_\alpha < w_\beta) \rightarrow \exists x \bigwedge_{\alpha,\beta<\lambda} (v_\alpha < x < w_\beta)]$

(3) $(\forall v | \lambda)(\exists xy)\bigwedge_{\alpha<\lambda}(x < v_\alpha < y)$.

Sea $\Gamma = \mathrm{Sbf}(\varphi)$; entonces $|\Gamma| = \lambda$ y $\mu = \lambda$. Por otra parte ii) implica que todo modelo de φ tiene cardinalidad $\geq 2^\lambda = 2^\mu$. En consecuencia 2^μ es la menor cota posible para el caso (I) del Teorema de Löwenheim-Skolem.

Para el segundo ejemplo necesitaremos algunas definiciones y teoremas que serán dados en lo que sigue:

DEFINICIÓN.- Sea A una clase y R una relación binaria sobre A.

a) R es *bien fundada* si y sólo si

i) Cada subconjunto no vacío de A tiene un elemento R-minimal.

ii) Para cada $a \in A$ el segmento inicial $\{x \in A \mid xRa\}$ es un conjunto.

b) R es *extensional* si y sólo si para cualesquiera $x, y \in A$ ocurre que si para toda

$u\in A$. uRx si y sólo si uRy, entonces $x=y$.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN PARA RELACIONALES BIEN FUNDADAS.- Sea R una relacional, $A=\mathrm{camp}(R)$ y supongamos que R bien-funda a A, entonces para cualesquiera x, $y\in A$, si $y_R = \{z \in A \mid zRy\} \subseteq x$ implica que $y\in x$, entonces $A=x$.

Demostración.- Supongamos lo contrario, es decir, existe b un conjunto tal que para cualquier $y\in A$ si $y_R \subseteq b$ entonces $y\in b$ pero que $A\nsubseteq b$. Fijémonos en el conjunto $A\setminus b$ el cual es distinto del vacío y está contenido en A. Como R bien-funda a A entonces existe un conjunto x^* tal que $x^*\in A\setminus b$ y no existe $z\in A\setminus b$ tal que zRx^* lo cual es equivalente a que para toda z, si zRx^* entonces $z\in b$, es decir, $x^*_R \subseteq b$. Así $x^*\in b$ lo cual contradice el hecho de que $x^*\in A\setminus b$.□

ESQUEMA GENERAL DE RECURSIÓN PARA RELACIONALES BIEN FUNDADAS.- Sean R una relacional bien-fundada, $A=\mathrm{camp}(R)$ y x un conjunto. Si H es una funcional

$$H : V \to V$$

(donde V es el universo de conjuntos) entonces se puede definir en forma única una funcional

$$F : A \to V$$

tal que para toda $x\in A$, $F(x)=H(F|x_R)$.

TEOREMA DE SHEPHERDSON-MOSTOWSKI.- Sea R una relacional extensional y bien-fundada sobre la clase K. Entonces existe una única clase transitiva M tal que $\langle K,R\rangle \cong \langle M,\in|M\rangle$. Además el isomorfismo es único y satisface la ecuación

$$F(x) = \{F(u) \mid uRx\} \text{ para } x \in K$$

Demostración.- Apliquemos el Esquema General de Recursión para Relacionales Bien-Fundadas con $H = id_V : V \rightarrow V$ el mapeo identidad universal. para obtener una función $F : K \rightarrow V$ tal que

$$F(x) = F \mid \{u \in K \mid uRx\} = \{F(u) \mid uRx\} \text{ para } x \in K$$

Sea $M = Rang(F)$. Ya que

$$(*)\ yRx \Leftrightarrow F(y) \in F(x) \text{ para } y.x \in K$$

entonces

$$\langle K,R \rangle \cong^F \langle M, \in \mid M \rangle.$$

Ya que cualquier otro isomorfismo entre $\langle K.R \rangle$ y $\langle M, \in \mid M \rangle$ necesariamente satisface (*). F está únicamente determinada.

