

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

2
EJ

FACULTAD DE INGENIERIA

"DIFRACCION DE ONDAS ELASTICAS
POR CAVIDADES E INCLUSIONES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO GEOFISICO

P R E S E N T A:

ANDRES PECH PEREZ



FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D. F.

1998



Universidad Nacional
Autónoma de México

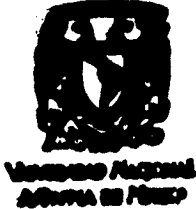


UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-069

DR. ANDRES PECH PEREZ
Presidente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propone el profesor Dr. Francisco José Sánchez Soano, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniería Geofísica:

DIFRACCION DE ONDAS ELASTICAS POR CAVIDADES E INCLUSIONES

- I INTRODUCCION**
- II FUNDAMENTOS DE LA PROPAGACION DE ONDAS ELASTICAS**
- III TEORIA DE LA DIFRACCION DE ONDAS ELASTICAS**
- IV SOLUCIONES ANALITICAS**
- V METODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA**
- VI EJEMPLOS**
- VII CONCLUSIONES**
- BIBLIOGRAFIA**

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPERITU"
Ciudad Universitaria, a 2 de Diciembre de 1994
EL DIRECTOR


ING. JOSÉ MANUEL COVARRUBIAS SOLÍS

J.
MCS'EGLM'94

A mis padres Andrés y Esther.

A mi hermano Ricardo.

A mis tíos Marcos e Inocencia.

A mi novia Aida Alejandra.

"... Las fuerzas convergen y pronto se encontrarán. A las potencias gemelas de la pólvora y de la ira humana se añade ahora la fuerza de la que ya he escrito: la fuerza de la mente ..."

Leonardo da Vinci

ÍNDICE

Resumen	
Abstract	
Capítulo 1. Introducción	1
Capítulo 2. Fundamentos de la propagación de ondas sísmicas	3
2.1. Generación de ondas por una excitación local en un medio elástico	4
2.2. Propagación de ondas en un medio elástico	5
Capítulo 3. Teoría de la difracción de ondas	11
Capítulo 4. Soluciones analíticas	15
4.1. Cañón semicircular	16
4.2. Valle semicircular	19
4.3. Inclusión elástica y cavidad	23
Capítulo 5. Método de elementos de frontera	31
5.1. IBEM	32
5.2. Discretización	33
Capítulo 6. Ejemplos	35
6.1. Difracción de ondas elásticas por una cavidad	35
6.2. Difracción de ondas elásticas por una inclusión	43
Capítulo 7. Conclusiones	53
Reconocimientos	55
Referencias	56
Apéndice A. Integración Gaussiana	59

RESUMEN

En este trabajo se describe el método indirecto de elementos de frontera y se aplica al estudio de los efectos que produce la presencia de una obstrucción en el movimiento de la superficie libre de un semiespacio elástico. La excitación está dada por la incidencia de ondas de corte polarizadas horizontalmente (SH). Las ondas difractadas se construyen usando una representación integral en términos de distribuciones de fuentes de capa simple. Estas densidades de fuerzas se obtienen a partir de un sistema lineal de ecuaciones que resulta de imponer condiciones de frontera. Para validar el método se comparan resultados con soluciones exactas de modelos con geometrías regulares, como es el caso del modelo del semiespacio con una cavidad interior circular cilíndrica y el del semiespacio con una inclusión elástica interior circular cilíndrica. Los resultados se analizan mediante representaciones en espacio y en frecuencia que permiten identificar patrones de resonancia locales.

ABSTRACT

The indirect boundary element method for dynamic elasticity is applied to study the seismic response of an obstruction in an elastic halfspace, the wave incident is SH. The diffracted waves are constructed at the boundaries from which they radiate. Boundary conditions and an analytical discretization scheme lead to a linear system of equations for the boundary sources. Examples are given for the diffraction of elastic waves by models of cavities or inclusions and show the significance of site effects in seismic ground motion.

I. INTRODUCCIÓN

Los efectos de las condiciones locales pueden afectar considerablemente el movimiento del terreno y la respuesta sísmica de estructuras. Los efectos de sitio pueden generar amplificaciones significativas e importantes variaciones espaciales del movimiento sísmico, así como modificar sus características originales tales como el contenido de frecuencias y la duración lo cual puede ser relevante en la respuesta estructural. Estos efectos deben considerarse en la evaluación del riesgo sísmico, en estudios de microrregionalización y en el diseño sísmico de estructuras importantes.

La influencia de la topografía y geología en las características del movimiento sísmico se ha reconocido ampliamente. Gutenberg (1957) fue uno de los primeros en encontrar que los depósitos sedimentarios están generalmente expuestos a una mayor amplificación y los registros sísmicos en tales sitios son más largos y complejos que los correspondientes a terreno firme. Desde este trabajo pionero, la influencia de estratos blandos en el movimiento sísmico ha sido estudiada analíticamente por numerosos investigadores y sus resultados han confirmado lo que se ha observado en algunos casos. Por otra parte, Davis y West (1973) han encontrado a través de una serie de observaciones la generación de amplificaciones locales significativas debido al relieve topográfico. Bouchon (1973) llegó a la misma conclusión empleando un método analítico.

Trifunac (1980) señaló que la banda de frecuencia de interés en Ingeniería Sísmica está en el rango de 0.1 Hz a 20 Hz y las velocidades de onda cerca de la superficie libre en un rango de 0.1 km/a a 3 km/s. Por esto, las longitudes de onda correspondientes son de decenas de metros a decenas de kilómetros. Las irregularidades topográficas y geológicas de dimensiones comprendidas en este rango tendrán influencia considerable en las ondas sísmicas y en los movimientos correspondientes del terreno.

Por otro lado, la presencia de minas, túneles o cavidades de dimensiones moderadas, la cual puede considerarse como un caso particular de irregularidades topográficas, parece ser que no afecta significativamente al movimiento del terreno, sin embargo, por tratarse solo de indicios el problema debería estudiarse con más detalle. Para los efectos de sitio debidos a la presencia de cámaras magmáticas o cavernas, aparentemente no se dispone de métodos que permitan cuantificar su importancia. Comienzan a desarrollarse técnicas para detectar y conocer la configuración de cámaras magmáticas (Julian y Sipkin, 1985).

En este trabajo se presenta la aplicación del método indirecto de elementos de frontera (IBEM, por sus siglas en inglés) para obtener la respuesta sísmica en superficie ante la incidencia de ondas planas SH en un semiespacio con una obstrucción interior cilíndrica, la incidencia se ha supuesto perpendicular al eje del cilindro. Por ello, el problema es bidimensional (2D). El semiespacio en el modelo se dividió en dos regiones para el caso de la cavidad y la inclusión elástica, para evitar inestabilidades numéricas en ciertas frecuencias resonantes del problema interior asociado a la obstrucción. Entre las posibles soluciones se tiene la formación de subdominios que se aplica en este estudio. Cada parte del modelo fue tratada por separado con excepción de ciertas fronteras ficticias (interfaces) donde las dos regiones del modelo se unen. La estrategia de solución se basa en la obtención del campo difractado que se superpone al campo libre. El campo libre está constituido por la onda incidente y la onda reflejada en la ausencia de la obstrucción y es la solución de referencia. Las ondas difractadas se construyen usando una representación integral en términos de distribuciones de fuerza de capa simple. Estas densidades se obtienen a partir de un sistema lineal de ecuaciones que resulta de imponer las condiciones de continuidad de tracciones y desplazamientos en las fronteras ficticias (interfaces), y la condición de tracción nula en las superficies libres. El tratamiento de la inclusión por medio de subdominios, trae consigo algunos problemas relacionados con la topología del modelo, ya que se encuentran en contacto dos medios y además deben cumplirse las condiciones de continuidad de tracciones y de desplazamientos en la frontera de la inclusión. El tratamiento que se le da al semiespacio en el modelo de la inclusión elástica es el mismo que para el caso de la cavidad.

II. FUNDAMENTOS DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS

La excitación local en un medio cualquiera no se detecta simultáneamente a diferentes distancias de la región perturbada. Es necesario que transcurra el tiempo para que la perturbación se propague. Como puede ser en el caso de un temblor, este se registra a distancias remotas de la fuente después de que ha ocurrido.

Existen muchos ejemplos en la naturaleza que ilustran el fenómeno de propagación de las perturbaciones mecánicas. Un caso familiar es la propagación de las ondas en la superficie del agua. Las ondas mecánicas se originan en el movimiento forzado de una porción de un medio deformable. Así, las perturbaciones en una parte se transmiten a las partículas vecinas, y se propagan en el medio. Se habla entonces de propagación de ondas. En este proceso debe superarse la resistencia a la deformación debida a la consistencia del medio y a la inercia. Cuando una perturbación se propaga lleva consigo una energía asociada en forma de energía cinética y de energía potencial. La energía puede transmitirse de esta manera a distancias considerables.

La transmisión de la energía se realiza con la transmisión del movimiento de una partícula a otra y no por el transporte de la masa en el medio. Las ondas mecánicas se caracterizan por el transporte de la energía mediante el movimiento de las partículas en torno a su posición de equilibrio estático. La deformabilidad y la inercia son las propiedades esenciales

de un medio en el cual se puedan propagar ondas mecánicas. Todos los materiales reales son deformables y poseen masa, por tanto todos los materiales transmiten ondas mecánicas.

Debido a la complejidad de la propagación de ondas, la descripción del fenómeno se ha podido hacer recurriendo a simplificaciones e hipótesis que dan lugar a la formulación de modelos que representan sus aspectos más importantes. Es usual aceptar que la tierra es un medio elástico lineal, homogéneo e isótropo. En un medio de esta naturaleza con extensión ilimitada se pueden propagar dos tipos de ondas elásticas; las ondas P y las ondas S. Las primeras se propagan con mayor velocidad y por eso se les suele llamar primarias mientras que las segundas reciben el nombre de secundarias. Existen diversas soluciones para las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de propagación. Así, para una fuente puntual se podría hablar de ondas esféricas, que a grandes distancias de la fuente se pueden representar como ondas planas. En algunos casos se modela el problema de propagación como bidimensional y la solución puede quedar en términos de ondas cilíndricas, que también a grandes distancias son aproximadamente planas.

III. GENERACIÓN DE ONDAS POR UNA EXCITACIÓN LOCAL EN UN MEDIO ELÁSTICO

Supongamos que en un sólido se aplica externamente una fuerza $F(t)$ en un punto P , como se muestra en la figura 2.1.1.a, y se intenta evaluar los desplazamientos y esfuerzos como funciones de las coordenadas espaciales y el tiempo. Sea c la velocidad máxima con la que se propagan las perturbaciones mecánicas en el cuerpo. Si la fuerza se comienza a aplicar en $t = 0$ las regiones perturbadas en los tiempos t_1 y t_2 serán esferas con radio ct_1 y ct_2 , respectivamente, con centro en el punto P . El cuerpo estará perturbado completamente en el tiempo r/c , donde $r =$ máxima dimensión del cuerpo medida desde el punto P . Como se indica en la figura 2.1.1.b, la carga ha sido completamente aplicada en un tiempo t_0 . Definiendo t_0 en una forma más general como el tiempo en el que la fuerza $F(t)$ sufre cambios significativos. Puede decirse que los efectos dinámicos son importantes si t_0 y r/c son del mismo orden de magnitud. Si $t_0 \gg r/c$ el problema es cuasiestático y los efectos dinámicos son despreciables.

de un medio en el cual se puedan propagar ondas mecánicas. Todos los materiales reales son deformables y poseen masa, por tanto todos los materiales transmiten ondas mecánicas.

Debido a la complejidad de la propagación de ondas, la descripción del fenómeno se ha podido hacer recurriendo a simplificaciones e hipótesis que dan lugar a la formulación de modelos que representan sus aspectos más importantes. Es usual aceptar que la tierra es un medio elástico lineal, homogéneo e isotrópico. En un medio de esta naturaleza con extensión ilimitada se pueden propagar dos tipos de ondas elásticas; las ondas P y las ondas S. Las primeras se propagan con mayor velocidad y por eso se les suele llamar primarias mientras que las segundas reciben el nombre de secundarias. Existen diversas soluciones para las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de propagación. Así, para una fuente puntual se podría hablar de ondas esféricas, que a grandes distancias de la fuente se pueden representar como ondas planas. En algunos casos se modela el problema de propagación como bidimensional y la solución puede quedar en términos de ondas cilíndricas, que también a grandes distancias son aproximadamente planas.

II.1. GENERACIÓN DE ONDAS POR UNA EXCITACIÓN LOCAL EN UN MEDIO ELÁSTICO

Supongamos que en un sólido se aplica externamente una fuerza $F(t)$ en un punto P , como se muestra en la figura 2.1.1.a, y se intenta evaluar los desplazamientos y esfuerzos como funciones de las coordenadas espaciales y el tiempo. Sea c la velocidad máxima con la que se propagan las perturbaciones mecánicas en el cuerpo. Si la fuerza se comienza a aplicar en $t = 0$ las regiones perturbadas en los tiempos t_1 y t_2 serán esferas con radio ct_1 y ct_2 , respectivamente, con centro en el punto P . El cuerpo estará perturbado completamente en el tiempo r/c , donde $r =$ máxima dimensión del cuerpo medida desde el punto P . Como se indica en la figura 2.1.1.b, la carga ha sido completamente aplicada en un tiempo t_0 . Definiendo t_0 en una forma más general como el tiempo en el que la fuerza $F(t)$ sufre cambios significativos. Puede decirse que los efectos dinámicos son importantes si t_0 y r/c son del mismo orden de magnitud. Si $t_0 \gg r/c$ el problema es cuasiestático y los efectos dinámicos son despreciables.

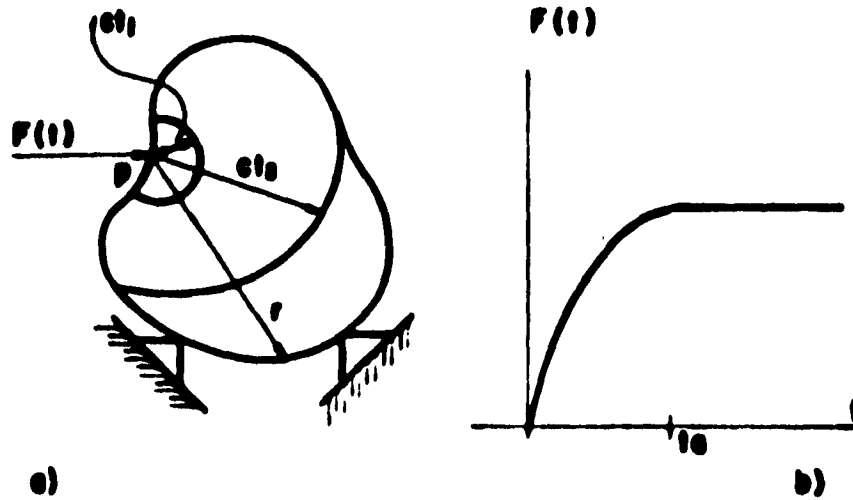


Figura 2.1.1 a) Sólido sometido a una fuerza $F(t)$. b) Variación de $F(t)$ con respecto al tiempo.

II.2. PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO ELÁSTICO

Puede demostrarse que en un sólido elástico, homogéneo e isotrópico las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

Donde u, v, w = desplazamientos en las direcciones x, y, z , respectivamente; λ, μ = constantes de Lamé, ρ = densidad del medio y t = tiempo. Estas ecuaciones pueden escribirse de una manera compacta en notación vectorial, esto es

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u} = \rho \ddot{\bar{u}} \quad (2.4)$$

Donde $\bar{u} = (u, v, w)$ = vector desplazamiento, ∇^2 = operador laplaciano y ∇ = operador gradiente.

