

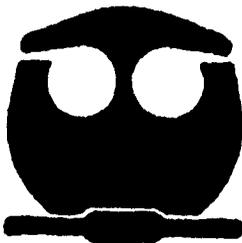


3  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE QUÍMICA

MODELADO MATEMÁTICO DEL ENSAYO DE  
FLUIDEZ EN ESPIRAL PARA ALUMINIO PURO Y  
ALEACION Al - Si EUTECTICA

T E S I S  
M A N C O M U N A D A  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO QUÍMICO METALÚRGICO  
P R E S E N T A N :  
LAZARO BELTRAN SANCHEZ  
EDUARDO MUÑOZ MARTINEZ



MEXICO, D. F.

1995

FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO**

**PRESIDENTE:** PROF. EUSEBIO CÁNDIDO ATLATENCO TLAPANCO  
**VOCAL:** PROF. JOSÉ ALEJANDRO GARCÍA HINOJOSA  
**SECRETARIO:** PROF. SERGIO GARCÍA GALÁN  
**1er SUPLENTE:** PROF. CARLOS GONZÁLEZ RIVERA  
**2o SUPLENTE:** PROF. DARÍO YAMAMOTO ÁNGEL

Sitio donde se desarrolló el tema:

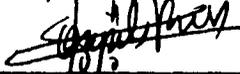
Laboratorio de Fundición.  
Laboratorio de Solidificación.  
Departamento de Ingeniería Química Metalúrgica.  
Facultad de Química, Edificio D. Ciudad Universitaria, UNAM

Asesor del tema



M. en C. J. Alejandro García Hinojosa

Supervisor técnico



M. en C. Carlos González Rivera

Sustentantes:



Lázaro Beltrán Sánchez



Eduardo Muñoz Martínez

---

Con gratitud para todas aquellas personas que contribuyeron a que este trabajo sea hoy una realidad, especialmente para:

**M. en C. Alejandro García Hinojosa.**

**M. en C. Carlos González Rivera.**

**M. en C. F. Andrés Acosta González.**

**A nuestra Facultad, y a la UNAM.**

**Dedico este trabajo a mis padres, motivo constante de superación y esfuerzo a lo largo de mi corta trayectoria.**

**Eduardo Muñóz Martínez.**

---

---

**A quienes han sido mi impulso, mi voluntad y mi refugio. A quienes debo los sueños que persigo. A quienes tengo la fortuna de poder llamar: mis padres.**

**Por la confianza de contar con ellos, por la alegría de saberlo. Porque son mis amigos, y aún más, puedo llamarles: mis hermanos.**

**A mi gran familia. Porque su unidad ha sido motivación e impulso.**

**A una gran familia y un gran amigo, a quienes debo mucho de lo que hoy obtengo.**

**Para alguien especial, por la fortuna de haber compartido una época y un espacio con ella.**

**Lázaro Beltrán Sánchez**

---

---

**MODELADO MATEMÁTICO DEL ENSAYO DE FLUIDEZ EN ESPIRAL  
PARA ALUMINIO PURO Y ALEACIÓN Al-Si EUTÉCTICA**

**INDICE**

INTRODUCCIÓN	1
OBJETIVOS	2
CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES.	3
1.1 El ensayo de fluidez.	3
1.2 Modelo del ensayo de fluidez de Flemings.	5
CAPÍTULO 2. MODELOS PRELIMINARES.	9
2.1 Selección y tipificación del sistema.	9
2.2 Modelo con condición de frontera isotérmica y velocidad constante.	13
2.3 Modelo con condición de flujo de calor convectivo en la frontera y velocidad constante.	17
2.4 Modelo con condición de flujo de calor convectivo en la frontera y velocidad variable.	21
CAPÍTULO 3. MODELO FINAL.	27
3.1 Selección y tipificación del sistema.	27
3.2 Resolución del problema por el método de ecuaciones nodales explícitas.	32
3.3 Resolución del problema por el método ADI con velocidad variable.	40
CAPÍTULO 4. DESARROLLO EXPERIMENTAL.	47
4.1 Pruebas de fluidez.	47
4.2 Determinación de la velocidad del metal en el canal de fluidez.	49
CAPÍTULO 5. RESULTADOS.	51
5.1 Longitud de fluidez para aluminio puro, experimental y calculada por el modelo.	51

---

5.2	Longitud de fluidez para aleación Al-Si eutéctica, calculada por el modelo	53
5.3	Longitud de fluidez para compuesto SIC-A358. Valores experimentales.	55
<b>CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS.</b>		<b>57</b>
6.1	Validez del modelo.	57
6.2	Peso de las variables en el modelo.	58
6.3	Amplitud de aplicación del modelo.	61
<b>CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES.</b>		<b>62</b>
<b>REFERENCIAS</b>		<b>64</b>
<b>APÉNDICE A: Obtención de las ecuaciones matriciales en la implementación del método ADI.</b>		
		<b>66</b>
<b>APÉNDICE B: Obtención de las ecuaciones de velocidad en función de la longitud de fluidez y del sobrecalentamiento a partir de los datos experimentales.</b>		
		<b>76</b>
<b>APÉNDICE C: Listado del programa en Turbo C para el modelo de la sección 2.4.</b>		
		<b>80</b>
<b>APÉNDICE D: Listado del programa en Turbo C para el modelo de la sección 3.3.</b>		
		<b>84</b>

---

## INTRODUCCIÓN

A lo largo del tiempo, el ensayo de fluidez en espiral se ha empleado con la finalidad de conocer el comportamiento de un metal ante el llenado de moldes, y así estar en condiciones de determinar la corrección que por este factor se hace en el diseño de los sistemas de alimentación y colada, además de determinar los intervalos de temperatura óptimos para la colada.

Sin embargo, a pesar de ser un ensayo que se ha usado de manera amplia, no existe una normalización aceptada internacionalmente, y por supuesto, mucho menos estudios analíticos recientes de la prueba. Los estudios que se han realizado acerca del ensayo son en su mayoría empíricos o fenomenológicos, ya que sólo recurren al tratamiento global del problema, sin detenerse a considerar las variables involucradas y su importancia relativa para el comportamiento del metal.

Por lo anterior podemos inferir que el ensayo de fluidez en espiral aún no está lo suficientemente bien comprendido, de aquí que sea necesario realizar un mayor esfuerzo en esto, lo cual, de una forma sencilla, trata de realizar este trabajo.

El trabajo está dividido en 7 capítulos, en los cuales se desarrolla de forma secuencial la obtención del modelo matemático presentado. Para ello, en el capítulo 1 se desarrollan los antecedentes, que muestran el único modelo analítico reportado en la literatura: el modelo de Flemings, a su vez, se presentan las variables que definen a la fluidez.

En el capítulo 2 se presenta el desarrollo de los modelos llamados preliminares, los cuales ayudaron a la comprensión de la fluidez y de la importancia de las variables que la definen.

El capítulo 3 muestra ya la obtención del modelo final, es decir, el modelo que arrojó los mejores resultados. Se muestra en los apéndices los detalles técnicos de su implementación.

Por otro lado, el capítulo 4 detalla la experimentación efectuada durante el desarrollo del modelo, tanto para validarlo como para ayudar en su implementación.

En los capítulos 5 y 6 se presentan y discuten los resultados respectivamente, dividiéndolos para su análisis en tres secciones que se consideran de importancia.

Finalmente, el capítulo 7 presenta las conclusiones del trabajo, de acuerdo también a la división que se hizo en el capítulo 6.

---

## OBJETIVOS

El presente trabajo está enmarcado dentro de un proyecto de investigación que se ha realizado en el Departamento de Metalurgia de la Facultad de Química de la UNAM, que tiene por objeto el estudio de materiales compuestos llamados compósitos, de matriz de aleación Al-Si eutéctica con partículas de SiC.

Por ello, el objetivo general de este trabajo es el apoyo a dicho proyecto de investigación, mediante la obtención de un modelo que sea capaz de predecir el comportamiento de fluidez de los compósitos en última instancia, pero realizando esto por etapas, donde la primera etapa sería la obtención de un modelo confiable para el material que forma la matriz, en este caso aluminio puro y posteriormente aleación Al-Si eutéctica.

De acuerdo a lo anterior, podemos distinguir entonces como objetivos específicos del presente trabajo a los siguientes:

1. Revisar los modelos de fluidez existentes y su validez para este caso.
2. Determinar los fenómenos de transporte controlantes del ensayo.
3. Identificar las variables importantes en el ensayo.
4. Obtención de un modelo matemático que simule el ensayo de fluidez para aluminio puro y aleación Al-Si eutéctica.

## CAPITULO 1 ANTECEDENTES

### 1.1 EL ENSAYO DE FLUIDEZ.

La fluidez es un concepto que relaciona aspectos dinámicos del llenado de moldes, y puede ser definida como la capacidad que tiene un metal de conservar y transmitir las propiedades de flujo o transporte de momentum a lo largo de secciones largas de un sistema de alimentación y colada.

Debido a la definición anterior, se han desarrollado ensayos o pruebas tendientes a cuantificar esta capacidad, que en todos los casos se reducen a determinar la longitud máxima que alcanza un metal dentro de un ducto de sección constante antes de solidificar, bajo condiciones definidas.

Las pruebas que se han desarrollado para medir la fluidez pueden clasificarse de la siguiente forma:

- Pruebas en canal recto continuo.
- Pruebas de succión por vacío.
- Pruebas en canal recto y plano.
- Pruebas en canal curvo y en espiral.

Cada una de las pruebas anteriores son sensibles en diferente grado a las variables involucradas, y se usan dependiendo de las características especiales en las cuales la fluidez se desea conocer.

Para el caso particular en el cual está inmerso este trabajo, el ensayo en espiral es el que mejor reproduce las condiciones bajo las cuales se desea conocer la fluidez, por ello, a continuación se describe cómo se realiza este ensayo.

El ensayo de fluidez en espiral se realiza en molde de arena, usando para ello una placa patrón normalizada, con la forma y dimensiones que se indican en la figura 1.

Existen muchas variables que afectan al ensayo de fluidez, y de entre éstas, el ensayo con la placa normalizada fija las siguientes:

- Altura de cabeza metalostática.
- Sección del canal.

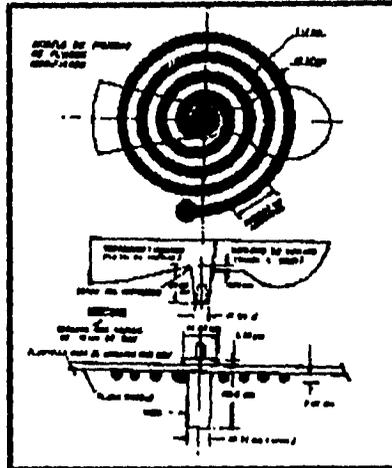


Figura 1. Modelo de la placa patrón para el ensayo de fluidez en espiral

Otras variables, que quedan sin fijar son:

- Composición del metal.
  - Propiedades termo físicas del metal (viscosidad,  $C_p$ , entalpía de fusión, conductividad térmica, densidad, entre las más importantes).
  - Propiedades de solidificación del metal (solidificación columnar o equiaxial, tipo de frente de solidificación, etc.).
- Temperatura de colada.
- Temperatura del molde.
- Permeabilidad del molde.
- Rugosidad del canal de flujo (por la granulometría de la arena).
- Composición de la arena (humedad, porcentaje de aglutinantes, etc.).

El ensayo se realiza colando el metal que se desea probar sobre el molde de arena, teniendo cuidado de que el flujo de la olla de colada caiga sobre la copa de forma circular, para asegurar la altura de cabeza metalostática constante. La temperatura es monitoreada constantemente para realizar el ensayo a la temperatura deseada.

Una vez colada y enfriada la espiral, se mide la longitud que alcanzó el metal antes de solidificar, a partir de la base donde el canal sale del pozo o colchón, por medio de un cordel.

Una vez descrita la prueba, en la siguiente sección se analizan algunos estudios realizados para tratar la fluidez, que han sido reportados en la literatura.

## 1.2 MODELO DEL ENSAYO DE FLUIDEZ DE FLEMINGS.

La fluidez es un concepto que a pesar de que se ha definido de manera precisa, no se ha estudiado de manera teórica a profundidad en los últimos años. De entre los estudios teóricos más destacados está el realizado por Flemings en la década de los 80's, donde relaciona por primera vez de forma coherente las variables más importantes que influyen a la fluidez.

Posteriormente, la fluidez no vuelve a ser tratada más que de forma fenomenológica, ya que se le estudia por medio de correlaciones empíricas de las variables más fácilmente medibles en el laboratorio o la industria, tales como la temperatura de colada o la altura de cabeza metalostática.

Flemings desarrolla el primer estudio teórico serio de la fluidez, donde establece relaciones básicas entre las variables involucradas y su efecto en la longitud de fluidez.

En su trabajo, Flemings obtiene una ecuación que describe la fluidez, realizando un análisis integral global sobre el fenómeno. De esta forma, presenta la siguiente ecuación para el cálculo de la longitud de fluidez:

$$L_f = \frac{\rho \alpha v}{2h_i(T_m - T_o)} (H_f + C_p \Delta T)$$

$\rho$ .- Densidad del metal líquido [Kg/m<sup>3</sup>]

$\alpha$ .- Longitud característica del canal para la solidificación [m]

$v$ .- Velocidad del fluido a la entrada del canal [m/s]

$H_f$ .- Entalpía másica de fusión [J/Kg]

$C_p$ .- Capacidad térmica másica [J/Kg.°K]

$\Delta T$ .- Sobrecalentamiento [°K o °C]

$h_i$ .- Coeficiente de transferencia de calor convectivo en la frontera metal-molde [W/m<sup>2</sup>.°C]

$T_m$ .- Temperatura de solidificación del metal [°K o °C]

$T_o$ .- Temperatura del molde [°K o °C]

La velocidad del fluido a la entrada del canal se calcula con la ecuación cinemática de caída libre:

$$v = \sqrt{2gh}$$

siendo h la altura de la cabeza metalostática a la entrada y g la aceleración de la gravedad.

La viscosidad del aluminio está dada por la relación

$$\log(n) = -0.436095 + \frac{484.55}{T}$$

T.- Temperatura [ °K]

n.- Viscosidad [cP]

Este valor es necesario para calcular el número adimensional de Reynolds, que a su vez se utiliza para determinar el coeficiente de transferencia de calor convectivo,  $h_i$ , por medio de curvas de transferencia de calor en tubos, de acuerdo a la figura 2.

Se calcularon longitudes de fluidez para los sobrecalentamientos a los cuales se tienen datos experimentales y se presentan en la Tabla 1, comparándose en la figura 3, para el caso del aluminio puro.

Tabla 1. Comparación de los resultados del modelo de Flemings para aluminio puro.

$\Delta T$ (°C)	n (cP)	Número de Reynolds	$h_i$ (W/m <sup>2</sup> °C)	Lf calculada (m)	Lf experimental (m)
40	1.153	21170	8081.90	0.5347	0.4712
60	1.090	22393	8088.43	0.6050	0.6705
90	1.036	23561	8109.49	0.6739	0.6943

Datos :

$H_f = 397\ 346\ \text{J/Kg}$

$v = 1\ \text{m/s}$

$a = 0.00457\ \text{m}$

$C_p = 1176.87\ \text{J/Kg.°K}$

$\rho = 2700\ \text{Kg/m}^3$

$k = 0.699\ \text{W/m.°C}$

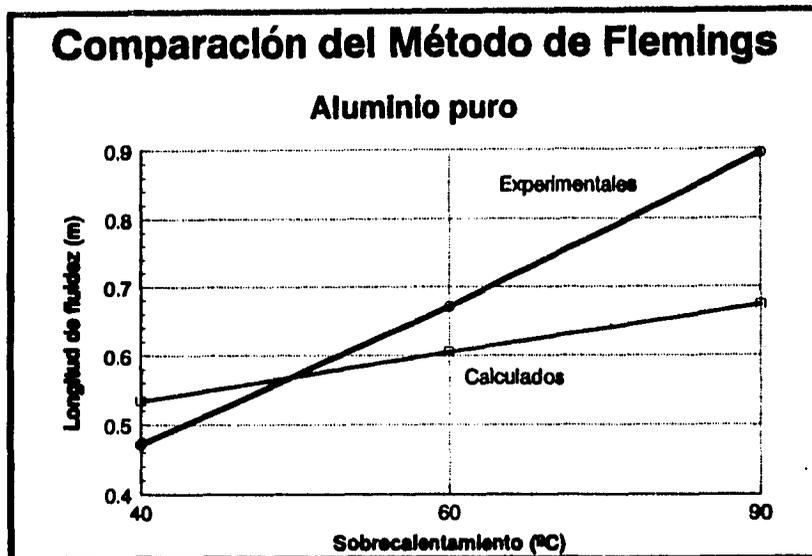


Figura 2 Gráfica comparativa de los resultados del modelo de Flemings para aluminio puro.

Realizando el análisis de este modelo, veamos las suposiciones e implicaciones en las variables incluidas:

- *Tiempo de flujo.*- Asume que el metal va a fluir durante un tiempo determinado por cuánto tarde en disipar el calor debido al sobre calentamiento y al de cambio de fase.
- *Velocidad.*- Considera que la velocidad del metal a lo largo del ducto es constante y no es afectada por la fricción u otras variables.
- *Flujo de calor.*- Supone que el calor disipado por el metal hacia el molde es constante por unidad de longitud, y que es controlado por convección en la intercara metal-molde.

Por otro lado, analicemos las variables o aspectos que no incluye:

- *Solidificación.*- Flemings no considera el tipo de solidificación, y en su modelo trata por igual metales puros que aleaciones.
- *Fricción.*- En su modelo, no incluye la fricción como variable que altere la velocidad de flujo del metal.
- *Propiedades termo físicas.*- Las propiedades del metal las considera físicas y no termo físicas, es decir, asume que no son alteradas por la temperatura en sí misma.

---

## CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

Los resultados obtenidos con éste modelo no se ajustaron a los resultados experimentales, no los acotaron ni se acercaron a éstos.

El modelo de Flemings parte de suposiciones que no son válidas como se pudo constatar en el análisis previo, de ahí que no resulten extraños los resultados mostrados.

Debido a lo anterior, en el presente trabajo se toma como punto de partida que el modelo teórico presentado por Flemings carece de la exactitud requerida para usarse como predicción confiable en la longitud de fluidez.

## CAPÍTULO 2. MODELOS PRELIMINARES

En este capítulo se analizan las variables más importantes que definen a la fluidez. El estudio de estas variables dio como resultado la generación de diversos modelos, cuyos resultados permitieron decidir la importancia de cada variable, o si las variables no incluidas resultaban importantes o podían ser despreciadas. Para realizar estos modelos se siguieron en principio las variables incluidas en el desarrollado por Flemings.

Los modelos tratados en este capítulo parten del análisis de un mismo sistema, donde lo que se varía en cada uno son las suposiciones o simplificaciones incluidas para resolverlos, de ahí que se incluyan en un mismo capítulo. Por lo anterior, el capítulo comienza con la definición del sistema.

### 2.1 SELECCIÓN Y TIPIFICACIÓN DEL SISTEMA.

El sistema se seleccionó con las fronteras y dimensiones indicadas en la figura 3

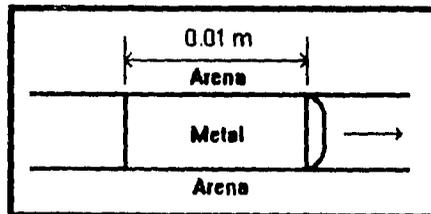


Figura 3 Definición del sistema en la punta de flujo metálico.

La sección del canal de flujo se simplificó para fines de cálculo de la forma indicada en la figura 4 donde el perímetro total de la sección cuadrada usada es de la misma longitud que el perímetro de la sección original.

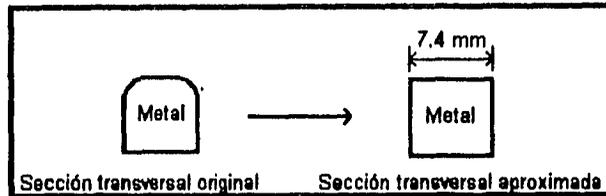


Figura 4 El canal de flujo de sección redondeada es aproximada a una sección cuadrada, pero el perímetro total en ambas secciones es igual.

Debido a que el número adimensional de Biot es menor a 0.1 en la dirección del flujo de calor hacia la pared del molde, se asume como primera aproximación que dentro del volumen de control no existen gradientes de temperatura importantes, y se puede tratar como enfriamiento newtoniano.

$$Bi = \frac{hL}{K} = \frac{(2500 \text{ W/m}^2\text{K})(0.0037 \text{ m})}{230 \text{ W/mK}} = 0.04$$

Se realizó un balance macroscópico global de calor para el volumen de control, asumiendo que el flujo de calor se dirigía principalmente hacia las paredes del molde, es decir, se despreciaba el flujo a lo largo del metal en el canal de fluidez:

$$\text{Calor inicial} - \text{Calor disipado} = \text{Calor final} \quad (2.1.1)$$

Donde:

$$\text{Calor inicial} = \rho V (H_f + Cp\Delta T) \quad V = \text{Volumen de control.}$$

**Calor disipado.**- Se obtiene del siguiente análisis: Puesto que el enfriamiento es newtoniano, el flujo de calor estará controlado por la capacidad del material del molde para transmitirlo y/o por la resistencia en la intercara metal-molde. Por ello, para cuantificarlo, se utiliza la ecuación diferencial de transferencia de calor en estado inestable para un sólido infinito (grosor del molde):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1.2)$$

Lo que cada modelo determina es la validez de cada suposición y de las condiciones a la frontera de la ecuación.

**Calor final.**- Una vez que el calor final es igual a cero, se asume que el metal ha solidificado en el volumen de control.

El balance se realiza para el volumen de control tantas veces como avances efectúe dentro del canal de fluidez; es decir, se asume que el volumen de control permanece estático un intervalo de tiempo durante el cual disipa calor al molde de manera transitoria, y posteriormente avanza a una nueva posición para repetir el proceso. El tiempo de permanencia estática del volumen de control está determinado por la velocidad de avance que se le calcule (Figura 5).

Tiempo de permanencia = Longitud del volumen de control / velocidad

Resumiendo, estos modelos estudiarán el fenómeno dividiéndolo para su tratamiento en dos secciones:

1. *Transporte de calor.*- Balance para el volumen de control, determinando teóricamente los términos del balance.
2. *Flujo de fluidos.*- Determinación de la velocidad de avance de la punta de flujo, por medios teóricos o experimentales, lo que influirá en el balance definiendo el tiempo de permanencia estática del volumen de control.

Por la definición del sistema, podemos destacar lo que considera:

- *Variables.*- Incluye todas las variables del modelo de Flemings. Aún más, permite incluir algunas otras de acuerdo a las condiciones a la frontera.
- *Influencia de la temperatura.*- Considera que no hay influencia de la temperatura en las variables.
- *Solidificación.*- Al igual que el modelo de Flemings, asume que el tipo de ésta no afecta a la fluidez.

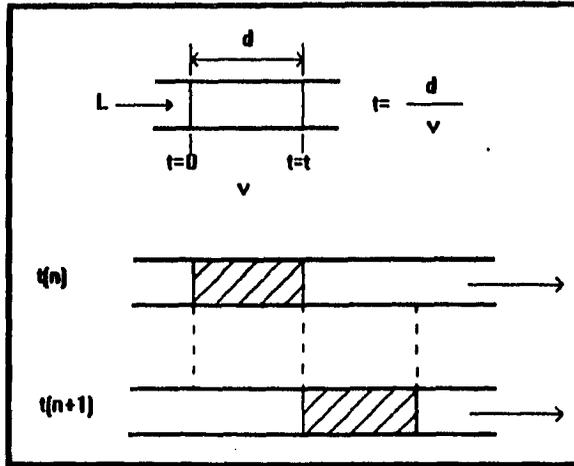


Figura 5. Tratamiento de la velocidad de avance del metal en el canal de fluidez.

Por lo anterior, notamos que este sistema, en la forma que se seleccionó, es una versión ampliada del usado por Flemings; por ello, los resultados que arroja son una forma mas de validar o descartar dicho modelo.

**2.2 MODELO CON CONDICIÓN DE FRONTERA ISOTÉRMICA Y VELOCIDAD CONSTANTE.**

En este modelo, para determinar el calor disipado se resuelve la ecuación 2.1.2 con las siguientes condiciones a la frontera:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$T(x,t)$

$T(0,t) = T_0$

$T_0$ .- Temperatura del material de moldeo en la frontera.

$T(x,0) = T_i$

$T_i$ .- Temperatura inicial del material de moldeo.

