UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

GABRIELA ARIAS VALDES

ACATLAN, ESTADO DE MEXICO 1995

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA
PROGRAMA DE ACTUARIA Y M.A.C.

SRITA. GABRIELA ARIAS VALDES
Alumna de la carrera de Actuaría
P r e s e n t e .

Por acuerdo a su solicitud presentada con fecha 25 de noviembre de 1994, me complace notificarle que esta Jefatura tuvo a bien asignarle el siguiente tema de Tesis: "Introducción a la Teoría de la Credibilidad", el cual se desarrollará como sigue:

INTRODUCCION
CAP. I La teoría de la Credibilidad.
CAP. II Elementos Básicos.
CAP. III El modelo matemático de teoría de Credibilidad.
CAP. IV Credibilidad Exácta.
CAP. V Modelos de Credibilidad de Buhlman.
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.
BIBLIOGRAFIA.

Asimismo, fué designado como Asesor del Trabajo el ACT. MARIO ARRIAGA PARRA, Profesor de esta Escuela.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá presentar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar Examen Profesional, así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejamplares de la Tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la misma.

E.N.E.P. ACATLAN

A T E N T A
"POR MI RAZA ... EL ESPIRITU"
Acatlán, Edo ... eptiembre 19 de 1995.

JEFATURA DE ...

ACT. LAURA ... BECERRA
Jefe del ...ama de Actuaría
y M.A.C.

cg'

A ti, Señor, por manifestarte en cada momento de mi vida

A mis papás

por su apoyo, ejemplo, consejos
y sobre todo por su gran amor

A mis hermanos

porque sé que siempre
están a mi lado

A Oliver

por tu motivación, confianza y cariño

A todos mis amigos

Al Act. Mario Arriaga Parra
por su orientación, tiempo y apoyo.

Al Dr. Wojciech Szatzschneider Smigielska
por su dedicación, paciencia y sugerencias

Al M. C. José Eduardo Gabriel Godoy Escoto
por sus sabios consejos

A todos los profesores
que desde el inicio han colaborado
con su valiosa enseñanza

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA CREDIBILIDAD

1995

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Dentro del campo profesional del área de la licenciatura en Actuaría se ha observado que existe la necesidad de desarrollar un sistema de trato personalizado en el cálculo de las primas, que permita la reducción o aumento de éstas, a efecto de que sean correspondientes al riesgo real de cada asegurado, y así producir una situación atractiva para la captación de un mayor número de contratantes.

Por tal motivo se requirió investigar si existía algún sistema o teoría que pudiera ser utilizado para satisfacer esta necesidad. En Estados Unidos de América, durante la segunda década de este siglo comenzó a desarrollarse una teoría para el cálculo de las primas de trabajo. En éstas se manejaba una prima correspondiente al sector a que pertenecía cada trabajador y otra calculada de acuerdo con su experiencia; el peso que se le otorgaba a cada prima estaba determinado por un llamado factor de credibilidad, de tal forma que la suma del peso de las primas fijaba la aportación óptima.

Esta teoría, llamada Teoría de la Credibilidad, es la más aceptable para la solución del problema de asignación de primas, obteniéndose así una cartera más sana. Por lo que el objetivo principal del presente trabajo es el proporcionar una introducción a la Teoría de la Credibilidad explicando por qué ésta lleva a un sistema de asignación de primas más justo.

Para el desarrollo y comprensión de este tema se requiere de los conocimientos de Seguro de Daños, Seguro de Vida, Cálculo Actuarial, Cálculo Diferencial e Integral, Probabilidad y Estadística.

El capítulo I se refiere a los orígenes de la Teoría de la Credibilidad, resaltando la necesidad de que ésta sea utilizada en nuestros tiempos.

En el capítulo II se revisan conceptos de probabilidad y estadística así como también se da a conocer el concepto de Conjugadas; herramientas útiles en la Teoría de la Credibilidad.

El capítulo III presenta el modelo matemático que se utiliza en la Teoría de la Credibilidad.

En el capítulo IV se revisa el Teorema de Jewell, dada la importancia que éste representa en la Teoría de la Credibilidad.

En el capítulo V se exponen dos modelos matemáticos de la Teoría de la Credibilidad, el de Bühlmann y el de Bühlmann-Straub.

CAPÍTULO I

Teoría de la Credibilidad

Este capítulo se refiere a los orígenes de la Teoría de la Credibilidad y como ésta representa una solución a diferentes problemas.

1.1 Teoría de la Credibilidad: una solución para el problema que enfrentan las aseguradoras mexicanas

Uno de los principales problemas al que se enfrentan las compañías aseguradoras en México es la falta de interés y confianza de los asegurados, en la protección que se les brinda, que incluso se percibe en las mismas personas que integran el medio asegurador.

Este desinterés o desconfianza comienza cuando al sufrir el siniestro no obtienen toda la protección que su agente de seguros les había garantizado, con lo que se dan cuenta que no recibieron una información veraz y oportuna, dando por resultado que se sientan defraudados o engañados por parte de la compañía. Este sentimiento al ser transmitido a sus familiares, amigos o conocidos, donde pueden encontrar otras personas en una situación semejante, origina un pensamiento generalizado de rechazo y resentimiento hacia las compañías aseguradoras.

Esto no puede ser atribuido siempre de manera directa al agente, ya que también puede ser reflejo de una deficiente capacitación por parte de la aseguradora, toda vez que en la actualidad se les inculca un espíritu de superación basado en las ganancias económicas que pueden obtenerse a través de la venta, descuidando de manera involuntaria el conocimiento pleno del producto.

Sin embargo, se le puede imputar de manera directa al agente cuando, malentendiendo el sistema capitalista en que vivimos, considera dolosamente la venta de seguros como el gran negocio de su vida, utilizando como medio principal para la obtención de sus ganancias un análisis superficial, sin tomar en cuenta las necesidades reales de cada uno de sus clientes potenciales.

Otro de los problemas que se presentan en las aseguradoras es la gran deserción de sus clientes, la cual se debe principalmente a que los asegurados buscan una empresa que les ofrezca más por un menor costo y, de manera secundaria, la renuencia que con el paso del tiempo presentan los asegurados para continuar con el pago de una prima determinada que cubra un riesgo o eventualidad que, en su manera de pensar, consideran nunca llegará a darse.

Ahora bien, aquellas personas que contrataron un seguro, y que realizan sus pagos de manera puntual, aun privándose de otras cosas y tomando ciertas medidas que hagan que su índice de riesgo no aumente e inclusive disminuya, lo hacen pensando en que su economía se vería realmente afectada si llegase a ocurrir el siniestro; por lo que a través del tiempo consideran que se les debe de dar un trato preferencial.

Esta situación lleva a reconocer que el tarifar con el método de primas niveladas, para asegurados con cierta antigüedad, ya está fuera de la realidad, en el sentido de que el calcular una prima igual para todos los asegurados de una determinada cartera resulta injusto, ya que para aquellos a los que verdaderamente les corresponde una prima superior, debido a su alto índice de riesgo, les resulta favorable, pero actúa de manera contraria para los que están por debajo de ese índice.

Por lo tanto, una de las principales tareas de las aseguradoras, además de una verdadera capacitación a sus agentes y sin lugar a dudas un excelente servicio, es el que determinen tarifas preferenciales, para así ofrecer primas más bajas a aquellos asegurados que tengan un mejor comportamiento ante el riesgo, ya sea de acuerdo a ciertas características que presenten, como la instalación de diferentes tipos de alarmas, la capacitación de su gente, señalamientos, información, etcétera, o a otras disposiciones que influyen de manera significativa en la ocurrencia o no del riesgo; lo cual hace sea favorable para la empresa, en tanto que con este método se obtiene una cartera más sana.

La Teoría de la Credibilidad le hace frente a este problema, ya que con ésta se logra que una prima disminuya o aumente dependiendo de la negligencia o buen comportamiento del asegurado ante el riesgo al que está expuesto. Esta teoría da origen al diseño de diferentes modelos que proporcionan buenos estimadores para las primas de riesgo individuales.

1.2 La Teoría de la Credibilidad como solución para las carteras heterogéneas

Las carteras de una compañía aseguradora pueden clasificarse en homogéneas y heterogéneas. Estos términos se les otorgan en el sentido de que en las primeras el riesgo que se está cubriendo es de la misma naturaleza para todos los contratos, mientras que en las heterogéneas no ocurre así.

Cuando se habla de una cartera homogénea, las variables aleatorias que denotan las reclamaciones son independientes y tienen función de distribución conocida, por lo que es válido el aplicar la misma prima sobre todos los contratos que conformen dicha cartera. Ahora bien, si el riesgo a considerar difiere, lo que la mayoría de las veces ocurre, o se quieren tomar en cuenta ciertas características del asegurado, como su experiencia, que hacen que su riesgo no sea el mismo, lo que indica que se está hablando de una cartera heterogénea, entonces se tendrá que buscar otro método, diferente al de primas niveladas, para el cálculo de la prima.

Debe señalarse que, cuando las propiedades que se observan son similares, pero las distribuciones y los valores esperados de las reclamaciones difieren, también se estará hablando de carteras heterogéneas.

Al encontrarse uno con el problema de heterogeneidad, se puede proseguir a asociar riesgos con propiedades similares en un subgrupo "homogéneo", pero en este caso, una prima nivelada no es conveniente para la determinación de una prima de riesgo individual, debido a que una prima nivelada implica que la distribución del riesgo es conocida, y en pequeñas subclases la experiencia de reclamaciones que se tiene no es suficientemente confiable para estimar las características de la función de distribución.

Se observa, con ello, que para calcular primas preferenciales, es necesario el considerar ciertas características propias del asegurado, las cuales harán que las carteras sean heterogéneas, por lo que la determinación de estas tarifas a través del método de primas niveladas debe ser descartado.

La Teoría de la Credibilidad es una técnica que sirve para determinar las primas de seguro de aquellos contratos que pertenezcan a una cartera heterogénea, en caso de que la experiencia de reclamaciones de cada contrato sea pequeña o irregular, pero la experiencia de la cartera sea extensa. Se dice que credibilidad es el arte y la ciencia de usar ambos tipos de experiencia para ajustar las primas de seguro y mejorar su precisión.

1.3 Orígenes de la Teoría de la Credibilidad

Años antes de la Primera Guerra Mundial, en Estados Unidos de América surgió en el seguro contra accidentes de trabajo la fórmula general:

$$C = (1-z)B + zA$$

donde:

A = prima de una compañía.

B = prima de su sector industrial, es decir para una clase ocupacional particular.

z = factor de credibilidad de experiencia individual de la compañía. Con $0 \leq z \leq 1$.

