FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS. U. N. A. M.

TESIS DE MAESTRÍA en Filosofía

LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA OBRA TARDÍA DE WITTGENSTEIN

José Jorge
J MAX FERNÁNDEZ DE CASTRO TAPIA

FALLA DE ORIGEN

ASESOR: DR. CARLOS ÁLVAREZ J.

AGOSTO 1995

A la memoria de Horacio Fernández de Castro Tapia

I N D I C E

INTRODUCCION

Nadie pondria en duda que la crisis de los fundamentos de las matemáticas trajo consigo un desarrollo técnico considerable en esta disciplina. Fue un estímulo constante al florecimiento de la lógica formal que de ser una ciencia más o menos ajena al resto de la matemática, pasó a incorporarse a esta como una herramienta de gran valor heurístico. No ocurrió lo mismo con los estudios en filosofía delas matemáticas. El logicismo se convirtió en una empresa inverosímil cuando Russell remarcó que el axioma de reducibilidad distaba mucho de enunciar una verdad evidente de la lógica. Solamente algunos miembros del Círculo de Viena ignoraron este revés. El intuicionismo nunca gozó del consenso en la comunidad matemática pues sus métodos, basados en criterios hasta cierto punto ajenos a la misma, no permitían recuperar todo el análisis clásico. El formalismo propuso un programa que transformaba la cuestión de los fundamentos en un problema estrictamente matemático. Gödel demostró en 1930 la imposibilidad de resolverlo de manera positiva. Desde entonces la matemática ha evolucionado mucho ofreciendo al pensamiento filosófico problemas que hacen obsoletos, o por lo menos dignos de revisión, los viejos marcos instaurados por esas escuelas. Baste señalar como ejemplo las demostraciones hechas por computadora, que parecen introducir un elemento empírico en el ámbito de lo a priori. En contraste con esta complejidad, como ha señalado Goodman, el logicismo, el intuicionismo y el platonismo resultan una sobresimplificacion de lo que realmente pasa en matemáticas. Imaginemos, por ejemplo, que el programa formalista hubiese tenido éxito y que, dados los recursos desplegados por el teorema de Gödel, la aritmética formal contuviese una garantía interna de su propia consistencia, ¿es que eso habria validado sus premisas filosóficos? Muchas cuestiones seguirían planteándose sobre la naturaleza del saber matemático o de su extraordinaria fecundidad en las ciencias de la naturaleza.

Antes estas preguntas la filosofía de Wittgenstein nos presenta una perspectiva novedosa. Considerada durante mucho tiempo como la parte menos coherente o valiosa de su obra, los muchos fragmentos que el filósofo austríaco dedicó a las matemáticas han gozado recientemente de una interpretación que arroja nueva luz sobre su contenido. Hasta hace poco se les leía desde una perspectiva epistemológica, principalmente como si propusieran cierto tipo de escepticismo. Aunado a ello se les ha supuesto como una defensa de una posición revisionista, es decir, de una posición normativa, que recomienda una cierta dirección al desarrollo matemático en detrimento del resto. Afortunadamente muchos de los manuscritos de Wittgenstein han sido publicados en los últimos años, lo que ha permitido ofrecer nuevas directivas de interpretación que dan mayor coherencia a su obra.

Este estudio se propone examinar la novedosa perspectiva que ofrece el pensamiento de W en este dominio, así como de las dificultades a que se enfrenta. Parte del supuesto de que la exégesis más justa concede al autor de las *Investigaciones Filosóficas* el carácter gramatical de su observaciones, en consonancia con lo tantas veces expresado en ellas. Dummett recomienda una reserva en la lectura de manuscritos cuya publicación no estaba aprobada por su autor. Es cierto también que otros fragmentos de esa obra tan compleja aguardan aún la hora en que verán la luz pública. Pero como dice Borges, un hombre se confunde gradualmente con sus circunstancias. Para nosotros el pensamiento de Wittgenstein es el que aparece en sus textos publicados y es en ellos que haremos el ejercicio de la exégesis filosófica. Tampoco en ese sentido hay nada oculto.

Si bien una de nuestras premisas es que el pensamiento de Wittgenstein respecto a las matemáticas es una puesta en marcha de las partes más fundamentales de su filosofía, la dificultad de la empresa que aquí acometemos nos llevó a restringirnos a un periodo muy particular. Nuestro objeto de estudio será el lapso que cronológicamente va desde el regreso de Wittgenstein a Cambridge hasta 1945, pero que es posterior, desde el punto de vista lógico, a sus consideraciones sobre la regla. Estas empiezan a tomar forma en 1934. Dejamos de lado el espinoso problema de explicar la coherencia del pensamiento wittgensteiniano en su periodo verificacionista. Sin embargo, hemos utilizado en abundancia material que proviene de esa época cuando lo consideramos acorde con el que se expresa en textos posteriores.

Creemos que la lectura de los escritos de Wittgenstein dedicados a las matemáticas, desligada de un estudio del resto de su obra en este periodo, conduce a una fácil incomprensión de sus ideas. Ello nos ha obligado a realizar en el primer capítulo una exposición, breve y esquemática, de una de las grandes líneas de su pensamiento, a saber, el tratamiento del problema de la regla. Así hemos seguido el hilo que el propio Wittgenstein propuso alguna vez, cuando después del parágrafo 188 de las *Investigaciones Filosóficas* escribió las que ahora son las páginas iniciales de las *Observaciones Sobre los Fundamentos de la Matemática*. Esperamos que este orden de exposición quede justificado al mostrar la unidad interna de una obra filosófica dispersa en tantos manuscritos. El segundo capítulo explora las consecuencias de estas consideraciones sobre la noción de prueba. Allí también estudiamos el concepto de gramática como una explicación a la naturaleza del saber matemático y de su aplicabilidad en asuntos prácticos de la vida. El siguiente capítulo examina dos características que -de acuerdo a Wittgenstein- toda prueba matemática tiene, a saber, la de ser abarcable y la de dotar de sentido al teorema correspondiente. La penúltima sección de nuestro estudio se consagra a la emergencia del infinito en las matemáticas, en particular en la obra de G. Cantor; a los problemas filosóficos a que da lugar y a la propuesta de Wittgenstein a este respecto. El quinto capítulo trata del programa formalista de Hilbert y de la posición del autor de las *Investigaciones Filosóficas* ante las tentativas de fundamentar la matemática.

El autor agradece al Dr. Carlos Alvarez J. su generosa paciencia y valiosa guía, y a la Universidad Autónoma Metropolitana (Iztapalapa) por el apoyo que brinda a sus profesores. Asimismo a los doctores Salma Saab, Isabel Cabrera, Yolanda Torres y Santiago Ramírez, por las sugerencias que hicieron para mejorar este trabajo.

CAPITULO I

EL PROBLEMA DE SEGUIR UNA REGLA

Comenzaremos tratando de explicar por qué Wittgenstein se ocupa tanto del problema de los fundamentos de las matemáticas y de otros análogos. Es de sobra conocido que desde su regreso a Cambridge hasta mediados de la década de los años cuarenta dedicó mucho tiempo a esos temas. Prueba de ello son las extensas secciones con que culminan tanto los *Philosophical Remarks* como el *Gran Mecanograma*, obras que condensan su pensamiento en el periodo intermedio y que comienzan con consideraciones sobre el lenguaje, y transitan súbitamente a las cuestiones relacionadas con las matemáticas. Creemos que la razón principal para ello se halla tanto en su concepción de su propia labor filosófica como encaminada a la disolución de los falsos problemas de la filosofía tradicional, como en la idea de que las matemáticas son fuente continua de tales confusiones.

"Ninguna confesión religiosa ha pecado tanto por el mal uso de expresiones metafísicas como las matemáticas"[1]

Sirve de apoyo a esta explicación la conocida anécdota de la conferencia de Brouwer a la que Wittgenstein asistió[2] y que, según se dice, lo decidió a retornar a la filosofía. La emergencia de dificultades filosóficas en el seno de las matemáticas no ocurre, como veremos, en los cálculos propiamente dichos sino en la prosa que los rodea[3]. Ahora bien, conforme el pensamiento de Wittgenstein evoluciona en este periodo intermedio hasta un abandono cada vez más radical de ciertas ideas contenidas en el Tractatus, una cuestión va ganando terreno en precisión e importancia, al grado de convertirse en el punto de transición que conduce a su tratamiento de los problemas en filosofía de las matemáticas: el problema de en que consiste seguir una regla. G. H. von Wright relata[4] que la primitiva versión de las Investigaciones estaba dividida en dos secciones escritas respectivamente en los

[1] C. V. p.13. Ver en la bibliografía la forma en que serán citadas las obras de Wittgenstein.
[2] Cfr. Pitcher, G *The Philosophy of Wittgenstein*, Englewood Cliffs, N. J. 1964, p.8
[3] "And in fact, what is caused to disapear by such a critique are names and allusions that ocur in the calculus, hence that I wish to call *prose*." (WWK p.149, versión inglesa)
[4] Wright, G. H. von, *Wittgenstein*, Blackwell, 1982

otoños de 1936 y 1937. La primera correspondía aproximadamente al segmento inicial del texto definitivo, hasta el parágrafo 188; la segunda contenía lo que ordenado más tarde por Wittgenstein constituiría la parte inicial de los *Remarks on the Foundations of Mathematics.* Esto nos proporciona una secuencia de exposición de las ideas de Wittgenstein: las observaciones sobre el significado, la definición ostensiva, los parecidos de familia, y las consideraciones sobre seguir una regla son imprescindibles para un entendimiento cabal de sus elucidaciones sobre los fundamentos de las matemáticas, pero también son éstas el desarrollo natural, la aplicación de aquéllas. ¿Por qué las observaciones sobre seguir una regla conducen a la filosofía de las matemáticas? Una posible respuesta es que la demostración matemática es un caso particular de regla, que justamente confiere a los enunciados de esta disciplina un carácter de necesidad trascendente a toda experiencia. La regla constriñe a seguirla de un modo predeterminado, la demostración impone el reconocimiento de una verdad.

En la historia de la epistemología, considerada como una gigantomaquia entre dogmáticos y escépticos, la existencia del conocimiento matemático ha sido el argumento dilecto de los primeros. La demostración parece conferir al hombre un conocimiento cierto sobre lo que es necesariamente (p. ej. según Aristóteles). Era pues necesario que Wittgenstein enfrentara este dominio de discusión filosófica. Veamos además hasta qué punto la demostración aparece como el carácter esencial de las matemáticas

No obstante los avances que las tablillas babilónicas y los papiros egipcios muestran en la resolución de problemas aritméticos, se considera que la matemática, en el pleno sentido del término, surge únicamente con la cultura griega entre los siglos V y IV A. de C. De acuerdo a Luis Vega (1990), ello se debe a tres razones:

a) Surge lentamente en este periodo la demostración como un componente necesario para el establecimiento de una proposición matemática. Se desconoce cuáles son las fuerzas que impulsaron esta evolución, pero se cree que fueron de diversos tipos. Algunos, como Szabó suponen que se debió a la influencia del movimiento eleático en su apelación a la razón, y no a los sentidos, como fuente última de toda verdad. Esto, junto con la crisis originada por la prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, habría provocado, según estos autores, la instauración del método axiomático como paradigma del proceder matemático. Por su parte, Vega cree que la explicación correcta debe ser mucho más compleja, y que la idea de demostración vino a las matemáticas por la confluencia de una mayor cantidad de factores.

b) Se abre el ámbito en que la demostración, como una forma peculiar de argumentación, integra las proposiciones en un sistema deductivo, a partir de axiomas.

c) Adquiere la cultura griega principalmente a través de la obra de Aristóteles una conciencia cabal y reflexiva de este nuevo modo de proceder a través de argumentaciones que objetivamente establecen la verdad. La silogística y, más tarde, la teoría lógica de los estoicos se constituyen como consideraciones de segundo orden frente a la práctica de los matemáticos. Para Aristóteles la episteme es un conocimiento universal, por causas y enseñable, como la técnica y la prudencia, pero se distingue de ellas porque recae sobre lo que es necesariamente. Por medio de la demostración se exhibe el carácter necesario del ser de una cosa. Una premisa establece la necesidad de la conclusión, y la otra el vínculo que funda esta necesidad en la premisa ya dada. Lo importante a nuestro tema es que Aristóteles remarca la distinción entre las dos acepciones de 'apodeixis' en su carácter deictivo u ostensivo, por un lado; y en su sentido demostrativo, como denotando un procedimiento que instaura un conocimiento de otro tipo.

Si bien es cierto que hay todo un lado de la práctica matemática que consiste el la conjetura o intuición de teoremas nuevos, es cierto también que lo que le da su carácter peculiar es el que sus proposiciones tienen que ser establecidas por medio de demostraciones.

Planteamiento del Problema

Veremos a continuación un esbozo de la formulación original del problema de en qué consiste seguir una regla y de su tratamiento, tal y como aparecen en *Investigaciones Filosóficas*; más tarde repasaremos las dificultades con que se enfrentan algunas interpretaciones tradicionales en la materia.

Se ha debatido sobre cuáles son exactamente la trascendencia y las implicaciones que la cuestión de la regla tiene para el resto de la obra wittgensteiniana. Para Kripke[5] es la raíz de que emergen la filosofía de las

[5] Kripke, S. *Wittgenstein. Reglas y lenguaje Privado*, U. N.A.M. México, 1989.p. 13.

matemáticas y la filosofía de la mente contenidas en *Remarks on the foundations of mathematics* y en *Investigaciones Filosóficas*, respectivamente. Otros autores difieren al respecto, aunque la mayoría considera que el cabal entendimiento en la materia que ahora nos ocupa, es imprescindible para comprender las ideas más importantes vertidas en dichos textos.

El problema de la regla, en todo caso, se encuentra cercanamente relacionado con otros atinentes a la filosofía de la psicología como son la intencionalidad o la espera de un evento, pues así como mi pensamiento de que Juan llegará anticipa de algún modo la llegada de Juan y es como una sombra de este hecho, así también el entendimiento de una regla parece anticipar todas sus posibles aplicaciones.

En efecto, una complicación que surge aquí inmediatamente es la siguiente: una regla determina nuestro comportamiento al seguirla correctamente, por eso entender una regla (o bien una palabra) tiene el aspecto de un súbito compromiso que la mente adopta para una infinidad de pasos o situaciones: "si sigue la regla tiene ahora que comportarse de tal y cual modo". Tal parece como si la mente fuese un extraño medio que consigue en un instante "cruzar todos los puentes", es decir, anticipar la totalidad de posibles aplicaciones de que la regla es capaz, en un número indefinido de circunstancias.

La cuestión aparece desarrollada plenamente en *Investigaciones Filosóficas* después de que se ha debatido la concepción 'nominalista' del lenguaje, en parte como un reverso psicológico de la misma discusión, pues al identificar 'significado' con 'uso', queda en pie la dificultad que acabamos de plantear respecto a la anticipación de los casos de aplicación; pero también, por otro lado, la idea del significado que hace consistir este en una especie de cuerpo adherido a la superficie de la palabra, concepción que podría expresarse con la conocida fórmula de Frege según la cual el sentido de una proposición es función del significado de los vocablos que la componen, implica que las reglas que decretan las combinaciones válidas de las palabras (es decir, las oraciones con sentido, o las proposiciones necesariamente verdaderas) están determinadas de antemano por los significados atribuidos individualmente a los términos de que están formadas. Por ejemplo, según esta postura, dadas las significaciones aisladamente consideradas de los signos '+', '=' y '2', la ecuación '2+2=4' expresa una verdad apodíctica. Y es difícil concebir cómo una verdad necesaria podría explicarse, si no fuese postulando la existencia de un mundo o ámbito de objetos de naturaleza muy especial, para cuya descripción requiriéramos de tales enunciados. Wittgenstein no sólo desea rebatir una concepción del lenguaje que conduce a tales dificultades, sino que la descripción de los hechos lingüísticos que se desprende de su obra tardía parece más bien una inversión estricta de la fórmula dada anteriormente. No es el significado de las palabras el que determina las combinaciones en que estas pueden entrar, sino que son las reglas de uso de los vocablos las que constituyen su significado.

Veamos con detenimiento, siguiendo a Wittgenstein, qué es lo que ocurre en la mente de quien súbitamente comprende una regla, por ejemplo matemática, o el significado de una palabra.

Conviene aquí que expresemos a este respecto todos los prejuicios a que nos induce la gramática superficial del lenguaje, para de este modo tener claro cuál es el blanco contra el que Wittgenstein lanzará sus argumentos:

a) El que tras una explicación de una regla (por ejemplo la de la suma), dice sinceramente haberla comprendido describe con estas palabras una vivencia peculiar, única, que es el verdadero significado del vocablo "comprensión".

b) Esta vivencia ocurre en todos los casos de comprensión, o mejor dicho, todos estos casos tienen como elemento común esa vivencia.

c) Puesto que el sujeto sabe que ha comprendido, esa vivencia de algún modo le fue patente en el momento en que ocurrió, aunque luego él sea incapaz de describirla con palabras.

d) El medio de lo mental hace en el acto de comprensión (por ejemplo en la lectura) lo que ningún objeto material podría realizar: da vida a los signos. Precisamente por ello lo mental no puede ser de la misma naturaleza que lo físico.

e) Algún cambio característico de la comprensión y de carácter fisiológico debe ocurrir en el cerebro cada vez que un individuo comprende algo.

No es difícil advertir que todas estas ideas proceden nuevamente de la concepción 'nominalista' del lenguaje, según la cual las palabras representan o están en lugar de objetos, y éstos son sus significados. Tendemos a decir: "dado que una persona que no comprende una regla podría comportarse como si la hubiese comprendido, aquello que el vocablo "comprensión" designa debe ser algún proceso interno que el individuo identifica fácilmente".

Veremos que estas aseveraciones no se sostienen en el análisis de casos particulares en que usamos expresiones tales como "él ha entendido a qué regla me refiero".

Empecemos combatiendo la idea expresada en e). Es muy común suponer que la ciencia finalmente descubrirá la localización cerebral de todas las funciones intelectivas. De allí no hay mas que un paso a sostener que estas últimas consisten en ciertos estados cerebrales. Wittgenstein no se toma mucho tiempo en criticar esta concepción como no fundada en los hechos ("pregúntate qué sabes de estas cosas")[6]

" El prejuicio en favor del paralelismo psicofísico es fruto de apreciaciones primitivas de nuestros conceptos. Pues si entre fenómenos psicológicos, se admite una causalidad en la que no se interponga nada fisiológico, se cree que esto equivale a hacer profesión de fe en una entidad mental nebulosa."[7]

La hipótesis del paralelismo psicofísico es, a fin de cuentas, irrelevante desde el punto de vista filosófico. Objeciones análogas a dicha concepción se encuentran en Berkeley[8], Comte[9] y Husserl[10]. Podríamos resumirlas en un solo punto: la observación de los hechos fisiológicos, por ejemplo, relativos a la memoria humana, requiere que el sujeto que se somete a experimentación sea capaz de identificar fenomenológicamente sus actos de memoria. Es decir, finalmente volvemos a las vivencias de un individuo. Para Wittgenstein, en cambio, lo decisivo es que los criterios de uso de expresiones lingüísticas no pueden permanecer ocultos para el hablante[11]. Además, como lo apunta en la cita anterior, la postulación de una conexión fisiológica entre dos fenómenos psicológicos, no hace sino complicar las cosas innecesariamente. Sin embargo, no era la intención de Wittgenstein la reforma del lenguaje cotidiano, en el que a veces se emplea la imagen del paralelismo psicofisiógico, sino su elucidación. Por ejemplo, la afirmación de que los fenómenos de comprensión ocurren en el cerebro es adecuada si con ello se pretende,

---

[6] PhI 159.

[7] Z §169

[8] Berkeley. *Tres Diálogos entre Hylas y Filonús.* Aguilar, Biblioteca de Introducción Filosófica, Buenos Aires, 1978, comienzo del segundo diálogo, p. 88.

[9] Para Comte sólo la sociología y la fisiología estudian al hombre, pero no son reducibles la una a la otra. La psicología es imposible como ciencia positiva, porque los fenómenos de introspección no son hechos positivos. Ver Sanguineti (1977)

[10] Para Husserl, la reducción fenomenológica reduce todo lo fáctico a lo eidético. Cfr Zubiri (1980)

[11] Cfr. Ph I 158 y 159.

pongamos por caso, describir el resultado de ciertos experimentos en los cuales el investigador halla correlatos fisiológicos de nuestros procesos mentales. Pero es inadecuada si se la malentiende como significando que los hechos mentales se localizan en el cerebro como un objeto se encuentra en una habitación. Y si alguien insistiera en que siente, pongamos por caso, que su imagen visual está pocos centímetros detrás de su nariz, habría que preguntarle cómo aprendió ese empleo del verbo "sentir" aplicado a su imagen visual. Su respuesta nos daría entonces la clave para entender sus palabras[12].

Consideremos ahora la posibilidad de que esa vivencia específica del acto de comprender de que hemos hecho mención sea la de imaginar un objeto.

Wittgenstein refuta esta idea en los párrafos iniciales de *Investigaciones Filosóficas*, pero quisiéramos resumir su argumentación con el siguiente ejemplo que es una buena ilustración de su método filosófico: Si a alguien se le dice "imagina una flor amarilla", parece absurdo que necesariamente tenga que imaginarse una flor amarilla para comprender la orden, y luego, para hacer lo que se le pide, imaginársela de nuevo.[13]

Analicemos ahora el ejemplo de la lectura cuyo tratamiento se inicia en el parágrafo 156 de *Investigaciones Filosóficas.* El examen de este caso tiene por objetivo mostrar que si decimos de un individuo que puede leer o continuar una sucesión de números cuyos primeros términos se le han presentado, lo que justifica nuestra afirmación son una serie de circunstancias en las que el caso tuvo lugar (contra lo que se supuso en los incisos a), b), c), y d) anteriores). Más específicamente, el ejemplo de la lectura nos enseñará que no hay una vivencia característica común a todos los actos de lectura, y que aunque la hubiera, no sería su presencia el criterio para nuestro uso del verbo "leer". Recordemos que en este ejemplo no considera Wittgenstein como parte de la lectura, la comprensión del sentido de lo leído, sino únicamente "la actividad de transformar en sonidos lo escrito o impreso" [14]. En primer término, es obvio que hay una diferencia muy grande entre el alumno (A) que lee y aquel (B) que finge hacerlo recitando el pasaje que ha aprendido de memoria. Sin embargo, tendemos a suponer que esa distinción consiste en algo que ocurre simultáneamente al ejercicio de la lectura, en un caso, y

[12][12] Cfr. BB, pp. 35-37
[13] Cfr. BB. p. 39
[14] Ph 155

del recitado, en otro. Decimos "B sabe que no está leyendo", y de nuevo, como no hay, o por lo menos puede no haber, diferencias conductuales entre ambos, postulamos que la distinción es de carácter mental. No obstante, los pensamientos del lector experimentado y los del impostor podrían ser los mismos. Wittgenstein alude a la gran cantidad de experiencias a las que llamamos "leer" para constatar la imposibilidad de reducirlas a una vivencia única. No sólo es que no hallemos, por ejemplo, una sensación característica, sino que el postularla como referente del término 'leer' nos llevaría a dos resultados indeseables:

a) tendríamos que aceptar que lee el que siente que lo hace bajo el efecto de una droga, independientemente de cual fuese su conducta.[15]

b) No habría tal cosa como corrección o incorrección en la lectura de un texto.

Sin embargo tenemos la impresión de que es la lectura una experiencia peculiar, que mientras sucede los sonidos vienen a la mente de un modo particular, distinto de aquel en que ocurren en el proceso de repetir algo de memoria. Wittgenstein en *Los Cuadernos Azul y Marrón*[16] analiza con detenimiento la gramática de la palabra "particular" y denuncia en su uso filosófico una confusión. Por un lado, decimos que algo es particular porque advertimos sus diferencias con otras cosas de su mismo género o especie: viendo el color de un lago lo calificamos de particular porque lo comparamos imaginariamente con el de otro de tonos más convencionales. Por otro lado, al concentrarnos excesivamente, a través de un acto de introspección, en un sentimiento o en un recuerdo solemos afirmar que es particular, pero no porque lo equiparemos con otros, sino porque la afirmación simplemente remarca dicho esfuerzo de concentración. Así en el caso de la lectura, el que las palabras parezcan venir de un modo particular, no es el resultado de un acto de comparación, sino un rasgo que desaparece cuando no ponemos excesiva atención a ese acto cotidiano.

Por las razones anteriores, entre otras, Wittgenstein rechaza como criterios del uso de "leer" la supuesta vivencia de ser guiado[17], o de unidad de la letra impresa y la pronunciada, o la de causa[18]. La conclusión es que la concepción nominalista del lenguaje nos ha extraviado haciéndonos buscar lo que no hay. Lo que distingue al lector diestro del impostor son una serie de circunstancias, no necesariamente

[15] Ph I 160
[16] BB. p. 204.
[17] Ph I 172
[18] Ph I 169.

presentes en el momento de la lectura, o de eventos pasados y futuros. Los casos en que empleamos el verbo "leer" forman una familia con sus parecidos y no están relacionados por la presencia de un elemento común.

En cuanto a la tesis de que leer consiste en derivar la reproducción del original, examinemos un ejemplo análogo al de la lectura, y que Wittgenstein a este respecto aduce: el de alguien que copiara un texto impreso con letra de molde a escritura cursiva. Entonces diríamos que esa persona copia si procede de acuerdo a una tabla en que en una columna aparecen las letras de molde, y en otra y en el mismo orden, las correspondientes letras cursivas. Sólo nos constaría que esa persona, por ejemplo, busca cada letra en la tabla y pasa el dedo de una columna a la otra. Suponer que esta conducta es simple manifestación de un proceso interno de seguir una regla, es nuevamente volver a una posición ya refutada. Sin embargo, el problema surge al considerar que cualquier comportamiento irregular de ese sujeto puede aún hacerse concordar con la tabla si se le interpreta de otra forma. Entonces ¿cuál es la diferencia entre quien deriva de acuerdo a lo que para nosotros sería una interpretación peculiar, y el que definitivamente no deriva, sino que al azar se comporta de acuerdo con la regla?. Además, dado que dos reglas pueden coincidir en un gran número de casos particulares ¿cómo podemos saber de quien se ha comportado, hasta ahora, como nosotros lo haríamos al copiar conforme a la tabla, si sigue la misma regla que nosotros, si la "interpreta" de idéntica forma?

El problema puede plantearse de este modo: Si se enseña a una persona a seguir una regla dándole una fórmula que la exprese, entonces persiste siempre la posibilidad de que la malinterprete o la aplique de una forma distinta a la que nosotros pretendíamos. El agregar cláusulas a la fórmula no puede nunca salvar el abismo que hay entre la regla y su aplicación. Además el entendimiento de una regla presupone el conocimiento de otras más simples, y eso implica la existencia de reglas que tienen que enseñarse a través de la aplicación concreta de las mismas a un número finito de casos. Tal ocurre, por ejemplo, con la serie de los naturales '1, 2, 3... ' Wittgenstein pregunta al respecto:

a) ¿Hasta qué número tiene que llegar el aprendiz y cuántas veces, para que digamos que ya sabe seguir?[19] Ello nos hace reflexionar en lo imprecisos y fluctuantes que son los criterios que empleamos en este caso, y que no tienen que

[19] Ph I 145.

ver únicamente con vivencias características. Es cierto, que cuando un muchacho diestro en el álgebra elemental dice que sabe cómo seguir la serie 1, 3, 6, 10, 15,... basta como criterio de que dice la verdad el que escriba la fórmula $a_n=n(n+1)/2$. En ese caso diremos que la comprensión consistió en que se le ocurrió esa ecuación, pero ello por las circunstancias precisas del caso.

b) ¿Qué pasa si después de que el alumno ha dado muestra de que maneja la serie hasta el 100 (no le hemos enseñado la regla para números mayores), alguna vez pretende que el número que sigue a 1000 es 1002? Diremos que no ha aprendido bien, que no ha hecho lo mismo que estaba haciendo antes. Y pretendemos que hay una objetividad a la que la expresión 'lo mismo' se refiere. Pero ¿cómo podemos fundamentar esto? ¿Está realizando algo distinto, porque esa ya no es la misma serie? Pero la serie queda justamente determinada por sus miembros. La respuesta más natural a esto sería decir "Es obvio lo que significa la expresión 'lo mismo' pues tenemos un ejemplo paradigmático de ello en la identidad de un objeto consigo mismo" A lo que Wittgenstein objeta "¿Y cómo debo aplicar lo que me muestra una cosa al caso de dos?"[20]

Entonces ¿en qué consiste seguir una regla?. A nada, aparentemente. Este es, a nuestro juicio la paradoja a que alude la primera frase del célebre pasaje (§201) de las *Investigaciones Filosóficas*: "Nuestra paradoja era ésta: una regla no podía determinar ningún curso de acción porque todo curso de acción puede hacerse concordar con la regla. La respuesta era: si todo puede hacerse concordar con la regla, entonces también puede hacerse discordar. De donde no habría ni concordancia ni desacuerdo". En esta "respuesta" se esboza ya la propuesta wittgensteiniana. ¿Cómo debemos entenderla?

El pasaje citado tiene la forma de una reducción al absurdo. En ese caso, una premisa ha quedado refutada, ¿Cuál es? "Todo puede hacerse concordar con la regla", que a su vez proviene de que se ha supuesto equivocadamente que toda captación de la regla es una interpretación. Es decir, si antes de seguir una regla siempre la interpretáramos, cualquier acción estaría de acuerdo con la regla vía nuestra interpretación. Pero no es así como usamos la palabra 'regla', pues precisamente es una observación gramatical el decir 'una regla determina un curso de acción'. De ahí se sigue la conclusión "Por tanto 'seguir una regla' es una

---

[20] Ph I 215

práctica. Y creer seguir la regla no es seguir la regla. Y por tanto no se puede seguir privadamente la regla, porque de lo contrario creer seguir la regla sería lo mismo que seguir la regla."[21] Es decir, seguir una regla es una institución social.

Nuevamente la concepción tradicional del lenguaje a la que ya hemos hecho mención supone que la regla, desde el momento en que es enunciada, determina rígida e inexorablemente una conducta correcta para seguirla, más allá de cualquier práctica humana. Así pensamos que todos los hombres podrían haberse equivocado al realizar una operación matemática concreta, y con ello postulamos una objetividad frente a la cual pueden las actividades humanas resultar aplicaciones correctas o deficientes de una regla determinada. Es esta idea la que Wittgenstein pone aquí en cuestión. Si eliminamos de nuestras consideraciones las prácticas de una comunidad específica, la "dureza" con que la regla constriñe al que la sigue se desvanece. De allí la conclusión: no puede seguirse la regla privadamente, pues seguir una regla es una institución social.