Notemos que M es transitivo: pues si $y \in x$ y $x \in M$ entonces $x = F(t)$ para alguna $t \in K$ y

$$x = F(t) = \{F(u) \mid uRt\}$$

así $y = F(u)$ para alguna u tal que uRt y, en consecuencia $y \in M$.

Finalmente probaremos la unicidad de M, es decir. si X es una clase transitiva y $\langle K.R \rangle \cong \langle X, \in \mid X \rangle$ entonces $X = M$. Sea G un isomorfismo entre $\langle K,R \rangle$ y $\langle X, \in \mid X \rangle$:

mostraremos utilizando inducción sobre R que $F(x)=G(x)$ para $x \in K$. Si x es R-minimal, entonces $F(x)=\emptyset$: si $G(x) \neq \emptyset$ entonces sea $y \in G(x)$, ya que X es transitivo, $y \in X$ y $y=G(u)$ para alguna $u \in K$: ya que G es un isomorfismo, uRx, contradiciendo que x es R-minimal. Ahora asumamos que $\{u \in K \mid uRx\} \neq \emptyset$ y que $F(u)=G(u)$ para toda $u \in K$ con uRx, entonces $y \in F(x)$ si y sólo si $y=F(u)$ para alguna u tal que uRx (definición de F) si y sólo si $y=G(u)$ para alguna u tal que uRx (por el Principio de inducción) si y sólo si $y=G(u)$ para alguna u tal que $G(u) \in G(x)$ (porque G es isomorfismo) si y sólo si $y \in G(x)$ (por definición de G).

En particular tenemos $X=\mathrm{Rang}(G)=\mathrm{Rang}(F)=M$.□

EJEMPLO 2.- Si κ es un cardinal infinito y x es un conjunto, x es *hereditariamente de cardinalidad* κ si y sólo si $|x| < \kappa$ y toda y satisfaciendo (+) tiene cardinalidad $< \kappa$:

(+) Hay una $n \in \omega$ y una cadena $s_0, \dots, s_{n-1}$ tal que $y \in s_0 \in \dots \in s_{n-1} \in x$

Sea λ un cardinal infinito $> \omega$. Si λ no es débilmente inaccesible, el conjunto $H(\lambda)$ de todos los conjuntos hereditariamente de potencia $< \lambda$ puede ser caracterizado fuera de isomorfismos por el enunciado σ_λ de $L_{\lambda\lambda}(E)$ donde E es un símbolo de relación binaria. Para $\lambda = \kappa^+$ tal enunciado es

$$\theta_1 = \forall xy[\forall z(zEx \leftrightarrow zEy) \rightarrow x \approx y]$$

$$\theta_2 = (\forall v \mid \omega) \bigvee_{n \in \omega} \neg(v_{n+1} E v_n)$$

$$\theta_3 = (\forall v \mid \kappa) \exists y \forall z [zEy \longleftrightarrow \bigvee_{\xi < \kappa} (z \approx v_\xi)]$$

$\theta_4 = \forall y(\exists z(zEy) \longleftrightarrow (\exists v| \kappa)\forall z[zEy \longleftrightarrow \bigvee_{\xi<\kappa}(z \approx v_\xi)])$

Si λ es un cardinal singular, sea $\langle \lambda_\alpha \mid \alpha < cf(\lambda) \rangle$ una sucesión estrictamente creciente de cardinales convergiendo a λ. Entonces $H(\lambda)$ es caracterizado fuera de isomorfismo por la conjunción σ_λ de los enunciados θ_1 . θ_2 y

(1) $\exists x \forall y \, \neg(yEx)$

(2) $\bigwedge_{\alpha<cf(\lambda)}(\forall v| \lambda_\alpha)\exists x \forall y(yEx \longleftrightarrow \bigvee_{\beta<\lambda_\alpha} (y \approx v_\beta))$

