

49  
ZEJ



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TERMODINAMICA DE FLUIDOS RELATIVISTAS  
CON SIMETRIA ESFERICA**

T E S I S  
Que para obtener el Título de  
F I S I C O  
p r e s e n t a

**SALVADOR ENRIQUE VILLALOBOS PEREZ**



DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

México, D. F.

Septiembre de 1995

**FALLA DE ORIGEN**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "TERMODINAMICA DE FLUIDOS  
RELATIVISTAS CON SIMETRIA ESFERICA"

realizado por SALVADOR ENRIQUE VILLALOBOS PEREZ

con número de cuenta 8053142-3 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

DR. ROBERTO ALLAN SUSSMAN LIVOVSKY

Propietario

DR. TONATIUH MATOS CHASSIN.

Propietario

DR. MIGUEL SOCOLOVSKY VAJOVSKY

Suplente

DR. CARLOS VILLARREAL LUJAN

Suplente

DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORCA  
Coordinador de Licenciatura

*Handwritten signatures:*  
 - Top signature: *Roberto Allan Sussman Livovsky*  
 - Middle signature: *Tonatiuh Matos Chassin*  
 - Bottom signature: *Miguel Socolovsky Vajovsky*  
 - Far right signature: *Carlos Villarreal Lujan*  
 - Bottom right signature: *Jose David Vergara Oliver*

**AGRADECIMIENTOS**

**PROYECTO DE INVESTIGACION 3567-E  
CONACYT**

**INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES  
U.N.A.M.**

## CONTENIDO

Notaciones y Convenciones	3
<b>INTRODUCCION</b>	<b>5</b>
<b>CAPITULO UNO</b>	<b>9</b>
<b>FLUIDO PERFECTO EN RELATIVIDAD</b>	
1.1 Importancia de $T^{\alpha\beta}$ en Relatividad General	
1.2 El Tensor de Momento-Energía	
1.3 Ecuaciones de Conservación	
1.4 Condiciones de Fluido Perfecto	
<b>CAPITULO DOS</b>	<b>13</b>
<b>TERMODINAMICA DEL FLUIDO PERFECTO RELATIVISTA</b>	
2.1 Procesos Adiabáticos	
2.2 Conservación de la Energía	
<b>CAPITULO TRES</b>	<b>16</b>
<b>ECUACIONES DE EINSTEIN EN SIMETRIA ESFERICA</b>	
3.1 Simetría Esférica y Fluido Perfecto	
3.2 Condición de Isotropía de Presiones	
<b>CAPITULO CUATRO</b>	<b>19</b>
<b>SOLUCIONES DE HERRERA Y PONCE DE LEON (HPL)</b>	
<b>CAPITULO CINCO</b>	<b>25</b>
<b>CASOS PARTICULARES DE LAS SOLUCIONES HPL</b>	
4.1 Coordenadas tipo Kruskal	
4.2 Funciones Métricas	
4.3 Expresiones para la Densidad de Energía y la Presión	
<b>CAPITULO SEIS</b>	<b>30</b>
<b>PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LAS SOLUCIONES HPL</b>	
5.1 Radio de Curvatura	
5.2 Tiempo Propio a lo largo del Fluido	
5.3 Longitud Propia a lo largo de la Simetría Conforme	

5.4 Geodésicas Nulas Radiales

5.5 Singularidades

**CAPITULO SIETE** 34

**TERMODINAMICA DE LAS SOLUCIONES HPL**

**CONCLUSIONES** 38

**BIBLIOGRAFIA** 48

**APENDICES (A,B,C,D)**

## Notaciones y Convenciones

### UNIDADES:

Velocidad de la luz  $c=1$

Constante gravitacional  $G=1$

INDICES GRIEGOS  $\alpha, \beta, \gamma$  :

$(0, 1, 2, 3) = (t, r, \theta, \phi)$

INDICES LATINOS  $i, j, k$  :

$(1, 2, 3) = (r, \theta, \phi)$

TENSOR METRICO:

$g^{\alpha\beta}$

SIGNATURA:

$(-, +, +, +)$

DERIVADAS ORDINARIAS:

$A_{,t} = \dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}$

$A_{,r} = A' = \frac{\partial A}{\partial r}$

SIMBOLOS DE CHRISTOFFEL:

$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$

DERIVADA COVARIANTE:

$A^{\alpha}_{; \beta} = A^{\alpha}_{, \beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} A^{\nu}$

TENSOR DE MOMENTO-ENERGIA:

$T^{\alpha\beta}$

4-VELOCIDAD:

$U^{\alpha} (U_{\alpha} U^{\alpha} = g_{\alpha\beta} U^{\alpha} U^{\beta} = -1)$

4-ACELERACION:

$\dot{U}_{\alpha} = U_{\alpha; \beta} U^{\beta}$

FLUIDO PERFECTO:

$T^{\alpha\beta} = (\rho + p) U^{\alpha} U^{\beta} + p g^{\alpha\beta}$

TENSOR DE CURVATURA:

$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\tau\mu} \Gamma^{\tau}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\tau\nu} \Gamma^{\tau}_{\beta\mu}$

**TENSOR DE RICCI:**

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = -R^{\alpha}_{\nu\alpha\mu}$$

**ESCALAR DE RICCI:**

$$R = R^{\mu}_{\mu}$$

**ECUACIONES DE CAMPO:**

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}$$

**DERIVADA DE LIE PARA UN TENSOR:**

$$L_{\xi}(Q_{\alpha\beta}) = \xi^{\gamma}Q_{\alpha\beta,\gamma} + Q_{\gamma\beta}\xi^{\gamma}_{,\alpha} + Q_{\alpha\gamma}\xi^{\gamma}_{,\beta}$$

**ECUACION DE KILLING:**

$$L_{\xi}(g_{\mu\nu}) = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$$

## INTRODUCCION

Cuando la relatividad general (RG), formulada por A. Einstein, emerge en su forma definitiva en noviembre de 1915 para conocerse un año más tarde, los conceptos propuestos en ella constituirían una contribución excepcional al progreso de la ciencia. La teoría puede visualizarse como una vasta estructura que involucra aspectos de geometría pura y de gran interés matemático con singular elegancia y naturalidad.