Las Interpretaciones Escépticas

Tras esta formulación de una de las tesis centrales de *Investigaciones Filosóficas*, hay s interpretaciones posibles. La siguiente explicación de Malcolm (y que nos parece muy afortunada) pone en evidencia las principal dificultad que aquí subyace:

"Más bien que decir que concordamos (agree) porque seguimos reglas, es más perceptivo decir que nuestro acuerdo fija el significado de las reglas, define su contenido."[22]

Por una parte, no podemos dejar de lado la impresión de estamos ante una tesis filosófica que tendría consecuencias revisionistas tanto para nuestra forma ordinaria de hablar, como para las matemáticas, contrariamente a las intenciones explícitas de Wittgenstein. Por otro lado, aunque muy relacionado con lo anterior, una explicación o elucidación que hace consistir la necesidad lógica de la regla en la simple fuerza de la coerción social, parece haber dejado escapar lo más

[21] Ph I 202

[22] Malcom, "Wittgenstein", citado en Hallett, Garth, *A Companion to Wittgenstein "Philosophical Investigations"*, Cornell University Press, Londres, 1977, p. 284. Este texto será citado en lo que sigue con la referencia: Hallet 1977.

característico de dicha necesidad. Veremos en seguida dos interpretaciones escépticas que siguen esta vía.

La primera aparece en el texto de Crispin Wright[23] (Wright, 1980), y es analizada con el fin de distinguirla de la concepción de Wittgenstein.

Wright cita un pasaje de *Remarks on the foundations of mathematics* en donde se formula nuevamente el problema:

"-¿No estoy entonces compelido a avanzar en un cierto modo cuando realizo una cadena de inferencias?-

-¿Compelido? Después de todo puedo seguir presumiblemente como yo lo elija-

-Pero si tu quieres estar de acuerdo con las reglas tu debes seguir de este modo-

-No, en absoluto. Yo llamo a esto acuerdo-

-Entonces tú has cambiado el significado de la palabra 'acuerdo' o el significado de la regla-

-No. ¿Quién dice lo que 'cambio' y 'permanecer en lo mismo' significan aquí? No importa cuántas reglas tu me des, yo doy una regla la cual justifica mi empleo de las reglas."[24]

Crispin Wright sugiere dos lecturas de este pasaje, equivocadas según él, pero que le sirven para contrastarlas con la suya propia.

La primera es la que nos interesa. Se trata de una interpretación escéptica. Dado que las reglas se reducen unas a otras (como el algoritmo de la multiplicación al de la suma), cabe suponer que hay reglas que aprendimos no a través del enunciado de un algoritmo general, sino por medio de una serie de ejemplos. De hecho es así como aprendemos el uso de la mayoría de las palabras. Dado que una gran cantidad de casos no formaron parte de la instrucción, una particular aplicación de la regla en ellos supone siempre una ampliación, más o menos arbitraria, de la explicación recibida.

Por ejemplo, podríamos dar una sucesión numérica como la que sigue:

1, 2, 4,... (φ)

---

[23] Wright, C. *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, Duckworth, 1980, parte I secc. 2. Este texto será citado en lo sucesivo con ñla referencia "Wright (1980)"

[24] RFM, I, 113)

Dos personas A y B que me escuchan anotan '8' como el número siguiente de esta serie. Puesto que concuerdan, es posible que hayan interpretado el segmento inicial como expresando la misma serie. Sin embargo, no podemos asegurar esto. En efecto, nuestras sospechas estaban fundadas, cuando se les pide que continúen, A escribe '16' y B '15'. Cada cual se justifica así

A: la regla consistía en obtener el siguiente número duplicando el anterior. (μ)

B: La serie se refiere al número de divisiones del espacio por 0, 1, 2... planos. (θ)

Podría haber ocurrido que tardásemos mucho en descubrir la discrepancia entre ellos. Así sería posible que un buen día dos individuos no concordaran al realizar una suma.

Ahora bien, aquí hay dos reglas completas, cada una de las cuales coincide en sus primeros pasos con el segmento inicial (φ). Supongamos con deliberada ingenuidad, que están expresadas respectivamente por (μ) y (θ) sin ninguna ambigüedad. Según esta interpretación, las reglas, perfectamente determinadas, se encuentran en las interpretaciones que mentalmente hicieron A y B de (φ), sólo que esas interpretaciones no pueden ponerse en signos porque éstos son siempre a su vez susceptibles de interpretación ulterior. La mente es un medio extraño que da vida a los signos. De acuerdo con esto, dos individuos nunca podrían saber que siguen la misma regla. Más explícitamente, imaginemos que (μ) y (θ) denotan cada una de las susodichas series consideradas extensivamente, es decir, como si de algún modo misterioso pudiésemos tenerlas ante el ojo de la mente, sólo que al comunicarlas o enseñarlas a otros, dada la finitud de nuestras prácticas y la posibilidad de malinterpretación de cualquier explicación, podemos únicamente expresar el segmento φ, común a ambas, o cualquier ampliación finita del mismo. El problema del escéptico es que nunca estaremos seguros de haber comprendido la misma regla que los otros.

Wright[25] opone las siguientes objeciones al escéptico:

a) Hay un éxito notable en las transacciones lingüísticas, inexplicable de acuerdo a esa interpretación.

b) El número de posibilidades que la gente puede considerar mentalmente es bastante limitado.

---

[25] Wright, C "Kripke's account of the argument against private language" Journal of Philosophy LXXXI 759-778 (1984)

c) Hay ciertos hechos en la situación que indican lo que el hablante está tratando de decir, como son los gestos, etc.

No discutamos si tiene razón Wright frente al escéptico, o si éste podría encontrar irrelevantes las objeciones que se le plantean. Lo que importa ahora es en qué se basa Crispin Wright para suponer que esta forma de escepticismo no da en el blanco del pensamiento wittgensteiniano. La respuesta es: en que se ha supuesto una asimetría, que Wittgenstein rechaza, entre la primera y la tercera persona. En efecto, hemos admitido que el individuo sabe perfectamente qué regla está aplicando, y que ese entendimiento lo compromete a seguir la regla como lo hace. El individuo sabe la regla 'completa', pero no la puede comunicar sino fragmentariamente, porque los signos siempre son susceptibles de malinterpretación.

Para Wittgenstein esa es una concepción equivocada:

"... Tú mismo no puedes prever la aplicación qué harás de la regla en un caso particular. Si tú dices 'y así sucesivamente', tú no sabes más que 'y así sucesivamente'."[26]

Crispin Wright nos explica en qué basa Wittgenstein esa simetría entre la primera y la tercera persona. Primeramente en el análisis 'fenomenológico' de lo que pasa cuando entendemos una palabra, y que es el que vimos en el caso de la lectura. En segundo término, en lo siguiente:

"... Cuando digo que uso F cuando X, no establezco ningún compromiso. No es la idea de circunstancias parecidas o iguales la que fundamenta mis juicios acerca de la aplicabilidad de F, sino que aquélla es consecuencia de éstos. El sentimiento de familiaridad y la disposición a aplicar la misma expresión son la misma cosa. Yo quisiera que hubiera una objetividad (perceptible para Dios) en la similaridad de circunstancias en las que aplico el concepto. Wittgenstein quiere insistir en que realmente no podemos dar sentido a esta idea."[27]

En consecuencia, no está la regla 'más completa' en la expresión * de arriba que en la mente de los hablantes.

Repasemos ahora la célebre propuesta de Kripke[28] en torno a esta materia. Este autor cree descubrir en las líneas de wittgenstein una paradoja escéptica similar a la que Hume planteó, y cuyo enunciación por parte de Wittgenstein sería ya de suyo

[26] RFM, IV, 8.
[27] Wright (1980) Op. Cit. III, secc. 6.
[28] Kripke (1989), Op. Cit.

valiosa en la historia de la filosofía, independientemente de la `solución' que él mismo propone. Reducida a su mínima expresión la antinomia -tal y como kripke la plantea- es la siguiente: Al realizar una suma que nunca antes habíamos considerado, digamos 567+23=590, imaginemos un nuevo genio maligno, o un escéptico extraordinario, que pone en cuestión no el resultado que obtuvimos, sino nuestra pretensión de concordancia con nuestras intenciones lingüísticas previas en el uso del signo "+" (o del término "más"). En otras palabras, dado que hay una infinidad de funciones cuyos valores coinciden con los de la suma para todos los números que hasta ahora hemos sumado, pero que difieren en su valor para 567 y 23, el escéptico nos interroga acerca de si antes nos referíamos a la misma función con "más". Tal vez en realidad empleamos "+" para denotar la función x@y que coincide con la suma en casi todos sus argumentos, pero que aplicada a 567 y 23 da como resultado 591. El escéptico "...pone en cuestión el que yo tenga alguna razón para sentirme tan confiado en que ahora yo debería responder [590] y no [591]...".[29] La pregunta es ridícula, y así lo reconoce Kripke, pues no tendríamos tampoco ninguna razón para dudar de nuestras intenciones anteriores; y sin embargo, si la cuestión es ridícula debería haber un hecho muy claro para demostrarle al escéptico que se equivoca. Pues bien, lo paradójico es que una vez examinada la situación, los fenómenos mentales que ocurren durante el proceso de sumar, resulta que no hay tal hecho. Y no lo hay porque, por hipótesis, no pensé cuando sumaba 3+4=7 en que me refería con el signo "+" a una función que, aplicada al par (567, 23), da como resultado 590. Por lo tanto mi respuesta actual carece de justificación. El planteamiento del problema originalmente se hace en pretérito: no dudo de a qué me refiero con mis palabras o símbolos en este momento, sólo cuestiono si éstos concuerdan con mis intenciones pasadas. Esto nos permite formular la paradoja, pues quedan a salvo los significados de mis expresiones presentes. Pero tenemos un corolario terrible: no hay nada en mi uso actual del signo "+" que me comprometa a usarlo de un cierto modo en el futuro, aún cuando yo quiera seguir concordando con mis intenciones presentes. Es más "...no hay ningún hecho acerca de mí que distinga entre mi referencia mediante "+" a una función definida (la cual determina mi respuesta en nuevos casos) y mi no referirme a nada en absoluto."[30]

---

[29] Ibid.
[30] Ibid. p. 28.

Kripke rechaza la teoría disposicional como solución a la paradoja, argumentando (1) que nuestras disposiciones son, en todo caso, finitas, mientras que la regla se aplica a una infinidad de casos, y (2) que muchas veces estamos predispuestos al error. Hemos visto ya también que es insostenible la pretensión de que hay un sentimiento particular asociado a la palabra "suma".

En pocas palabras, el problema es el siguiente:

"No puede haber nada que sea querer decir algo mediante una palabra. Cada nueva aplicación por parte de nosotros es un paso a ciegas; cualquier intención actual podría interpretarse de tal manera que concordara con cualquier cosa que elijamos hacer. Por lo que no puede haber acuerdo ni conflicto."[31]

Kripke explica la solución de Wittgenstein de la siguiente manera: él acepta con el escéptico que no hay un evento mental que constituya mi referirme a algo con mis palabras. Por ello, dentro del marco de la concepción nominalista del lenguaje, la paradoja es insoluble. En cambio, en el contexto de las *Investigaciones Filosóficas*, no hay ningún inconveniente en que no se halle un hecho o proceso tal que sea el referente de la expresión "seguir una regla". Más bien, lo que hay que advertir son las condiciones de uso de esta expresión y su utilidad en las prácticas concretas, en la vida efectiva de nuestra comunidad. Ahora bien, mientras consideremos a un individuo aislado encontraremos que éste siempre se encuentra autorizado a contestar una pregunta sobre la suma de dos números, en un caso concreto, como le parezca natural e inevitable, sin que tenga que dar mayor justificación. Evidentemente, no es ese nuestro concepto de lo que es seguir una regla. La situación cambia cuando ampliamos nuestras consideraciones hasta abarcar a la comunidad de que el sujeto forma parte. Por ejemplo, ¿cuándo un maestro dice que un niño sabe sumar?, cuando ha dado suficientes muestras de que usa el signo "+" como su maestro lo emplearía. Si más adelante se comporta a este respecto de un modo distinto al de la comunidad en que vive, tal vez se dirá que parecía saber sumar pero que en realidad no sabe, o bien, que sabía sumar aunque ahora ha perdido esa habilidad. Que se dijera una cosa u otra dependería de las circunstancias concretas del caso. ¿Cuál es la utilidad de dicha práctica? Eso es

[31] Ibid. p. 63.

claro. Que se diga de un comerciante que sabe sumar nos garantiza que podemos confiar en él a este respecto.[32]

Para Kripke existe una clara analogía entre las ideas de Wittgenstein en torno a la regla y las de Hume sobre la causalidad. Ingeniosamente, formula estas últimas a través de la inversión del condicional "si eventos del tipo A causan eventos del tipo B, y si un evento e de tipo A ocurre, entonces un evento e' debe ocurrir". Para Hume -de acuerdo a Kripke- esa implicación "nos compromete, siempre que sepamos que un evento e de tipo A ocurra y no esté seguido por un evento de tipo B, a negar que haya una conexión causal entre los dos tipos de eventos"[33]. Es decir, Hume niega que exista el nexo causal, aunque nos muestra las condiciones en que solemos afirmar su existencia.

Similarmente, una proposición de tipo "si él sigue la regla correctamente, al sumar 5 y 7 debe obtener 12" no denota -de acuerdo con la interpretación de Kripke- una necesidad lógica, sino una regla de uso del signo '+': 'Si alguien al operar con 5 y 7 no obtiene doce, no diremos que estaba sumando correctamente'.

La analogía, empero, no se sostiene del todo, pues subsiste una dificultad (a la que habremos de volver más tarde): mientras que Hume niega el nexo causal y hace residir su apariencia en la mera regularidad, la observancia de una regla no puede aclararse a través del acuerdo de los habitantes de una comunidad en sus reacciones. El concepto de 'acuerdo' no es más básico que el de seguir una regla. Ambos están al mismo nivel.

<u>Objeciones a la interpretación de Kripke</u>

Diversas objeciones de muy desigual valor se han levantado en contra del comentario de Kripke. Por ejemplo Ronald Suter, en su libro *Interpreting Wittgenstein*[34] cree resolver la paradoja escéptica argumentando que si hubiésemos sido interrogados acerca de las propiedades algebraicas de la suma mientras realizábamos una operación particular, habríamos respondido, por ejemplo, que era asociativa, en tanto que la función "tás" no lo es. Suter recae así nuevamente en la teoría disposicional y no advierte que el escéptico habría podido encontrar otra función adecuada a sus objeciones, y que también fuese asociativa. Por ejemplo, si

[32] Ibid. p. 90.
[33] Ibid. p. 91.
[34] Suter, R. *Interpreting Wittgenstein*, Temple university Press, Philadelphia, 1989.

nunca antes hubiésemos sumado un número mayor que 500, la función x+y (mod 500) serviría igualmente. Esta operación coincide con la adición ordinaria si los sumandos son ambos menores que 500, y es asociativa, pero 567+23= 90 (mod 500) (pues 90 es el residuo de la división de 590 entre 500).

Con argumentos de mayor peso, Crispin Wright[35] se sumó a los muchos autores que han objetado la polémica interpretación de Kripke, poniendo en duda no sólo su fidelidad al pensamiento wittgensteiniano, sino muy especialmente su coherencia. En artículos recientes Wright[36] ha mostrado cómo las ideas de Kripke conducirían a una concepción del lenguaje muy difícil de sostener. Reduciendo a sus mínimos términos su argumentación, podemos exponerla del siguiente modo: Wittgenstein acepta la idea de verdad como redundancia, es decir, admite que afirmar la proposición P es lo mismo que aseverar 'P es verdadera'. Por tanto introduciremos como una de nuestras premisas la equivalencia:

'P' es verdadera si y sólo si P (ā)

Otro principio del argumento que difícilmente podría cuestionarse es que la verdad de una proposición cualquiera depende de su sentido. Si la solución escéptica de Kripke es correcta, entonces el sentido de una proposición no está determinado por los hechos. Por la premisa (ā), tampoco su verdad. De lo cual concluimos que ninguna proposición tiene el papel de establecer hechos.[37]

Si bien es cierto que Wittgenstein objeta que la función primordial del lenguaje sea de carácter enunciativa, seguramente habría aceptado que algunas áreas del discurso cumplen con esta función.

La propuesta de Crispin Wright para resistir a la paradoja escéptica no es muy clara ni, probablemente, sostenible. En el artículo de 1984, que hemos estado citando, hace residir la comprensión de una regla en un acto mental cuya reducción a cualquier otro, produce la paradoja escéptica. La posterior formulación de su idea a este respecto, en un artículo de 1990 (Wright, 1990), es igualmente evasiva.

---

[35] Wright, C "Kripke's account of the argument against private language" Journal of Philosophy LXXXI 759-778 (1984) Dicho sea de paso, su escéptico no es el mismo que el de Kripke, pues este sí reconoce una simetría en los juicios entre la primera y la tercera persona.

[36] Cfr. Wright 1990 y Wright C. "¿Does Philosophical Investigations I 258-260 suggest a cogent argument against private language?" in Pettit and Mc Dowell, *Subject, Thought and Context*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[37] Ibid.

Otra objeción común a Kripke consiste en señalar que la filosofía de Wittgenstein disuelve los problemas filosóficos y que, de acuerdo a la versión de aquél, Wittgenstein acepta como justificadas las dudas del escéptico. El autor de *Sobre la Certeza* no podía obviamente haber defendido ninguna posición afín al escepticismo clásico. Por ejemplo, Shanker[38] observa, como lo hicimos arriba, que el famoso parágrafo 201 de las *Investigaciones Filosóficas* es una reducción al absurdo, y por tanto, un rechazo explícito de la posición escéptica.

Dos argumentos, uno de los cuales explícitamente aparece en la obra de Kripke, podrían esgrimirse en favor de su interpretación:

a) El escepticismo a que este autor se refiere no es de corte epistemológico. No señala nuestras limitaciones como sujetos cognoscentes; su razonamiento va encaminado a mostrar que no hay un hecho en el mundo que sea el contenido de nuestro ordinario hablar del significado y la comprensión.

b) Las proposiciones gramaticales resultan -a veces- paradójicas en el lenguaje ordinario. En cierto sentido es falso que "No puede haber nada que sea querer decir algo mediante una palabra" o que "cada nueva aplicación por parte de nosotros es un paso a ciegas." Sin embargo, esto no contradice a Kripke. Después de todo a Wittgenstein podría también objetársele que algunas de sus proposiciones son aparentemente contrarias al sentido común, como aquella que asevera que una conjetura matemática carece de sentido.

Una posible salida

A pesar de todo ello, hay un punto en el cual esa objeción da en el blanco, y nos abre la perspectiva desde la cual se esclarece el tratamiento wittgensteineano de este problema. Al señalarse que no es consecuente interpretar los pasajes citados de *Investigaciones Filosóficas* como defendiendo ningún tipo de escepticismo, recordemos que esto se debe, no a que su autor haya pretendido atacar esa posición para sostener la opuesta, sino que -de acuerdo a las afirmaciones del propio Wittgenstein- su obra, puesto que se encamina a la elucidación gramatical, no contiene ningún tipo de tesis, porque en filosofía si hubiera tesis tendrían que ser absolutamente triviales.[39]

---

[38] Shanker, S. G. *Wittgenstein and the Turning Point in the Philosophy of Mathematics*, State University of New York Press, 1987. Este libro será citado en lo sucesivo con la referencia "Shanker (1987)

[39] Ph I 128.

El problema que aquí analizamos se genera en el lenguaje, porque éste produce en nosotros la imagen de una regla como de dos railes extendidos indefinidamente, es decir, como de algo ya dado que determina, de modo casi mecánico, una conducta. La necesidad lógica que una regla conlleva viene impuesta por nuestra decisión de seguirla de un modo determinado. En esto no parece haber una dificultad especial, ya estaba más o menos explícito en cuanto llevamos dicho. La aporía surge nuevamente cuando sin atenernos a las intenciones estrictamente gramaticales de esta elucidación, volvemos a dejarnos llevar por la imagen de la regla a que nos induce la gramática superficial del lenguaje. Entonces al notar la ausencia de estas vías que encarrilan nuestro comportamiento, llegamos a la conclusión de que actuamos a ciegas al seguir la regla. Y tendemos a pensar como extraordinarias las coincidencias, los acuerdos en nuestra conducta, por ejemplo, al realizar operaciones aritméticas. Entonces nos parece como una tesis filosófica muy grave, surgida de las observaciones de Wittgenstein, la constatación de que la necesidad lógica no existe propiamente, sino que lo que hay es una compulsión producida por un adiestramiento social. El error radica -en ese caso- en pensar que la expresión 'necesidad lógica' se refiere a una causación engendrada por una regla que una vez dada, cruza misteriosamente una infinidad de puentes extendidos entre su expresión escrita u oral y sus innumerables aplicaciones. De nuevo estamos ante la imagen de los railes. No, en un sentido trivial, no hay ningún otro significado de la expresión 'necesidad lógica' que el que le viene dado por el uso.

Para oponerse a esta imagen de determinación causal, que ordinariamente viene asociada al concepto de 'regla', Wittgenstein invoca otra metáfora: la de la decisión. Al analizar lo que ocurre en cada paso de la regla, concluye: "Más correcto que decir que se necesita una intuición en cada punto, sería casi decir: se necesita una nueva decisión en cada punto."[40] Es importante advertir la reserva introducida aquí por las expresiones 'más correcto que' y 'casi' que nos invitan a tomar con

[40] Ph I 186.En RFM, VI, 24: ""I have a particular concept of the rule. If in this sense one follows it, then from that number one can only arrive at this one". This is a spontaneous decision. But why do I say "I must", if it is my decision? Well, may it not be that I must decide? Doesn't its being a spontaneous decision merely mean: that's how I act; ask for no reason!" Con respecto a la prueba matemática Wittgenstein emplea también la metáfora de la decisión, por ejemplo RFM, III, 27 "Why should I not say: I have won through to a *decision*" o en RFM, VI, 28 "But he does not say: I realised that *this* happens. Rather: that it must be like that. This "must" shews what kind of lesson he has drawn from the scene. This "must" shews that he has gone in a circle. I decide to see things like *this*. And so, to act in such-and-such a way."

cuidado esta descripción. En efecto, la equiparación entre dos actos aparentemente tan opuestos como son la decisión y la rigurosa obediencia a una regla no puede ser más que una metáfora, y no una descripción literalmente exacta. Asimismo en otro pasaje Wittgenstein afirma: "Los matemáticos intuicionistas han dicho que uno necesita un nueva intuición para cada paso dado (taken), digamos, al desarrollar una progresión. Lo que ellos vieron fue que el dar una regla general no nos compele a dar (make) el paso. Lo que es equivocado es pensar que uno da el paso por intuición (insight), como si uno no tuviera ya ninguna razón sino, en vez de ello, una especie de revelación. Al decir que hay un proceso de intuición, parece estar explicado por qué !uno podría ser tan listo como para escribir 51 después de 50! Si algún proceso mental está implicado (involved), es uno de decisión, no de intuición. De hecho nosotros hacemos todos la misma decisión, pero no necesitamos suponer que todos tenemos la misma "intuición fundamental".[41] En las *Investigaciones Filosóficas* encontramos un poco más adelante las afirmaciones siguientes: "Cuando sigo la regla, no elijo. Sigo la regla ciegamente."[42] Pero allí se alude a esta representación para mostrar que no es más que una imagen 'mitológica' y muy peligrosa de lo que es una regla. ¿Acaso es más correcto decir que quien sigue una regla decide en cada paso de su aplicación?

Esto nos conduce al problema a que ya hemos hecho alusión de determinar la función del lenguaje filosófico wittgensteiniano. Conviene que lo enfrentemos brevemente en este punto, aunque sin la pretensión de tratarlo en su integridad.

Aún cuando lo que un autor lleva a cabo con su obra pueda resultar distinto del fin que se propone, creemos que especialmente en el caso de Wittgenstein el trabajo de interpretación, debe partir de sus intenciones explícitas. Ahora bien, como es ya muy conocido, Wittgenstein considera a su filosofía como una terapia que busca desembarazarnos de los falsos problemas filosóficos. Estos se originan en una confusión lingüística debida a una visión demasiado estrecha del modo en que funciona nuestro lenguaje. Es decir, que el fin de sus escritos es producir una adecuada visión de las cosas ("una claridad completa") desde la cual los problemas

[41] WLEC32-35, p. 134.

[42] Ph I 219. y en RFM, VI, 24, agrega:" When I say "I decide spontaneously", naturally that does not mean: Iconsider which number would really be the best one here and then plump for..."

filosóficos desaparezcan.[43] Su meta es descriptiva en el sentido en que nos conduce hasta donde es posible una visión sinóptica y comprehensiva de los fenómenos lingüísticos. Para ello busca recordarnos o enfocar nuestra atención sobre ciertos hechos sencillos, cotidianos, por haber desatendido los cuales nos extraviamos en el complejo laberinto de nuestro lenguaje. De hecho una gran parte de la obra tardía de Wittgenstein está constituida de la consideración de situaciones imaginarias que al ser contrastadas con las prácticas a las que estamos acostumbrados, contribuyen a elucidar nuestros hábitos lingüísticos. Por ello se vale también de preguntas que buscan liberarnos de las falsas imágenes que nos tienen cautivos "ambas manos en el remo", y apartar la densa niebla que hace imposible la claridad a la que aspiramos. No se trata de reformar el lenguaje diario, sino de tener un panorama claro de su funcionamiento.

Entonces ¿por qué si Wittgenstein respeta ilimitadamente el lenguaje cotidiano, algunas de sus conclusiones resultan paradójicas expresadas en ese lenguaje? En parte ya hemos sugerido una respuesta: las afirmaciones contenidas en sus textos, y que se oponen al sentido común, tienen muchas veces la función de contrarrestar la influencia nociva de ciertas imágenes. En efecto, junto a los recursos estrictamente argumentativos que constituyen parte de su obra, hallamos también un elemento de persuasión o de sugestión. Por supuesto los argumentos también pretenden persuadirnos, pero ahora nos referimos más bien algo encaminado a la imaginación. Por el uso común de nuestras formas de expresión, se forman en nosotros imágenes que fácilmente nos extravían. A esta iconografía hay que oponer otra que muestre que la primera carecía de fundamento.

"Yo puedo ocasionalmente producir nuevas interpretaciones, no para sugerir que son las correctas, sino para mostrar que las viejas interpretaciones y las nuevas son igualmente arbitrarias"[44].

En una de sus clases en Cambridge Wittgenstein reconoció más explícitamente el problema que aquí tratamos. Según él un teorema matemático no tiene más sentido que el que le da su prueba. Por tanto, un problema como el de la conjetura

[43] Por cierto, debe estar claro que hasta aquí hemos utilizado el vocablo 'filosofía' con dos distintas acepciones: por una lado se refiere a la tarea misma que Wittgenstein está llevando a cabo; por otro, a la tradición filosófica. No parece que a Wittgenstein haya molestado nunca esta ambigüedad presente en muchos pasajes de su obra.

[44] WLFM, p. 14.

de Goldbach apenas tiene sentido, y sólo lo tiene en la medida en que produce en los matemáticos un esfuerzo en la búsqueda de su prueba. Pero, en general, una pregunta en matemáticas (cuya solución requiera creatividad) adquiere mayor sentido cuando la respuesta es hallada. Algo similar se aplica entonces a las proposiciones matemáticas: algunas de ellas no adquieren pleno sentido hasta que son verificadas o falsadas. Y Wittgenstein agrega: "Esta explicación de las posibles respuestas es contrario a lo que nosotros llamamos ordinariamente una proposición. Pues decimos que una proposición debe hacer sentido antes de que sepamos si es verdadera o falsa."[45] Más adelante agrega que el que sus proposiciones parezcan contrarias al sentido común, se debe a que estamos aplicando erróneamente los criterios de uso de la palabra 'proposición' en un juego del lenguaje, a otro, que es el de las matemáticas. Las proposiciones de esta disciplina son llamadas así porque mantienen algunos parecidos de familia con las proposiciones de la vida diaria, pero no tienen por qué tener exactamente los mismos rasgos. De nuevo, lo que es inconsistente y problemático es el lenguaje cotidiano.

Además no debemos olvidar que las proposiciones, por ejemplo, de las *Investigaciones Filosóficas* tienen un sentido, es decir un uso, distinto al de las aseveraciones de la vida diaria, sin que por esto se sitúen a otro nivel.

Esto nos proporciona una explicación aparentemente satisfactoria de por qué Wittgenstein describe la aplicación de una regla en un caso particular como una decisión: se trata de una metáfora, que pretende recordarnos que hay una punto en que las justificaciones para seguir una regla se agotan finalmente.[46]

Terminaremos este capítulo mencionando un escrúpulo que aún nos resta y que no podemos soslayar porque en él residen, a nuestro juicio, buena parte de las diferencias que subsisten entre los intérpretes. Es una dificultad que mencionamos brevemente al comentar el texto de Kripke, cuando aludimos a que el concepto de 'acuerdo' no podría servirnos para aclarar el de 'regla' pues ambos se encuentran al mismo nivel[47]. Recordemos el párrafo (PhI, 241):

"¿Dices, pues, que la concordancia de los hombres decide lo que es verdadero y lo que es falso? -Verdadero y falso es lo que los hombres dicen; y los hombres

---

[45] WLC32-35, p. 195.
[46] Pues "Decir que si uno hubiese escrito algo distinto de 110 después de 100, no habría seguido la regla, es en sí misma una regla." (WLEC·"p. 133)
[47] Ph I 224 y 225

concuerdan en el lenguaje. Esta no es una concordancia de opiniones, sino de forma de vida."

En efecto, cuando ordinariamente hablamos de `acuerdo', hacemos con esta palabra un movimiento en el juego del lenguaje. Pero éste a su vez presupone un acuerdo previo que es de carácter más básico y del que, tal vez, debamos decir que es inefable, puesto que no es aquello a que nos referimos con el término `acuerdo' de nuestro lenguaje cotidiano. Algunos autores[48] toman el intrincado camino de hablar de `dentro y fuera del juego del lenguaje', como de dos ámbitos, en uno de los cuales se advierte la solidez de las reglas (su determinación para quienes comparten esa forma de vida) y en el otro de su debilidad (del acuerdo en las reacciones de los miembros de la comunidad como de algo dado). Es verdad que esta forma de expresarse va más allá de las declaraciones explícitas de Wittgenstein pero, por una parte, parece difícil de evitarse y, por la otra, ofrece una vía de exploración interesante.[49]

---

[48] Por ejemplo Bouveresse.

[49] En todo caso conviene distinguir esta postura de la sostenida por Dummett en "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" (1959) (Reimp. en *Truth and Other Enigms*, London, Duckworth, 1981), la cual ofrece una interpretación revisionista. este célebre artículo será citado en lo sucesivo como "Dummett 1959".

CAPITULO II

LA DEMOSTRACION MATEMATICA.