La solución reportada<sup>1</sup> para este caso es:

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \text{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (2.2.1)$$

A continuación, se enlistan las suposiciones y simplificaciones que se utilizarán:

- Flujo de calor constante por unidad de longitud.
- No influencia del patrón de solidificación.
- Velocidad constante durante el recorrido, determinado por la cabeza melastática. No influencia de la fricción.
- Propiedades físicas no influenciadas por la temperatura.

Despejando T de la ec. 2.2.1 y derivando parcialmente respecto a x:

$$T = T_0 + (T_i - T_0) \text{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

<sup>1</sup>Holman, J.P. Transporte de calor, Ed. Limusa.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left( \frac{T_o - T_i}{\sqrt{\pi \alpha t}} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{-x^2}{4 \alpha t} \right)$$

Sustituyendo en la ecuación para el flujo de calor en la frontera donde  $x = 0$ :

$$Q|_{x=0} = -KA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Donde:

A.- Area de contacto,  $A = 4.L.d$ , donde  $L = 7.4$  mm y  $d = 0.01$  m

$$Q|_{x=0} = \frac{4KLd(T_o - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Para calcular el flujo total de calor del volumen de control durante el intervalo de tiempo de permanencia estática, integramos la ecuación anterior en dicho intervalo:

$$Q^r|_{x=0} = \int_0^t Q|_{x=0} dt = \frac{4KLd(T_o - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{8KLd\sqrt{t}}{\sqrt{\pi \alpha}} (T_o - T_i)$$

Como  $t = d / v$

$$Q^r|_{x=0} = \frac{8KLd^{1.5}}{\sqrt{\pi \alpha v}} (T_o - T_i)$$

Esto ya nos da el término de *calor disipado* por balance, que equivale a un intervalo de tiempo de permanencia estática en la ecuación de balance de calor 2.1.1. que es determinado por la velocidad, debido a esto, el calor total disipado hasta la solidificación es  $n$  - balances, donde cada  $n$  corresponde a 1 cm. según la selección del sistema. Si sustituimos  $n$  por  $L_f$ , donde  $L_f$  es la longitud de fluidez en cm., tenemos que cuando el calor final es igual a cero, *calor disipado = calor inicial* y se alcanza la máxima longitud de fluidez

$$\frac{8KLd^3}{\sqrt{\pi\alpha\nu}}(T_o - T_i)L_f = \rho L^2 d(H_f + Cp\Delta T)$$

$$L_f = \frac{\rho L \sqrt{\pi\alpha\nu}}{8K\sqrt{d}(T_o - T_i)}(H_f + Cp\Delta T) \quad (2.2.2)$$

Esta ecuación es idéntica en forma a la de Flemings, pero por la manera en que fue deducida cambian tan sólo las variables incluidas.

La velocidad está determinada por la expresión de caída libre:

$$v = \sqrt{2gh} \quad h = \text{Altura de cabeza metalostática.}$$

De acuerdo a la geometría de la placa patrón para el ensayo, la velocidad es 1 m/s, como máximo, al ser éste el valor de caída libre.

La ecuación 2.2.2. dio como resultado los siguientes valores, que se muestran en la Tabla II y están graficados en la figura 6.

Tabla II. Valores obtenidos con la ecuación de balance de calor con condiciones isotérmicas y velocidad de flujo constante.

$\Delta T$ (°C)	Experimentales (cm.)	Lf (cm.) v = 0.1 m/s	Lf (cm.) v = 0.3 m/s	Lf (cm.) v = 0.5 m/s	Lf (cm.) v = 0.8 m/s	Lf (cm.) v = 1 m/s
40	47.12	7.01	12.14	15.68	19.83	22.17
90	67.05	7.94	13.75	17.75	22.46	25.11
140	89.43	8.87	15.34	19.83	25.08	28.04

Por lo que se puede ver, los resultados no se acercan a los experimentales, a la vez que, aún realizando un barrido en los valores de la velocidad, estos no acotan a los experimentales.

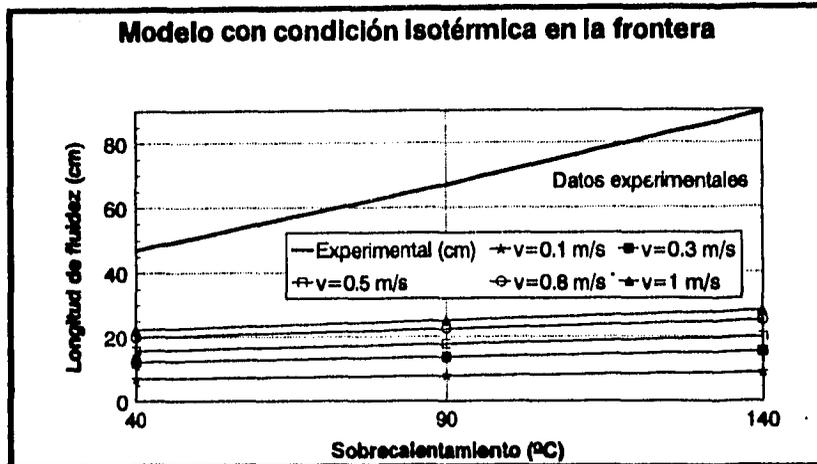


Figura 6. Resultados del modelo con condición de frontera isotérmica, para aluminio puro.

De los resultados de este modelo se puede destacar lo siguiente:

- 1.- La velocidad de flujo es una variable que tiene gran influencia en la fluidez, y que el presente modelo minimiza al considerarla constante.
- 2.- La condición isotérmica a la frontera parece no corresponder en la descripción del problema, dado que los resultados, a pesar de ser lineales, muestran pendientes muy por debajo de las observadas experimentalmente, además de que no cambian sensiblemente con la velocidad.
- 3.- Si la condición isotérmica a la frontera no reproduce bien el fenómeno, entonces la suposición de flujo de calor constante por unidad de longitud resulta objetable. Sin embargo, se debe explorar más sobre esta cuestión

Debido a los resultados anteriores, el siguiente paso fue explorar más sobre la condición a la frontera seleccionada. Esto se realizó en la siguiente sección.

**2.3 MODELO CON CONDICIÓN DE FLUJO DE CALOR CONVECTIVO EN LA FRONTERA Y VELOCIDAD CONSTANTE.**

En la sección anterior se realizó un modelo usando una condición de frontera isotérmica, sin embargo, los resultados no correspondieron con los experimentales. Para tener mas elementos de juicio en tomo a la suposición de flujo de calor constante por unidad de longitud se procedió a cambiar la condición a la frontera. Para ello, la condición seleccionada fue el flujo de calor convectivo en la intercara metal-molde.

El análisis se efectúa siguiendo la misma línea que en el modelo anterior. Para ello, se usa la ecuación 2.1.2 con las siguientes condiciones a la frontera:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,0) = T_i$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = -\frac{hi}{K}(T(0,t) - T_\infty)$$

La solución reportada<sup>1</sup> para este caso es:

$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{K} + \frac{h^2 \alpha t}{K^2}\right) \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{K}\right) \right] \quad (2.3.1)$$

Las suposiciones y simplificaciones son las mismas que para el caso de la condición isotérmica en la frontera, tan sólo cambiando a ésta última.

Despejando T y derivando respecto a x se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_\infty - T_i) \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\pi \alpha t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \left[ \frac{h}{K} \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{K}\right) \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha t}} \exp\left(-\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{K}\right)^2\right) \right] \right\} \exp\left(\frac{hx}{K} + \frac{h^2 \alpha t}{K^2}\right)$$

Evaluando la derivada en x=0:

<sup>1</sup>Holman, J.P., Transporte de Calor, Ed Limusa.

$$\frac{\partial T}{\partial x}_{x=0} = (T_{\infty} - T_i) \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\pi \alpha t}} + \exp\left(\frac{h^2 \alpha t}{K^2}\right) \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha t}} \exp\left(\frac{-h^2 \alpha t}{K^2}\right) - \frac{h}{K} \left(1 - \operatorname{fer}\left(\frac{h\sqrt{\alpha t}}{K}\right)\right) \right] \right\}$$

Sustituyendo en la ecuación para el flujo de calor en la frontera:

$$Q|_{x=0} = -KA \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0}$$

$$Q|_{x=0} = -4KL\alpha(T_{\infty} - T_i) \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\pi \alpha t}} + \exp\left(\frac{h^2 \alpha t}{K^2}\right) \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha t}} \exp\left(\frac{-h^2 \alpha t}{K^2}\right) - \frac{h}{K} \left(1 - \operatorname{fer}\left(\frac{h\sqrt{\alpha t}}{K}\right)\right) \right] \right\}$$

Para calcular el flujo total por cada tiempo de permanencia integramos la ecuación en el intervalo de tiempo de 0-t, determinado por la velocidad dado que  $t = d / v$ .

$$Q^r|_{x=0} = \int_0^t Q|_{x=0} dt$$

Para realizar esta integración, la función error fer es sustituida por una serie equivalente:

$$\operatorname{fer}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3K^3} + \frac{x^5}{10K^5} - \frac{x^7}{42K^7} \right)$$

Debido a los problemas de cálculo involucrados, se optó por resolver numéricamente la integración. Para ello se usó el método de Romberg, por medio de un programa en lenguaje Turbo C.

Una vez realizada la integración, se procedió a igualar su valor con el del calor inicial, de acuerdo con la ecuación 2.1.1., lo que nos da la longitud de fluidez:

$$\rho L^2 d(Hf + Cp\Delta T) = Lf Q^r|_{x=0}$$

Para realizar los cálculos se seleccionó un valor de  $h = 1000 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Este valor se escogió porque se estima que  $h$  varía entre 500 y  $1500 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$

Los resultados que proporciona el modelo son mostrados en la figura 7 y la Tabla III.

Tabla III. Resultados del modelo usando la ecuación de balance de calor con condición de flujo de calor convectivo en la frontera

$\Delta T$ ( $^\circ\text{C}$ )	Lf (cm.) $v = .1 \text{ m/s}$	Lf (cm.) $v = .4 \text{ m/s}$	Lf (cm.) $v = 1 \text{ m/s}$	Lf (cm.) experimentales
40	71.64	261.18	630.23	47.12
90	75.63	275.36	664.76	67.05
140	78.93	288.57	694.28	89.43

La gráfica de la figura 7 compara las cuatro rectas, resultando evidente que las tres curvas calculadas tienen valores mayores a los experimentales.

Este modelo arroja resultados interesantes, ya que acota superiormente los resultados experimentales con un valor razonable de  $h$  (se estima que varía entre 500 y  $1500 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$  para el vaciado en arena), dentro del rango posible de velocidades. Además se acota superiormente la pendiente de la curva experimental, dependiendo de la velocidad. Este modelo podría aprovecharse más si se tuviera un valor preciso de la velocidad promedio del fluido.

De los resultados obtenidos se puede destacar lo siguiente:

- Al eliminar la condición isotérmica a la frontera la pendiente de los valores obtenidos se incrementó notoriamente, al igual que sus magnitudes. Esto consideramos es un indicio de que la condición de flujo convectivo en la intercara metal-molde se aproxima más a la realidad.
- Del hecho que este modelo acote superiormente tanto las magnitudes como la pendiente de los resultados experimentales con los valores máximos de las variables que no están bien definidas, podemos inferir que entonces estas variables no son constantes. Estas variables serían la velocidad y el coeficiente de transferencia de calor por convección  $h$  principalmente.
- Al ser  $v$  y  $h$  variables a lo largo del canal en el ensayo de fluidez, entonces la suposición del flujo de calor constante por unidad de longitud queda invalidada.
- El modelo sigue siendo muy sensible a los cambios en velocidad.

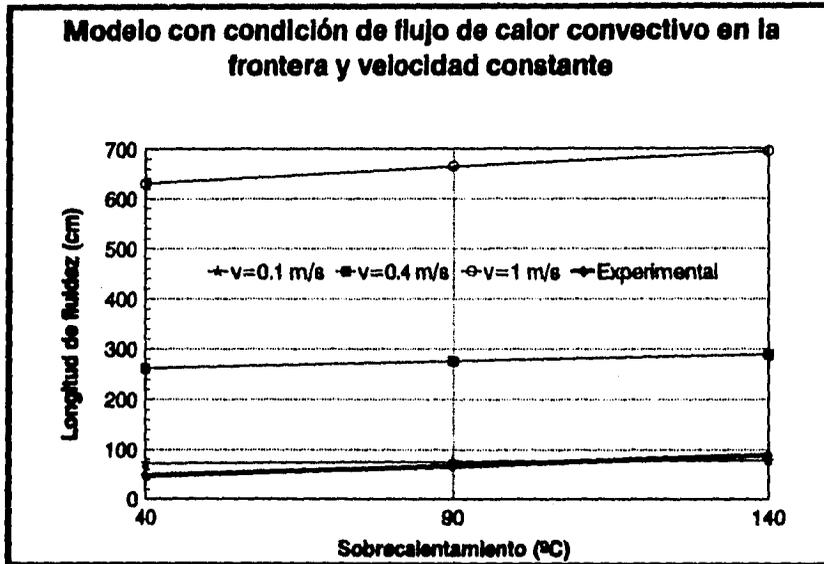


Figura 7. Se comparan los resultados del modelo con frontera de flujo de calor convectivo y velocidad constante, para aluminio puro.

Una vez descartada la suposición del flujo de calor constante por unidad de longitud, queda a su vez invalidada la suposición de velocidad constante. Para tratar de determinar un poco mejor la influencia de la velocidad, a la vez que discernir la influencia de otras variables no incluidas, se desarrolló el modelo presentado en la siguiente sección.

**2.4 MODELO CON CONDICIÓN DE FLUJO DE CALOR CONVECTIVO EN LA FRONTERA Y VELOCIDAD VARIABLE.**

Este modelo parte del modelo tratado en la sección inmediata anterior. Para ello, resuelve la misma ecuación diferencial con las mismas condiciones a la frontera:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,0) = T_i$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = -\frac{hi}{K}(T(0,t) - T_a)$$

Sin embargo, ahora se introduce un cambio en la velocidad, que hasta entonces se había tomado como constante, y como consecuencia de esto el tiempo de permanencia estática del volumen de control era igual a lo largo del recorrido del canal de fluidez, respetando las suposiciones del modelo de Flemings.

Como se recordará de la selección y tipificación del sistema, se trataban dos fenómenos principales en el estudio de la fluidez: Transporte de calor y Flujo de fluidos. En el fenómeno de flujo de fluidos tan sólo se incluía el concepto de velocidad de avance del metal a lo largo del canal, asignándosele valores que eran como máximo el de caída libre del metal a través de la bajada (cabeza metalostática). Ahora sin embargo, se realizará un análisis del flujo del metal a lo largo del canal.

El metal fluyendo a lo largo del canal de fluidez lleva una velocidad que puede ser calculada en todo momento por medio de la ecuación:

$$v = CD\sqrt{2gh}$$

Donde CD es llamado factor de descarga, e indica la pérdida de velocidad por la fricción a lo largo del conducto y por cambios en la dirección de flujo. Este factor varía entre 0 y 1, y se deduce a partir de la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{v^2}{2\beta} + gh + E_f = 0$$

$\beta$  asume el valor de 0.5 en régimen laminar y 1 en turbulento.  $E_f$  representa las pérdidas por fricción y puede sustituirse por:

$$E_f = 4 \left( \frac{L_f}{D} \right) f \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

$$\frac{v^2}{2} \left[ \frac{1}{\beta} + 4 \left( \frac{L_f}{D} \right) f \right] + gh = 0$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{1}{\beta} + \frac{4L_f \cdot f}{D}}}$$

$$\therefore CD = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\beta} + \frac{4L_f \cdot f}{D}}}$$

D.- Diámetro promedio del tubo (8.35 mm).

f.- Factor de fricción.

L<sub>f</sub>.- Longitud de fluidez.

Para evaluar el factor de fricción se determinó en qué régimen de flujo se desarrolla la prueba. Para ello se calculó el número de Reynolds en los valores límite estimados de la velocidad:

Tabla IV. Valores límite del número adimensional de Reynolds para el metal líquido durante la prueba de fluidez.

v (m/s)	Re
1	20495
0.01	2048

Debido a que podemos considerar que el número de Reynolds se mantiene por arriba de 2100, entonces la mayor parte de la prueba se desarrolla en el régimen turbulento, por lo tanto para calcular el factor de fricción se usará la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.06 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.41$$

El factor de fricción anterior sin embargo se aplica solamente a tubos rectos, pero, si el tubo no es recto se introduce una corrección en  $f$  si se cumple lo siguiente:

$$\text{Re} \sqrt{\frac{D}{D_c}} \geq 10$$

D.- Diámetro del canal

$D_c$ .- Diámetro de curvatura del canal no recto.

Lo anterior se cumple para el intervalo de velocidades en los diámetros de curvatura de la espiral del ensayo de fluidez. Por lo tanto se decidió incluir la siguiente corrección:

$$f_c = f \left[ \text{Re} \left( \frac{D}{D_c} \right)^2 \right]^{0.05}$$

Donde  $f_c$  es el factor de fricción corregido por la curvatura de la espiral.

El factor corregido  $f_c$  es un valor puntual, que depende de la posición sobre la espiral, que al no tener radio de curvatura constante implica el cálculo de este factor para cada posición del volumen de control a lo largo de su recorrido por dicha espiral. Para ello, se hace necesaria la obtención de una expresión que relacione la longitud recorrida con el radio de curvatura que posea la espiral en ese punto. Esta relación se encontró por medio del siguiente análisis:

La espiral de fluidez se puede definir por medio de una ecuación en coordenadas polares que corresponde a una espiral de Pascal:

$$r = a\theta$$

$$D_c = 2a\theta$$

<sup>1</sup>Bennet, C.O., Myers, J.E., Momentum, Heat and Mass Transfer, Mc Graw-Hill, 2a, ed. 1975

- r.- Radio de curvatura de la espiral.
- a.- Constante dimensional particular de la espiral.
- $\theta$ .- Ángulo recorrido en radianes.
- Dc.- Diámetro de la espiral.

De acuerdo a la geometría y dimensiones particulares de la placa patrón para el ensayo, la constante dimensional "a" vale:

$$a = \frac{2.311}{2\pi} \text{ (cm/s)}$$

Para relacionar  $\theta$  con la longitud de fluidez Lf, debemos realizar una integral de línea. El primer paso es crear una relación en coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned} x &= a\theta \cos(\theta) \\ y &= a\theta \sin(\theta) \end{aligned}$$

Las derivadas respecto al ángulo  $\theta$  son:

$$\frac{dx}{d\theta} = a \cos(\theta) - a\theta \sin(\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a \sin(\theta) + a\theta \cos(\theta)$$

Por lo tanto:

$$Lf = \int_0^{\theta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{\theta} \sqrt{a^2(\cos(\theta) - \theta \sin(\theta))^2 + a^2(\sin(\theta) + \theta \cos(\theta))^2} d\theta =$$

$$Lf = \int_0^{\theta} a\sqrt{(1 + \theta^2)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} d\theta = a \int_0^{\theta} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta =$$

$$Lf = \frac{2.311}{2\pi} \left[ \frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1 + \theta^2} + \theta) \right]$$

De la relación anterior es posible determinar el ángulo recorrido en radianes para cada posición del volumen de control resolviendo numéricamente la ecuación, y una vez determinado el ángulo sustituir su valor en la ecuación que define la espiral y así determinar el diámetro de curvatura de la espiral en ese punto, para de esta forma corregir por curvatura el factor de fricción de tubos rectos.

Una vez determinado el factor de fricción final, es posible usarlo en la ecuación para calcular la velocidad y así obtenería para cada posición del volumen de control, definiéndose de esta forma el intervalo de tiempo que el volumen de control permanece estático para cada posición, durante el cual se le aplica el balance térmico con los resultados de la ecuación presentada en el modelo de la sección inmediata anterior.

El cálculo del balance térmico y de la velocidad se efectuó por medio de un programa escrito en Turbo C, cuyos resultados se muestran en la Tabla V y en la figura 8.

**Tabla V.** Resultados del modelo con condición de frontera de flujo de calor convectivo y velocidad variable. Se usaron varios valores del coeficiente de transferencia de calor por convección para realizar un barrido dentro de sus límites de variación. Resultados para aluminio puro.

$\Delta T$ (°C)	Lf experimental (cm.)	Lf (cm.) h = 1000 W/m <sup>2</sup> °C	Lf (cm.) h = 1500 W/m <sup>2</sup> °C	Lf (cm.) h = 2000 W/m <sup>2</sup> °C
40	47.12	66	52	39
90	67.50	71	56	42
140	89.43	76	80	45

De los resultados obtenidos se puede destacar lo siguiente:

- La pendiente de los valores obtenidos no sólo es afectada por la velocidad, sino además también por la velocidad de extracción de calor, sin embargo, no tanto como para llegar a acotar el valor de pendiente de los valores experimentales.
- Debido a que variaciones muy grandes en los valores de h estimados no acotan a la pendiente de los valores experimentales, se puede pensar que la velocidad no está bien determinada, dado que en el modelo inmediato anterior se observó la gran influencia que tenía en este aspecto.
- Por otro lado, debido también a que la pendiente no es acotada, a pesar de haber hecho un análisis más profundo de la velocidad que pudo haberse aproximado a los valores reales, se puede inferir que aún hay otros factores que no han sido incluidos y que afectan independientemente de los ya considerados.

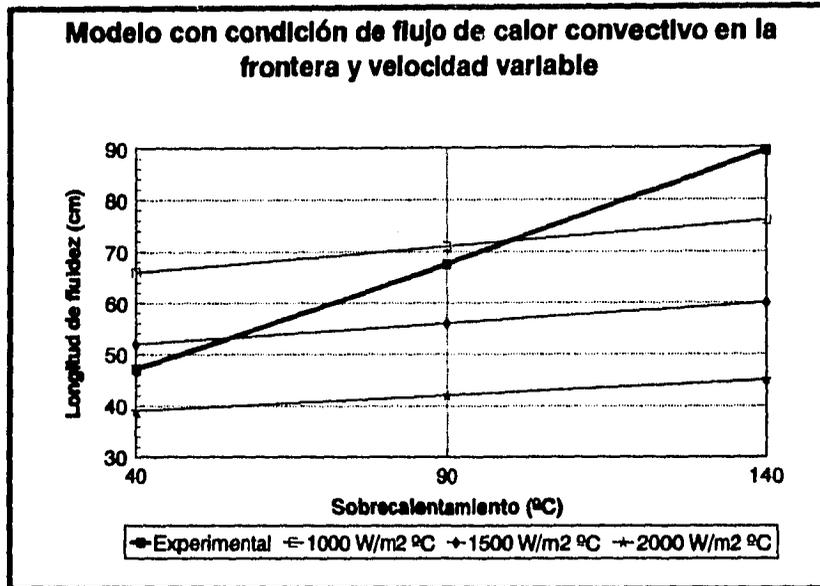


Figura 8. Comparación de los valores obtenidos por el modelo contra los experimentales para aluminio puro.

- De entre las posibles variables no incluidas que pueden ser importantes, se piensa en dos principalmente: influencia de la solidificación y velocidad variable no bien determinada.
- Se considera a la solidificación como un fenómeno importante que no se ha incluido debido a que ésta afecta la velocidad de transferencia de calor hacia el molde, como consecuencia de la formación de una costra sólida con diferentes propiedades térmicas, además que altera el flujo de fluidos, sin contar que proporciona un criterio de paro del flujo más realista, como lo es el cierre del frente de solidificación en alguna sección del canal.

Para decidir sobre lo anterior, se desarrollaron otros modelos, que aunque en esencia siguen las líneas más generales de los ya tratados, sin embargo difieren substancialmente en el tratamiento del problema. Esto es lo que se desarrolla en el siguiente capítulo.

### CAPÍTULO 3 MODELO FINAL

En este capítulo se desarrolla el tratamiento del modelado de la fluidez por medio de la selección de un nuevo sistema, que permite la implementación de técnicas que pueden aproximarse mejor a la realidad. Se le da el nombre de modelo final debido a que fue el que mejor reprodujo los resultados experimentales, de ahí que se le considere como el más acertado de los estudiados.

#### 3.1 SELECCIÓN Y TIPIFICACIÓN DEL SISTEMA.

Para el desarrollo del siguiente modelo se seleccionó el siguiente sistema, mostrado en la figura 9, que como se ve, corresponde al tratamiento en dos dimensiones de una sección del canal de fluidez.