La (RG) ó teoría relativista del campo gravitacional va mucho más allá e incorpora el campo en la estructura misma del espacio-tiempo; resumidamente: El espacio-tiempo varía de un lugar a otro como el campo gravitacional puede variar de punto a punto. La estructura matemática que estudia geometrías que varían de un punto a otro se conoce como geometría diferencial y constituye la base analítica para una descripción del campo gravitacional. El espacio-tiempo desde el punto de vista de la geometría diferencial es una variedad 4-dimensional que localmente aparece como un subconjunto de  $R^4$ . Localmente la geometría descrita es pseudo-euclidiana; se trata de la geometría de Lorentz introducida en la relatividad especial (RE). El espacio-tiempo se conforma de una serie de cubiertas, en cada una de las cuales se definen coordenadas  $x^\mu$ , que globalmente se relacionan unas con otras. La herramienta matemática fundamental en el estudio de éste tipo de variedades se conoce como cálculo tensorial. En torno a éste, la diferenciación de un tensor no es algo elemental ya que el valor de su derivada no es invariante y ha de depender del conjunto de coordenadas empleadas para ejecutarla. La derivada invariante de un tensor requiere del uso sistemático de un arreglo especial de funciones con tres índices; conocido como conexión. El espacio-tiempo se entiende por tanto como una variedad diferenciable donde se ha definido una conexión.

En (RG) la geometría del espacio-tiempo queda representada por el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , el cual puede variar en la totalidad de aquel y de tal suerte el intervalo infinitesimal  $ds$  puede escribirse:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

El reconocer que el campo gravitacional puede incluirse como especificación de la variedad del espacio-tiempo y la métrica es un concepto fundamental de la teoría y

una consecuencia de la expresión anterior es que el tiempo propio que experimenta una partícula depende de la naturaleza del campo gravitacional a través de la cual incide; fenómeno previsto por la teoría comprobado experimentalmente.

El principio de equivalencia establece que localmente, esto es en pequeñas regiones, la influencia de un campo gravitacional puede ser eliminada introduciendo un marco de referencia no-inercial. Tal principio es una consecuencia de la identidad observada para la masa inercial y gravitacional; la medida más precisa de éste establece tal identidad con bastante aproximación. Sin embargo cabe destacar que los campos gravitacionales producidos por distribuciones limitadas de materia difieren de fuerzas inerciales en esencia por sus propiedades globales; esto es, tales campos se anulan en el infinito mientras que las fuerzas inerciales aparentes que actúan en marcos de referencia no-inerciales crecen acotadamente en dicho punto ó a lo más tienden a cierto valor constante. Por otra parte, el postulado covariante se introduce como la formulación invariante de las leyes de la física bajo transformaciones arbitrarias (regulares) de coordenadas en el espacio-tiempo. Tales conceptos constituyen los cimientos de la teoría de Einstein de la gravitación. En el vértice de ésta teoría se sitúan las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional. Tales ecuaciones relacionan el tensor métrico (la geometría) con la distribución local de materia. Por una parte, calculando las derivadas parciales de la métrica se construyen los términos de la conexión y posteriormente el tensor de Einstein que involucra términos lineales en las primeras derivadas de la conexión y cuadráticos en ella misma; es así como las ecuaciones se ven involucradas con la resolución de problemas no lineales. Por otra, se requiere la conservación, en el sentido que su divergencia se anule, del tensor de momento-energía el cual actúa como fuente del campo gravitacional. En torno a ello existen distintos aspectos que van más allá de las dificultades que se presentan al construir soluciones exactas; no obstante, en la actualidad se conocen diversas soluciones de éste tipo e incluso bastante información al respecto de situaciones en donde no es posible llegar a una descripción completa del problema.

De acuerdo con la teoría newtoniana el campo gravitacional determina una clase preferente de trayectorias que deben seguir objetos suficientemente pequeños; idea que se conserva en (RG) y se refiere como la hipótesis de las geodésicas; en particular si la conexión se halla relacionada con la derivada covariante entonces la curvatura ha de estar relacionada con las segundas derivadas del potencial. En (RG) el tensor métrico (no degenerado) con signatura  $(-, +, +, +)$  determina el tiempo

propio como una medida de relojes físicos y en el caso de asumir una conexión libre de torsión éste se encuentra unívocamente determinado por la métrica; postulado referido como teorema fundamental de la geometría riemanniana. Las ecuaciones de Einstein que relacionan al potencial y sus derivadas con la distribución local de materia son análogas en muchos aspectos a la ecuación de Maxwell y se reducen adecuadamente a la ecuación de Newton-Poisson de tal forma que suponen una relación de proporcionalidad entre tales parámetros:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

Aquí se ha considerado a las diez componentes del tensor de momento-energía como fuentes del campo y al tensor de Einstein derivado directamente a partir del tensor métrico, de orden 2, como el potencial en un espacio riemanniano. La constante de proporcionalidad frecuentemente puede escribirse considerando la geometrización de la constante gravitacional.

En éste trabajo se abordan primeramente las características que definen a un fluido perfecto y la importancia del tensor de momento-energía como fuente del campo gravitacional; así mismo se discuten las ecuaciones de conservación pertinentes y sus implicaciones. Enseguida se analiza la termodinámica del problema y aquellas ecuaciones que permiten evaluar la entropía y la temperatura a partir de parámetros derivados directamente de las ecuaciones de Einstein. En el capítulo tres se deduce la forma analítica del tensor de Einstein y momento-energía para simetría esférica bajo un régimen no estático; donde se manifiesta la utilidad del lenguaje de computación simbólica MAPLE en el cálculo de las componentes del tensor de Einstein. En el capítulo cuatro se supone la existencia de un vector conforme de Killing ortogonal a la 4-velocidad del fluido y se resuelven de manera exacta las ecuaciones de Einstein determinándose expresiones para la presión y la densidad de energía en términos de funciones contenidas en la métrica. Introduciendo un cambio de coordenadas y para tres casos particulares se encuentran las funciones métricas correspondientes que permiten evaluar las expresiones para la presión y la densidad; capítulo cinco. A continuación se hace un estudio y se definen ciertos parámetros de interés que permiten describir las propiedades geométricas y físicas de un fluido; capítulo seis. En términos de las funciones métricas y a partir de las expresiones del capítulo dos se encuentran formas explícitas para la entropía y la temperatura así como otras variables de es-

tado; capítulo siete. Finalmente se discuten los aspectos físicos de tales soluciones en términos de los valores para la temperatura, la presión y demás variables termodinámicas involucradas. Se incluyen en varios apéndices los detalles de algunos cálculos realizados, necesarios para el desarrollo de éste trabajo.