Veamos ahora qué consecuencias se infieren de lo anterior con respecto a la naturaleza de las proposiciones necesarias y en particular de las matemáticas. El problema que plantean a la filosofía es doble. Tal y como lo formula Dummett[50] se trata primeramente de determinar el origen de la necesidad apodíctica y, en segundo término, de averiguar cómo es que reconocemos dicha necesidad. Aristóteles, por ejemplo, lo resuelve considerando a los enunciados que son objeto de una demostración matemática como descriptivos de objetos de un ámbito muy particular[51]. Este orbe sería el único sobre el que recaería la episteme. Podemos calificar de platónicas a soluciones de este tipo en que se postula un universo descrito por las proposiciones necesarias. El carácter apodíctico de las proposiciones quedaría explicado por la peculiar naturaleza del mundo que describen. Ofrece múltiples ventajas esta forma de explicación, una de las cuales es el apegarse muy estrechamente a la imagen que la gramática superficial del lenguaje nos induce. La verdad de las proposiciones matemáticas se esclarece con la teoría de la correspondencia: se refieren a un universo de objetos que no son mera creación humana puesto que ni obedecen a nuestro capricho, ni pertenecen a una sola cultura o época histórica. En cambio, esta concepción deja aún en tinieblas muchas cuestiones; una de ellas el la de cómo la matemática se aplica con éxito al mundo. Además, tiene que postular una facultad especial del hombre capaz de darle acceso al conocimiento de aquella región ontológica[52]. Es justamente este tipo de explicación el que Wittgenstein denuncia como provocada por una confusión

---

[50] Dummett 1959, ver nota 47.

[51] No se trata para el estagirita de un mundo aparte de entidades subsistentes por sí mismas, sino de un grupo de atributoa que por abstracción obtenemos de las sustancias. Lo importante es que el saber que se obtiene por medio de la técnica o la prudencia no es susceptible de demostración porque no recae sobre lo que es necesariamente.

[52] Carlos Pereda señala que no es necesaria para el platónico la postulación de tal facultad de percepción no sensorial. Cfr. Pereda, C. "Un Mapa de Ontologías", Diánoia, México 1989. No entraremos en esta cuestión.

lingüística, desde el inicio de *Investigaciones Filosóficas*. En efecto, se trata de otra cara de la concepción nominalista del lenguaje.

Por otra parte, de las consideraciones de Wittgenstein se deriva una forma distinta de elucidación. Lo que constituye el sentido de un enunciado es su uso en las prácticas de una comunidad determinada. Si una proposición nos aparece con el carácter de necesaria, ello no puede provenir más que de la propensión de nuestra colectividad a considerarla así. Si nos atenemos al empleo que hacemos, por ejemplo, de una proposición matemática ya demostrada, observaremos que, en lo sucesivo, la consideraremos verdadera y, de tal forma, que su verdad no puede ser contrastada por la experiencia ni, en general, refutada por otro teorema que se demuestre posteriormente. Al contrario, la proposición ya demostrada funciona como un nuevo criterio para estimar y describir futuras experiencias, dentro y fuera de las matemáticas. Un ejemplo sencillo nos lo suministran las proposiciones de la geometría elemental que constituyen, algunas veces, la base para determinar que una medida fue realizada correctamente[53]. Aquí el defensor de una concepción tradicional de la necesidad no aceptaría la afirmación de que el criterio provisto por la geometría sea nuevo, excepto en un sentido psicológico. Según su punto de vista, la demostración matemática no hace más que desarrollar lo que se hallaba implícito en la definición[54] de los conceptos que en ella intervienen. Es esta otra faceta de la concepción que supone a los significado de las palabras como cuerpos geométricos, casi invisibles, adheridos a la superficie de éstas. En cambio a Wittgenstein, las consideraciones acerca de la regla, así como su diferente idea de la forma como funciona nuestro lenguaje, le permiten concebir a la prueba matemática no como un desarrollo, sino como una ampliación de los conceptos que en ella intervienen[55]. El matemático no es el explorador que descubre un territorio de penoso acceso, sino el creador de una trama conceptual con la cual investigamos y describimos la realidad[56]. Su disciplina es más bien de carácter normativo. Esta concepción tan

---

[53] PG, II, Cap. III, p. 320: ""The sum of the angles of a triangle is 180 degrees" means that if it doesn't appear to be 180 degrees when they are measured , I will assume there has been a mistake in the measurement. So the proposition is a postulate about the method of describing facts, and therefore a proposition of syntax."

[54] .O en los axiomas de la geometría.

[55] Cabe recordar que esta idea de la ampliación de conceptos en matemáticas ya estaba implícita, en el periodo intermedio, antes de que las consideraciones sobre la regla estuviesen desarrolladas, y era probablemente un resultado del principio de verificación.

[56] RFM I, 167 y 167.

novedosa de las matemáticas se desprende directamente del núcleo de la filosofía wittgensteiniana: sus consideraciones en torno a las reglas y su descripción del funcionamiento de nuestro lenguaje. Habremos de ver con detenimiento sus implicaciones a la luz de ejemplos matemáticos concretos.

El Estatuto Gramatical de los Enunciados Matemáticos

Empecemos con el carácter normativo de las proposiciones matemáticas. Wittgenstein dice:

"Aceptar como incontrovertiblemente cierta una proposición significa -yo diría- usarla como regla gramatical: con ello se la sustrae de la incertidumbre."[57]

¿Qué significa esto? Wittgenstein usa el término `gramática' en muy variadas formas, pero en general por `gramática' de una expresión se refiere a las reglas de su empleo en el lenguaje ordinario, o bien a la descripción de dichas reglas. Es muy difícil formular explícitamente estas normas de uso de los vocablos, a pesar de que son conocidas por los hablantes en la medida en que estos dominan la práctica de su lengua. Wittgenstein compara esta situación a la de quien puede viajar sin perderse por las calles de una ciudad y es -sin embargo- incapaz de dibujar un mapa de la misma. El lenguaje cotidiano es fuente de confusión porque su gramática está oculta y tiene que ser develada mediante un ejercicio intelectual.

Existen, por lo menos, dos grandes categorías de proposiciones gramaticales. Unas son enunciados explícitos de reglas para el empleo de una expresión y elucidaciones sobre los diferentes matices en el uso de un vocablo en circunstancias diversas, Vgr. la observación wittgensteiniana de que las palabras `finito' e `infinito' aplicadas al vocablo `clase', no funcionan como dos adjetivos que modifican un mismo sustantivo[58]. El otro tipo de enunciados gramaticales está formado por aquellos que regulan implícitamente el uso de una expresión proporcionando una pauta de dicho empleo. Por ejemplo, la proposición "un segmento de recta es infinitamente divisible" es de carácter gramatical, pues no podría verificarse, ni falsarse físicamente[59]. De hecho, en el espacio visual la divisibilidad tiene un límite impuesto por los alcances determinados de nuestra agudeza óptica. Pero aquella

[57] RFM III-39.
[58] WWK p. 90
[59] WW. p. 201-203.

proposición que parece informarnos de las propiedades de las rectas en el mundo geométrico, expresa solamente la decisión[60] de utilizar las palabras de un cierto modo.

Moore objetó a Wittgenstein el estar utilizando la palabra 'gramática' de una forma que difería esencialmente de la usual. Pues de acuerdo a éste último el enunciado "diferentes colores no pueden estar en el mismo punto del campo visual simultáneamente" es de tipo gramatical, mientras que no lo es desde el punto de vista de la gramática escolar. Wittgenstein contestó que la gramática es la misma, pero que mientras una falta de concordancia entre el sujeto y el verbo de una oración es completamente inocua, un error como el de suponer que esa proposición relativa a los colores es empírica, provoca confusiones filosóficas.

Gran parte de sus observaciones relativas al problema de los fundamentos de las matemáticas denuncian este clase de errores.

Sin embargo, ¿cómo puede decir Wittgenstein que la proposición "diferentes colores no pueden estar en el mismo punto del campo visual simultáneamente" es de tipo gramatical, si claramente describe una imposibilidad constatada por nuestra imaginación? Para Wittgenstein la imposibilidad[61] es una cuestión gramatical, pues decir que algo es imposible es determinar que carece de sentido el afirmarlo (así como el negarlo). Claro está que no hablamos de imposibilidad física como si dijéramos "es imposible correr la milla en menos de 3'". En este último caso es posible describir lo que sería una carrera de una milla en que el ganador cruzara la meta en menos de tres minutos. No obstante no podemos describir la presencia simultánea de dos colores en el mismo punto visual. Pero "cualquier cosa que puede ser descrita puede pasar".[62] Wittgenstein explica que si, por ejemplo, describimos la correlación entre XXX y OO es que podemos correlacionarlos. Pues el que afirma que nunca podrá establecerse dicha correlación, en realidad está aseverando que a ninguna relación de esos dos grupos lo llamará una correlación 1-1. Por tanto, esta

---

[60] Es importante recordar las reservas explícitas con que Wittgenstein utiliza la imagen de la decisión para describir lo que ocurre a quien sigue una regla. "Dije antes que lo que es posible o imposible es materia de selección arbitraria"..."La palabra 'sinsentido' es usada para excluir ciertas cosas, y por diferentes razones. Pero no puede ser el caso que una expresión sea excluida y no completamente excluida... porque al excluirla tuvimos que pensar lo imposible." (WLEC32-35 p.64)" Esta última frase justifica, como más tarde insistiremos, el llamar "arbitraria" a la gramática.

[61] "Dije antes que lo que es posible o imposible es materia de selección arbitraria"...(WLEC32-35 p.64)"

[62] WLEC32-35 p. 166.

es una regla que él da. Es decir, el término 'imposible' nos sirve para determinar el uso que queremos darle a la expresión 'correlación 1-1'. Nuevamente una concepción tradicional del lenguaje invertiría los términos: tenemos perfectamente delimitados o definidos los conceptos de 'correlación 1-1' y de 'posibilidad', y es el escrutinio de sus significados el que nos lleva a constatar la verdad de aquella proposición. Para Wittgenstein se trata, en cambio, de una determinación que extiende los conceptos. Vemos así cómo a la base de su noción de gramática se hallan sus consideraciones sobre la regla.[63]

"La aplicación de un enunciado matemático que ocurre en nuestro lenguaje no es mostrarnos lo que es verdadero o falso sino lo que hace sentido y lo que es sinsentido. Esto se mantiene para todas las matemáticas -aritmética, geometría, etc"[64]

Al considerar a la matemática como una investigación gramatical varios problemas filosóficos desaparecen. No es necesario preguntarnos ya por la fuente necesidad apodíctica, ni por la vía de acceso a nuestro conocimiento de ella. Asimismo queda explicada la aplicabilidad de las matemáticas en las ciencias empíricas o en la tecnología. En efecto, para Wittgenstein las proposiciones gramaticales son sólo marco de referencia, hasta cierto punto arbitrario, para la descripción del mundo. En este sentido, son comparables no a movimientos en un juego, sino a sus reglas. Es lo que Wright describe diciendo que los enunciados matemáticos son antecedentes a la verdad.

En cuanto a las analogías con que Wittgenstein pretende hacer evidente, o al menos inteligible, la supuesta independencia de la gramática con respecto a toda verdad, el propio C. Wright nos muestra su inadecuación. Nos referimos a las reglas elásticas[65], a la comunidad en que se paga el precio de un montón de leña según el área que esta ocupa al caer[66], a la equiparación de una verdad lógica con la transformación de pulgadas a centímetros[67], etc. En el último caso, por ejemplo, la determinación de que una pulgada es 2.54 cm es una regla que se fija en un momento determinado, a raíz de una generalización empírica. En eso hay una

[63] Esto válido para el periodo que comentamos. Ver nota 55.

[64] WLEC32-35 p. 152.

[65] RFM I, 5.

[66] RFM I, 149.

[67] RFM I, 9.

semejanza con la matemática: la de situarse más allá de la experiencia, a partir de una experiencia particular (que es la prueba). La objeción de Wright es que ese proceso de conversión, que efectivamente proporciona un nuevo criterio de medición correcta, tiene que ajustarse a una realidad preexistente. Es decir, la regla '1 pulg.=2.54 cm' no puede ser arbitraria. Asimismo la crítica de Wright incide sobre el punto que a continuación se ejemplifica: Wittgenstein intenta mostrarnos que las reglas que presiden nuestras prácticas, Vgr. la de contar, no tienen porqué adaptarse a nada externo por relación a lo cual puedan resultar acertadas. Nuestra forma de contar no es correcta o incorrecta, sino que es un juego del lenguaje que posee sus propios criterios de corrección (podría tratarse, en todo caso, de una práctica poco útil). Para ilustrar el caso, Wittgenstein imagina una colectividad que mide con reglas elásticas. Wright observa[68] que no estamos autorizados a emplear la palabra 'medir' para describir tal comportamiento. O bien, si las usamos puesto que, por ejemplo, sabemos que los miembros de ese grupo llevan a cabo tal actividad con los mismos fines que nosotros, entonces debemos reconocer que su forma de 'medir' es defectuosa. Habría entonces un criterio externo de corrección.

Es importante advertir que la inadecuación de los ejemplos de no es accidental. Dicho sea de paso, esto es algo con lo que habremos de enfrentarnos muy frecuentemente en lo que sigue. La filosofía de Wittgenstein es un esfuerzo para escapar del "embrujo" del lenguaje a través del lenguaje mismo. Si todos los criterios de corrección de que disponemos son internos a la gramática de nuestro lenguaje, no podremos describir una práctica de medir o de contar diferente de la nuestra, sin que nos parezca fatalmente errónea. Pero si la idea de la arbitrariedad de la gramática es consecuencia lógica de las anteriores consideraciones sobre el lenguaje y las reglas, no tiene por qué no ser aplicable a todos los sistemas de proposiciones 'a priori': "Las leyes de la lógica, por ejemplo, la del tercero excluido y la de contradicción, son arbitrarias. Esta proposición es un poco repulsiva pero, sin embargo, verdadera."[69]

Hay otra perspectiva desde la cual la gramática no es arbitraria: la elección de una unidad, por ejemplo para la determinación del tamaño de los objetos de la vida diaria, se adecua a ciertos hechos empíricos, en nuestro caso a las dimensiones del

---

[68] Wright 1980, Cap. I secc. IV. Para la referencia completa ver nota 23.
[69] WLEC32-35, p. 72.

cuerpo humano. Pero sobre todo está el hecho de que la propensión que nos impele a seguir la regla como lo hacemos está enraizada en nuestra forma de vida.[70]

No obstante las dificultades para ilustrar la arbitrariedad de la gramática, la idea de Wittgenstein es clara: hay una diferencia entre enunciados gramaticales y empíricos, en lo que a sus funciones se refiere. La verdad y la falsedad son atributos de estos últimos, y no de los primeros. Tal distinción es la que existe entre las condiciones de posibilidad de la representación y aquello que puede ser representado, análoga a la que hay entre las reglas del ajedrez y las tiradas en el mismo. Asimismo una sociedad que utiliza operaciones aritméticas distintas de las nuestras, tiene otra forma de vida con diferentes juegos del lenguaje. No podemos considerar que hay una cuestión, por ejemplo sobre la cantidad de objetos que se hallan en total en dos grupos separados, a la que es posible responder de diversas maneras, con aritméticas diferentes, una correcta y otra equivocada. Más bien, la pregunta misma pertenece a un juego del lenguaje, que contiene una posibilidad única de solución acertada[71].

Cabe aquí hacer notar que esta clasificación de las proposiciones en empíricas y gramaticales no es rígida. Ello se debe a que no depende de las características formales o lógicas de los enunciados, como ocurría con la división de los juicios en 'analíticos', 'a posteriori', y 'sintéticos a priori'. Lo que importa es la forma en que una proposición es utilizada y que puede variar de un momento a otro. La gramática está ligada a los cálculos y a las demostraciones, mientras que las aseveraciones empíricas son muchas veces el resultado de experimentos. Así, siguiendo un ejemplo de Wittgenstein[72], la proposición de que el peso específico del acero es 7.5 es experimental. En cambio, se transformaría en un enunciado gramatical si mantuviéramos la decisión de no considerar como acero a nada que no tuviera ese peso específico.

<u>El Interior de la Prueba</u>

---

[70] ""¿Quieres decir, por tanto, que 'ser verdadero'significa ser utilizable (o provechoso)?"- No sino que de la serie natural de los números -así como de nuestro lenguaje- no se puede decir que es verdadera, sino que es útil y, sobre todo, que es utilizada." RFM I, 4.

[71] ""Es interesante conocer cuántas vibraciones tiene esta nota". Pero sólo la aritmética puede enseñarte esta pregunta. Ella te enseña a ver esta clase de hechos. Las matemáticas -quiero decir- te enseñan no sólo la respuesta a una pregunta, sino todo un juego del lenguaje con preguntas y respuestas." (RFM,)

[72] WLEC32-35 p. 160.

En matemáticas, el medio por el cual una proposición empírica se transforma en una regla gramatical, es la prueba. Además, según Wittgenstein, la demostración dota de sentido al teorema[73] o, por lo menos, le da un sentido nuevo[74]. Esta última propuesta, que estudiaremos con detenimiento en el capítulo siguiente, es quizá la que mayores dificultades ha provocado en la interpretación de la filosofía wittgensteiniana de las matemáticas. Por ahora nos detendremos brevemente en otra cuestión relacionada con ella: ¿cómo funciona la prueba? Qué es lo que, en el interior de ese mecanismo, confiere a un enunciado un estatuto diferente?

A la epistemología tradicional se le plantea aquí una pregunta similar, pero mucho más compleja, puesto que concibe a la demostración como el medio por el cual accedemos al conocimiento de una región ontológicamente peculiar. Han sido muchas las explicaciones dadas por la filosofía respecto a la forma en que ocurre la demostración matemática como reconocimiento de una verdad necesaria. Podemos -sin embargo- clasificarlas en tres grandes tipos, aunque nuestra intención no es ofrecer una catálogo completo, más bien quisiéramos mencionar simplemente las propuestas clásicas para contrastarlas con la de Wittgenstein. Para una de ellas, las proposiciones matemáticas son de carácter analítico, y la demostración exhibe el despliege de las virtualidades implícitas en los conceptos que en ella intervienen. Claro que para una versión más moderna, la de los logicistas, por ejemplo, sería tal vez más acertado decir que el contenido implícito en los axiomas está constituido por el conjunto de sus consecuencias lógicas, y no que éstas muestran el desarrollo de aquél. En todo caso, lo que caracteriza a esta clase de propuestas es la negativa a aceptar que la prueba matemática dependa de algún tipo de intuición espacial o numérica. Un ejemplo paradigmático es la obra de Bernard Bolzano, quien demostró el teorema del valor intermedio[75] de una forma puramente analítica.

La segunda clase de respuestas a la cuestión planteada comprende al kantismo y a sus sucesores. Supone que la demostración matemática está compuesta de dos actos de naturaleza muy distinta: uno de corte analítico, y otro de carácter sintético. Por ejemplo, en la prueba de que los ángulos interiores de un triángulo miden dos rectos se emplean las propiedades ya demostradas relativas a los ángulos. Es decir,

---

[73] PG 375 "the proof belongs to the sense of the proved proposition".
[74] "A proof alters the grammar of a proposition" (PG 367).
[75] El teorema afirma que una función continua y, en particular un polinomio, que tiene signos diferentes en los dos extremos de un intervalo, se anula en algún punto interior del mismo.

se hace valer trivialmente el hecho de que tenemos una figura compuesta de ángulos. Pero además, se requiere de la intuición estrictamente geométrica con la que se deriva la especie 'triángulo' del género 'figura rectilínea'(*). Así la prueba no puede ser solamente analítica. En este rubro podemos colocar a los intuicionistas, aunque su filosofía difiera de la kantiana, porque hacen depender a la demostración aritmética de la intuición básica de la numerosidad.

Podemos hablar una tercera posibilidad, si bien lo haremos con ciertas reservas. Nos referimos al formalismo, al cual habremos de analizar con cuidado en un capítulo posterior. En él quedará claro a qué se debe nuestro recelo. En todo caso, el formalismo combina las dos explicaciones que hemos dado, la analítica para los pruebas formales y la intuitiva para la demostraciones metamatemáticas.

Para Wittgenstein en cambio, la situación es diferente. Puesto que la proposición matemática es una regla para la representación, y no un enunciado descriptivo necesariamente verdadero, una prueba será cualquier operación que confiera ese estatuto a una proposición. En ese sentido, su labor no es explicativa, sino meramente descriptiva. Shanker[76] observa a este respecto, y compartimos completamente su opinión, que lo importante para la filosofía de las matemáticas no es determinar lo que es, o deba ser, una demostración, sino analizar qué significa el calificar a un enunciado como teorema, y a un proceso como prueba. Además Wittgenstein, a diferencia de Frege, no consideraba que un concepto tuviera que estar rígidamente delimitado para funcionar como tal. Al contrario Wittgenstein constató que el usuario normal del lenguaje no tiene un conjunto de reglas fijas para el uso de sus palabras, ni tiene por qué tenerlo[77]. Por ejemplo, del islote en que se halla el Mont Saint Michel que cuando la marea está alta queda rodeado de agua, y el resto del tiempo puede llegarse a él caminando, ¿debemos decir que es una isla o una península? ¿O que a veces es una cosa y a veces la otra?, y si así fuera ¿cuál es el punto exacto de transición?. No lo sabemos, pero no por ello esas palabras carecen de significado. Asimismo si una persona explica "cuando dije 'Dante' hace un momento me refería a la persona que escribió la *Divina Comedia* y *Vita Nuova*, que vivió en Florencia y amó platónicamente a Beatriz Portinari", ¿debería esa

(*) Veáse una muy buena explicación de este punto en la obra de Ortega y Gasset *La Idea de Principio en Leibniz*

[76] Shanker 1987, p. 76.

[77] Cfr. Ph I 65-78.

persona comprometerse con su explicación, y no cambiarla en lo sucesivo?, o por lo menos ¿debería ser capaz de hacer explícito un criterio fijo y preciso, que le permitiera decidir si la expresión "Dante no existió" es verdadera o falsa en caso de que se le demuestre, Vgr, que ningún enamorado de Beatriz escribió *Vita Nuova*?. Como Wittgenstein nos hace ver, nadie tiene criterios estrictos para todo tipo de situaciones en que usa una palabra. El hablante muchas veces se encuentra desconcertado o elige, para explicar su empleo, digamos de un nombre en alguna circunstancia concreta, una descripción que tal vez difiera de la que habría proporcionado en otro momento.

De igual forma, el intento de delimitar el concepto de 'prueba' parece completamente innecesario. Si nos imaginamos retrospectivamente la caracterización que algún matemático en el siglo XVII podría haber dado de lo que era la demostración, sólo constataríamos su imposibilidad de prever el futuro. En este sentido, la historia de las matemáticas parece darle a Wittgenstein la razón: no sólo por la gran variedad de las pruebas que se han dado, sino también porque podemos considerar a las escuelas clásicas en el problema de los fundamentos como intentos frustrados de normar o caracterizar a la demostración matemática. A este carácter abierto del concepto de prueba alude la siguiente cita tomada de sus clases en Cambridge: "Si se le da a alguien una idea de demostración proporcionándole una serie de demostraciones, entonces, si se le pide una nueva demostración, se le pide una idea de demostración nueva"[78]

Hay otro punto en el cual la prueba del teorema de Gödel corrobora la postura de Wittgenstein: ofrece una forma de demostración completamente novedosa hasta ese momento. Así parece haberlo constatado Wittgenstein, según el testimonio de Kreisel:

"Una anécdota de los años cuarenta...: algunos días después de varios comentarios sucintos, razonables, [y] de demostraciones de incompletud gödelianas, Wittgenstein se dijo entusiasmado , que Gödel debía [tout de meme] ser un matemático extraordinariamente original, puesto que deducía proposiciones aritméticas de propiedades tan banales -sobrentendido: metamatemáticas- como la

[78] WLEC32-35 p. 9, o PG. p. 300.

WF (consistencia). Gödel había descubierto un método de demostración completamente nuevo."[79]

De todas formas aunque Wittgenstein no tenga por qué indagar la supuesta esencia de la prueba matemática, sí ofrece algunas descripciones de lo que ocurre en ciertas demostraciones muy elementales. Múltiples ejemplos que aparecen en *Remarks on the Foundations of Mathematics* se encaminan a mostrar que la prueba matemática es una operación en la que se resaltan ciertos aspectos o conexiones, para tomarlos como paradigmas de la representación. La demostración es así descrita como un modelo que conduce a tomar el resultado como parte integrante de la identidad del proceso. Wittgenstein repara, con acierto y, tal vez contra un tipo de formalismo demasiado tosco, que una simple serie de dibujos pueden tener ese efecto de sustraer a una proposición de los alcances de la duda empírica[80]. Y en ello la serie de imágenes no se distingue de una demostración formal, puesto que se trata finalmente de otra especie de símbolos sometidos a sus propias reglas de manipulación. Wittgenstein alude en las *Investigaciones Filosóficas* a las demostraciones de la matemática hindú[81] para señalar este aspecto visual de la prueba. Sin embargo, no se refiere allí a una constatación realizada con la vista y elevada a la categoría de regla por una inducción dudosa, sino a algo más sencillo: todos sabemos que con una sucesión de trazos en el papel, se puede convencer a alguien de que acepte la igualdad pitagórica como un nuevo criterio de la rectitud de un triángulo. Decimos entonces que el resultado 'se ve' en el diseño.

Dejando de lado la desconcertante sencillez de los ejemplos con que Wittgenstein ilustra este punto, y que distan mucho de ser demostraciones matemáticas, debemos señalar nuevamente que una explicación de porqué aceptamos algo como prueba es irrelevante en el marco de su filosofía. Lo importante es la descripción del estatuto que adquiere un proceso al ser aceptado como prueba, o una proposición al ser admitida como teorema, por ejemplo, que este último se considera parte constitutiva de aquél, que ambos devienen intemporales, etc.

---

[79] Citado en Bouveresse, J. *Le Pays des Possibles*, Editions de Minuit, Paris, 1988, p. 86. En lo sucesivo, este texto será citado con la referencia Bouveresse 1988.

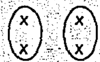
[80] Que es lo que transforma un proceso visual en una demostración. Cfr. por ejemplo, RFM I, 165, III, 24, o VII, 8, WLFM p.71

[81] Ph I 144.

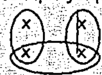
Análisis de un Caso Concreto.

Sin embargo, la consideración de uno de los ejemplos que aparecen al inicio de *Remarks on the Foundations of Mathematics* nos puede llevar a nuevas indagaciones sobre la concepción wittgensteiniana de la prueba:

"Basta que contemples la figura



para ver que 2+2=4." Entonces basta con que yo que mire la figura



para ver que 2+2+2=4."[82]

Lo que se advierte inmediatamente es que se trata de un diálogo, en que parece decirse `si no tienes más que esa razón para aseverar que 2+2=4, entonces puedo proporcionarte igualmente una nueva justificación de que 2+2+2=4', o bien, `Es suficiente con que resaltáramos otro aspecto de la figura, o que la viéramos desde otra perspectiva, para que nuestra aritmética fuera distinta'.

Desde luego, a Wittgenstein le interesa remarcar la posibilidad de una aritmética diferente para hacer plausibles, o ilustrar al menos, sus conclusiones sobre la regla y sobre la autonomía de la gramática. Pero vayamos con cuidado. La parte entrecomillada de ese parágrafo, resalta, como ya hemos mencionado, el carácter visual de la prueba, en abierta oposición a cierto tipo de formalismo y logicismo, por ejemplo a la postura que sólo concede el título de matemáticas a teorías axiomatizadas en sistemas formales. El ejemplo convierte en paradigma la división de un grupo de 4 objetos en un par de secciones de dos; nos muestra la conexión entre ambas configuraciones y la utilidad de dicha práctica. Ahora bien, el contraste con la segunda parte del ejemplo nos deja la impresión de enfrentarnos más bien a una necesidad constatada por la imaginación: ¿Es que podemos pensar siquiera en la posibilidad de que la suma de 2 y 2 diese otro resultado diferente?

---

[82] RFM, I, 38.

Craig ha escrito a este respecto[83] que la imposibilidad de imaginar la negación de una proposición necesaria es la justificación que tenemos para aceptarla como tal. De allí deriva un argumento en favor de la posición kantiana según la cual la comprensión de ciertas formas de proposiciones necesarias requiere una referencia a la intuición pura 'cuasi perceptual'. Es decir, nosotros tenemos como criterios de que hay 4 objetos en un recipiente: a) el contar 4 en total b) el percibir 2 objetos en cada uno de sus únicos dos compartimentos. Para Wittgenstein la adopción del criterio b), incluso a veces por encima del formulado en a), obedece a una elección arbitraria. Craig, en cambio y de acuerdo con el sentido común, advierte que esos dos criterios no podrían entrar en conflicto, y que la razón para aceptarlos como equivalentes radica en la imposibilidad de imaginar un desacuerdo entre ellos.

La interpretación, sugerida por C. Wright y Bouveresse, a este respecto nos parece inverosímil.[84] Según ésta lo que Wittgenstein propone es que la demostración establece, de forma hasta cierto punto arbitraria, el tránsito entre una imposibilidad fáctica de imaginar una situación y la regla que la proscribe. Es, en efecto, concebible el caso de alguien que aún sabiendo que no puede imaginar la situación en el que un par de grupos de 2 objetos cada uno formarán un conjunto de 5 objetos, se negara a tomar como regla la proposición $2+2\neq5$. Bouveresse dice: "Y el resultado de esta resolución 'gramatical' es que la cosa inimaginable deviene una cosa que no solamente no podemos representarnos, sino que, desde ahora, no tiene sentido intentar representar."[85] También es cierto que la imposibilidad es para Wittgenstein una cuestión gramatical, es decir algo atinente al discurso, y no una 'sombra de lo real'.

Sin embargo, hay un punto en esta interpretación que la hace, por lo menos, muy improbable. La imaginación no parece simplemente sugerir una forma de representación, como las dimensiones del cuerpo humano sugieren la adopción de un metro patrón de cierto tamaño. Claro que no es ésta la única metáfora empleada en *Remarks on the Foundations of Mathematics* para ilustrar el carácter arbitrario de la gramática. Si pensamos en la adopción de la regla '2.54 cm=1 pulg.' como

[83] Comentado en Bouveresse, J. *La Force de la Règle*, Editions de Minuit, París, 1987. En lo que sigue citaremos esta obra con la referencia "Bouveresse 1987".
[84] Ver la lección XXIV de WLFM: "People say,: "There is no such thing as reddish green." There is no reason why we shouldn't call *black* reddish green." (p. 233)
[85] Bouveresse, 1987, p.119.

inspirada por una generalización de hechos empíricos, nos hallamos ante un caso similar al de arriba. Wittgenstein aclara que nosotros no podemos decir que una regla gramatical se conforma o contradice los hechos. La elección de una unidad de medida no es arbitraria en el sentido en que se conforma a las medidas del cuerpo humano y es práctica. Pero nada impediría, en principio, que postulásemos 7 colores primarios o 4 dimensiones a nuestro espacio[86] , o bien 4 raíces de una ecuación cuadrática[87].