Esta fórmula fue propuesta por Whitney, con la cual pretendió lograr un balance C entre los dos extremos A, que representa la prima individual y B, factor que indica la prima colectiva. Observando z se tiene que :

- Cuando z = 0, la prima individual es igual a la prima colectiva, lo cual es aceptable, como ya se ha mencionado, sólo para carteras homogéneas mas no para las heterogéneas.

- Cuando z = 1, se toma en cuenta solamente la experiencia propia de cada compañía, es decir, la experiencia individual, y esta información en general es escasa y limitada, por lo que este estimador en la práctica no sería usado. De hecho, si no se tuvo ninguna reclamación en esa compañía o se hablase de compañías nuevas, este estimador sería completamente inadecuado.

Es por ello que el factor de credibilidad "z" juega un papel muy importante ya que como se observa, "z" expresa el peso asignado a la experiencia individual; ante esto, Bühlmann propone que el factor de credibilidad esté expresado por:

$$z = \frac{at}{s^2 + at}$$

donde:

t = período de la observación. $t \in \mathbb{N}$

a = parámetro que refleja la heterogeneidad de la cartera, es decir, indica el grado de "solidaridad" entre los diferentes grupos. $a > 0$.

s^2 = medida total de la variabilidad del resultado.

Observando el factor de credibilidad se tiene:

- Si $t \to \infty$, $\Rightarrow z \to 1$. Esto es, cuando existe más experiencia se puede tener mayor confianza sobre las primas de riesgo individuales.

- Si $a = 0$, $\Rightarrow z = 0$. Cuando no hay heterogeneidad de la cartera, el mejor estimador lineal para la prima de riesgo, será la media de las reclamaciones de toda la cartera.

- Si $a \to \infty$, $\Rightarrow z \to 1$. En este caso el resultado de la colectividad no contiene información que refleje el comportamiento del riesgo individual específico.

- Si $s^2 \rightarrow \infty$, $\Rightarrow z \rightarrow 0$. Cuando la variable de experiencia de las reclamaciones con un parámetro de riesgo fijo refleja un alto grado de variabilidad, la información individual no servirá para hacer una buena estimación de la prima de tarifa.

CAPITULO II

Elementos Básicos

2.1 Variables Aleatorias y Funciones de Distribución

Antes de proseguir con Teoría de la Credibilidad, es necesario revisar ciertas propiedades y la terminología de variables aleatorias y de funciones de distribución; con lo que se debe estar familiarizado para un mejor entendimiento y comprensión de los modelos que se presentarán en los próximos capítulos.

Para ello, se empezará con la definición de variable aleatoria.

Al realizar un experimento ε se pueden obtener diferentes resultados, al conjunto de todos los posibles resultados se le llama espacio muestral. A la función que asocia, a cada resultado del experimento ε, un número real se le llama variable aleatoria.

Definición 2.1. Sea un experimento ε y S el espacio muestral asociado con el experimento. Sea $X = X(s)$ la función que asigna un número real a cada uno de los resultados $s \in S$. A la función X se le llama *variable aleatoria.*

Definición 2.2. Cuando la variable aleatoria solamente puede tomar un número finito o numerable de valores se le llama *variable aleatoria discreta.*

Definición 2.3. Una *variable aleatoria continua* es aquella que puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo a lo largo de una línea recta.

Una variable aleatoria muy útil, dentro de esta revisión es la función indicadora I_X la cual se define a continuación.

Definición 2.4. La *función indicadora de X, I_x* está definida sobre todos los puntos $s \in S$ por :

$$I_x(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in X \\ 0 & \text{si } s \notin X \end{cases}$$

La probabilidad de que al realizar un experimento, X tome el valor de x, esto es que $P(X = x)$, se obtiene precisamente sumando las probabilidades de todos los puntos de S que tienen asignados el valor x.

Definición 2.5. La *función de probabilidad* para X es una función, denotada por $p_X(x)$, de una variable real x y se define como:

$$p_X(x) = P(X = x)$$

para toda x real.

Las propiedades de una función de probabilidad son:

(1) $p_X(x) \geq 0$. Para toda x,

(2) $\sum_{x_i \in I_X} p_X(x_i) = 1$

En ocasiones es de mayor provecho el conocer la probabilidad de que al realizar un experimento la variable aleatoria X arroje valores no mayores o iguales a x, más que por obtener un valor específico. Por ejemplo, una compañía de seguros está interesada en saber la probabilidad de que al ocurrir un siniestro el monto de la reclamación sea superior, o menor o igual al total del deducible, mas no en que sea igual a éste. Por lo que $P(X > x)$, o su complemento $P(X \leq x)$, serían las funciones convenientes, y no $P(X = x)$. Estas probabilidades se pueden conocer a través de la función de distribución.

Definición 2.6. La *función de distribución* para una variable aleatoria X, denotada por $F_X(s)$, es una función de una variable s tal que

(1) el dominio de definición de F_X es la línea completa de los reales,

(2) para toda s real $F_X(s) = P(X \leq s)$.

La función de distribución para una variable aleatoria discreta está expresada por:

$$F_X(s) = \sum_{x \leq s} p_X(x).$$

Las propiedades de una función de distribución son:

(1) $0 \leq F_X(s) \leq 1,$

(2) $\lim_{s \to -\infty} F_X(s) = 0, \qquad \lim_{s \to +\infty} F_X(s) = 1,$

(3) $F_X(s_1) \leq F_X(s_2)$, para toda $s_1 \leq s_2$,

(4) $\lim_{h \to 0} F_X(s+h) = F_X(s)$, para toda $s \in S$, en que $h > 0$.

Para revisar la función de distribución de una variable aleatoria continua es necesario conocer la función de densidad de probabilidad.

Definición 2.7. La *función de densidad de probabilidad* para una variable aleatoria continua Y, denotada por $f_Y(y)$, es una función de una variable real y, tal que:

(1) el dominio de f_Y es la línea completa de los reales, y

(2) para todo número real s

$$F_Y(s) = \int_{\operatorname{Inf} I_Y}^{s} f_Y(y)\, dy,$$

por lo que

$$f_Y(s) = \frac{dF_Y(s)}{ds}.$$

Otro aspecto importante es el conocer el valor promedio o valor esperado de la variable aleatoria X. Por ejemplo, en una compañía aseguradora o en aquellas que están relacionadas con la incertidumbre, el saber el promedio del monto de reclamaciones que se puede tener es de vital importancia; es por esto que a continuación se hará un repaso sobre los valores esperados.

Definición 2.8. Para una variable aleatoria discreta X, su *valor esperado* se define como:

$$E[X] = \sum_{x \in I_X} x\, p_X(x).$$

donde $p_X(x)$ es la función de probabilidad de la variable X.

Definición 2.9. Para una variable aleatoria continua X, su *valor esperado* se define como:

$$E[X] = \int_{\mathrm{Inf\,Ix}}^{\mathrm{Sup\,Ix}} x \ f_X(x)dx.$$

donde $f_X(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable X.

Siempre y cuando ambas sumas existan.

El valor esperado de X elevado a una potencia entera se conoce como el momento de la distribución de X.

Definición 2.10. El *m-ésimo momento* de la variable aleatoria discreta X es:

$$E[X^m] = \sum_{x_i \in \mathrm{Ix}} x_i^m \ p_X(x_i).$$

Para variables aleatorias continuas, el *m-ésimo momento* está dado por:

$$E[X^m] = \int_{\mathrm{Inf\,Ix}}^{\mathrm{Sup\,Ix}} x^m f_X(x)\,dx$$

Además del valor esperado de una variable, existe una medida de dispersión, misma que es de gran utilidad para definir de una manera más precisa la distribución de una variable aleatoria. Esta medida es llamada variancia.

Definición 2.11. Sea X una variable aleatoria. La *variancia* de X, denotada por $V(X) = \sigma^2$ se define como sigue

$$V(X) = E[X^2] - E^2[X].$$

En la mayoría de los casos prácticos se trabaja con más de una variable aleatoria a la vez, es decir, al realizar un experimento el interés puede estar basado en dos o más observaciones, por lo que es muy importante revisar el comportamiento de variables aleatorias bidimensionales.

Definición 2.12. Sea un experimento ε y S el espacio muestral asociado con el experimento. Sean $X = X(s)$ y $Y = Y(s)$ dos funciones que asignan un número real a cada uno de los resultados $s \in S$. A (X,Y) se le llama *variable aleatoria bidimensional*.

Análogamente al caso de variables aleatorias unidimensionales, se revisarán las definiciones de algunas funciones y sus propiedades.

Definición 2.13. (a) Sea (X,Y) una variable aleatoria discreta bidimensional. Con cada resultado posible (x_i, y_j) se asocia un número $p(x_i, y_j)$ que representa $P(X=x_i, Y=y_j)$ y que satisface las condiciones siguientes:

(1) $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x,y),

(2) $$\sum_{y_j \in I_y} \sum_{x_i \in I_x} p(x_i, y_j) = 1.$$

La función p definida para todo (x_i, y_j) en el recorrido de (X,Y) se llama *función de probabilidad conjunta* de (X,Y) .

(b) Sea (X,Y) una variable aleatoria continua que toma todos los valores en una región R del plano euclidiano. La *función de densidad de probabilidades conjuntas* f es una función que satisface las siguientes condiciones:

(3) $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in R$,

(4) $$\int_{\mathrm{Inf}\, I_x}^{\mathrm{Sup}\, I_x} \int_{\mathrm{Inf}\, I_y}^{\mathrm{Sup}\, I_y} f(x,y)\, dydx = 1.$$

Definición 2.14. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional. La *función de distribución* (f.d.a.) $F_{X,Y}$ (x, y) de la variable aleatoria bidimensional (X,Y) está definida por:

$$F_{X,Y}\ (x,y) = P\ (X \leq x, Y \leq y)$$

para todos los pares reales (x,y).

Si F es la f.d.a. de una variable aleatoria bidimensional con función de densidad de probabilidad (f.d.p.) conjunta f, entonces

$$f(x,y) = \frac{\delta^2\ F(x,y)}{\delta x\, \delta y}.$$

En ciertos casos se desea saber la probabilidad de que $X = x$ cuando $Y = y$, o a la inversa, la probabilidad de que $Y = y$ dado que $X = x$. A las funciones que nos proporcionan dicha información se les llama función de probabilidad condicional de X y Y respectivamente.

Definición 2.15. Para el caso discreto se tiene que la *función de probabilidad marginal* para X y Y están dadas por:

$$P(x) = \sum_{y \in Iy} P(x,y) \quad \text{y} \quad P(y) = \sum_{x \in Ix} P(x,y)$$

respectivamente.