A continuación se tratarán dos ejemplos que permitirán mostrar las características principales de las ondas planas en un sólido elástico de extensión ilimitada.

Supóngase que $u \neq 0, v = w = 0$ y que u es solo función de x y del tiempo, las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3 se reducen a la expresión

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

Una solución de esta ecuación es

$$u = f\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) + g\left(t + \frac{x}{\alpha}\right) \quad (2.6)$$

Donde $\alpha^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$ y f, g son funciones de una sola variable que pueden describir una forma de onda arbitraria. Un simple análisis de los argumentos de f y g permite establecer que $f(t - x/\alpha)$ representa una onda que viaja en la dirección positiva de x con velocidad α y $g(t + x/\alpha)$ describe una onda que viaja en la dirección negativa. Debe notarse que $f(t - x/\alpha)$ puede representar una onda armónica estacionaria, $\exp(i\omega(t - x/\alpha))$ donde $i = \sqrt{-1}$ y ω = frecuencia circular del movimiento. Puede demostrarse que la ecuación 2.6 representa ondas de compresión o P.

Un segundo ejemplo simple se obtiene si se supone que $u = w = 0$ y que $v = v(x, t)$. De las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3 se obtiene que

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

Y la solución tiene la misma forma que la ecuación 2.6 pero representa ondas que viajan con una velocidad β , donde $\beta^2 = \mu / \rho$. Debe notarse que el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de avance. Puede demostrarse que las soluciones de la ecuación 2.7 representan ondas de cortante, sin cambio de volumen.

Las ecuaciones de movimiento pueden resolverse de una manera más general por medio de potenciales de desplazamiento.

Si el vector desplazamiento se expresa como

$$\bar{u} = \nabla \phi + \nabla \times \bar{\psi}, \text{ con } \nabla \cdot \bar{\psi} = 0 \quad (2.8)$$

Donde ϕ es un potencial escalar y $\bar{\psi}$ es un potencial vectorial, puede demostrarse que la ecuación 2.8 representa una solución de la ecuación 2.4, si ϕ y $\bar{\psi}$ satisfacen, respectivamente, las ecuaciones de onda:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 \bar{\psi} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

Así, por ejemplo, una solución de la ecuación 2.9 que representa una onda plana de compresión que viaja en una dirección arbitraria está dada por

$$\phi = f\left(t - \frac{xl + ym + zn}{a}\right) \quad (2.11)$$

Donde l, m, n son los cosenos de los ángulos formados por la dirección de viaje y los tres ejes coordenados, respectivamente. Si $\bar{r} = (x, y, z)$ y $\bar{n} = (l, m, n)$ donde \bar{r} = vector de posición y \bar{n} = vector unitario que da la dirección de propagación, en la ecuación 2.11 puede escribirse como

$$\phi = f(t - r \cdot \pi / a) \quad (2.12)$$

Soluciones similares pueden encontrarse para los tres componentes del potencial vectorial y que representan ondas de cortante viajando con una velocidad β .

En coordenadas rectangulares la ecuación 2.8 se desarrolla como

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \quad (2.14)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \quad (2.15)$$

Donde $\bar{\psi} = (\psi_x, \psi_y, \psi_z)$

Los potenciales de desplazamiento ϕ y $\bar{\psi}$ permiten especificar ondas planas de compresión y cortante, respectivamente, que viajen en cualquier dirección y con cualquier forma. Además, dado el carácter lineal de las ecuaciones involucradas, cualquier combinación de soluciones sigue satisfaciendo las ecuaciones de movimiento de un sólido elástico, homogéneo e isótropo de extensión ilimitada.

Otro tipo de ondas muy importante son las denominadas ondas superficiales, las cuales como su nombre lo indica viajan por la superficie del terreno atenuándose con la profundidad. En el caso de las ondas de Rayleigh en un semiespacio homogéneo las partículas se mueven con un movimiento retrógrado describiendo elipses. Las ondas de Love que es otra clase de ondas superficiales son del tipo SH, este tipo de ondas se presentan si sobre la superficie de un semiespacio existe un estrato homogéneo.

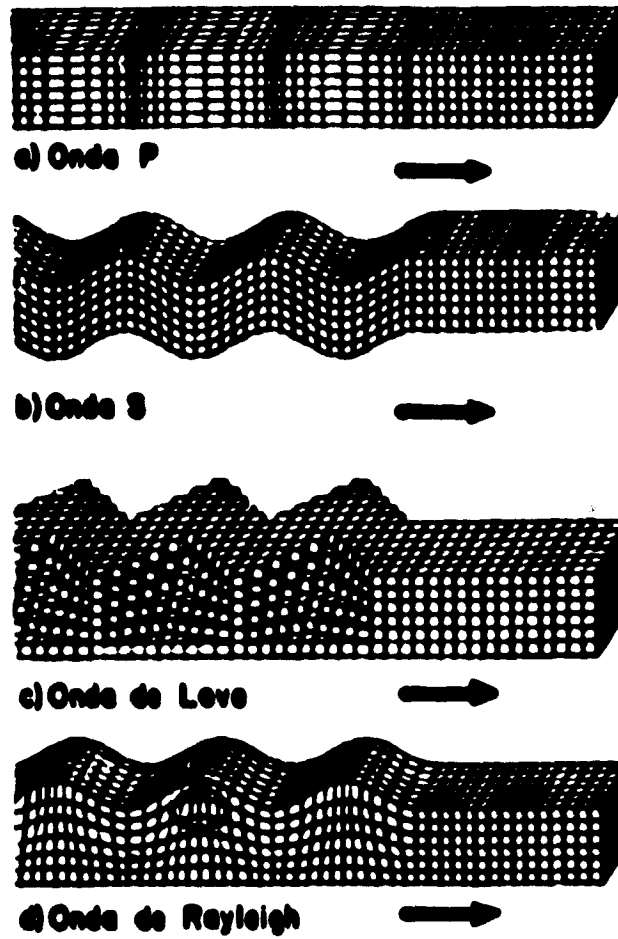


Figura 2.1.2 Diagrama esquemático de cuatro tipos de ondas sísmicas. (a) onda de compresión. (b) onda de cortante. (c) onda de Love. (d) onda de Rayleigh. La flecha horizontal indica la dirección de propagación.

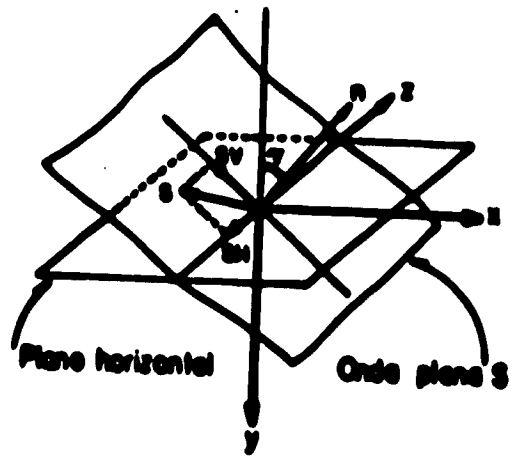


Figure 2.1.3 Nomenclature para ondas planas S

III. TEORÍA DE LA DIFRACCIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS

Una onda difractada es generada cuando un obstáculo de dimensiones finitas es colocado dentro de un campo de ondas incidente. En los años recientes se ha incrementado el interés por la difracción de ondas mecánicas debida a grietas e inclusiones.

La aproximación al problema de la difracción establece que el campo difractado es la diferencia entre el campo total y el campo incidente. El campo difractado incluye a la onda reflejada por la parte iluminada del obstáculo, y la onda que cancela al campo incidente en la zona de sombra.

El fenómeno de difracción de ondas se puede entender por medio de la teoría de rayos; la idea básica consiste en que las ondas se propagan a lo largo de líneas (rayos), como sucede en la óptica geométrica. Además de los rayos directo, reflejado y refractado considerados en la óptica, existen también rayos difractados, así como otros rayos más complejos.

A continuación se analizará un problema de difracción de ondas, que presenta geometría bidimensional. El obstáculo es una pantalla semi-infinita, y la onda incidente es una onda plana (figura 3.1.1). La formulación es completamente equivalente para 3 problemas físicos diferentes, la incidencia de una onda acústica en una pantalla rígida, de una polarizada magnéticamente en una pantalla conductora, y de una onda elástica sobre una grieta. La solución de este problema se debe a Sommerfeld.

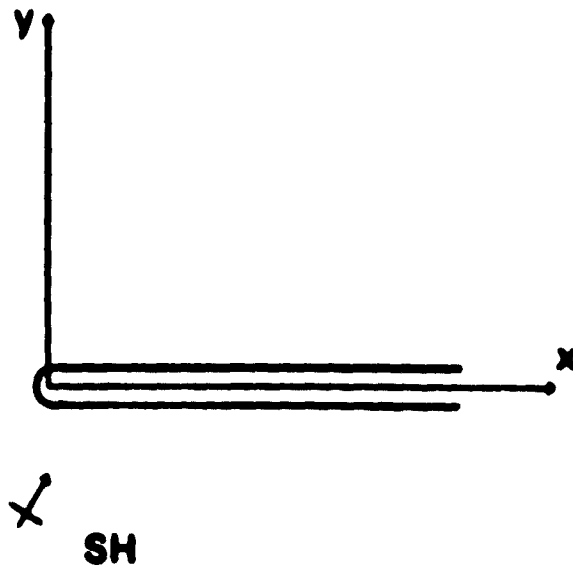


Figura 3.1.1. Geometría de la pantalla difractora ante incidencia de una onda plana armónica.

Consideremos la interacción de una onda plana escalar con una pantalla difractora semi-infinita. Esta puede ser un semiplano rígido, en el que imponga la condición de desplazamiento nulo o una frontera libre de esfuerzos, en la que la derivada normal sea nula. La solución analítica de este problema para una onda armónica, es consistente con el análisis geométrico que se muestra en la figura 3.1.2. En esta figura se observa una onda incidente que se propaga a lo largo del rayo definido por el ángulo θ_i , medido a partir del eje x , que es el ángulo de incidencia. En la figura se ilustran también los frentes de onda que son perpendiculares a los rayos correspondientes.

Para el tiempo definido como $t < -t_1$, la onda se encuentra en la esquina inferior izquierda de la figura (línea segmentada), para el tiempo $t = t_1$, la onda se observa en la parte superior izquierda y en la inferior derecha de la figura (línea continua). Una tercera posición

de la onda incidente (no mostrada en la figura) se presenta en el tiempo $t=0$, cuando interseca a la pantalla difractora.

En la figura también se observa que una parte del campo difractado es generado por la discontinuidad geométrica (pantalla difractora). Con la onda reflejada el campo difractado es completado. Se tienen 5 regiones en las que se observan determinados disturbios. En la región 1 se tiene la onda incidente únicamente, en la 2 las ondas incidente y reflejada, en la 3 las ondas incidente, reflejada y difractada, en la 4 las ondas incidente y difractada y en la región 5 la onda difractada. Esta última región también se conoce como la zona de sombra. La zona iluminada es todo el plano xz , con excepción de la región 5.

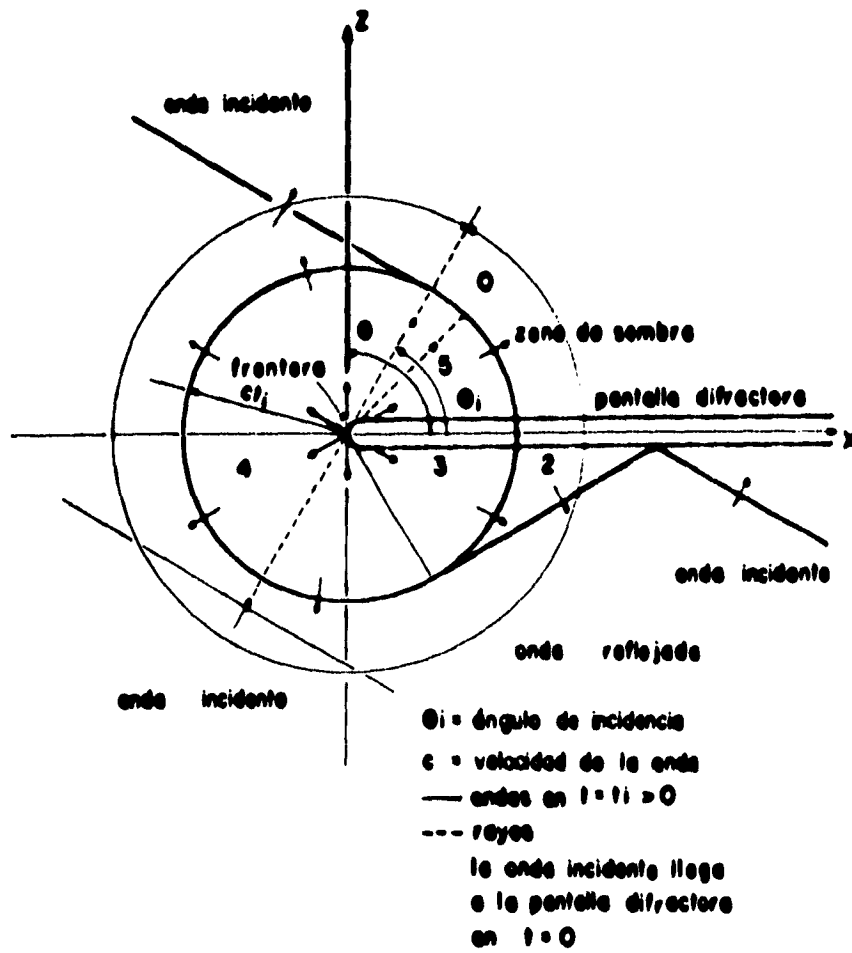


Figura 3.1.2 Difracción de ondas por una pantalla plana semi-infinita.

IV. SOLUCIONES ANALÍTICAS

Existen modelos para el estudio de la propagación de ondas que tienen una solución analítica, dichos modelos generalmente presentan geometrías regulares y pueden ser resueltos de manera exacta, la solución puede expresarse mediante una serie. Algunos modelos como es el caso del cañón y el valle semicirculares, fueron resueltos por Trifunac (1971, 1973), estos casos se presentan a continuación, así como la solución analítica de la cavidad circular y la inclusión elástica circular.

IV.1. CAÑÓN SEMICIRCULAR

Este problema fue resuelto para el tipo de ondas SH, para este caso el desplazamiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación, la superficie del terreno está definida por la condición de frontera libre en la cual los esfuerzos son nulos, en ausencia de la irregularidad únicamente se presentan la onda incidente y la onda reflejada ya que la irregularidad da lugar a la difracción de ondas.