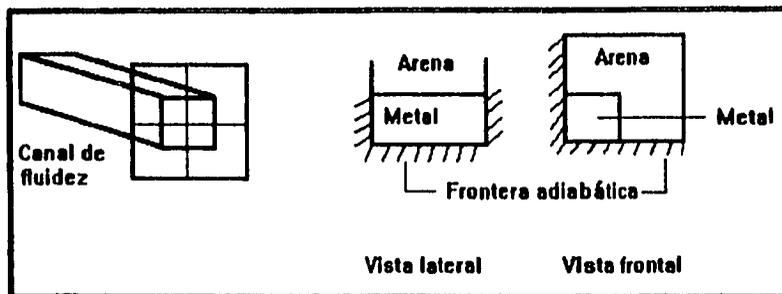


Figura 9. Selección del nuevo sistema, como una partición de una sección del canal de fluidez

Las condiciones Iniciales y a la frontera para el sistema global se muestran en la figura 10.

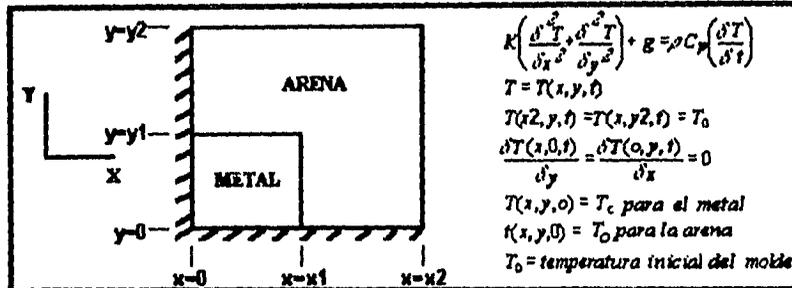


Figura 10. Condiciones iniciales y a la frontera para el sistema global, así como las dimensiones que lo definen en el sistema coordenado seleccionado.

El sistema es caracterizado por las dimensiones  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$  y  $y_2$ , y la partición del mismo nos proporciona volúmenes de control denominados nodos, de longitud o profundidad unitaria, que en este caso se tomó de 1 cm., siguiendo las dimensiones del volumen de control de los modelos anteriores. Las dimensiones  $\Delta x$  y  $\Delta y$  corresponden a la longitud de las particiones hechas para definir los nodos (figura 11).

De acuerdo al sistema seleccionado y a la partición hecha del mismo para simplificar los cálculos, se distinguen los siguientes nodos particulares o nodos únicos y familias de nodos (figura 11 y Tabla VI):

Tabla VI. Tipificación de los nodos y coordenadas correspondientes, de acuerdo al sistema seleccionado. Los nodos únicos se denotan por números, y las familias de nodos por letras.

Tipo de nodo	Posición	Coordenada en x	Coordenada en y
1	Fronteras adiabáticas.	0	0
2	Intercara molde-metal.	$x_1/\Delta x$	$y_1/\Delta y$
3	Intercara molde-metal y frontera adiabática.	$x_1/\Delta x$	0
4	Intercara molde-metal y frontera adiabática.	0	$y_1/\Delta y$
5	Frontera adiabática y de temperatura constante.	$x_2/\Delta x - 1$	0

Tabla VI. Continuación.

6	Fronteras de temperatura constante.	$x2/\Delta x-1$	$y2/\Delta y-1$
7	Frontera adiabática y de temperatura constante.	0	$y2/\Delta y-1$
A	Frontera adiabática.	$0 < x < x1/\Delta x$	0
B	Frontera adiabática.	$x1/\Delta x < x < x2/\Delta x-1$	0
C	Frontera adiabática.	0	$0 < y < y1/\Delta y$
D	Frontera adiabática.	0	$y1/\Delta y < y < y2/\Delta y-1$
E	Seno del metal.	$0 < x < x1/\Delta x$	$0 < y < y1/\Delta y$
F	Intercara metal-molde.	$x1/\Delta x$	$0 < y < y1/\Delta y$
G	Intercara metal-molde.	$0 < x < x1/\Delta x$	$y1/\Delta y$
H	Seno del molde.	$x1/\Delta x < x < x2/\Delta x-1$ $0 < x < x1/\Delta x$	$0 < y < y2/\Delta y-1$ $y1/\Delta y < y < y2/\Delta y-1$
I	Frontera de temperatura constante.	$x2/\Delta x-1$	$0 < y < y2/\Delta y-1$
J	Frontera de temperatura constante.	$0 < x < x2/\Delta x-1$	$y2/\Delta y-1$

Para resolver el problema utilizando este sistema se siguieron los mismos pasos generales que se desarrollaron para los modelos del capítulo 2, es decir, un balance térmico para contabilizar la transferencia de calor y un análisis de flujo de fluidos para determinar la velocidad de avance del metal en el canal y así obtener el tiempo de permanencia estática del volumen de control, durante el cual se efectúa el balance.

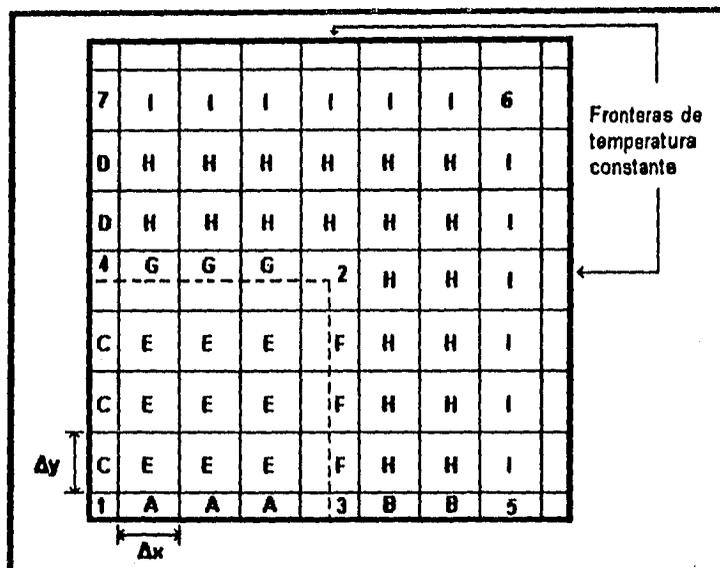


Figura 11. Tipificación del sistema. Se muestran los nodos únicos denotados por números y las familias de nodos denotados por letras.

Para el caso del balance térmico, se realizó un micro balance, resolviendo la ecuación de transferencia de calor en dos dimensiones en estado inestable para cada nodo:

$$K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + g = \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (3.1.1)$$

Para ello, se asumen las siguientes simplificaciones:

1. Flujo de calor determinado principalmente por conducción. Si es necesario, se puede modificar el valor de K para simular convección en el metal.
2. Contacto térmico perfecto entre el metal y el molde.
3. Las propiedades termo físicas de un nodo son un promedio de las propiedades de sus constituyentes en un momento dado (metal sólido, líquido, material de molde).
4. El término g de generación de calor es diferente de cero solamente en los nodos donde existe metal durante el proceso de solidificación. Antes de que inicie la solidificación y después de ocurrida ésta, el término g vale cero en todo el sistema.

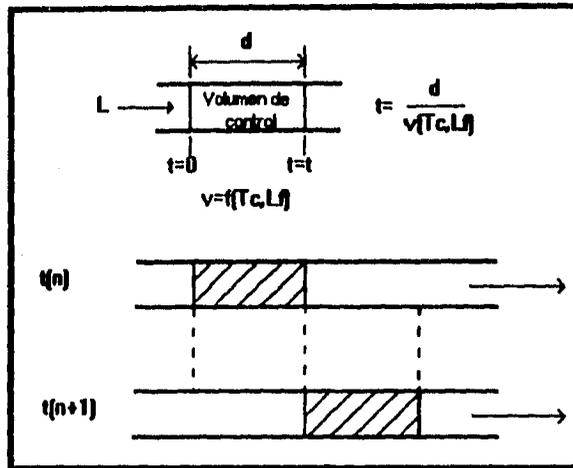


Figura 12. Tratamiento de la velocidad de flujo del metal. Se asume que el volumen de control permanece estático un intervalo de tiempo, definido por su velocidad instantánea en ese punto.

Para el caso de la determinación de la velocidad, y por lo tanto del tiempo de permanencia estática del volumen de control durante el cual transfiere calor (figura 12), se siguió un planteamiento fenomenológico, es decir, se evaluó la velocidad de avance del metal por medio de correlaciones de datos experimentales, debido a que, desde los modelos desarrollados en el capítulo anterior, se notó la gran influencia que ésta tiene en la fluidez, de ahí que se decidiera determinar lo más preciso que fuera posible y sin dejar lugar a dudas sobre su magnitud real. Este análisis es mostrado en detalle en el capítulo sobre desarrollo experimental. Sin embargo, aquí mostramos la ecuación de correlación usada para determinar la velocidad instantánea de avance de la punta de flujo para aluminio puro, que fue obtenida con la experimentación realizada.

$$v = [-1.09067 + 0.00248Tc] [L - 2.6 + 0.004Tc]^{-1.20130 + 0.00117Tc}$$

**3.2 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA POR EL MÉTODO DE ECUACIONES NODALES EXPLÍCITAS.**

Como un primer método para la Implementación del modelo, se optó por realizar la resolución del balance térmico discretizando la ecuación 3.1.1. en el tiempo y en el espacio. La discretización en el espacio corresponde a la división o partición del sistema global en nodos, y en el tiempo corresponde a los incrementos en los cuales se supone transcurre el tiempo.

Se escogió en principio el método de ecuaciones nodales explícitas debido a que la obtención de las ecuaciones que representan la discretización de la ecuación 3.1.1 y por ende al sistema, son relativamente fáciles de obtener y de resolver en teoría.

La discretización de la ecuación 3.1.1. corresponde a la aproximación de la función matemática que representa dicha ecuación, por medio de pequeños "segmentos" rectos en cada dimensión involucrada, es decir, si en el espacio la ecuación representa una serie de curvas, la discretización espacial las aproximará como segmentos rectos que siguen dicha curvatura. Esto también es llamado linealización. De lo anterior podemos inferir que cuanto más fina sea la discretización empleada, más se acercará la aproximación a los valores reales.

Existen diversas técnicas matemáticas para lograr la discretización de una ecuación, y el uso de una u otra dependerá del tratamiento que se le hará a las ecuaciones obtenidas. La que se usó en este caso es llamada Diferencia dividida finita hacia adelante, la que proporciona ecuaciones lineales que pueden resolverse de forma explícita, es decir, cada incógnita está despejada e involucra en su cálculo valores ya conocidos previamente.

A continuación se muestran las ecuaciones nodales para los nodos únicos y las familias de nodos, de acuerdo a la discretización mostrada en la figura 11.

Tabla VII. Ecuaciones nodales explícitas para el sistema seleccionado.

Tipo de nodo	Ecuación nodal explícita.
1	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \frac{K \Delta t}{2 \rho_m C_{Pm}} \right] T(x, y, t) + \left[ \frac{2T(x+1, y, t)}{\Delta x^2} + \frac{2T(x, y+1, t)}{\Delta y^2} \right] \frac{K \Delta t}{4 \rho_m C_{Pm}}$

Tabla VII. Continuación.

2	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{3}{2} K_s + \frac{1}{2} K_m \right) \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( \frac{\Delta t}{\frac{3}{4} \rho_s C_{p_s} + \frac{1}{4} \rho_m C_{p_m}} \right) \right] T(x, y, t) +$ $\left\{ \left[ K_s (2T(x+1, y, t) + T(x-1, y, t)) + K_m T(x-1, y, t) \right] \frac{1}{2\Delta x^2} + \left( \frac{\Delta t}{\frac{3}{4} \rho_s C_{p_s} + \frac{1}{4} \rho_m C_{p_m}} \right) \right\}$ $\left\{ \left[ K_s (2T(x, y+1, t) + T(x, y-1, t)) + K_m T(x, y-1, t) \right] \frac{1}{2\Delta y^2} + \left( \frac{\Delta t}{\frac{3}{4} \rho_s C_{p_s} + \frac{1}{4} \rho_m C_{p_m}} \right) \right\}$
3	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( \frac{2(K_s + K_m)\Delta t}{\rho_m C_{p_m} + \rho_s C_{p_s}} \right) \right] T(x, y, t) +$ $\left[ T(x+1, y, t) \frac{2K_s}{\Delta x^2} + T(x-1, y, t) \frac{2K_m}{\Delta x^2} + T(x, y+1, t) \frac{2(K_s + K_m)}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{\Delta t}{\rho_s C_{p_s} + \rho_m C_{p_m}} \right)$
4	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( \frac{2(K_s + K_m)\Delta t}{\rho_m C_{p_m} + \rho_s C_{p_s}} \right) \right] T(x, y, t) +$ $\left[ T(x, y+1, t) \frac{2K_s}{\Delta y^2} + T(x, y-1, t) \frac{2K_m}{\Delta y^2} + T(x+1, y, t) \frac{2(K_s + K_m)}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{\Delta t}{\rho_s C_{p_s} + \rho_m C_{p_m}} \right)$
5	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \frac{2K_s \Delta t}{\rho_s C_{p_s}} \right] T(x, y, t) +$ $\left[ \frac{T(x-1, y, t) + T(x+1, y, t)}{\Delta x^2} + T(x, y+1, t) \right] \frac{2}{\Delta y^2} \left( \frac{K_s \Delta t}{\rho_s C_{p_s}} \right)$
6	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( \frac{2K_s \Delta t}{\rho_s C_{p_s}} \right) \right] T(x, y, t) +$ $\left[ \frac{T(x-1, y, t) + T(x+1, y, t)}{\Delta x^2} + \frac{T(x, y-1, t) + T(x, y+1, t)}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{K_s \Delta t}{\rho_s C_{p_s}} \right)$

Tabla VII. Continuación.

7	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \frac{2Ks\Delta t}{\rho_s C p_s} \right] T(x, y, t) + \left[ T(x+1, y, t) \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{T(x, y+1, t) + T(x, y-1, t)}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{Ks\Delta t}{\rho_s C p_s} \right)$
A	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( \frac{2Km\Delta t}{\rho_m C p_m} \right) \right] T(x, y, t) + \left[ \frac{T(x-1, y, t) + T(x+1, y, t)}{\Delta x^2} + \frac{2T(x, y+1, t)}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{Km\Delta t}{\rho_m C p_m} \right)$
B	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \frac{2Ks\Delta t}{\rho_s C p_s} \right] T(x, y, t) + \left[ \frac{T(x-1, y, t) + T(x+1, y, t)}{\Delta x^2} + T(x, y+1, t) \frac{2}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{Ks\Delta t}{\rho_s C p_s} \right)$
C	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( \frac{2Km\Delta t}{\rho_m C p_m} \right) \right] T(x, y, t) + \left[ \frac{2T(x+1, y, t)}{\Delta x^2} + \frac{T(x, y+1, t) + T(x, y-1, t)}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{Km\Delta t}{\rho_m C p_m} \right)$
D	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \frac{2Ks\Delta t}{\rho_s C p_s} \right] T(x, y, t) + \left[ T(x+1, y, t) \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{T(x, y+1, t) + T(x, y-1, t)}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{Ks\Delta t}{\rho_s C p_s} \right)$

Tabla VII. Continuación.

E	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( \frac{2Km\Delta t}{\rho_m C p_m} \right) \right] T(x, y, t) + \left[ \frac{T(x-1, y, t) + T(x+1, y, t)}{\Delta x^2} + \frac{T(x, y+1, t) + T(x, y-1, t)}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{Km\Delta t}{\rho_m C p_m} \right)$
F	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( \frac{2(Ks+Km)\Delta t}{\rho_m C R_m + \rho_s C R_s} \right) \right] T(x, y, t) + \left[ T(x+1, y, t) \frac{2Ks}{\Delta x^2} + T(x+1, y, t) \frac{2Km}{\Delta x^2} + (T(x, y-1, t) + T(x, y+1, t)) \frac{(Ks+Km)}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{\Delta t}{\rho_s C R_s + \rho_m C R_m} \right)$
G	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( \frac{2(Ks+Km)\Delta t}{\rho_m C R_m + \rho_s C R_s} \right) \right] T(x, y, t) + \left[ T(x, y+1, t) \frac{2Ks}{\Delta y^2} + T(x, y+1, t) \frac{2Km}{\Delta y^2} + (T(x-1, y, t) + T(x+1, y, t)) \frac{(Ks+Km)}{\Delta x^2} \right] \left( \frac{\Delta t}{\rho_s C R_s + \rho_m C R_m} \right)$
H	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( \frac{2Ks\Delta t}{\rho_s C p_s} \right) \right] T(x, y, t) + \left[ \frac{T(x-1, y, t) + T(x+1, y, t)}{\Delta x^2} + \frac{T(x, y-1, t) + T(x, y+1, t)}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{Ks\Delta t}{\rho_s C p_s} \right)$
I	$T(x, y, t + \Delta t) = \left[ 1 - \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \left( \frac{2Ks\Delta t}{\rho_s C p_s} \right) \right] T(x, y, t) + \left[ \frac{T(x-1, y, t) + T(x+1, y, t)}{\Delta x^2} + \frac{T(x, y-1, t) + T(x, y+1, t)}{\Delta y^2} \right] \left( \frac{Ks\Delta t}{\rho_s C p_s} \right)$

- $T(x, y, t)$ : Temperatura en función de estas variables. [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $\Delta x, \Delta y$ : Dimensiones de los nodos. [m]  
 $t, \Delta t$ : Tiempo e incremento de tiempo respectivamente. [s]  
 $K_m$ : Conductividad térmica del metal. [ $\text{W}/\text{m } ^{\circ}\text{C}$ ]  
 $K_s$ : Conductividad térmica de la arena del molde. [ $\text{W}/\text{m } ^{\circ}\text{C}$ ]  
 $C_{p_m}$ : Capacidad calorífica del metal. [ $\text{J}/\text{Kg } ^{\circ}\text{C}$ ]  
 $C_{p_s}$ : Capacidad calorífica de la arena del molde. [ $\text{J}/\text{Kg } ^{\circ}\text{C}$ ]  
 $\rho_m$ : Densidad del metal. [ $\text{Kg}/\text{m}^3$ ]  
 $\rho_s$ : Densidad de la arena del molde. [ $\text{Kg}/\text{m}^3$ ]

Para que la resolución de las ecuaciones sea convergente y estable, es decir, se aproxime a los valores de la realidad sin dar grandes saltos, o sin arrojar valores negativos, es necesario que el intervalo de tiempo  $\Delta t$  sea menor a un cierto valor, condición que es llamada criterio de estabilidad, que se determina por el valor menor de las siguientes desigualdades:

Tabla VIII. Criterios de estabilidad para las ecuaciones de la Tabla VII.

Tipo de nodo.	Condición a cumplir por $\Delta t$
1	$\Delta t < \frac{2\rho_m C_{p_m}}{K_m \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
2	$\Delta t < \frac{\left( \frac{3}{4}\rho_s C_{p_s} + \frac{1}{4}\rho_m C_{p_m} \right)}{\left( \frac{3K_s + K_m}{2} \right) \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
3	$\Delta t < \frac{\rho_m C_{p_m} + \rho_s C_{p_s}}{2(K_s + K_m) \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$

Tabla VIII. Continuación.

4	$\Delta t < \frac{\rho_m C p_m + \rho_s C p_s}{2(K_s + Km) \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
5	$\Delta t < \frac{\rho_s C p_s}{2K_s \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
6	$\Delta t < \frac{\rho_s C p_s}{2K_s \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
7	$\Delta t < \frac{\rho_s C p_s}{2K_s \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
A	$\Delta t < \frac{\rho_m C p_m}{2Km \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
B	$\Delta t < \frac{\rho_s C p_s}{2K_s \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
C	$\Delta t < \frac{\rho_m C p_m}{2Km \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$

Tabla VIII. Continuación.

D	$\Delta t < \frac{\rho_i C p_i}{2K_s \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
E	$\Delta t < \frac{\rho_m C p_m}{2K_m \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
F	$\Delta t < \frac{\rho_m C p_m + \rho_i C p_i}{2(K_s + K_m) \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
G	$\Delta t < \frac{\rho_m C p_m + \rho_i C p_i}{2(K_s + K_m) \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
H	$\Delta t < \frac{\rho_i C p_i}{2K_s \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$
I	$\Delta t < \frac{\rho_i C p_i}{2K_s \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)}$

El programa de cálculo se ejecutó en una computadora de arquitectura 486, a 66 MHz de velocidad, y aún así el tiempo empleado en realizar la simulación tomó alrededor de 8 horas. Debido a esto, y a pesar de que el método proporciona una técnica buena y sencilla en su implementación, ésta no resulta práctica debido al gran tiempo de cálculo empleado.

A causa del gran tiempo empleado en la simulación, se optó por implementar la solución del sistema por un método de obtención de ecuaciones nodales que permitiera un tratamiento más rápido de los cálculos, sin perder precisión. En consecuencia, el método seleccionado fue el llamado Ecuaciones nodales implícitas de dirección alternante (ADI, por sus siglas en Inglés), con el que se trató el problema finalmente, y que es mostrado en la siguiente sección.

### 3.3. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA POR EL MÉTODO "ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT" (DIFERENCIAS FINITAS IMPLÍCITAS CON DIRECCIÓN ALTERNANTE) O ADI CON VELOCIDAD VARIABLE.

En la sección anterior se resolvió la resolución del sistema por medio de la discretización de la ecuación de transferencia de calor en dos dimensiones en estado inestable, haciendo uso de las diferencias divididas finitas hacia adelante. Sin embargo, el tiempo de cálculo fue tan largo que ese método resulta impráctico para emplearse: la simulación de un ensayo de fluidez tomaría mucho más tiempo que la realización de varios ensayos en el laboratorio. Por lo anterior, se seleccionó un nuevo método de discretizar dicha ecuación, de forma tal que los sistemas de ecuaciones obtenidas se pudieran resolver por medio de un método numérico más rápido, sin perder precisión en los resultados. El método de Ecuaciones Nodales Implícitas con Dirección Alternante o ADI (por sus siglas en inglés), fue seleccionado debido a que su algoritmo es sencillo y reduce drásticamente los tiempos de cálculo: es un método que conviene mucho para los programas de simulación.

Para implementar el método, se supone que durante la historia térmica de enfriamiento el metal pasa por tres etapas: (1) enfriamiento sensible (enfriamiento de la fase líquida hasta el inicio de la solidificación), (2) solidificación y (3) enfriamiento del sólido. Desde el punto de vista del análisis del fenómeno de solidificación que es el momento en el cual deja de fluir el metal líquido, solo se consideran las dos primeras etapas:

1. **Enfriamiento sensible**, para describir esta etapa se aplica la siguiente ecuación:

$$K \left( \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} \right) = \rho C_p \left( \frac{\delta T}{\delta t} \right) \quad (3.3.1)$$

Para resolver la ecuación, se discretiza dentro del dominio del sistema seleccionado por medio de diferencias finitas implícitas alternantes, técnica que genera ecuaciones que definen matrices tridiagonales que son resueltas para calcular la evolución de calor durante esta primera etapa.

**2. Solidificación**, en esta etapa el metal libera calor debido al cambio de fases durante la transformación líquido a sólido, se asume que la temperatura no cambia y se aplica la siguiente ecuación para describir esta etapa:

$$g + K \left( \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} \right) = \rho C_r \left( \frac{\delta T}{\delta t} \right) \quad (2)$$

Para contabilizar el término  $g$ , se usa el método de recuperación de temperatura. Este método se basa en el concepto de sustituir el calor latente de solidificación por un calor "equivalente" en términos de calor sensible, llamado calor sensible equivalente, que en realidad es una diferencial de temperatura.

$$\Delta T^o = \frac{\Delta H_f}{\bar{C}_p}$$

Siendo  $\bar{C}_p = f_s \cdot C_{p_s} + f_l \cdot C_{p_l}$

$\Delta H_f$ .- Entalpía de fusión del metal.

$f_s$ .- fracción sólida de metal.

$f_l$ .- fracción líquida de metal.

$C_{p_s}$ .- Capacidad calorífica del metal sólido.

$C_{p_l}$ .- Capacidad calorífica del metal líquido.

Cuando el elemento de control alcanza la temperatura de fusión, se mantiene constante en su temperatura y el subenfriamiento resultante del cálculo real es sustraído del diferencial de temperatura remanente, hasta que éste último sea nulo: a partir de ese instante se vuelve a permitir que la temperatura del elemento de control descienda.

**3. Enfriamiento**, una vez agotado el número equivalente de grados de cambio de fase, se aplica nuevamente la ecuación 3.3.1.

Se consideran las siguientes suposiciones simplificadoras: contacto térmico perfecto, propiedades térmicas y físicas constantes para el metal líquido, el metal sólido y la arena, las propiedades del volumen de control son un promedio ponderado de las de sus constituyentes ( metal líquido o sólido y la arena).-

Para el caso bidimensional, el método de diferencias finitas implícitas con dirección alternante calcula en dos etapas un nuevo perfil de temperaturas después de un paso de duración  $\Delta t$ .