Definición 2.16. En el caso continuo; sea f la función densidad de probabilidades conjunta de la variable aleatoria continua bidimensional (X,Y). Se define g y h como las *funciones de densidad de probabilidades marginales* de X y Y, respectivamente como sigue:

$$g(x) = \int_{\text{Inf Iy}}^{\text{Sup Iy}} f(x,y)dy; \qquad h(y) = \int_{\text{Inf Ix}}^{\text{Sup Ix}} f(x,y)dx.$$

Definición 2.17. Sea (X,Y) una variable bidimensional discreta con función de probabilidad conjunta P(x,y). Sean P(x) y P(y) las funciones de probabilidad marginales de X y Y respectivamente. La *función de probabilidad condicional* de X para Y = y dada, está definida por

$$P(x\backslash y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$

con P(y) > 0.

La *función de probabilidad condicional* de Y para una X = x dada se define como:

$$P(y\backslash x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}$$

con P(x) > 0.

Definición 2.18. Sea (X,Y) una variable bidimensional continua con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$. Sean $g(x)$ y $h(y)$ las funciones de densidad de probabilidad marginales de X y Y respectivamente. La *función de densidad de probabilidad condicional* para X dado $Y = y$, está definida por

$$f(x \backslash y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$$

con $h(y) > 0$.

La *función de probabilidad de densidad condicional* de Y para una $X = x$ dada se define como:

$$f(y \backslash x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$$

con $g(x) > 0$.

Las funciones condicionales anteriores satisfacen todas las exigencias de una f.d.p. unidimensional.

Una propiedad que se presenta entre las variables es la dependencia o independencia entre ellas, esto es, en ocasiones para que ocurra X es necesario que suceda Y o a la inversa, en este caso se diría que X y Y son variables aleatorias dependientes. También puede ser que no necesariamente tiene que ocurrir Y para que X se presente, si así sucede entonces, X y Y serán variables aleatorias

independientes. Por ejemplo, para que la cobertura de gastos médicos, en un seguro de automóviles, sea reclamada es necesario que haya ocurrido el accidente automovilístico.

Definición 2.19. (a) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Se dice que X y Y son variables aleatorias *independientes* si y sólo si $p(x_i, y_j) = p(x_i)\, p(y_j)$ para todo i y j. Esto es,

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)\, P(Y = y_j),$$

para todo i y j.

(b) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional continua. Se dice que X y Y son variables aleatorias *independientes* si y sólo si $f(x,y) = g(x)h(y)$ para todo (x,y), en donde f es la f.d.p. conjunta, y g y h son las f.d.p. marginales de X y Y respectivamente.

Definición 2.20. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional; ρ_{XY}, es el *coeficiente de correlación*, entre X y Y, y se define como sigue:

$$\rho_{XY} = \frac{E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}}{[V(X)\,V(Y)]^{1/2}}.$$

Definición 2.21. El numerador de ρ_{XY} se denota como σ_{XY} o Cov(X,Y) y se le llama *covariancia* entre X y Y.

$$\text{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = E\{[X-E(Y)][Y-E(X)]\} = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Es conveniente hacer notar que si X y Y son independientes entonces, Cov(X,Y) = 0, puesto que se tendría:

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0.$$

Definición 2.22. (a) Si (X,Y) es una variable aleatoria discreta bidimensional, la *esperanza condicional* de X para Y = y se define como:

$$E(X \backslash y) = \sum_{X_i \in Ix} x_i \; p(x_i \backslash y).$$

(a) Si (X,Y) es una variable aleatoria continua bidimensional, se define la *esperanza condicional* de X para Y = y dado como:

$$E(X \backslash y) = \int_{\text{Inf } Ix}^{\text{Sup } Ix} x \; f(x \backslash y)dx.$$

La esperanza condicional de Y para X = x dado se define análogamente.

Si X y Y son variables aleatorias independientes. Entonces:

$$E(X \backslash y) = E(X) \quad \text{y} \quad E(Y \backslash x) = E(Y).$$

2.2 Conjugadas

2.2.1 Distribución a priori

Para estimar el valor de un parámetro desconocido Θ existen métodos clásicos, como por ejemplo el de momentos o el de máxima verosimilitud; en estos procedimientos basta con los datos de la muestra para lograr una estimación de Θ, de hecho si existiese más información no se emplearía es estos métodos. En caso de que puedan utilizarse datos adicionales con relación al valor del parámetro desconocido, para formar una distribución a priori para el parámetro Θ, entonces se pueden usar los métodos Bayesianos para estimar Θ.

Esto quiere decir que con la inferencia estadística se busca el determinar, con base en los valores de X_i , la región donde se encuentra Θ, pero en muchos casos se puede pensar que es más probable cierta región de Ω que otra para los valores de Θ. Es decir, incluso antes de obtener los datos se puede tener conocimiento o experiencia previa que indique posibles valores o regiones en donde Θ se puede encontrar.

Lo anterior puede representarse en términos de distribuciones de probabilidad de Θ. A esta distribución de probabilidad se le conoce como ***distribución a priori de*** **Θ**, $(\xi(\Theta))$.

2.2.2 Distribución a posteriori

Suponer que t variables aleatorias $X_1,...,X_t$ forman una muestra aleatoria de una distribución para la cual su f.d.p. es $f(x \backslash \theta)$ y que el valor de Θ es desconocido con f.d.p. a priori $\xi(\Theta)$.

La f.d.p. conjunta de $X_1,...,X_t$ es:

$$f(x_1,\ldots,x_t \backslash \theta) = f(x_1 \backslash \theta)\ldots f(x_t \backslash \theta) = f(\underline{x} \backslash \theta),$$

y la f.d.p. conjunta de $X_1,...,X_t$, Θ es:

$$f(\underline{x} \backslash \theta)\xi(\Theta)$$

de dimensión t+1.

La distribución marginal de $\underline{x}$ puede obtenerse integrando esta f.d.p. conjunta sobre todos los valores posibles de Θ

$$g(\underline{x}) = \int_{\Omega} f(\underline{x} \backslash \theta)\xi(\Theta)\, d\theta.$$

La f.d.p. condicional de Θ dado $X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t$ es:

$$\xi(\Theta \backslash \underline{x}) = \frac{[f(\underline{x} \backslash \theta)\xi(\Theta)]}{[g(\underline{x})]}$$

para $\Theta \in \Omega$,

$\xi(\Theta \backslash \underline{x})$ es la distribución *a posteriori* de Θ.

Si la distribución a posteriori $\xi(\Theta \backslash \underline{x})$ pertenece a la misma familia que la distribución a priori $\xi(\Theta)$, entonces se dice que $\xi(\Theta)$ y $\xi(\Theta \backslash \underline{x})$ son *conjugadas*.

Teorema 2.1 Suponer que $X_1, \ldots, X_t$ es una muestra aleatoria de una distribución Exponencial con parámetro desconocido Θ. Suponer que la distribución a priori de Θ es Gamma con parámetros $t_0 + 1$ y x_0 tales que $t_0 + 1 > 0$ y $x_0 > 0$. Entonces la distribución a posteriori de Θ cuando $X_i = x_i$ ($i = 1, \ldots, t$) es una Gamma con parámetros $t_0 + t$ y $x_0 + \Sigma x_i$.

Demostración:

$$f(x \backslash \theta) = \theta \, [\exp(-\theta x)]$$

donde $x, \theta > 0$

$$f(x_1, \ldots, x_t \backslash \theta) = \theta^t \, [\exp(-\theta \Sigma x_i)]$$

y como la distribución a priori de Θ es :

$$\xi(\Theta) = \frac{[\theta^{t_0} \exp(-\theta\ x_0)\, x_0^{t_0+1}]}{\Gamma(t_0+1)}$$

$$= \frac{\theta^{t_0} \exp(-\theta\ x_0)}{C(t_0, x_0)}$$

donde:

$$C(t_0, x_0) = \frac{\Gamma(t_0+1)}{x_0^{t_0+1}}$$

entonces,

$$f(\underline{x} \backslash \theta)\xi(\Theta) = \frac{[\theta^{t} \exp(-\theta \Sigma x_i)]\,[\theta^{t_0} \exp(-\theta\ x_0)]}{C(t_0, x_0)}$$

así, la f.d.p. condicional de Θ dado $X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t$ es:

$$\xi(\Theta \backslash \underline{x}) = \frac{[\theta^{t} \exp(-\theta \Sigma x_i)]\,[\theta^{t_0} \exp(-\theta\ x_0)] / [C(t_0, x_0)]}{\int [\theta^{t} \exp(-\theta \Sigma x_i)]\,[\theta^{t_0} \exp(-\theta\ x_0)] / [C(t_0, x_0)]\, d\theta}$$

$$= \frac{\theta^{t+t_0} \exp[-\theta (\Sigma x_i + x_0)]}{\int \theta^{t+t_0} \exp[\theta(\Sigma x_i + x_0)] \, d\theta}$$

multiplicando y dividiendo por una constante *C* tal que

$$C = \frac{\Gamma(t_0 + t + 1)}{(x_0 + \Sigma x_i)^{t+t_0+1}}$$

$$= C(t+t_0, x_0 + \Sigma x_i)$$

se obtiene que

$$\xi(\Theta \backslash \underline{x}) = \frac{\theta^{t+t_0} \exp[-\theta(\Sigma x_i + x_0)]}{C(t+t_0, x_0 + \Sigma x_i)}$$

por lo tanto $\xi(\Theta \backslash \underline{x})$ es la distribución *a posteriori* de Θ, la cual se distribuye como una Gamma con parámetros $t + t_0$ y $x_0 + \Sigma x_i$ por lo que $\xi(\Theta)$ y $\xi(\Theta \backslash \underline{x})$ son conjugadas.

■

CAPÍTULO III

El Modelo Matemático de la Teoría de la Credibilidad

3.1 Resultados Preliminares

En la Teoría de la Credibilidad el primer paso a seguir es el determinar las características de los asegurados que hacen precisamente que el riesgo difiera y que influyen en la prima; para ello pueden emplearse métodos estadísticos como: Componentes Principales, Discriminación y Clasificación. De esta manera la cartera estaría dividida en distintos contratos. Un ejemplo es el separar la cartera de automóviles en contratos basados ya sea en el color, tamaño, la edad del conductor o el tipo de alarma, claro está, con un previo análisis de que dichos factores intervienen en el riesgo, además de que cada uno proporciona una información particular.