## CAPITULO UNO

### FLUIDO PERFECTO EN RELATIVIDAD

Como una buena aproximación, en numerosas situaciones donde interviene la (RG) en problemas astrofísicos, se establece como fuente del campo gravitacional un medio continuo que a partir de ahora denominaremos fluido.

El fluido perfecto en relatividad, como generalización del concepto de gas ideal de la termodinámica ordinaria, se define como aquel tipo de fluido que en un marco de referencia comóvil, a partir de ahora (MRC), no presenta viscosidad y no manifiesta conducción de calor. Un marco de referencia comóvil es un marco de referencia que evoluciona con el fluido en el cual éste permanece en reposo y por tanto las coordenadas espaciales de partículas y elementos de fluido no cambian conforme transcurre el tiempo propio.

La dinámica de medios continuos comunmente se limita a describir un fluido en términos de valores promedio de parámetros como son el número de partículas por unidad de volumen, la densidad de energía, la presión, la temperatura etc.- En relatividad definir conceptos como densidad de energía, densidad de momento, así como los correspondientes flujos de energía y momento, requiere por separado de un par de 1-formas.- En virtud de ello existe un tensor que a partir de ahora llamaremos tensor de momento-energía y que denotaremos  $T^{\alpha\beta}$  el cual incluye como sus argumentos todos éstos parámetros.

#### 1.1 Importancia de $T^{\alpha\beta}$ en (RG) :

La teoría newtoniana considera como fuente del campo gravitacional a la densidad de materia.- Tal situación impide la interconexión materia-energía propia de las teorías relativistas. Ahora se discute la importancia del tensor de momento-energía, como fuente del campo gravitacional. En primera aproximación la fuente del campo gravitacional debería incluir todas las energías; esto es, la densidad total de masa-energía  $T^{00}$ .- No obstante, tener como fuente del campo gravitacional unicamente una componente de un tensor implicaría una teoría no-invariante bajo transformaciones generalizadas de coordenadas. Es así como la (RG) requiere como fuente del campo gravitacional todos los esfuerzos, momentos y presiones actuantes. Concretamente, las componentes del tensor de momento-energía.

#### 1.2 El Tensor de Momento-Energía:

Se define  $T^{\alpha\beta}$  a partir de sus argumentos como:

$$T^{\alpha\beta} = T(\bar{dx}^\alpha, \bar{dx}^\beta) \quad (I.1)$$

Es decir, en un marco de referencia arbitrario, como el flujo de momento  $\alpha$  a través de la superficie  $\beta$  y donde los argumentos se representan por 1-formas.

Suponiendo la existencia de un (MRC) el significado físico de las componentes del tensor  $T^{\alpha\beta}$  es:

La Densidad de Energía  $\rho : T^{00}$

El Flujo de Energía :  $T^{0i}$

La Densidad de Momento :  $T^{i0}$

El Flujo de Momento :  $T^{ij}$

La componente  $T^{ij}$  representa las fuerzas entre elementos adyacentes, las cuales no necesariamente son perpendiculares. Sin embargo si las fuerzas son perpendiculares a las interfases entonces  $T^{ij}$  se anula excepto en el caso en que  $i = j$ .

No es difícil probar la simetría del tensor  $T^{\alpha\beta}$  en un (MRC). Las implicaciones de éste hecho son que  $T^{ij} = T^{ji}$ , es decir, los esfuerzos sobre un elemento de fluido son siempre simétricos; además  $T^{0i} = T^{i0}$ , es decir, la densidad de momento y el flujo de energía son equivalentes.

### 1.3 Ecuaciones de Conservación :

Puesto que  $T^{\alpha\beta}$  representa la energía y el momento contenido en el fluido es posible establecer condiciones de conservación tanto para la energía como para el momento.- En general se cumple que:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad (I.2)$$

La importancia de ésta expresión es tal que además de representar la condición de integrabilidad para las ecuaciones de Einstein en ella están contenidas las ecuaciones de movimiento del fluido. El símbolo ( $;$ ) representa la derivada covariante con respecto a la componente mencionada.

Del mismo modo se habla de una condición de conservación de bariones ó ecuación de continuidad, la cual tiene la forma:

$$n^\alpha{}_{;\alpha} = (nU^\alpha)_{;\alpha} = 0 \quad (I.3)$$

Donde  $n^\alpha$  se define como el vector de flujo  $nU^\alpha$ , y  $n$  es el número de bariones por unidad de volumen .

#### 1.4 Condiciones de Fluido Perfecto

Se establecen formalmente las condiciones citadas en la definición para el fluido perfecto

1.- Conducción de calor nula :

Como consecuencia de éste hecho se cumple que la entropía es una constante de movimiento; situación que se discute en el próximo capítulo

2.- Viscosidad nula :

Esto significa que la matriz  $T^{ij}$  es una matriz diagonal, es decir , que la única fuerza actuante entre las partículas es perpendicular a la interfase. Así  $T^{ij} = p\delta^{ij}$ , donde  $p$  es la presión. Además no debe existir viscosidad volumétrica (isotrópica); tal condición se impone al exigir que  $p$  sea compatible con el punto uno.