(3) $\forall x[\exists y(yEx \rightarrow \bigvee_{\alpha<cf(\lambda)}(\exists v| \lambda_\alpha)\forall y(yEx \longleftrightarrow \bigvee_{\beta<\lambda_\alpha}(y \approx v_\beta))]$

Claramente este enunciado está en $L_{\lambda\lambda}$. Además $H(\lambda) \in Mod(\sigma_\lambda)$. Conversamente, si $\langle A,E \rangle \in Mod(\sigma_\lambda)$ entonces por θ_1, θ_2 y el Teorema Shepherdson-Mostowski, hay un conjunto transitivo M tal que $\langle A,E \rangle \cong \langle M, \in|M \rangle$. El enunciado (3) prueba que todo $x \in M$ tiene cardinalidad $< \lambda$, ya que M es transitivo se sigue que $M \subseteq H(\lambda)$. Note que (1) implica que $\emptyset \in M$. Finalmente una simple inducción sobre el rango de los miembros de $H(\lambda)$, usando que (2) sucede en $\langle M, \in|M \rangle$ muestra que $H(\lambda) \subseteq M$. Así $H(\lambda) = M$ y $\langle A,E \rangle$ es isomorfo a $\langle H(\lambda), \in|H(\lambda) \rangle$.

Si λ es débilmente inaccesible $> \omega$, entonces hay un enunciado σ_λ de $L_{\lambda^+\lambda}(E)$ el cual caracteriza $H(\lambda)$ fuera de isomorfismo. Este es la conjunción de θ_1, θ_2, (1) y

(2') $\bigwedge_{\substack{\kappa<\lambda \\ \kappa \in CAR}}(\forall v| \kappa)\exists x \forall y(yEx \rightarrow \bigvee_{\beta<\kappa}(y \approx v_\beta))$

(3') $\forall x[\exists y(yEx) \rightarrow \bigvee_{\substack{\kappa<\lambda \\ \kappa \in CAR}}(\exists v| \kappa)\forall y(yEx \longleftrightarrow \bigvee_{\beta<\kappa}(y \approx v_\beta))]$

Note que $\lambda^{<\lambda} \leq |H(\lambda)|$. En efecto, es fácilmente verificado que si $\kappa < \lambda$ entonces algún mapeo $f : \kappa \to \lambda$ es un miembro de $H(\lambda)$: así $\bigcup_{\kappa<\lambda} \lambda^{\kappa} \subseteq H(\lambda)$ y, en consecuencia, $\lambda^{<\lambda} \leq |H(\lambda)|$.

Después hacemos $\Gamma = Sbf(\varphi)$. Así si $\lambda = \kappa^{+}$ entonces $\mu = \kappa$ y si λ es un cardinal límite entonces $\mu = \lambda$ y $|VL(\varphi)| < \mu$ para toda $\varphi \in \Gamma$.

Ahora sea λ un cardinal beth, límite, singular, es decir $\lambda = \beth_{\alpha}$ donde α es un ordinal límite y $cf(\alpha) < \alpha$. Así $\lambda^{<\lambda} = \beth_{\alpha+1} = 2^{\lambda}$. Así $|H(\lambda)| \geq 2^{\lambda}$ y el Teorema caso (II) (para $\nu = 2$, $\tau = \lambda^{+}$), muestra que σ_{λ} tiene un modelo de cardinalidad 2^{λ}. Como antes esto implica que $|H(\lambda)| = 2^{\lambda}$ y muestra que el resultado del Teorema, caso (II) es el mejor posible también cuando λ es singular.

Finalmente cuando λ es débilmente inaccesible un argumento similar al anterior muestra que el único modelo de σ_{λ}, $H(\lambda)$, es de cardinalidad 2^{λ}, y que el resultado del Teorema caso (II) es el mejor posible también cuando λ es un cardinal regular límite.