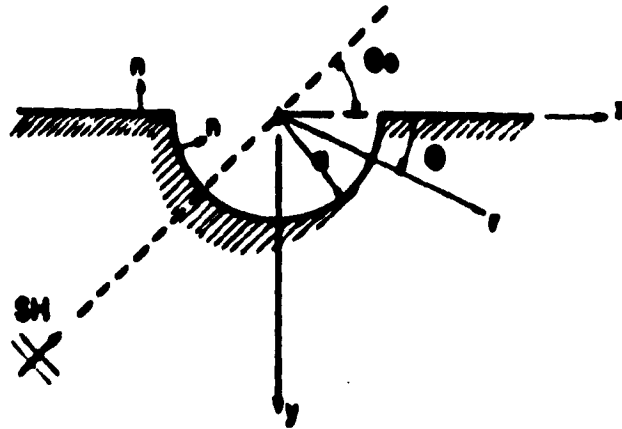


Figura 4.1.1 Geometría del cañón semicircular

El problema es lineal por lo tanto se puede aplicar la superposición de los campos; el campo libre que está constituido por la onda incidente y la onda reflejada, y el campo difractado formado por las ondas generadas por la irregularidad.

$$w^{(t)} = w^{(o)} + w^{(d)} \quad (4.1)$$

El campo libre se define como

$$w^{(o)}(\mathbf{r}) = w^{(i)}(\mathbf{r}) + w^{(r)}(\mathbf{r}) \quad (4.2)$$

donde

$$w^{(i)}(\mathbf{r}) = A \exp(i\omega (t - (x \sin \theta_0 - y \cos \theta_0) / \beta)) \quad (4.3)$$

$$w^{(r)}(\mathbf{r}) = B \exp(i\omega(t - (x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0) / \beta)) \quad (4.4)$$

Donde $w^{(o)}(\mathbf{r})$ = campo libre, $w^{(d)}(\mathbf{r})$ = campo difractado, $w^{(t)}(\mathbf{r})$ = campo total, $w^{(i)}(\mathbf{r})$ es el campo incidente, $w^{(r)}(\mathbf{r})$ es el campo reflejado y θ_0 es el ángulo de incidencia. $k = \omega / \beta$, $\omega = 2\pi f$, β es la velocidad de propagación, f es la frecuencia, $i = \sqrt{-1}$ y t es el tiempo. El campo libre es la solución de referencia. Debido a que las ondas difractadas se representan más fácilmente por medio de ondas cilíndricas. Para que exista compatibilidad, el campo libre también se expresa en estas coordenadas para $z = 0$, y se puede representar mediante una serie de funciones de Bessel.

$$w^{(o)} = w_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(o)} J_m(kr) \cos(m\theta) e^{i\omega t} \quad (4.5)$$

donde

$$A_m^{(o)} = 2(-i)^m \cos(m\theta_0) \epsilon_m \quad (4.6)$$

y ϵ_m = factor de Neumann, que es igual a 1 si $m = 0$, y es igual a 2 si $m \geq 1$.

El campo difractado se representa por medio de una suma de funciones de Hankel de segunda especie. Estas funciones además de decrecer a medida que la coordenada r (en el caso de coordenadas cilíndricas) es mayor, tiende a cero cuando r tiende a infinito, cumple con la condición de irradiación de Sommerfeld. Este campo se define como

$$w^{(d)} = w_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(2)}(kr) \cos(m\theta) e^{i\omega t} \quad (4.7)$$

donde

$$A_m = -A_m^{(o)} \frac{J_m'(ka)}{H_m^{(2)'}(ka)} \quad (4.8)$$

Por lo tanto el campo total queda definido por la siguiente ecuación

$$w^{(1)} = w_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(1)} \left[J_m(kr) - \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} H_m(kr) \right] \cos(m\theta) e^{i\omega t} \quad (4.9)$$

$J_m(\cdot)$ = función de Bessel de primera especie y de orden m , $H_m^{(2)}(\cdot)$ = función de Hankel de orden m y de segunda especie que cumple con la condición de irradiación de Sommerfeld al infinito.

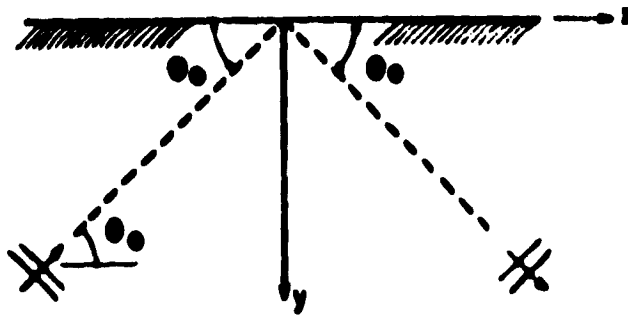


Figura 4.1.2 Campo libre

En la figura 4.1.3 se observa el módulo de la función de transferencia valuada en diferentes puntos de la superficie del terreno, para un ángulo de incidencia de 45 grados. En el eje de las abscisas se grafica la frecuencia normalizada definida como $\eta = \omega a / \pi \beta$, donde β es la velocidad de ondas SH en el semiespacio, ω es la frecuencia radial y a es el radio del cañón.

Se puede ver que la mayor amplificación de los desplazamientos se presenta en el detector 3, debido a la superposición de ondas que amplifica el movimiento en este punto, en los detectores 6, 7 y 8 la amplificación es menor ya que la irregularidad funciona como una barrera para este ángulo de incidencia, las ondas que contribuyen al desplazamiento en estos detectores, son principalmente las que viajan por la frontera de la irregularidad y las difractadas.

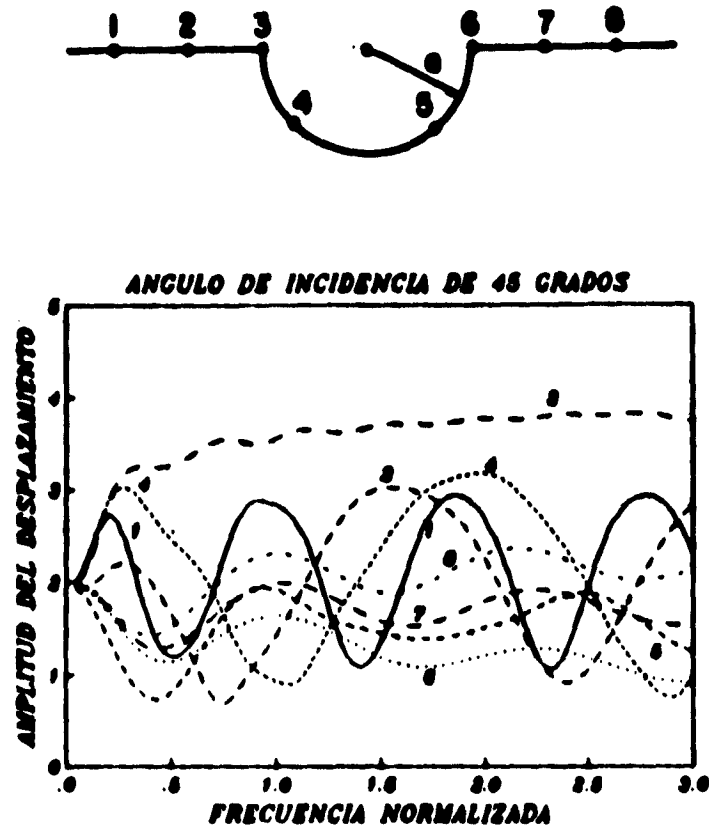


Figura 4.1.3 Amplitud de los desplazamientos en la superficie del terreno, obtenidos para un cañón semicircular.

IV.2. VALLE SEMICIRCULAR

Otro problema muy importante tratado por Trifunac (1971), es el modelo del valle semicircular, en este caso dos medios elásticos con diferentes propiedades se encuentran en

contacto, por consiguiente se tienen que aplicar las condiciones de continuidad de esfuerzos y de desplazamientos en la frontera donde los medios se encuentran en contacto. En la superficie del terreno debe cumplirse la condición de frontera libre, es decir en esta frontera los esfuerzos son nulos.

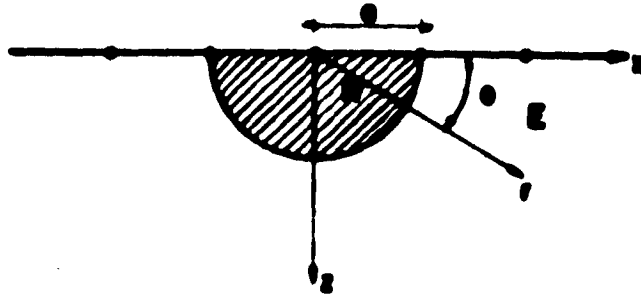


Figura 4.2.1 Geometría del valle semicircular

Para el caso del valle, el campo de desplazamientos generado por las ondas que son refractadas, se representa por medio de una serie de funciones de Bessel, el campo cumple con la condición de superficie libre y se define como

$$v_R = \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_m(k_R r) \cos(m\theta) \quad (4.10)$$

En el semiespacio se presentan el campo libre y el campo difractado, al igual que para el caso del cañón semicircular, como se expresa en la siguiente ecuación.

$$v_E = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(0)} J_m(k_E r) \cos(m\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(2)}(k_E r) \cos(m\theta) \quad (4.11)$$

donde

$$A_m^{(e)} = 2(-i)^m \epsilon_m \cos(m\theta_0) \quad (4.12)$$

v_R = campo de desplazamientos en el valle semicircular, v_E = campo de desplazamientos en el semiespacio.

Los coeficientes A_m y B_m se obtienen aplicando las condiciones de continuidad de tracciones y de desplazamientos, en la superficie donde los dos medios se encuentran en contacto. Así, se tiene que

$$B_m = \frac{A_m^{(e)} J_m(k_E a) + A_m H_m^{(2)}(k_E a)}{J_m(k_R a)} \quad (4.13)$$

$$A_m = A_m^{(e)} \left[\frac{J_m(k_E a) J_m(k_R a) \left(\frac{m}{k_E a} - \tau \frac{m}{k_R a} \right) - J_m(k_R a) J_{m+1}(k_E a) + \tau J_m(k_E a) J_{m+1}(k_R a)}{H_m^{(2)}(k_E a) J_m(k_R a) \left(\tau \frac{m}{k_R a} - \frac{m}{k_E a} \right) + J_m(k_R a) H_{m+1}^{(2)}(k_E a) - \tau H_m^{(2)}(k_E a) J_{m+1}(k_R a)} \right] \quad (4.14)$$

donde τ es el contraste de impedancias y μ es el módulo de cortante, y se definen como

$$\tau = \frac{\mu_R k_R}{\mu_E k_E} \quad \text{y} \quad \mu = \beta^2 \rho \quad (4.15)$$

donde ρ = densidad de masa.

En las figuras 4.2.2 y 4.2.3 se observa la amplitud de los desplazamientos detectados en la superficie del terreno, para varios detectores, en estas figuras η representa la frecuencia normalizada. El valle se encuentra constituido por material blando ($\rho_R = 0.666$ y $\beta_R = 0.5$), debido a esto las mayores amplificaciones se observan en los detectores que se encuentran sobre el valle, la velocidad de propagación de ondas SH y la densidad del material en el valle, están normalizadas con respecto a la velocidad de propagación y la densidad del material en el semiespacio que en este caso son unitarias.

Se presentan varias incidencias, siendo la incidencia horizontal la que genera mayores ampliaciones. Se puede ver también que fuera del valle la amplitud de los desplazamientos es menor, esto se observa para las dos frecuencias que se utilizaron.

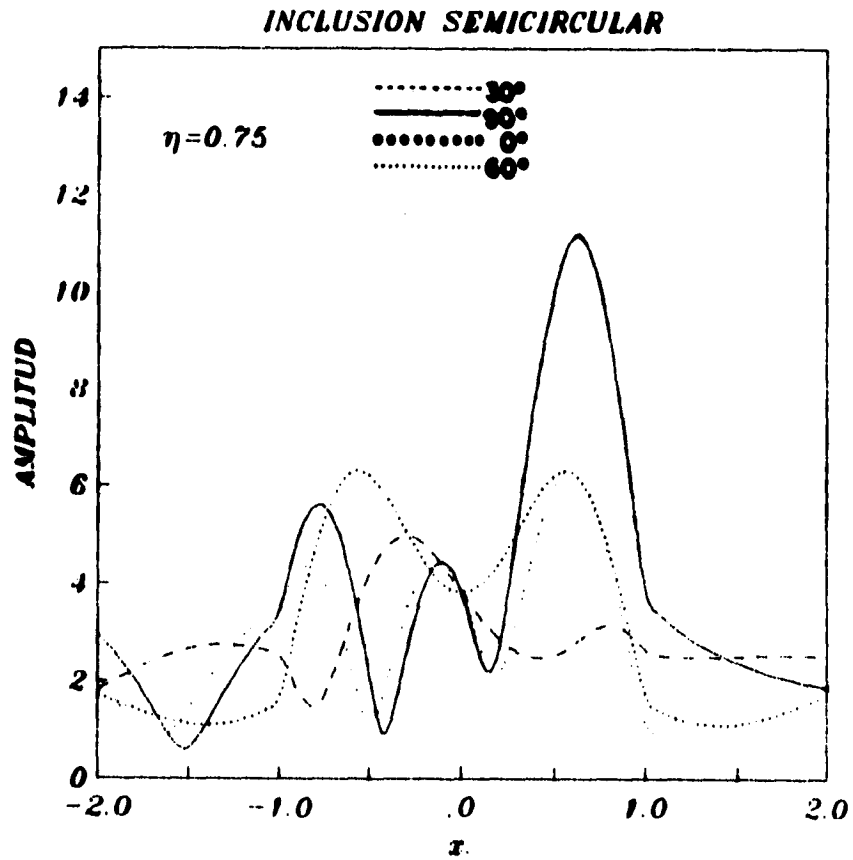


Figura 4.2.2 Amplitud de los desplazamientos para un valle semicircular, registrados en detectores que se encuentran en la superficie del terreno para $\eta = 0.75$

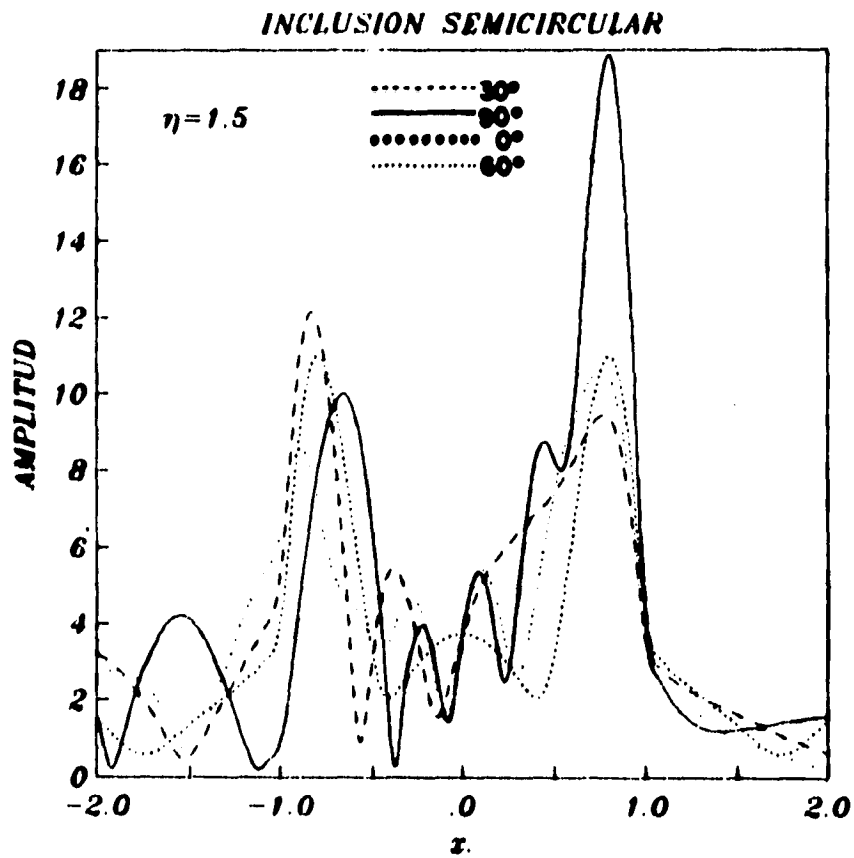


Figura 4.2.3 Amplitud de los desplazamientos para un valle semicircular, registrados en detectores que se encuentran en la superficie del terreno para $\eta = 1.5$

IV.3. INCLUSIÓN ELÁSTICA Y CAVIDAD

Los modelos de inclusión elástica y cavidad circulares se pueden tratar de manera conjunta, estableciendo una formulación general para después analizar casos particulares. La solución de este se debe a J. Avilés (comunicación personal). Se presentan a continuación detalles de la misma.