Desafortunadamente, también existen ciertas propiedades que afectan directamente, pero que no están a nuestro alcance o no pueden ser observables. Retomando el ejemplo, en el seguro de automóviles no todos los conductores tienen la misma habilidad o cuidado para manejar, características que influyen demasiado para que ocurra o no el siniestro, pero que al mismo tiempo no pueden observarse. Es por ello que también se considera la experiencia de las reclamaciones pasadas, ya que puede ser una gran representación entre lo observable y lo no observable, es decir la experiencia propia es capaz de reflejar gran parte de esas características "escondidas".

Entonces, se define a Θ_{js} como el parámetro que expresa las características de riesgo del contrato j en el período s, donde j = 1,...,k y s = 1,...,t. Por lo tanto, todas las diferencias existentes entre los contratos y períodos son causados por distintos parámetros Θ_{11}, Θ_{12} ,...,Θ_{kt} y es en este caso cuando la Teoría de la Credibilidad es aplicable; ya que de no ser así -esto es si fuesen iguales-, se hablaría de carteras homogéneas y, como se ha mencionado, la Teoría de la Credibilidad se aplica a carteras heterogéneas.

En casi todos los modelos de credibilidad se asume que los Θ_{js} son homogéneos en el tiempo, es decir son estacionarios, por lo que se considera entonces Θ_1, Θ_2 ,...,Θ_k .

Como se dijo anteriormente, en la realidad los Θ_j son desconocidos o no observables, por lo que se deben tratar de estimar lo más confiables posible, buscando obtener primas de credibilidad exactas. Por tal motivo, estos parámetros se considerarán variables aleatorias. Para ello se empleará la notación utilizada por Bühlmann y se denotará como U(θ) la función de distribución de estas variables, U(θ) es llamada también función de estructura. Como puede observarse los contratos serán parecidos, puesto que los parámetros de riesgo Θ_j, de todos los contratos, tienen la misma función de estructura U(θ) pero a la vez diferentes ya que el parámetro Θ_j no es el mismo para cada contrato j.

Ahora, sean X_{js} variables aleatorias que indican la experiencia de las reclamaciones. Generalmente se interpretan estas variables como la reclamación media en el periodo s, pero se les pueden dar otras interpretaciones, por ejemplo dos de ellas son: severidad o tamaño de la reclamación y frecuencia de la reclamación.

Para una mayor comprensión, lo anterior se expresa en la siguiente matriz:

	contrato			
	$j=1$	$j=2$	...	$j=k$
variable de estructura	Θ_1	Θ_2	...	Θ_k
período				
$s=1$	X_{11}	X_{21}	...	X_{k1}
2	X_{12}	X_{22}	...	X_{k2}
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
t	X_{1t}	X_{2t}	...	X_{kt}

Lo que indica que el contrato j está descrito por el vector

$$(\Theta_j, X_{j1}, \ldots, X_{jt}) = (\Theta_j, X_j).$$

Para el modelo matemático se considera X para un contrato y un período fijos.

Sea $s = 1$ y supóngase que $U(\theta)$ es conocida.

$f(x\backslash\theta)$ es la función de densidad que describe el monto de reclamación para un contrato con parámetro de riesgo $\Theta = \theta$; entonces se calcula la función de densidad $f(x)$, para un contrato de la cartera elegido al azar.

Por lo que,

$$f(x) = \int_{\Theta} f(x\backslash\theta)\, dU(\theta).$$

En el caso discreto, significa que la probabilidad del monto de la reclamación x, $P(X = x)$, es igual a la suma, sobre todos los contratos, de las probabilidades condicionales de un monto de reclamación x ($p(x\backslash\Theta = \theta_j)$) multiplicado por el volumen (peso) del contrato ($p(\Theta = \theta_j)$).

Siendo así que la probabilidad de que el monto de reclamación sea menor o igual a y está dado por:

$$F(y) = \int_{\text{Inf Ix}}^{y} f(x)\, dx.$$

Entonces, la prima colectiva, es decir, de toda la cartera sin importar el parámetro de riesgo Θ, está dada por la esperanza del monto de la reclamación, que se expresa de la siguiente manera:

$$E[X] = \int_{\text{Inf Ix}}^{\text{Sup Ix}} x\, f(x)\, dx$$

y la prima del contrato, considerando riesgos distintos, se obtiene mediante

$$E[X \backslash \Theta] = \int_{\text{Inf Ix}}^{\text{Sup Ix}} x\, f(x \backslash \theta)\, dx.$$

Antes de proseguir se revisarán dos lemas y un corolario para la demostración de covariancias que serán de gran utilidad para el modelo.

Lema 3.1. $E[X] = E[E(X\backslash\Theta)]$.

Demostración:

Sea

$$\Psi(\Theta) = E(X\backslash\Theta=\theta) = \int_x x\, f(x\backslash\theta)\, dx,$$

como $\Psi(\Theta)$ es una variable aleatoria y la función de distribución de Θ es $U(\theta)$ se tiene

$$E[\Psi(\Theta)] = \int_\Omega E(X\backslash\Theta)\, dU(\theta) = \int_\Omega \left[\int_x x\, f(x\backslash\theta)\, dx\right] dU(\theta)$$

por el teorema de Fubini se llega a

$$\int_x x \left[\int_\Omega f(x\backslash\theta)\, dU(\theta)\right] dx = \int_x x\, f(x)\, dx = E[X]$$

■

Lema 3.2. Fijando un contrato se considera $X_1, \ldots, X_t$ observados en t periodos, en tal caso

$$Cov(X_r, X_s) = E[Cov(X_r, X_s\backslash\Theta)] + Cov[E(X_r\backslash\Theta), E(X_s\backslash\Theta)]$$

Demostración:

Se sabe que

$$\mathrm{Cov}(X_r, X_s) = E\{[X_r - E(X_r)][X_s - E(X_s)]\}$$

$$= E(X_r X_s) - E(X_r)E(X_s).$$

y

$$\mathrm{Cov}(X_r, X_s \backslash \Theta=\theta) = E(X_r X_s \backslash \Theta=\theta) - E(X_r \backslash \Theta=\theta)E(X_s \backslash \Theta=\theta)$$

entonces,

$$E[\mathrm{Cov}(X_r, X_s \backslash \Theta)] = E[E(X_r X_s \backslash \Theta) - E(X_r \backslash \Theta)E(X_s \backslash \Theta)]$$

por el lema 3.1.,

$$= E(X_r X_s) - E[\, E(X_r \backslash \Theta)E(X_s \backslash \Theta)\,] \qquad (1)$$

Por otro lado, se tiene que

$$\mathrm{Cov}\,[E(X_r \backslash \Theta), E(X_s \backslash \Theta)]$$

$$= E[\, E(X_r\backslash\Theta)\, E(X_s\backslash\Theta)\,] - E[\, E(X_r\backslash\Theta)\,]\, E[\, E(X_s\backslash\Theta)\,]$$

por el lema 3.1.,

$$= E[\, E(X_r\backslash\Theta) E(X_s\backslash\Theta)\,] - E(X_r)E(X_s) \qquad (2)$$

sumando (1) + (2)

$$E[\, Cov\,(X_r, X_s\backslash\Theta)\,] + Cov\,[E(X_r\backslash\Theta), E(X_s\backslash\Theta)]$$

$$= E(X_r X_s) - E[\, E(X_r\backslash\Theta)\, E(X_s\backslash\Theta)\,]$$

$$+ E[\, E(X_r\backslash\Theta)\, E(X_s\backslash\Theta)\,] - E(X_r)E(X_s)$$

$$= E(X_r X_s) - E(X_r)E(X_s)$$

$$= Cov\,(X_r, X_s)$$

con lo que se obtiene el resultado deseado;

$$E[Cov(X_r, X_s\backslash\Theta)] + Cov[E(X_r\backslash\Theta), E(X_s\backslash\Theta)] = Cov(X_r, X_s)$$

■

Corolario $V(X) = E[V(X \backslash \Theta)] + V[E(X \backslash \Theta)]$

Demostración:

$$V(X_r) = Cov(X_r, X_r)$$

por el lema 3.2,

$$= E[Cov(X_r, X_r \backslash \Theta)] + Cov[E(X_r \backslash \Theta), E(X_r \backslash \Theta)]$$

$$= E[V(X_r \backslash \Theta)] + V[E(X_r \backslash \Theta)]$$

por lo tanto

$$V(X) = E[V(X \backslash \Theta)] + V[E(X \backslash \Theta)]$$

$\blacksquare$

Retomando el modelo, éste supone:

***i*) $X_1, \ldots, X_t$ condicionalmente independientes dado Θ.**

***ii*) $E(X_r \backslash \Theta) = E(X_s \backslash \Theta)$ y $V(X_r \backslash \Theta) = V(X_s \backslash \Theta)$ para toda r, s.**

Con la siguiente parametrización:

$$\mu(\Theta) = E(X_r \backslash \Theta),$$

$$m = E[\mu(\Theta)] = E(X_r),$$

$$a = V[\mu(\Theta)] = V[E(X_r \backslash \Theta)],$$

$$s^2 = E[\,V(X_r \backslash \Theta)\,].$$

donde:

$\mu(\Theta)$ indica la prima media de riesgo del contrato.

m denota la prima media del colectivo de riesgo (cartera). O sea, el promedio ponderado de las primas de riesgo individuales.

a mide la dispersión de la prima media de riesgo individual, es decir indica la heterogeneidad dentro de la cartera.

s^2 representa la medida global de la dispersión total existente entre los datos de toda la cartera. Esto es, mide la dispersión de las reclamaciones, ponderada por el colectivo.

Es interesante observar los comportamientos que las variables tendrían entre sí. Se tiene, entonces, que:

3.1.1. $\operatorname{Cov}(X_r, X_s) = a$ para $r \neq s$

$\operatorname{Cov}(X_r, X_s) = V(X_s) = a + s^2$ para $r = s$

Demostración:

Por el lema 3.2.,

$$Cov\ (X_r, X_s) = E[Cov\ (X_r, X_s \backslash \Theta)] + Cov\ [E(X_r \backslash \Theta), E(X_s \backslash \Theta)]$$

pero como X_r es condicionalmente independiente dado Θ de X_s y ellas a su vez no dependen del año, entonces

$$= V[E(X_s \backslash \Theta)] = a$$

por otro lado si r es igual a s se tiene, por el corolario, que

$$V(X_s) = E[V(X_s \backslash \Theta)] + V[E(X_s \backslash \Theta)] = s^2 + a$$

■

Con esto se observa que, la covariancia entre las variables X_r y X_s cuando s y r son distintas, es igual precisamente a "a", ya que se estará hablando de la medida de heterogeneidad entre ambas. Si r es igual a s, entonces la variancia de la variable está determinada por "$a + s^2$".