"Decir que una regla gramatical es independiente de los hechos es meramente recordarnos de algo que podríamos olvidar. Y el punto de remarcarlo es prevenirnos contra un peculiar malentendimiento."[88]

¿De qué confusión nos libra Wittgenstein? Del suponer que la gramática es adecuada o deficiente con respecto al mundo externo:

"El error que estamos propensos a cometer es pensar que una palabra, digamos 'negación', describe un fenómeno al cual la gramática de la otra palabra se conforma. Pero la gramática de una palabra debe conformarse a la gramática de la otra, no a un fenómeno."[89]

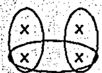
La cita anterior de Bouveresse concede a la imaginación un lugar trascendente a toda gramática, pues supedita ésta a aquélla. En tal caso tendríamos una justificación de la gramática que podría o no ser correcta. El paso de constatar un hecho de la imaginación (la imposibilidad de representarse una situación determinada) a establecer una regla que proscribe la descripción de esa situación, sería una acto aventurado. Como si dijéramos: 'no puedo imaginar un caso en el que 2+2=5, pero no por ello puedo eliminar esta posibilidad, y si lo hago, será a mi cuenta y riesgo'. Y como si ese caso eliminado arbitrariamente pudiese, de algún extraño modo, ocurrir a pesar de todo. Alguien objetará aquí que esto nos parece absurdo justamente porque una de nuestras reglas de representación es '2+2=5', es decir, hemos acordado a un nivel 'prelingüístico' no describir como posible ninguna circunstancia como ejemplo de que 2+2=5. En efecto así es; no obstante tenemos que reconocer que la postura que aquí debatimos implicaría la existencia de un criterio objetivo y externo, aunque fuese humanamente inaccesible, de corrección de

[86] WLEC32-35 p.65 y 66.
[87] WLFM p.151.
[88] WLEC 32-35 p.65
[89] WLEC 32-35 p.65.

la gramática. No parece que esta fuese la idea de Wittgenstein. La gramática es arbitraria porque cualquier intento de justificarla trasciende los límites del sentido. Así la proposición 'no debemos eliminar la posibilidad de un caso en el que 2+2=5, aunque sobrepase nuestras capacidades imaginativas', no tiene sentido. Decir que se refiere algo posible pero inexpresable en el lenguaje, sería de nuevo dejarse llevar por la gramática superficial del lenguaje.[*]

Consideremos ahora la parte final del parágrafo citado:

"Entonces basta con que yo que mire la figura



para ver que 2+2+2=4·". Parece aludir al momento en que resolvimos convertir a la igualdad '2+2=4' en una regla de la representación[90]. Por supuesto que no se refiere necesariamente a un periodo real de tiempo, como si propusiera una hipótesis sobre la génesis histórica de la gramática. Más bien se trata de un ficción, similar a la de Rousseau en su libro el origen de la lenguas, que ilustra las condiciones de posibilidad en la adopción de una regla. Sugiere que pudimos tomar una decisión distinta, que diera pie a otra aritmética. Bastaba con que la prueba hubiese resaltado un cierto aspecto, o conexiones diferentes de las habituales, y que esto hubiese sido tenido alguna utilidad en nuestras prácticas. Hay un ejemplo de I. Hacking[91] que con mayor verosimilitud nos evoca la posibilidad de llegar, en nuestra aplicación de una regla, a una encrucijada en la que tuviésemos que tomar una decisión, aunque no necesariamente fuésemos conscientes ni de la ambigüedad presente ni de nuestra elección. Se trata de una imprecisión en las reglas que presidían el juego de ajedrez antes de 1924. En ese año, según Littlewood, y en el curso de una partida la situación llevó a los jugadores a percatarse de la siguiente dificultad: Las reglas

---

[*]A este respecto Shanker dice acertadamente: "Pues una cosa es imaginar que alguien podría adoptar un sistema de geometría diferente, y otro imaginar un sistema de geometría distinto. En el primer caso, estamos meramente suponiendo que alguien podría construir diferentes reglas de geometría, pero en el último estamos tratando de imaginar algo donde 'ex hypothesi' no tenemos reglas que nos guíen. Los límites de la imaginación están, sin embargo, -a pesar del fervor poético de Shelley-, confinados por lo límites del sentido." (Shanker, 1987,.p. 245)

[90] "Podría decirse que la demostración originalmente ha de ser una especie de experimento, pero que se la toma después como una imagen". RFM, III, 23.

[91] Citado por Bouveresse.

establecen que si tres veces durante una partida se presenta la misma configuración de las piezas, uno de los jugadores puede pedir el empate. Pero no queda claro si se refiere a una identidad numérica. Por ejemplo, no se sabe si deben considerarse como las mismas a dos distribuciones de las piezas que sean iguales a la vista, aunque difieran sólo en esto: el lugar que en una ocupa el alfil negro del rey, en la otra lo ocupa el alfil negro de la reina, y viceversa. Hacking considera la posibilidad de que no hubiese sido advertida aquí ninguna imprecisión. En efecto, los miembros de la comunidad de ajedrecistas podrían haber reaccionado de forma natural como si interpretaran la regla en u otro de los dos sentidos. Claro que lo interesante del caso es que mientras que nosotros notamos una bifurcación, podemos imaginar una colectividad que no la hallara. Es decir una colectividad para quien la regla prescribiera con absoluta necesidad seguir de una de las dos formas posibles. Esto nos lleva a pensar a nuestras reglas como minadas de posibles equívocos, que no percibimos como tales porque hemos 'elegido' tomar uno de los senderos de la encrucijada.

Hacking ilustra el papel de la prueba matemática con este ejemplo: supongamos una colectividad en que se juegue ajedrez, y en la que dicha imprecisión en la regla no hubiese sido descubierta. Una razón para ello es que no se ha llegado nunca, en el curso de las partidas hasta entonces jugadas a la configuración de las piezas descrita. Imaginemos que una matemático demuestra un teorema relativo a esa configuración siguiendo explícitamente una de las dos posibles interpretaciones. Por ejemplo, el teorema enuncia algo así: "A partir de situaciones de tipo X un jugador puede siempre, siguiendo una estrategia adecuada, empatar el partido", y el matemático se ha valido de la interpretación que alude a la identidad numérica. De acuerdo a Hacking, la demostración fijaría el concepto, es decir, eliminaría la virtual ambigüedad. La aceptación de la demostración equivaldría a la decisión de descartar todo posible contraejemplo que hiciera uso de la otra interpretación.

Sin embargo, como ha sido señalado, la comunidad en cuestión sólo aceptaría como válida la prueba, si no advirtiera ninguna ambigüedad en la regla. De esta forma, la demostración suprimiría una ambigüedad visible desde el exterior, pero inexistente para los individuos de esa colectividad. Con este ejemplo, aparentemente, podríamos reivindicar la posición según la cual la gramática se supedita a la imaginación. Bastaría con suponer que los miembros de esa comunidad no pueden imaginarse la otra posibilidad (en este caso la interpretación no numérica), y que es eso lo que los lleva a admitir la corrección de la prueba. En realidad no es así por dos razones:

a) Al suponer que los individuos de una sociedad no pueden imaginar algo, hacemos una hipótesis dudosa que, no obstante, parece muy plausible porque justamente la proposición 'no es imaginable que ocurra no P' (donde 'p' representa un enunciado necesario), expresa una regla gramatical de nuestro lenguaje.

b) Aún admitiendo que las capacidades imaginativas de los integrantes de esa comunidad no fuesen suficientes para hacerles ver la ambigüedad de la regla, su gramática sería, de cualquier forma, arbitraria. Es decir, el ejemplo nos muestra cómo la opción a que la práctica conduce en el interior de ese grupo, no provocaría un conflicto con lo hechos. No hay criterios externos con los que pudiéramos justificar o descartar los suyos.

Lo anterior explica la dificultad que Wittgenstein encuentra para ilustrar el carácter arbitrario de nuestra gramática. En efecto, el ejemplo de *Remarks on the Foundations of Mathematics* que analizamos, como muchos otros del mismo tipo, parece desacertado. Sin embargo, sugiere la posibilidad de contemplar a la aritmética desde una perspectiva novedosa.

CAPITULO III

EL SENTIDO DE LAS PROPOSICIONES MATEMATICAS

Analizaremos ahora dos atributos que, de acuerdo a Wittgenstein, son inherentes a la demostración matemática. El primero, al cual ya hemos hecho mención, es su capacidad de conferir sentido al enunciado que valida. El segundo es su carácter perspicuo o transparente, que hace posible, por ejemplo, reconocer dos versiones de la misma demostración. Muchos intérpretes coinciden en señalar la estrecha interrelación de esas dos peculiaridades en la obra de Wittgenstein, si bien difieren al referir la forma concreta en que se da este vínculo[92]. De nuevo encontraremos aquí versiones revisionistas, que ponen en evidencia los riesgos producidos por una lectura de corte epistemológico.

La idea según la cual el sentido de una proposición matemática es su demostración, aparece formulada de diferentes maneras en los textos wittgensteinianos. La persistencia con que Wittgenstein la esgrime, a pesar de las dificultades evidentes que conlleva, hace ver que se trata de una piedra angular de su filosofía. Inicialmente parece una aplicación a las matemáticas del principio de verificación[93] pues la demostración matemática es análoga en cierto modo al experimento científico, en el sentido en que su función es también justificativa. Por otro lado hay una evidente asimetría entre las ciencias empíricas y las matemáticas. Estrictamente aplicado, el principio de verificación, que Wittgenstein postuló por vez primera, conduciría a concebir a las matemáticas como constituidas de proposiciones analíticas carentes de sentido. En todo caso aún si Wittgenstein pasó por un corto periodo verificacionista[94] pronto recalcó sus diferencias frente al positivismo lógico. Veremos que su propuesta se encamina en una dirección completamente novedosa.

La Interpretación Finitista.

Los dos rasgos que aquí analizamos han dado pie a interpretar la filosofía wittgensteineana de las matemáticas como un antropologismo, o en todo caso, como

[92] Por ejemplo, para Wright (1980) y Dummett (1959) la perspicuidad está relacionada con la certeza.
[93] Aunque Wittgenstein escribe:"Nothing is more fatal to philosophical understanding than the notion of proof and experience as two different but comparabe methods of verification." (PG 361)
[94] Coincidimos con Frascolla en que este periodo iría aproximadamente de 1929 a 1933. Cfr. Frascolla, P. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Routledge, New York, 1994.

alguna especie de finitismo[95]. Contribuye a ello la anécdota según la cual Wittgenstein retomó su trabajo filosófico a partir de una conferencia de Brouwer[96], así como otros fragmentos de su obra en que se esbozan afinidades con el pensamiento de este autor. Por ejemplo, en las conversaciones con Waismann hallamos la siguiente observación: "La pregunta sobre si en π ocurren las cifras 0,1,2,...9, no puede ser una pregunta. Lo único que puedo preguntar es si esas cifras aparecen en un determinado lugar...No se puede, pues, ni afirmar ni negar semejante aserción, ni emplear aquí la proposición del tercero excluido."[97] Es difícil no interpretar ese pasaje como sosteniendo una cierta forma de intuicionismo. Es este el tipo de ejemplos con que Brouwer recusa la aplicación de las leyes de la lógica aristotélica a conjuntos infinitos. Sin embargo, la posición de Wittgenstein a este respecto parecería ser más extrema. De acuerdo a H. Wang, a Dummett y a Kreisel, quienes la califican de finitismo estricto o antropologismo, se trataría no sólo de rechazar el infinito actual, sino también todo aquello que trascienda las capacidades prácticas del hombre. Por ejemplo, según Dummett[98] una proposición como 'todo número es primo o compuesto', que el intucionista aceptaría pues existe un procedimiento de decisión para 'x es primo', no tendría sentido para Wittgenstein. Sus argumentos son los siguientes:

a) si algún fanático dedicara muchos años a decidir que un cierto número x es primo y, más tarde, un matemático diera una prueba avanzada de que x no es primo, diríamos que seguramente el fanático se equivocó en algún punto; "esto muestra que estamos tomando la prueba 'avanzada', y no la criba como criterio de que un número es primo: usamos el teorema como patrón con el cual juzgar el cálculo y no a la inversa. El cálculo no es de uso porque no es *perspicuo*."[99]

b) Pensamos que la proposición 'existe un número non perfecto' tiene sentido, porque las propiedades de ser impar y de ser perfecto son decidibles. Pero si esa proposición fuese probada exhibiendo un número de ese tipo (que tendría que ser muy grande), no es concebible que hubiese sido probada con el algoritmo usual.

---

[95] Por Hao Wang y por Kreisel respectivamente, Cfr. Kreisel, G. "Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics", British Journal for Philosophy of Science, 1958. Wang, H. A Survey of Mathematical Logic, p. 38.

[96] Ver nota 2.

[97] WW p.65.

[98] Dummett 1959.

[99] Ibid, p.180

Tendría que haberse dado una nueva demostración, que contaría ahora como criterio de lo que es ser un número perfecto. "Así la *prueba determinaría qué sentido* debe tener el predicado 'perfecto', para un número de ese tamaño,."[100]

Dummett, sugiere que el tránsito entre las dos filosofías de Wittgenstein es el paso de un realismo sofisticado hacia una forma de convencionalismo. Distingue este autor dos tipos de convencionalismo. El primero -el convencionalismo moderado- supone que las proposiciones necesarias son de dos tipos: 1) las que son expresiones directas de convenciones lingüísticas, y 2) las consecuencias lógicas de las anteriores. Este género de explicación dejaría casi intacto el problema relativo a la naturaleza de la inferencia lógica. La segunda clase de convencionalismo -el radical ("full blooded")- sólo acepta las de tipo 1), es decir que reduce toda especie de necesidad lógica a una convención lingüística de una comunidad determinada. Dummett clasifica la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein en este segundo rubro.

Sin embargo, las ideas de Dummett a este respecto han sido puestas en entredicho por diversos autores. Bouveresse y Shanker[101] ha señalado que una interpretación finitista de las observaciones de Wittgenstein respecto a las reglas puede conducir a una posición revisionista.

En efecto, ¿cómo podríamos compaginar la afirmación de Wittgenstein de que la filosofía deja a la matemática tal y como está[102] con los pasajes de su obra en que se niega que una conjetura matemática tenga sentido?. Además, y considerando sus afirmaciones sobre la regla, no es extraño que se le atribuya cierto tipo de finitismo. Por ejemplo, alguien podría razonar así: "No hay, de acuerdo a su filosofía, ninguna objetividad en la inferencia lógica, sino que esta depende de las decisiones comunitarias. Por tanto la corrección de una inferencia vale en tanto que la colectividad está de acuerdo en legitimarla. Y puesto que la matemática no tiene ninguna realidad fuera de la práctica social, sus criterios de verdad y sentido no pueden trascender los alcances cognoscitivos o psicológicos del ser humano. Así, una conjetura no es verdadera (ni tiene sentido) sino hasta que se le halla una prueba."

[100] Ibid. p. 181, las itálicas no aparecen en el original
[101] Bouveresse 1987 y Shanker 1987.
[102] Ph I, 124.

Evidentemente esta lectura epistemológica de las *Observaciones sobre los Fundamentos de las Matemáticas* es otra faceta de la interpretación escéptica, que hemos venido combatiendo. Recordemos que equivale a tomar al pie de la letra lo que esta dicho en un sentido metafórico. Como si dijéramos: "Puesto que Wittgenstein niega la objetividad de la regla, entonces defiende cierto tipo de subjetivismo." En realidad y como vimos ya, no se trata sino de rechazar una imagen, que viene asociada a nuestras palabras y que inspira falsos problemas. Insistimos además en que una interpretación así sería inconsecuente con la intención descriptiva, y no normativa, del lenguaje filosófico, manifestada en tantos pasajes de la obra que aquí analizamos.

Pero ¿cómo puede entonces interpretarse la afirmación de que un teorema matemático no tiene más sentido que el que le da su prueba? Es una aseveración contraria a la práctica matemática, pues en ella se habla del sentido de una conjetura, de diversas demostraciones de un mismo teorema, o de proposiciones indecidibles. Antes de abordar más a fondo el problema, haremos dos observaciones al respecto. La primera es que Wittgenstein en una de sus clases[103] reconoció que la dificultad surge porque tendemos a pensar a las proposiciones matemáticas como si fueran enunciados empíricos. No advertimos su peculiaridad; pues las proposiciones forman una familia, con sus múltiples parecidos, y no forzosamente comparten las mismas características. Un problema como el de encontrar bacterias de una especie determinada en un cultivo es distinto al de resolver la conjetura de Goldbach, aunque dicha especie se encontrara ya en extinción. En el caso de las bacterias sabemos bien cómo sería el hallarlas, mientras que tratándose de la conjetura una descripción de la forma de resolverla daría ya con la solución. Por tanto, no son equiparables en este sentido, y la palabra 'problema' no tiene en ambos casos la misma gramática. Cuando Wittgenstein relacionó sentido y prueba, no se trataba de encontrar una línea de demarcación entre ciencia y metafísica, sino de hacer visible la gramática de una expresión dada. Con ese fin es adecuado preguntarse cómo se verifica un enunciado, o bien, cómo se puede enseñar a un niño a usarlo en determinadas circunstancias. Si decimos que una proposición no puede verificarse, no la

[103] WLEC32-35 p.195.

descalificamos por ello como carente de sentido; más bien mostramos algo de las reglas con que se la usa en nuestra práctica lingüística[104].

La segunda anotación que quisiéramos hacer es que en algunos pasajes de su cursos sobre los fundamentos de las matemáticas[105], Wittgenstein afirmó simplemente que una conjetura matemática tiene un sentido distinto después que se le encuentra una prueba (a ella o a su negación). Esa es una aseveración bastante más plausible, pues es otra forma de establecer que la prueba matemática produce una extensión de los conceptos.

Demostración y Sentido.

Analicemos detenidamente la cuestión de cómo la demostración instaura la gramática del teorema. Como la gramática de una proposición es el conjunto de reglas de su uso, nos preguntamos aquí por las relaciones entre la prueba y la utilización de un teorema. Claro está que, con respecto a las proposiciones matemáticas, por 'utilización' no debemos entender única ni primariamente aplicación exterior a esta disciplina, como cuando se habla del empleo que en la física recibe el cálculo infinitesimal. Y ello por dos razones. Una es que evidentemente hay una aplicación de un teorema al interior de la matemática. La segunda es que ya hemos admitido que las proposiciones necesarias son normas de la representación, y que por ello el problema de la 'aplicación' de los enunciados matemáticos no se plantea.

La prueba por inducción de una proposición universal en el conjunto de los números naturales, es un ejemplo trivial de cómo la gramática de un teorema es proporcionada por su demostración. Wittgenstein insistió mucho, en la época de las conversaciones con Waismann, en distinguir este caso del de los enunciados que atribuyen una propiedad a todos los miembros de una clase de objetos empíricos[106]. Le interesa evitar la confusión entre ambos casos que conduce a una visión extensional de las matemáticas. Por ello, al hablar de la inducción insiste en que es un error considerarla como un método que nos lleva al establecimiento de una proposición que es distinta de él[107]. Le niega incluso, en algunos fragmentos, el

[104] WLEC32-35 p. 29 y p. 126.
[105] Ver WLFM p.66-67, 73,76, 129, 137.
[106] WW p.34-37, p. 45-47
[107] WW (18.02.29)

carácter de demostración[108], y el de 'proposición' al teorema que de ella resulta. Esto estaba en cierta consonancia con la doctrina del Tractatus, pero lo que importa a nuestro tema es que manifestaba el deseo de mantener separadas dos categorías gramaticales muy diversas. De aquí surge una de las críticas a Russell: su notación para la generalidad es una extensión del uso cotidiano de 'todos' a su uso matemático, demasiado poco cuidadosa de las diferencias gramaticales. Análogamente Wittgenstein advirtió la confusión a que pueden dar lugar los puntos suspensivos, la expresión 'y así sucesivamente', y otras análogas en fórmulas del tipo 'AVBVC...' En algunas ocasiones se trata de indicar que la enumeración es muy larga, en otras se refiere a una serie generada por inducción. Hay también los casos en que se alude a una disyunción finita de posibilidades regulada por la gramática como, por ejemplo, el sistema de los colores primarios, y aquellos en los que se refiere a posiciones en el espacio visual, como cuando se dice 'hay un círculo en un cuadrado' (no hay un número de posiciones que el círculo podría ocupar en el cuadrado; Wittgenstein advierte que en este caso no podría aplicarse la teoría de las descripciones)[109]. Entonces de lo que se trata es de reconocer distinciones gramaticales, vinculadas a diferentes formas de verificación. Dejemos de lado las interpretaciones epistemológicas, para atenernos a una descripción de las diferentes formas en que las expresiones de nuestro lenguaje son usadas. Pero, en esta perspectiva, ¿qué ocurre con las proposiciones matemáticas? Veámoslo detenidamente.

Sabido es que a su retorno a Cambridge Wittgenstein se vio influido por la crítica de Ramsey respecto a la independencia de las proposiciones elementales. En efecto, en el Tractatus se postula la existencia de proposiciones atómicas independientes entre sí. Una de la posibles razones de esto es, de acuerdo a E. Anscombe[110] que la dependencia lógica conlleva una cierta forma de composición, de tal manera que al llenar una tabla de verdad de una fórmula en que los componentes son proposiciones simples, siempre suponemos todas las posibles combinaciones de verdad. Ahora bien, la atribución de dos colores a un mismo punto X del espacio visual es una palpable contradicción (en el sentido en que su falsedad no depende de la experiencia). Pero, a su vez, la inferencia de que X no es de un

---

[108] Ibid.
[109] WLEC32-35 p. 6.
[110] Anscombe, E. *Introducción al "Tractatus" de Wittgenstein*. p. 26-28

color, porque es de otro, no es formalmente correcta. De allí se sigue que proposiciones del tipo 'x es rojo' o 'x es azul' no son atómicas, y que en el análisis de las mismas debía hacerse visible su mutua incompatibilidad. Wittgenstein creyó lograrlo, al reducirlas a enunciados relativos a la velocidad de partículas. Sin embargo, como Ramsey[111] observó, el enunciado que atribuye a una partícula dos velocidades distintas al mismo tiempo no es una contradicción formal. De esta crítica deriva la idea de la gramática, hasta cierto punto como una extensión de la lógica del lenguaje del Tractatus. Pues como lo señala Kenny: "Al haber dejado de creer que las proposiciones elementales eran independientes entre sí [Wittgenstein] cayó en la cuenta de que las regla para la combinación veritativo funcional de oraciones necesitaban ser suplementadas con reglas 'que tengan su raíz en la sintaxis interna de las oraciones'".* (p. 106) En este punto surge también una nueva concepción de las proposiciones en que estas forman diversos sistemas mutuamente independientes. En particular las proposiciones numéricas del lenguaje ordinario no pueden ser ulteriormente analizadas. Con ellas ocurre lo que con las atribuciones de color, el que comprende que hay 3 manzanas en una cesta, sabe que no hay allí cuatro, porque conoce la sintaxis que regula el uso de ese tipo de enunciados.

En matemáticas mas avanzadas es la demostración la que establece los vínculos internos de un sistema, la que da a las proposiciones sentido por el lugar que respectivamente ocupan. A su vez, cada sistema es autónomo con respecto a los otros, aunque pueda haber conexiones entre ellos. Desde luego, esta concepción de las matemáticas evolucionó en los años sucesivos al retorno de Wittgenstein a Cambridge, sobre todo por sus reflexiones sobre el seguimiento de una regla, pero no se modificó en muchos aspectos.

Ejemplo de esos sistemas son la geometría elemental, la aritmética, el campo de los números reales, etc. Y las preguntas o problemas matemáticos tienen 'sentido' referidos a un sistema en el que existe un método para solucionarlas. Wittgenstein dice en una de las conversaciones con Waismann[112] que se puede hacer la pregunta ¿sen2x=tg2x? si se está en la trigonometría elemental pero no

¿es el sen x = x-x3/3+x5/5- +...?

---

[111] Ramsey, F. "Review of the Tractatus" en *Copi, I Essays on Wittgenstein's Tractatus*, Routledge, London, 1966, p. 18

[112] WW p. 31.

Al hacer esta pregunta saltamos a otro sistema. Agrega que el problema de la tripartición del ángulo con regla y compás, en la geometría elemental, sólo tiene sentido en la medida en que movió a tantos matemáticos a intentar su solución[113]. Sin embargo, hay que advertir que, en este caso, es precisamente la solución negativa al problema (demostrada en el sistema del álgebra) la que establece la regla de sintaxis: 'carece de sentido hablar de la trisección del ángulo con regla y compás'. Y no podríamos decir retrospectivamente, y dentro del marco de la filosofía wittgensteiniana, que en realidad esa conjetura nunca tuvo solución (positiva), ni sentido en el ámbito de la geometría ordinaria, sólo porque ahora tenemos la prueba correspondiente.

Una demostración matemática aporta ordinariamente nuevas conexiones entre las proposiciones y nuevos criterios para el uso de los conceptos en ella involucrados. No es difícil conceder que la solución de una conjetura rebasa, muchas veces, el espacio en que esperaba hallársela y en el que la pregunta fue planteada. Un ejemplo muy actual es la célebre demostración de la conjetura de Fermat[114], cuya solución trasciende los limitados alcances de la teoría de números. La solución de un problema matemático crea muchas veces un universo diferente en que es posible hallarle solución. Así ha ocurrido con algunos de los 23 problemas de Hilbert. Por ejemplo, nadie hubiera podido prever cuando fueron planteados que estuviesen vinculadas las soluciones negativas del segundo y del décimo problema, relativos, el primero, a la prueba de consistencia de la aritmética, y el segundo, a la determinación algorítmica de si una ecuación diofantina[115] tiene o no raíces enteras. Pero no todas las conjeturas tienen efectos tan espectaculares. Muchas encuentran su solución dentro de un marco preestablecido. Analicemos primeramente estos casos.

Pensemos en las conjeturas que heurísticamente preceden a la solución de cualquier problema matemático, o a la demostración de un teorema. Sabido es que para los griegos el teorema era un resultado buscado con anterioridad a la prueba,

---

[113] WW p. 32.

[114] Según la cual la ecuación $x^n+y^n=z^n$, con x, y, z y n naturales, no tiene solución si $n>2$. Andrew Wiles, de la Universidad de Princeton, la demostró recientemente.

[115] Una ecuación es diofantina si sus dos miembros son polinomios con exponentes y coeficientes naturales. Se trataba de diseñar un proceso que en un número finito de operaciones determinara para cualquier ecuación dada de este tipo si tiene o no soluciones naturales. Matiyasèvic demostró en 1970 la imposibilidad de construir tal algoritmo.

intuido como correcto; mientras que los corolarios eran proposiciones halladas en la deducción imprevistamente. Esta forma de proceder del matemático que consiste en barruntar un resultado antes de poseer el argumento que lo pruebe, le produce la impresión de que su ciencia investiga un mundo de objetos preexistente a todo conocimiento. Así Euler escribió: "Sin duda, ha de parecer bastante paradójico atribuir gran importancia a la observación en la parte de las matemáticas conocida como matemática pura... Sin embargo, de hecho, como demostraré aquí con buenas razones, las propiedades de los números conocidas hoy han sido en su mayor parte descubiertas por observación, y mucho tiempo antes de que su verdad haya sido confirmada por rigurosas demostraciones... Debemos distinguir cuidadosamente de la verdad el conocimiento que sólo se apoya en observaciones y no ha sido aún probado."[116] Wittgenstein deseaba oponerse a la visión, sugerida por las palabras de Euler, en que las matemáticas aparecen como una mineralogía de los números. Sus indagaciones en torno al lenguaje le llevan a denunciar aquí una confusión que fácilmente conduciría al planteamiento de cuestiones filosóficas. Por ejemplo, podemos preguntar qué son los números, esos entes de los que podemos tener un conocimiento cuasi-empírico, puesto que Euler habla de `observación'. Y Wittgenstein insiste en que el modo correcto de encarar esa cuestión no es buscando una definición sino analizando la gramática de la palabra `número'[117]. Asimismo nos conduciría a falsos problemas teóricos el suponer que por `observación', en el párrafo anterior, debemos entender lo que esta palabra significa en las ciencias empíricas, o como si ambas acepciones se refiriesen a dos facultades, vinculadas como las especies de un mismo género. La gramática en cada caso, debe ser averiguada en el contexto de uso de la palabra.

Lo importante es observar que en el caso de las matemáticas la solución no es independiente del método que a ella conduce. En el lenguaje ordinario el sentido de una proposición es independiente de su verificación efectiva. Entendemos lo que significa el enunciado `la distancia entre los dos aros en esta cancha de Basketbol, medida desde sus centros, es de 22 mts.' porque, entre otras cosas, sabemos cómo podríamos comprobarla en una circunstancia determinada. Y por ello advertimos también que la palabra `distancia' se emplea allí de modo distinto que cuando

---

[116] Citado en Polya, G. *Matemáticas y Razonamiento Plausible*, Tecnos, Madrid, 1966

[117] WLFM, Lecture XVI y WLEC32-35 p. 164.

decimos 'la distancia media entre el sol y la tierra es de 150,000,000 Km'. Tenemos dos métodos distintos de verificación y, por tanto, dos gramáticas diferentes. Sin embargo el comprender esos enunciados no requiere que la comprobación se lleve a cabo. En matemáticas en cambio, el resultado es parte constitutiva del proceso; la prueba establece el sentido del teorema, de tal forma que no es posible entender uno sin el otro. Supongamos que alguien ingenuamente dijera 'no entiendo cómo se ha probado la imposibilidad de trisectar el ángulo con regla y compás. Pudiera darse el caso de un genio en el futuro que lo lograra de un modo no previsto hasta ahora'. Lo correcto sería pedirle que viera la demostración. Allí es donde la expresión 'imposibilidad de trisectar el ángulo...' adquiere su pleno sentido. Además la capacidad de emplear posteriormente el teorema, para probar otros, por ejemplo, o para encontrar sus justos límites de aplicación, proviene de un escrutinio riguroso de su demostración. A veces también lo contrario es cierto: un teorema se comprende sin su prueba, como Vgr. un estudiante de trigonometría en la escuela secundaria emplea el teorema de Pitágoras, sin haber visto ninguna de sus pruebas. Además una conjetura puede ser investigada por las consecuencias que tendría el demostrarla, lo que no podría ocurrir si no tuviera ya un sentido. Wittgenstein, insistimos, no deseaba negar esta posibilidad, quería rechazar la imagen que equipara a la demostración con un experimento. En éste, el término de llegada es independiente del proceso y la conexión que se establece entre uno y otro es externa, de causa a efecto. El nexo entre el teorema y su demostración es interno, de tal forma que una conjetura cambia de sentido una vez que es probada.