La inclusión elástica circular se encuentra a una cierta profundidad de la superficie del terreno, y se encuentra sometida a la incidencia de ondas SH.

El campo incidente sufrirá un fenómeno de difracción múltiple debido a la presencia de la superficie libre y la obstrucción. La superficie libre producirá reflexiones, mientras que la obstrucción generará tanto reflexiones como refracciones. Empleando el principio de superposición el campo total se puede construir como:

$$w_s = w^i + w^r + w_f^d + w_i^d \quad (4.16)$$

Donde w^i = campo incidente, w^r = campo reflejado por la superficie libre en ausencia de la obstrucción, w_f^d = campo difractado por la superficie de la obstrucción y w_i^d = campo reflejado por la superficie libre debido al campo w_f^d (imagen de w_f^d).

Si la excitación consiste en ondas planas armónicas de amplitud w_o , con incidencia no vertical definida por un ángulo ψ , el campo incidente en el sistema de coordenadas (x_1, y_1) está dado por:

$$w^i(x_1, y_1) = w_o \exp(-ik_1(x_1 \cos \psi + y_1 \sin \psi)) e^{i\omega t} \quad (4.17)$$

donde t = tiempo y el campo w^r en (x_1, y_1) queda definido por:

$$w^r(x_1, y_1) = w_o \exp(-ik_1(x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi)) e^{i\omega t} \quad (4.18)$$

Para resolver este modelo se usan los teoremas de adición de Graf, como se indica en el artículo de Avilés y Orozco (1990).

Resolviendo la ecuación de onda que describe a este sistema dinámico, por medio del método de separación de variables se encuentra que las ondas difractadas por la obstrucción en el sistema de coordenadas (r_2, θ_2) están dadas por la siguiente serie:

$$w_f^d(r_2, \theta_2) = w_o \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(kr_2) \cos(n\theta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kr_2) \sin(n\theta_2) \right) e^{i\omega t} \quad (4.19)$$

donde A_n y B_n son coeficientes complejos indeterminados que se obtienen al satisfacer las condiciones de frontera y $H_n^{(2)}(0)$ = función de Hankel de segunda especie y de orden n . La

ecuación 4.16 satisface además la condición de irradiación al infinito ya que considera la atenuación geométrica. Parte de este campo difractado se reflejará por la superficie libre, de tal manera que es necesario introducir un campo imagen que tenga en cuenta dicha reflexión y se satisfaga por tanto la condición de superficie libre. Así, el campo w_i^d en (r_3, θ_3) queda definido por

$$w_i^d(r_3, \theta_3) = w_o \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(k_c r_3) \cos(n\theta_3) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(k_c r_3) \sin(n\theta_3) \right) e^{i\omega t} \quad (4.20)$$

Por tratarse de una inclusión elástica se generará un campo refractado dentro de ella. En (r_2, θ_2) el campo refractado está dado por:

$$w_c(r_2, \theta_2) = w_o \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n J_n(k_c r_2) \cos(n\theta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_n(k_c r_2) \sin(n\theta_2) \right) e^{i\omega t} \quad (4.21)$$

donde $k_c = \omega/\beta_c$, $\beta_c = \sqrt{\mu_c/\rho_c}$, μ_c = módulo cortante de la obstrucción y ρ_c = densidad de la obstrucción. C_n y D_n son coeficientes complejos indeterminados que se encuentran mediante las condiciones de frontera y $J_n(\cdot)$ = función de Bessel de primera especie y de orden n .

Los coeficientes A_n, B_n, C_n y D_n que definen la solución del modelo se obtienen al satisfacer las condiciones de frontera en la interfase suelo-obstrucción, que establecen la continuidad de esfuerzos y de desplazamientos. Suponiendo adhesión perfecta, como se expresa en las siguientes ecuaciones.

$$w_s(r_2, \theta_2)|_{r_2=a} = w_c(r_2, \theta_2)|_{r_2=a}, 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi \quad (4.22)$$

$$\tau_{rs}^j(r_2, \theta_2)|_{r_2=a} = \tau_{rc}^j(r_2, \theta_2)|_{r_2=a}, 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi \quad (4.23)$$

donde:

$$\tau_{rs}^j(r_2, \theta_2) = \mu_j \frac{\partial w_j(r_2, \theta_2)}{\partial r_2}, j = s, c \quad (4.24)$$

que es el esfuerzo cortante en la dirección z producido por la propagación de ondas SH.

A continuación se presentan los sismogramas sintéticos para el modelo del semiespacio con una obstrucción circular. El campo de ondas incidente está caracterizado por un pulso de Ricker con $t_p = 0.78 s$, $t_s = 10 s$, $\Delta f = 0.025 Hz$, $n = 256$. Se muestran los casos de la inclusión y la cavidad. Las propiedades físicas de la inclusión se encuentran normalizadas con respecto a las propiedades del semiespacio. Para las inclusiones blanda y rígida se consideraron velocidades de propagación de ondas $\beta_i = 2 km/s$ y $\beta_i = 0.5 km/s$ y densidades $\rho_i = 1.5 g/cm^3$ y $\rho_i = 0.67 g/cm^3$, respectivamente. En ambos casos se consideró al semiespacio con $\beta_s = 1 km/s$ y $\rho_s = 1 g/cm^3$, así como para el caso de la cavidad. La incidencia para estos ejemplos es vertical, la profundidad de la obstrucción es $h = 2a$, donde a es el radio de la obstrucción.

En la figura 4.3.2 se muestran los sismogramas sintéticos para el caso de la inclusión rígida. Se observa el arribo directo (fase d), la fase reflejada r , las fases refractadas denotadas como f_1 y f_2 , y las fases correspondientes a los múltiplos generados por el rebote de las ondas, entre la parte superior de la frontera de la inclusión y la superficie libre. La onda directa llega atenuada a las estaciones que se encuentran cerca de la abecia del centro de la cavidad. Esta atenuación se debe principalmente a la reflexión de las ondas por la frontera de la inclusión. La fase refractada f_2 llega más rápido que la fase r en los detectores que se encuentran colocados en los extremos de la línea, esto se debe a que durante cierto tiempo viaja por la inclusión.

La fase refractada f_1 llega un segundo antes que la onda directa en la estación que se encuentra en $x = 0$. Este frente de onda se define claramente en los sismogramas de las estaciones que se encuentran cerca de la estación central. La amplitud de esta fase es menor que la amplitud de la fase d (onda incidente).

En la figura 4.3.3 se presentan los sismogramas sintéticos para el caso de la inclusión blanda. Se observan los arribos que corresponden a las ondas directas (fase d), y las ondas reflejadas (fase r) en las estaciones que se encuentran localizadas en los extremos de la línea. La onda directa llega atenuada en las estaciones que se encuentran por encima de la inclusión. El campo en esta región es generado principalmente por la difracción a lo largo de la frontera de la inclusión. En la figura 4.3.4 se muestran los sismogramas sintéticos para el caso de la cavidad. Se observa el arribo directo (fase d) y la fase reflejada (fase r), al igual

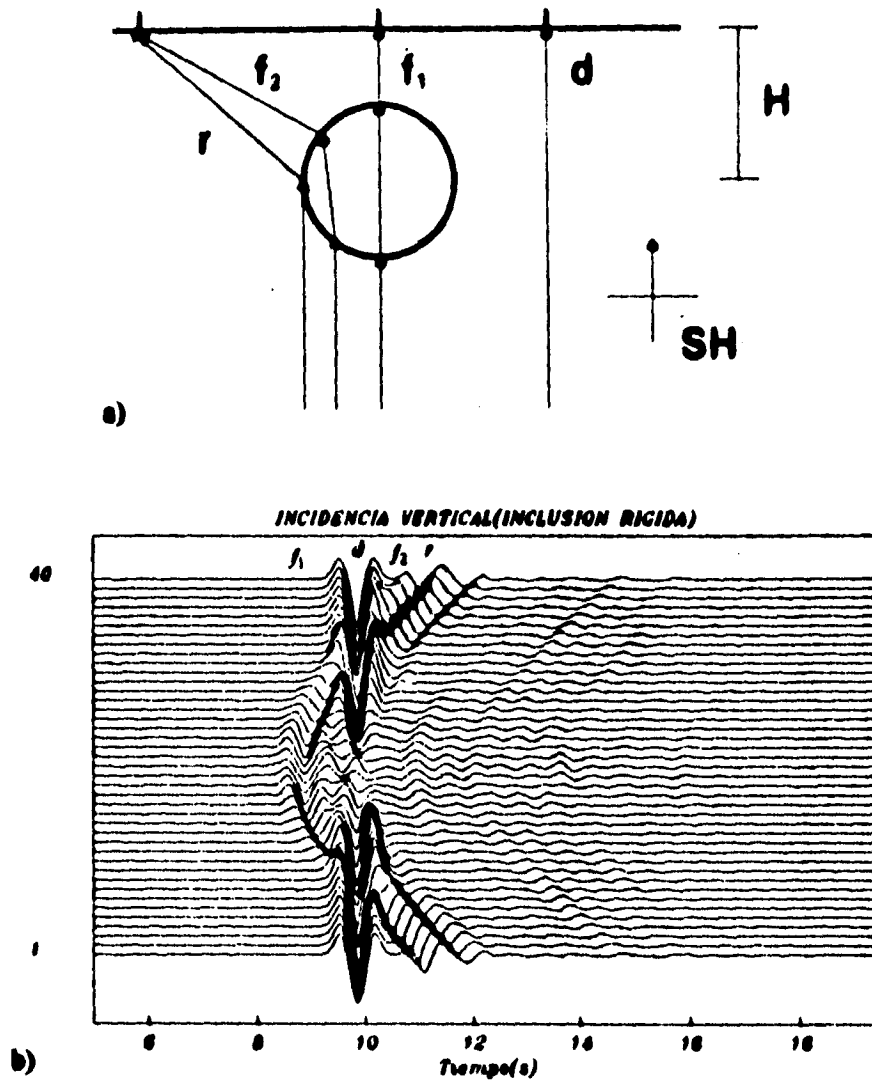


Figura 4.3.2 a) Diagrama de rayos, b) Sismogramas sintéticos para el caso de la inclusión rígida

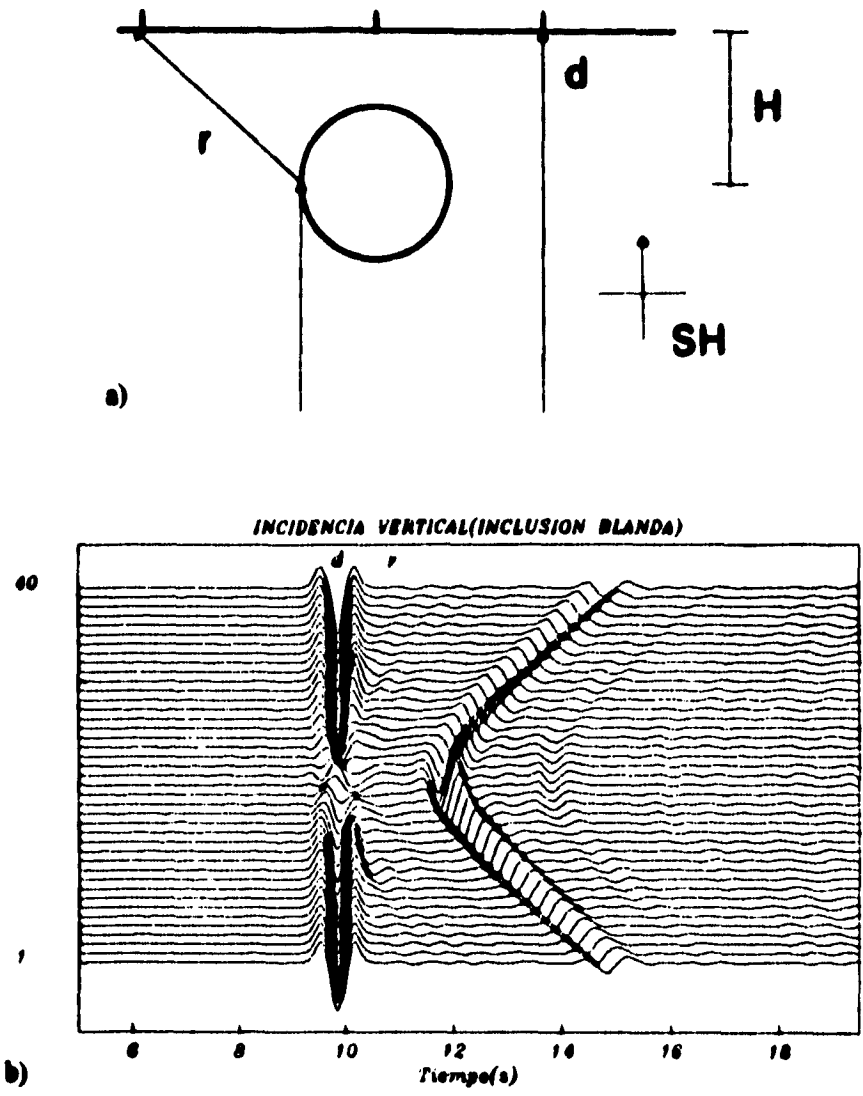


Figura 4.3.3 a) Diagrama de rayos, b) Sismogramas siméticos para el caso de la inclusión blanda

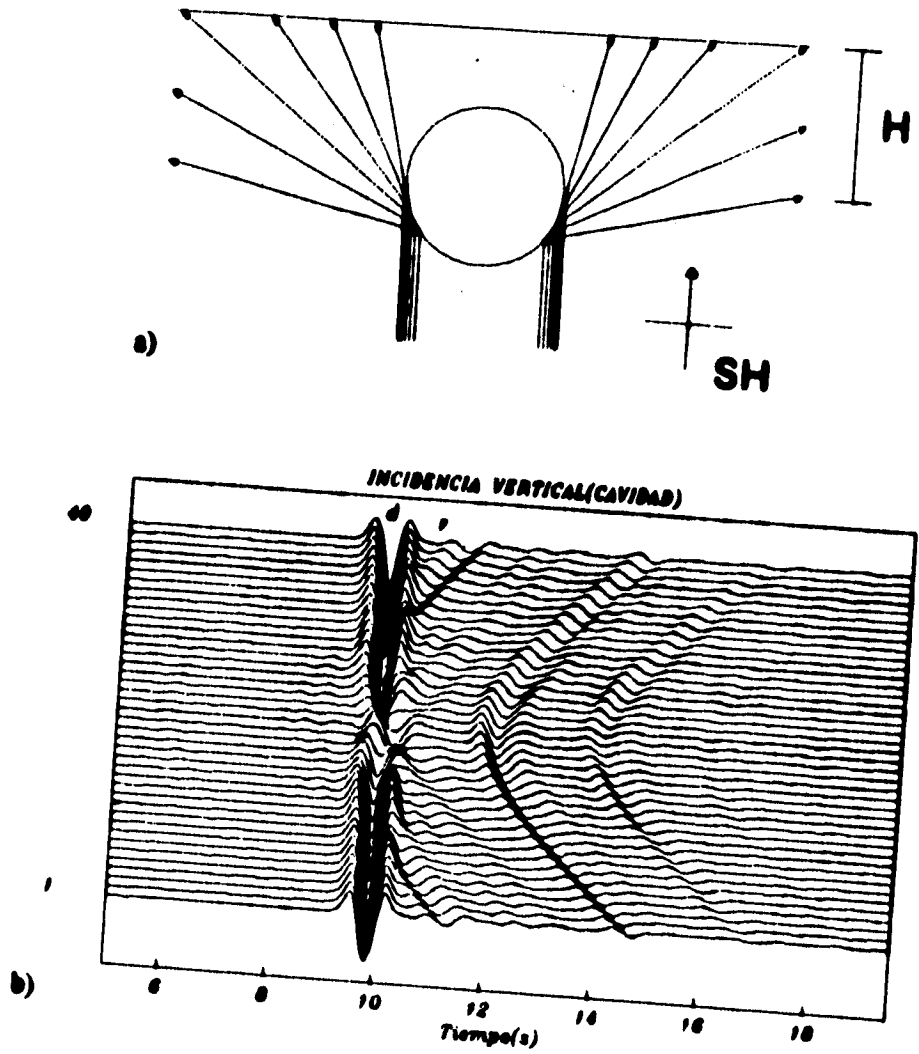


Figura 4.3.4 a) Diagrama de rayas, b) Sismogramas sintéticos para el caso de la cavidad

V. MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA

En los últimos años los métodos de frontera han adquirido popularidad en muchas aplicaciones en sismología e ingeniería pues, además de su versatilidad para ser aplicados en problemas de respuesta sísmica de configuraciones con geometrías diversas, reducen el tiempo de cómputo y capacidad de memoria requeridos en comparación con otros métodos numéricos, debido a que el tratamiento numérico se realiza sólo en las fronteras. Destacan los estudios realizados por Aki y Larner (1970), Sánchez-Sesma y Esquivel (1979), Bouchon (1985), Kawase (1988) y Kawase y Aki (1989).