**1a. etapa.**- También se le llama barrido en la dirección x. Se asume que las temperaturas resultantes del análisis de calor en la dirección X son *implícitas*, mientras que las que resultan del flujo de calor en la dirección Y son *explícitas*. Esto produce para cada renglón "j" una matriz tridiagonal de coeficientes que se puede resolver mediante el algoritmo de Thomas, obteniendo así un perfil preliminar de temperaturas ( $T^*$ ). El paso empleado para los cálculos sería de  $\Delta t/2$ .

**2a. etapa.**- También llamado barrido en la dirección y. Se asumen temperaturas *explícitas* en la dirección X e *implícitas* en la dirección Y, para producir en cada columna "i" un sistema de ecuaciones de matriz tridiagonal. Se resuelve con un paso  $\Delta t/2$ , y se obtiene el perfil de temperaturas T finales (ver Figura 13).

Después de cada etapa se obtienen tantas ecuaciones matriciales como número de nodos haya en la dirección del sistema donde las temperaturas se asumen conocidas (ver Figura 13). Esto arroja ecuaciones matriciales de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(1,y,t + \Delta t / 2) \\ T(2,y,t + \Delta t / 2) \\ \dots \\ T(n-1,y,t + \Delta t / 2) \\ T(n,y,t + \Delta t / 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix}$$

La matriz obtenida es tridiagonal, donde la diagonal principal indica los coeficientes de las temperaturas desconocidas de cada nodo donde se efectuó el balance, y las otras dos diagonales representan lo mismo para temperaturas adyacentes que también son desconocidas. En la segunda matriz, cada término indica la temperatura desconocida en el tiempo  $t+\Delta t/2$ , y la matriz de constantes contiene los términos que surgen como consecuencia de las temperaturas asumidas conocidas que también son adyacentes a cada nodo.

La resolución de las matrices tridiagonales mediante el algoritmo de Thomas consiste en eliminar la diagonal inferior, para luego realizar una sustitución hacia atrás.

En el apéndice A se desarrollan las expresiones algebraicas para obtener las matrices de coeficientes de los diferentes casos que presenta nuestro sistema. Debido a la simetría del sistema, solo se requiere determinar todos los casos cuando se realiza uno de los barridos, para utilizar las matrices en el otro barrido permutando los subíndices "i" y "j" de las temperaturas.

El primer programa que se realizó para determinar la longitud de fluidez (sección 2.4) calculaba el tiempo de residencia en cada volumen de control a partir de un perfil de velocidades que consideraba pérdidas por fricción (figura 7). Este perfil no consideraba la temperatura de colada del metal y por lo tanto era único. Sin embargo, se constató a la hora de realizar algunos ensayos experimentales que la velocidad promedio del metal variaba con el cambio de la temperatura de colada, mucho más de lo esperado.

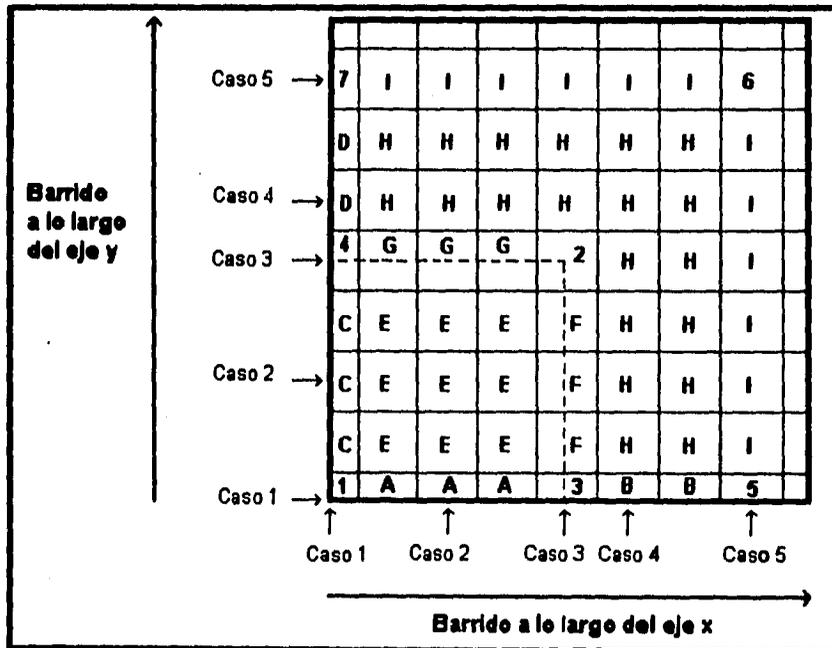


Figura 13. Tipificación del sistema, mostrando los casos que se presentan en su resolución, así como las direcciones de los barridos en cada etapa.

Para realizar el análisis de flujo de fluidos para complementar el modelo, se recurrió a determinar experimentalmente la variable más importante que fue la velocidad del flujo metálico en el canal de la espiral de fluidez. Esta velocidad se obtuvo a partir de un arreglo experimental el cual consistió en lo siguiente: se colocaron circuitos eléctricos abiertos formados por dos alambres de cobre muy delgado conectados a una pila y un foco, en diferentes posiciones a lo largo del canal de espiral, de forma tal que al colar el aluminio líquido al molde y pasar a través de los alambres se cerraba individualmente cada circuito encendiendo el foco correspondiente. Mientras el metal recorría el canal de flujo se encendían secuencialmente los focos de cada circuito. Lo anterior fue filmado con una cámara de video, de tal modo que al observarlo en cámara lenta se pudo evaluar la velocidad local de flujo entre circuito y circuito, para finalmente globalizarla por medio de correlaciones en una expresión de la forma:

$$v(\text{velocidad}) = F(\text{distancia recorrida, temperatura de colada}) = F(L, T_c)$$

Esta expresión se presenta en el siguiente capítulo, a partir de la cual se obtienen valores de la velocidad de flujo en función del sobrecalentamiento y de la longitud recorrida, la cual se ensambia con la parte de análisis de transferencia de calor

El acoplamiento entre el mecanismo de transferencia de calor y el flujo de fluidos se realizó considerando lo siguiente: el flujo metálico lleva una velocidad, determinada por la distancia recorrida y la temperatura de colada, lo anterior define un tiempo de permanencia estática para el sistema, que se selecciona al inicio en la punta del flujo. Durante este tiempo de permanencia estática se realiza el análisis de transferencia de calor en el volumen de control en las condiciones iniciales y a las fronteras definidas. Una vez que se cumple este pequeño lapso de tiempo el sistema se desplaza a una nueva posición, las condiciones iniciales se restablecen en esta nueva posición y se inicia nuevamente el paso anterior. Una vez que algún punto del sistema ha solidificado, las condiciones iniciales ya no son restablecidas, y se inicia la simulación del frente de avance de solidificación, pero contabilizando por el tiempo transcurrido la distancia que sigue avanzando el flujo metálico. Para esta etapa, el sistema se localiza en la sección donde solidificó el primer punto y ya no se mueva, dado que el análisis se realiza sobre él. De esta forma el flujo continua hasta que la sección es cerrada totalmente por el frente de solidificación, momento en el cual es definido el índice de fluidez, lo anterior se esquematiza en las Figuras 14 y 15.

La experimentación y el tratamiento matemático de los resultados efectuados para determinar la familia de perfiles de velocidades se describen en detalle en el capítulo 4 y en

el apéndice B. La figura A2 muestra algunos perfiles de velocidad para el aluminio puro a diferentes temperaturas de colada. El comportamiento de estas curvas resulta adecuado; los perfiles a temperaturas elevadas se aproximan al comportamiento ideal donde el fluido no posee viscosidad, y conforme la temperatura de colada es menor, la velocidad cae más rápidamente hasta un valor asintótico. Esta corrección en el modelo puede influir mucho en los resultados ya que para temperaturas de colada alta, al avanzar a una velocidad mayor en los primeros nodos, disipa menos calor y fluye más, por lo tanto la diferencia entre las longitudes de fluidez totales debe de incrementarse.

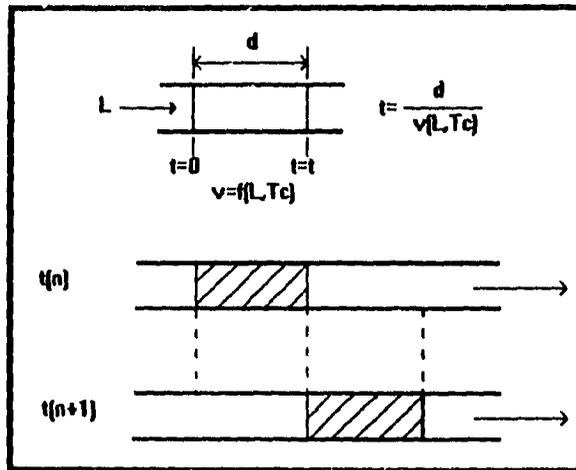


Figura 14. Sistema seleccionado para evaluar la velocidad del flujo metálico.

De esta forma, el modelo implementado consta básicamente de las siguientes secciones:

1. *Transferencia de calor.*- Balance en estado inestable, discretizando la ecuación 3.1.1. Se simula por lo tanto la solidificación y el avance del frente sólido.
2. *Flujo de fluidos.*- Obtención de expresiones por medios experimentales, que nos permiten determinar el valor instantáneo de la velocidad promedio de la punta de flujo, lo que define el tiempo durante el cual se realiza el balance térmico bajo ciertas condiciones, que cambiarán al avanzar el volumen de control a una nueva posición.

Este modelo incluye las siguientes variables importantes:

- *Solidificación.*- Permite incluir, de tal manera que determina de forma más realista las condiciones bajo las cuales se detiene el flujo metálico en el canal de fluidez.

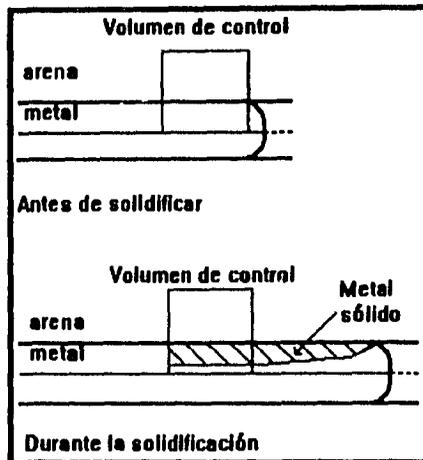


Figura 15 . Tratamiento del flujo metálico antes y durante la solidificación.

- **Velocidad.**- La velocidad es por primera vez evaluada experimentalmente, lo que proporciona una gran seguridad sobre su magnitud, y por lo tanto elimina en gran medida la incertidumbre acerca de la influencia de ésta en la fluidez.
- **Propiedades termofísicas.**- Las propiedades son consideradas como independientes de la temperatura. Además, debido a la discretización del volumen de control, es posible incluir la variación en sus propiedades, dado que para cada nodo éstas son determinadas por el promedio de las propiedades de cada constituyente en cada momento (metal sólido, metal líquido y arena).
- **Transferencia de calor.**- El flujo de calor hacia el molde es prácticamente puntual, y depende de la posición. Se elimina la suposición del flujo constante por unidad de longitud.

El proceso de cálculo se efectuó por medio de un programa escrito en Turbo C, que se incluye en el apéndice D

Las primeras pruebas del programa se realizaron para determinar un  $\Delta t$  máximo para el cual el perfil de temperaturas final fuera asintótico, es decir, que no variaran considerablemente las temperaturas de un mismo nodo calculadas con ese intervalo y el de un orden de magnitud superior.

## **CAPÍTULO 4. DESARROLLO EXPERIMENTAL**

En este capítulo se describe la serie de experimentos efectuados tanto para validar como para complementar el modelo descrito en el capítulo 3.

Aquí tan sólo se muestra el trabajo desarrollado para llevar a cabo esta serie de experimentaciones, así como las condiciones bajo las cuales se efectuaron, quedando para el siguiente capítulo la presentación completa de los resultados obtenidos.

### **4.1 PRUEBAS DE FLUIDEZ.**

Se efectuaron pruebas de fluidez en el modelo normalizado descrito desde el capítulo 1, con el fin de determinar las longitudes alcanzadas por el metal antes de solidificar. El material ensayado fue aluminio puro grado comercial (99 % de pureza).

Las condiciones experimentales fueron las siguientes, para ambos materiales:

- Material de moldeo.
  - \* Arena de Oklahoma, granulometría AFS: 100-120,
  - \* Aglutinantes: bentonita sódica 4% peso y bentonita cálcica 10% peso.
  - \* Humedad del 4% al preparar, pero muy cercana a cero al coiar.
- Medición de temperatura.
  - \* Se usó un registrador comercial de temperatura llamado Speedomax.
- Homo.
  - \* Se usó un homo de crisol con gas butano.
  - \* El crisol empleado fue de SiC.

El procedimiento experimental fue el siguiente:

1. Material de moldeo mezclado en máquina mezcladora y moldeado en máquina semiautomática.
2. El molde preparado se le dejó secar 2 días.
3. Corte de la carga y precalentamiento al igual que el crisol.

4. Fundición del material hasta aproximadamente 50 °C por encima de la temperatura de colada.
5. Colada de la espiral de fluidez de forma constante para asegurar altura de cabeza metalostática y con el chorro sobre la copa de colada.
6. Desmolde y medición manual de la longitud de fluidez. La medición se efectuó con cinta métrica flexible.

El número de pruebas efectuadas y a que temperaturas se muestran en la Tabla IX :

**Tabla IX. Resultados experimentales de las pruebas de fluidez para aluminio puro grado comercial.**

Sobrecalentamiento (°C)	Número de pruebas	Longitud de fluidez promedio (cm.)
40	2	47
90	2	67
140	2	89

Los resultados anteriores se usaron a lo largo de la implementación del modelo como referencia, a la vez que en el siguiente capítulo se emplean para validar a éste mismo.

4.2 DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DEL METAL EN EL CANAL DE FLUIDEZ.

Durante la implementación del modelo final, descrito en el capítulo 3, se notó la necesidad de obtener evidencia confiable de la velocidad del metal a lo largo de su recorrido por el canal de fluidez, de tal manera que se tuviera certeza sobre su magnitud para así eliminar la incertidumbre sobre esta variable, que no estaba bien determinada y que, por lo analizado en los modelos preliminares, se encontraba poseía una gran influencia en la fluidez. Para determinar el perfil de velocidades de la punta de flujo a lo largo del canal de fluidez se dispuso el arreglo experimental mostrado en las figuras 16, 17 y 18.

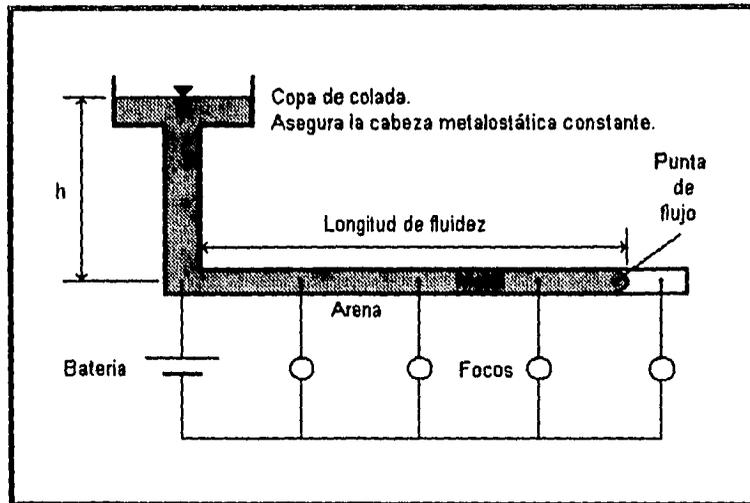


Figura 16. Diagrama esquemático del arreglo experimental empleado para determinar la velocidad de la punta de flujo en el ensayo de fluidez.

Al entrar el metal al canal de flujo, cerraba un circuito eléctrico, que encendía los focos conectados en paralelo. El encendido de los focos era filmado junto con un cronómetro en la misma pantalla, y posteriormente la imagen de video era observado cuadro por cuadro, para así definir el intervalo de tiempo entre el encendido de un foco y el siguiente. Esto permitió encontrar el perfil de velocidades de la punta de flujo a lo largo de su recorrido por el canal.

De los datos obtenidos, fue posible en un principio generar gráficas de distancia recorrida contra tiempo, y posteriormente, mediante técnicas matemáticas de ajuste de curvas, se obtuvieron expresiones donde la velocidad está en función de la distancia recorrida y del sobrecalentamiento al cual fue colado el metal. El análisis se detalla en el apéndice B.

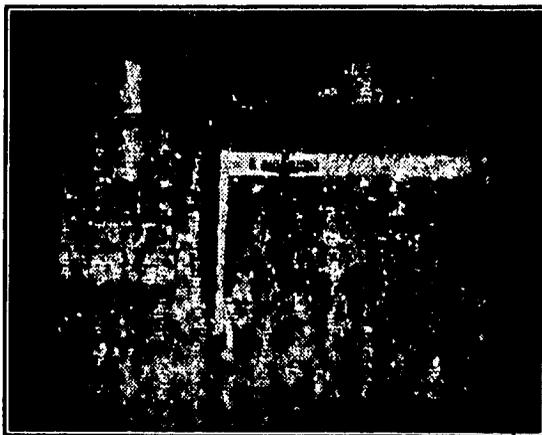


Figura 17. Montaje experimental para la determinación del perfil de velocidades.

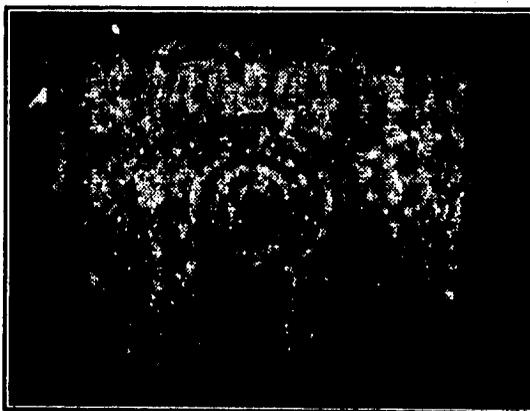


Figura 18. Vista superior de la tapa inferior del molde. Se aprecia el molde para la espiral de fluidez con las puntas de los alambres para el circuito eléctrico.

## CAPÍTULO 5 RESULTADOS

En el presente capítulo se presentan los principales resultados del trabajo realizado. Estos resultados incluyen los obtenidos por medio del modelo generado en la sección 3.3., así como los experimentales, esto con el fin de comparación. Sin embargo, la comparación no llegará al punto de emitir algún análisis o juicio respecto a esto, puesto que la interpretación de los resultados se dejará para el siguiente capítulo.

### 5.1 LONGITUD DE FLUIDEZ PARA ALUMINIO PURO, EXPERIMENTAL Y CALCULADA POR EL MODELO.

El modelo que se desarrolló en el capítulo 3, sección 3.3., proporcionó varios resultados. Estos se muestran en la Tabla X y en la figura 19.

Los resultados aparecen para tres fracciones solidificadas de la sección donde se originó el primer núcleo sólido, y se presentan de esta forma debido a que se sabe que el flujo metálico se detiene antes de que el frente sólido se cierre por completo, como consecuencia del aumento en la viscosidad del metal al disminuir su temperatura. Sin embargo, no se tiene información acerca de cuál podría ser la fracción sólida en la cual el flujo se detiene, pero se estima que para metales puros es por arriba del 0.9.

**Tabla X.** Resultados del modelo final de la sección 3.3. para aluminio puro. Se comparan los resultados contra los obtenidos experimentalmente.

$\Delta T$ (°C)	Longitud de fluidez experimental (cm.)	Longitud de fluidez al 0.84 de sección solidificada (cm.)	Longitud de fluidez al 0.96 de sección solidificada (cm.)	Longitud de fluidez al 1 de sección solidificada (cm.)
40	47	44	49	51
80	67	60	67	69
140	89	83	92	94

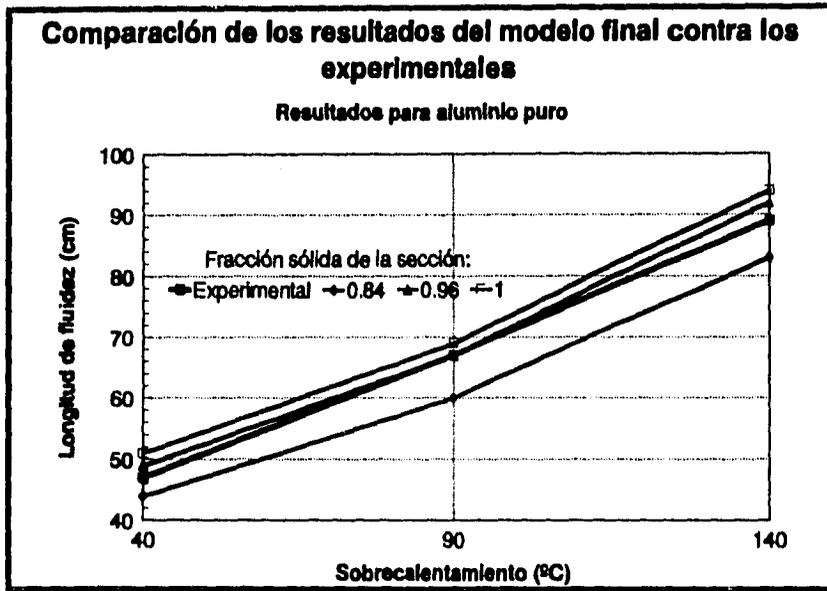


Figura 19. Comparación de los resultados del modelo final contra los experimentales, para aluminio puro. Se nota el ajuste que tienen los valores calculados con los experimentales.

Los resultados anteriores se obtuvieron con los valores indicados en la Tabla XI.

Tabla XI. Valores de las propiedades termo físicas empleadas en los cálculos.

Propiedad	Metal	Arena
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	2700	2595
$C_p$ (J / Kg K)	1016 sólido	816.4
	1179 líquido	-
$K$ (W / m K)	234	1.63
$\Delta H_f$ (J/Kg)	387619.21	-

## 5.2. LONGITUD DE FLUIDEZ PARA ALEACIÓN Al-Si EUTÉCTICA. CALCULADA POR EL MODELO.

En esta sección se presentan los resultados obtenidos con el modelo en el cálculo de la longitud de fluidez para aleación Al-Si eutéctica (Al-12.7%Si). Estos valores son predictivos, dado que no se cuenta con valores experimentales contra los cuales compararlos.

Los resultados se obtuvieron empleando el mismo modelo, tan sólo cambiaron las propiedades termo físicas para la aleación. Inclusive se usaron los mismos perfiles de velocidad en función de la longitud recorrida y del sobrecalentamiento, puesto que se supone que las propiedades de flujo no fueron alteradas en gran medida por la adición del silicio. Estos resultados se muestran en la Tabla XII y figura 20, y a su vez en la Tabla XIII se muestran los valores empleados en los cálculos.

Sin embargo, a pesar de no contar con resultados experimentales, se puede observar en la gráfica de la figura 20, que los valores calculados siguen un comportamiento lineal, tal como se presentan experimentalmente, a la vez que son mayores en una magnitud del 20 al 30 % con respecto a los valores para el aluminio puro, tendencia que también es observada en la experimentación.

Tabla XII. Resultados de longitud de fluidez calculados para aleación Al-Si eutéctica.

Sobrecalentamiento (°C)	Longitud de fluidez al 84% de fracción sólida.	Longitud de fluidez al 98% de fracción sólida.	Longitud de fluidez al 100% de fracción sólida.
40	53	60	62
90	71	80	82
140	95	107	110

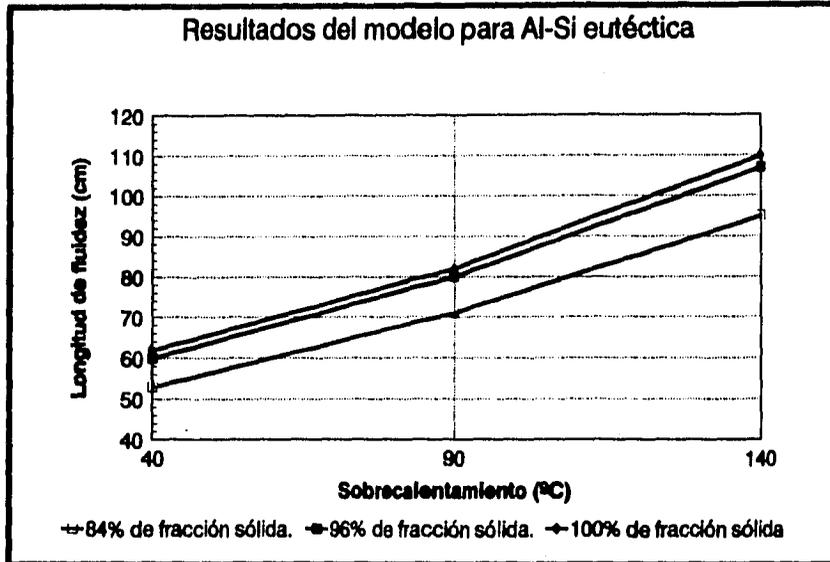


Figura 20. Resultados para Al-Si eutéctica. La temperatura de fusión es de 580 °C, y el sobre calentamiento es el número de grados de temperatura por arriba de ésta temperatura al cual la aleación fue colada.