Quisiéramos ahora enfrentar una objeción que aquí surge naturalmente. Tal parece que Wittgenstein elimina el platonismo de las matemáticas reemplazando una teoría del significado por otra. En efecto, alguien podrá decir: « si el sentido de una expresión viene dada por su uso, es verdad que la demostración de un enunciado matemático cambia a veces su sentido, al conectarlo con dominios que parecían lejanos en su formulación original, pero ¿en qué se apoya esa teoría del significado? ¿por qué ha de ser superior a la explicación platónica? » Recordemos que Wittgenstein pretende que en su obra no hay ninguna teoría sólo una descripción de los fenómenos lingüísticos. Sin embargo, es común suponer que por ejemplo el parágrafo 43 de las *Investigaciones Filosóficas* formula una doctrina del lenguaje de corte pragmatista

"Para una gran clase de casos de utilización de la palabra 'significado' -aunque no para todos los casos de su utilización- puede explicarse esta palabra así: el significado de una palabra es su uso en el lenguaje."

En efecto, ¿no es esta una teoría del lenguaje? Y si es así, ¿qué apoyo tiene? ¿es una generalización de hechos lingüísticos observados? En ese caso, cabría objetar que hay una cierta circularidad en el hecho de que al buscar el significado de 'significado' (por ejemplo, al comienzo de *Los Cuadernos Azul y Marrón*) Wittgenstein describe el uso de esta palabra, o por lo menos elimina como respuesta todo lo que no se acoplaba con ese uso, dando así por sentado lo que había que probar. O dicho de otra forma: la palabra 'significado' no siempre se usa en el lenguaje diario como siendo un sinónimo de la palabra 'uso'. Por ejemplo, se suele decir que captamos en un instante el significado de un término; sin embargo, no parece que el uso pueda abarcarse instantáneamente pues se esparce en multitud de casos.

Ahora bien, Wittgenstein sabe que la palabra 'significado' se emplea de múltiples formas, enlazadas únicamente por lo que llamará 'parecidos de familia'. Por ello la reserva explícita a la que alude la expresión "aunque no para todos los casos de su utilización" que -según lo explica Hallet en su comentario a las Investigaciones- se debe a que "después de insistir en la primera parte [de las *Investigaciones Filosóficas*] que la palabra 'significado' no se refiere a ningún simple ítem en el momento de hablar, Wittgenstein se sintió obligado a reconocer otro uso el cual parece hacer precisamente eso"[118]. Es decir que ese párrafo simplemente constata que, casi siempre, cuando explicamos el significado de una palabra, explicamos su empleo en determinadas circunstancias (más claramente se ve esto si lo aplicamos a la palabra 'cantar', o 'inferir', por ejemplo). No se trata de una teoría del significado, sino de la descripción de nuestros usos lingüísticos.

Hallet también apunta aquí que una virtud de la formulación de §43 es la ambigüedad del vocablo 'uso'. En las *Observaciones Filosóficas* se identifica el significado con el propósito con el que es proferida una expresión y, en parte, esa idea parece mantenerse en las primeras secciones de las *Investigaciones Filosóficas*, pues se sugiere que un nombre que ya no tuviese referente podría emitirse como una suerte de broma. Pero dado que un hablante siempre sabe con qué intención dice algo, la identificación de propósito con significado nos conduciría a la conclusión

[118] Hallet, 1977. p. 54. Ver nota 22.

de qué siempre conocemos el significado de nuestras palabras, entonces éstas no podrían confundirnos. Wittgenstein prefirió emplear el vocablo 'uso', más impreciso y vago, y no un término cargado de alusiones psicológicas como 'propósito'[119]. Esta observación es importante porque, como ya habíamos sugerido, al referirnos al sentido de las proposiciones matemáticas debemos evitar el tomar la palabra 'uso' en un sentido innecesariamente limitado, como cuando se le considera sinónimo de aplicación extra-matemática.

En todo caso, el término 'significado' posee una gramática compleja que no debe de extraviarnos. No olvidemos el fin terapéutico de la filosofía de Wittgenstein. En una de sus lecciones dice, a este respecto, que no se trata de preguntarse por el uso de una palabra, con el objeto de acceder al significado de la misma a través de un sucedáneo de la definición. Se trata tan sólo de evitar ciertas confusiones filosóficas. "Estamos interesados en el lenguaje sólo en tanto que nos da problemas... Algunas veces yo establezco nuevas reglas porque éstas están menos sujetas a producir confusión o porque, quizás, no hemos pensado en mirar el lenguaje que tenemos en esta luz....o yo hago un nuevo juego para la palabra en el cual se aparta de su uso actual, con el objeto de recordarte su uso en nuestro propio lenguaje."[120]

Volviendo al problema de las conjeturas, preguntémonos ¿Cómo se utiliza en matemáticas la palabra 'conjetura'? Cualquier respuesta que se atenga a una descripción estricta, nos hará reconocer que hay una diferencia gramatical muy grande con respecto al término 'proposición demostrada' o 'teorema'. Este queda constituido como regla de representación por su prueba, que nos dice el modo en que se le debe emplear. Nada de esto ocurre con la conjetura. Aquí el error sería -como lo ha señalado Bouveresse[121]- asimilar esta diferencia a la que existe análogamente en el lenguaje ordinario entre conjeturas y proposiciones probadas, y suponer con ello, que el teorema y la conjetura matemática expresan la misma proposición con diferentes grados de certeza.

[119] Véase Hallet 1977, p. 121-124.
[120] WLEC32-35.
[121] Bouveresse 1988.

La Perspicuidad.

Entremos al segundo tema de este capítulo: la perspicuidad de la prueba (aunque más adelante habremos de volver al primero). En realidad, se trata de una continuación de lo que venimos diciendo y no de una cuestión aparte. Wittgenstein aclaró, en varios pasajes, que con este carácter de la prueba quería simplemente aludir a la diferencia que existe entre prueba y experimento[122]. Por tanto, se trata de nuevo de una observación gramatical, que busca describir y no normar el uso de un vocablo. Sin embargo se han solido interpretar sus palabras, por ejemplo el fragmento que citamos a continuación, como aludiendo a una cualidad psicológica que la prueba debe tener para constituirse como tal.

"Tiene que ser algo seguro para nosotros, que al demostrar no hemos pasado por alto ningún signo. Que no puede habernos engañado ningún diablillo, haciendo que desaparezcan, o añadiendo signos. Sin nosotros saberlo."[123]

Esta explícita alusión al genio maligno cartesiano sugiere una interpretación epistemológica del párrafo. Aparentemente enfrentamos aquí el mismo problema que Descartes: el de la certeza en el conocimiento. Para el autor del *Discurso del Método*, antes de demostrar la existencia de Dios, no podemos estar seguros de una inferencia lógica, si esta trasciende los cercanos límites de nuestra atención actual. La breve argumentación que conduce a afirmar la existencia divina se ve corroborada, antes de empezar a borrarse de la mente, por su propia conclusión. Esta garantiza luego toda inferencia correcta.

Tal parece como si a Wittgenstein le preocupara la certeza en la prueba matemática y esto estaría en consonancia con la interpretación escéptica de su obra. En todo caso algunos autores[124] han señalado que Wittgenstein no se atuvo a sus propias ideas sobre la vaguedad de los conceptos y la posibilidad de ampliarlos indefinidamente, pues ha intentado normar por anticipado la forma que debían tener las demostraciones. Citan el caso de pruebas demasiado largas, de 300 o 400 páginas, que si no rebasan los límites de la perspicuidad, están ya muy cerca de

[122] Por ejemplo en RFM, III, 55.
[123] RFM, p. 130.
[124] Por ejemplo, Tymoczko, Thomas, "The Four-Colour Problem and its Philosophical Significance", Journal of Philosophy, vol. 76 (1979). Reproducido en Tymoczko, T. (Ed). *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, An Antology, Boston-Basel-Stuttgart, 1986.

hacerlo. Asimismo aluden al teorema de los cuatro colores[125] como ejemplo de un nuevo tipo de pruebas, de carácter probabilístico, realizadas por computadora. Su argumento es que si incluso matemáticos de primera línea se equivocaron a veces en algunos punto de sus demostraciones, debemos de igual forma aceptar las pruebas por computadora. En ambos casos hay una probabilidad de error, casi despreciable. Esta postura coloca a la certeza matemática como parte de un continuo en el que el conocimiento se gradúa, desde la dudosa hipótesis de una conjetura empírica hasta el teorema matemático. Este ostentaría el máximo grado de certeza de que el hombre es capaz. Entonces podrían existir proposiciones necesarias a posteriori (como pretende Kripke[126], por ejemplo) el resultado de una multiplicación con factores muy grandes realizada por computadora.

Wittgenstein se opone a esta idea de asimilar experimento y cálculo o demostración. En la sección anterior mencionamos la explicación de Bouveresse[127] la certeza matemática no es de diferente grado que la certeza empírica, sino de muy distinto tipo. La prueba matemática es una operación en que se sustrae a un enunciado de toda posibilidad de corroboración o refutación empírica, pero no es una experiencia que nos enfrente a la evidencia de una verdad que luego generalizamos, o a que nos muestre la probabilidad muy elevada de que un evento ocurra siempre. El que el teorema sirva como regla gramatical, y el que su sentido venga determinado por su demostración, implican que ésta tiene que sernos patente. La demostración nos muestra el 'cómo' del teorema[128] y en ese sentido ninguna de sus partes puede permanecernos oculta. Sin embargo esta perspicuidad no es la de la visión ocular de un evento o la evidencia de la que hablaba Descartes y que se relaciona con la atención inmediata. Se trata de la presencia que las reglas de un juego tienen para la comunidad de sus jugadores. Sería absurdo sostener que hay una regla del ajedrez que ha estado oculta. Refiriéndonos a las matemáticas pondremos un ejemplo inspirado en el que aduce a este respecto Shanker[129]. ¿Es

[125] La conjetura de los cuatro colores establece que cuatro colores son suficientes para colorear cualquier mapa dibujado en el plano, de tal forma que dos países con una frontera común no tengan el mismo color. El problema se le ocurrió a Francis Guthrie en 1852, mientras coloreaba un mapa de Inglaterra. Fue demostrado por Wolfgang Haken y Kenneth Appel, en 1976, utilizando una computadora de gran velocidad y un programa extraordinariamente complejo.

[126] Kripke, S. *Naming and Necessity*, Basil Blackwell, Oxford, 1982

[127] Bouveresse 1988.

[128] RFM III, 22.

[129] Shanker 1987, p.127.

que el número ordinal que Cantor llamó 'omega' trasciende nuestras capacidades de comprensión? Parecería que no podemos tener de él más que una noticia incompleta, puesto que es infinito y supera las limitadas facultades de nuestro entendimiento. Pero no hay tal; lo que el símbolo 'ω' significa está perfectamente definido en el ámbito de la teoría de conjuntos y todas las reglas de su uso están claras (si bien el concepto del 'primer número ordinal transfinito' puede recibir sucesivas ampliaciones en futuros teoremas).

¿Qué ocurre con la demostración de Appel y Haken del teorema de los 4 colores? Tymockzo ha propuesto el llamado 'nuevo problema de los 4 colores'[130]. Consiste en determinar si la prueba de Appel y Haken es realmente una demostración[131]. Shanker[132] ha recalcado, con toda razón, que se trata de una cuestión interna a las matemáticas, en la que los filósofos no pueden intervenir. Propone que el trabajo de la filosofía, de acuerdo a Wittgenstein, consiste aquí en especificar qué significa el decir que la conjetura de los cuatro colores es un teorema. Hemos visto ya que una prueba cumple dos propósitos a) eleva una proposición a un rango de certeza intemporal, y b) le otorga un nuevo sentido al establecer vínculos que la insertan de forma original en un sistema. El considerar al método de Appel y Haken como una demostración satisface, por lo pronto, con el primer punto, y ello confiere al teorema de los cuatro colores la misma certeza que a cualquiera otra proposición matemática demostrada ordinariamente. ¿Es que podemos utilizarlo, es decir, tiene sentido, al margen de su prueba? Claro que sí, puesto que podemos relacionarlo con otras proposiciones matemáticas aún sin conocer su demostración. Por ejemplo, sabemos que es en parte una consecuencia de que la característica de Euler valga para cierta clase de poliedros. Pero la prueba de Appel y Haken le da un nuevos sentido sólo en la medida en que es perspicua o en que nuevos desarrollos (que constituirían -de hecho- una nueva demostración) la hicieran perspicua. Esto que dará más claro con el ejemplo del teorema de Gödel que analizaremos brevemente hacia el final del capítulo.

Con la insistencia en la perspicuidad de la prueba están relacionadas numerosas críticas a Russell que aparecen en los escritos de Wittgenstein, sobre todo en el

---

[130] Tymoczko, Op. Cit.
[131] Saaty y Kainen también lo cuestionan. Cfr. Saaty, Th y Kainen, P. *The Four Colour Problem, Assaults and Conquest*, Dover, New York, 1986.
[132] Shanker, 1987, p.137 y 138.

periodo inmediatamente posterior a su regreso a Cambridge. No intentaremos abarcarlas ahora, porque algo de lo que digamos en un capítulo posterior sobre el formalismo valdrá también para el logicismo. Sin embargo en lo que se refiere a la perspicuidad, las demostraciones de las igualdades aritméticas más elementales en los *Principia Mathematica* son ya muy largas y difíciles de seguir. Las pruebas para proposiciones matemáticas más complejas no serían perspicuas por sí solas. Sin embargo aquí hay un riesgo de confusión, puesto que Russell sí demuestra, por ejemplo, que cada proposición expresando el resultado de la adición de dos números, se puede expresar y demostrar en su sistema formal (no importa aquí el que los sumandos sean muy grandes), pero la demostración individual de una igualdad como 927+239=1166 abarcaría muchas páginas, tantas que no podríamos reconocerla como la prueba de esa proposición (excepto que estuviese abreviada). Es decir Russell prueba en que 927+239=1166 a través, no de una tautología, sino de una demostración de que el resultado de cualquier suma es expresable en su sistema. Por ello Wittgenstein observa que para determinar la corrección del sistema de Russell, así como de muchas de sus pruebas individuales, utilizamos a la aritmética. De la equivalencia lógica correspondiente a la ecuación 12+14=26 sabríamos que es un tautología sin necesidad de hacer su tabla de verdad. En este sentido, la lógica misma es una aplicación de la aritmética, y no su fundamento.[133]

La Indecidibilidad.

Pero regresemos al tema de las proposiciones indecidibles (lo que nos llevará una vez más a analizar la perspicuidad de la prueba). Creemos que es conveniente dividirlas en dos grandes rubros. a) el primero es el de las proposiciones que son generadas por la propia demostración de indecidibilidad, como en el teorema de Gödel y otros resultados análogos. En ellas se parte de un sistema y se muestra que en él es posible hallar una proposición que trasciende, junto con su negación, los alcances deductivos del sistema formal en cuestión. El segundo tipo es el de aquellos enunciados, como la hipótesis del continuo, de los que se demuestra que

[133] "Toda la tautología no pasa de ser un empleo de la aritmética; no su prueba"(WW,18.12.29), "La tautología es el empleo del cálculo, no su expresión." WW p. 94 "If you really wished to prove by Russell calculation the addition of two big numbers, you would already have to know how to add, count, etc." (WLFM, p.159) "Whether this is a tautology or not I decide by adding." (WLEC32-35, p.148) "Un procedimiento abreviado me enseña lo que ha de salir del no abreviado." (RFM, III, 18)

son independientes con respecto a un sistema de axiomas dado. Es decir separamos las pruebas de incompletud de las independencia.

Para el segundo caso, ilustrémoslo a través del quinto postulado de Euclides. Sería absurdo decir que no tiene sentido porqué no tiene una prueba (como corresponde a su carácter de axioma). Por el contrario ocupa una posición básica en el edificio euclidiano precisamente porque posibilita la deducción de un gran número de teoremas, lo que sería imposible si careciera de sentido. Además fue para muchos la expresión de una propiedad evidente del espacio de nuestra percepción sensorial. Pero seguramente Wittgenstein no quería oponerse a la postulación de axiomas. Ateniéndonos a lo que llevamos dicho hasta aquí, de lo que se trata es de constatar el diferente carácter gramatical que adquiere una proposición cuando es considerada como postulado básico de una teoría. Decir que es un sinsentido porque se ha decidido otorgarle este estatuto, contradiría la identificación wittgensteiniana entre sentido y uso. Por tanto debemos tomar las palabras de Wittgenstein con una cierto matiz como si quisieran advertirnos simplemente de las diferencias que existen entre los enunciados matemáticos y los del lenguaje ordinario. Pero si recordemos la « prueba » que analizamos al final del capítulo II, podemos conjeturar que para Wittgenstein, un dibujo de la situación descrita en el quinto postulado, mostrando su carácter evidente, sería después de todo una demostración. Si es así lo que entonces dijimos vale también aquí.

En cuanto a las proposiciones indecidibles generadas por la prueba, tomaremos como ejemplo la demostración del teorema de Gödel, para cotejar en él lo que hasta aquí hemos venido diciendo. En cambio, no entraremos en el análisis de las observaciones que Wittgenstein hizo respecto a este resultado célebre[134]. Recordemos brevemente la idea de la prueba[135]. Tomemos un sistema formal F de primer orden que incluya entre sus axiomas los del cálculo de predicados y alguna extensión de los axiomas de Peano. Gödel construye una función inyectiva g que a cada expresión o sucesión de expresiones asigna un número natural, de forma tal que hay un algoritmo que permite, dada una expresión x de F, obtener su número de

[134] Sobre este tema ver Shanker, S. G., "Wittgenstein's Remarks on the Significance of Gödel's Theorem", en Shanker, S. G. (Ed.) *Gödel's Theorem in Focus*, 1993.
[135] Cfr. Gödel, K. "Some metamathematical results on completeness and consistency", "On formally undecidable propositions of *Principia mathematica* and related systems I", *and"* On completeness and consistency." en van Heijenoort, J. (Ed.) *Frege and Gödel, Two fundamental Texts in Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1970.

Gödel g(x) y, viceversa, dado un número en el rango de F, encontrar la expresión que representa. A través de g a cada relación metamatemática referente al sistema, corresponde una relación aritmética. Gödel introduce a continuación las funciones recursivas (primitivas) y demuestra que cada una de ella es representable en F. Esto significa que dada una relación $R(x_1,....,x_n)$ recursiva, existe un predicado $r(x_1,....,x_n)$ en el lenguaje de F tal que si $R(a_1,...a_n)$ para los números $a_1,...a_n$ entonces en F se prueba la fórmula $r(A_1,...A_n)$ (donde A_i es el numeral de a_i, es decir, su representante en F), y si no $R(a_1,...a_n)$ la fórmula $\sim r(A_1,...A_n)$ es teorema en F. Gödel prueba que 45 predicados metamatemáticos son recursivos. La lista incluye a la relación PR(x,z) (x es el número de Gödel de la fórmula que se obtiene al substituir en la fórmula con número de Gödel z, su única variable libre por el numeral de g(z)). Si c(y) es la fórmula ~(Ex)pr(x,y) y k el numeral de g(c(y)), denotemos con G a C(k). Luego se demuestra que si el sistema F es consistente (según la versión de Rosser) ni G, ni ~G pueden ser teoremas.

¿Es que al ser indemostrable G carece de sentido?. Cabe pensar que puesto que G se puede interpretar como 'G es indemostrable' y, en efecto, no existe una prueba formal de G en el sistema F, entonces o tenemos un enunciado verdadero (y por tanto con sentido) sin prueba, o de alguna forma sí hemos probado G (aunque no en F). Habría que recordar primeramente que si formalizamos la prueba del teorema, no hemos demostrado G (G es indemostrable en F), sino una proposición de tipo C → F (Si F es consistente, G es indemostrable en F). Justamente de aquí deriva Gödel la imposibilidad de demostrar la consistencia de F con métodos que sean representables en F. Además advirtamos que este enunciado G del lenguaje de F, que interpretado de cierto modo afirma su indemostrabilidad, tiene un sentido dado por la propia demostración del teorema. En efecto, es una expresión para la cual tenemos reglas de uso perfectamente establecidas. Sin embargo, podría objetarse que es también un enunciado susceptible de una interpretación aritmética. En efecto, PR(x,y) es una ecuación diofantina, y G aparentemente puede tener un sentido y ser verdadera como enunciado relativo a los números naturales. Pero mirado bajo ese aspecto, la construcción de G no es perspicua y no podemos decir de G más de lo que la propia demostración nos autoriza. Es decir que si alguna computadora construyera a G como un enunciado de la teoría de los números, no tendríamos ningún criterio nuevo para su uso, distinto del que nos provee el análisis de la prueba. Por tanto la demostración del teorema de Gödel no parece contravenir las observaciones de Wittgenstein sobre la perspicuidad de la prueba y el sentido de las proposiciones matemáticas.

No hemos intentado aquí poner en entredicho las afirmaciones de Wittgenstein respecto a la prueba. Más bien suponiendo que son simplemente descriptivas, las hemos tratado de aclarar a través de ejemplos concretos.

CAPITULO IV

EL INFINITO

De acuerdo a Hilbert la matemática es la ciencia del infinito[136] y, en efecto, es uno de los temas centrales y más problemáticos en esta disciplina. Prueba de ello son el método de exhaución de Eudoxio[137]; el quinto postulado de Euclides, las aporías con series, y las discusiones en torno a la validez de la lógica clásica para totalidades infinitas[138]. Con la creación del análisis en el siglo pasado se consiguió reducir los razonamientos con cantidades infinitesimales del cálculo a otros equivalentes que sólo aludían al infinito potencial a través de términos bien definidos. Sin embargo, las dificultades para caracterizar el continuo llevaron a Cantor a la constitución de la teoría de los conjuntos en la que el infinito actual aparece como un concepto matemático preciso. Según Wittgenstein tanto en la raíz de esta teoría como en la construcción del continuo a través de cortaduras por Dedekind hay un embrollo lingüístico en el que podemos quedar atrapados y que es fuente de posibles malentendidos. Al analizar estas materias, como ocurrió en capítulos anteriores, no sólo hallaremos una piedra de toque para evaluar la validez de la filosofía wittgensteineana, sino además una punto de apoyo que nos permite entenderla mejor. En las páginas que siguen, por ejemplo, habremos de volver al problema de la perspicuidad de las pruebas, con lo que se nos ofrece la oportunidad de precisar un poco más este concepto.

Números Transfinitos y Continuidad

---

[136] Cfr. Hilbert, D. "Acerca del Infinito" artículo recogido en Hilbert, D. *Fundamentos de las Matemáticas*, U. N. A. M., México, 1993.

[137] Recuérdese, por ejemplo, el argumento, anterior a Eudoxio, de que el círculo es cuadrable, pues es el límite de una sucesión de polígonos cada uno de los cuales puede ser cuadrado; un contraejemplo al principio de continuidad de Leibniz.

[138] Ver, por ejemplo, Heyting, *Intuitionism, An Introduction*, North Holland, 1971.

Empezaremos reseñando muy brevemente la trayectoria que llevó a Cantor a la teoría de los números transfinitos[139]. De paso, compararemos su definición de los números reales, con la dada por Dedekind. Al parecer Wittgenstein conocía esta última a través del libro de Hardy *A Course of Pure Mathematics*[140] que servía de texto en Cambridge en la década de los treintas.

Alrededor de 1870, Cantor se enfrenta al problema de demostrar la unicidad de la representación de una función a través de series trigonométricas. En 1871 había probado el resultado para las funciones continuas y para el caso de funciones que presentan un número infinito de puntos de discontinuidad, siempre y cuando estos se encuentren distribuidos de una cierta manera en el eje x. Para caracterizar ese conjunto, Cantor hace ciertas observaciones e introduce nuevos conceptos sobre las magnitudes numéricas. Considera primeramente el conjunto B de todas las sucesiones infinitas a_1, a_2, a_3,... de números racionales que cumplen con la siguiente condición: para cualquier racional positivo ε que se tome, por pequeño que sea, existe un entero n_1 tal que $|a_{n+m}-a_n|<\varepsilon$ $(n>n_1)$ para todo m natural. Cantor expresa este hecho diciendo que la serie a_1, a_2, a_3,...tiene límite b. Es decir el límite está definido por la sucesión. Después introduce una relación de orden entre los límites de las diferentes series y entre éstos y los números racionales. Por ejemplo, dadas dos series $\{a_n\}$ y $\{a_n'\}$ si a_n-a_n' decrece conforme n crece, los correspondientes límites serán iguales; y si para cualquier racional positivo ε hay un cierto entero n a partir del cual $a_n-a_n'>\varepsilon$, diremos que $b>b'$, etc. Cantor agrega al conjunto de los números racionales, el de los límites de esas sucesiones, y define para el sistema R así ampliado las operaciones aritméticas elementales. Establece además una correspondencia biunívoca entre este conjunto y el de los puntos de una recta. Para ello basta determinar arbitrariamente un punto ß en la recta y una

---

[139] Para la exposición que sigue nos hemos basado en los siguientes textos: Alvarez, C. "Sur l'origine de l'hypothèse du continu." en "Sciences et Techniques en Perspective", Vol 26, Nantes, 1993. Cantor, G *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*." Dover, New York, 1955, y la Introducción al mismo hecha por Philip E. B. Jourdain. Grattan-Guinness, I. "Hacia una biografía de Georg Cantor." Mathesis, Vol. VI, Número I, febrero de 1990.

[140] Hardy, G. H. *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, (Primera edición, 1908)

unidad de medida, y asociar a cada punto su distancia a ß en términos de esa unidad. Si la distancia no es racional, se asociará a ese punto, llamémosle x, una sucesión de racionales correspondiente a una sucesión de puntos cuyo límite es x. La correspondencia inversa es para Cantor un axioma. Introduce también en este artículo el concepto de conjunto derivado de puntos (o de magnitudes geométricas). Dado un conjunto P contenido en un intervalo, un punto límite de P es un elemento de la recta en cualquiera de cuyas vecindades hay una infinidad de elementos de P. Denotemos con P' al conjunto formado por los puntos límites de P, llamado el derivado de P, y definamos P" como (P')', y así sucesivamente. Esto le sirve a Cantor para formular más brevemente la propiedad que ha hallado de las series trigonométricas.

Recordemos brevemente la construcción dedekineana del continuo que es prácticamente equivalente. En *Continuity and Irrational Numbers*[141], Dedekind revela que en 1858 dando un curso de cálculo diferencial sintió una viva insatisfacción por la falta de un fundamento científico para la aritmética, pues muchas propiedades del continuo básicas para el análisis tenían que probarse recurriendo a una intuición geométrica. Su intención era la de dar una definición puramente abstracta y aritmética de los números reales y de la continuidad que permitiera un desarrollo estrictamente analítico y riguroso del cálculo. Para ello parte de las propiedades de los números racionales por las que constituyen un campo densamente ordenado. Después los compara con el conjunto de los puntos de una recta (al que denotaremos por 'L'), que posee una estructura análoga. Sin embargo, el conocido ejemplo de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado, lo hace remarcar una peculiaridad de este conjunto que el de los racionales no posee, y que para él constituye propiamente la continuidad: dada una partición arbitraria de L en dos conjuntos A y B en el que cada elemento de A es menor que cualquiera de B, hay un punto y sólo uno que produce esta división. Se trata de un atributo que forma parte de nuestra idea intuitiva de una recta: "A esto yo puedo decir que estoy contento si cada uno encuentra el principio de arriba tan obvio y tan en armonía con sus propias ideas de una línea; pues yo

[141] Ver Dedekind, R. *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1963

sería completamente incapaz de aducir una prueba de su corrección, ni nadie podría. La asunción de esta propiedad de la línea es nada más que un axioma, por el cual nosotros encontramos [find] continuidad en la línea."[142] En este sentido el campo de los racionales debe ser extendido por la introducción de nuevos números con los que integren un cuerpo continuo. Dedekind define los números irracionales como el conjunto de los cortes (A,B) de números racionales en que los elemento de A son menores que los de B, no producidos por ningún racional. Por ejemplo, si α es un natural, pero no un cuadrado, sean los elementos de A todos aquellos racionales cuyo cuadrado es menor que α, y sea B el complemento de A. Dedekind prueba ingeniosamente que este corte no está producido por ningún número racional y agrega que en eso se muestra la incompletud o discontinuidad del conjunto de los números racionales. Más adelante define la relación de orden para las cortaduras y da un ejemplo de cómo pueden definirse las operaciones aritméticas para las mismas. Además demuestra de un modo puramente analítico que los números reales así introducidos cumplen algunas las propiedades elementales que se requieren para que su definición pueda ser considerada como adecuada. En particular la continuidad: cada corte en el nuevo conjunto es producido por un elemento del mismo.

Dedekind da un paso adelante en la tarea de liberar al análisis de toda intuición geométrica, pero recordemos que tanto su obra como la de Cantor se encuentran en un periodo en que a su vez la geometría se ha de constituir como una disciplina independientemente de toda intuición espacial.

Una vez constatada la similaridad de las construcciones de Cantor y Dedekind del conjunto de los números reales, volvamos a nuestra esquemática exposición de la génesis de la teoría de los números transfinitos.

El resultado obtenido por Cantor en 1872, al que ya hicimos mención, lo condujo del estudio de la representación de funciones por series trigonométricas, al de los conjuntos de puntos. En particular, al año siguiente, había demostrado que el conjunto de números de un intervalo real (a,b) no se deja representar como una serie numerable $a_1, a_2, a_3, \ldots$ La prueba es interesante. Parte de suponer que todos los elementos de (a,b) se hallan

[142] Ibid. p. 12

incluidos en la lista a_1, a_2, a_3,... Tomemos de ésta los dos primeros números Â1 y ß1 que pertenecen al intervalo (a,b); luego, los dos primeros términos comprendidos en ($Â_1$,$ß_1$); y así sucesivamente se construyen dos sucesiones creciente una y decreciente la otra, $Â_1$, $Â_2$, $Â_3$,... $ß_1$, $ß_2$, $ß_3$,... en que cada término de la primera es menor que cualquiera de la segunda. Ahora bien la suposición de que el proceso terminara antes (sin que se constituyeran dos conjuntos infinitos), así como la de que los límites Â y ß de esas sucesiones fuesen distintos, es contrario a la hipótesis dada. Por tanto Â (=ß) es un punto del intervalo no enumerado en la lista, pues cada Âj no se halla incluido en ($Â_h$,$ß_h$) si h>j, mientras que Â pertenece a la intersección de todos los intervalos.

En 1874, Cantor prueba que el conjunto de números algebraicos sí se puede ordenar en una serie numerable y que existe una correspondencia biunivoca entre los puntos de una línea y los del espacio de n dimensiones. Un poco más tarde, introduce los conocidos conceptos de `equivalencia entre conjuntos' y `potencia' (o cardinalidad), que coincide con el de número de elementos, sólo cuando el conjunto es finito. Muestra además que la menor potencia infinita es la de la de la totalidad de los números naturales, que es la misma que la de cualquiera de sus subconjuntos no finitos. Son estos resultados los que lo llevan a formular una primera versión de la hipótesis del continuo que busca confirmar que solamente existen dos potencias para los conjuntos infinitos de puntos[143].