Como una consecuencia inmediata del párrafo anterior se afirma que en un (MRC), en donde la 4-velocidad  $U^\alpha = (U^0, 0, 0, 0)$ , el tensor  $T^{\alpha\beta}$  tiene la forma:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (I.4)$$

No es difícil mostrar que, en un (MRC) y por lo tanto en general vía transformaciones generalizadas de coordenadas, la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + pg^{\alpha\beta} \quad (I.5)$$

Recordando la ecuación (I.2) podemos escribir ahora :

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = [(\rho + p)U^\alpha U^\beta + pg^{\alpha\beta}]_{;\beta} = 0 \quad (I.6)$$

Donde tenemos cuatro ecuaciones; una para cada índice contravariante  $\alpha$

Para concluir se hace evidente la importancia de la ecuación anterior. En virtud de (I.3) la ecuación anterior se reescribe como:

$$nU^\beta \left( \frac{\rho+p}{n} U^\alpha \right)_{;\beta} + p_{;\beta} g^{\alpha\beta} = 0 \quad (I.7)$$

Donde además se cumple (puesto que  $U^\alpha U_\alpha = -1$ ) que:

$$U^\alpha_{;\beta} U_\alpha = 0 \quad (I.8)$$

Ahora en un (MRC) se reescribe (I.7) a partir de lo anterior como:

$$nU^\beta \left( \frac{\rho+p}{n} U^i \right)_{;\beta} + p_{;\beta} g^{i\beta} = 0 \quad (I.9)$$

Donde  $U^i = 0$  pero  $U^i_{;\beta}$  no se anula.

Usando la definición de la 4-aceleración ( $\dot{U}_\alpha = U_{\alpha;\beta} U^\beta$ ) se tiene:

$$(\rho+p)\dot{U}_i + p_{;i} = 0 \quad (I.10)$$

Además:

$$(\rho+p)\dot{U}_\alpha + h^\beta_\alpha p_{;\beta} = 0 \quad (I.11)$$

Donde  $h^\beta_\alpha = U_\alpha U^\beta + \delta^\beta_\alpha$  es el tensor de proyección respecto a  $\alpha$ .

La siguiente expresión es una generalización de la ecuación (I.10):

$$\rho a + \nabla p = 0 \quad (I.12)$$

Donde  $a$  es la 3-aceleración newtoniana escrita como  $a = \dot{v} + (v \cdot \nabla)v$ . Y en la ecuación (I.11) se identifica a  $(\rho+p)$  como la masa inercial y  $-h^\beta_\alpha p_{;\beta}$  como la fuerza para un elemento de fluido.

#### REFERENCIAS:

El fluido perfecto tiene un tratamiento extenso en Schutz, B. [T.15] (capítulo IV).

Otros títulos útiles son Stephani, H. [T.18] y Hughston, L.P. and Tod, K.P. [T.5].

## CAPITULO DOS

### TERMODINAMICA DEL FLUIDO PERFECTO RELATIVISTA

#### 2.1 Procesos Adiabáticos

La primera ley de la termodinámica como fundamento de la conservación de la energía permite suponer que en un fluido el intercambio de ésta se lleva a cabo por conducción de calor ó por la realización de trabajo con el medio circundante; es decir:

$$dE = dQ - pdV \quad (II.1)$$

Suponiendo cambios infinitesimales y la validez de la ecuación (I.3) introduciendo las variables de interés:

$$dq = d\rho - (\rho + p)\frac{dn}{n} = TdS \quad (II.2)$$

Esto es, el incremento en el calor absorbido por partícula.

Por otra parte de (I.7), multiplicando por  $U^\alpha$  y sumando sobre  $\alpha$ , se escribe:

$$nU^\beta U_\alpha \left( \frac{\rho + p}{n} U^\alpha \right)_{;\beta} + p_{;\beta} g^{\alpha\beta} U_\alpha = 0 \quad (II.3)$$

O bien:

$$\frac{d\rho}{d\tau} - \frac{\rho + p}{n} \frac{dn}{d\tau} = 0 \quad (II.4)$$

Comparando (II.4) y (II.2) se concluye que:

$$U^\alpha S_{;\alpha} = \frac{dS}{d\tau} = 0 \quad (II.5)$$

Es decir, la entropía se conserva a lo largo del fluido cuya evolución es un proceso adiabático.

Teniendo en cuenta que la ecuación (I.3) se escribe:

$$(nU^\alpha)_{;\alpha} = U^\alpha n_{;\alpha} + nU^\alpha_{;\alpha} = \dot{n} + n\Theta = 0 \quad (II.6)$$

Donde el escalar de expansión del fluido tiene la forma:

$$\Theta = U_{;\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}U^{\alpha})_{;\alpha} \quad (II.7)$$

Es posible llegar a la ecuación (II.5) a partir de la ecuación (II.6) y la segunda ley de la termodinámica, escrita como:

$$S_{;\alpha}^{\alpha} = (nSU^{\alpha})_{;\alpha} = 0 \quad (II.8)$$

Esto confirma que el flujo de la corriente de entropía es nulo.

## 2.2 Conservación de la Energía

De la conservación de la energía (I.6) y como resultado de contraer dicha identidad con la 4-velocidad se tiene:

$$\rho_{;\beta}U^{\beta} + (\rho + p)U_{;\beta}^{\beta} = 0$$

O bien:

$$\frac{d\rho}{d\tau} + (\rho + p)\Theta = 0 \quad (II.9)$$

Adicionalmente al calcular la proyección del tensor de momento-energía resulta:

$$h_{\beta}^{\alpha}p_{;\alpha} + (\rho + p)\dot{U}_{\beta} = 0 \quad (II.10)$$

Donde es fácil identificar la 4-aceleración.

Partiendo ahora de la ecuación (II.2) tenemos que su proyección a lo largo de  $U^{\alpha}$  se anula trivialmente debido a las ecuaciones de conservación y la segunda ley de la termodinámica:

$$T\frac{dS}{d\tau} = U^{\alpha} \left[ \left( \frac{\rho}{n} \right)_{;\alpha} + p \left( \frac{1}{n} \right)_{;\alpha} \right] = 0 \quad (II.11)$$

Finalmente, la proyección ortogonal a  $U^{\alpha}$  viene dada por:

$$Th_{\beta}^{\alpha}S_{;\alpha} = h_{\beta}^{\alpha} \left[ \left( \frac{\rho}{n} \right)_{;\alpha} + p \left( \frac{1}{n} \right)_{;\alpha} \right] \quad (II.12)$$

Esta expresión no se anula necesariamente. Se anula si existe una ecuación de estado de las llamadas "barotrópicas", de la forma  $p = p(\rho)$  o  $[p = p(n), \rho = \rho(n)]$ .