3.1.2. $Cov\ (X_r, X_s \backslash \Theta) = 0$ para $r \neq s$

$$Cov\ (X_r, X_s \backslash \Theta) = V(X_s \backslash \Theta) = \sigma^2 (\Theta) \qquad \text{para } r = s$$

Demostración:

Como X_r y X_s son condicionalmente independientes dado Θ

$$\mathrm{Cov}\,(X_r, X_s \backslash \Theta) = 0$$

y

$$V(X_s \backslash \Theta) = \sigma^2(\Theta)$$

por definición.

■

Como se vio en la demostración anterior, la covariancia condicional entre las variables X_r y X_s, para r diferente de s, es nula, lo cual se debe a que las variables son condicionalmente independientes de Θ. Ahora bien, mientras que cuando r y s son iguales se está refiriendo a la variancia muestral.

3.1.3. $\mathrm{Cov}\,[\mu(\Theta), X_r] = V[\mu(\Theta)] = a$

Demostración:

$$\mathrm{Cov}\,[\mu(\Theta), X_r] = \mathrm{Cov}\,[E(X_r \backslash \Theta), X_r]$$

por el lema 3.2.,

$$= E\,\{\,\mathrm{Cov}\,[E(X_r \backslash \Theta), X_r \backslash \Theta]\,\} + \mathrm{Cov}\,\{\,E[E(X_r \backslash \Theta) \backslash \Theta], E(X_r \backslash \Theta)\}$$

$$= E[0] + Cov[E(X_t\backslash\Theta), E(X_t\backslash\Theta)] = V[E(X_t\backslash\Theta)] = V[\mu\ (\Theta)] = a$$

■

Con lo cual se tiene que, la covariancia que existe entre la prima media de riesgo del contrato y la variable X_t expresa el grado de heterogeneidad "a".

3.2 Modelo de Credibilidad Lineal de Bühlmann

Las siguientes hipótesis fueron propuestas por Bühlmann para este modelo.

1. Dado Θ las $X_1,\ldots,X_t$ son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con $f(x\backslash\theta)$ conocida.

2. $E(X^2) < \infty$, es decir es finita.

3. La función de estructura $U(\theta)$ es conocida.

Estas hipótesis son más fuertes que las analizadas previamente.

Es importante señalar que en la práctica la hipótesis 2 siempre se cumple, sin ocurrir lo mismo con la 3.

Como lo que se desea es calcular primas preferenciales, entonces el problema consiste en hallar un estimador de $\mu\ (\Theta)$, o sea, la prima de riesgo del contrato.

Solución:

Bajo las hipótesis (1) y (3) se puede calcular el valor exacto de:

$$\mu(\Theta) = E(X_t \backslash \Theta = \theta)$$

sin tener que recurrir a la estimación estadística.

Sea $g(x_1,\ldots,x_t)$ el mejor estimador, basado en las observaciones de las reclamaciones pasadas.

Se minimiza una función de pérdida cuadrática g tal que:

$$\rho(g) = E\{[\mu(\Theta) - g(x_1, x_2, \ldots, x_t)]^2\} \text{ es mínima,}$$

y la esperanza del g óptimo que minimiza la función de pérdida cuadrática es:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_t)^* = E[\mu(\Theta) \backslash x_1, x_2, \ldots, x_t]$$

al cual se le llama estimador a posteriori de Bayes. Siendo éste el estimador de credibilidad exacta.

Bühlmann comenta que aunque g^* es precisamente el valor exacto de $\mu(\Theta)$ cuando $f(x\backslash\theta)$ y $U(\theta)$ son conocidas, no puede aplicarse, ya que en la práctica es difícil que dichas funciones se conozcan, y en caso de que $U(\theta)$ y $f(x\backslash\theta)$ se conociesen, los cálculos para integrar $g(x_1, \ldots, x_t)^*$ resultarían bastante complicados. Para evitar este tipo de problemas Bühlmann propuso restringir el espacio de los estimadores g^* a funciones lineales de $x_1, \ldots, x_t$.

$$g(x_1, \ldots, x_t) = C_0 + \sum_{s=1}^{t} C_s X_s$$

Ahora el nuevo problema de estimación es:

$$\rho \; [C_0, C_1, \ldots, C_t] = E\{ [\mu(\Theta) - C_0 - \sum_{s=1}^{t} C_s \; X_s]^2 \}$$

Igualando a cero y calculando la primera derivada parcial con respecto a los coeficientes se obtiene un sistema lineal de $t+1$ ecuaciones

$$E[\mu(\Theta) - C_0 - \sum_{s=1}^{t} C_s \; X_s] = 0 \qquad (1)$$

y

$$E\{ X_r [\mu(\Theta) - C_0 - \sum_{s=1}^{t} C_s X_s] \} = 0 \quad \text{para } r = 1,\ldots,t \qquad (2)$$

multiplicando (1) por $E(X_r)$ y restándoselo a (2) se obtiene

$$E[X_r]\, E[\mu(\Theta) - C_0 - \sum_{s=1}^{t} C_s X_s] - E\{X_r [\mu(\Theta) - C_0 - \sum_{s=1}^{t} C_s X_s]\}$$

$$= E[X_r]\, E[\mu(\Theta)] - E[X_r]\, E[C_0] - E[X_r]\, E[\sum_{s=1}^{t} C_s X_s]$$

$$- E[X_r\, \mu(\Theta)] + E[X_r C_0] + E[X_r \sum_{s=1}^{t} C_s X_s]$$

$$= E[X_r]\, E[\mu(\Theta)] - C_0\, E[X_r] - \sum_{s=1}^{t} C_s\, E[X_s] E[X_r]$$

$$- E[X_r\, \mu(\Theta)] + C_0\, E[X_r] + \sum_{s=1}^{t} C_s\, E[X_r X_s]$$

$$= E[X_r]\, E[\mu(\Theta)] - \sum_{s=1}^{t} C_s\, E[X_s]\, E[X_r] - E[X_r\, \mu(\Theta)] + \sum_{s=1}^{t} C_s\, E[X_r X_s]$$

$$= E[X_r]E[\mu(\Theta)] - E[X_r \mu(\Theta)] - \sum_{s=1}^{t} C_s \; E[X_s]E[X_r] + \sum_{s=1}^{t} C_s \; E[X_r X_s]$$

$$= - \mathrm{Cov}\,[X_r, \mu(\Theta)] + \sum_{s=1}^{t} C_s \; \{ E[X_r X_s] - E[X_r]E[X_s] \}$$

$$= - \mathrm{Cov}\,[X_r, \mu(\Theta)] + \sum_{s=1}^{t} C_s \; \mathrm{Cov}\,[X_r, X_s]$$

por lo que

$$\mathrm{Cov}\,[X_r, \; \mu(\Theta)] = \sum_{s=1}^{t} C_s \; \mathrm{Cov}\,[X_r, X_s]$$

con $r = 1, \ldots, t.$

por 3.1.3., y 3.1.1., se tiene que

$$a = \sum_{s=1}^{t} C_s \; (at + s^2)$$

y la solución es:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_t = C = \frac{a}{s^2 + at} = \frac{z}{t}$$

como

$$z = \frac{at}{s^2 + at}$$

y

$$m = E[\,\mu(\Theta)\,] = E(X_r)$$

entonces, por (1) se tiene

$$C_0 = \left(1 - \sum_{s=1}^{t} C_s\right) m$$

luego,

$$C_0 = (1 - z)\, m$$

siendo así,

$$C_0 = \frac{m\, s^2}{(s^2 + at)} = (1 - z)\, m$$

por lo tanto, la prima de riesgo del contrato es decir, el estimador lineal de credibilidad es:

$$g(x_1,\ldots,x_t)^* = (1\text{-}z)m + z\bar{X} = M^*$$

donde:

$$\bar{X} = (\sum_{s=1} X_s)/t$$

Al observar el factor de credibilidad $z = at/(s^2 + at)$ se tiene lo siguiente:

1. Si $t \rightarrow \infty$, $\Rightarrow z \rightarrow 1$. O sea, cuando se tiene mucha experiencia, ya que se adquiere a través del tiempo, se tiene un factor de credibilidad de 1, lo que conduce a una prima individual.

2. Si $a=0$, $\Rightarrow z=0$. Cuando no existe heterogeneidad dentro de la cartera, se empleará entonces el método de primas niveladas.

3. Si $a \rightarrow \infty$, $\Rightarrow z \rightarrow 1$. Si se habla de riesgos distintos puesto que no hay homogeneidad en la cartera, entonces se debe tomar en cuenta una prima particular para cada contrato.

4. Si $s^2 \rightarrow \infty$, $\Rightarrow z \rightarrow 1$. Cuando la variancia de toda la cartera tiende a ser demasiado grande, es decir si existe mucha dispersión de datos de toda la cartera, entonces se deberán calcular primas especiales para cada contrato.

Como se observa, la Teoría de la Credibilidad, además de otorgarnos ciertos métodos para el cálculo de primas, nos da gran información sobre el comportamiento de la cartera, en cuanto a su heterogeneidad.

CAPÍTULO IV

Credibilidad Exacta

4.1 Teorema de Jewell y la Credibilidad Exacta

Para ciertas selecciones de $f(x\backslash\theta)$ y $U(\theta)$ el cálculo de la prima de credibilidad exacta de Bühlmann, definida por

$$g(x_1,\ldots,x_t)^* = E[\mu(\Theta)\backslash x_1,\ldots,x_2],$$

se facilita.

Cuando para algunos f y U el estimador lineal M^* coincide con el valor exacto de g^*, se dice que ocurre la credibilidad exacta.

Jewell comprobó que la credibilidad exacta sucede si f y U son conjugadas, en particular para la familia exponencial (con parámetro unidimensional).