En una serie de memorias publicadas hacia finales de la década de los setentas y comienzos de la siguiente, Cantor continúa sus investigaciones sobre la topología de los conjuntos de puntos. Para lo que importa a nuestro tema basta señalar algunos de los resultados comunicados en ellas. Divide primeramente en dos a los conjuntos de puntos, a la primera categoría pertenecen aquellas conjuntos P tales que su n-ésimo derivado es ya un conjunto finito (n un número natural). $P^{n+1} \subseteq P^n$ si n>0, pero P' no es siempre subconjunto de P (por ejemplo, si P={1,1/2,1/4,1/8,...}, P'={0}). A la segunda categoría pertenecen los conjuntos para los cuales no hay una n natural tal que P^n es finito. Decimos además que P es `denso en cualquier parte' del

[143] Ver Alvarez, Op. Cit.

intervalo (a,b), si $P\subseteq(a,b)$ y toda vecindad de cualquier punto de (a,b) contiene elementos de P. En ese caso, $P'=(a,b)$, y P es de la segunda categoría. Cantor utiliza el símbolo P^{∞} para denotar a la intersección de todos los derivados de P (ya que $P^{n+2}\subseteq P^{n+1}$, y por tanto $P^{m}=\cap P^{n}$ si $n<m$), lo que le permite formar la serie

$P', P'', P''',...P^{n},...$

$$P^{\infty},(P^{\infty})',P^{\infty+2}$$

$$P^{2\infty}, P^{2\infty+1},...$$

....

....

$$(P^{\infty})^{\infty},...$$

.La introducción de los símbolos del infinito aparece entonces como una necesidad teórica de colocar índices a la recursión de un proceso que trasciende los límites de la numeración ordinaria[144]. A su vez, el concepto de una derivación infinita queda completamente justificado por los resultados que Cantor más adelante demuestra y que van dirigidos a la caracterización de los conjuntos lineales de puntos y, posteriormente, a la prueba de la hipótesis del continuo. Algunos de estos teoremas relacionan la pertenencia de un conjunto a la primera o a la segunda categoría con su numerabilidad. En particular Cantor da la prueba de que si P^{α} es numerable, donde α es un natural o un símbolo del infinito, P también lo es.

La utilización de estos símbolos del infinito condujo a Cantor a la concepción de los números ordinales y cardinales de ciertas series infinitas. En la década de los ochentas, realizó diversas tentativas de ofrecer una teoría bien fundamentada de los mismos, en que se legitimara su pretensión de existencia como números. Especialmente el artículo "Grundlagen einer Allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" (1893), en el que Cantor dice explícitamente que fue guiado a esos nuevos números muchos años atrás, "sin llegar a una clara conciencia de que yo poseía en ellos números concretos de significado real.[145]" Agrega que para introducirlos tuvo que vencer la resistencia de la tradición en la cual fue educado.

---

[144] Ibid.

[145] Citado por Philip Jourdain, en la Introducción arriba mencionada, p. 53.

Su construcción de los números ordinales se basa en tres principios de generación. El primero es el que consiste en agregar una unidad a un número precedente para formar el subsecuente. Con este principio se constituye la serie de los números naturales 1, 2, 3,.. a partir de la unidad. En ella cada miembro expresa, además de un numeral en sí mismo, la serie que en él culmina considerada como un todo. El segundo principio nos permite continuar la serie: "si cualquier sucesión definida de números reales enteros existe, para la cual no hay mayor, entonces un nuevo número es creado por este segundo principio de generación el cual es pensado como el límite de aquellos números, es decir, es definido como el siguiente número más grande que todos ellos."[146] El número resultante de la aplicación de este principio a la serie 1,2, 3,... es tradicionalmente denotado con la letra 'ω'. Después obtenemos con el primer principio la serie $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$,... y llamamos $\omega 2$ al límite de la misma, y continuamos: $\omega 2$, $\omega 2+1$, $\omega 2+2$...$\omega 3$, $\omega 3+1$,...Introducimos luego ω^2 como el límite de la serie de los números de la forma $a\omega+b$ (a, y b naturales) en su orden natural. Y así sucesivamente. El tercer principio de generación posibilita la división de los numerales así obtenidos en diversas categorías. Establece que todos los ordinales transfinitos que forman una serie con la misma potencia pertenecen a la misma clase. Lo ilustraremos con una de sus aplicaciones. Se llaman números de la primera clase a los de la serie 1, 2, 3,... Los de la segunda son aquellos formados a partir de ω con ayuda de los dos primeros principios, siempre y cuando representen órdenes posibles de conjuntos bien ordenados de la primera potencia. Así $\omega+1$ expresa el orden del conjunto {2,3,4,...,1}; $\omega 2$ el de {1, 3, 5,... 2, 4, 6,...} y ω^2 el de {1/2, 2/2, 3/2,...1/4, 2/4, 3/4,...1/5, 2/5,...} todos de la primera potencia.

Respecto a la creación de estos números que suscitaron inmediatamente muchas críticas adversas, Cantor algunas vez escribió: "La matemática es, en su desarrollo, completamente libre, y sólo está sujeta a la condición auto-evidente de que sus concepciones estén libres de contradicción en sí mismas y estén en relaciones fijas, dispuestas por las definiciones, con concepciones

---

[146] Citado en Dauben, J. W. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, 1979. p. 68.

probadas y previamente formadas."[147] (p. 68). Agrega que la ciencia no debe temer de esta libertad del pensamiento, porque las condiciones en que puede ser ejercitada dejan poco lugar a la arbitrariedad, y que además cada concepción matemática tiene que ser corregida, si resulta inconveniente o poco útil. Dejando de lado las complicadas ideas de Cantor respecto a la naturaleza de la matemática, mismas que variaron en distintos periodos de su vida, es evidente su preocupación de ofrecer un fundamento lo más sólido posible que legitimara la introducción de sus nuevas concepciones. A este respecto conviene recordar que la introducción de nuevos números puede parecer muy arbitraria tal y como Cantor la expone en 'Grundlagen', pero que resulta completamente natural en el marco del problema que les dio origen: el de la caracterización de los conjuntos de puntos y, en particular, el de la hipótesis del continuo. Esta afirma que la potencia del continuo lineal es la misma que la de los ordinales de la segunda clase. Al respecto mencionemos simplemente dos de los resultados más eminentes de Cantor. Uno es su caracterización de la continuidad: "Todos los continuos de puntos geométricos conocidos por nosotros están, como es fácil ver, conectados; y creo ahora que reconozco en esos dos predicados 'perfecto' y 'conectado' las características necesarias y suficientes de un continuo de puntos"[148]. Cantor llama a un conjunto P 'perfecto' si P=P' y 'conectado' si para cualesquiera dos de sus elementos t y t' y cualquier entero positivo ε que se tenga, existen un número finito de puntos t_1, t_2, t_3,... t_m de P tales que las distancia tt_1; t_1t_2, t_2t_3,... t_mt' son menores que ε. El otro resultado es el que, corregido por Bendixon, demuestra lo siguiente: Si M' tiene la potencia de la segunda clase, se puede expresar como una suma M'=R+S tal que S es perfecto, y R numerable y $R \cap R^{\hat{}} = \emptyset$. Un corolario inmediato de este teorema es que si existe algún conjunto P no numerable, cuya potencia sea menor que la del intervalo (0,1), entonces P no puede ser cerrado.

Comentaremos ahora dos elementos de la teoría cantoriana que fueron blancos de la crítica de Wittgenstein: la relación de desigualdad entre conjuntos infinitos, y el argumento diagonal. La introducción de ω a través de

---

[147] Citado en la introducción de Ph. Jourdain p. 67-68.
[148] Ibid. p. 72.

la noción de límite tiene un elemento de arbitrariedad señalado por el propio Cantor cuando en una carta (de 1886) explicó que el concepto de límite en el caso de sucesiones crecientes de número finitos tiene dos características fundamentales: es el término al que los elementos de la sucesión se aproximan, y es un número mayor que todos ellos..."Ahora si yo deseo extender el concepto de límite también a límites transfinitos, la segunda de las características de arriba es usada; debe permitirse aquí que la primera se elimine porque tiene un significado sólo para conjuntos finitos."[149] Refiriéndose exactamente al mismo punto, Cantor había escrito en una carta[150], dos años antes, que el método que había empleado era el mismo que se utiliza en la construcción de los reales a partir de los racionales, a través de límites de sucesiones. Para subrayar esta analogía llamó a los transfinitos `los nuevos irracionales'. Algo similar ocurre cuando para hacer natural la extensión de la serie de cardinales introdujo operaciones y relaciones de desigualdad entre conjuntos arbitrarios que aplicadas a conjuntos finitos coinciden con las ordinarias. Por ejemplo, la conocida definición `dados dos conjuntos A y B, si existe una relación biunívoca entre un subconjunto de A y todo B, pero no a la inversa, la potencia de B es menor que la de A', concuerda con nuestra idea de desigualdad en el número de elementos de dos clases finitas. De allí parece desprenderse la imagen del infinito como una magnitud muy grande.

El célebre argumento diagonal apareció en una breve artículo que Cantor publicó en 1892. En el demuestra nuevamente que la potencia del conjunto de los números reales es mayor que la del conjunto de los naturales. La prueba tiene la virtud, como Cantor mismo señala, de que es susceptible a una generalización que muestra que dado cualquier conjunto, hay otro de potencia mayor. El argumento es muy sencillo: consideremos un conjunto E cuyos elementos puedan escribirse como sucesiones infinitas formadas por dos distintos caracteres α y β. Es decir, sea $E=\{(X^1,x^2,x^3,\ldots) \mid x^i=\alpha \text{ o } x^i=\beta\}$ y supongamos que es posible escribir sus elementos en una serie de la forma

$$E_1=(e_{11},e_{12},e_{13},e_{14},\ldots)$$

[149] Ibid. p.78.
[150] Ibid. p.77.

$E_2=(e_{21},e_{22},e_{23},e_{24},\dots)$
$E_3=(e_{31},e_{32},e_{33},e_{34},\dots)$
$E_4=(e_{41},e_{42},e_{43},e_{44},\dots)$
....

Cantor toma ahora la serie definida por $b_i=\alpha$ si $e_{ii}=\beta$ y $b_i=\beta$ si $e_{ii}=\alpha$. Evidentemente $B=(b_1, b_2, b_3,\dots)$ es un elemento de M no incluido en la lista anterior, pues b_i es distinto de e_{ii} para cada i y, por tanto b difiere de todo E. Eso demuestra que la totalidad de los elementos de M no puede ponerse en una lista. El mismo procedimiento nos permite demostrar que no es posible establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos de un conjunto A, y el conjunto B formado por todos sus subconjuntos. Pues si esto fuera posible, y a cada $x\in A$ se le asociara $B_x \subset A$, entonces el subconjunto de A $\{x \mid x\notin B_x\}$ no podría corresponder a ningún elemento de A.

Nos hemos detenido un poco en esta exposición de la génesis del 'paraíso cantoriano' porque es un ejemplo paradigmático de cómo la matemática extiende sus conceptos, en este caso el de 'número', con la creación de sistemas. Lo que observamos aquí es que la nueva teoría surge en el seno de la anterior, como una exigencia interna de mayor desarrollo. Algo semejante puede decirse de la introducción de los números irracionales. Más adelante aparece la necesidad de fundamentar la nueva teoría, lo que a su vez requiere que ésta se transforme para satisfacer ciertos requisitos, sin los cuales la comunidad matemática no la encuentra del todo satisfactoria. Muchas veces esos requisitos están sustentados, sugeridos o, por lo menos, vinculados con cuestiones filosóficas. Por ejemplo, el finitismo, relacionado muy estrechamente con el concepto de calculabilidad, es un criterio de corrección de pruebas que, que aunque conectado con una cuestión epistemológica, recoge un aspecto del sentir común de los matemáticos. Esto nos lleva a advertir otro punto de contacto entre filosofía y matemáticas, que trataremos con mayor detenimiento en el próximo capítulo.

La Crítica de Wittgenstein

Analicemos ahora más específicamente algunos de los comentarios de Wittgenstein en estos temas. Comenzaremos con la construcción dedekineana de los irracionales. Bouveresse ha escrito, muy acertadamente, que las observaciones de Wittgenstein a este respecto, algunas de las cuales se aproximan a una visión normativa o revisionista, pueden explicarse por su intento de eliminar toda interpretación extensional de las matemáticas, para privilegiar una visión intensional de las mismas[151]. En efecto, se trata de anular la idea de un conjunto que está allí de antemano, independientemente de cualquiera de nuestros intentos de caracterizarlo o conocerlo. Por ejemplo, Dedekind en algún pasaje parece sugerir la imagen de una recta como una totalidad de puntos para cuyo estudio aparentemente no bastan los números racionales[152]. Esta representación puede suscitar una idea filosófica de las matemáticas de corte platónico. Conviene que repasemos aquí cuáles son las objeciones que Wittgenstein levanta contra el platonismo.

El término 'platonismo' podemos entenderlo de por lo menos dos maneras diferentes. La más compleja sería la sugerida por Kreisel[153]: es la posición que defiende la existencia de una cierta objetividad en matemáticas, o más bien, que establece una distinción entre las condiciones de verdad de un enunciado, y las de su verificación. Algo hemos dicho sobre esta postura, pero algo más se desprenderá de lo que sigue. Otra forma de platonismo sostiene que la teorías matemáticas tratan de objetos abstractos que existen independientemente de la mente humana y cuyas propiedades tiene que descubrir el matemático. Las proposiciones de esta disciplina estarían constituidas, en parte, por los nombres de esos objetos. Es decir, estamos frente a una versión de la teoría nominalista que Wittgenstein rechazó con sus reiteradas observaciones de que el matemático no descubre sino que crea esencias[154], y que su ciencia no es la mineralogía de los números[155]. Un ataque a cualquier concepción nominalista del lenguaje se halla en las primeras páginas de las *Investigaciones Filosóficas.* En ellas se invalidan las diversas implicaciones de toda consideración del lenguaje según la cual "las palabras... nombran objetos -las oraciones son combinaciones de esas

---

[151] Ver Bouveresse Op. Cit.

[152] "If now, as is our desire, we try to follow up arithmetically all phenomena in straight line, the domain of rational numbers is insufficient..." Dedekind, Op. Cit. p. 9.

[153] Ver Wright, 1980, Cap. 1, Sec. 1

[154] RFM, I, 32.

[155] RFM IV, 11 y RFM, V, 16.

denominaciones-...Cada palabra tiene un significado. Es el objeto por el que está la palabra"[156]. Los argumentos que allí se ostentan no descartan la existencia de nombres, ni de proposiciones descriptivas en el lenguaje, sino que hacen ver a éste como un órgano constituido de múltiples piezas con muy diversas funciones. De que la expresión el 'Sr. X' no tenga por significado a un individuo particular, no se sigue que no exista una persona con este nombre. Así que podría decirse que nada impide que las proposiciones matemáticas estén constituidas con algunas nombres verdaderos cuyos referentes, que no sus significados, sean entidades (y otros 'falsos' que serían las abreviaturas de complejos nominales). Y dado el carácter necesario de los enunciados matemáticos, los objetos de los que tratan tendrían que tener una existencia al margen de toda experiencia. Wittgenstein no niega que haya proposiciones y nombres en el lenguaje, pero muestra cómo es que el significado de una proposición está dado por su gramática, la que a su vez se esclarece a través de las preguntas por el uso del enunciado, la forma de verificarse, etc. Es evidente que la palabra 'existencia' en matemáticas tiene un estatuto gramatical diferente que el mismo vocablo empleado en la lengua ordinaria. Al preguntarnos si los entes matemáticos pueden tener una existencia física estamos muy probablemente transgrediendo las reglas de uso de los términos, al grado de que la cuestión parece no tener sentido. Además, la investigación minuciosa del uso de las expresiones matemáticas conduce a Wittgenstein a un resultado que ya hemos analizado: no funcionan como descripciones empíricas, sino como reglas de la representación, al grado de que precisamente de allí les viene su carácter de verdades necesarias.

Para las proposiciones del lenguaje cotidiano tenemos, en efecto, que el sentido se halla ligado a las formas de verificación posible. En matemáticas, en cambio, el modo de verificar un enunciado es a través de su prueba, pero si tenemos ésta hemos ya decidido respecto a su verdad. Parece, no obstante, seguirse de ello, que Wittgenstein defiende un constructivismo radical, mayor aún que le de los intuicionistas. ¿No sostiene acaso que sólo existen y están plenamente determinados los entes matemáticos que pueden

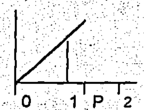
[156] Ph I, 1.

efectivamente construirse? De sus observaciones aparentemente puede concluirse que sólo deberíamos hablar del conjunto de los números reales como constituido por los números racionales, algebraicos, y algunos trascendentes. Esa impresión surge, por ejemplo, de sus críticas al continuo intuicionista. Según esta corriente, los números reales, dados por una expansión decimal en libre desarrollo, no son nunca objetos completamente acabados. Además sus ejemplos, construidos para mostrar la invalidez de la lógica clásica en totalidades infinitas, son precisamente un paradigma de lo que Wittgenstein pretende atacar.

Tomemos como ilustración la prescripción que consiste en determinar un número, precisando cada vez más su posición, eligiendo la sección derecha de un intervalo dividido en dos, si en el lanzamiento de una moneda cae águila, la izquierda, si es sol. Dado que esto produce una sucesión, nunca completa, de intervalos anidados, al final obtendríamos un número real. Pero esto supone que un ente matemático puede determinarse con un experimento, y no por un cálculo. Para Wittgenstein esto es imposible; el número o el enunciado matemático sólo son la parte final e indisociable de un cálculo, el uno, y de una prueba, el otro. Cada cual recibe su sentido del camino que a hasta él conduce. Sin embargo, como hemos observado en múltiples ocasiones siguiendo a Shanker, el riesgo de malinterpretación surge aquí si tomamos las cosas en un sentido epistemológico y no gramatical. Pues si pensamos que Wittgenstein está defendiendo una matemática en la que las pruebas y la construcción de entidades está supeditada a los alcances epistémicos o psicológicos del ser humano, sería imposible evitar muchas conclusiones revisionistas y que las observaciones de Wittgenstein se transformaran en tesis filosóficas muy graves. La expansión decimal infinita es el número y no una descripción indirecta para llegar al mismo, como si la extensión diera algo que la intensión se esfuerza inútilmente por alcanzar. Tanto si se nos da la sucesión 1, 4, 9, 14, 25,.. como si tenemos la fórmula $y=x^2$ se trata de una ley que determina o más bien constituye la serie misma. Es decir, Wittgenstein argumenta en favor de una interpretación intensional incluso de lo que en matemáticas se llama extensión, derivándola de sus consideraciones sobre las reglas y el lenguaje: "En ese test de la ecuación se efectúa algo que tiene que ver con ciertas extensiones. Pero no como si se tratara ahí de una extensión que fuera equivalente de algún modo a la ecuación misma. Se alude simplemente a ciertas extensiones. -No es la extensión lo que propiamente se describe ahí `faute de mieux', intensionalmente; sino que es la intensión lo que se describe -o representa- mediante determinadas extensiones que se producen aquí y allá a partir de ella."[157] Ya hemos visto la perniciosa ambigüedad de la expresión `los pasos vienen determinados por la fórmula', que suscita la imagen de algo ya dado inexorablemente más allá de las conductas individuales.

¿Significa esto que Wittgenstein alienta la supresión de los números reales no construibles o de aquellos cuya expansión decimal es completamente irregular? ¿A eso se refieren sus críticas a Dedekind, y a los intuicionistas? Analicemos este punto con detenimiento.

Dice Wittgenstein: "la demostración del teorema de Dedekind trabaja con una imagen que no puede justificarlo, que ha de ser primero justificada por él"[158] (RFM 240) "Es por la `combinación' del `cálculo y de la construcción' como se adquiere la idea de que habría que omitir un punto de la recta a saber P



si no se admite ´2 como una medida de la distancia de O. `Pues si realmente yo construyera con exactitud el círculo, habría de cortar la recta `entre' sus puntos... La expresión `línea recta a la que falta un punto' es una imagen tremendamente confusa. La fisura abierta entre ilustración y aplicación"[159]

En estos dos pasajes se hallan contenidas muchos elementos que conviene desglosar. Por una parte, parece revelarse una crítica contra la justificación a través de una ilustración geométrica de la construcción de los reales por cortaduras. Habría simplemente que decir que Dedekind estaba

[157] RFM, V, 39.
[158] RFM, V, 33.
[159] RFM, V, 37.

perfectamente consciente de que el dibujo de la recta sólo era una ilustración con ventajas pedagógicas evidentes, pues su intención era precisamente ofrecer una fundamentación rigurosamente analítica o 'aritmética' de la teoría de números reales[160]. Cuando Wittgenstein insiste en que, por el contrario, se trata no de una justificación, sino de una aplicación del análisis a la geometría, parece sugerir que la concepción de la recta también ha estado moldeada por el desarrollo de las otras ramas de las matemáticas, lo que podría ser cierto; si bien es de sobra conocido que esa intuición de la recta, y de sus relaciones con las magnitudes numéricas, era ya familiar en la Grecia clásica. En todo caso, el párrafo resalta el carácter arbitrario de la gramática mediante la expresión 'si no se admite '2 como una medida...' y la imagen extensional implícita en la fórmula 'Pues si realmente yo construyera con exactitud el círculo'.

Para Wittgenstein ningún sistema matemático puede estar incompleto[161], como tampoco lo puede estar el lenguaje o un juego, pero la incompletud del conjunto de los números racionales es una propiedad matemática bien definida. Asimismo aunque el campo de los números reales es un sistema completo en la práctica matemática, hay otro sentido en el que todavía puede ser extendido para constituir un nuevo sistema: no todo polinomio de grado 'n' tiene n raíces reales.

Sin embargo, hay que tener cuidado al interpretar las observaciones de Wittgenstein, pues en muchos pasajes insiste en que su crítica va dirigida solamente a suprimir la imagen extensional de la recta como ya dada con todos sus puntos, independientemente de que los conozcamos o no. No es el cálculo el que está en juego, sino la prosa que lo rodea.

En cuanto a que si hay números con una expansión decimal irregular, es decir, no gobernada por ley ninguna, creemos que la posición de Wittgenstein es la siguiente. Efectivamente, junto a los reales para cuya expansión decimal hay una ley que determina su desarrollo, el matemático reconoce la existencia

---

[160] Ver Dedekind, Op. Cit. p. 1.

[161] Por ejemplo, en WLC32-35, lecture XI, compara, a propósito de su completud, los juegos del lenguaje o lenguajes primitivos con una aritmética que sólo tuviera cinco numerales. Se trata simplemente de otro juego. Pensarla como incompleta es confundir a las matemáticas con una ciencia natural

de otros, evidentemente irracionales, que constituyen además a la gran mayoría de los reales. Una expansión en que cada decimal sucesivo está determinado por el lanzamiento de una moneda, no es un número, dice Wittgenstein, pues no hay una regla para operar con él. No podemos decir que hay una forma de compararlo con los racionales, si bien no visible aún en su totalidad. El significado de un signo numérico está dado por sus reglas de operación, y éstas tienen que ser completamente perspicuas. No obstante lo cual, esto no significa que Wittgenstein niegue la validez de esa 'imaginario experimento' de los intuicionistas o de la prueba cantoriana de la existencia de los números trascendentes. Lo que ocurre es que éstas tienen otra función. Establecen el marco, la gramática, el entramado en que los nuevos números se constituyen. La gramática establece, recordémoslo una vez más, qué proposiciones tienen sentido, y con ello, cuáles son las posibilidades de las que cabe hablar. El lanzamiento de una moneda para determinar una expansión decimal no nos da un número que quepa manejar y comparar con otros o que nos sirva para calcular, pero nos dice dónde es posible encontrar un número real, cuál es la 'multiplicidad' del sistema que éstos forman. En este sentido, Wittgenstein se opondría los ejemplos intuicionistas esgrimidos para recusar la validez de la ley del tercero excluido. Brouwer, por ejemplo, define el número pendular de la siguiente manera. Llama 'fugitiva' a una propiedad de los números naturales tal que siempre es posible probar algorítmicamente que un número particular la tiene o no, sin que pueda -sin embargo- demostrarse la proposición P que afirma la existencia de un número que la tiene, o su negación (que para un intuicionista, equivale a mostrar que P es contradictoria). Un ejemplo es el siguiente: P se predica de n, si n es par, mayor que 2, y no es la suma de dos primos. El número crítico de P es el menor natural ß que satisface ese predicado. Se denomina 'números superiores de la propiedad P' los números mayores que ß, y a los demás, inferiores. El número pendular binario ã generado por la propiedad P se define entonces así:

$$\tilde{a} = \lim a_n \text{ donde } a_n = \begin{cases} (-1/2)^n & \text{si n es un número inferior} \\ (-1/2)^{\beta} & \text{si n es un número superior} \end{cases}$$

Tomando en cuenta los métodos de demostración intuicionista, el número pendular no es ni igual a cero, ni diferente de cero, ni positivo, ni no-positivo, etc. Lo que Wittgenstein pondría aquí en cuestión es que realmente hayamos construido un número con el que se justifique el empleo de una lógica diferentes. Esto no requeriría justificación alguna. Podemos tener una matemática distinta, tal vez poco útil, pero con la misma validez que la que se rige por la lógica clásica. La validez de la ley del tercero excluido, no tiene otra fuente para Wittgenstein, más que la determinación de atribuirla como una característica gramatical de toda proposición.

Exactamente lo mismo se aplica al método diagonal que "...no nos muestra un número irracional que sea diferente de todos en el sistema, pero da un sentido a la proposición matemática que dice que tal y tal número es diferente de todos los del sistema... Cantor dice algo sobre la multiplicidad del concepto `número real diferente de todos los de un sistema'."[162] Otras observaciones de Wittgenstein en torno a esta forma de prueba inventada por Cantor, revelan una imagen peligrosa velada tras ella. Es la misma demostración y, en general, la teoría cantoriana la que da sentido a la idea de que es imposible enumerar, por ejemplo, un conjunto infinito como el de los números reales. Es en este marco que se definen criterios para establecer que la potencia de un conjunto es mayor o igual que la de otro, distintos de los que hasta entonces teníamos para la igualdad de número de elementos de dos clases finitas. El argumento diagonal extiende los conceptos de la nueva teoría y establece su gramática, pero suscita una imagen que puede provocar malentendidos filosóficos: la del infinito como una magnitud muy grande que, además, preexiste a toda determinación conceptual. Shanker indica[163] que en el afán de Cantor por legitimar sus números transfinitos, ya sea cardinales, ya ordinales, elaboró una teoría en que se definen las relaciones de igualdad y `mayor que' para potencias de una forma homogénea, es decir, que se aplican indistintamente sea o no finitos los conjuntos en cuestión. En ello Wittgenstein advirtió grandes riesgos[164], pues

[162] RFM, II, 29.

[163] Shanker, 1987, p. 161-175.

[164] RFM, II, 58: "¿Hay que evitar la palabra "infinito" en matemáticas? Sí, allí donde parece conferir un significado al cálculo, en lugar de recibirlo de él primero."

entonces el infinito aparece como una magnitud más grande que la finita, en el mismo sentido en que un conjunto 5 elementos es mayor que uno de 3. No es que haya una idea previa de relación entre magnitudes que el argumento diagonal tome para mostrar que un conjunto infinito es mayor que otro, sino que la prueba introduce una nueva idea de una relación que podemos seguir llamando de igual manera, siempre y cuando estemos conscientes de que nos hallamos en un sistema diferente regido por nuevas reglas gramaticales[165]. También señala Shanker[166] cómo la crítica de Wittgenstein es similar a la que se apunta en el Tractatus con respecto al uso del cuantificador universal. En efecto, así como el sentido de la expresión 'para todo x' es diferente según que el dominio sobre el que se esté cuantificando sea finito, dado o no por la experiencia, o infinito, así también el uso de la palabra 'límite' en análisis es distinto del que tiene en la definición de ω, como el propio Cantor lo advierte. Sin embargo, Cantor lo interpreta en sentido opuesto: el sentido es el mismo, sólo que aplicado a conjuntos infinitos produce resultados diferentes. El sentido de la expresión 'el límite de Sx es b' se desglosa en dos requisitos, pero uno, el que se refiere a las condiciones métricas de una cercanía tan grande como se quiera, para términos suficientemente avanzados, esa -dice Cantor- no se aplica a totalidades infinitas. Se trata pues de la idea del significado como cuerpo adherido a una palabra que hace que esta pueda aparecer en cierta combinaciones y no en otras.

Para Wittgenstein el uso de la palabra 'infinito' en matemáticas es peligroso si se olvida que los términos reciben sentido exclusivamente de los cálculos y demostraciones en que aparecen. Encontraría del todo equivocado y erróneo el que pretendiese resolverse el gran problema filosófico del infinito con una teoría matemática en que por ciertas analogías se utiliza esa misma palabra. Al parecer muchas de las reflexiones de Cantor estaban en ese sentido encaminadas, como Wittgenstein lo reconoce cuando dice que debe tratarse de una interesante red lingüística la que hay aquí, pues ha atrapado a un hombre inteligente[167]. Desde luego no es que pretendiera resolver con

[165] Cfr. RFM, II, 46.
[166] Ibid.
[167] RFM, II, 15.

otros medios las dificultades que el infinito suscita, sino disolverlas mostrando las confusiones lingüísticas de las que surgen. Otro problema vinculado con la teoría cantoriana es que al presentar al infinito como algo actual produce una imagen extensional: "La expresión `Pero cuando se mira el cálculo no hay nada infinito en él' -naturalmente una forma de hablar desacertada- pero significa: ¿Es realmente necesario evocar aquí la imagen del infinito (de una magnitud enorme)? ¿Y como está conectada esa imagen con el cálculo? Porque su conexión no es la misma de la imagen IIII con 4."[168]

Al decir que un proceso es infinito estamos dando una regla gramatical que descartaría, por ejemplo, como carente de sentido, cualquier proposición en que se hablara del último paso de ese proceso, y no de algo rebasa las posibilidades del ser humano y al que éste se aproxima con medios insuficientes. En efecto, es en el cálculo y en sus demostraciones en dónde el sentido de los enunciados se configura, pues como hemos visto cuando Cantor utiliza el símbolo P^{∞} se refiere con él a un conjunto que está perfectamente determinado y a un procedimiento que permite formar una clase partir de otra, y cuyas reglas nos son perfectamente abarcables. Lo mismo ocurre con los números ordinales o cardinales transfinitos.