En éstos casos (II.8) es un diferencial exacta y se tiene  $dS = 0$ , es decir, la densidad de entropía es una constante universal. En general, la ecuación de estado depende de dos parámetros (de la forma:  $p = p(\rho, S)$ ) y la densidad de entropía  $S$  solo es constante a lo largo de las líneas de universo del fluido, pero es una constante diferente para cada línea de universo (por eso  $dS/dr = 0$ , pero  $dS \neq 0$ ). Por cierto; en general no existen tampoco ecuaciones de estado de ésta forma pero siempre existen si hay simetría esférica.

Las expresiones encontradas en éste apartado se aplican más adelante para el cálculo de la presión y la entropía.

#### REFERENCIAS

Un texto clásico de la termodinámica relativista es Tolman, R.C. [T.19]. Además son de utilidad Schutz, B. [T.15] y Stephani, H. [T.18].

## CAPITULO TRES

### ECUACIONES DE EINSTEIN PARA SIMETRIA ESFERICA

#### 3.1 Simetría Esférica y Fluido Perfecto

Las simetrías del espacio-tiempo descritas por los vectores de Killing permiten establecer direcciones en las cuales es posible moverse sin cambios en la geometría; tal es el caso de los vectores generadores para simetría esférica en el cual tres vectores de Killing linealmente independientes generan una 2-esfera de invariancia. En éste capítulo se escriben las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto con simetría esférica; la forma más general del tensor métrico bajo éstas condiciones viene dada por:

$$g_{rr} = e^{\lambda(r,t)} \quad (III.1)$$

$$g_{\theta\theta} = e^{\mu(r,t)} \quad (III.2)$$

$$g_{\phi\phi} = e^{\mu(r,t)} \sin^2(\theta) \quad (III.3)$$

$$g_{tt} = -e^{\nu(r,t)} \quad (III.4)$$

En donde por simplicidad se emplean funciones exponenciales y es notable la dependencia de las funciones  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  con respecto a las variables  $r$  y  $t$ . Situación referida como caso no-estático

Se calculan las distintas componentes del tensor de Einstein en la forma usual, esto es, en términos del tensor y el escalar de Ricci:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (III.5)$$

Las componentes del tensor de Einstein en su forma mixta se expresan como:

$$G^r_t = R^r_t = -e^{-\lambda} \left\{ \frac{\mu'}{2} + \frac{\dot{\mu}}{2} - \frac{\dot{\mu}\mu'}{2} - \dot{\mu}' \right\} \quad (III.6)$$

$$G^r_r = e^{-\lambda} \left\{ \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'\nu'}{2} \right\} + e^{-\nu} \left\{ \frac{\dot{\mu}\nu}{2} - \frac{3\dot{\mu}^2}{4} - \dot{\mu}^2 \right\} - e^{-\mu} \quad (III.7)$$

$$G_{\theta}^{\theta} = e^{-\lambda} \left\{ \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\mu''}{2} + \frac{\mu'^2}{4} - \frac{\mu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\mu'\nu'}{4} \right\} + e^{-\nu} \left\{ \frac{\lambda\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{4} - \frac{\lambda\dot{\mu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}}{2} - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{4} \right\} \quad (III.8)$$

$$G_t^t = e^{-\lambda} \left\{ \frac{\mu'\lambda'}{2} - \frac{3\mu'^2}{4} - \mu'' \right\} + e^{-\nu} \left\{ \frac{\dot{\mu}\lambda}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} \right\} + e^{-\mu} \quad (III.9)$$

Tales componentes se calcularon empleando el paquete de computación simbólica MAPLE en una forma ágil y completa; puntos y comas denotan diferenciales con respecto a  $t$  y  $r$  en cada caso.

Por otra parte el tensor de momento-energía se considera analogamente en su forma mixta; la expresión usual bajo el régimen de fluido perfecto es:

$$T^{\mu}_{\nu} = (\rho + p)U^{\mu}U_{\nu} + p\delta^{\mu}_{\nu} \quad (III.10)$$

Se calculan las componentes del tensor momento-energía para cada una de las componentes del tensor de Einstein; tomando en cuenta que en un (MRC)  $U^r = U^{\theta} = U^{\phi} = 0$ :

$$T_r^r = +p \quad (III.11)$$

$$T_{\theta}^{\theta} = T_{\phi}^{\phi} = +p \quad (III.12)$$

$$T_t^t = -\rho \quad (III.13)$$

$$T_t^r = 0 \quad (III.14)$$

### 3.2 Condición de Isotropía de Presiones

Con respecto a las identidades anteriores los siguientes vínculos deben satisfacerse para toda solución exacta de las ecuaciones de Einstein con simetría esférica cuya fuente es un fluido perfecto:

$$G_{\theta}^{\theta} = e^{-\lambda} \left\{ \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\mu''}{2} + \frac{\mu'^2}{4} - \frac{\mu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\mu'\nu'}{4} \right\} + e^{-\nu} \left\{ \frac{\lambda\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{4} - \frac{\lambda\dot{\mu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}}{2} - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\dot{\mu}}{2} - \frac{\dot{\mu}^2}{4} \right\} \quad (III.8)$$

$$G_t^t = e^{-\lambda} \left\{ \frac{\mu'\lambda'}{2} - \frac{3\mu'^2}{4} - \mu'' \right\} + e^{-\nu} \left\{ \frac{\dot{\mu}\lambda}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} \right\} + e^{-\mu} \quad (III.9)$$

Tales componentes se calcularon empleando el paquete de computación simbólica MAPLE en una forma ágil y completa; puntos y comas denotan diferenciales con respecto a  $t$  y  $r$  en cada caso.