Tabla XIII. Valores de las propiedades termo físicas empleadas en el cálculo.

Propiedad	Metal	Arena
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	2657	2595
Cp (J / Kg K)	921 sólido	816.4
	1143 líquido	-
K (W / m K)	160	1.83
$\Delta H_f$ (J/Kg)	389000	-

### 6.3. LONGITUD DE FLUIDEZ PARA COMPÓSITO SiC-A356. VALORES EXPERIMENTALES.

En esta sección se presentan resultados experimentales para compuesto SiC-A356, con el fin de que resulten comparativos con aquellos calculados por el modelo, tanto para aluminio puro así como para la aleación Al-Si eutéctica.

El modelo presentado en este trabajo ayuda a comprender mejor el ensayo de fluidez, y ofrece una visión más amplia del fenómeno que la que ofrecían los trabajos anteriores, y debido a ello, la comparación de los resultados que proporciona contra los experimentales de los compósitos, permitirá determinar cuáles son las variables y fenómenos de transporte involucrados en la longitud de fluidez de éstos materiales. Es decir, conociendo la influencia de cada variable y su interrelación con la fluidez, será posible decidir cuáles deben variar y en qué forma para que sea posible calcular la longitud de fluidez de los compósitos.

**Tabla XIV.** Resultados experimentales para la longitud de fluidez de compuesto con 10% en volumen de partículas de SiC.

Sobrecalentamiento (°C)	Longitud de fluidez para aleación A356 (cm.)	Longitud de fluidez para compuesto con 10% en volumen de SiC (cm.)
100	63	53
150	78	87
200	88.5	92

Los resultados para la longitud de fluidez para compósitos están mostrados en la figura 21 y en la Tabla XIV. Se muestran además para la aleación A356 (Al-7%Si) sin partículas de SiC. La temperatura de fusión se considera de 610 °C, y el sobrecalentamiento se contabiliza a partir de esta temperatura. Las partículas de SiC fueron de tamaños de malla 325, que corresponde a tamaños de 45-65 µm.

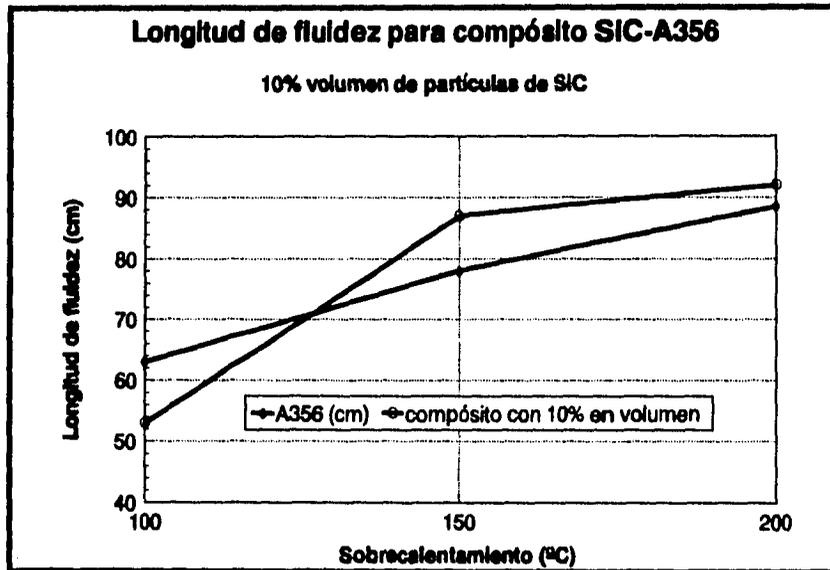


Figura 21. Longitudes de fluidez para compuesto A356-SIC y para aleación A356.

## CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS

En el presente capítulo se realizará la discusión y análisis de los resultados obtenidos por el modelo final de la sección 3.3., efectuándose además su comparación contra los resultados experimentales.

Con el fin de desarrollar de una manera adecuada el presente capítulo, se dividirá en tres secciones, que consideramos son importantes en el análisis de los resultados.

La primera sección analiza y discute los resultados en sí mismos, presentando los juicios que sobre exactitud y predicción tiene el modelo. En las dos últimas secciones se desarrollan ideas que van más allá de lo obtenido, es decir, son recomendaciones y apreciaciones para trabajos futuros, pero que a su vez sirven para comprender mejor a éste.

### 6.1 VALIDEZ DEL MODELO.

Para comenzar con el análisis, veamos los resultados mostrados en la Tabla X y en la figura 19. En esta tabla y figura se muestran los valores de longitud de fluidez calculados por el modelo y los obtenidos experimentalmente. Se observa que los valores experimentales, en la gráfica de longitud de fluidez contra sobre calentamiento, poseen una pendiente de aproximadamente 0.42 cm./°C. Por su parte, los valores calculados poseen pendientes de 0.39, 0.43 y 0.43 para 0.84, 0.96 y 1 de fracción sólida respectivamente. Esto nos muestra que, los valores de pendiente calculados se aproximan muy bien al experimental, y a excepción del valor para 0.84 de fracción sólida, los otros dos están dentro del intervalo de  $\pm 5\%$  de error experimental absoluto.

Por lo que respecta a los valores puntuales, se observa que los valores para la curva generada con 0.96 de fracción sólida como criterio de paro, están dentro del intervalo de  $\pm 5\%$  de error experimental absoluto. Lo anterior, junto con los valores de pendiente en la gráfica  $L_f$  vs  $\Delta T$ , hacen a los resultados que arroja este modelo sumamente confiables, dado que no varían más del error que podría proporcionar la realización de los ensayos de fluidez experimentales.

En el caso de los valores presentados para la aleación Al-Si eutéctica, se presentan como predicciones, dado que no se cuenta con valores experimentales confiables contra los

cuales se pudieran comparar. Sin embargo, se debe notar, que tan sólo con el cambio de las propiedades termo físicas para las de la aleación Al-Si, y conservando tanto los perfiles de velocidad del flujo metálico y patrón de solidificación para aluminio puro, se obtiene la tendencia esperada: la longitud de fluidez aumenta en alrededor del 20 ó 30 % para la aleación eutéctica con respecto al metal puro.

Por su parte, los valores que se incluyen para compuesto SiC-A356 (partículas de carburo de silicio SiC, y matriz de aleación Al-7%Si ó aleación A356), se incluyen como base comparativa para trabajos posteriores. Es decir, una vez comprendidos los fenómenos involucrados en la fluidez y la influencia que cada uno tiene en el proceso global, se puede deducir cuáles de estos cambian y en qué magnitud aproximadamente, con el fin de que el compuesto muestre dicho comportamiento ante la fluidez.

## **6.2 PESO DE LAS VARIABLES EN EL MODELO.**

Esta sección tiene importancia en el presente trabajo porque analiza la influencia de cada variable en el modelo, es decir, indica cuáles parámetros controlan el proceso. Esta información es de mucha utilidad puesto que se puede emplear en otros modelos afines y ayuda a comprender los fenómenos de transporte implicados.

Los principales fenómenos de transporte que controlan el ensayo de fluidez son la transferencia de calor y el flujo de fluidos, y en un grado comparable el patrón de solidificación, aún sin ser fenómeno de transporte.

Se podría clasificar las variables del ensayo de acuerdo a lo anterior, sin embargo proponemos la siguiente clasificación:

### **1.- Variables determinadas por el modelo físico:**

- **Altura de la cabeza metalostática**
- **Sección transversal del canal de flujo.**

### **2.- Variables determinadas por el metal.**

- **Composición química del metal, que a su vez define:  
Propiedades termo-físicas.  
Patrón de solidificación.**
- **Temperatura de colada.**

**3.- Variables determinadas por el molde.**

- **Temperatura del molde.**
- **Composición de la mezcla de arena de moldeo, que a su vez define:**
  - Permeabilidad**
  - Propiedades termo-físicas del molde**
  - Propiedades de la intercara metal-aire-molde**
  - Rugosidad del canal de flujo.**

Las consideraciones que se hacen para las variables consisten en determinar la influencia de cada una, así como presentar el tratamiento que se les dio en el modelo matemático.

**Variables determinadas por el modelo físico.**

El modelo físico empleado para realizar el modelado matemático, posee dimensiones físicas normalizadas, lo que determina que las variables dependientes de él sean fijas. Este es el caso de la cabeza metalostática que define la velocidad máxima de entrada al canal de flujo, que en nuestro caso resultó de 1 m/s. De la misma forma, queda definida la sección transversal del canal de flujo.

La dependencia de la velocidad instantánea respecto a la temperatura de colada resultó de suma importancia y representa uno de los resultados parciales más importantes de nuestro trabajo. Se puede observar a través de los diferentes modelos que se fueron abordando e lo largo de este estudio que la implementación de mayor peso fue la correspondiente a la familia de perfiles de velocidad dependientes de la temperatura de colada; los modelos empíricos fallaban todos en considerar la velocidad constante o un perfil teórico que representa un caso extremo. Por este motivo, las longitudes de fluidez calculadas con estos modelos casi no variaban con un incremento de la temperatura de colada; en la gráfica  $L_f$  vs.  $T_c$  se notaba siempre una pendiente muy pequeña comparada con la curva experimental.

En el desarrollo experimental se encontró que el perfil de velocidad variaba con la temperatura de colada en mayor grado de lo que se estimaba por el cambio de viscosidad, de ahí la necesidad de correlacionar el perfil de velocidades con la temperatura de colada.

El último paso para llegar al modelo final fue integrar un perfil de velocidad en función de la temperatura de colada, esto ajustó los valores.

#### **Variables determinadas por el metal**

Se consideraron de antemano varias de las propiedades termo-físicas independientes de la temperatura de colada, porque se pueden tomar valores promedio sin afectar drásticamente el resultado. Para demostrar que no se caía en una aproximación burda, se variaron en el programa los valores de estas propiedades hasta en un 30% del valor promedio reportado, constatando que los resultados de longitud de fludez no salían del rango de tolerancia del 10%.

El patrón de solidificación fue incluido en el modelado matemático a través de un modelo macroscópico, que permitió otorgarle a esta variable su peso justo en el fenómeno. La solidificación requería ser tratada adecuadamente para obtener un criterio de paro adecuado, sin embargo un estudio completo de los fenómenos de solidificación hubiera resultado muy complejo y difícil de implementar al programa. El acercamiento macroscópico nos permitió obtener un criterio de paro realista, sin ser necesario un estudio en detalle de los fenómenos microscópicos de solidificación. No se pierde rigurosidad al abordar de esta manera la solidificación, puesto que sólo se requería simular el avance del frente sólido, donde no interesa la microestructura.

La temperatura de colada es una variable que queda a elección del operador, puesto que en el momento de realizar el ensayo ésta es la única variable controlada.

#### **Variables determinadas por el molde**

Al igual que en el caso del metal, las propiedades termo-físicas del molde se consideraron constantes. La permeabilidad y la rugosidad del molde se definieron a partir de la mezcla de moldeo empleada en todos los ensayos. La temperatura inicial del molde se consideró en todos los casos la del ambiente, y a pesar de que no se controló se aproximó a 25 °C.

La suposición de un contacto térmico perfecto entre la arena y el metal parecería ser poco realista, al no considerar la formación de una intercara metal-aire-arena. Debido a las condiciones de flujo del metal, se podría pensar en un flujo de calor por convección elevado, sin embargo, la formación de una capa de óxido en la superficie y la formación real de una intercara metal-aire-arena, reducen considerablemente este flujo de calor. Por lo anterior, la suposición inicial resulta válida.

### 6.3 AMPLITUD DE APLICACIÓN DEL MODELO.

El modelo que se generó en este trabajo es de aplicación prácticamente inmediata para metales puros, donde la única modificación que se tendría que realizar sería en la obtención de una nueva familia de curvas que describieran la velocidad de flujo del metal en función de la temperatura de colada y de la posición a lo largo del canal de fluidez.

El propósito inicial de este trabajo fue generar un modelo que permitiera predecir la longitud de fluidez, sin tener que recurrir así a ensayos experimentales, fácilmente modificable para aplicarse al estudio de compósitos de matriz Al-Si con partículas de SiC. El modelo obtenido es muy versátil y se puede implementar en poco tiempo para una gran gama de materiales. Las modificaciones que habría que llevar a cabo para aplicar el modelo a otro material serían:

- 1.- Modificar las propiedades termo-físicas del material en las ecuaciones nodales.
- 2.- Determinar experimentalmente la velocidad del material a lo largo del canal y generar una nueva familia de curvas de velocidad dependientes de la temperatura de colada.
- 3.- Implementar un método que simule la solidificación del material.

El primer punto no debería de resultar difícil de realizar, ya que son propiedades comúnmente conocidas de antemano. En cuanto al segundo paso, se debe repetir sistemáticamente los mismos pasos que se presentaron en el capítulo 4. Tal vez sea necesario hacer cambios mayores en el programa para simular la solidificación del material: el método que se utilizó sólo es válido para metales puros. Sin embargo, la solidificación de otras aleaciones puede también abordarse desde un punto de vista macroscópico, para simular el cambio de pendiente en la caída de la temperatura. Estos modelos ya existen y se pueden encontrar en la literatura especializada.

Tomando en cuenta que los cambios que se deben realizar para aplicar el modelo a otro material son relativamente sencillos y que el programa está bastante optimizado para reducir el tiempo de cálculo, podemos creer que hemos generado un programa muy versátil y de amplia aplicación.

## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

El presente trabajo conduce a algunas conclusiones interesantes, cuyas implicaciones pueden ser de aplicación práctica inmediata en la predicción del llenado de moldes. Estos resultados se pueden dividir en tres categorías:

### A. Validez del modelo.

- 1 Se desarrolló un modelo matemático que predice la longitud de fluidez para aluminio puro y aleación Al-Si eutéctica.
- 2 El modelo se basa en un análisis de ecuaciones nodales implícitas de dirección alterna (ADI).
- 3 El cambio de fase durante la solidificación es simulado por medio de un método macroscópico, llamado método de recuperación de temperatura.
- 4 El flujo del metal líquido es tratado por medio de correlaciones experimentales de la velocidad de flujo en función de la longitud recorrida por el metal y el sobre calentamiento.
- 5 El modelo se resuelve a través de un programa escrito en lenguaje Turbo C.
- 6 El comportamiento de los resultados experimentales es aproximado dentro de un intervalo de  $\pm 5\%$  de error absoluto, esto es, en la gráfica de longitud de fluidez contra sobre calentamiento, la pendiente de las curvas calculadas se aproxima a la de los experimentales en el intervalo de  $\pm 5\%$ .
- 7 Los resultados experimentales son acotados superiormente por los valores calculados.

### B. Peso de cada variable en el modelo.

- 1 Las propiedades termo físicas del metal y de la arena ( $C_p$ ,  $K$  y  $\rho$ ) se asumieron constantes, sin que tuviera repercusiones amplias en los resultados.
- 2 La velocidad de avance del metal es una variable que influye en gran medida en la longitud de fluidez, y está relacionada con el sobre calentamiento al cual se cuele el metal.
- 3 La condición de contacto térmico perfecto en la frontera metal-arena reprodujo fielmente el fenómeno de transferencia de calor por convección.
- 4 El tratamiento de la solidificación a nivel macroscópico definió de manera adecuada el criterio de paro del flujo metálico.

**C. Amplitud de aplicación del modelo.**

- 1** La aplicación del modelo es de propósito general: se puede adaptar para simular la fluidez de cualquier material, tan sólo cambiando las secciones que describan mejor el comportamiento del metal: flujo de fluidos, patrón de solidificación y propiedades termo físicas.
- 2** El modelo se puede modificar para simular la soldificación en condiciones dinámicas de diversas secciones.

## REFERENCIAS

- 1 Bennet, C.O., Myers, J.E., "Momentum, Heat and Mass Transfer". Mc Graw Hill, 2a, ed. 1975.
- 2 Brody, H.D., Stoehr, R.A., "Computer Simulation of Heat Flow In Casting", Journal of Metals, September 1980, pp. 20-27.
- 3 Campbell, J., Ollif, I.D. "Static and Dynamic Criteria for Filling of Thin Section Molds". AFS Cast Metals Research Journal, vol. 7. 1971.
- 4 Chang, F.C., Tsai, H.L., "Numerical Study of Fluidity In Evaporative Pattern Process Including Latent Heat Effect", AFS Transactions, 1989-129, pp. 521-528.
- 5 Chen, J.H., Tsai, H.L., "An Efficient and Accurate Numerical Algorithm for Multi-Dimensional Modelling of Casting Solidification, Part I: Control Volume Method", AFS Transactions, 1990-132, pp. 527-536.
- 6 Desai, P.V., Wang, J., Hansen, P., Hansen, S.F., "Heat Transfer and Flow Experiments During Filling and Gating Systems", AFS Transactions. 1987-163, pp. 435-442.
- 7 Flemings, M.C., Niyama, E., Taylor, H.F., "Fluidity of Aluminum Alloys". AFS Transactions, ol. 69. 1981.
- 8 Fortin, G., Louchez, P., Samuel, F.H., "Factors Controlling Heat Transfer Coefficient at the Metal-Mold Interface During Solidification of Aluminum Alloys: An Analytical Study", AFS Transactions, 1992-10, pp. 863-871.
- 9 Frederik, D., Greif, R., "A Method for the Solution of Heat Transfer with a Change of Phase", Transactions of the ASME, August 1985, vol. 107, pp. 520-526.
- 10 Geiger, G.H., Poirier, D.R., "Transport Phenomena in Metallurgy". Addison Wesley, 1973.
- 11 Ho, K., Pehlke, R.D., "Metal-Mold Interfacial Heat Transfer", Metallurgical Transactions B, 1985, vol 16B, pp. 585-594.
- 12 Holman, J.P. "Transporte de Calor". Ed Limusa.
- 13 Hwang, W.S., Stoehr, R.A., "Fluid Flow Modelling for Computer-Aided Design of Castings", Journal of Metals, October 1983, pp. 22-29.
- 14 Jones, E.W., Steigelmann, W.H., Wachtell, G.P., "Heat Transfer From Molten Metals to Sand Mold Runners", AFS Transactions, 1963, pp. 817-825.
- 15 Kern, D.Q. "Procesos de Transferencia de Calor". Ed. Continental.
- 16 Krylnsky. "Progress Made In Fluidity Testing Of Molten Metals During the Last Ten Years". AFS Transactions, vol. 61. 1953.
- 17 Loper, Jr., C.R., "Fluidity of Aluminum-Silicon Casting Alloys", AFS Transactions, 1992-147, pp. 533-536.

**REFERENCIAS.**

---

- 18 Mollard, F.R., "Understanding Aluminum Fluidity: The Key to Advanced Cast Products", AFS Transactions, 1987-33, pp. 647-616.
- 19 Pehlke, R.D., Kirt, M.J., Marrone, R.E., Cook, D.J., "Numerical Solution of Casting Solidifications", AFS Transactions, 1973, pp. 49-55.
- 20 Ragone, D.V., Adams, C.M., Taylor, H.F., "Some Factors Affecting Fluidity of Metals", AFS Transactions, vol. 64. 1956.
- 21 Rohsenow, W.M., Choi, H., "Heat, Mass and Momentum Transfer". Ed Prentice Hall.
- 22 Roshan, H.M., Ramachandran, E.G., Seshadri, M.R., Ramachandran, A., "Analytical Solution to the Heat Transfer in Mold Walls During Solidification of Metals", AFS Cast Metals Research Journal, March 1974, pp. 39-47.
- 23 Shamsandur, N., Sparrow, E.M., "Analysis of Multidimensional Conduction Phase Change Via the Enthalpy Model", Journal of Heat Transfer, August 1975, pp. 333-340.
- 24 Su, K.C., Ohnaka, I., "Computer Simulations of Nodular Cast Iron". The Physical Metallurgy of Cast Iron. Ed. Nort Holland. New York. 1984.
- 25 Surappa, M.K., Rohatgi, P.K., "Fluidity of Aluminum-Silicon-Alumina Composite", Metallurgical Transactions B, 1981, vol 12B, pp. 327-332.
- 26 Venkateswaran, S., Mallya, R.M., Seshadri, M.R., "Effect of Trace Elements on the Fluidity of Eutectic Al-Si Alloy Using the Vacuum Suction Technique", AFS Transactions, 1986-128, pp. 701-708.
- 27 Yarandi, F.M., Rohatgi, P.K., Ray S., "Casting Fluidity of A356-SiC Cast Particulate Composite", AFS Transactions. 1992-153, pp. 575-581.

## APENDICE A

### OBTENCION DE LAS ECUACIONES MATRICIALES EN LA IMPLEMENTACION DEL ADI.

La tipificación del sistema presentada en la sección 2.1 lleva a desarrollar sistemas de ecuaciones para 5 casos diferentes en cada barrido. Por simetría del sistema, las ecuaciones y las matrices de coeficientes que se obtengan para un caso en el barrido a lo largo del eje x, serán equivalentes a las del mismo caso en el barrido a lo largo de y, por medio de una permutación sistemática de los subíndices "i" y "j", y de los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta y$ .