Wittgenstein le daría la razón a Hilbert: la matemática es la ciencia del infinito, pero con ello no se ha dicho nada de carácter filosófico. "`No estamos hablando de nada que tu llamarías `grande' y por lo tanto de nada infinito'. - Pero mientras trates de apuntar que no estamos tratando de algo infinito, esto nada significa, pues ¿por qué no decir que esto es [el] infinito [this is infinite]. Lo que es importante es que no es nada `grande'."[169] [170]

Sin embargo, para desvincular del uso del término `infinito' la imagen de una magnitud muy grande, Wittgenstein insiste paradójicamente en que imaginemos el uso de aleph-cero en la vida cotidiana. En sus clases comenta la posibilidad de que dijéramos, por ejemplo, que sabemos hacer aleph-cero multiplicaciones, etc. En otros pasajes de los *Remarks on the Foundations of*

---

[168] RFM, II, 59.
[169] WLFM, p.255.
[170] Nótese que Hilbert escribió en 1925: "Ahora bien, parecía bastante natural identificar infinito con "muy grande", por lo que no tardaron en aparecer las primeras contradicciones..." (Hilbert, Op. Cit. p. 89)

Mathematics indica que no hay una praxis en que pudiese anclarse la proposición 'estas consideraciones pueden llevamos a decir que $2^{\aleph}>\aleph$[171]. En particular en una de sus lecciones dice, refiriéndose al menor cardinal transfinito: "Y tú tienes ahora que preguntarte: en qué proposiciones no-matemáticas es usado? Si quieres saber el dominio al cual esto apunta, tienes que ver en qué proposiciones lo usamos."[172] Esta reiterada indicación de Wittgenstein de que los conceptos tienen que utilizarse en proposiciones no-matemáticas, es desconcertante cuando se trata precisamente de teorías tan abstractas como esta de los números transfinitos. En general si nos preguntamos por el uso de una proposición matemática, tendremos que responder en un gran número de casos que sólo tiene un empleo al interior de la matemática misma. Sin embargo, hemos reconocido ya el carácter gramatical de los enunciados de esta disciplina; si son normas de la representación, tendrán que serlo de la representación del mundo empírico, pues de otra manera volveríamos a una forma de platonismo. Aún así, es trivial la constatación de que una gran parte de las matemáticas que se crean actualmente no tiene una aplicación inmediata a la representación del mundo, por ejemplo, aplicadas a otras ciencias. Por ello una solución ordinaria a este dilema ha sido decir que aún las ramas más abstractas de la matemáticas forman indirectamente la gramática de proposiciones que, estando lejanamente vinculadas con ellas, se aplican a la representación empírica. Por ejemplo, el estudio de los espacios lineales se vincula con la teoría de ecuaciones diferenciales que, a su vez, tiene una aplicación directa en muchos problemas de la física, etc.

Podría reforzarse esta concepción de las matemáticas con la idea sugerida a través de la definición de verdad de Tarski[173]. Una forma de entender ésta nos haría ver al matemático como alguien que crea una teoría gramatical para objetos que se encuentran en ciertas relaciones, independientemente de en qué dominio o campo pueda luego ser aplicada. No obstante, eso podría sugerir la idea de que el desarrollo de un teoría

---

[171] RFM, II, 35.
[172] WLFM, p.252.
[173] Cfr. Tarski, A. "El concepto de "verdad" en lenguajes formalizados", 1936.

matemática puede estar desligada de sus posibles aplicaciones y que, por tanto, el sentido de sus enunciados poco tiene que ver con el uso al que más tarde van a ser destinados, favoreciendo de nuevo una imagen platónica o formalista de esta ciencia. Pero la decisión de interpretar el simbolismo de una teoría formal de una forma determinada, es decir, de darle un contenido semántico específico, dota de un nuevo sentido a sus proposiciones, distinto del que estas mantenían en el estrecho ámbito de sus mutuas relaciones sintácticas. Volveremos a esto en el próximo capítulo, en el que enfrentaremos un problema estrechamente conectado con el formalismo: el de la consistencia de sistemas axiomáticos.

CAPITULO V

EL FORMALISMO Y EL PROBLEMA DE LA CONSISTENCIA

En este capítulo analizaremos algunos de los comentarios de Wittgenstein sobre el tema de la consistencia de los sistemas axiomáticos. Enmarcaremos este problema en el que es seguramente el contexto en que adquiere su mayor significado: el del programa formalista de Hilbert y su escuela. Estudiaremos también una posible implicación revisionista de la obra de Wittgenstein.

La propuesta de Hilbert

En una de las conversaciones con Weismann, Wittgenstein afirmó que el problema de las contradicciones ocultas en sistemas matemáticos surgió con el nacimiento de las geometrías no euclidianas y de las paradojas del tipo de las de Burali-Forti.[174] Es cierto que se puede vincular la preocupación por la consistencia con el problema más general de los fundamentos de la matemática, pero dentro de este marco tiene una importancia singular sólo para el formalismo. Por ejemplo, para Russell, a principios de siglo, la matemática está constituida por proposiciones verdaderas y es, por tanto, trivialmente consistente: "Las matemáticas son una perfecta refutación del escepticismo; pues su edificio de verdades permanece inquebrantable e inexpugnable al escepticismo dubitativo"[*]. Las paradojas, una de las cuales él mismo había descubierto, eran el signo de que aún no se había alcanzado el fin de reducir las matemáticas a la lógica, pero no ponían en duda la certeza del conocimiento matemático. Para Brouwer y su escuela la utilización del método axiomático, y de las preguntas metateóricas a que da lugar, no

---

[174] WW, p. 107.

[*] "Recent Works in the Philosophy of Mathematics." Reimpreso como "Mathematics and the Metaphysician" en *Mysticism and Logic*, George Allen and Unwin, Londres. Versión castellana de J. Rovira Armengol: *Misticismo y Lógica*. Paidós, 1951.

son del todo pertinentes a su concepción de las matemáticas[175]. En cambio, la pregunta por la consistencia de un sistema formal aparece vinculada directamente al surgimiento del método axiomático moderno, cuyos orígenes se remontan precisamente a *Los Fundamentos de la Geometría de Hilbert*[176]. Esta obra, publicada en 1899, explora las consecuencias deductivas de un sistema de axiomas dividido en 5 grupos. El acento está puesto en las relaciones que estos principios de la geometría tienen entre sí y con diversas proposiciones de esta disciplina. El espacio de que aquí se trata no es más el de nuestra percepción sensorial, sino un concepto matemático caracterizado por axiomas susceptibles de recibir múltiples interpretaciones. Hilbert prueba la consistencia de cada grupo y la independencia de algunos en relación a los otros. Construye un modelo para demostrar, por ejemplo, la posibilidad de una geometría no-arquimedeana. Por contraste con Kronecker que había rechazado las pruebas no constructivas en matemáticas, para Hilbert la consistencia de un grupo de axiomas vuelve legítimo el estudio de sus consecuencias deductivas.[177]

Hilbert, en 1900, en el Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París, propuso entre sus célebres 23 problemas[178] (con los que pretendía descorrer el velo que ocultaba el desarrollo de la matemática en este siglo), el de demostrar la consistencia de la aritmética, ya sea hallando una solución positiva al problema o demostrando que ésta es imposible en los términos propuestos. No obstante lo cual, el problema se hallaba lejano de una

---

[175] Ver Heyting, A. *Intuitionism, An Introduction*. North-Holland, Amsterdam, 1971..

[176] Hilbert, David. *Foundations of Geometry*, Open Court, Lasalle, 1971.

[177] Esta concepción de Hilbert está influida por dos elementos de su práctica como matemático que fueron decisivos en su pensamiento posterior. Uno es su ya mencionada axiomatización de la geometría, junto con su convicción de que las ciencias pasan por varios grados de desarrollo necesarios, en el último de los cuales deben estar axiomatizadas. El segundo es su célebre demostración, en 1888, de que todo sistema de invariantes tiene una base finita. Esta prueba causó muchas controversias por tratarse de una demostración de existencia llevada a cabo por reducción al absurdo. En particular, Kronecker y Gordan la rechazaron. Es cierto que en 1892 Hilbert daría otra prueba de carácter constructivo, pero para él lo importante era defender un procedimiento que caracterizaba en buena medida a la práctica matemática moderna. Su programa formalista había de buscar la legitimización de toda la matemática existente; especialmente de la teoría de los números transfinitos de Cantor, frente a los ataques de quienes, como Kronecker, pedían una purificación en el cuerpo de las matemáticas guiada por principio hasta cierto punto ajenos a su práctica

[178] Cfr. Hilbert, D. "Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalem Mathematiker-Kongress zu Paris.", Göttinger Nachrichten, 1900. Traducción al inglés en Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 28, 1976.

formulación precisa, misma que habría de llegar con el desarrollo del programa formalista.

Diversos artículos de Hilbert[179], principalmente en la década de los veintes, atestiguan la evolución de su pensamiento entorno al problema de los fundamentos. Culminaron con la cristalización de un programa matemático preciso, que hacía eco de las exigencias finitistas de Brouwer, y aprovechaba los frutos del logicismo, a la vez que seguía una tendencia cada vez más presente en la marcha de las matemáticas desde la época de Vieta.

La palabra "formalismo" había sido empleada por Frege para designar a la escuela que concibe a las matemáticas como una ciencia de signos. Brouwer fue el primero en emplear ese vocablo para designar las ideas de Hilbert (de manera peyorativa)[180]. En los trabajos de este último se emplea, en cambio, con la acepción de "sistema formal". Veremos ahora lo que significa cuando es referida a la propuesta hilbertiana de fundamentación de las matemáticas.

Para Hilbert la axiomatización de una teoría es signo de madurez[181]. el método axiomático permite ordenar las proposiciones y conceptos que forman una teoría y, a través de ellas, los hechos de que ésta se ocupa. A veces es posible probar los que hasta entonces eran los principios básicos de ese cuerpo de conocimientos, para alcanzar axiomas de un grado mayor de profundidad. Dos problemas se plantean con ello, a saber, el de la consistencia de los axiomas (entre sí y con los de otras teorías) y el de su independencia mutua. La resolución de este último nos permite en algunas ocasiones determinar si un conocimiento requiere o no de verificación empírica. El primero es, en cambio, más grave pues "pone en entredicho la existencia misma de la teoría"[182] (*) En el dominio de las ciencias naturales la dificultad se presenta, por ejemplo, cuando dos teorías entran en conflicto y entonces es necesario modificar el grupo de axiomas de forma que todas las proposiciones resulten ahora consecuencias suyas. En cambio en las

---

[179] Ver Hilbert, David. *Fundamentos de las Matemáticas.* U. N. A. M., México, 1993.
[180] Ver Segura, L. F. *El Fundamento Lógico Matemático de la Teoría Hilbertiana de la Demostración.* Signos, 1994, México.
[181] Hilbert, Op. Cit "El Pensamiento axiomático" (1917)
[182] Ibid. p. 28.

matemáticas -dice Hilbert- no basta con eliminar las contradicciones conforme se presentan, es necesario garantizar de antemano la imposibilidad de una contradicción, para devolver a esta ciencia su prestigio pues:

"Imaginemos simplemente lo que sucedería si en el paradigma de verdad y confiabilidad científicas que las matemáticas representan, las construcciones conceptuales y las inferencias que nos son familiares nos condujeran a absurdos. ¿En dónde podríamos buscar la certeza y la verdad si el pensamiento matemático mismo falla?".[183]

Conviene para lo que vamos a ver a continuación matizar esta declaración de temor por la posible inconsistencia del edificio matemático, con la siguiente que expresa un poco más las motivaciones de su autor:

".Por lo tanto, cuando Weyl cree descubrir una "inestabilidad interna en los fundamentos sobre los que descansa la construcción misma de ese sistema" y se preocupa por "el peligro de disolución que acecha al estado que llamamos análisis" lo que en realidad ocurre es que ve fantasmas... en el análisis tenemos de hecho una seguridad completa, además de una unanimidad más que evidente en cuanto a los resultados obtenidos... El objetivo que nos hemos propuesto es entonces el de dar un fundamento seguro a las matemáticas. Nuestra intención es devolver a nuestra disciplina el antiguo prestigio de consistir de verdades indiscutibles..."[184].

Ese fin debe conseguirse sin que sea necesario sacrificar los conceptos y métodos que han enriquecido a las matemáticas, como el "paraíso cantoriano", hasta alcanzar en todo razonamiento la certeza que caracteriza a la certeza intuitiva.

Para Hilbert[185] las proposiciones matemáticas son de dos tipos; las que podríamos llamar proposiciones reales que versan o son extraídas de los objetos de nuestra intuición sensible, como lo son las mas simples identidades aritméticas, y las proposiciones que se refieren a las que él denomina nociones ideales, y de cuales son ejemplos paradigmáticos los puntos al infinito de la geometría o los números imaginarios. Estas nociones se agregan al cuerpo de la matemática con el objeto de completarlo y

---

[183] Hilbert Op. Cit. "Acerca del Infinito." p. 94
[184] Hilbert, Op. Cit. "La Nueva Fundamentación de las matemáticas." 1922, p. 40-41.
[185] Hilbert, Op. Cit "Acerca del Infinito." (1925)

proporcionarle una elegancia y una simetría que facilitan grandemente los cálculos o la enunciación de teoremas generales. Así la recta al infinito hace válido sin excepciones el principio de dualidad en la geometría proyectiva, y los complejos fueron introducidos de "tal manera que las leyes del álgebra, aquellas, por ejemplo, concernientes a la existencia y número de raíces de una ecuación, pudieran ser preservadas en su más simple forma".[*]

Una de estas nociones ideales, probablemente la más problemática en la historia de las matemáticas, es la de infinito. Estaba presente en la antinomias con series infinitas que permearon el cálculo en el siglo XVIII. La vuelta al rigor fue llevada a cabo, entre otros, por Karl Weierstrass quien consiguió suprimir nociones en las que se hallaba implícita la noción de infinito actual, por conceptos y términos hasta cierto punto equivalentes y que se refieren tan sólo a un infinito potencial. Hilbert equipara su programa que enfrenta las paradojas surgidas en la teoría de los Conjuntos con el esfuerzo de Weierstrass por hacer del análisis una disciplina rigurosa. Justamente una de sus propuestas es considerar al infinito como un elemento ideal. Esas antinomias -nos dice- surgieron como resultado de una incomprensión del modo como deben ser introducidas las nociones en una teoría[186] y no por el uso irrestricto del principio del tercero excluido, como pensaban los intuicionistas. En efecto, mientras tratamos con proposiciones que tienen un contenido concreto, dado a la intuición, no hay riesgo de paralogismos. Las nociones ideales, en cambio, puesto que no provienen de tan segura fuente, deben ser introducidas en una teoría con la prueba de que no generan contradicciones. Como veremos más adelante al considerar este tipo de nociones es muy común pasar de un enunciado verificable en un número finito de pasos (para un primo determinado), a otro enunciado no finitario. Es aquí según la escuela de Brouwer, que la posibilidad de contradicción aparece. La lógica aristotélica que es válida para conjuntos finitos, no lo es para los infinitos. El problema de Hilbert era salvar la lógica clásica en su pretención de validez absoluta, así como las secciones del análisis que el intuicionismo había eliminado.

---

[*]Hilbert, D. "Uber das Unendliche" tomado de Van Heijenoort, From Frege to Gödel, Harvard, 1977. En la traducción castellana, de la colección Mathema, p.89.

[186] Ibid. p. 475.

El autor de "*Los Fundamentos de la Geometría*", había empleado la técnica de construcción de modelos para estudiar dos posibles relaciones deductivas entre los axiomas, a saber, la independencia y la consistencia relativa. Por otro lado, la axiomatización del análisis en el siglo XIX consiguió reducir el problema de la consistencia de los diversos sistemas numéricos involucrados en el análisis, al de la consistencia de la aritmética elemental. Esta tenía que ser probada de manera absoluta.

Para ello Hilbert crea una nueva técnica: la del análisis sintáctico. Apoyándose en la autoridad de Kant, concibe a las matemáticas como una disciplina para cuyo desarrollo algo tiene que ser dado en la intuición sensible, previo a todo razonamiento lógico. Estos objetos deben ser "susceptibles de una visión global completa de todas sus partes y que su presencia, sus diferencias mutuas, su ordenación, su sucesión o su concatenación acompañe a los objetos, al mismo tiempo, como algo dado de manera inmediata en la intuición, como algo que ya no requiere de ninguna deducción.[187] Estos elementos de la intuición son los signos. Si la matemática, y la lógica en ella empleada, son vertidas en sistemas formales axiomáticos, lo que resulta posible gracias a Russell y a Frege, sus modos de argumentación se transforman en algo perfectamente corroborable y objetivo, susceptible de un análisis riguroso. Hilbert inaugura una disciplina encargada del estudio de la matemática vertida en sistemas formales y de investigar las propiedades de éstos, y la llama metamatemática o Teoría de la Demostración[188]. Dado que ésta ha de proveer las pruebas de consistencia de una amplia gama de teorías, y en particular de la aritmética elemental, sus procedimientos no pueden rebasar el ámbito de lo finitario. Así es como Hilbert asimila o acepta la crítica de los intuicionistas.

Recordemos rápidamente que para Brouwer y su grupo los teoremas de la matemática son, como para Kant, verdades sintéticas a priori. En particular, la aritmética debe provenir de la intuición temporal. Sus objetos son

[187] Hilbert, Op. Cit. 1925.

[188] Nombres que aparecen por vez primera en los artículos "La nueva Fundamentación de las mtemáticas" (1922) y "Los Fundamentos Lógicos de las Mtemáticas." (1923), aunque la idea de un nuevo campo de investigación consagrado a la prueba se encuentra ya en el artículo "El Pensamiento Axiomático" de 1917.

construcciones que la mente elabora al margen de toda experiencia, sin ninguna restricción, como no sea la de estar basados en la intuición matemática fundamental. Esta intuición garantiza la no contradicción y la verdad de los resultados obtenidos en acuerdo con ella, por lo cual resulta innecesario, e incluso inútil, el empleo del método axiomático. Todo lo que rebasa la evidencia intuitiva carece de solidez y debe ser eliminado de las matemáticas. Los intuicionistas rechazaban cualquier alusión al infinito actual. Aceptaban en cambio la inducción matemática como intuitivamente clara. Weyl escribió en 1946: "La sucesión de los números que crece más allá de cualquier nivel ya alcanzado... es una variedad de posibilidades abierta al infinito; permanece para siempre en estado de creación, pero no es un campo cerrado de cosas existentes en sí mismas. El hecho de que hayamos convertido lo uno en lo otro es la verdadera fuente de nuestras dificultades, incluyendo las antinomias... Brouwer nos abrió los ojos haciéndonos ver hasta qué punto las matemáticas clásicas, alimentadas por una creencia en lo absoluto, que trasciende todas las posibilidades humanas de comprensión, va más allá de las afirmaciones que pueden reivindicar un significado y una verdad basadas en la experiencia"[*]. La existencia de un objeto, de acuerdo con esta escuela, debe ser establecida por métodos constructivos, es decir, únicamente se demuestra a través de la exhibición de procedimientos con los cuales se pueda en un tiempo finito obtener ese objeto. Así por ejemplo, el teorema euclidiano que afirma la infinitud de la serie de los primos es válido, puesto que en realidad asegura que dado el n-ésimo número de esta serie p(n) hay otro mayor que él pero menor que p(n)! + 1. Justamente es este el ejemplo con el que Hilbert ilustra la postura intuicionista, y muestra que ésta nos conduce al abandono de las leyes de la lógica aristotélica lo que, a su vez, le parece intolerable. Pues, Vgr., de la proposición susodicha que establece que entre dos números de la serie numérica hay uno que es primo, se infiere efectivamente la proposición que asegura la existencia de un elemento en un conjunto infinito. Ahora bien, ésta no es una consecuencia

[*] Weil, H. "Mathematics and Logic", AMM. 53 (1946) citado en Kline, Morris. Matemáticas. La Pérdida de la Certidumbre. S. XXI de España, p. 283.

válida desde el punto de vista de los intuicionistas pues la negación de ese enunciado no es susceptible de verificación finitaria.[*]

Hilbert rechaza entonces el criterio intuicionista para la validez de una prueba en el terreno de la matemática, pero lo acepta en su teoría de la demostración. En un artículo citado de 1922 da un ejemplo de su método para un caso particular muy sencillo. Más adelante Presburguer habría de dar una demostración de consistencia de la teoría aritmética de la adición, mediante la técnica de la eliminación de cuantificadores.

No deja de ser digno de nota el que la completud de un sistema axiomático, es decir, su adecuación con respecto a la teoría que pretende formalizar, no fuera planteado claramente hasta 1928 (por Hilbert y Ackermann[189]). Es hasta entonces que verdaderamente el problema queda precisado.

Para concluir esta breve exposición de los principios del formalismo, quisiéramos remarcar dos aspectos del mismo que serán importantes en lo que sigue. El primero es que hay una versión del formalismo que identifica a las matemáticas con una ciencia de signos. Frege, por ejemplo, atribuye esta forma de pensar a Schröder: "por lo anterior se ve que, para Schröder, el número es un símbolo."[*] Y, en efecto, en un texto de 1922 Hilbert asevera que "son los signos mismos los objetos de la teoría de los números"[*]. Sin embargo, del desarrollo posterior del programa formalista y de la obra de Hilbert podemos concluir que la transformación de la aritmética en un sistema formal, era solamente un paso tendiente a terminar con el problema de los fundamentos de la matemática y no una posición filosófica a este respecto. La segunda aclaración que quisiéramos hacer es que aún cuando Hilbert se apoya explícitamente en la filosofía kantiana y manifiesta una preocupación de tipo epistemológico, su programa convierte a la cuestión por los fundamentos en un problema estrictamente matemático, hasta cierto punto

---

[*] Cfr. Heyting, A., *Intuitionism* North Holland, Amsterdam, 1956.

[189] Hilbert, D. Ackermann, W. *Principles of Mathematical Logic.* New York, 1959.

[*] Frege, G. *Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética. Otros Estudios Filosóficos.* p. 156. U.N.A.M. 1972

[*] Hilbert, Op. Cit.p. 45. "La Nueva Fundamentación de la Matemática"

independiente del marco filosófico que sirve para presentarlo. Sobre ello habremos de volver más adelante.

La matemática como juego

El comentario y crítica que Wittgenstein realiza del programa formalista y, en particular del problema de la no contradicción, se remonta a las conversaciones con Waismann. Allí Wittgenstein dice haber leído algún trabajo de Hilbert que, según B. F. McGuinness, es muy probablemente el artículo "Sobre el Infinito"(1925), o "Fundamentos de la Matemática"(1927) o quizás a "Nueva Fundamentación de la Matemática"(1922)[*]. En cambio, en los manuscritos posteriores de Wittgenstein y en sus clases, las referencias explícitas a Hilbert son escasas y quedan tácitamente comprendidas en el tratamiento general que da al problema de los fundamentos de la matemática. Aunada a ello se encuentra la indicación de Shanker[*] de que las notas de Waismann contienen la clave del tratamiento wittgensteiniano en la cuestión que ahora nos ocupa, razón por la que comenzaremos con este texto. En él Wittgenstein compara constantemente a las teorías matemáticas (a la aritmética, a la geometría, etc.) con juegos y, en particular, con el ajedrez. Creemos que esta equiparación tiene como fin el remarcar las siguientes características de las diversas ramas de la matemática: se trata de sistemas cerrados los unos con respecto a los otros, y autónomos. Por tanto no pueden estar incompletos, ni uno puede ser justificación o fundamento del otro (como corresponde a su carácter gramatical) Ya habíamos mencionado en el capítulo III esta forma de concebir a las matemáticas. Se encuentra vinculada con la distinción entre totalidades empíricas y sistemas a la que ya también aludimos. En efecto, recordemos a modo de ilustración que, de acuerdo al Wittgenstein de comienzos de la década de los treintas, el conjunto de sombreros que hay en una habitación se expresa mediante una propiedad o función asertiva; en cambio, el conjunto de puntos del espacio, ejemplo de un

[*]Cfr. WW, p. 105 nota 69. Bouveresse asevera, apoyándose en un testimonio de Kreisel, que Wittgenstein había anotado "Heiliger Frege" en el margen de un ejemplar de "Uber das Unendliche, Cfr. Bouveresse, 1988.
[*] Shanker, 1987, cap. VI

sistema, determina el ámbito significativo de una función[190]. Es decir, mientras que la determinación del conjunto de sombreros sólo puede ser objeto de experiencia, el espacio tiene que ver con la posibilidad, y su conocimiento no es empírico. De ahí el ejemplo del hombre que ha vivido encerrado en una habitación que sin embargo sabe con certeza de la infinitud del espacio(*) (y no que lo conjeture por mera hipótesis, como pensaba Russell). Análogamente, de ese individuo dice Wittgenstein que conocerá la existencia de otros colores, si su gramática es la misma que la nuestra, aún cuando la habitación esté pintada de un solo color[191] (WW, p. 59). Cada elemento de un sistema se constituye por su relación con otros, por ello la determinación de un punto espacial se realiza especificando cómo se llega a él desde cualquier otro punto. Un sistema se retrotrae a una operación. Por ejemplo, el cálculo proposicional se genera a través de una función recursiva aplicada a las proposiciones simples, como los números proceden por el empleo repetido de la operación sucesor a partir del 1. Considerando cada elemento podemos advertir todos los otros del sistema, que forman así estructuras cerradas cuyas fronteras conocemos de antemano.

Es verdad que las proposiciones de la matemática no se generan a partir de una operación aplicada a enunciados básicos. Incluso en el caso de un sistema formal en que de los axiomas se pueden obtener los teoremas por medio de la aplicación reiterada de las reglas de inferencia, la analogía con la serie numérica no se sostiene del todo. Sin embargo, los teoremas matemáticos forman un sistema en que las demostraciones constituyen el camino que conecta a cada punto de este 'espacio lógico' con los otros.(*) Aunque se trata, de acuerdo a los *Remaks on the Foundations of Mathematics*, de una red que crece constantemente y no de una totalidad dada de una vez y para siempre, forma en cada momento un sistema[192]. Así como el rey del ajedrez no es simplemente un trozo de madera, así también los elementos en un sistema matemático, por ejemplo los números, están definidos por las reglas que los constituyen en una totalidad ordenada. Por

[190] WW, p.187.
[191] WW, p. 59.
(*) RFM, VI-§11.
[192] RFM, I, 170.

ello Wittgenstein rechaza la alternativa fregeana según la cual un signo (numérico) o tiene como significado un objeto al que representa o bien es solamente una figura dibujada en el papel.[193]

Una diferencias importante hay entre un sistema matemático y un juego, según Wittgenstein, y es que las matemáticas tienen un empleo en asuntos serios de la vida[194]. Es importante considerar a este respecto, que una tirada en el juego matemático puede ser una expresión de las reglas conforme a las cuales se juega[195]. Así en lógica una tautología cuyo conectivo principal es la implicación puede ser vista como la 'representación lineal' de una regla de inferencia, y en álgebra una igualdad puede considerarse como una regla de substitución. Esta asimilación de elementos dispares va ser muy importante en lo que sigue.

Una objeción frecuente es que no solamente existen metateorías matemáticas sino que en casos como el de la geometría analítica, y tantos otros, los diferentes sistemas matemáticos están relacionados por elementos correspondientes. Ello no obsta para que Wittgenstein los considere como organismos autónomos. Una metateoría puede ser una versión más sofisticada de una teoría (como en el caso de quien juega ajedrez sin el tablero, anotando las posiciones de las piezas en el papel[196]; en otros se trata de una nueva teoría vinculada con la primera. Hay además sistemas que engloban a otros, y pruebas formales que son válidas para diversos modelos. No puede negarse que el programa de Hilbert logró probar la consistencia de una parte de la aritmética, como Gentzen la probó para su totalidad, aunque por medio de la inducción transfinita.

Sabido es que Wittgenstein no pretendía eliminar ningún cálculo ni crear uno nuevo, pero sí desvanecer el 'gas', la 'prosa' que se forma en torno a los cálculos[197]. El medio para conseguirlo es recordar que los símbolos tienen significado únicamente en el contexto de los cálculos en que aparecen. Así el concepto de 'infinito' del que habla Cantor se encuentra definido al interior de

---

193 WW, p.132.
194 WW, p.145.
195 Cfr. WW, "Ecuación y regla de substitución." p. 135-140, y los pasajes titulados "Incontradictoriedad".
196 WW, p. 118.
197 WW, p. 132.

su teoría y no es la misma noción a que aludimos con esa palabra en el lenguaje ordinario. Sin embargo la delimitación entre prosa y cálculo no parece siempre tan evidente. Por ejemplo en las conversaciones con Waismann, cuando comentan la prueba de consistencia relativa de la geometría bidimensional de Riemman en que se emplea el modelo de la esfera, Wittgenstein afirma: "tenemos una formación y punto. Lo demás que se quiera añadir es prosa. Se dice: 'luego el sistema está libre de contradicción'. Pero no existe tal 'luego', lo mismo que sucede en la inducción."[198] Antes y en relación a una prueba de consistencia de un sistema formal muy restringido que da Hilbert en su (1922) Wittgenstein asevera que lo que la prueba nos hace ver (la consistencia) es inexpresable en una proposición[(*)]. Esta referencia a la inefabilidad hace pensar en una etapa de su pensamiento tal vez más próxima al Tractatus que a las *Investigaciones Filosóficas*. No entremos en tan espinoso problema. Simplemente intentemos entender esas declaraciones tan radicales desde un punto de vista enteramente gramatical. La referencia a la inducción es esclarecedora porque, en algunos pasajes análogos, Wittgenstein le ha negado el carácter de demostración[199]. La razón es que no se trata de un procedimiento que conduzca a establecer la verdad de una proposición cuyo sentido sea independiente. El resultado -recordémoslo una vez más- se constituye en la operación que lo valida, a diferencia de lo que ocurre con una proposición empírica. Análogamente las nociones de 'consistencia de un sistema axiomático' o de 'independencia de una proposición con respecto a un sistema' adquieren sentido a través de las demostraciones correspondientes y por referencia a un contexto formado por un red de proposiciones, como vimos en el caso del teorema de Gödel. El riesgo latente es que la separación entre la demostración y su teorema lleve a confundir la gramática de éste.

El tratamiento wittgensteiniano de la contradicción es uno de los temas más difíciles de toda su filosofía de las matemáticas. Veámoslo a partir de

---

198 WW, p. 128.

(*) "La prueba nos muestra, por una inducción, la posibilidad de que siempre sigan apareciendo signos ->... La prueba nos deja ver algo. Pero lo que muestra no se puede expresar por una proposición. Consiguientemente, no se puede decir: 'Los axiomas están libres de contradicción." (WW, p.121)

199 WW, p. 29.

ciertos ejemplos. Consideremos la demostración de que la raíz de 2 no es un número racional. Se parte de suponer que sí lo es o, equivalentemente, de conceder que hay dos números enteros a y b, que se supone primos relativos, cuyo cociente es igual a la raíz de 2. Se llega a la conclusión, contraria a las hipótesis, de que a y b tendrían que ser ambos pares. Se infiere de allí que la premisa original es falsa. En este caso la contradicción se evita, porque la reducción al absurdo es un procedimiento legítimo en las matemáticas; es decir, se trata de una regla arbitraria de nuestro juego. En general es una forma de proceder ordinaria tratándose de reglas (en este caso de sintaxis). Wittgenstein dice que está en la gramática de la palabra 'regla', el que no llamemos así a dos proposiciones contradictorias[200]. En este sentido, las contradicciones son inofensivas. Se eliminan conforme aparecen. Si en el desarrollo de una partida de ajedrez descubrimos una contradicción en las reglas, podemos modificarlas a nuestra conveniencia. Con ello no mejoramos el juego, sino que lo alteramos.