Por otra parte el tensor de momento-energía se considera análogamente en su forma mixta; la expresión usual bajo el régimen de fluido perfecto es:

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + p) U^{\mu} U_{\nu} + p \delta_{\nu}^{\mu} \quad (III.10)$$

Se calculan las componentes del tensor momento-energía para cada una de las componentes del tensor de Einstein; tomando en cuenta que en un (MRC)  $U^r = U^{\theta} = U^{\phi} = 0$ :

$$T_r^r = +p \quad (III.11)$$

$$T_{\theta}^{\theta} = T_{\phi}^{\phi} = +p \quad (III.12)$$

$$T_t^t = -\rho \quad (III.13)$$

$$T_i^r = 0 \quad (III.14)$$

### 3.2 Condición de Isotropía de Presiones

Con respecto a las identidades anteriores los siguientes vínculos deben satisfacerse para toda solución exacta de las ecuaciones de Einstein con simetría esférica cuya fuente es un fluido perfecto:

$$G_t^r = 8\pi T_t^r = 0 \quad (III.15)$$

$$G_r^r - G_\theta^\theta = p - p = 0 \quad (III.16)$$

Esta última condición se cita como condición de isotropía de presiones (CIP). En capítulos posteriores se efectúan los cálculos correspondientes a las ecuaciones de vínculos mostradas.

#### REFERENCIAS:

Un texto útil es Kramer, D., Stephani, H., Mc Callum, M. A. H. and Herlt, E. [T.6].

Además Schutz, B. [T.15] y Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A. [T.10].

En relación con el paquete de computación simbólica MAPLE consultar:

Maple V, Release 3. Waterloo Maple Software, 450 Phillip Street, Waterloo Ontario Canada, N2L 5J2.

## CAPITULO CUATRO

### SOLUCIONES DE HERRERA Y PONCE DE LEON

Frecuentemente se requiere complementar las ecuaciones de Einstein para fluido perfecto con una ecuación de estado que vincule a  $\rho$  y  $p$ . Sin embargo es posible imponer una condición de tipo geométrico que permita integrar tales ecuaciones. Herrera y Ponce de León, a partir de ahora (HPL), hicieron esto empleando un vector conforme de Killing perpendicular a la 4-velocidad. En este capítulo se describe en detalle las soluciones descubiertas por éstos autores. Se asume entonces la existencia de un vector conforme de Killing  $\xi^\alpha$  tal que:

$$L_\xi (g_{\mu\nu}) = \psi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \quad (IV.1)$$

En donde  $\psi = \psi(r, t)$  es una función arbitraria de las variables  $r$  y  $t$ . Además tomando en cuenta la siguiente restricción de ortogonalidad:

$$\xi^\alpha U_\alpha = 0 \quad (IV.2)$$

Se cumple que como consecuencia de la simetría esférica:

$$\xi^t = \xi^\theta = \xi^\phi = 0 \quad (IV.3)$$

Considerando ahora la validez de la ecuación (IV.1) aplicada a la métrica y asumiendo que la componente  $\xi^r$  es distinta de cero se han de cumplir las siguientes identidades:

$$\xi^r_{;t} = 0 \quad (IV.4)$$

$$\lambda' \xi^r + 2\xi^r_{;r} = \psi \quad (IV.5)$$

$$\mu' \xi^r = \psi \quad (IV.6)$$

$$\nu' \xi^r = \psi \quad (IV.7)$$

Aquí por ejemplo la ecuación (IV.4) indica que la derivada parcial de la componente  $\xi^r$  con respecto a la variable  $t$  es idénticamente cero. Ahora, directamente de las ecuaciones (IV.6) y (IV.7) se afirma que:

$$\mu' - \nu' = 0 \quad (IV.8)$$

O bien:

$$\nu - \mu = f_1(t) \quad (IV.9)$$

En donde  $f_1(t)$  es una función arbitraria de la variable  $t$ .

A continuación, derivando las ecuaciones (IV.5) y (IV.6) con respecto a la variable  $t$  y considerando la identidad (IV-4) obtenemos:

$$\lambda' - \mu' = 0 \quad (IV.10)$$

De donde se sigue que :

$$\lambda - \mu = f_2(t) + g_1(r) \quad (IV.11)$$

Nuevamente aquí se entiende que  $f_2(t)$  y  $g_1(r)$  son funciones arbitrarias de las variables  $t$  y  $r$  respectivamente.

Es posible ahora emplear los resultados de las ecuaciones (IV.9) y (IV.11) para reescribir:

$$ds^2 = e^\mu dt^2 - e^f d\bar{r}^2 - e^\mu d\Omega^2 \quad (IV.12)$$

En donde las nuevas variables  $\bar{t}$  y  $\bar{r}$  quedan definidas como:

$$\bar{t} = \int e^{f_1/2} dt \quad (IV.13a)$$

$$\bar{r} = \int e^{g_1/2} dr \quad (IV.13b)$$

Se impone sin pérdida de generalidad a partir de (IV.12)

$$f_1 = g_1 = 0 \quad (IV.14a)$$

$$f_2 = f \quad (IV.14b)$$

$$\nu = \mu \quad (IV.14c)$$

$$\lambda = \mu + f \quad (IV.14d)$$

Con ayuda de la identidad (IV.14d) es posible reescribir (III.6) en virtud de (III.15) como:

$$2\dot{\mu}' + \dot{\mu}\mu' - \dot{\lambda}\mu' - \nu'\mu = 0$$

$$2\dot{\lambda}' + (\dot{\lambda} - \dot{f})\lambda' - \dot{\lambda}\lambda' - \lambda'(\dot{\lambda} - \dot{f}) = 0$$

$$2\dot{\lambda}' - \dot{\lambda}\lambda' = 0 \quad (IV.15)$$

De donde:

$$\dot{\lambda} = e^{(A+\lambda)/2} \quad (IV.16)$$

Aquí  $A = A(t)$  es una función por determinar.- Manipulando esta ecuación podemos escribir:

$$e^{-\lambda/2} = -\frac{1}{2} \int e^{A/2} dt + B = A + B \quad (IV.17)$$

Donde nuevamente  $B = B(r)$  representa una función por determinar. Finalmente es posible reescribir la métrica en la forma:

$$ds^2 = \frac{e^{-f} dt^2 - dr^2 - e^{-f} d\Omega^2}{(A+B)^2} \quad (IV.18)$$

Las identidades previamente establecidas sirven como guía para reescribir:

$$8\pi T_0^0 = 8\pi\rho = -3(A')^2 + 3(\dot{B})^2 e^f + 2e^{-\lambda/2}(A'' + \dot{B}f'e^f) + e^{-\lambda}e^f(\frac{1}{2}f^2 + 1) \quad (IV.19)$$

$$-8\pi T_1^1 = 8\pi p = 3(A')^2 - 3(\dot{B})^2 e^f + e^{-\lambda/2}e^f(2\ddot{B} - \dot{B}f) + e^{-\lambda}e^f(f - \frac{1}{2}f^2 - 1) \quad (IV.20)$$

$$-8\pi T_2^2 = 8\pi p = 3(A')^2 - 3(\dot{B})^2 e^f - 2e^{-\lambda/2}(A'' - \ddot{B}e^f) + \frac{1}{2}f\ddot{e}^{-\lambda}e^f \quad (IV.21)$$