La nomenclatura que se utiliza en las ecuaciones es la siguiente

- $T_{ij}$ .- temperatura del nodo de coordenadas (i,j).
- $k_M, k_S$ .- Conductividades térmicas del metal y de la arena respectivamente.
- $\rho_M, \rho_S$ .- Densidades del metal y de la arena.
- $C_{pM}, C_{pS}$ .- Capacidades caloríficas del metal y de la arena.
- $T_a$ .- Temperatura de la arena al inicio del ensayo (25 C)
- $x1 = x1/\Delta x$
- $x2 = x2/\Delta x$
- $y1 = y1/\Delta y - 1$
- $y2 = y2/\Delta y - 1$

Caso 1

Nodo (0,0)

$$\frac{k_M(T_{0,0}^* - T_{1,0}^*)\Delta y}{2\Delta y} - \frac{k_M(T_{0,0} - T_{0,1})\Delta x}{2\Delta x} = \rho_M C_{pM} \frac{\Delta x \Delta y (T_{0,0}^* - T_{0,0})}{4(\Delta t/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_M \Delta t}{\Delta x^2 \rho_M C_{pM}}\right) T_{0,0}^* + \left(\frac{k_M \Delta t}{\Delta x^2 \rho_M C_{pM}}\right) T_{1,0}^* = \left(-1 - \frac{k_M \Delta t}{\Delta y^2 \rho_M C_{pM}}\right) T_{0,0} - \left(\frac{k_M \Delta t}{\Delta y^2 \rho_M C_{pM}}\right) T_{0,1}$$

Nodos (x,0);  $0 < x < x1$

$$\frac{k_M(T_{ij}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{k_M(T_{ij}^* - T_{i+1,j}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{k_M(T_{ij} - T_{i,j+1})\Delta x}{2\Delta y} = \rho_M C_{pM} \frac{\Delta x \Delta y (T_{ij}^* - T_{ij})}{2(\Delta t/2)}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{k_M \Delta t}{2\Delta x^2 \rho_M C_{PM}}\right)(2T_{ij}^* - T_{i-1,j}^* - T_{i+1,j}^*) - \left(\frac{k_M \Delta t}{2\Delta y^2 \rho_M C_{PM}}\right)(T_{ij} - T_{ij+1}) = T_{ij}^* - T_{ij}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_M \Delta t}{\Delta x^2 \rho_M C_{PM}}\right) T_{ij}^* + \frac{k_M \Delta t}{2\Delta x^2 \rho_M C_{PM}}(T_{i-1,j}^* + T_{i+1,j}^*) = -1 + \frac{k_M \Delta t}{\Delta y^2 \rho_M C_{PM}} T_{ij} - \frac{k_M \Delta t}{\Delta y^2 \rho_M C_{PM}} T_{ij+1}$$

Nodo (x1,0)

$$\frac{k_M(T_{ij}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{(k_M + k_S)(T_{ij} - T_{ij+1})\Delta x}{2\Delta y} = (\rho_M C_{PM} + \rho_S C_{PS}) \frac{\Delta x \Delta y (T_{ij}^* - T_{ij})}{4(\Delta V/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{(k_M + k_S)\Delta t}{\Delta x^2(\rho_M C_{PM} + \rho_S C_{PS})}\right) T_{ij}^* + \frac{k_M \Delta t}{\Delta x^2(\rho_M C_{PM} + \rho_S C_{PS})} T_{i-1,j}^* + \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2(\rho_M C_{PM} + \rho_S C_{PS})} T_{i+1,j}^*$$

$$= \left(-1 + \frac{(k_M + k_S)\Delta t}{\Delta y^2(\rho_S C_{PS} + \rho_M C_{PM})}\right) T_{ij} - \frac{(k_S + k_M)\Delta t}{\Delta y^2(\rho_S C_{PS} + \rho_M C_{PM})} T_{ij+1}$$

Nodos (x,0); x1 < x < x2

$$\frac{k_S(T_{ij}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij} - T_{ij+1})\Delta x}{2\Delta y} = \rho_S C_{PS} \frac{\Delta x \Delta y (T_{ij}^* - T_{ij})}{2(\Delta V/2)}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{k_S \Delta t}{2\Delta x^2 \rho_S C_{PS}}\right)(2T_{ij}^* - T_{i-1,j}^* - T_{i+1,j}^*) - \left(\frac{k_S \Delta t}{2\Delta y^2 \rho_S C_{PS}}\right)(T_{ij} - T_{ij+1}) = T_{ij}^* - T_{ij}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_{PS}}\right) T_{ij}^* + \frac{k_S \Delta t}{2\Delta x^2 \rho_S C_{PS}}(T_{i-1,j}^* + T_{i+1,j}^*) = \left(-1 + \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_{PS}}\right) T_{ij} - \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_{PS}} T_{ij+1}$$

Nodo (x2,0)

$$\frac{k_S(T_{ij}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij}^* - T_a)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij} - T_{ij+1})\Delta x}{2\Delta y} = \rho_S C_{PS} \frac{\Delta x \Delta y (T_{ij}^* - T_{ij})}{2(\Delta V/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_{PS}}\right) T_{ij}^* + \frac{k_S \Delta t}{2\Delta x^2 \rho_S C_{PS}} T_{i-1,j}^* = \left(-1 + \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_{PS}}\right) T_{ij} - \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_{PS}} (T_{ij+1} + T_a)$$

Caso 2

Nodo (0,y);  $0 < y < y_1$

$$\frac{k_M(T_{0j}^* - T_{1j}^*)\Delta y}{2\Delta y} - \frac{k_M(T_{0j} - T_{0j+1})\Delta x}{2\Delta y} - \frac{k_M(T_{0j} - T_{0j-1})\Delta x}{2\Delta y} = \rho_M C_{pM} \frac{\Delta x \Delta y (T_{0j}^* - T_{0j})}{2(\Delta x/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_M \Delta t}{\Delta x^2 \rho_M C_{pM}}\right) T_{0j}^* + \left(\frac{k_M \Delta t}{\Delta x^2 \rho_M C_{pM}}\right) T_{1j}^* = \left(-1 - \frac{k_M \Delta t}{\Delta y^2 \rho_M C_{pM}}\right) T_{0j} - \left(\frac{k_M \Delta t}{2 \Delta y^2 \rho_M C_{pM}}\right) (T_{0j+1} + T_{0j-1})$$

Nodos (x,y);  $0 < x < x_1$ ,  $0 < y < y_1$

$$\frac{k_M(T_{ij}^* - T_{i-1j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_M(T_{ij}^* - T_{i+1j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_M(T_{ij} - T_{i,j+1})\Delta x}{\Delta y} - \frac{k_M(T_{ij} - T_{i,j-1})\Delta x}{\Delta y} = \rho_M C_{pM} \frac{\Delta x \Delta y (T_{ij}^* - T_{ij})}{(\Delta x/2)}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{k_M \Delta t}{2 \Delta x^2 \rho_M C_{pM}}\right) (2T_{ij}^* - T_{i-1j}^* - T_{i+1j}^*) - \left(\frac{k_M \Delta t}{2 \Delta y^2 \rho_M C_{pM}}\right) (2T_{ij} - T_{i,j+1} - T_{i,j-1}) = T_{ij}^* - T_{ij}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_M \Delta t}{\Delta x^2 \rho_M C_{pM}}\right) T_{ij}^* + \frac{k_M \Delta t}{2 \Delta x^2 \rho_M C_{pM}} (T_{i-1j}^* + T_{i+1j}^*) = \left(-1 + \frac{k_M \Delta t}{\Delta y^2 \rho_M C_{pM}}\right) T_{ij} - \frac{k_M \Delta t}{2 \Delta y^2 \rho_M C_{pM}} (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})$$

Nodos(x1,y);  $0 < y < y_1$

$$\frac{k_M(T_{1j}^* - T_{i,j-1}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{1j}^* - T_{i+1j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{(k_M+k_S)(T_{1j} - T_{i,j-1})\Delta x}{\Delta y} - \frac{(k_M+k_S)(T_{1j} - T_{i,j+1})\Delta x}{\Delta y}$$

$$= (\rho_M C_{pM} + \rho_S C_{pS}) \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x/2)} (T_{1j}^* - T_{1j})$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{(k_M+k_S)\Delta t}{\Delta x^2 (\rho_M C_{pM} + \rho_S C_{pS})}\right) T_{1j}^* + \frac{k_M \Delta t}{\Delta x^2 (\rho_M C_{pM} + \rho_S C_{pS})} T_{i-1j}^* + \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2 (\rho_M C_{pM} + \rho_S C_{pS})} T_{i+1j}^*$$

$$= \left(-1 + \frac{(k_M+k_S)\Delta t}{\Delta y^2 (\rho_S C_{pS} + \rho_M C_{pM})}\right) T_{1j} - \frac{(k_S+k_M)\Delta t}{2 \Delta y^2 (\rho_S C_{pS} + \rho_M C_{pM})} (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})$$

Nodos (x,y);  $x_1 < x < x_2$ ,  $0 < y < y_1$

$$\frac{k_S(T_{i,j}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{i,j}^* - T_{i+1,j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{i,j} - T_{i,j-1})\Delta x}{\Delta y} - \frac{k_S(T_{i,j} - T_{i,j+1})\Delta x}{\Delta y} = \rho_S C_P S \frac{\Delta x \Delta y (T_{i,j}^* - T_{i,j})}{(\Delta t/2)}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{k_S \Delta t}{2\Delta x^2 \rho_S C_P S}\right)(2T_{i,j}^* - T_{i-1,j}^* - T_{i+1,j}^*) - \left(\frac{k_S \Delta t}{2\Delta y^2 \rho_S C_P S}\right)(2T_{i,j} - T_{i,j+1} - T_{i,j-1}) = T_{i,j}^* - T_{i,j}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_P S}\right)T_{i,j}^* + \frac{k_S \Delta t}{2\Delta x^2 \rho_S C_P S}(T_{i-1,j}^* + T_{i+1,j}^*) = \left(-1 + \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_P S}\right)T_{i,j} - \frac{k_S \Delta t}{2\Delta y^2 \rho_S C_P S}(T_{i,j-1} + T_{i,j+1})$$

Nodos (x2,y);  $0 < y < y_1$

$$\frac{k_S(T_{i,j}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{i,j}^* - T_a)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{i,j} - T_{i,j-1})\Delta x}{\Delta y} - \frac{k_S(T_{i,j} - T_{i,j+1})\Delta x}{\Delta y} = \rho_S C_P S \frac{\Delta x \Delta y (T_{i,j}^* - T_{i,j})}{(\Delta t/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_P S}\right)T_{i,j}^* + \frac{k_S \Delta t}{2\Delta x^2 \rho_S C_P S}T_{i-1,j}^* = \left(-1 + \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_P S}\right)T_{i,j} - \frac{k_S \Delta t}{2\Delta y^2 \rho_S C_P S}(T_{i,j-1} + T_{i,j+1} + T_a)$$

Caso 3.

Nodo (0,y1)

$$\frac{(k_S + k_M)(T_{0,y1}^* - T_{1,y1}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{k_S(T_{0,y1} - T_{0,y1+1})\Delta x}{2\Delta y} - \frac{k_M(T_{0,y1} - T_{0,y1-1})\Delta x}{2\Delta y} = \frac{(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)(T_{0,y1}^* - T_{0,y1})}{4(\Delta t/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{(k_S + k_M)\Delta t}{2\Delta x^2(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)}\right)T_{0,y1}^* + \frac{(k_S + k_M)\Delta t}{2\Delta x^2(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)}T_{1,y1}^*$$

$$= \left(-1 + \frac{(k_S + k_M)\Delta t}{2\Delta y^2(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)}\right)T_{0,y1} - \frac{k_M \Delta t}{2\Delta y^2(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)}T_{0,y1-1} - \frac{k_S \Delta t}{2\Delta y^2(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)}T_{0,y1+1}$$

Nodos (x,y1);  $0 < x < x_1$

$$\frac{(k_S + k_M)(T_{i,y1}^* - T_{i-1,y1}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{(k_S + k_M)(T_{i,y1}^* - T_{i+1,y1}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{k_S(T_{i,y1} - T_{i,y1+1})\Delta x}{2\Delta y} - \frac{k_M(T_{i,y1} - T_{i,y1-1})\Delta x}{2\Delta y}$$

$$= \frac{(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)(T_{i,y1}^* - T_{i,y1})}{2(\Delta t/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{(k_S + k_M)\Delta t}{\Delta x^2(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)}\right)T_{i,y1}^* + \frac{(k_S + k_M)\Delta t}{2\Delta x^2(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)}(T_{i-1,y1}^* + T_{i+1,y1}^*)$$

$$= \left(-1 + \frac{(k_S + k_M)\Delta t}{\Delta y^2(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)}\right)T_{i,y1} - \frac{k_M \Delta t}{\Delta y^2(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)}T_{i,y1-1} - \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2(\rho_S C_P S + \rho_M C_P M)}T_{i,y1+1}$$

Nodo (x1,y1)

$$\begin{aligned} & \frac{(k_S+k_M)(T_{x1,y1}^* - T_{x1-1,y1}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{k_S(T_{x1,y1}^* - T_{x1+1,y1}^*)\Delta y}{2\Delta x} - \frac{k_S(T_{x1,y1}^* - T_{x1,y1+1}^*)\Delta x}{2\Delta y} - \frac{(k_M+k_S)(T_{x1,y1}^* - T_{x1,y1-1}^*)\Delta x}{2\Delta y} \\ & = \frac{(3\rho_S C_{pS} + \rho_M C_{pM})(T_{x1,y1}^* - T_{x1,y1})}{4(\Delta t/2)} \\ & \Rightarrow \left(-1 - \frac{(3k_S+k_M)\Delta t}{\Delta x^2(3\rho_S C_{pS} + \rho_M C_{pM})}\right) T_{x1,y1}^* + \frac{(k_S+k_M)\Delta t}{\Delta x^2(3\rho_S C_{pS} + \rho_M C_{pM})} T_{x1-1,y1}^* + \frac{2k_S\Delta t}{\Delta x^2(3\rho_S C_{pS} + \rho_M C_{pM})} T_{x1+1,y1}^* \\ & = \left(-1 + \frac{(3k_S+k_M)\Delta t}{\Delta y^2(3\rho_S C_{pS} + \rho_M C_{pM})}\right) T_{x1,y1}^* - \frac{(k_S+k_M)\Delta t}{\Delta y^2(3\rho_S C_{pS} + \rho_M C_{pM})} T_{x1,y1-1}^* - \frac{2k_S\Delta t}{\Delta y^2(3\rho_S C_{pS} + \rho_M C_{pM})} T_{x1,y1+1}^* \end{aligned}$$

Nodos (x,y1); x1 < x < x2

$$\begin{aligned} & \frac{k_S(T_{i,y1}^* - T_{i-1,y1}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{i,y1}^* - T_{i+1,y1}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{i,y1}^* - T_{i,y1-1}^*)\Delta x}{\Delta y} - \frac{k_S(T_{i,y1}^* - T_{i,y1+1}^*)\Delta x}{\Delta y} = \rho_S C_{pS} \frac{\Delta x \Delta y (T_{i,y1}^* - T_{i,y1})}{(\Delta t/2)} \\ & \Rightarrow -\left(\frac{k_S\Delta t}{2\Delta x^2 \rho_S C_{pS}}\right) (2T_{i,y1}^* - T_{i-1,y1}^* - T_{i+1,y1}^*) - \left(\frac{k_S\Delta t}{2\Delta y^2 \rho_S C_{pS}}\right) (2T_{i,y1}^* - T_{i,y1-1}^* - T_{i,y1+1}^*) = T_{i,y1}^* - T_{i,y1} \\ & -1 - \frac{k_S\Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_{pS}} T_{i,y1}^* + \frac{k_S\Delta t}{2\Delta x^2 \rho_S C_{pS}} (T_{i-1,y1}^* + T_{i+1,y1}^*) = \left(-1 + \frac{k_S\Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_{pS}}\right) T_{i,y1}^* - \frac{k_S\Delta t}{2\Delta y^2 \rho_S C_{pS}} (T_{i,y1-1}^* + T_{i,y1+1}^*) \end{aligned}$$

Nodo (x2,y1)

$$\begin{aligned} & \frac{k_S(T_{ij}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_i(T_{ij}^* - T_a)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij}^* - T_{i,j-1}^*)\Delta x}{\Delta y} - \frac{k_S(T_{ij}^* - T_{i,j+1}^*)\Delta x}{\Delta y} = \rho_S C_{pS} \frac{\Delta x \Delta y (T_{ij}^* - T_{ij})}{(\Delta t/2)} \\ & \Rightarrow \left(-1 - \frac{k_S\Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_{pS}}\right) T_{ij}^* + \frac{k_S\Delta t}{2\Delta x^2 \rho_S C_{pS}} T_{i-1,j}^* = \left(-1 + \frac{k_S\Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_{pS}}\right) T_{ij}^* - \frac{k_S\Delta t}{2\Delta y^2 \rho_S C_{pS}} (T_{i,j-1}^* + T_{i,j+1}^* + T_a) \end{aligned}$$

Caso 4.

Nodos (0,y); y1 < y < y2

$$\begin{aligned} & \frac{k_S(T_{0j}^* - T_{1j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{0j}^* - T_{0j-1}^*)\Delta x}{2\Delta y} - \frac{k_S(T_{0j}^* - T_{0j+1}^*)\Delta x}{2\Delta y} = \rho_S C_{pS} \frac{\Delta x \Delta y (T_{0j}^* - T_{0j})}{2(\Delta t/2)} \\ & \Rightarrow \left(-1 - \frac{k_S\Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_{pS}}\right) T_{0j}^* + \frac{k_S\Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_{pS}} T_{1j}^* = \left(-1 + \frac{k_S\Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_{pS}}\right) T_{0j}^* - \frac{k_S\Delta t}{2\Delta y^2 \rho_S C_{pS}} (T_{0j-1}^* + T_{0j+1}^*) \end{aligned}$$

Nodos (x,y);  $0 < x < x_2$ ,  $y_1 < y < y_2$

$$\frac{k_S(T_{ij}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij}^* - T_{i+1,j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij} - T_{i,j-1})\Delta x}{\Delta y} - \frac{k_S(T_{ij} - T_{i,j+1})\Delta x}{\Delta y} = \rho_S C_p \frac{\Delta x \Delta y (T_{ij}^* - T_{ij})}{(\Delta t/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_p S}\right) T_{ij}^* + \frac{k_S \Delta t}{2 \Delta x^2 \rho_S C_p S} (T_{i-1,j}^* + T_{i+1,j}^*) = \left(-1 + \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_p S}\right) T_{ij} - \frac{k_S \Delta t}{2 \Delta y^2 \rho_S C_p S} (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})$$

Nodos (x2,y);  $y_1 < y < y_2$

$$\frac{k_S(T_{ij}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij}^* - T_a)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij} - T_{i,j-1})\Delta x}{\Delta y} - \frac{k_S(T_{ij} - T_{i,j+1})\Delta x}{\Delta y} = \rho_S C_p \frac{\Delta x \Delta y (T_{ij}^* - T_{ij})}{(\Delta t/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_p S}\right) T_{ij}^* + \frac{k_S \Delta t}{2 \Delta x^2 \rho_S C_p S} T_{i-1,j}^* = \left(-1 + \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_p S}\right) T_{ij} - \frac{k_S \Delta t}{2 \Delta y^2 \rho_S C_p S} (T_{i,j-1} + T_{i,j+1} + T_a)$$

Caso 5.

Nodo (0,y2)

$$\frac{k_S(T_{0,y_2}^* - T_{1,y_2}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{0,y_2} - T_{0,y_2-1})\Delta x}{2 \Delta y} - \frac{k_S(T_{0,y_2} - T_a)\Delta x}{2 \Delta y} = \rho_S C_p \frac{\Delta x \Delta y (T_{0,y_2}^* - T_{0,y_2})}{2(\Delta t/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_p S}\right) T_{0,y_2}^* + \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_p S} T_{1,y_2}^* = \left(-1 + \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_p S}\right) T_{0,y_2} - \frac{k_S \Delta t}{2 \Delta y^2 \rho_S C_p S} (T_{0,y_2-1} + T_a)$$

Nodos (x,y2);  $0 < x < x_2$

$$\frac{k_S(T_{i,y_2}^* - T_{i-1,y_2}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{i,y_2}^* - T_{i+1,y_2}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{i,y_2} - T_{i,y_2-1})\Delta x}{\Delta y} - \frac{k_S(T_{i,y_2} - T_a)\Delta x}{\Delta y} = \rho_S C_p \frac{\Delta x \Delta y (T_{i,y_2}^* - T_{i,y_2})}{(\Delta t/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_p S}\right) T_{i,y_2}^* + \frac{k_S \Delta t}{2 \Delta x^2 \rho_S C_p S} (T_{i-1,y_2}^* + T_{i+1,y_2}^*) = \left(-1 + \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_p S}\right) T_{i,y_2} - \frac{k_S \Delta t}{2 \Delta y^2 \rho_S C_p S} (T_a + T_{i,y_2-1})$$

Nodo (x2,y2)

$$\frac{k_S(T_{ij}^* - T_{i-1,j}^*)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij}^* - T_a)\Delta y}{\Delta x} - \frac{k_S(T_{ij} - T_{i,j-1})\Delta x}{\Delta y} - \frac{k_S(T_{ij} - T_a)\Delta x}{\Delta y} = \rho_S C_p \frac{\Delta x \Delta y (T_{ij}^* - T_{ij})}{(\Delta t/2)}$$

$$\Rightarrow \left(-1 - \frac{k_S \Delta t}{\Delta x^2 \rho_S C_p S}\right) T_{x_2,y_2}^* + \frac{k_S \Delta t}{2 \Delta x^2 \rho_S C_p S} T_{x_2-1,y_2}^* = \left(-1 + \frac{k_S \Delta t}{\Delta y^2 \rho_S C_p S}\right) T_{x_2,y_2} - \frac{k_S \Delta t}{2 \Delta y^2 \rho_S C_p S} (T_{x_2,y_2-1} + 2T_a)$$

A partir de las ecuaciones nodales anteriores se generan sistemas matriciales para cada caso, por simplificación se definen los siguientes coeficientes para las matrices correspondientes al barrido a lo largo del eje Y.

$$P1 = 1 + \frac{K_M \Delta t}{\Delta x^2 (\rho_M \cdot C_{PM})}$$

$$P2 = 1 + \frac{(K_M + K_S) \Delta t}{\Delta x^2 (\rho_M \cdot C_{PM} + \rho_S \cdot C_{PS})}$$

$$P3 = 1 + \frac{K_S \Delta t}{\Delta x^2 (\rho_S \cdot C_{PS})}$$

$$P4 = 1 + \frac{(3K_S + K_M) \Delta t}{\Delta x^2 (3\rho_S \cdot C_{PS} + \rho_M \cdot C_{PM})}$$

$$D1 = -\frac{K_M \Delta t}{\Delta x^2 (\rho_M \cdot C_{PM})}$$

$$D2 = -\frac{K_M \Delta t}{\Delta x^2 (\rho_M \cdot C_{PM} + \rho_S \cdot C_{PS})}$$

$$D3 = -\frac{K_S \Delta t}{\Delta x^2 (\rho_M \cdot C_{PM} + \rho_S \cdot C_{PS})}$$

$$D4 = -\frac{K_S \Delta t}{\Delta x^2 (\rho_S \cdot C_{PS})}$$

$$D5 = -\frac{(K_M + K_S) \Delta t}{\Delta x^2 (\rho_M \cdot C_{PM} + \rho_S \cdot C_{PS})}$$

$$D6 = -\frac{(K_S + K_M) \Delta t}{\Delta x^2 (3\rho_S \cdot C_{PS} + \rho_M \cdot C_{PM})}$$

$$D7 = -\frac{2K_S \Delta t}{\Delta x^2 (3\rho_S \cdot C_{PS} + \rho_M \cdot C_{PM})}$$

$$C1 = 1 - \frac{K_M \Delta t}{\Delta y^2 (\rho_M \cdot C_{PM})}$$

$$C2 = 1 - \frac{(K_M + K_S) \Delta t}{\Delta y^2 (\rho_M \cdot C_{PM} + \rho_S \cdot C_{PS})}$$

$$C3 = 1 - \frac{K_S \Delta t}{\Delta y^2 (\rho_S \cdot C_{PS})}$$

$$C4 = 1 - \frac{(3K_S + K_M) \Delta t}{\Delta y^2 (3\rho_S \cdot C_{PS} + \rho_M \cdot C_{PM})}$$

$$E1 = \frac{K_M \Delta t}{\Delta y^2 (\rho_M \cdot C_{PM})}$$

$$E2 = \frac{(K_M + K_S) \Delta t}{\Delta y^2 (\rho_M \cdot C_{PM} + \rho_S \cdot C_{PS})}$$

$$E3 = \frac{K_S \Delta t}{\Delta y^2 (\rho_S \cdot C_{PS})}$$

$$E4 = \frac{(K_S + K_M) \Delta t}{\Delta y^2 (3\rho_S \cdot C_{PS} + \rho_M \cdot C_{PM})}$$

$$E5 = \frac{2K_S \Delta t}{\Delta y^2 (3\rho_S \cdot C_{PS} + \rho_M \cdot C_{PM})}$$

$$E6 = \frac{K_M \Delta t}{\Delta y^2 (\rho_M \cdot C_{PM} + \rho_S \cdot C_{PS})}$$

$$E7 = \frac{K_S \Delta t}{\Delta y^2 (\rho_M C_{PM} + \rho_S C_{PS})}$$

Los sistemas matriciales para el barrido a lo largo del eje Y son las siguientes.