En el método de elementos de frontera que se analiza aquí se utiliza una representación integral de capa simple para los campos de ondas difractados. Para su aplicación se requiere conocer la función de Green o solución fundamental de la ecuación diferencial que gobierna el movimiento. El problema se resuelve discretizando las fronteras que delimitan la geometría del problema formulando con ello un sistema de ecuaciones lineales (Sánchez - Sesma y Campillo, 1991; Sánchez-Sesma et al., 1993; Sánchez-Sesma y Luzón, 1995; Pedersen et al., 1994).

En este trabajo se presenta la aplicación del método indirecto de elementos de frontera (IBEM, por sus siglas en inglés) para obtener la respuesta sísmica en superficie ante la incidencia de ondas planas SH en un semiespacio con una obstrucción interior cilíndrica, ó en la frontera del semiespacio, la incidencia es siempre perpendicular al eje del cilindro, por ello el problema es bidimensional (2D). Los modelos con la obstrucción interior cilíndrica resueltos con este método, se dividieron en regiones para evitar inestabilidades numéricas en

ciertas frecuencias asociadas a las resonancias del problema interior asociado a la obstrucción. Entre las posibles soluciones se tiene la formación de subdominios que se aplica en este estudio. Cada parte del modelo fue tratada por separado con excepción de ciertas fronteras donde dos regiones del modelo se unen. La estrategia de solución se basa en la obtención del campo difractado que se superpone al campo libre. Las ondas difractadas se construyen usando una representación integral en términos de distribuciones de fuerza de capa simple. Estas densidades se obtienen a partir de un sistema lineal de ecuaciones que resulta de imponer las condiciones de continuidad de tracciones y de desplazamientos en las fronteras ficticias (interfaces), y la condición de tracción nula en las superficies libres.

V.1. IBEM

Considérese una superficie S , finita o infinita, abierta o cerrada, en un espacio elástico tridimensional. Si en esta superficie se aplica una densidad de fuerza armónica, el campo generado se puede escribir, despreciando fuerzas de cuerpo, como

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S \phi_j(\xi) G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) d\xi \quad (5.1)$$

Donde $u_i(\mathbf{x})$ = i -ésimo componente del desplazamiento en \mathbf{x} , $G_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ = función de Green, $\phi_j(\xi)$ = densidad de fuerza armónica en la dirección j . Esta representación integral permite calcular los esfuerzos y tracciones por aplicación directa de la ley de Hooke, con excepción de las singularidades de la función de Green en la frontera. Con base en consideraciones de equilibrio alrededor de una vecindad de la frontera, es posible escribir para \mathbf{x} sobre S

$$t_i(\mathbf{x}) = c\phi_j(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\xi) T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) d\xi \quad (5.2)$$

Donde t_i = i -ésimo componente de la tracción en la frontera, $c = 0.5, -0.5$ ó 0.0 si \mathbf{x} tiende a S desde dentro, desde fuera o si \mathbf{x} no está en S respectivamente $T_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ = función de tracción de Green. El subíndice ξ indica la variable sobre la cual se realiza la integración.

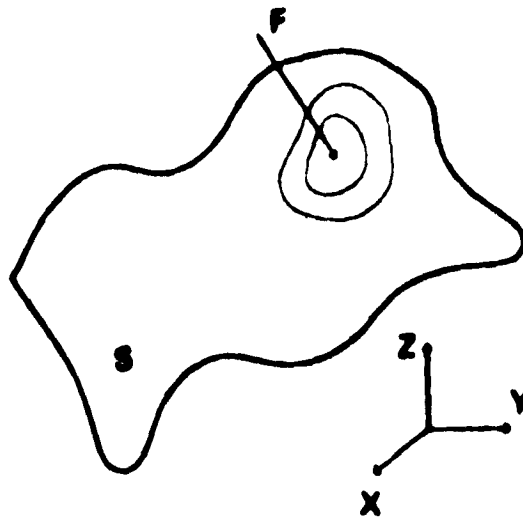


Figura 3.1.1 Espacio elástico tridimensional

Las funciones de Green para desplazamientos y tracciones del problema bidimensional, se expresan mediante las funciones especiales de Hankel. Las expresiones detalladas se dan en el trabajo de Sánchez-Sesma y Campillo (1991) para el problema tridimensional las expresiones se encuentran en el trabajo de Sánchez-Sesma y Luzón (1999)

V.3. DISCRETIZACIÓN

A continuación se presentan las versiones discretizadas de las ecuaciones 5.1 y 5.2

$$u_i(\mathbf{u}) = \sum_{l=1}^N \phi_j(\xi_l) g_{ij}(\mathbf{u}, \xi_l) \quad (5.3)$$

donde

$$g_{ij}(u, \xi_j) = \int_{\xi_j - \Delta/2}^{\xi_j + \Delta/2} G_{ij}(u, \xi) d\xi \quad (5.4)$$

y

$$t_i(u) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\xi_j) g_{ij}(u, \xi_j) \quad (5.5)$$

donde, para $u = u_n$, se tiene

$$t_{ij}(u_n, \xi_j) = c \delta_{ij} \delta_{nj} + \int_{\xi_j - \Delta/2}^{\xi_j + \Delta/2} T_{ij}(u_n, \xi) d\xi \quad (5.6)$$

Las integrales de la ecuación 5.4 son calculadas numéricamente con integración gaussiana, excepto en el caso en que u este en la vecindad de ξ_j , para el que se obtuvieron expresiones analíticas a partir de series secuentes de funciones de Bessel. En el Apéndice se describen las bases de la integración gaussiana.

Las integrales en la ecuación 5.6 también fueron calculadas numéricamente usando integración gaussiana, excepto cuando $u_n = \xi_j$. Para este caso se tiene que

$$t_{ij}(u_n, \xi_n) = c \delta_{ij} \quad (5.7)$$

En cada uno de los segmentos en los que se divide una frontera y sobre la cual se realiza la integración, la función de Green tiene un valor constante y este se asigna al centro de cada segmento.

VI. EJEMPLOS

VI.1. DIFRACCIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS POR UNA CAVIDAD

Consideremos el semiespacio elástico E con una cavidad, (figura 6.1.1), bajo incidencia de ondas SH. Para el caso de ondas SH (caso escalar) sólo el componente u_2 es diferente de cero.

El movimiento total en el semiespacio es la superposición del campo libre y las ondas difractadas:

$$u_2^E(\mathbf{x}) = u_2^{(o)}(\mathbf{x}) + u_2^{(d)}(\mathbf{x}) \quad (6.1)$$

donde $u_2^{(o)}(\mathbf{x})$ es el campo libre. El campo difractado $u_2^{(d)}(\mathbf{x})$ está dado por la ecuación 5.1, y la ecuación 5.2 permite calcular las tracciones asociadas al campo difractado.

Las ondas que son difractadas por la irregularidad, tienen trayectorias muy diversas, como por ejemplo las ondas que se propagan entre la superficie libre y la frontera de la cavidad (ondas atrapadas), existen también ondas que viajan a lo largo de la frontera de la

cavidad. Las ondas difractadas interactúan entre ellas mismas, dando como resultado una variación en la amplitud del desplazamiento, medido en la superficie del terreno.

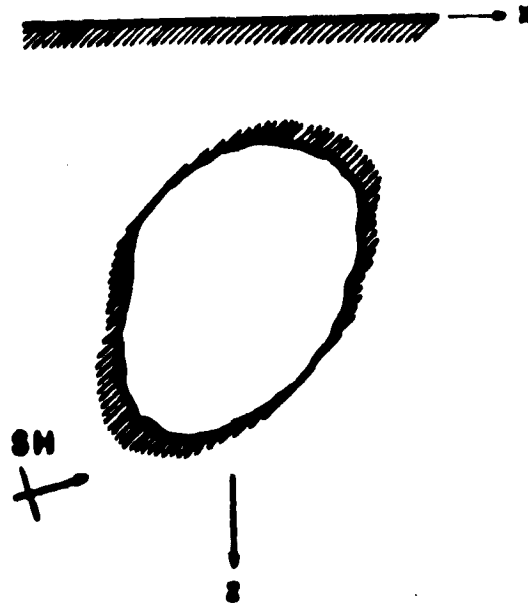


Figura 6.1.1 Geometría de la irregularidad

El modelo se resuelve separándolo en dos regiones, debido a que de esta manera el sistema de ecuaciones resultante no queda mal condicionado por el problema interior asociado, que es tratado en este caso utilizando subdominios. En la frontera de la cavidad se impone la condición de esfuerzo nulo, cuando el modelo se trata de resolver sin utilizar subdominios, sucede que en ciertas frecuencias la solución se inestabiliza, esto se debe a que la cavidad se asemeja a una inclusión, es por esto que se presentan resonancias en la cavidad. Otra manera de abordar el problema es hacer más fuerte la condición de frontera libre aumentando el número de ecuaciones.

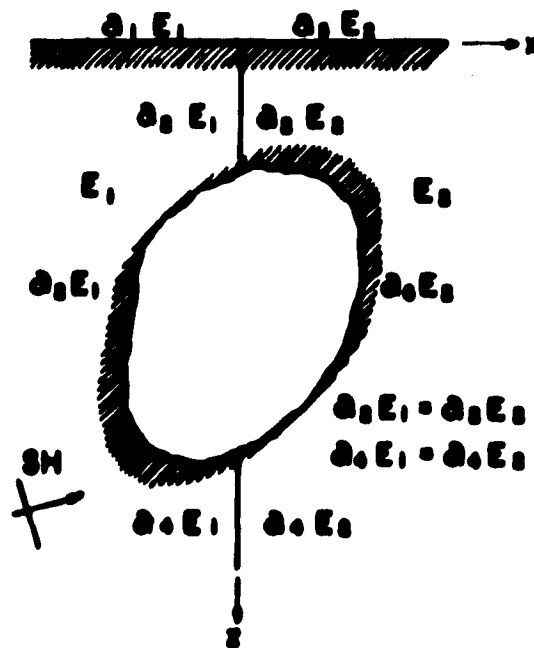


Figura 6.1.2 Nomenclatura utilizada para definir los subdominios del semiespacio

Considérense dos regiones E_1 y E_2 adyacentes con las mismas propiedades cuyas fronteras son S_1 y S_2 respectivamente (fig. 6.1.2), donde $S_1 = \partial_1 E_1 \cup \partial_2 E_1 \cup \partial_3 E_1 \cup \partial_4 E_1$ y $S_2 = \partial_3 E_2 \cup \partial_2 E_2 \cup \partial_4 E_2 \cup \partial_1 E_2$. Debido a que los vectores normales a las superficies donde se unen las dos regiones deben tener la misma dirección y el mismo sentido, los vectores normales a la superficie S_1 apuntan hacia afuera de la región E_1 y los vectores normales a la superficie S_2 apuntan hacia adentro de la región E_2 , para las regiones E_1 y E_2 se tiene que los campos de desplazamientos y las tracciones se definen por las siguientes ecuaciones en las cuales los superíndices 1 y 2 hacen referencia a la región 1 y 2, respectivamente.

$$u_2^{(1)}(\mathbf{x}) = u_2^{(0)}(\mathbf{x}) + \int_{S_1} \phi_2^{(1)}(\xi) G_{22}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi) d\mathbf{x}_\xi \quad (6.2)$$

$$t_2^{(1)}(\mathbf{u}) = t_2^{(0)}(\mathbf{u}) + 0.5\phi_2^{(1)}(\mathbf{u}) + \int_{S_1} \phi_2^{(1)}(\xi) T_{22}^{(1)}(\mathbf{u}, \xi) d\mathbf{s}_\xi \quad (6.3)$$

$$u_2^{(2)}(\mathbf{u}) = u_2^{(0)}(\mathbf{u}) + \int_{S_2} \phi_2^{(2)}(\xi) G_{22}^{(2)}(\mathbf{u}, \xi) d\mathbf{s}_\xi \quad (6.4)$$

$$t_2^{(2)}(\mathbf{u}) = t_2^{(0)}(\mathbf{u}) - 0.5\phi_2^{(2)}(\mathbf{u}) + \int_{S_2} \phi_2^{(2)}(\xi) T_{22}^{(2)}(\mathbf{u}, \xi) d\mathbf{s}_\xi \quad (6.5)$$

La condición de frontera libre implica que

$$t_2^{(1)}(\mathbf{u}) = 0 \quad (6.6)$$

$$t_2^{(2)}(\mathbf{u}) = 0 \quad (6.7)$$

por lo tanto

$$0.5\phi_2^{(1)}(\mathbf{u}) + \int_{S_1} \phi_2^{(1)}(\xi) T_{22}^{(1)}(\mathbf{u}, \xi) d\mathbf{s}_\xi = 0 \quad \text{en} \quad \partial_1 E_1 \quad (6.8)$$

$$0.5\phi_2^{(1)}(\mathbf{u}) + \int_{S_1} \phi_2^{(1)}(\xi) T_{22}^{(1)}(\mathbf{u}, \xi) d\mathbf{s}_\xi = -t_2^{(0)}(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \partial_3 E_1 \quad (6.9)$$

$$-0.5\phi_2^{(2)}(\mathbf{u}) + \int_{S_2} \phi_2^{(2)}(\xi) T_{22}^{(2)}(\mathbf{u}, \xi) d\mathbf{s}_\xi = 0 \quad \text{en} \quad \partial_3 E_2 \quad (6.10)$$

$$-0.5\phi_2^{(2)}(\mathbf{u}) + \int_{S_2} \phi_2^{(2)}(\xi) T_{22}^{(2)}(\mathbf{u}, \xi) d\mathbf{s}_\xi = -t_2^{(0)}(\mathbf{u}) \quad \text{en} \quad \partial_6 E_2 \quad (6.11)$$

Las condiciones de continuidad en frontera ficticia implican que

$$u_2^{(1)}(\mathbf{u}) = u_2^{(2)}(\mathbf{u}) \quad (6.12)$$

$$t_2^{(1)}(\mathbf{u}) = t_2^{(2)}(\mathbf{u}) \quad (6.13)$$

por lo tanto en las superficies $\partial_2 E_1$ y $\partial_4 E_1$

$$\int_{S_1} \phi_2^{(1)}(\xi) G_{22}^{(1)}(\mathbf{u}, \xi) d\mathbf{s}_\xi - \int_{S_2} \phi_2^{(2)}(\xi) G_{22}^{(2)}(\mathbf{u}, \xi) d\mathbf{s}_\xi = 0 \quad (6.14)$$

$$0.5(\phi_2^{(1)}(u) + \phi_2^{(2)}(u)) + \int_{S_1} \phi_2^{(1)}(\xi) T_{22}^{(1)}(u, \xi) d\xi - \int_{S_2} \phi_2^{(2)}(\xi) T_{22}^{(2)}(u, \xi) d\xi = 0$$

(6.15)

Las ecuaciones 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.14 y 6.15 constituyen un sistema de ecuaciones integrales de fuentes en las fronteras. Estas expresiones son discretizadas a lo largo de las fronteras S_1 y S_2 .