3.3.- EL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM-TARSKI PARA LENGUAJES L.

Debido a que el Teorema de Compacidad no es válido para lenguajes infinitarios y a que la demostración del Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski en el caso de lenguajes con expresiones finitas basa su demostración en dicho Teorema, la generalización del

Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski a lenguajes infinitarios no resulta trivial y se obtiene al calcular el número de Hanf para cada conjunto específico de enunciados. Esto último se encuentra fuera de los alcances de esta tesis y nos limitaremos a dar condiciones muy generales para la existencia de dichos números.

DEFINICIÓN.- Para cada conjunto X de enunciados en un lenguaje arbitrario L, el *Número de Hanf* de X, en símbolos h(X), es el mínimo cardinal λ tal que para cualquier enunciado σ de X ocurre lo siguiente:

Si σ tiene un modelo de potencia $\geq \lambda$, entonces σ tiene modelos de cardinalidades arbitrariamente grandes. Siempre que esté definido $h(L_\rho^e(L))$ será denotado por h(L).

LEMA. (Hanf).- Para cualquier conjunto X de enunciados en un lenguaje arbitrario L, h(X) existe. En particular h(L) existe para cualquier lenguaje L en el cual $L_\rho^e(L)$ -la clase de todos los enunciados de L- es un conjunto.

Demostración.- Para cada enunciado σ de X no teniendo modelos de potencias arbitrariamente grandes, nosotros asociamos un cardinal κ_σ como sigue: κ_σ es el mismo λ tal que σ no tiene modelos de potencia $\geq \lambda$. La mínima cota superior μ de todas las κ_σ's existe porque X es un conjunto, y obviamente $\mu \geq h(X)$.□

BIBLIOGRAFÍA

1.- **Amor, J. A.** "Compacidad en Lógica de Primer Orden y su Relación con el Teorema de Completud", Facultad de Ciencias, UNAM.

2.- **Barwise (Ed)** "Handbook of Mathematical Logic", Ed. North Holland, Amsterdam, 1971.

3.- **Bell, J. L. and Slomson, A. B.** "Models and Ultraproducts: an Introduction", Ed. North Holland, Amsterdam. 3a. impresión 1974.

4.- **Bridge, J.** "Beginning Model Theory. The Completeness Theorem and Some Consequences". Ed. Oxford University, 1978.

5.- **Chang, Ch. and Keisler, H. Jerome** "Model Theory". Ed. North Holland. Amsterdam. 3a. edición. 1990.

6.- **Dickmann, M. A.** "Large Infinitary Languages. Model Theory". Ed. North Holland, Amsterdam, 1975.

7.- **Enderton, H. B.** "Una Introducción Matemática a la Lógica". Ed. Universidad Nacional Autónoma de México. 1987.

8.- **Ershov, Yu; Paliutin, E.** "Lógica Matemática". Ed. Mir, Moscú. 1990.

9.- **Hodges, Wilfrid.** "Model Theory". Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol. 42 . Ed. Cambridge University Press. 1993.

10.- **Malitz, J.** "Introduction to Mathematical Logic". Ed. Springer Verlag. 1979.

11.- **Mendelson, Elliot.** "Introduction to Mathematical Logic". Ed. Van Nostrand, 1964.

12.- **Rojas, R. y Amor, J. A.** "Sistemas Formales" Comunicaciones Internas No. 149, 3a. edición, Dpto. de Matemáticas, Fac. de Ciencias, UNAM, 1991.

13.- **Sacks, Gerald E.** "Saturated Model Theory". Ed. W. A. Benjamin, Inc.,1972.

14.- **Schoenfield, Joseph R.** "Mathematical Logic". Ed. Addison-Wesley, 1967.

Impresiones Aries al Instante, S.A. de C.V.
Rep. de Colombia No. 5, Col. Centro
06020 México, D. F.
526 04 72, 526 29 13, Fax 526 29 06