Teorema de Jewell

Para la familia exponencial

$$f(x \backslash \theta) = \frac{[p(x) \exp(-\theta x)]}{q(\theta)}$$

con $x \in X$ se tiene que:

i) **La conjugada de $f(x \backslash \theta)$ es**

$$U(\theta) = \frac{q(\theta)^{-t_0} e^{-x_0 \theta}}{C(t_0, x_0)}$$

con $\theta \in \Theta$

para $t_0 = s^2/a$ y $x_0 = mt_0$

donde:

$$C(t_0, x_0) = \frac{\Gamma(t_0 + 1)}{x_0^{t_0+1}}$$

ii) **$\overline{x} = \sum_{i=1}^{t} (x_i / t)$ es un estadístico suficiente para θ,**

iii) **Ocurre la credibilidad exacta.**

Demostración:

i) **se tiene que ver que la distribución a priori U(θ) pertenece a la misma familia que la distribución a posteriori U(θ \x₁ ,...,xₜ).**

$$U(\theta \backslash x_1,\ldots,x_t) = \frac{f(x_1 \backslash \theta)\ldots f(x_t \backslash \theta)\, U(\theta)}{\int f(x_1 \backslash \theta)\ldots f(x_t \backslash \theta)\, U(\theta) d\theta}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{t} [p(x_i)\exp(-\theta x_i)/q(\theta)]\,[q(\theta)^{-t_0}\exp(-x_0\theta)/C(t_0,x_0)]}{\int_{\Omega} \prod_{i=1}^{t} [p(x_i)\exp(-\theta x_i)/q(\theta)]\,[q(\theta)^{-t_0}\exp(-x_0\theta)/C(t_0,x_0)]\, d\theta}$$

$$= \frac{\exp[-\theta(\Sigma x_i + x_0)]\, q(\theta)^{-(t_0+t)}}{\int_{\Omega} \exp[-\theta(\Sigma x_i + x_0)]\, q(\theta)^{-(t_0+t)}\, d\theta}$$

multiplicando y dividiendo por una constante C tal que

$$C = C(t_0 + t,\ x_0 + \Sigma x_i)$$

se obtiene

$$= \frac{\exp[-\theta\,(\Sigma x_i + x_0)]\, q(\theta)^{-(t_0+t)}}{C(t_0 + t,\ x_0 + \Sigma x_i)}$$

Como se observa la distribución a posteriori pertenece a la familia Exponencial con parámetros $\Sigma x_i + x_0$ y $t_0 + t$. Por lo tanto la conjugada de $f(x\backslash\theta)$ es la distribución a priori $U(\theta)$ la cual pertenece a la misma familia que $U(\theta\backslash x_1,\ldots,x_t)$.

ii) Para verificar la suficiencia de $\bar{x}$, se utilizará el teorema de Neyman.

Teorema

Y es suficiente para Θ si existen funciones g y h tales que

$$f(x_1,\ldots,x_t\backslash\theta) = g(y\backslash\theta)\, h(x_1,\ldots,x_t)$$

donde h no es función de Θ.

Aquí,

$$f(x_1,\ldots,x_t \backslash \theta) = [\prod_{i=1}^{t} p(x_i)] \exp(-\theta \sum_{i=1}^{t} x_i)\, q(\theta)^{-t}$$

lo que puede factorizarse de la siguiente manera:

$$[q(\theta)^{-t} \exp(-\theta\, t\, \bar{x})]\, [\prod_{i=1}^{t} p(x_i)]$$

donde:

$$[q(\theta)^{-t} \exp(-\theta\, t\, \bar{x})] = g(\bar{x} \backslash \theta)$$

y

$$[\prod_{i=1}^{t} p(x_i)] = h(x_1,\ldots,x_t)$$

por lo que $\bar{x}$ es suficiente para Θ.

iii) **Una solución es calcular directamente la esperanza a posteriori de $\mu(\Theta)$ y ver que es igual a $(1\text{-}z)\, m + z\, \bar{X}$.**

Como

$$f(x\backslash\theta) = \frac{p(x)\exp(-\theta x)}{q(\theta)}.$$

$x > 0 \quad y \quad \theta > 0$

entonces,

$$q(\theta) = \int_0^{\infty} p(x)\exp(-\theta x)\,dx$$

derivando con respecto a θ se obtiene que

$$q'(\theta) = -\int_0^{\infty} x\,p(x)\exp(-\theta x)\,dx$$

$$= -q(\theta) = -\int_0^{\infty} \{[x\,p(x)\exp(-\theta x)]/\,q(\theta)\}\,dx$$

$$= -q(\theta) = -\int_0^{\infty} x\,f(x\backslash\theta)\,dx = -\,q(\theta)\,E[X\backslash\Theta=\theta]$$

así

$$E[X\backslash\Theta=\theta\,] = \frac{-\,q'(\theta)}{q(\theta)}$$

calculando la derivada de $U(\theta)$ con respecto a θ se tiene:

$$U'(\theta) = \frac{d\,[q(\theta)^{-t_0} \exp(-\theta\, x_0)]}{[C(t_0, x_0)]d\theta}$$

$$= \frac{q(\theta)^{-t_0}(-x_0)\exp(-\theta\, x_0)}{C(t_0, x_0)}$$

$$+ \frac{[-t_0\, q(\theta)^{-t_0-1}\, q'(\theta)]\exp(-\theta\, x_0)}{C(t_0, x_0)}$$

factorizando se tiene

$$= \frac{q(\theta)^{-t_0} \exp(-\theta\, x_0)\,[-x_0 - t_0\, q(\theta)^{-1}\, q'(\theta)]}{C(t_0, x_0)}$$

$$= \frac{q(\theta)^{-t_0} \exp(-\theta x_0) \{-x_0 + t_0 E[X \backslash \Theta=\theta]\}}{C(t_0, x_0)}$$

$$= U(\theta)\,[-x_0 + t_0 E(X \backslash \Theta=\theta)]$$

como se sabe, la prima de riesgo es cuando $\Theta=\theta$,

$$\mu(\Theta) = E[X \backslash \Theta=\theta]$$

por lo tanto

$$U'(\theta) = U(\theta)\,[-x_0 + t_0 \mu(\Theta)]$$

ahora, integrando con respecto a θ sobre Ω y suponiendo que $U(\theta) = 0$ en la frontera de Ω

$$\int_{\Omega} U'(\theta)\, d\theta = 0$$

se obtiene

$$\int_0^{\infty} U(\theta)[t_0 \mu(\Theta) - x_0]\, d\theta = 0,$$

$$\int_0^{\infty} t_0 \mu(\Theta) U(\theta)\, d\theta = \int_0^{\infty} U(\theta) x_0\, d\theta,$$

$$t_0 \int_0^{\infty} \mu(\Theta) U(\theta) d\theta = x_0 \int_0^{\infty} U(\theta) d\theta$$

$$t_0 \; E[\mu(\Theta)] = x_0$$

por lo que

$$E[\mu(\Theta)] = \frac{x_0}{t_0} = m$$

por *i)* se cumple que

$$E[\mu(\Theta) \backslash x_1, ..., x_t] = \frac{x_0 + \Sigma x_i}{t_0 + t} \qquad (1)$$

Como ya se tiene que $x_0 = m\, t_0$ y $t_0 = s^2/a$ en la familia exponencial, se puede reescribir (1), la prima de credibilidad exacta, como:

$$E[\mu(\Theta) \backslash x_1, ..., x_t] = (1\text{-}z)m + z\bar{X}$$

$$\text{donde } z = \frac{at}{s^2 + at}$$

■

Ejemplo:

Calcular la prima exacta de credibilidad $E[\mu(\Theta)\backslash x_1, \ldots, x_t]$ para el modelo Exponencial/Gamma.

$$f(x\backslash\theta) = \theta \exp(-\theta x)$$

con $x>0$ y $\theta>0$

utilizando el teorema de Jewell, sea:

$$q(\theta) = \frac{1}{\theta} \quad y \quad p(x) = 1$$

se tiene

$$q(\theta) = \int_0^{\infty} \exp(-\theta x)\, dx$$

por lo que

$$\int_0^{\infty} \exp(-\theta x)\, dx = (1/\theta),$$

$$q'(\theta) = -1/\theta^2,$$

y

$$\mu(\Theta) = \frac{q'(\theta)}{-q(\theta)} = \frac{1}{\theta}$$

por lo tanto

$$m = E[\mu(\Theta)] = E[1/\theta]$$

$$a = V[\mu(\Theta)] = [1/\theta]$$

$$\sigma^2(\Theta) = -\mu'(\Theta) = -d(1/\theta) = (1/\theta^2)$$

entonces,

$$s^2 = E[1/\theta^2] = a + m^2$$

Ahora bien,

$$U(\theta) = \frac{\theta^{t_0} \exp(-\theta x_0)}{C(t_0, x_0)}$$

donde:

$$C(t_0, x_0) = \frac{\Gamma(t_0+1)}{x_0^{t_0+1}}$$

Calculando la primera derivada de U(θ) con respecto a θ se obtiene

$$U'(\theta) = \frac{t_0\,\theta^{t_0-1}\ \exp(-\theta x_0)\,d\theta\ - x_0\,\theta^{t_0}\exp(-\theta x_0)d\theta}{C(t_0, x_0)}$$

$$= \frac{\theta^{t_0}\exp(-\theta x_0)\,[(t_0/\theta) - x_0]d\theta}{C(t_0, x_0)}$$

$$= U(\theta)\,[t_0\mu(\Theta) - x_0]d\theta$$

integrando ambos lados

$$\int_{\Omega} U'(\theta)\,d\theta = \int_{\Omega} U(\theta)\,[t_0\mu(\Theta) - x_0]\,d\theta$$

suponiendo que U(θ) = 0 en la frontera de Ω

$$0 = t_0 \int_{\Omega} \mu(\Theta)\, U(\theta)\, d\theta \; - x_0 \int_{\Omega} U(\theta)\, d\theta$$

$$0 = t_0 \; E[\mu(\Theta)] - x_0$$

por lo tanto

$$E[\mu(\Theta)] = x_0 / t_0 = m$$

como ya se demostró en el capítulo II que son conjugadas, entonces la distribución a priori es de la misma familia que la a posteriori, pero esta última con distintos parámetros, entonces la prima exacta de credibilidad o el estimador lineal de credibilidad para el modelo Exponencial/Gamma es:

$$E[\mu(\Theta) \backslash x_1, \ldots, x_t] = \frac{x_0 + \sum x_i}{t_0 + t}$$

$$= (1-z)\, m + z\bar{X}$$

con $z = \dfrac{t}{t + t_0}$.

CAPÍTULO V

Modelos de Credibilidad de Bühlmann

Los métodos de Credibilidad a emplearse para el cálculo de primas dependen indiscutiblemente de la información que se posea y por supuesto de los intereses de cada compañía. En este capítulo se expone el Modelo Clásico de Bühlmann y el Modelo de Bühlmann-Straub, señalando la diferencia existente entre ambos. También se presenta un ejemplo numérico para cada método.

5.1 Modelo Clásico de Bühlmann

La credibilidad exacta de Bühlmann es aplicable cuando existe homogeneidad en el tiempo; es decir si las variables aleatorias X_{js} que representan los montos de las reclamaciones no se ven afectadas con el transcurso del tiempo. Además los contratos correspondientes deben tener el mismo número de participantes o igual volumen de prima. Si no cumple con lo anterior debe utilizarse otro modelo para la estimación de la prima.