Con objeto de probar la técnica que aquí se presenta, se comparan resultados con los obtenidos con la solución exacta para una cavidad circular. Es posible obtener esa solución mediante el teorema de adición de Graff para las funciones de Bessel, como se indicó en el capítulo 4. La solución se expresa en forma de una serie infinita. En la figura 6.1.3 se comparan las amplitudes del desplazamiento en la superficie obtenidas con los dos métodos, se eligió una frecuencia normalizada $\eta = 1.0$, donde $\eta = \omega a / \pi \beta$, a es el radio de la cavidad y β es la velocidad de ondas SH en el semiespacio que en este caso es unitaria. La profundidad de la cavidad es $h = 4.14a$, las características geométricas del modelo de la cavidad son las mismas para todos los ejemplos, así como las propiedades del semiespacio. La abscisa del centro de la cavidad se encuentra en $x = 0.0$, la incidencia es horizontal, en ausencia de obstáculo la amplitud en superficie libre se ha fijado en la unidad. La solución exacta se presenta con línea segmentada y la solución numérica con línea punteada. El acuerdo es excelente.

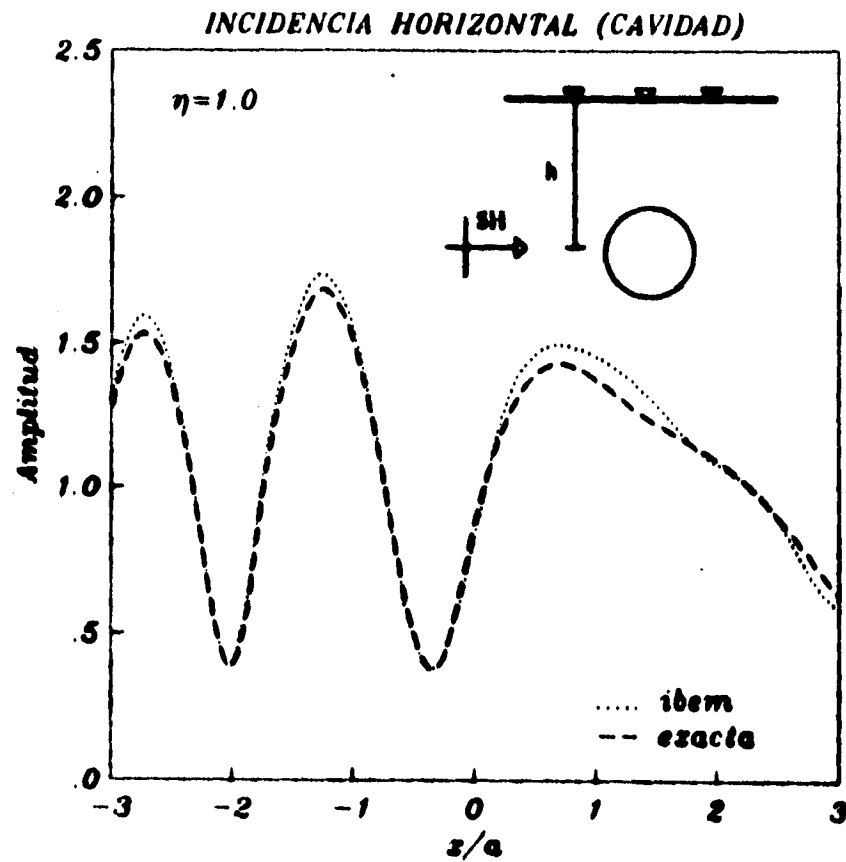


Figura 6.1.3 Modelo de la cavidad cilíndrica ante incidencia horizontal de ondas SH.

La respuesta en superficie es estudiada en el modelo de la cavidad cilíndrica ante la incidencia vertical de ondas SH. Para este ejemplo el factor de calidad utilizado es de 1000. En la figura 6.1.4 se pueden observar varios picos que son originados por las ondas que quedan atrapadas entre la superficie libre y la cavidad, para el caso de un estrato limitado por superficies libres se presenta también el fenómeno de resonancia.

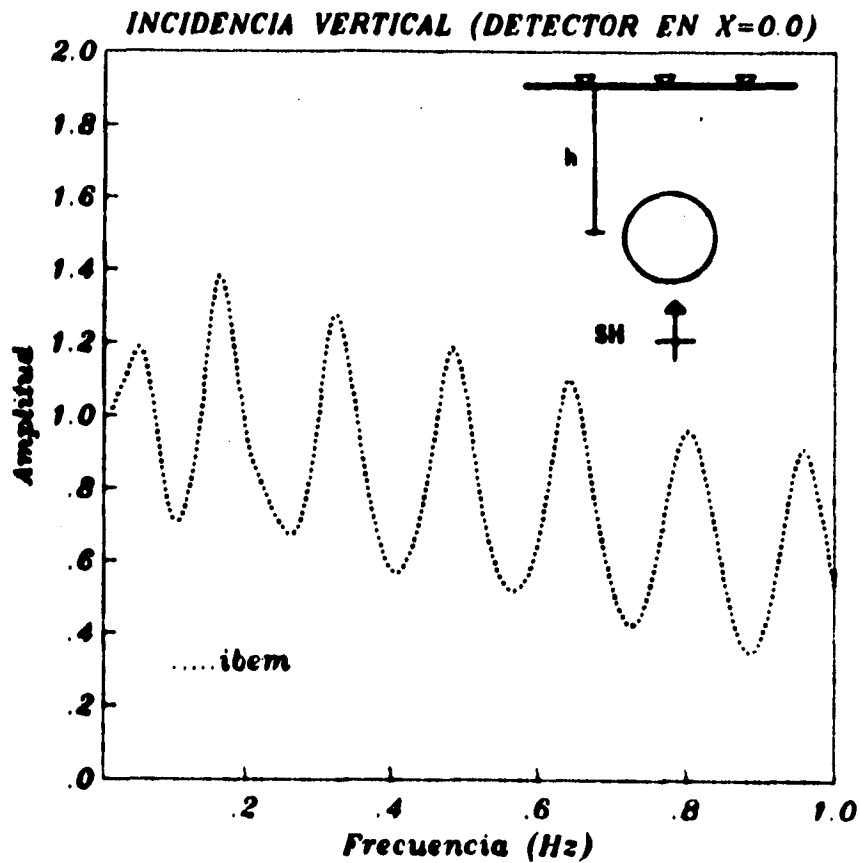


Figura 6.1.4 Modelo de la cavidad cilíndrica ante incidencia vertical

Para una grieta plana resuelta con el IBEM, se ha obtenido excelente acuerdo con la solución exacta (Sánchez Seama, comunicación personal)

Para mostrar la versatilidad del método se resolvió también el problema de una grieta semicircular ante incidencia de ondas SH, los vectores normales a las superficies de las dos regiones se mantuvieron con el mismo sentido, se pueden observar en las figuras 6.1.5 y 6.1.6 las amplitudes de los desplazamientos en la superficie ante varias incidencias.

Los ángulos de incidencia están medidos a partir del eje x positivo en sentido horario. Para los ángulos de incidencia con signo positivo (figura 6.1.5) hay una mayor variación en la amplificación del desplazamiento en los detectores que se encuentran en la parte negativa del eje x , esto se debe a que hay una mayor contribución de las ondas que son difractadas por la grieta. La contribución de las ondas difractadas en los detectores que se encuentran a lo largo de la parte positiva del eje x es menor.

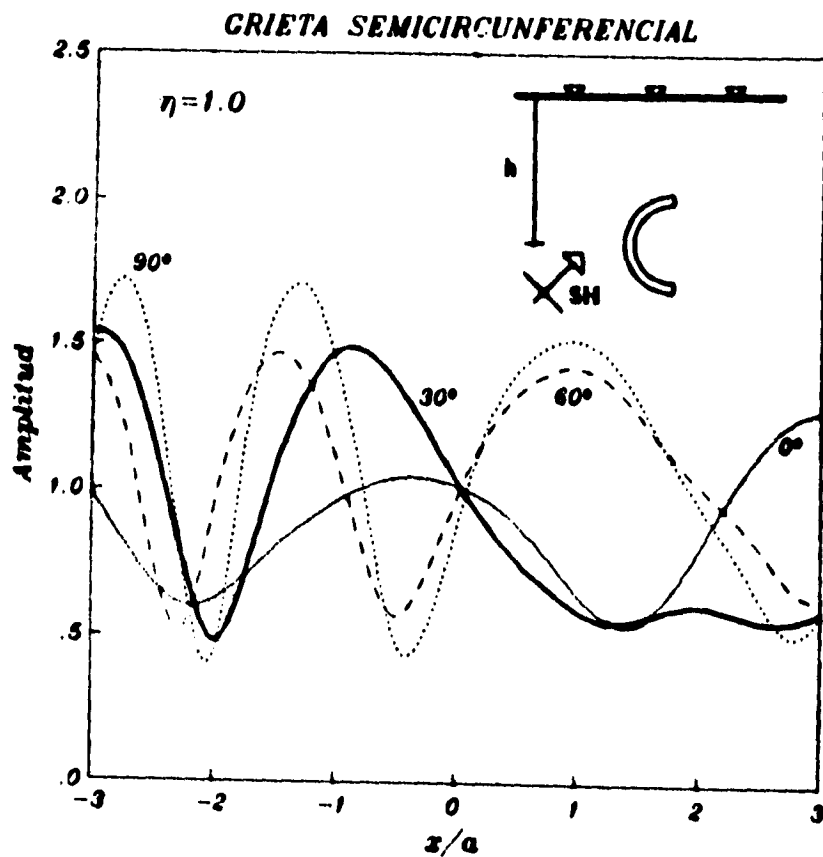


Figura 6.1.5 Modelo de la grieta semicircular ante varias incidencias

Para los ángulos de incidencia con signo negativo (figura 6.1.6) sucede lo contrario, hay una mayor contribución de las ondas difractadas en los detectores que se encuentran en la parte positiva del eje x y por lo tanto una mayor variación en la amplificación del

desplazamiento. La variación en la amplitud del desplazamiento se debe a que las contribuciones de las ondas difractadas pueden ser destructivas o constructivas, para estos ejemplos se eligió una frecuencia normalizada $\eta=1.0$, las propiedades físicas del semiespacio para el modelo de la grieta son las mismas que en el modelo de la cavidad y la profundidad del centro de la grieta es también la igual a la profundidad del centro de la cavidad cilíndrica.

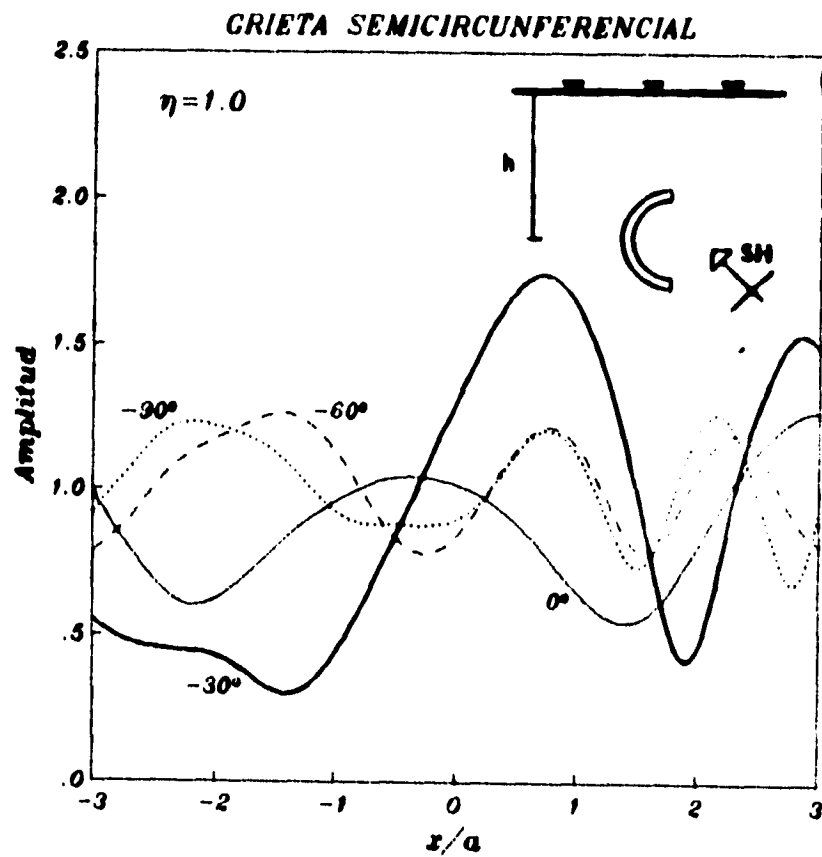


Figura 6.1.6 Modelo de la grieta semicircular ante varias incidencias

VI.2. DIFRACCIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS POR UNA INCLUSIÓN

Consideremos el semiespacio elástico E con una inclusión, (figura 6.2.1), bajo incidencia de ondas SH. El movimiento total en el semiespacio es la superposición del campo libre y las ondas difractadas, al igual que en el modelo de la cavidad.