Caso 1.

$$\begin{bmatrix} P1 & D1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D1/2 & P1 & D1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D1/2 & P1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D2 & P2 & D3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{0,0}^* \\ T_{1,0}^* \\ T_{2,0}^* \\ T_{3,0}^* \\ T_{4,0}^* \\ T_{5,0}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C1.T_{0,0} - E1.T_{0,1} \\ C1.T_{1,0} - E1.T_{1,1} \\ C1.T_{2,0} - E1.T_{2,1} \\ C2.T_{3,0} - E2.T_{3,1} \\ C3.T_{4,0} - E3.T_{4,1} \\ C3.T_{5,0} - E3.T_{5,1} \end{bmatrix}$$

Caso 2.

$$\begin{bmatrix} P1 & D1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D1/2 & P1 & D1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D1/2 & P1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D2 & P2 & D3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{0,j}^* \\ T_{1,j}^* \\ T_{2,j}^* \\ T_{3,j}^* \\ T_{4,j}^* \\ T_{5,j}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C1.T_{0,j} + (E1/2).(T_{0,j-1} + T_{0,j+1}) \\ C1.T_{1,j} + (E1/2).(T_{1,j-1} + T_{1,j+1}) \\ C1.T_{2,j} + (E1/2).(T_{2,j-1} + T_{2,j+1}) \\ C2.T_{3,j} + (E2/2).(T_{3,j-1} + T_{3,j+1}) \\ C3.T_{4,j} + (E3/2).(T_{4,j-1} + T_{4,j+1}) \\ C3.T_{5,j} + (E3/2).(T_{5,j-1} + T_{5,j+1} + Ta) \end{bmatrix}$$

Caso 3.

$$\begin{bmatrix} P2 & D5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D5/2 & P2 & D5/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D5/2 & P2 & D5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D6 & P4 & D7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{0,3}^* \\ T_{1,3}^* \\ T_{2,3}^* \\ T_{3,3}^* \\ T_{4,3}^* \\ T_{5,3}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C2.T_{0,3} + E6.T_{0,2} + E7.T_{0,4} \\ C2.T_{1,3} + E6.T_{1,2} + E7.T_{1,4} \\ C2.T_{2,3} + E6.T_{2,2} + E7.T_{2,4} \\ C4.T_{3,3} + E4.T_{3,2} + E5.T_{3,4} \\ C3.T_{4,3} + (E3/2).(T_{4,2} + T_{4,4}) \\ C3.T_{5,3} + (E3/2).(T_{5,2} + T_{5,4} + Ta) \end{bmatrix}$$

Caso 4.

$$\begin{bmatrix} P3 & D4/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D4/2 & P3 & D4/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D4/2 & P3 & D4/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{0,j}^* \\ T_{1,j}^* \\ T_{2,j}^* \\ T_{3,j}^* \\ T_{4,j}^* \\ T_{5,j}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C3.T_{0,j} + (E3/2).(T_{0,j-1} + T_{0,j+1}) \\ C3.T_{1,j} + (E3/2).(T_{1,j-1} + T_{1,j+1}) \\ C3.T_{2,j} + (E3/2).(T_{2,j-1} + T_{2,j+1}) \\ C3.T_{3,j} + (E3/2).(T_{3,j-1} + T_{3,j+1}) \\ C3.T_{4,j} + (E3/2).(T_{4,j-1} + T_{4,j+1}) \\ C3.T_{5,j} + (E3/2).(T_{5,j-1} + T_{5,j+1} + Ta) \end{bmatrix}$$

Caso 5.

$$\begin{bmatrix} P3 & D4/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D4/2 & P3 & D4/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D4/2 & P3 & D4/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{0,5}^* \\ T_{1,5}^* \\ T_{2,5}^* \\ T_{3,5}^* \\ T_{4,5}^* \\ T_{5,5}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C3.T_{0,5} + (E3/2).(T_{0,4} + T_a) \\ C3.T_{1,5} + (E3/2).(T_{1,4} + T_a) \\ C3.T_{2,5} + (E3/2).(T_{2,4} + T_a) \\ C3.T_{3,5} + (E3/2).(T_{3,4} + T_a) \\ C3.T_{4,5} + (E3/2).(T_{4,4} + T_a) \\ C3.T_{5,5} + (E3/2).(T_{5,4} + 2.T_a) \end{bmatrix}$$

Para el caso del barrido a lo largo del eje X, los coeficientes son equivalentes puesto que el único cambio que se les debería hacer es sustituir x por y, y viceversa, que en el caso del sistema tipificado son iguales. Las matrices para ese caso se presentan a continuación.

Caso 1.

$$\begin{bmatrix} P1 & D1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D1/2 & P1 & D1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D1/2 & P1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D2 & P2 & D3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{0,0}^* \\ T_{0,1}^* \\ T_{0,2}^* \\ T_{0,3}^* \\ T_{0,4}^* \\ T_{0,5}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C1.T_{0,0} - E1.T_{1,0} \\ C1.T_{0,1} - E1.T_{1,1} \\ C1.T_{0,2} - E1.T_{1,2} \\ C2.T_{0,3} - E2.T_{1,3} \\ C3.T_{0,4} - E3.T_{1,4} \\ C3.T_{0,5} - E3.T_{1,5} \end{bmatrix}$$

Caso 2.

$$\begin{bmatrix} P1 & D1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D1/2 & P1 & D1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D1/2 & P1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D2 & P2 & D3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{i,0}^* \\ T_{i,1}^* \\ T_{i,2}^* \\ T_{i,3}^* \\ T_{i,4}^* \\ T_{i,5}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C1.T_{i,0} + (E1/2).(T_{i-1,0} + T_{i+1,0}) \\ C1.T_{i,1} + (E1/2).(T_{i-1,1} + T_{i+1,1}) \\ C1.T_{i,2} + (E1/2).(T_{i-1,2} + T_{i+1,2}) \\ C2.T_{i,3} + (E2/2).(T_{i-1,3} + T_{i+1,3}) \\ C3.T_{i,4} + (E3/2).(T_{i-1,4} + T_{i+1,4}) \\ C3.T_{i,5} + (E3/2).(T_{i-1,5} + T_{i+1,5} + T_a) \end{bmatrix}$$

Caso 3.

$$\begin{bmatrix} P2 & D5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D5/2 & P2 & D5/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D5/2 & P2 & D5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D6 & P4 & D7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{3,0}^* \\ T_{3,1}^* \\ T_{3,2}^* \\ T_{3,3}^* \\ T_{3,4}^* \\ T_{3,5}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C2.T_{3,0} + E6.T_{2,0} + E7.T_{4,0} \\ C2.T_{3,1} + E6.T_{2,1} + E7.T_{4,1} \\ C2.T_{3,2} + E6.T_{2,2} + E7.T_{4,2} \\ C4.T_{3,3} + E4.T_{2,3} + E5.T_{4,3} \\ C3.T_{3,4} + (E3/2).(T_{2,4} + T_{4,4}) \\ C3.T_{3,5} + (E3/2).(T_{2,5} + T_{4,5} + T_a) \end{bmatrix}$$

Caso 4.

$$\begin{bmatrix} P3 & D4/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D4/2 & P3 & D4/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D4/2 & P3 & D4/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{i,0}^* \\ T_{i,1}^* \\ T_{i,2}^* \\ T_{i,3}^* \\ T_{i,4}^* \\ T_{i,5}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C3.T_{i,0} + (E3/2).(T_{i-1,0} + T_{i+1,0}) \\ C3.T_{i,1} + (E3/2).(T_{i-1,1} + T_{i+1,1}) \\ C3.T_{i,2} + (E3/2).(T_{i-1,2} + T_{i+1,2}) \\ C3.T_{i,3} + (E3/2).(T_{i-1,3} + T_{i+1,3}) \\ C3.T_{i,4} + (E3/2).(T_{i-1,4} + T_{i+1,4}) \\ C3.T_{i,5} + (E3/2).(T_{i-1,5} + T_{i+1,5} + Ta) \end{bmatrix}$$

Caso 5.

$$\begin{bmatrix} P3 & D4/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D4/2 & P3 & D4/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D4/2 & P3 & D4/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 & D4/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D4/2 & P3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{3,0}^* \\ T_{3,1}^* \\ T_{3,2}^* \\ T_{3,3}^* \\ T_{3,4}^* \\ T_{3,5}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C3.T_{3,0} + (E3/2).(T_{4,0} + Ta) \\ C3.T_{3,1} + (E3/2).(T_{4,1} + Ta) \\ C3.T_{3,2} + (E3/2).(T_{4,2} + Ta) \\ C3.T_{3,3} + (E3/2).(T_{4,3} + Ta) \\ C3.T_{3,4} + (E3/2).(T_{4,4} + Ta) \\ C3.T_{3,5} + (E3/2).(T_{4,5} + 2.Ta) \end{bmatrix}$$

**APÉNDICE B**  
**OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE VELOCIDAD EN FUNCIÓN DE LA**  
**LONGITUD DE FLUIDEZ Y DEL SOBRE CALENTAMIENTO A PARTIR DE**  
**DATOS EXPERIMENTALES.**

Empleando el montaje experimental presentado en la sección 4.2 se pueden determinar valores correlacionados de la longitud y del tiempo de fluidez. En el caso del aluminio, se generaron dos listados de estos valores para calentamientos de 800 y 850 grados centígrados. Estos datos nos sirvieron para determinar un perfil de velocidad dependiente de la temperatura de colada.

Para una temperatura de colada de 850 °C, los resultados experimentales fueron los mostrados en la Tabla B.I.

Tabla B.I.. Valores experimentales para temperatura de colada de 850 °C.

Tiempo (s)	Longitud (cm.)
0.0	0.0
0.07	4.8
0.13	9.5
0.22	14.2
0.32	19.2
0.42	23.7
0.58	28.7
0.69	33.7
1.09	48.5
1.22	53.5
1.44	58.5
1.57	63.5

Los datos experimentales para una temperatura de colada de 800 °C se presentan en la Tabla B.II.

Tabla B.II.. Valores experimentales para temperatura de colada de 800 °C.

Tiempo (s)	Longitud (cm.)
0.0	0.0
0.06	4.0
0.13	8.4
0.31	12.9
0.40	17.6
0.43	22.1
0.66	26.3
0.78	30.8
1.25	44.5
1.59	49.0
1.75	54.0

Se puede observar que las curvas tienen el siguiente comportamiento:

$$L = a(t + b)^c - d$$

tal que:  $t = 0$ ;  $\frac{dL}{dt} = 100 \text{ cm./s}$

donde a, b, c y d son valores algebraicos, que se evaluaron para ambos casos.

Para 850 °C:

$$L = 46.1571093092(t + 0.006)^{0.788266794947} - 0.8 \quad \text{correlación de } 0.99939$$

Para 800 °C:

$$L = 36.8564629071(t + 0.000473)^{0.755589173818} - 0.6 \quad \text{correlación de } 0.99852$$

sin tomar en cuenta los datos (0.31; 12.9) y (0.43; 22.1), debido a que varían mucho respecto al comportamiento del resto de los datos.

Las gráficas de la longitud de fluidez contra el tiempo se muestran en la figura b.1.

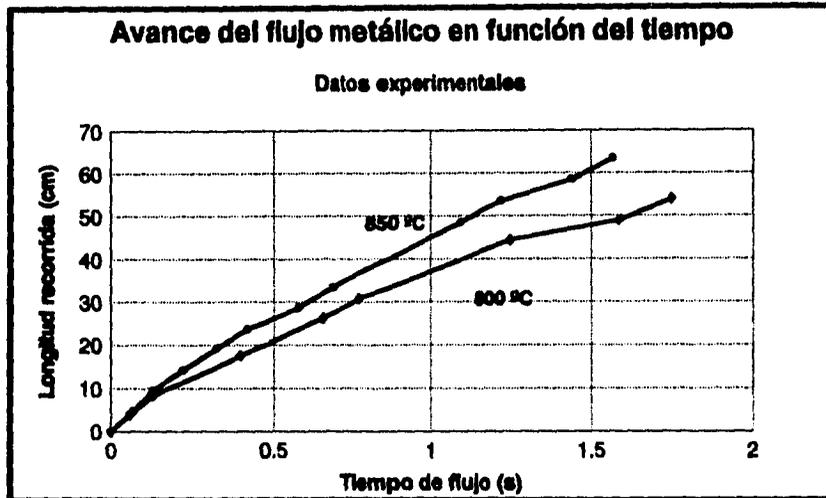


Figura b.1.. Curvas experimentales para la distancia recorrida a lo largo del canal de fluidez en función del tiempo, para dos temperaturas diferentes.

Una primera ecuación de la velocidad se obtiene derivando la anterior función respecto al tiempo.

$$v = \frac{dL}{dt}$$

Por otro lado se puede despejar el tiempo de la primera relación, hallando así una función  $t(L)$ , para luego sustituirla en la ecuación de la velocidad, obteniendo una función  $v(L)$ .

$$\text{Para } 850 \text{ } ^\circ\text{C} : v = 36.3841166192(t + 0.006)^{-0.211733205053}$$

$$t = 0.00773992751269(L + 0.8)^{1.2686061818} + 0.006$$

$$\text{Por lo tanto: } v = 1.01844208961(L + 0.8)^{-0.26806061818} \text{ (m/s)}$$

$$\text{Para } 800 \text{ } ^\circ\text{C} : v = 27.8483442578(t + 0.00473)^{-0.24410826182}$$

$$t = 0.0084482226926(L + 0.6)^{1.323470652426} - 0.00473$$

$$\text{Por lo tanto, } v = 0.894376487591(L + 0.6)^{-0.323470524262}$$

# ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

APÉNDICE B.

Teniendo estas dos funciones de la forma  $v = A(L+B)^C$ , se pueden determinar una familia de curvas en las que los coeficientes A, B y C sean funciones de las temperaturas de colada. Consideramos que los coeficientes varían linealmente, de manera tal que llegamos a la ecuación general de la velocidad:

$$v = [-1.09067 + 0.00248T_c][L - 2.6 + 0.004T_c]^{-1.20130 + 0.00117T_c}$$

$$T_c = T_f + \Delta T$$

Donde:

$T_f$ .- Temperatura de fusión.

$\Delta T$ .- Sobrecalentamiento.

La figura b.2. presenta la familia de curvas del perfil de velocidades para diferentes temperaturas de colada. El comportamiento de esta familia de curvas es adecuado, ya que se aproxima al perfil teórico cuando la temperatura de colada es alta y el líquido tiende a comportarse idealmente, y porque a temperaturas menores los perfiles no caen drásticamente.

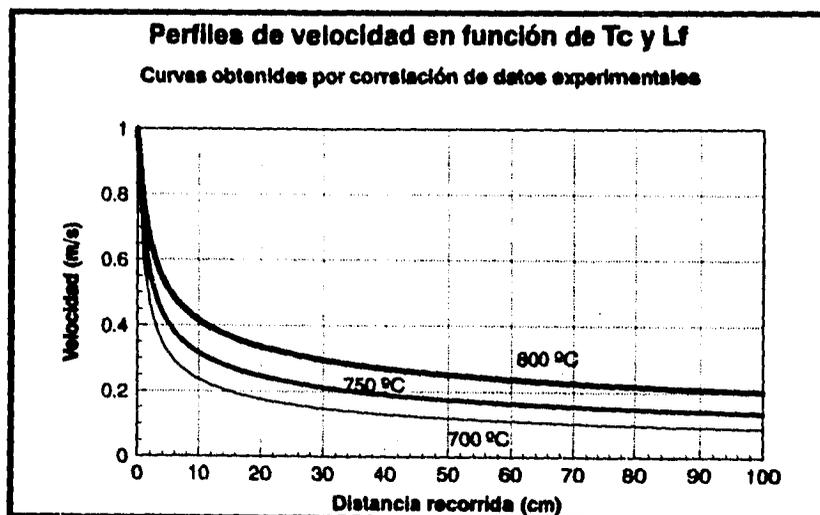


Figura b.2.. Se muestran tres curvas de la familia generada, para tres temperaturas de colada, para aluminio puro.

**APÉNDICE C**  
**LISTADO DEL PROGRAMA EN TURBO C PARA EL MODELO**  
**DE LA SECCIÓN 2.4.**

En este apéndice se muestra el listado del programa escrito en Turbo C para el modelo implementado en la sección 2.4. Este modelo sirvió para evaluar algunas variables, a la vez que para definir el peso de estas y su validez.

**/\* CALCULO DE LA FLUIDEZ CON ANALISIS TERMICO CONVECTIVO Y VELOCIDAD VARIABLE\*/**

```
#include "stdio.h"
#include "math.h"
```

```
/*Asignación del valor de la difusividad térmica de la arena a ALFA*/
#define ALFA 4.139E-7
/*Asignación del valor de la conductividad térmica de la arena a KS*/
#define KS 0.899
```

```
float DT,HI,E,V,TA;
int LF;
```

```
FILE *flidez;
```

**/\*Subrutina que calcula la cantidad de calor disipado por el volumen de control durante el tiempo que tarda en recorrer la distancia de 1 cm. Realiza una integración numérica por el método de Romberg de la solución analítica para la ecuación diferencial parcial de conducción de calor en estado transitorio para la arena, con frontera convectiva, valuada en la frontera  $x=0$  (convectiva) en el intervalo de tiempo empleado en recorrer la distancia de 1 cm. La solución analítica proporciona la expresión para el flujo de calor instantáneo para cada punto  $q=f(t,x)$ , de aquí que sea necesario integrar (de  $t_1$  a  $t_2$ ) para así determinar la cantidad de calor total disipado por el volumen de control en este intervalo de tiempo\*/**

```
float Integracion()
{
    float Q,F,I,S,T,K,J;
    float R[15][15];
    float H[15];
    for(K=0;K<=14;K++){
        for(I=0;I<=14;I++){
            R[K][I]=0;
        }
    }
    for(K=0;K<=14;K++){
        H[K]=0;
    }
}
```

/\*Cálculo del tiempo que tarda el volumen de control en recorrer la distancia de 1 cm, en función de la velocidad que es, variable\*/

```

T=0.01/V;
TA=TA+T;
K=1;
while (K<=12){
    H[K]=T/pow(2.0,K-1);
/*    printf("\tH[K]=%f",H[K]);*/
    l=1;
    F=0;
    S=0;
    while(l<=pow(2.0,K-1))
    {
/*        printf("\tENTRO");*/
/*        printf("\tK=%f",K);*/
        F=F-HI*(1-0.5)*H[K-1]*exp(pow(HI,2.0)*ALFA*(1-0.5)*
            H[K-1]/pow(KS,2.0))/KS+2*sqrt(ALFA)*pow(HI,2.0)*
            pow((1-0.5)*H[K-1],1.5)*exp(pow(HI,2.0)*ALFA*(1-0.5)*
            H[K-1]/pow(KS,2.0))/(sqrt(3.14159)*pow(KS,2.0))-2*
            pow(HI,4.0)*pow((1-0.5)*H[K-1],2.5)*pow(ALFA,1.5)*
            exp(pow(HI,2.0)*ALFA*(1-0.5)*H[K-1]/pow(KS,2.0))/
            (sqrt(3.14159)*3*pow(KS,4.0));
        l=l+1;
/*        printf("\tl=%f",l);*/
/*        printf("\tF=%f",F);*/
    }
    if(K>=2)
    {
        S=(H[K-1])*F;
        R[K][1]=0.5*((R[K-1][1])+S);
        printf("\t%5.0f",K);
    }
    if(K==1)
    {
        R[1][1]=(T/2)*(-HI*T*exp(pow(HI,2.0)*ALFA*T/
            pow(KS,2.0))+2*sqrt(ALFA)*pow(HI,2.0)*pow(T,1.5)*
            exp(pow(HI,2.0)*ALFA*T/pow(KS,2.0))/(sqrt(3.14159)*
            pow(KS,2.0))-2*pow(HI,4.0)*pow(T,2.5)*pow(ALFA,1.5)*
            exp(pow(HI,2.0)*ALFA*T/pow(KS,2.0))/(sqrt(3.14159)*
            3*pow(KS,4.0)));
    }
    if(l>=2)
    {
        J=2;
        while(J<=K)
        {
            R[K][J]=(pow(4,J-1)*(R[K][J-1])-(R[K-1][J-1]))
                /(pow(4,J-1)-1);
            J=J+1;
        }
    }
    K=K+1;
}
printf("\tR[K-1][K-1]=%f",R[K-1][K-1]);

```

```

/*Cálculo del calor total disipado por el volumen de control*/
Q=-29.58E-3*V*DT*(R[K-1][K-1]);
printf("\tQ=%f",Q);
/*Cálculo del calor restante en el volumen de control, restándole el calor disipado al calor total del
volumen de control*/
E=E-Q;
fprintf(fluidex,"\n\tLF=%d",LF);
fprintf(fluidex,"\tV=%7.5f",V);
fprintf(fluidex,"\tTtot=%7.4f",TA);
/* fprintf(fluidex,"\tR[K-1][K-1]=%f,(R[K-1][K-1]);*/
fprintf(fluidex,"\tQ=%8.4f",Q);
fprintf(fluidex,"\tE=%8.4f",E);
printf("\n\tCELDA NUMERO: %d",LF);
printf("\tVELOCIDAD: %7.5f",V);
printf("\tTtotal=%7.4f",TA);
printf("\tE=%8.4f",E);
LF=LF+1;
/*Determinación del sobrecalentamiento restante en el volumen de control después de que disminuye
su temperatura*/
if (E<587.484)
/*Sobrecalentamiento igual a cero si se llegó a la cantidad de calor igual o menor a la que posee el
volumen de control a la temperatura de fusión*/
DT=0;
else
/*Si no se a llegado a una T<=Tm, se calcula el DT remanente*/
DT=(E-587.484)/1.74;
return (E);
}

main()
{
int M;
float CD,RE,DC,FIC;
float F[12],TT[12];
clrscr();
/*Entrada de datos desde teclado, el valor de h y del sobrecalentamiento al inicio de la prueba*/
printf("\n\t h (W/m^2 °C): ");
scanf("%f",&H);
printf("\n\t Sobrecalentamiento (°C): ");
scanf("%f",&DT);
/*Cálculo de la energía (calor) total que posee el volumen de control a la temperatura de vaciado,
como una suma del calor de fusión más el de sobre calentamiento*/
E=587.484+1.74*DT;
printf("\n");
for(M=0;M<12;M++)
{
F[M]=0;
TT[M]=0;
}
F[1]=0.006;
TT[1]=3.53;
CD=1;
LF=1;
TA=0;

```

```

DC=0;
FIC=0;
fluidex=fopen("A:\ldata.txt","w");
fprintf(fluidex,"%tH (W/m2 K)=%4.0f\nDelta T (C)=%3.0F",HI,DT);
do{
    DT=DT+635;
    do{
        V=CD;
        /*Cálculo del Reynolds para el volumen de control, en función sólo de su velocidad, dado que la
        densidad, viscosidad y dimensiones del volumen de control son constantes en toda la prueba (se
        asumen así).*/
        RE=20495.455*V;
        for (M=1;M<=10;M++)
        {
            /*Cálculo del coeficiente de fricción, por el método de Newton-Raphson, resolviendo numéricamente
            la ecuación para la correlación empírica en la región turbulenta.*/
            F[M+1]=F[M]-(1.763*log10(RE*sqrt(F[M]))-
            (1/sqrt(F[M]))-0.4)/(0.88/F[M]+(1/(2*
            pow(F[M],1.5))));
            /*Cálculo del ángulo en radianes, que se ha recorrido a lo largo de la espiral para incluir la curvatura
            en el cálculo del coeficiente de fricción. Se hace también con el método de Newton-Raphson*/
            TT[M+1]=TT[M]-((2.311/(2*3.14159))^(0.5*
            sqrt(pow(TT[M],2.0)+1)*TT[M]+0.5*2.302585*log10(
            sqrt(pow(TT[M],2.0)+1)+TT[M]))-LF-2.761)/
            ((2.311/(2*3.14159))*sqrt(pow(TT[M],2.0)+1));
        }
        /*Cálculo del factor de corrección para el coeficiente de fricción*/
        DC=(2.311/3.14159)*TT[11];
        /*Cálculo del coeficiente de fricción corregido por curvatura.*/
        FIC=F[11]*pow(RE*pow((0.8203/DC),2.0),0.05);
        /*Cálculo del factor de descarga CD, dado que velocidad=CD*sqrt(2*g*H), donde sqrt(2*g*H) es la
        velocidad máxima, alcanzada por la calda libre del metal en la bajada, pero como la velocidad
        máxima, dada la geometría de la espiral, es 1 m/s, entonces velocidad=CD.*/
        CD=1/(sqrt(1+4*LF*0.01*FIC/8.35E-3));
        F[1]=F[11];
        TT[1]=TT[11];
        /*El criterio de paro de este ciclo, es cuando el valor absoluto de la velocidad V menos el factor de
        descarga CD sea <= 0.001.*/
        }while(fabs(V-CD)>0.001);
        V=CD;
        /*Aquí se llama a la subrutina llamada integración, que devuelve como resultado el valor de la energía
        remanente o restante del volumen de control cuando pasó por la longitud de 1 cm, y ese valor es
        asignado a la variable E*/
        E=integracion();
        /*
        printf("\nV=%f\nE=%f",V,E);*/
        /*El criterio de paro del programa, es cuando la energía total del volumen de control (calor de
        sobrecalentamiento y de fusión) es igual a cero.*/
        }while(E>0);
        fclose(fluidex);
        getch();
    }*main*/
}

```

**APÉNDICE D**  
**LISTADO DEL PROGRAMA EN TURBO C PARA EL MODELO FINAL**  
**DE LA SECCIÓN 3.3.**

A continuación, se muestran los dos listados de los programas usados en la implementación del modelo final. El primer listado es el del programa empleado en el cálculo de la longitud de fluidez para aluminio puro, mientras que el segundo es el empleado para el cálculo de la longitud de fluidez para la aleación Al-Si eutéctica. Ambos son iguales en esencia, y tan sólo difieren en los valores de las constantes y algunos detalles menores.