En este modelo se tiene para cada contrato

$$(\Theta, X_{jr}, \ldots, X_{jt})' = (\Theta_j, \underline{x}_j)'$$

donde:

j = número de contrato; $j = 1,\ldots,k.$

r = período; $r = 1,\ldots,t.$

El modelo supone las siguientes hipótesis además de las ya propuestas en el modelo de credibilidad lineal y exacta de Bühlmann, visto en el capítulo III.

1. Los contratos son independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.).

2. Para cada contrato j las $X_{j1},\ldots,X_{jt}$ son condicionalmente i.i.d., dado Θ_j.

   Esta hipótesis indica la homogeneidad en el tiempo, así como la independencia dentro de los contratos.

En este modelo el estimador de credibilidad exacta es el mismo al que se vio en el capítulo III, o sea: $M^* = (1\text{-}z)m + \bar{x}\, m$. Como se sabe, los parámetros para este estimador son: m, s^2 y a, los cuales a su vez deben ser estimados, para ello necesitamos la siguiente parametrización:

$$M_j = (1/t) \sum_{r=1}^{t} X_{jr}$$

$$\mu(\Theta) = E(X_{jr} \backslash \Theta_j)$$

para toda r

$$m = E[X_{jr}] = E[\mu(\Theta)] = M_0 = (1/k)\sum_{j=1}^{k} M_j$$

la medida de heterogeneidad "a" está expresada como:

$$a = Var[\mu(\Theta_j)] = \{ [\sum_{j=1}^{k} (M_j - M_o)^2] / [k-1] \} - [s^2 / t]$$

y la variancia es igual a:

$$s^2 = E[\sigma^2(\Theta_j)] = [\sum_{j=1}^{k} \sum_{r=1}^{t} (X_{jr} - M_j)^2] [1/k(t-1)]$$

El estimador de credibilidad ajustado para $\mu(\Theta)$ es:

$$M^{*}_{j} = (1\text{-}z)M_{0} + zM_{j}$$

donde el factor de credibilidad z es:

$$z = \frac{at}{at + s^{2}}$$

Ejemplo numérico:

Para los datos de Hachemeister en los que se consideran observaciones durante 12 periodos de una cartera con 5 contratos, calcular las primas de credibilidad mediante el método de Bühlmann.

X_{jr}	j=1	j=2	j=3	j=4	k=5
r=1	1,738	1,364	1,759	1,223	1,456
2	1,642	1,408	1,685	1,146	1,499
3	1,794	1,597	1,479	1,010	1,609
4	2,051	1,444	1,763	1,257	1,741
5	2,079	1,342	1,674	1,426	1,482
6	2,234	1,675	2,103	1,532	1,572
7	2,032	1,470	1,502	1,953	1,606
8	2,035	1,448	1,622	1,123	1,735
9	2,115	1,464	1,828	1,343	1,607
10	2,262	1,831	2,155	1,243	1,573
11	2,267	1,612	2,233	1,762	1,613
12	2,517	1,471	2,059	1,306	1,690

En la actualidad, existen programas con los que rápidamente se calculan estas primas de credibilidad, no obstante a continuación se mostrará paso por paso el procedimiento, para tener una mayor comprensión y entendimiento del método.

$$M_0 = m = [\sum_{j=1}^{k=5} \sum_{r=1}^{t=12} X_{jr}] / (t\,k) = 1,671$$

Para j = 1

$$M_1 = (1/t) \sum_{r=1}^{t=12} X_{1r} = (1/12)\,(24,766) = 2,064$$

$$\sum_{r=1}^{t} [(X_{1r} - M_1)^2] = 676,642$$

$$(M_1 - M_0)^2 = (2,064 - 1,671)^2 = 154,305$$

$$[1/\{k(t-1)\}] \sum_{r=1}^{t} [(X_{1r} - M_1)^2]$$

$$= [1/55] \sum_{r=1}^{12} [(X_{1r} - 2{,}064)^2] = 12{,}303$$

De igual manera para j = 2, se tiene:

$$M_2 = 1{,}511$$

$$\sum_{r=1}^{12} [(X_{2r} - M_2)^2] = 221{,}617$$

$$(M_2 - M_0)^2 = 25{,}766$$

$$[1/55] \sum_{r=1}^{12} [(X_{2r} - 1{,}511)^2] = 4{,}029$$

Cuando j = 3

$$M_3 = 1{,}822$$

$$\sum_{r=1}^{12} [(X_{3r} - M_3)^2] = 723{,}148$$

$$(M_3 - M_0)^2 = 22,746$$

$$[1/55] \sum_{r=1}^{12} [(X_{3r} - 1,822)^2] = 13,148$$

para j = 4

$$M_4 = 1,360$$

$$\sum_{r=1}^{12} [(X_{4r} - M_4)^2] = 817,929$$

$$(M_4 - M_0)^2 = 96,524$$

$$[1/55] \sum_{r=1}^{12} [(X_{4r} - 1,360)^2] = 14,871$$

finalmente, para j = 5

$$M_5 = 1,599$$

$$\sum_{r=1}^{12} [(X_{5r} - M_5)^2] = 92{,}891$$

$$(M_5 - M_0)^2 = 5{,}247$$

$$[1/55] \sum_{r=1}^{12} [(X_{5r} - 1{,}599)^2] = 1{,}689$$

entonces,

$$s^2 = [1/\{k(t-1)\}] \sum_{r=1}^{t} \sum_{j=1}^{k} [(X_{jr} - M_j)^2]$$

$$= [1/55] \sum_{r=1}^{12} \sum_{j=1}^{5} [(X_{jr} - M_j)^2] = 46{,}040$$

$$a = [1/(k-1)] \sum_{j=1}^{k} [(M_j - M_0)^2] - [(1/t)s^2]$$

$$= [1/4]\sum_{j=1}^{5} [(M_j - 1,671)^2] - [46,040/12] = 72,310$$

$$z = at / (s^2 + at) = (72,310*12) / (46,040 + 867,720) = 0.94961$$

por lo tanto, los estimadores individuales para cada contrato j son:

$$M^*_j = (1-z)\,m + zM_j$$

$$M^*_1 = (1 - 0.94961)\,1,671 + 0.94961\,(2,064) = 2,044.04$$

$$M^*_2 = 1,518.59$$

$$M^*_3 = 1,814.23$$

$$M^*_4 = 1,375.99$$

$$M^*_5 = 1,602.23$$

Con estos resultados se observa que a los contratos 1 y 3 no les resultó favorable la estimación, debido a que la prima aumentó, lo cual se debe a que

realmente el riesgo es mayor del que se consideraba; sin embargo para los contratos 2, 4 y 5 les fue conveniente que se tomara en cuenta su propia experiencia, ya que la prima disminuyó notablemente.

5.2 Modelo de Bühlmann - Straub

El modelo de Bühlmann-Straub generaliza el modelo clásico de Bühlmann con la introducción de pesos (volúmenes), los cuales sí pueden variar en el tiempo. Estos pesos se refieren generalmente al número de contratos que están agrupados en un contrato promedio.

Supóngase que se tienen las siguientes primas:

1500, 1200, 1800, 1650 y 1300,

entonces la prima promedio es de 1,490 de un volumen o peso de 5 y para los cálculos ésta se tomará ya como la prima de un contrato con peso 5.

La notación empleada en este modelo es, además de la utilizada en el modelo clásico, la que se muestra a continuación:

j = número de contrato $\quad j = 1,2,\ldots,k.$

q = periodo $\quad q = 1,2,\ldots,t.$

w_{jt} = peso de un contrato j que puede variar a través del tiempo.

Se considera que el valor esperado del tamaño de las reclamaciones, expresado como una función del parámetro de riesgo Θ_j, es el mismo para todos los contratos. Y además del factor de pesos w, la variancia también es la misma función del parámetro de riesgo.

Así que las consideraciones del modelo Bühlmann-Straub pueden ser formuladas como:

1. $E[X_{jq} \backslash \Theta j] = \mu(\Theta)$

   $[Var[X jr \backslash \Theta_j] = \sigma^2 (\Theta_j)/ w_{jr}$ para toda $w_{jr} > 0$;

   $[Cov[X_{jr}, X_{jq} \backslash \Theta_j] = 0,$ $r \neq q$.

2. Los contratos j = 1,...,k son independientes.

   Las variables $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ están idénticamente distribuidas.

   Las observaciones X_{jr} tienen variancia finita.

La notación empleada en este modelo se presenta a continuación.

El número total de los contratos que realmente se está considerando es w..

$$w_{..} = \sum_{j=1}^{k} w_{j.} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{q=1}^{t} w_{jq} \ ;$$

El factor de credibilidad del contrato j es

$$z_j = \frac{a w_{j.}}{(s^2 + a w_{j.})} ;$$

z. representa el factor de credibilidad de toda la cartera

$$z. = \sum_{j=1}^{k} z_j$$

El promedio del monto de reclamación por siniestro que ocurra en el contrato j considerando el volumen o pesos está expresado como:

$$x_{jw} = \sum_{q=1}^{t} (w_{jq}/w_{j.}) X_{jq} ;$$

Mientras que el promedio del monto de la reclamación por siniestro en toda la cartera es

$$X_{ww} = \sum_{j=1}^{k} (w_{j.}/w..) X_{jw} ;$$

$$x_{zw} = \sum_{j=1}^{k} (z_j / z.)\, X_{jw},$$

Los estimadores lineales de credibilidad de $\mu(\Theta)$ son:

$$M^{a}{}_{j} = (1 - z_j)\, m + z_j\, X_{jw}$$

donde :

$$z_j = \frac{a w_{j.}}{a w_{j.} + s^2} \quad \text{y} \quad E(M^{a}{}_{j}) = m$$

$$E(X_{jw}) = E(X_{ww}) = E(X_{zw}) = m$$

Los estimadores insesgados de m, s^2 y a son:

$$m = x_{zw}$$

$$s^2 = \left[\sum_{j=1}^{k} \sum_{r=1}^{t} w_{jr} (x_{jr} - x_{jw})^2 \right] / [k(t-1)]$$

y

$$a = \{w_{..}\, [\sum_{j=1}^{k} w_{j.}\, (x_{jw} - x_{ww})^2 - (k-1)\, s^2]\} / \{w_{..}^2 - \sum_{j=1}^{k} w_{j.}^2]$$

Los estimadores lineales de credibilidad de $\mu(\theta)$ son:

$$M^a{}_j = (1 - z_j)\, x_{zw} + z_j\, x_{jw}$$

donde:

$$z_j = \frac{(a w_{j.})}{(a w_{j.} + s^2)}$$

Para el cálculo de m se necesita x_{zw}, por lo tanto también z_j ; pero el estimador de z_j depende de m, a y s^2, entonces éstos son pseudoestimadores - los cuales reciben el nombre de pseudoestimadores de Vylder-.