Recordemos otro caso. Partiendo de que dos conjuntos son iguales en número si sus elementos pueden ponerse en correspondencia biunívoca, se infiere que los números pares son tantos como los naturales. Ante esta conclusión Galileo retrocede pensándola como una contradicción. Cree entonces que ese criterio no puede ser aplicado por igual a conjuntos finitos que a infinitos. Cantor en cambio la acepta y elabora a partir de allí su estudio de los cardinales transfinitos. Ambos con la prueba amplían y determinan más sus conceptos, pero lo interesante que aquí estamos ante una proposición 'Un conjunto puede ser de la misma cardinalidad que algunos de sus subconjuntos' que a uno le parece contradictoria y al otro no. Shanker observa[*] que hay proposiciones Px y Qy pertenecientes a sistemas x y y distintos, y cuya conjunción Px&Qy no es una contradicción, ni una fórmula sinsentido. Es decir, se trata de una expresión que no es del tipo 'x es rojo y x es azul' ni tampoco de la forma 'P&~P'. Consideremos a Px la proposición 'Un conjunto puede ser de la misma cardinalidad que algunos de sus subconjuntos' y a Qy la negación de Px, pero referida la primera a un sistema

---

[200] WW, p. 171, 173, 175.

[*] Shanker, 1987, p. 238

que sólo incluye conjuntos finitos, mientras que a Qy tomémosla como parte de la teoría de los números transfinitos. 'Px&Qy' parece una contradicción o por lo menos Galileo la considera así porque desea evitar Qy que le resulta menos natural. Al eliminar Qy da un nuevo sentido a sus proposiciones determinando de esta forma su gramática. Es decir, la forma de convertir dos proposiciones contrarias en contradictorias consiste en establecer una regla de gramática relativa a una sistema determinado, en este caso, la regla es P-> ~Q.

El temor a hallar inesperadamente una contradicción en un sistema axiomático está vinculado, de acuerdo a Wittgenstein, con la confusión entre contrariedad y contradicción de proposiciones[201] La contradicción muy difícilmente puede surgir pues por reducción al absurdo eliminamos las premisas que a ella nos conducen. Las contrariedades nos ponen ante una encrucijada en la que hay que decidirse por una opción tomando en cuenta las finalidades del cálculo en cuestión, o por consideraciones estéticas, etc. En ningún caso estamos ante algo que deba preocuparnos. Los matemáticos -dice Wittgenstein- han desarrollado un temor supersticioso a la contradicción[202].

Aquí también se aplica lo que se ha dicho para las conjeturas. Si hay un método para hallar la contradicción, ésta puede eliminarse trivialmente, de lo contrario no tiene sentido hablar de una contradicción oculta. Probablemente se refiere aquí Wittgenstein a la deducción de proposiciones que teniendo sentido dentro del sistema, son contrarias a algún resultado esperado, como ocurría con Qy en el ejemplo de arriba. El considerar a Px y Qy como incompatibles para la gramática del sistema, no es algo que preexistía a esa decisión. De nuevo lo que dificulta el aceptar esta idea es que una vez tomada una opción y consagrada por la gramática, parece ser la única posible. Dejemos de lado, por ahora, la consideración de sistemas completamente formalizados, y tomemos otro ejemplo: Hamilton, quien se propuso el problema de extender la teoría de los números complejos al espacio de tres dimensiones, hubiera podido no aceptar sus cuaterniones

[201] WW, p. 155.
[202] WW, p. 173.

como una solución, si la conmutatividad le hubiese parecida contradictoria con la idea de número. La demostración de un teorema no ha impedido que después surjan contraejemplos del mismo que obligan a una decisión sobre los significados de los términos involucrados, como lo señala Lakatos. (1976)[*]

Pero ¿qué ocurre con los sistemas formales? Este es finalmente el caso que importa para valorar el programa de Hilbert. Estrictamente hablando, como señala Wittgenstein, no es posible una contradicción más que entre proposiciones y no entre sucesiones de símbolos sin contenido[203]. Sin embargo, también puede hablarse de una contradicción sintáctica. Esta volvería trivial cualquier sistema que contuviera el cálculo de enunciados, en virtud de la regla (P-> (~P-> Q)). Es decir, toda fórmula sería teorema. Wittgenstein nos dice que aún así el sistema podría ser de alguna utilidad, ya porque consideráramos las deducciones hechas antes de la aparición de la contradicción, ya porque elimináramos, con una nueva regla (lo que implicaría el paso a otro sistema), la fórmula que llevó al resultado indeseado. Hasta cierto punto tiene razón, pues la definición de verdad de Tarski para enunciados de sistemas formales presupone un significado variable para las constantes, letras predicativas, etc., y uno fijo para las constantes lógicas. '~p' es verdadero cuando 'P' es falso, etc. Pero nada impediría interpretar de otra forma las cosas si apareciera la fórmula 'P&~P'. Además podría ocurrir como alguna vez lo supone Smullyan[*] (en una especie de broma) que en un sistema inconsistente dado, fuese siempre más fácil probar uno de los dos enunciados 'P' o '~P', y eso podría darnos un criterio para decidir en uno u otro sentido.

El núcleo de las afirmaciones de Wittgenstein en torno a la consistencia se halla en la perspectiva desde la cual considera a las proposiciones matemáticas como reglas gramaticales y no como descripciones verdaderas. A ello se debe que su crítica al programa de Hilbert se mueva en un contexto

---

[*] Lakatos, *Pruebas y Refutaciones*. La Lógica del Descubrimiento Matemático. Alianza Editorial. Madrid, 1976

[203] WW, p. 105-107.

[*] Cfr. Smullyan, R. *5000 Años A. de C. y otras Fantasías Filosóficas.* (cap. VI)Cátedra, Madrid, 1989.

muy diferente en el que éste pierde todo sentido. Otro tanto ocurre en el caso del logicismo o de las interpretaciones del teorema de Gödel. Todas las censuras detalladas a la nomenclatura o a la falta de perspicuidad en las pruebas de *Principia Mathematica* hubieran podido ahorrarse una vez concluido que la matemática no requiere de fundamento y está constituida de sistemas autónomos uno de los cuales es la lógica.

En tanto que Hilbert parece preocupado por la certeza en el sentido epistemológico de las matemáticas, el análisis gramatical de éstas que las separa de toda certeza empírica era suficiente para terminar con el formalismo. Y en efecto, Hilbert tiene en mente un problema de carácter filosófico, o al menos así lo dan a entender párrafos como los que citamos al comienzo del capítulo, en los que se pone de manifiesto su deseo de encontrar un fundamento al conocimiento matemático (si bien, en otros, no parece preocuparse de que en realidad pudiera haber una inconsistencia en el análisis). En apoyo a esta interpretación escribe Curry: "La búsqueda de la certeza absoluta fue, evidentemente, la motivación fundamental de Brouwer y Hilbert. Pero ¿necesita la matemática la certeza absoluta para su justificación?"[204] Desde este punto de vista Wittgenstein invalida el problema que dio pie al planteamiento del programa formalista. La certeza del edificio matemático no está en cuestión porque deriva de su naturaleza gramatical.

Pero el programa de Hilbert formulaba y pretendía resolver además un problema estrictamente matemático. En efecto se trataba de llevar a cabo las siguientes tareas: a) Verter la matemática clásica en sistemas formales en que las nociones de 'fórmula', 'axioma', 'regla de inferencia' y 'prueba' estuviesen caracterizadas efectivamente y de forma totalmente sintáctica. b)Demostrar la completud semántica del sistema y su consistencia, con métodos finitistas (es decir, sin recursos tales como la inducción transfinita o el empleo del axioma de elección). El teorema de Gödel es la solución negativa a este problema ("la prueba de que no es posible resolverlo en los términos planteados"[205]). El programa formalista forma así parte del magno proyecto para la matemática de este siglo propuesto por Hilbert en 1900. Es

---

[204] Curry, H. B. *Foundations of Mathematical Logic*, McGraw-Hill, New York, 1963, p. 16.
[205] Hilbert, Op. Cit. 1900.

la especificación del segundo de los 23 problemas planteados en esa ocasión. Se dirá que Wittgenstein sólo le quita el ropaje filosófico en que viene enmarcado, pero ¿hasta qué punto este contexto es el que motiva la creación del problema matemático? Dicho de otra forma si consideramos a las matemáticas como formada por cálculos o estructuras autónomas desprovistas del 'gas' que las circunda ¿de qué criterios podríamos valernos para distinguir entre sistemas interesantes y sistemas intrascendentes? Es cierto que no es esto algo de que la filosofía de Wittgenstein en su carácter descriptivo tenga que responder, ni tampoco podríamos atribuir a todo matemático un interés fundado en las imágenes que suscitan sus cálculos. No obstante aquí se esboza una vena de tipo revisionista en la filosofía wittgensteineana.

Otro problema tal vez más serio es el que podríamos plantear de la siguiente manera. Shanker dice acertadamente que la cuestión de determinar si un procedimiento debe ser considerado como una demostración es un asunto que corresponde a los matemáticos resolver, no a los filósofos(*). Los programas formalista, logicista e intuicionista son intentos de dar una respuesta satisfactoria a esta cuestión. En el caso de la escuela de Hilbert, que es el que ahora nos incumbe, se trataba de salvaguardar toda la matemática clásica. El programa circunscribía el concepto de prueba al de cada sistema formal, siempre y cuando la consistencia y completud de éste pudiesen probarse por medios finitistas. Como hemos visto, asimilaba así el formalismo la crítica de Brouwer y su grupo. Lo interesante es observar cómo había un consenso entre ambas escuelas al determinar el valor de los procedimientos finitistas, como también lo hubo entre la mayoría de los matemáticos en reprobar el uso del axioma de reducibilidad(*) en el sistema de los *Principia Mathematica*. Hay periodos críticos en la historia de las matemáticas en que los criterios para el uso de los conceptos (especialmente el de `prueba') se tornan problemáticos, y en que la superación de la dificultad requiere del desarrollo de nuevas disciplinas. Por ejemplo, el cálculo infinitesimal fue fundamentado a través de la creación del análisis, como las matemáticas hubiesen sido fundamentadas por el programa de Hilbert, si éste

(*) Shanker, 1987, p. 139.

hubiese tenido éxito. En ese sentido la afirmación wittgensteineana de que las matemáticas no requieren de fundamento es falsa. Si el significado de las palabras viene dado por el contexto, la práctica de los matemáticos puede dar cuenta de lo que debe entenderse por los términos `certeza', `fundamentación', etc. referidos a esta disciplina.

Recapitulando: lo que nos interesa es apuntar dos vías que señalan en direcciones opuestas. Por una parte la `prosa' de los matemáticos parece una guía importante en la determinación de sus problemas. Sería muy difícil sostener que lo que hace relevante a un problema matemático es su posible aplicación en la práctica, por ejemplo, en las ciencias de la naturaleza. Además de que existen cuestiones extraordinariamente lejanas de la matemática aplicada, hay otras que aparentemente surgen de consideraciones estéticas vinculadas a veces con cuestiones filosóficas. Como hemos dicho este problema es menos relevante para la filosofía de Wittgenstein. Lo que motiva realizar un cálculo en un sentido y no en otro (o a jugar con tales reglas en lugar de utilizar otras) no incumbe a una descripción que busca determinar el empleo que se da a las proposiciones matemáticas (su estatuto gramatical). Pero insistimos en que aquí aparece un aspecto del pensamiento wittgensteineano que sí podría tener una incidencia en las matemáticas. No entraremos en ello.

Por otra parte, si lo que incomodaba a Wittgenstein del programa formalista era la pretensión de Hilbert de resolver un problema filosófico con una técnica matemática, no puede uno menos que preguntarse si el gran matemático de Könisberg estaba realmente tan interesado en la filosofía. ¿No está Wittgenstein atribuyendo demasiado peso a las preocupaciones epistemológicas de las matemáticos? Dice Shanker que la `prosa' que rodea los cálculos se halla ordinariamente en los prólogos de las obras clásicos de las matemáticas, pero convendría ver qué tan en consonancia se hallan éstos con el texto que presentan.

Veámoslo en el tema particular de nuestro capítulo. ¿Qué motivaba la preocupación de los matemáticos por asegurar la consistencia de sus sistemas deductivos? No era, desde luego, que estuviesen inquietos por la solidez de los puentes construidos con sus cálculos, a pesar de lo que dice

Turing[*]. Después de todo, el que su disciplina se aplique tan exitosamente a la naturaleza es un cuestión tradicionalmente filosófica. Wittgenstein parece atribuirles la creencia de que la aparición de una inconsistencia en un cálculo descalificaría a éste por completo. Sin embargo, gran parte del trabajo matemático de Brouwer para citar un ejemplo, no satisfacía los criterios impuestos por su filosofía. Wittgenstein agrega que lo que se requiere ante las paradojas es de un análisis de los conceptos más bien que de nuevas demostraciones, y que podría bloquearse el camino a la contradicción a través de una nueva regla o bien utilizar todo lo calculado previamente al surgimiento de la misma[*]. En el caso de pruebas en sistemas no completamente formalizados, la contradicción se evita por el método de reducción al absurdo, pero cuando es imposible localizar la premisa que da pie a la contradicción, como ocurre en las paradojas, lo que se requiere es aclarar los conceptos. Esto se lleva ordinariamente a cabo con una formalización adecuada de la teoría en cuestión. Así ocurrió con los paralogismos de la teoría de conjuntos que dieron lugar a la axiomatización de Zermelo-Fraenkel. Pero llegado a este punto es necesario cuestionar la corrección de la formalización emprendida. Es decir, tenemos que preguntar si el sistema es consistente, completo, categórico, etc., pues si no cumple con alguna de éstas características no se consigue lo que merced a él nos habíamos propuesto. Aunque se haya ganado en rigor, no se ha conseguido verter la teoría original en el nuevo sistema. Y aquí se trata de un problema exclusivamente matemático. En ese sentido podemos decir que, a pesar de las inquietudes epistemológicas de Hilbert, el marco filosófico que esgrime para presentar su programa es hasta cierto punto intrascendente, desde el punto de vista matemático. La crítica de Wittgenstein se aplica a quienes utilizan los resultados matemáticos para proponer problemas filosóficos. Sin embargo, fue tal vez demasiado lejos en esta pretensión, al censurar el planteamiento de problemas matemáticos que, como el de los fundamentos, tienen igualmente un cierto aspecto o vertiente que colinda con la filosofía.

---

[*]W WLFM,, p. 217.

[*]R RFM, VII-§11

CONCLUSIONES

Recientemente publicados, los *Remarks on the Foundations of Mathematics* suscitaron comentarios adversos en que se acusaba a Wittgenstein de mantener una posición filosófica que, demostrando una incomprensión de los problemas en los fundamentos de las matemáticas, proponía una corrección de buena parte del contenido de esta disciplina. Se suponía que la posición de wittgenstein era similar a la que mantuvieron los intuicionistas cuando eliminaron las pruebas de existencia no constructivas, y censuraron el uso del principio de no contradicción en totalidades infinitas. Desde entonces la impresión de manuscritos de Wittgenstein, hasta hace poco inéditos, de notas de sus clases tomadas por sus discípulos, y los reiterados estudios de muchos exégetas, han arrojado nueva luz sobre su obra. En lo que se refiere a su filosofía de las matemáticas, que durante varios lustros fue considerada incoherente o poco merecedora de atención, son dignos de señalarse los textos de C. Wright (1980), Bouveresse(1987 y 1988) y Shanker(1987). En particular estos dos últimos han abierto una vía de interpretación original que hace mayor justicia al gran filósofo vienés, porque muestran la consistencia de su pensamiento en estas materias, tanto en sí misma como con el resto de su obra. Especialmente han dejado en claro su carácter no revisionista, neutral con respecto a la totalidad de la matemática, en consecuencia con su pretensión de no estar defendiendo ningún tipo de tesis filosófica. Es esta vía la que hemos intentado explorar a lo largo de este trabajo; en el curso del cual hemos encontrado algunas dificultades que, aunque menores que las que se originaban en las interpretaciones de finales de los años cincuentas, dejan un espacio a investigaciones más profundas. Señalemos algunas de nuestras conclusiones:

a) Al defender una perspectiva en que las observaciones de Wittgenstein aparecen como meras descripciones gramaticales, eliminamos la posibilidad de enfrentarlas a desarrollos nuevos o poco conocidos de las matemática. Así no hemos creído que pueda invalidárseles, en general, a la luz de los teoremas de Gödel o el de los cuatro colores. Por el contrario, diversos aspectos de la práctica matemática y de su evolución concreta, nos han servido para aclarar el pensamiento de Wittgenstein. De ese modo, la prueba de Gödel, nos ha ayudado a comprender el sentido de la abarcabilidad que Wittgenstein atribuía a las demostraciones.

b) Hemos constatado la importancia de las consideraciones sobre las reglas como centrales en el tratamiento wittgensteiniano de las matemáticas. Consideradas como parte del ataque a la "bedeutungkörper conception", conducen a la conclusión de que las proposiciones matemáticas, en tanto que ostentan un cariz de necesidad lógica, son de carácter gramatical. Repasemos un poco los argumentos siguientes: si el significado es un cuerpo adherido a la superficie de las palabras, las combinaciones en que éstas pueden entrar unas con otras están ya prefijadas de antemano, inexorablemente, más allá de las conductas individuales. Comprobamos que esto último no sucede, pues seguir una regla es una institución social. Por tanto, la "bedeutungkörper conception" es falsa. Pero si lo que da sentido a los enunciados es su uso, la necesidad de una proposición proviene de la "decisión" de una comunidad de emplearla así, por encima o previa a toda experiencia, ni refutable ni corroborable, simplemente como una norma de la representación. Ahora bien, dado que Wittgenstein ha combatido la concepción nominalista del lenguaje, y que comprobamos que las proposiciones que afirman existencia en las matemáticas tienen una gramática distinta de los enunciados empíricos, no pueden ser los contenidos de esta ciencia más que normas de la representación del mundo externo, y no descripciones de un universo de objetos de naturaleza peculiar. Lo interesante aquí es que la afirmación de que toda matemática, por abstracta que sea, se avoca finalmente a una posible representación del mundo, no es verificable de ninguna forma. Nadie podría presentar pruebas de que, por ejemplo, la teoría de los cardinales inalcanzables, no tenga repercusión en alguna otra rama de las matemáticas que sí se aplique al exterior de esta disciplina. Por otra parte Wittgenstein no sostiene que necesariamente ese sea el destino de toda matemática, pues la compara con la construcción de senderos que algún día podrían ser utilizados por alguien, pero que no forzozamente lo será. Entonces lo que sustenta su concepción de las matemáticas no es una comprobación o previsión de su utilidad, sino sus argumentos y observaciones sobre el lenguaje y las reglas.

c) De lo anterior deducimos la trascendencia del desarrollo que la obra de Wittgenstein tiene en el terreno de la filosofía de las matemáticas, para comprender el resto de la misma. En ello concordamos con Kripke (1980), pero no porque creamos que hay aquí una piedra de toque con la que quepa validarla o no, sino porque las observaciones de Wittgenstein en este campo aclaran, por la vía del ejemplo, muchos de sus conceptos y argumentos.

e) Hemos mostrado como algunas de las observaciones de Wittgenstein, como las referentes a los números reales de expansión decimal irregular, no tienen el sentido revisionista que en un primer momento ostentan, sino que pueden interpretarse como confiriéndoles una categoría o función gramatical peculiar: por ejemplo, más bien que mostrar números, estableciendo el sistema en que es posible construirlos.

f) Constatamos que algunas otras de las afirmaciones del gran filósofo vienés son difíciles de interpretar porque mantienen un equilibrio sutil, neutral, entre tesis filosóficas opuestas. Tal es el caso de las observaciones con que se matiza la arbitrariedad de la gramática. Por un lado, se trata de romper radicalmente con la idea de la lógica del mundo, tal y como ésta aparece en el Tractatus. Es una crítica implacable de una pretensión de descubrir en las formas de nuestro lenguaje, la estructura última de lo real. Por otro, nada autoriza a traspasar su carácter gramatical para sostener una postura escéptica. Hemos intentado navegar, como Ulises, en medio de estos dos peligros equivalentes.

g) Para nuestra interpretación hemos tenido que dar mayor peso a ciertas observaciones sobre otras, por ejemplo en la aseveración de que no tiene sentido una conjetura, que hemos leído como si simplemente afirmara la capacidad de la prueba de extender los conceptos. Ello deja de lado el delicado problema de mostrar la evolución del pensamiento de Wittgenstein en estos temas. Es evidente que en el periodo intermedio se observan cambios en su postura, por la progresiva introducción de conceptos nuevos como el de perspicuidad, casi ausente en esta etapa, pero muy presente después, o por el abandono de ciertas tesis como la de que sólo hay dos tipos de demostraciones en matemáticas, que corresponde a un momento en que la influencia de los Principia de Russell es aún muy acusada. Sin embargo, mostrar las fases de esa evolución es algo extremadamente complejo; si no fuera por otra causa, al menos por la dificultad de fechar las observaciones de Wittgenstein.

h) Nos parece que los comentarios de Wittgenstein a algunas pruebas particulares o adolecen de una comprensión deficiente por parte de su autor como ocurre muy probablemente el caso de los comentarios a Gödel, o aguardan una interpretación más aguda. Por lo pronto podríamos suscribir la observación de Dummett (1959) que recuerda que estamos ante textos que no habían sido aún preparados para su publicación.

l) A pesar de todo, hay una pequeña vena revisionista en las observaciones de Wittgenstein, en la medida en que la 'prosa' y las imágenes adheridas a los conceptos matemáticos, guían en ciertas direcciones el desarrollo de las teorías.

En resumen, constatamos la importancia de restaurar con la lectura cuidadosa, un texto que conectaba los pasajes iniciales de *Investigaciones Filosóficas* con los de los *Observaciones sobre los Fundamentos de la Matemática*, tanto para comprender cabalmente los primeros, como para observar la emergencia de una perspectiva muy original de las matemáticas en que éstas dejan de ser fuente o solución de problemas filosóficos.

BIBLIOGRAFIA

Obras de Wittgenstein:

T Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus Logico-Philosophicus*. Trans. C.K. Odgen and F. P. Ramsey, Routledge. Edición castellana: Trad. E. Tierno Galván, Alianza Universidad, Madrid, 1980.

PhR. *Philosophical Remarks*. University of Chicago Press. Chicago, (primera ed. alemana 1964.), traducción inglesa por Raymond Hargreavesy Roger White (ed. Rush Rees, Basil Blackwell , 1975).

PG *Philosophical Grammar*. Ed. Rush Rees, Basil Blackwell, Oxford, 1974, (Traducción por Anthony Kenny).

BB *The Blue and Brown Books*. Basil Blackwell, Oxford 1968. Edición en castellano en Tecnos, Madrid, 1968. (Traducción española por Francisco Gracia Guillén).

RFM *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Basil Blackwell, Oxford, 1956. Nueva edición revisada: ed. por G. H. Von Wright, R. Rhees y G. E. M. Anscombe. MIT Press. Cambridge Massachusetts, 1991.

Z *Zettel*. Basil Blackwell, Oxford, 1967. Edición castellana por Octavio Castro y Carlos Ulises Moulines. UNAM, México, 1979.

PhI *Philosophical Investigations*, Ed. G. E. M. Anscombe y R. Rhees, Blackwell, 1953. Edición castellana: traducción A. García Suárez y C. U. Moulines.U.N.A.M.-Crítica, México, 1988.

OC *On Certainty*, Ed. G.E.M. Anscombe y G. H. von Wright, Blackwell, 1969. Edición española: trad. Josep Lluis P. y Vicent Raga, Gedisa, Barcelona, 1988.

CV *Culture and Value*. Ed. von Wright, Blackwell,1980. Edición castellana con el título *Observaciones*, Tr. Elsa Cecilia Frost, Siglo XXI, México, 1981.

Notas de clases y conversaciones:

WW *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle: Conversations Recorded by Friedrich Waismann*, Ed. B. F. McGuinness, Blackwell, 1979. Ed.Castellana:Traducción de Manuel Arbolí, FCE, México, 1973

WLEC30-32 *Wittgenstein's Lectures. Cambridge 1930-1932*. de las Notas de John King y Desmond Lee. Basil Blackwell, Oxford, 1980.

WLEC32-35 *Wittgenstein's Lectures. Cambridge 1932-1935*. From the Notes of Alice Ambrose and Margaret Macdonald. Basil Blackwell. Oxford, 1979.

WLFM *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Ed. C. Diamond, Cambridge 1939. Cornell University Press, Ithaca, N. Y. , 1976.

Otras Obras Consultadas:

Alvarez, C. "Sur l'origine de l'hypothèse du continu", Sciences et techniques en perspective, Vol. 26, Nantes, 1993.

Anscombe, G. E. M. (1959) *An Introduction to Wittgenstein Tractatus.* Hutchinson & Co. (Publishers) Ltd., London. Edición castellana: Editorial Ateneo, Buenos Aires,1977.

Berkeley. Tres Diálogos entre Hylas y Filonús. Aguilar, Biblioteca de Introducción Filosófica, Buenos Aires, 1978.

Bouveresse, J. (1987). *La Force de la Regle.* Les Editions de Minuit. Paris.

Boûveresse, J. (1988). *Le Pays des Possibles.* Les Editions de Minuit. Paris.

Cantor, G Cantor, G *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers.*" Dover, New York, 1955, Introducción hecha por Philip E. B. Jourdain..

Copi, I (1966) *Essays on Wittgenstein's Tractatus*, Routledge, London.

Curry, H. B.(1963) *Foudations of Mathematics*, McGraw-Hill, New York.

Dauben, J. W. *George Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, 1979

Dedekind, R.*Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1963

Dummett, (1981) *Truth and Other Enigms*, Duckworth, London.

Frascolla, P. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Routledge, New York, 1994.

Frege, G. Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética. Otros Escritos Filosóficos, U.N.A.M., México, 1972.

Grattan-Guinness, I. "Hacia una biografía de Georg Cantor." Mathesis, Vol. VI, Número I, México, febrero de 1990.

Hacking, I. (1985) "Rules, Scepticism, Proof, Wittgenstein." en Hacking (ed.). *Excercises in Analysis, Essays by Students de Casimir Lewy*, Cambridge University Press.

Hallett, G. (1977). *A Companion to Wittgenstein's "Philosophical Investigations".* Cornell University Press, London, 1977.

Hardy G. H. *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, (Primera edición, 1908)

Heyting, A. (1956) *Intuitionism. An Introduction*,North-Holland, Amsterdam.

Hilbert, D. Foundations of Geometry, Open Court, Lasalle, 1971.

Hilbert, D. *Fundamentos de las Matemáticas*, Colección "Mathema", U.N.A.M, México, 1993.).

Hilbertrt, D. (1900), « Mathebematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris », *Göttinger Nachrichten*. (Traduction en anglais: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Volume 28, 1976).

Hilbert, D. y Ackermann, W. *Principles of Mathematical Logic*, New York, 1950.

Kline, M. (1980), *Mathematics. The Loss of Certainty*. Oxford University Press.

Kneale W. et M. (1961), *The Development of Logic*, The Clarendon Press, Oxford.

Lakatos, I. (1976), *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Ed. J. Worral et E. Zahar, Cambridge University Press. (Edition en espagnol: Alianza Editorial, Madrid, 1982. Edition en français: Ed. Hermann, Paris, 1984).

Kreisel, G. (1958) "Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics". British Journal of Philosophy of Science.

Kripke, S (1981). *Wittgenstein on Rules and private Language. An Elementary Exposition*, Basil Blackwell, 1982. Edición española *Wittgenstein: Reglas y Lenguaje Privado*. U.N.A.M., México, 1989.

Kripke, S. (1982) *Naming and Necessity*, Basil Blackwell, Oxford. Edición española: U.N.A.M. 1985.

Monk, R. (1990) *Ludwig Wittgenstein. The Duty of Genius*. The Free Press, New York.

Ortega y Gasset, J. (1958) *La Idea de Principio en Leibniz*, Revista de Occidente, Madrid.

Pereda, C. (1989) "Un Mapa de Ontologías". Diánoia, U.N.A.M.

Pettit and Mc Dowell, *Subject, Thought and Context*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

Pitcher, G (1964) *The Philosophy of Wittgenstein*, Englewood Cliffs, N. J.

Pólya, G. *Matemáticas y Razonamiento Plausible*, Tecnos, Madrid, 1966.

Russell, B. Mysticism and Logic, Georges Allen and Unwin, Londres. Versión Castellana de J. Rovira Armengol, Paidós, 1951.

Saaty, Th. y Kainen, P. *The Four-Colour Problem. Assaults and Conquest*, Dover, New York, 1986

Sanguineti, J. J. (1977.) *Augusto Comte: Cuso de Filosofía Positiva*. E. M. E. S. A. Madrid.

Segura, Luis F. "El Fundamento lógico matemático de la teoría hilbertiana de la demostración", Signos, 1994, México

Shanker, S. G (1987). *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, State University of New York Press, 1987.

Shanker, S. G. (1993) *Gödel's Theorem in Focus*

Smullyan,R. *5000 Años Antes de Cristo y Otras Fantasías Filosóficas*, Cátedra, Madrid, 1989.

Suter, R. (1989). *Interpreting Wittgenstein*. Temple University Press, Philadelphia, 1989.

Tarski, A. (1956) *Logic, Semantics, Methamatematics*, Oxford.

Tymoczko, T. (1979) "The Four-Colour Problem and Its Philosophical Significance", The Journal of Philosophy, 76

Tymoczko, T. (Ed). *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, An Antology, Boston-Basel-Stuttgart, 1986

Van Heijenoort, J. *From Frege to Gödel*, Van Nostrand,Tercera Edición, Harvard, 1977

Van Heijenoort, J.*Frege and Gödel Two Fundamental texts in Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge Massachusets, 1970.

Vega, L. (1991). *La Trama de la Demostración*. Alianza Universidad, Madrid.

Wang, H. *A Survey of Mathematical Logic.*

Wright, C.(1980) *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*. Duckworth, London.

Wright, C. (1984) "Kripke's Account of the Argument Against Private Language". Journal of Philosophy, LXXXI, 759-778.

Wright, C. (1991) "Wittgenstein on Mathematical Proof" en Griffiths, A. Phillips (Ed.) *Wittgenstein Centenary Essays*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

Wright, G. H. von (1982) *Wittgenstein.* Blackwell, 1982.

Zubiri, X. (1980) *Cinco Lecciones de Filosofía.* Alianza Editorial. Madrid,