**Programa para el cálculo de la longitud de fluidez de aluminio puro.**

/\* PROGRAMA DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS FINITAS ADI (ALTERNATING DIRECTION \*/  
 /\* IMPLICIT) PARA UNA SECCION DEL CANAL DE FLUJO, SIMULANDO LA SOLIDIFICACION.\*/  
 /\* SE INCLUYE LA VELOCIDAD DE AVANCE DEL METAL EN EL CANAL. \*/

```
#include "stdio.h"
#include "math.h"

#define Ros 2595
#define Cps 818.4
#define Ks 1.83
#define Rom 2700
#define Cpml 1179
#define Cpms 1018
#define Km 234
#define DHf 387819.21
#define valmatr10(d,x,y,dt) 1+(Km)*(dt)/((Rom)*((Cpms)*fs{(x)}(y))+Cpml)*(1-fs{(x)}(y)))*(d)*(d);
#define valmatr11(d,x,y,dt) -(Km)*(dt)/((Rom)*((Cpms)*fs{(x)}(y))+Cpml)*(1-fs{(x)}(y)))*(d)*(d);
#define valmatr12(d,x,y,dt) -(Km)*(dt)/(2*(Rom)*((Cpms)*fs{(x)}(y))+Cpml)*(1-fs{(x)}(y)))*(d)*(d);
#define valmatr13(d,x,y,dt) -(Km)*(dt)/(((Rom)*((Cpms)*fs{(x)}(y))+Cpml)*(1-fs{(x)}(y)))+(Ros)*(Cps))*(d)*(d);
#define valmatr14(d,x,y,dt) -(Ks)*(dt)/(((Rom)*((Cpms)*fs{(x)}(y))+Cpml)*(1-fs{(x)}(y)))+(Ros)*(Cps))*(d)*(d);
#define valmatr15(d,x,y,dt) 1+((Km)+(Ks))*(dt)/(((Rom)*((Cpms)*fs{(x)}(y))+Cpml)*(1-fs{(x)}(y)))+(Ros)*(Cps))*(d)*(d);
#define valmatr16(d,x,y,dt) -(Ks)*(dt)/(2*(Ros)*(Cps)*(d)*(d));
#define valmatr17(d,x,y,dt) 1+(Ks)*(dt)/((Ros)*(Cps)*(d)*(d));
#define valmatr18(d,x,y,dt) -((Ks)+(Km))*(dt)/((Ros)*(Cps)+(Rom)*((Cpms)*fs{(x)}(y))+Cpml)*(1-fs{(x)}(y)))*(d)*(d);
#define valmatr19(d,x,y,dt) -((Ks)+(Km))*(dt)/(2*((Ros)*(Cps)+(Rom)*((Cpms)*fs{(x)}(y))+Cpml)*(1-fs{(x)}(y)))*(d)*(d);
#define valmatr110(d,x,y,dt) -((Ks)+(Km))*(dt)/((3*(Ros)*(Cps)+(Rom)*((Cpms)*fs{(x)}(y))+Cpml)*(1-fs{(x)}(y)))*(d)*(d);
```

```

#define valmatr11(d,x,y,dt)
1+(3*(Ka)+(Km))*dt/((3*(Ros)*(Cps)+(Rom)*((Cpms)*fs(x)(y))+(Cpml)*(1-fs(x)(y))))*(d)*(d);
#define valmatr12(d,x,y,dt) -2*(Ka)*dt/((3*(Ros)*(Cps)+(Rom)*((Cpms)*fs(x)(y))+(Cpml)*(1-
fs(x)(y))))*(d)*(d);
#define valmatr13(d,x,y,dt) -(Ka)*dt/((Ros)*(Cps)*(d)*(d));
#define valmatr20(d,x,y,dt) (Km)*dt/((Rom)*((Cpms)*fs(x)(y))+(Cpml)*(1-fs(x)(y)))*(d)*(d);
#define valmatr21(d,x,y,dt) ((Km)+(Ka))*dt/(((Rom)*((Cpms)*fs(x)(y))+(Cpml)*(1-
fs(x)(y)))+(Ros)*(Cps))*(d)*(d);
#define valmatr22(d,x,y,dt) (Ka)*dt/((Ros)*(Cps)*(d)*(d));
#define valmatr23(d,x,y,dt) (3*(Ka)+(Km))*dt/((3*(Ros)*(Cps)+(Rom)*((Cpms)*fs(x)(y))+(Cpml)*(1-
fs(x)(y))))*(d)*(d);

```

```

int i,j;
float SE1[12][12],DTR[12][12],T[12][12][2],MC1[12][12],MC2[12],Tf=660;
float fs[12][12],dx,dy,dt,x1,x2,y1,y2,Tos,Tc,DTF;

```

```

float solidificar(int x, int y)
{
    float dtr;
    DTR[x][y]=DTR[x][y]-SE1[x][y];
    fs[x][y]=1-(DTR[x][y]/DTF);
    if(DTR[x][y]<0)
    {
        dtr=Tf+DTR[x][y];
        return(dtr);
    }
    else
        return(Tf);
}

```

```

void barridox()
{
    int x,k;
    float C,VAL;

    for(j=0;j<=y2/dy-1;j++)
    {
        for(i=0;i<=x2/dx-1;i++)
        {
            if(j==0)
            {
                if(i==0)
                {
                    MC1[i][j]=valmatr10(dx,i,j,dt);
                    MC1[i+1][j]=valmatr11(dx,i,j,dt);
                    VAL=valmatr20(dx,i,j,dt);
                    MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j][0]+VAL*T[i][j]+1[0];
                }
            }
            if(i==(x1/dx))
            {
                MC1[i-1][j]=valmatr13(dx,i,j,dt);
                MC1[i][j]=valmatr15(dx,i,j,dt);
            }
        }
    }
}

```



```

VAL=valmatr22(dx,i,j,dt);
MC2[i]=(1-
VAL)*T[i][j][0]+(dy*dy*VAL/2)*((T[i][j]+1[X][0]+T[i][j]-1[X][0])/(dy*dy)+Tos/(dx*dx));
}
if(i>=1 && i<=x1/dx-1)
{
MC1[i-1][j]=valmatr19(dx,i,j,dt);
MC1[i][j]=valmatr15(dx,i,j,dt);
MC1[i+1][j]=valmatr19(dx,i,j,dt);
VAL=valmatr21(dx,i,j,dt);
MC2[i]=(1-
VAL)*T[i][j][0]+(VAL/((Ks)+(Km)))*((Ks)*T[i][j]+1[X][0]+(Km)*T[i][j]-1[X][0]);
}
if(i>=x1/dx+1 && i<=x2/dx-2)
{
MC1[i-1][j]=valmatr16(dx,i,j,dt);
MC1[i][j]=valmatr17(dx,i,j,dt);
MC1[i+1][j]=valmatr16(dx,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dx,i,j,dt);
MC2[i]=(1-VAL)*T[i][j][0]+(VAL/2)*(T[i][j]+1[X][0]+T[i][j]-1[X][0]);
}
)
if(j==(y2/dy)-1)
{
if(i==0)
{
MC1[i][j]=valmatr17(dx,i,j,dt);
MC1[i+1][j]=valmatr113(dx,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dx,i,j,dt);
MC2[i]=(1-VAL)*T[i][j][0]+(VAL/2)*(T[i][j]-1[X][0]+Tos);
}
if(i==(x2/dx)-1)
{
MC1[i-1][j]=valmatr16(dx,i,j,dt);
MC1[i][j]=valmatr17(dx,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dx,i,j,dt);
MC2[i]=(1-VAL)*T[i][j][0]+(dy*dy*VAL/2)*((T[i][j]-
1[X][0]+Tos)/(dy*dy)+Tos/(dx*dx));
}
}
if(i>=1 && i<=x2/dx-2)
{
MC1[i-1][j]=valmatr16(dx,i,j,dt);
MC1[i][j]=valmatr17(dx,i,j,dt);
MC1[i+1][j]=valmatr16(dx,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dx,i,j,dt);
MC2[i]=(1-VAL)*T[i][j][0]+(VAL/2)*(T[i][j]-1[X][0]+Tos);
}
}
}
if(j>=1 && j<=y1/dy-1)
{

```

```

if(i==0)
{
  MC1[i][j]=valmatr10(dx,i,j,dt);
  MC1[i+1][j]=valmatr11(dx,i,j,dt);
  VAL=valmatr20(dx,i,j,dt);
  MC2[i]=(1-VAL)*T[i][j][0]+(VAL/2)*(T[i][j]-1[X0]+T[i][j]+1[X0]);
}
if(i==(x1/dx))
{
  MC1[i-1][j]=valmatr13(dx,i,j,dt);
  MC1[i][j]=valmatr15(dx,i,j,dt);
  MC1[i+1][j]=valmatr14(dx,i,j,dt);
  VAL=valmatr21(dx,i,j,dt);
  MC2[i]=(1-VAL)*T[i][j][0]+(VAL/2)*(T[i][j]-1[X0]+T[i][j]+1[X0]);
}
if(i==(x2/dx)-1)
{
  MC1[i-1][j]=valmatr16(dx,i,j,dt);
  MC1[i][j]=valmatr17(dx,i,j,dt);
  VAL=valmatr22(dx,i,j,dt);
  MC2[i]=((1-VAL)*T[i][j][0]+(dy*dy*VAL/2)*((T[i][j]-
1[X0]+T[i][j]+1[X0])/(dy*dy)+Tos(dx*dx)));
}
if(i>=1 && i<=x1/dx-1)
{
  MC1[i-1][j]=valmatr12(dx,i,j,dt);
  MC1[i][j]=valmatr10(dx,i,j,dt);
  MC1[i+1][j]=valmatr12(dx,i,j,dt);
  VAL=valmatr20(dx,i,j,dt);
  MC2[i]=(1-VAL)*T[i][j][0]+(VAL/2)*(T[i][j]-1[X0]+T[i][j]+1[X0]);
}
if(i>=x1/dx+1 && i<=x2/dx-2)
{
  MC1[i-1][j]=valmatr16(dx,i,j,dt);
  MC1[i][j]=valmatr17(dx,i,j,dt);
  MC1[i+1][j]=valmatr16(dx,i,j,dt);
  VAL=valmatr22(dx,i,j,dt);
  MC2[i]=(1-VAL)*T[i][j][0]+(VAL/2)*(T[i][j]-1[X0]+T[i][j]+1[X0]);
}
}
if(j>=y1/dy+1 && j<=y2/dy-2)
{
  if(i==0)
  {
    MC1[i][j]=valmatr17(dx,i,j,dt);
    MC1[i+1][j]=valmatr13(dx,i,j,dt);
    VAL=valmatr22(dx,i,j,dt);
    MC2[i]=(1-VAL)*T[i][j][0]+(VAL/2)*(T[i][j]-1[X0]+T[i][j]+1[X0]);
  }
  if(i==(x2/dx)-1)
  {
    MC1[i-1][j]=valmatr16(dx,i,j,dt);
  }
}

```

```

MC1[i][j]=valmatr17(dx,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dx,i,j,dt);
MC2[i]=(1-VAL)*T[i][j][0]+(dy*dy*VAL/2)*((T[i][j]-
1[0])+T[i][j]+1[0])/(dy*dy)+Tos/(dx*dx);
    }
    if(i>=1 && i<=<2/dx-2)
    {
        MC1[i-1][j]=valmatr16(dx,i,j,dt);
        MC1[i][j]=valmatr17(dx,i,j,dt);
        MC1[i+1][j]=valmatr16(dx,i,j,dt);
        VAL=valmatr22(dx,i,j,dt);
        MC2[i]=(1-VAL)*T[i][j][0]+(VAL/2)*(T[i][j]-1[0]+T[i][j]+1[0]);
    }
)

/*del ciclo for para i*/

^AQUI SE RESOLVERA LA MATRIZ RESULTANTE Y SE MANDARAN LAS T PREVIAS A ^
^T[i][j][1]^

for(x=0;x<=<2/dx-2;x++)
{
    C=MC1[x][x+1]/MC1[x][x];
    for(k=x;k<=<2/dx-1;k++)
    {
        MC1[k][x+1]=MC1[k][x+1]-MC1[k][x]*C;
    }
    MC2[x+1]=MC2[x+1]-MC2[x]*C;
}

^CALCULO DE T[i][j][1]^
T[x2/dx-1][j][1]=MC2[x2/dx-1]/MC1[x2/dx-1][x2/dx-1];
for(i=x2/dx-2;i>=0;i--)
{
    T[i][j][1]=(MC2[i]-MC1[i+1][j]*T[i+1][j][1])/MC1[i][j];
}

/*del ciclo for para j*/
)

void barridoy()
{
    int y,k;
    float C,VAL;

    for(i=0;i<=<2/dx-1;i++)
    {
        for(j=0;j<=<y2/dy-1;j++)
        {
            if(i==0)

```

```

(
  if(j==0)
  {
    MC1[j][i]=valmatr10(dy,i,j,dt);
    MC1[j+1][i]=valmatr11(dy,i,j,dt);
    VAL=valmatr20(dy,i,j,dt);
    MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+VAL*T[i+1][j+1];
  }
  if(j==(y1/dy))
  {
    MC1[j-1][i]=valmatr13(dy,i,j,dt);
    MC1[j][i]=valmatr15(dy,i,j,dt);
    MC1[j+1][i]=valmatr14(dy,i,j,dt);
    VAL=valmatr21(dy,i,j,dt);
    MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+VAL*T[i+1][j+1];
  }
  if(j==(y2/dy)-1)
  {
    MC1[j-1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
    MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
    VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
    MC2[j]=(1-
VAL)*T[i][j+1]+dx*dx*VAL*(T[i+1][j+1]/(dx*dx)+Tos/(dy*dy));
  }
  if(j>=1 && j<=y1/dy-1)
  {
    MC1[j-1][i]=valmatr12(dy,i,j,dt);
    MC1[j][i]=valmatr10(dy,i,j,dt);
    MC1[j+1][i]=valmatr12(dy,i,j,dt);
    VAL=valmatr20(dy,i,j,dt);
    MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+VAL*T[i+1][j+1];
  }
  if(j>=y1/dy+1 && j<=y2/dy-2)
  {
    MC1[j-1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
    MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
    MC1[j+1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
    VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
    MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+VAL*T[i+1][j+1];
  }
}
if(i==(x1/dx))
{
  if(j==0)
  {
    MC1[j][i]=valmatr15(dy,i,j,dt);
    MC1[j+1][i]=valmatr18(dy,i,j,dt);
    VAL=valmatr21(dy,i,j,dt);
    MC2[j]=(1-
VAL)*T[i][j+1]+(VAL/((Ks)+(Km))*((Ks)*T[i+1][j+1]+(Km)*T[i-1][j+1]));
  }
  if(j==(y1/dy))
  {

```

```

MC1[j-1][i]=valmatr110(dy,i,j,dt);
MC1[j][i]=valmatr111(dy,i,j,dt);
MC1[j+1][i]=valmatr112(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr23(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-
VAL)*T[i][j+1]+(VAL/(3*(Ks)+(Km)))*(((Ks)+(Km))*T[i-1][j+1]+2*(Ks)*T[i+1][j+1]);
}
if(j==(y2/dy)-1)
{
MC1[j-1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(dx*dx*VAL/2)*((T[i-
1][j+1]+T[i+1][j+1])/(dx*dx)+Tos/(dy*dy));
}
if(j>=1 && j<=y1/dy-1)
{
MC1[j-1][i]=valmatr19(dy,i,j,dt);
MC1[j][i]=valmatr15(dy,i,j,dt);
MC1[j+1][i]=valmatr19(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr21(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-
VAL)*T[i][j+1]+(VAL/((Ks)+(Km)))*((Ks)*T[i+1][j+1]+(Km)*T[i-1][j+1]);
}
if(j>=y1/dy+1 && j<=y2/dy-2)
{
MC1[j-1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
MC1[j+1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(VAL/2)*(T[i-1][j+1]+T[i+1][j+1]);
}
}
if(i==(x2/dx)-1)
{
if(j==0)
{
MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
MC1[j+1][i]=valmatr113(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(VAL/2)*(T[i-1][j+1]+Tos);
}
if(j==(y2/dy)-1)
{
MC1[j-1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(dx*dx*VAL/2)*((T[i-
1][j+1]+Tos)/(dx*dx)+Tos/(dy*dy));
}
if(j>=1 && j<=y2/dy-2)
{
MC1[j-1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
}
}

```

```

MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
MC1[j+1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(VAL/2)*(T[i-1][j+1]+Tos);
}
}
if(i>=1 && i<=x1/dx-1)
{
if(j==0)
{
MC1[j][i]=valmatr10(dy,i,j,dt);
MC1[j+1][i]=valmatr11(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr20(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(VAL/2)*(T[i-1][j+1]+T[i+1][j+1]);
}
if(j==(y1/dy))
{
MC1[j-1][i]=valmatr13(dy,i,j,dt);
MC1[j][i]=valmatr15(dy,i,j,dt);
MC1[j+1][i]=valmatr14(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr21(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(VAL/2)*(T[i-1][j+1]+T[i+1][j+1]);
}
if(j==(y2/dy)-1)
{
MC1[j-1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(dx*dx*VAL/2)*((T[i-
1][j+1]+T[i+1][j+1])/(dx*dx)+Tos(dy*dy));
}
if(j>=1 && j<=y1/dy-1)
{
MC1[j-1][i]=valmatr12(dy,i,j,dt);
MC1[j][i]=valmatr10(dy,i,j,dt);
MC1[j+1][i]=valmatr12(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr20(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(VAL/2)*(T[i-1][j+1]+T[i+1][j+1]);
}
if(j>=y1/dy+1 && j<=y2/dy-2)
{
MC1[j-1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
MC1[j+1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(VAL/2)*(T[i-1][j+1]+T[i+1][j+1]);
}
}
if(i>=x1/dx+1 && i<=x2/dx-2)
{
if(j==0)
{

```

```

MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
MC1[j+1][i]=valmatr113(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(VAL/2)*(T[i-1][j+1]+T[i+1][j+1]);
}
if(j==(y2/dy)-1)
{
MC1[j-1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(dx*dx*VAL/2)*((T[i-
1][j+1]+T[i+1][j+1])/((dx*dx)+Tos/(dy*dy)));
}
if(j>=1 && j<=y2/dy-2)
{
MC1[j-1][i]=valmatr16(dy,i,j,dt);
MC1[j][i]=valmatr17(dy,i,j,dt);
MC1[j+1][i]=valmatr18(dy,i,j,dt);
VAL=valmatr22(dy,i,j,dt);
MC2[j]=(1-VAL)*T[i][j+1]+(VAL/2)*(T[i-1][j+1]+T[i+1][j+1]);
}
}
/*del ciclo for para j*/

/*AQUI SE RESOLVERA LA MATRIZ RESULTANTE Y SE MANDARAN LAS T PREVIAS A */
/*T[i][j][0]*/

for(y=0;y<=y2/dy-2;y++)
{
C=MC1[y][y+1]/MC1[y][y];
for(k=y;k<=y2/dy-1;k++)
{
MC1[k][y+1]=MC1[k][y+1]-MC1[k][y]*C;
}
MC2[y+1]=MC2[y+1]-MC2[y]*C;
}

/*CALCULO DE T[i][j][0] */
T[i][y2/dy-1][0]=MC2[y2/dy-1]/MC1[y2/dy-1][y2/dy-1];
for(j=y2/dy-2;j>=0;j--)
{
T[i][j][0]=(MC2[j]-MC1[j+1][0])*T[i][j+1][0]/MC1[j][0];
if((i>=0) && (i<=x1/dx) && (j>=0) && (j<=y1/dy))
{
SE1[i][j]=Tf-T[i][j][0];
if((SE1[i][j]>0) && (DTR[i][j]>0)) T[i][j][0]=solidificar(i,j);
}
}

/*del ciclo for para i*/
}

void Inicializa()

```

```

{
  int k;

  for(i=0;i<=(x1/dx);i++)
  {
    for(j=0;j<=(y1/dy);j++)
    {
      T[i][j][0]=Tc;
    }
  }

  DTF=(DHf)/(Cpml);

  for(i=0;i<=(x1/dx);i++)
  {
    for(j=0;j<=(y1/dy);j++)
    {
      DTR[i][j]=DTF;
    }
  }

  for(i=0;i<=x2/dx;i++)
  {
    for(k=0;k<=x2/dx;k++)
    {
      MC1[k][i]=0;
    }
    MC2[i]=0;
  }
}

void temparena()
{
  for(i=(1+(x1/dx));i<=(x2/dx);i++)
  {
    for(j=0;j<=(y2/dy);j++)
    {
      T[i][j][0]=Tos;
    }
  }

  for(i=0;i<=(x1/dx);i++)
  {
    for(j=(1+(y1/dy));j<=(y2/dy);j++)
    {
      T[i][j][0]=Tos;
    }
  }
}

void imprimir(float ta,float Tr,float TA)
{
  printf("\nTiempo acumulado=%f\nTiempo de residencia=%f\nTA=%f",ta,Tr,TA);
}

```

```

for(j=0;j<=(y2/dy);j++)
{
printf("\n");
for(i=0;i<=(x2/dx);i++)
{
printf("%-7.1f,T(i)(j)0);
}
}
}

float entrada()
{
float res;

printf("\n\tDIMENSIONES DEL CANAL DE FLUJO Y AREA DE ARENA ADYACENTE");
printf("\n\tbx1 (m) = ");
scanf("%f",&x1);
/*do{
printf("\tb2 (m, múltiplo de x1) = ");
scanf("%f",&x2);
/* res=fmod(x2,x1);*/
/*while(res!=0); */
printf("\nty1 (m) = ");
scanf("%f",&y1);
/*do{
printf("\ty2 (m, múltiplo de y1) = ");
scanf("%f",&y2);
/* res=fmod(y2,y1);*/
/*while(res!=0);*/
printf("\n\tDelta x (m, múltiplo o submúltiplo de x1) = ");
scanf("%f",&dx);
printf("\n\tDelta y (m, múltiplo o submúltiplo de y1) = ");
scanf("%f",&dy);
dx=x1*dx/(x1-fmod(x1,dx));
dy=y1*dy/(y1-fmod(y1,dy));
printf("\n\tDelta x adecuado mas proximo: %f, dx);
printf("\n\tDelta y adecuado mas proximo: %f, dy);
printf("\n\tTemperatura de colada = ");
scanf("%f",&Tc);
printf("\n\tTemperatura de la arena = ");
scanf("%f",&Tos);
printf("\n\tDelta t (seg) = ");
scanf("%f",&dt);
return(dt);
}

main()
{

float ta=0,Tr,TA=0,V,dt1,fst,fstl;
int Lf=0,k;

clrscr();

```

```

for(i=0;i<10;i++)
{
    for(j=0;j<10;j++)
    {
        for(k=0;k<2;k++)
        {
            T(i,j,k)=25;
        }
    }
}

dt1=entrada();

printf("\n\Fracción sólida de paro: ");
scanf("%f",&fat1);

inicializa();

temparena();

do
{
    Lf=Lf+1;
    /*Aquí se realiza el calculo de la velocidad*/
    V=(-1.090673144+0.00248131204*Tc)*pow((Lf-2.6+.004*Tc),(-
1.20130262159+0.0010972901217*Tc));
    Tr=0.01V;
    printf("\nTr=%f\TV=%f",Tr,V);

    do
    {
        TA=TA+dt;
        if(TA>=Tr)
        {
            dt=Tr-(TA-dt1);
            TA=TA-dt1+dt;
        }

        ta=ta+dt;
        barridox();
        barridoy();
        circscr();
        imprimir(ta,Tr,TA);
        printf("\n\WfL=%d",Lf);

    }while(TA<Tr);

    dt=dt1;
    TA=0;
    if(DTR[x1/dx][y1/dy]>0) temparena();
    fat=0;
}

```



```

/*while(resi=0);*/
printf("\n\nDelta x (m, multiplo o submultiplo de x1) = ");
scanf("%f", &dx);
printf("\n\nDelta y (m, multiplo o submultiplo de y1) = ");
scanf("%f", &dy);
dx=x1*dx/(x1-fmod(x1,dx));
dy=y1*dy/(y1-fmod(y1,dy));
printf("\n\nDelta x adecuado mas proximo: %f",dx);
printf("\n\nDelta y adecuado mas proximo: %f",dy);
printf("\n\nTemperatura de fusión (°C)= ");
scanf("%f",&Tf);
printf("\n\nSobrecalentamiento (°C)= ");
scanf("%f",&DT);
printf("\n\nTemperatura de la arena = ");
scanf("%f",&Tos);
printf("\n\nDelta t (seg) = ");
scanf("%f",&dt);
return(dt);
}

```

Uso del mismo perfil de velocidades que para aluminio puro, pero adaptándolo al sobrecalentamiento sobre la temperatura de fusión de la aleación Al-Si eutéctica (580 °C):

```

/*Aqui se realiza el calculo de la velocidad*/
V=(-1.090673144+0.00248131204*(660+DT))*pow((Lf-2.6+.004*(660+DT)),(-
1.20130262159+0.0010972901217*(660+DT)));

```