Ejemplo numérico:

Para los datos de Hachemeister dados en el ejemplo anterior calcular las primas de credibilidad mediante el método de Bühlmann-Straub, considerando los siguientes pesos:

W_{jr}	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	k = 5
r = 1	7,861	1,622	1,147	407	2,902
2	9,251	1,742	1,357	396	3,172
3	8,706	1,523	1,329	348	3,046
4	8,575	1,515	1,204	341	3,068
5	7,917	1,622	998	315	2,693
6	8,263	1,602	1,077	328	2,910
7	9,456	1,964	1,277	352	3,275
8	8,003	1,515	1,218	331	2,697
9	7,365	1,527	896	287	2,663
10	7,832	1,748	1,003	384	3,017
11	7,849	1,654	1,108	321	3,242
t=12	9,077	1,861	1,121	342	3,425

Estos pesos significan, por ejemplo, para el período 1 del contrato 1 que de 7,861 contratos se calculó la prima promedio y el resultado fue 1,738.

Al igual que en el ejemplo del Modelo Clásico de Bühlmann, se determinarán las primas paso por paso a través del método de Bühlmann-Straub.

$$W_{1.} = 100{,}156;\quad W_{2.} = 19{,}895;\quad W_{3.} = 13{,}735;$$

$$W_{4} = 4{,}152 \quad y \quad W_{5} = 36{,}110$$

por lo que

$$W_{..} = 174{,}047$$

como

$$x_{jw} = \sum_{q=1}^{12} (w_{jq}/w_{j.})X_{jq}\,;$$

entonces,

$$X_{1w} = 2{,}061$$

$$X_{2w} = 1{,}511$$

$$X_{3w} = 1,806$$

$$X_{4w} = 1,353$$

y

$$X_{5w} = 1,600$$

de acuerdo con

$$X_{ww} = \sum_{j=1}^{5} (w_{j.}/w_{..}) X_{jw} ;$$

se tiene que

$$X_{ww} = 1,865.$$

Por otro lado se observa que

$$s^2 = [1/\{k(t-1)\}][\sum_{j=1}^{5} W_{jr}(X_{jr}-X_{jw})^2]$$

$$= [1/55]\ [7,651'601,426] = 139'120,026$$

$$\left[\sum_{j=1}^{5} W_{j.}(X_{jw}-X_{ww})^2\right] = 10{,}010'143{,}322$$

y

$$\sum_{j=1}^{5} W_{j.}^2 = 11{,}936'656{,}479$$

entonces,

$$a = \frac{174{,}047\,[10{,}010'143{,}322 - (5-1)\,(139'120{,}026)]}{174{,}047^2 - 11{,}936'656{,}479}$$

$$= \frac{1.645381722\text{ E+15}}{1.835570174\text{ E+10}} = 89{,}639$$

y el factor de credibilidad para cada contrato es:

$$z_j = \frac{a\,w_{j.}}{s^2 + a\,w_j};$$

$$Z_1 = 0.98474$$

$$Z_2 = 0.92764$$

$$Z_3 = 0.8848$$

$$Z_4 = 0.72791$$

y

$$Z_5 = 0.95879$$

luego,

$$z_{.} = \sum_{j=1}^{5} z_j = 4.49755$$

$$X_{zw} = \sum_{j=1}^{k} (z_j/z_{.})\, X_{jw},$$

$$X_{1w} = 451$$

$$X_{2w} = 312$$

$$X_{3w} = 361$$

$$X_{4w} = 219$$

y

$$X_{5w} = 341.$$

por lo que,

$$m = \sum_{j=1}^{k} X_{zw} = 1{,}684$$

por lo tanto las primas son:

$$M^{a}_{j} = (1 - z_{j})\, m + z_{j}\; X_{jw}$$

$$M^{a}_{1} = (1 - 0.98474)\; 1{,}684 + 0.98474\; (2{,}061) = 2{,}055.17$$

$$M^{a}_{2} = 1{,}523.71$$

$$M^{a}_{3} = 1{,}793.44$$

$$M^{a}_{4} = 1{,}442.97$$

$$M^{a}_{5} = 1{,}603.29$$

Como se observa, al utilizar este método se tiene, al igual que con el modelo clásico de Bühlmann, que los portafolios favorecidos, por haber empleado características que representan el riesgo real que existe en ellos, son los contratos 2, 4 y 5.

Ahora, haciendo una comparación con los resultados obtenidos a través del modelo clásico de Bühlmann se nota que al considerar los pesos, es decir, la ponderación que toma en cuenta el volumen, las primas de los contratos 1, 2, 4 y 5 se incrementan, afectando más al contrato 4, pero la del 3 disminuye.

Conclusiones y Recomendaciones

El desarrollo de la Teoría de la Credibilidad sienta sus bases en el modelo clásico de Bühlmann, mismo que es mejorado con el llamado modelo de Bühlmann-Straub al introducir la ponderación de los promedios.

Sin embargo, también este modelo presenta limitaciones al requerir, por las características del riesgo, particiones o subdivisiones de una cartera que ya ha sido dividida en distintos contratos. Así, por ejemplo, en el ramo de automóviles, se debe hacer la distinción entre autos particulares y los de servicio público, en virtud de que esta característica está relacionada estrictamente con la ocurrencia del riesgo. Al aplicar el modelo de Bühlmann-Straub es necesario subdividir, a su vez esta clasificación.

Ante esta limitante surge el modelo jerárquico de Jewell, el cual subdivide en primer lugar a las subcarteras y posteriormente divide por contratos.

Consideré importante el hacer mención a este modelo debido al gran avance que representa éste para la determinación de primas más justas.

El modelo jerárquico de Jewell generaliza el modelo de Bühlmann-Straub tomando una cartera con dos o más niveles jerárquicos. La cartera se divide en subcarteras o sectores que compartan algunas características de riesgo.

Cada subcartera tiene su propio parámetro estructural Θ_p, $p = 1,..., P$ el cual explica las características comunes del riesgo.

Cada contrato del sector p tiene su variable de estructura Θ_{pj}, $j = 1,...,k_p$, con la misma distribución de Θ_p.

De cada período r resulta una observación X_{pjr} para cada contrato j del sector p, $r = 1,...,t_{pj}$.

Al igual que el modelo de Bühlmann-Straub, también se toman en cuenta los pesos w_{pjr}.

El modelo de Jewell resulta ser muy útil tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

1. En el ramo de incendio, suponiendo que existen diferencias intrínsecas entre los siguientes factores, puede dividirse la cartera primeramente en los sectores privado e industrial. Posteriormente se dividirá de acuerdo con la zona donde se encuentre el edificio y, por último, en el tipo de construcción y acabados.

2. Terremotos. La primer división es de acuerdo con la zona y luego con el tipo de construcción.

Este modelo es muy flexible en cuanto a la división por sectores, sólo se debe poner cuidado especial tanto en identificar bien la subdivisión como en comprobar que realmente dicha subdivisión sea significativa.

Con este modelo puede lograrse mayor homogeneidad dentro de sectores, por lo que las primas de credibilidad reflejan mejor el riesgo.

Al aplicar la Teoría de la Credibilidad, las tarifas se obtienen considerando tanto la experiencia individual como la colectiva, tomando en cuenta el peso de cada una de ellas de acuerdo con el riesgo real. El efecto de su aplicación consiste en originar que las primas de seguro aumenten o disminuyan, de acuerdo con la experiencia observada. Esto, a su vez, ocasiona una captación cada vez mayor de "buenos riesgos", por considerar tarifas preferenciales y por lo tanto se hace de éste un proceso sumamente deseable en la selección de riesgo.

Supóngase que la compañía "X" decide calcular las primas usando Teoría de la Credibilidad, mientras que "Y" y "Z" continúan con los métodos clásicos; los asegurados de "X" que han tenido un mal comportamiento, al darse cuenta que en otras compañías les ofrecen mejores tarifas se cambian a éstas, y los asegurados que pertenecen a "Y" y "Z" al saber que "X" les brinda una tarifa personalizada, que premia el buen comportamiento, se van a "X". Al transcurrir un tiempo, la compañía "X" tendrá una cartera más sana, al mismo tiempo que "Y" y "Z" tendrán más reclamaciones, lo que hará que estas últimas estén prácticamente forzadas a utilizar la Teoría de la Credibilidad. Como consecuencia los asegurados se preocuparán por tener un mejor comportamiento en cuanto al riesgo que corren,

es decir, tratarán de evitar que el siniestro ocurra, reduciendo la probabilidad de riesgo.

Los métodos de la Teoría de la Credibilidad pueden utilizarse a su vez para proporcionar información sobre la homogeneidad o heterogeneidad que existe dentro de la cartera.

Con el presente trabajo se espera haber despertado el interés al lector sobre esta teoría para que con ello la conozca más y se dé cuenta de la riqueza que existe en ella; y así coopere al logro de un avance importante en sectores como el asegurador y financiero, particularmente en México.

BIBLIOGRAFÍA

TEXTOS

DeGroot, Morris H. [1970]: "Optimal Statistical Decisions"; McGraw-Hill.

Goovaerts - Kaas - Van Heerwaarden - Bauwelinckx. [1990]: "Effective Actuarial Methods"; Insurance Series Volume 3. North-Holland.

Larson, Harol J.[1992]: "Introducción a la Teoría de Probabilidades e Inferencia Estadística"; LIMUSA. México.

Meyer. [1990]: "Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas"; Addison-Wesley Iberoamericana.

Ostle, B. [1992]: "Estadística Aplicada"; LIMUSA. México.

ARTÍCULOS

Arjas Elja [1988]: "The Claims Reserving Problem in Non-Life Insurance: Some Structural Ideas"; University of Oulu, Finland, Astin Bulletin, vol. 19, No.2, pp 139-152.

Jewell, W. S. [1974]: "Credible means are exact Bayesian for exponential families"; University of California, Berkeley and Teknekron, Inc., Astin Bulletin, vol. 8, pp 77-90.

Jewell, W. S. [1974]: "The Credible Distribution"; Astin Bulletin, vol. 7, pp 237-269.

Philbrick, Sthephen W. [1981]: "An Examination of Credibility Concept"; Proceedings of the Casualty Actuarial Society. LXVI, pp 195-219.