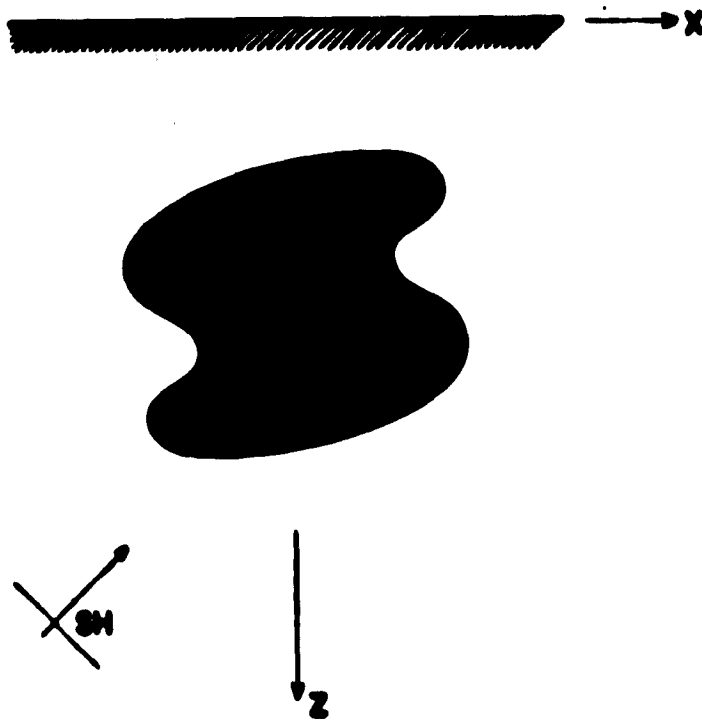


Figura 6.2.1 Geometría de la inclusión

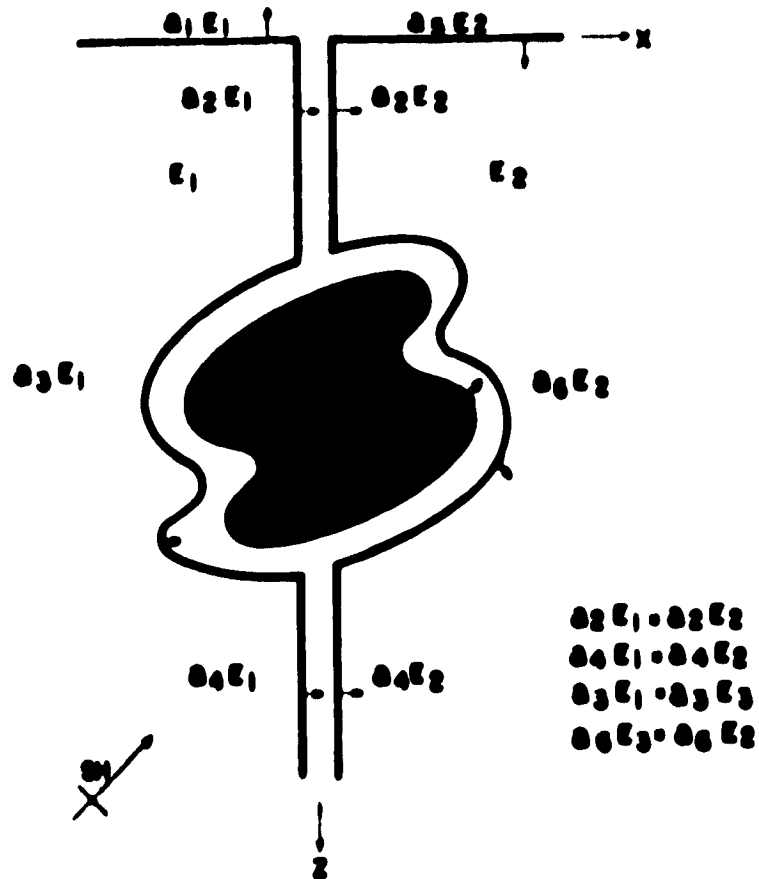


Figura 6.2.2 Separación del modelo en subdominios

El modelo se resuelve separándolo en tres regiones, debido al problema interior descrito anteriormente.

El tratamiento del semiespacio se realizó de la misma manera que en el modelo de la cavidad y las características geométricas de los subdominios son también las mismas. Para el caso de la inclusión esta se denominó como región E_3 , limitada por la superficie S_3 . Esta

superficie está en contacto con las regiones 1 y 2. Debido a que los vectores normales a las superficies donde se unen dos regiones deben tener la misma dirección y el mismo sentido, los vectores normales a la superficie S_3 se establecieron de manera que cumplieran con esta característica, de esta manera la región E_3 se acopló con las otras regiones E_1 y E_2 , se tiene entonces que los campos de desplazamientos y las tracciones se definen por las siguientes ecuaciones, en las cuales los superíndices indican la región que se está considerando

$$u_2^{(1)}(u) = u_2^{(0)}(u) + \int_{S_3} \phi_2^{(1)}(\xi) G_{22}^{(1)}(u, \xi) d\omega_\xi \quad (6.16)$$

$$t_2^{(1)}(u) = t_2^{(0)}(u) + 0.5\phi_2^{(1)}(u) + \int_{S_3} \phi_2^{(1)}(\xi) T_{22}^{(1)}(u, \xi) d\omega_\xi \quad (6.17)$$

$$u_2^{(2)}(u) = u_2^{(0)}(u) + \int_{S_3} \phi_2^{(2)}(\xi) G_{22}^{(2)}(u, \xi) d\omega_\xi \quad (6.18)$$

$$t_2^{(2)}(u) = t_2^{(0)}(u) - 0.5\phi_2^{(2)}(u) + \int_{S_3} \phi_2^{(2)}(\xi) T_{22}^{(2)}(u, \xi) d\omega_\xi \quad (6.19)$$

En la frontera $\partial_3 E_3$

$$u_2^{(3)}(u) = \int_{S_3} \phi_2^{(3)}(\xi) G_{22}^{(3)}(u, \xi) d\omega_\xi \quad (6.20)$$

$$t_2^{(3)}(u) = -0.5\phi_2^{(3)}(u) + \int_{S_3} \phi_2^{(3)}(\xi) T_{22}^{(3)}(u, \xi) d\omega_\xi \quad (6.21)$$

En $\partial_6 E_3$

$$u_2^{(3)}(u) = \int_{S_3} \phi_2^{(3)}(\xi) G_{22}^{(3)}(u, \xi) d\omega_\xi \quad (6.22)$$

$$t_2^{(3)}(u) = +0.5\phi_2^{(3)}(u) + \int_{S_3} \phi_2^{(3)}(\xi) T_{22}^{(3)}(u, \xi) d\omega_\xi \quad (6.23)$$

La condición de frontera libre implica que

$$t_2^{(1)}(u) = 0 \quad (6.24)$$

$$t_2^{(2)}(u) = 0 \quad (6.25)$$

por lo tanto

$$+0.5\phi_2^{(1)}(u) + \int_{S_1} \phi_2^{(1)}(\xi) T_{22}^{(1)}(u, \xi) d\omega_\xi = 0 \quad \text{en} \quad \partial_1 E_1 \quad (6.26)$$

$$+0.5\phi_2^{(2)}(u) - \int_{S_2} \phi_2^{(2)}(\xi) T_{22}^{(2)}(u, \xi) d\omega_\xi = 0 \quad \text{en} \quad \partial_3 E_2 \quad (6.27)$$

Estableciendo condiciones de continuidad en frontera ficticia

$$u_2^{(1)}(u) = u_2^{(2)}(u) \quad (6.28)$$

$$t_2^{(1)}(u) = t_2^{(2)}(u) \quad (6.29)$$

por lo tanto en las superficies $\partial_3 E_1$ y $\partial_4 E_1$

$$\int_{S_1} \phi_2^{(1)}(\xi) G_{22}^{(1)}(u, \xi) d\omega_\xi - \int_{S_2} \phi_2^{(2)}(\xi) G_{22}^{(2)}(u, \xi) d\omega_\xi = 0 \quad (6.30)$$

$$0.5(\phi_2^{(1)}(u) + \phi_2^{(2)}(u)) + \int_{S_1} \phi_2^{(1)}(\xi) T_{22}^{(1)}(u, \xi) d\omega_\xi - \int_{S_2} \phi_2^{(2)}(\xi) T_{22}^{(2)}(u, \xi) d\omega_\xi = 0 \quad (6.31)$$

Estableciendo condiciones de continuidad en frontera real

$$u_2^{(1)}(u) = u_2^{(3)}(u) \quad (6.32)$$

$$t_2^{(1)}(u) = t_2^{(3)}(u) \quad (6.33)$$

En la superficie $\partial_3 E_1$

$$\int_{S_1} \phi_2^{(1)}(\xi) G_{22}^{(1)}(u, \xi) d\omega_\xi - \int_{S_3} \phi_2^{(3)}(\xi) G_{22}^{(3)}(u, \xi) d\omega_\xi = -u^{(o)}(u) \quad (6.34)$$

$$0.5(\phi_2^{(1)}(u) + \phi_2^{(3)}(u)) + \int_{S_1} \phi_2^{(1)}(\xi) T_{22}^{(1)}(u, \xi) d\omega_\xi - \int_{S_3} \phi_2^{(3)}(\xi) T_{22}^{(3)}(u, \xi) d\omega_\xi = -t^{(o)} \quad (6.35)$$

En $\partial_6 E_2$

$$\int_{S_1} \phi_2^{(2)}(\xi) G_{22}^{(2)}(u, \xi) ds_\xi - \int_{S_2} \phi_2^{(3)}(\xi) G_{22}^{(3)}(u, \xi) ds_\xi = -u^{(a)}(u) \quad (6.36)$$

$$0.5(\phi_2^{(2)}(u) + \phi_2^{(3)}(u)) - \int_{S_2} \phi_2^{(2)}(\xi) T_{22}^{(2)}(u, \xi) ds_\xi + \int_{S_1} \phi_2^{(3)}(\xi) T_{22}^{(3)}(u, \xi) ds_\xi = f^{(a)} \quad (6.37)$$

Las ecuaciones 6.26, 6.27, 6.30, 6.31, 6.34, 6.35, 6.36 y 6.37 constituyen un sistema de ecuaciones integrales de fuentes en las fronteras. Estas expresiones son discretizadas a lo largo de las fronteras S_1 , S_2 y S_3 .

Para probar la técnica, se resolvió el modelo de la inclusión circular cilíndrica y se comparó con la solución analítica. Las propiedades físicas de la inclusión están normalizadas con respecto a las propiedades del semiespacio.

En la figura 6.2.3 se muestran los resultados para el caso de una inclusión rígida, la velocidad de propagación de las ondas SH en el semiespacio es unitaria, así como la densidad del material en el semiespacio, para la inclusión la velocidad de propagación es de 3, así como la densidad, la profundidad de la inclusión es $h = 4.14a$ donde a es el radio de la inclusión, el ángulo de incidencia de las ondas SH es de 60 grados. Los ángulos de incidencia están definidos de la misma manera que en el modelo de la cavidad. Las características geométricas de la inclusión son las mismas para todos los ejemplos, así como las propiedades físicas del semiespacio.

Se puede observar que en los detectores que se encuentran en la parte positiva del eje x , no existe una gran variación en la amplitud de los desplazamientos, la amplitud en estos detectores es prácticamente uno, en los detectores que se encuentran en la parte negativa del eje x se presenta una mayor variación en la amplitud, esto se debe a que la contribución de las ondas difractadas es mayor. Para este ángulo de incidencia la inclusión funciona como una barrera para los detectores que se encuentran en la parte positiva del x . Las ondas que llegan principalmente a estos detectores son las que viajan por la frontera de la inclusión y las que viajan a través de ella.

En la figura 6.2.4 se presentan los resultados obtenidos para un ángulo de incidencia de 90 grados. Se puede observar que existe una gran variación en la amplitud del desplazamiento en todos los detectores, estos se encuentran localizados a lo largo del eje x . Los picos son originados por la superposición de ondas, ya que se presentan ondas que son refractadas o difractadas por la inclusión, o que durante un cierto tiempo quedan atrapadas entre la superficie libre y la frontera de la irregularidad, y que después llegan a los detectores, por lo tanto las amplitudes de dos ondas que interactúan pueden superponerse de manera constructiva o destructiva, el valor alrededor del cual las amplitudes varían es uno. En este ejemplo las ondas directas llegan primero al detector que se encuentran en el extremo izquierdo de la parte negativa del eje x .

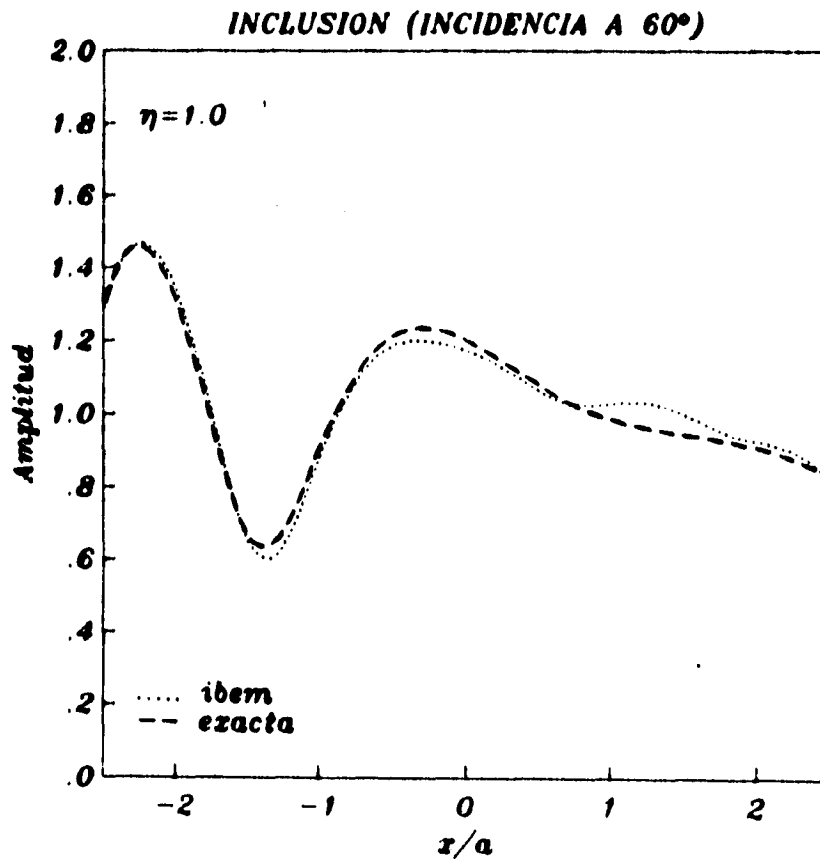


Figura 6.2.3 Amplitud de los desplazamientos para el caso de la inclusión rígida

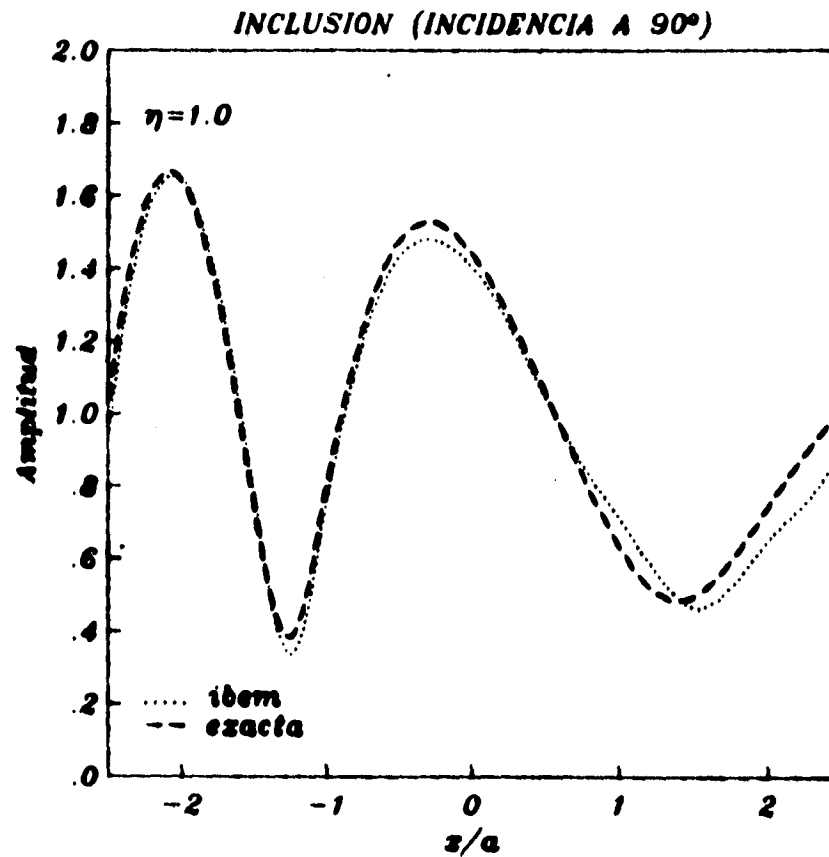


Figura 6.2.4 Amplitud de los desplazamientos para el caso de la inclusión rígida

Se analizó también el caso de la inclusión blanda. En la figura 6.2.5 se muestran las amplitudes de los desplazamientos. La velocidad de propagación de ondas y la densidad en la inclusión se consideraron de 0.5. El ángulo de incidencia es de 90 grados (incidencia horizontal). En este caso las ondas que son refractadas por la inclusión o que viajan a través de ella tardan más tiempo en llegar a los detectores que se encuentran en la parte positiva del eje x . La mayor amplitud se observa en la parte positiva del eje x . Esto se debe a que hay superposición de ondas y el efecto se observa en algunos detectores.

En la figura 6.2.6 se observa la amplitud de los desplazamientos graficados contra la frecuencia, para un detector localizado en $x = 0$. En algunas frecuencias la amplitud de los desplazamientos es mayor, esto se debe a que se presentan ondas que quedan atrapadas entre la superficie libre y la frontera de la inclusión, y que amplifican el desplazamiento.

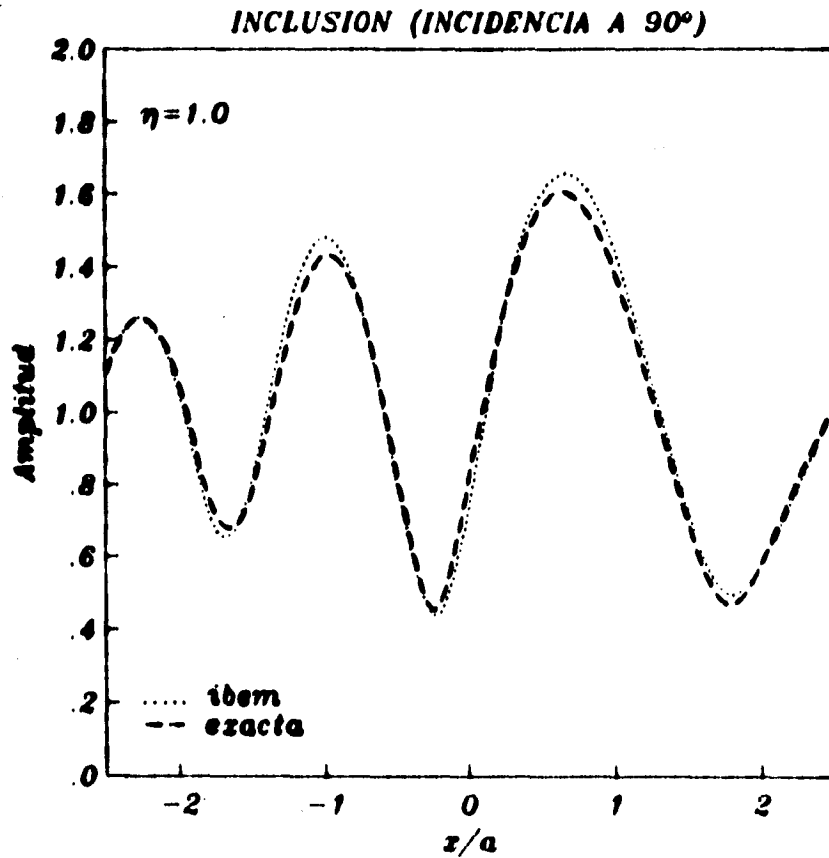


Figura 6.2.5 Amplitud de los desplazamientos para el caso de la inclusión blanda

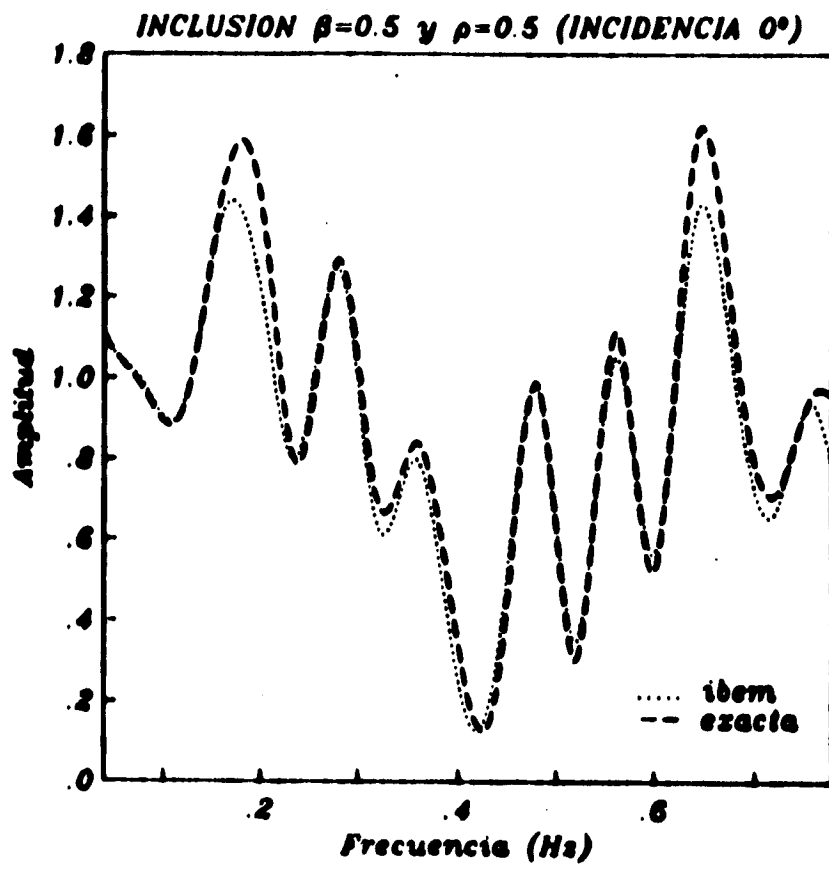


Figura 6.2.6 Amplitud de los desplazamientos para el caso de la inclusión blanda

VII. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado el método indirecto de elementos de frontera y se ha aplicado al estudio de los efectos que produce la presencia de una obstrucción en el movimiento de la superficie libre de un semiespacio elástico. Las ondas usadas para generar la excitación fueron ondas de corte polarizadas horizontalmente (SH). Las ondas difractadas se construyen usando una representación integral en términos de distribuciones de fuentes de capa simple. Estas densidades de fuerzas se obtienen a partir de un sistema lineal de ecuaciones que resulta de imponer condiciones de frontera. Para validar el método se compararon resultados con soluciones exactas de modelos con geometrías regulares, como son los casos de los modelos del semiespacio con una cavidad interior circular cilíndrica y con una inclusión elástica cilíndrica. Los resultados que se presentan en gráficas amplitud-espacio y amplitud-frecuencia, permitieron identificar patrones de resonancia locales.

La metodología presentada en este trabajo para la solución de modelos con cavidades e inclusiones es general. Separar el modelo en subdominios resultó ser de utilidad. Con esta técnica es posible resolver modelos más complicados, como es el caso de modelos que presenten inclusiones elásticas, fluidas o cavidades con geometrías irregulares, así como incluir una superficie libre irregular, como sería el caso de una montaña, un valle o una combinación de ambos, que se podría construir por medio de una extensión analítica del semiespacio.

En el futuro se piensa aplicar esta técnica para resolver modelos en tres dimensiones, como es el caso de las cámaras magnéticas.

RECONOCIMIENTOS

Le agradezco al Dr Francisco José Sánchez Sesma su valiosa ayuda y continua orientación en el desarrollo de esta tesis.

A Martha Suarez por sus comentarios y sugerencias que han sido de gran utilidad.

A Aida Alejandra Ricárdez Montiel un franco agradecimiento por su valiosa ayuda en la edición de esta tesis.

Este trabajo formó parte del proyecto 4517 del Instituto de Ingeniería de la UNAM.

REFERENCIAS

1. Abramowitz M. y Stegun I. A., *Handbook of mathematical functions*, Dover, Nueva York, 1970.
2. Achenbach J. D., *Wave propagation in elastic solids*, North-Holland, Amsterdam 1973.
3. Avila, J. y Mora-Crocco, L. S., *Modificación del movimiento sísmico por obstrucciones subterráneas*, *Sismodinámica*, 1990, 1.
4. Bouchon M., *Effect of topography on surface motion*, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1973, 63, 615-632.
5. Bouchon, M. *A simple, complete numerical solution to the problem of diffraction of SH waves by an irregular surface*, *Journal of the Acoustic Society of America*, 1983, 77, 1-5.
6. Bracewell R. N., *The Fourier Transform and its applications*, McGraw-Hill, Nueva York, 1978.
7. Clough R. W. y Penzien J., *Dynamics of structures*, McGraw-Hill, Nueva York, 1975.

8. Davis L. L. y West L. R., observed effects of topography on ground motion, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1973, 63, 283-298.
9. Gutenberg B., Effects of ground on earthquake motion, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1957, 47, 221-250.
10. Julian B. R. y Siptin S. A., Earthquake processes in the long valley caldera area, California, *Journal Geophysics*, 1985, 90, 11155-11169.
11. Kawasa, H. y Ali, K. A study on the response of a soft basin for incident S, P and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in México City, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1989, 79, 1361-1382.
12. Mow C. C. y Pao Y. H., The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations, The Rand Corporation, Santa Mónica, California, 1971.
13. Poch Pérez, A. y Sánchez Sesma, F. J., Difracción de ondas elásticas por irregularidades subterráneas, *memorias del XX congreso de la Academia Nacional de Ingeniería*, 1995.
14. Pedersen, H.A., Sánchez-Sesma, F.J. y Campillo, M. Three-dimensional scattering by two-dimensional topographies, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1994, 84, 1169-1183.
15. Sánchez-Sesma, F.J. y Esquivel, J. Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1979, 69, 1107-1120.
16. Sánchez-Sesma F.J. y Campillo, M. Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1991, 81, 2234-2253.
17. Sánchez-Sesma, F.J., Ramos-Martínez, J. y Campillo, M. An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh Waves, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1993, 22, 279-295.

18. Sánchez-Sesma, F.J. y Luzón, F. Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1995.
19. Sommerfeld A., Partial differential equations in physics, Academic Press, Nueva York, 1949.
20. Triñanes, M. D., Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH-waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1971, 61, 1755-1770.
21. Triñanes, M. D., Scattering of planes SH-waves by a semi-cylindrical canyon, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1973, 1, 267-281
22. Triñanes, M. D., Effects of site geology on amplitudes of strong motion, *Proc. Seventh World Conf. Earthq. Eng.*, Estambul, Turquía, 2, 145-152 (1980).

APÉNDICE. INTEGRACIÓN GAUSSIANA

La integración realizada por medio de métodos numéricos es una aproximación. Sin embargo, al estar la función definida explícitamente, los puntos para evaluarla pueden escogerse de manera que con esto se logre una mayor precisión en la aproximación. En la fórmula de la Cuadratura Gaussiana se obtienen los puntos de evaluación de una manera óptima, se escogen los valores x_1, x_2, \dots, x_n en el intervalo $[a, b]$ y las constantes c_1, c_2, \dots, c_n , que se espera minimicen el error obtenido al realizar la aproximación.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) \quad (A.1)$$

Para una función arbitraria f , se supone que la mejor elección de las abscisas será la que maximice el grado de precisión de la fórmula.

Para poder elegir de manera óptima los valores x_1, x_2, \dots, x_n , es necesario utilizar el concepto de funciones ortogonales. Se dice que el conjunto de funciones $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ es ortogonal en $[a, b]$ con respecto a la función de peso $w(x) \geq 0, (w(x) \neq 0)$, siempre y cuando

$$\int_{-1}^1 \phi_k(x) \phi_j(x) w(x) dx \quad (\text{A.2})$$

sea cero cuando $j \neq k$ y positiva cuando $j = k$

Las funciones ortogonales usadas para minimizar el error en la aproximación, son los polinomios de Legendre, estos polinomios son de la forma

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n), (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.3})$$

sus propiedades básicas se describen en las siguientes ecuaciones

$$(1) \quad P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n, (n = 0, 1, \dots) \quad (\text{A.4})$$

$$(2) \quad \int_{-1}^1 P_n(x) \cdot Q_k(x) dx = 0, (k < n) \text{ donde } Q_k(x) \text{ es cualquier polinomio de grado } k$$

menor que n (A.5)

(3) El polinomio de Legendre $P_n(x)$ tiene n raíces reales distintas, dentro del intervalo $(-1, 1)$

A continuación se listan los 5 primeros polinomios de Legendre.

$$P_0(x) = 1 \quad (\text{A.6})$$

$$P_1(x) = x \quad (\text{A.7})$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (\text{A.8})$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad (\text{A.9})$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad (\text{A.10})$$

Se tiene una función $y = f(t)$ definida en el intervalo $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (\text{A.11})$$

Se pueden tener $2n$ valores t_i y A_i , y un polinomio de grado $2n-1$ determinado por $2n$ coeficientes.

Para que se cumpla la ecuación A.11 es necesario y suficiente que sea válida para

$$f(t) = 1, t, t^2, \dots, t^{2n-1} \quad (\text{A.12})$$

además

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k, (k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1) \quad (\text{A.13})$$

y

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k \quad (\text{A.14})$$

de esta manera se tiene

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (\text{A.15})$$

Tomando en consideración las siguientes igualdades

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{2}{k+1} \quad \text{para cuando } k \text{ es par} \quad (\text{A.16})$$

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = 0 \quad \text{para cuando } k \text{ es impar} \quad (\text{A.17})$$

Se tiene entonces que t_i y A_i se pueden obtener a partir del siguiente sistema de $2n$ ecuaciones.

$$\sum_{i=1}^n A_i = 2 \quad (\text{A.18})$$

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \quad (\text{A.20})$$

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} = 0 \quad (\text{A.21})$$

El sistema de ecuaciones es un sistema no lineal y su solución genera grandes dificultades matemáticas. Sin embargo, considerando los polinomios

$$f(t) = t^k P_n(t), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (\text{A.22})$$

donde $P_n(t)$ es el polinomio de Legendre

Ya que el grado de esos polinomios no excede de $2n-1$, la ecuación A.11 debe cumplirse con base en el sistema de ecuaciones, además

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (\text{A.23})$$

Utilizando la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = 0 \quad \text{para } k < n \quad (\text{A.24})$$

se tiene

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (\text{A.25})$$

La ecuación A.25 estará definida para cualquier valor de A_i . Si se establece que

$$P_n(t_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.26})$$

De esta manera se tiene la mayor exactitud en la ecuación A.11, es suficiente con determinar los ceros de los respectivos polinomios de Legendre. Estos ceros son reales y distintos y se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$. Conociendo las abscisas t_i , los coeficientes A_i pueden obtenerse a partir del sistema de ecuaciones definido anteriormente, con las primeras n ecuaciones de este sistema. El determinante de este subsistema es el determinante de Vandermonde

$$D = \prod_{i>j} (t_i - t_j) \neq 0 \quad (\text{A.27})$$

Para probar la versatilidad de la fórmula de la cuadratura Gaussiana se evalúa la siguiente integral

$$\int_a^b f(x) dx \quad (\text{A.28})$$

haciendo un cambio de variable

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t \quad (\text{A.29})$$

se obtiene

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt \quad (\text{A.30})$$

Aplicando la fórmula de la cuadratura gaussiana a esta última integral

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (\text{A.31})$$

donde

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.32})$$

y t_i representa los ceros del polinomio de Legendre $P_n(t)$.

Abcisas y factores de peso para la integración gaussiana

Abcisas = x_i ,

Factores de peso = w_i ,

$n = 2$

0.57735 02691 89626

1.00000 00000 00000

$n = 3$

0.00000 00000 00000

0.88888 88888 88888

0.77459 66692 41483

0.55555 55555 55555

Para una consulta más detallada de tablas para la integración gaussiana, se puede referir al libro de Abramowitz y Stegun (1970) páginas 916-919.