Las ecuaciones de Einstein en este caso son analíticamente integrables sin tener que introducir restricciones adicionales en la métrica. Restando las ecuaciones (IV.20) y (IV.21) ,(CIP), tenemos:

$$e^{\lambda/2} [e^f (2\ddot{B} - \dot{B}\dot{f}) + 2A'' - 2\ddot{B}e^f] = e^f \left[ -\frac{1}{2}\dot{f} + \frac{1}{4}\dot{f}^2 + 1 \right] = \Phi \quad (IV.22)$$

Donde  $\Phi = \Phi(t)$  y puede escribirse como:

$$\Phi(t) = e^{\lambda/2} (e^f \dot{f} \dot{B} - 2A'') \quad (IV.23)$$

O bien:

$$4\Phi(t) = e^f (2\ddot{f} - \dot{f}^2 - 4) \quad (IV.24)$$

Derivando la ecuación (IV.23) con respecto a la variable  $r$  tenemos:

$$\frac{\lambda'}{2} \Phi(t) + 2e^{\lambda/2} A''' = 0 \quad (IV.25)$$

Manipulando esta ecuación se tiene:

$$\frac{\lambda'}{2} e^{-\lambda/2} \Phi(t) + 2A''' = 0$$

$$-(e^{-\lambda/2})' \Phi(t) + 2A''' = 0$$

Incluyendo ahora el resultado de la ecuación (IV-17) en esta identidad:

$$-A' \Phi(t) + 2A''' = 0 \quad (IV.26)$$

O bien:

$$\Phi(t) = -\frac{2A'''}{A'} \quad (IV.27)$$

Esto implica que  $\Phi(t) = K_1 = \text{const.}$  Ahora integrando esta última expresión tenemos:

$$2A'' + K_1 A = 2K_2 \quad (IV.28)$$

Aquí  $K_2$  representa una constante de integración. Se emplea esta expresión para reescribir las ecuaciones (IV.23) y (IV.24) en la forma:

$$\dot{B}f e^f - K_1 B = 2K_2 \quad (IV.29)$$

$$e^f(2\dot{f} - f^2 - 4) = 4K_1 \quad (IV.30)$$

Al manipular la ecuación (IV.28) con objeto de integrarla:

$$2A''A' + K_1AA' - 2K_2A' = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left( (A')^2 + \frac{1}{2}K_1A^2 - 2K_2A \right) = 0$$

$$(A')^2 = -\frac{1}{2}K_1A^2 + 2K_2A + K_4 \quad (IV.31)$$

Aquí  $K_4$  representa de nuevo una constante de integración. Al proceder de la misma forma para la ecuación (IV.30) se tiene:

$$f^2 = 4K_3e^f - 2K_1e^{-f} - 4 \quad (IV.32)$$

Donde  $K_3 = \text{const.}$

A partir de las ecuaciones (IV.31) y (IV.32) y en virtud de (IV.28) y (IV.29) se tienen las siguientes expresiones para  $\rho$  y  $p$ :

$$p = K_3e^{2f}(A+B)^2 - G(t) - 4K_3e^f(A+B)\frac{2K_2 + K_1B}{f^2} \quad (IV.33)$$

Donde  $G(t)$  esta definida como:

$$G(t) = 6K_2B + \frac{3}{2}K_1B^2 - 3K_4 + \frac{3(2K_2 + K_1B)^2}{f^2e^f} \quad (IV.34)$$

De la misma forma se escribe:

$$\rho = K_3e^{2f}(A+B)^2 + G(t) \quad (IV.35)$$

En términos de funciones que habrá que redefinir.

## **REFERENCIAS:**

La principal referencia para éste capítulo es Herrera, L and Ponce de León, J. [T.4].  
Además son de interés Sussman, R.A. [T.14] y Cooley, A.A. and Truper, B.O.J. [T.1].

**CAPITULO CINCO**  
**CASOS PARTICULARES DE LAS SOLUCIONES DE HPL**

**5.1 Coordenadas tipo Kruskal**

Se introducen nuevas coordenadas y cambios de notación que permiten simplificar las expresiones obtenidas en el capítulo anterior; sean:

$$B(r) = h(r) \quad A(t) = g(t) \quad F = e^{-f} \quad (V.1a)$$

Además, al hacer la siguiente transformación de la coordenada  $t$

$$t = \int e^{-f/2} dt_{(HPL)} = \int F^{1/2} dt_{(HPL)} \quad (V.1b)$$

La métrica (IV.18) de las soluciones de HPL se escribe:

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + dr^2 + F(t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi)}{[h(r) + g(t)]^2} \quad (V.2)$$

Tales coordenadas, tipo Kruskal, están referidas en Misner, C.W. et al. [T.10]. Las formas equivalentes a las ecuaciones (IV.29), (IV.30) y (IV.31) son examinadas a continuación; ver detalles en los apéndices. La condición de isotropía de presiones (CIP) establece la forma de las funciones métricas  $F, h$  y  $g$ ; ésta se simplifica algebraicamente con ayuda de GRTensor (MAPLE) tomando la forma:

$$4h''F - (h + g)(\ddot{F} + 2) + 2\dot{F}\dot{g} = 0 \quad (V.3)$$

Derivando ésta expresión con respecto a  $r$  se tiene:

$$4h'''F - (\ddot{F} + 2)h' = 0 \quad (V.4)$$

La ecuación anterior es separable y puede reescribirse en la forma:

$$\frac{h'''}{h'} = \frac{\ddot{F} + 2}{4F} \quad (V.5)$$

Resultando las siguientes dos ecuaciones diferenciales acopladas por una constante de separación  $\alpha$ :

$$h''' - \alpha h' = 0 \quad (V.6)$$

$$\ddot{F} - 4\alpha F + 2 = 0 \quad (V.7)$$

## 5.2 Funciones Métricas

Ahora según el valor de  $\alpha = 0, +1, -1$  se distinguen tres casos:

### CASO UNO

( $\alpha = 1$ ) con ecuaciones:

$$h''' - h' = 0 \quad (V.8)$$

$$\ddot{F} - 4F + 2 = 0 \quad (V.9)$$

Las formas de las funciones  $h$  y  $F$ , según aparecen en el apéndice B, son:

$$h = c_1 + c_2 \exp(r) + c_3 \exp(-r) \quad (V.10)$$

$$F = \frac{1}{2} + b_1 \exp(-2t) + b_2 \exp(2t) \quad (V.11)$$

Donde  $c_1, c_2, c_3, b_1, b_2$  son constantes. Sustituyendo éstas funciones en la (CIP) se obtiene la función  $g$  para éste caso (ver detalles de la ecuación diferencial correspondiente y su solución en el apéndice B):

$$g = -c_1 + \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{b_1 b_2} \ln [-b_1 + b_2 \exp(4t)] - \right. \\ \left. 4\sqrt{b_1 b_2} t + \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{b_1 b_2} - b_2 \exp(2t)}{\sqrt{b_1 b_2} + b_2 \exp(2t)} \right] \right\} \quad (V.12)$$

De nuevo en el apéndice B se puede comprobar que  $F, g$  y  $h$  escritas como antes satisfacen la (CIP).

**CASO DOS** ( $\alpha = -1$ ) con ecuaciones:

$$h''' + h' = 0 \quad (V.13)$$

$$\ddot{F} + 4F + 2 = 0 \quad (V.14)$$

Las formas de las funciones  $h$  y  $F$ , según aparecen en el apéndice C, son:

$$h = c_1 + c_2 \cos(r) + c_3 \sin(r) \quad (V.15)$$

$$F = -\frac{1}{2} + b_1 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) \quad (V.16)$$

Donde nuevamente  $c_1, c_2, c_3, b_1, b_2$  son constantes. Se escribe ahora la expresión para  $g$  en éste caso; de acuerdo con los resultados contenidos en el apéndice C:

$$g = -c_1 + \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \exp \left\{ \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{2} \ln \left[ \frac{1}{\tan(t)^2 + 1} \right] + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \ln [2b_1 \tan(t) + b_2 \tan(t)^2 - b_2] + \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{b_1 + b_2 \tan(t) + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{-b_1 - b_2 \tan(t) + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \right] \right\} \quad (V.17)$$

Puede comprobarse (ver apéndice C) que las ecuaciones escritas anteriormente satisfacen la (CIP) para éste caso.

**CASO TRES** ( $\alpha = 0$ ) con ecuaciones:

$$h''' = 0 \quad (V.18)$$

$$\ddot{F} + 2 = 0 \quad (V.19)$$

Las formas de las funciones  $h$  y  $F$ , según aparecen en el apéndice D, son:

$$h = c_1 + c_2 r + c_3 r^2 \quad (V.20)$$

$$F = b_1 + b_2 t - t^2 \quad (V.21)$$

Donde  $c_1, c_2, c_3, b_1$  y  $b_2$  son constantes. De nuevo para obtener la función  $g$  se sustituyen éstas expresiones en la (CIP) y se procede a simplificar el resultado (ver detalles en el apéndice D):

$$g = -c_1 + c_3 b_2 t - c_3 t^2 + 4c_3 b_1 \ln(2) + c_3 b_2^2 \ln(2) + 2c_3 b_1 \ln(b_2 - 2t) + \frac{1}{2} c_3 b_2^2 \ln(b_2 - 2t) \quad (V.22)$$

Y nuevamente se puede comprobar que tales funciones satisfacen la (CIP).

Para cualquiera de los tres casos mencionados en los párrafos anteriores, la densidad de energía y la presión se obtienen sustituyendo las funciones métricas en las ecuaciones de campo.

### 5.3 Expresiones para la Densidad de Energía y la Presión

Para encontrar  $\rho$  y  $p$  se procede a expresar  $h'$  y  $\dot{F}$  en función de  $h$  y  $F$ ; así entonces de la ecuación (V.6) al integrar y multiplicar por  $h'$  se obtiene:

$$h'^2 = \alpha h^2 + \gamma_1 h + \gamma_2 \quad (V.23)$$

Y de la ecuación (V.7) al multiplicar por  $\dot{F}$  resulta:

$$\dot{F}^2 = 4\alpha F^2 - 4F + \delta \quad (V.24)$$

Ahora para expresar  $\dot{g}$  en función de  $g$  y  $F$  se hace uso de la ecuación (V.3) y de ésta se eliminan  $h''$  y  $\ddot{F}$  en virtud de la ecuación (V.7) y la integral de (V.6); simplificando se tiene que:

$$\dot{g} = 2\left(\alpha g - \frac{\gamma_1}{2}\right) \frac{F}{\dot{F}} = \frac{2(\alpha g - \frac{1}{2}\gamma_1)}{\sqrt{4\alpha F^2 - 4F + \delta}} \quad (V.25)$$

Finalmente se obtienen las expresiones para  $\rho$  y  $p$  en términos de las funciones métricas como resultado de emplear las ecuaciones (V.23), (V.24) y (V.25) :

$$\rho = \frac{\delta(h+g)^2}{4F^2} + G(t) \quad (V.26)$$

$$p = \frac{\delta(h+g)^2}{4F^2} - G(t) + \frac{\delta(h+g)(\alpha g - \frac{1}{2}\gamma_1)}{2Q(F)} \quad (V.27)$$

En donde  $G(t)$  y  $Q(F)$  son:

$$G(t) = -3\gamma_2 + 3g(\alpha g - \gamma_1) + \frac{3F^2(\alpha g - \frac{1}{2}\gamma_1)^2}{Q(F)} \quad (V.28)$$

$$Q(F) = 4\alpha F^2 - 4F + \delta = F^2 \quad (V.29)$$

La relación para  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\delta$  con las constantes  $c_1, c_2, c_3, b_1, b_2$  se encuentra sustituyendo las formas obtenidas de  $h$  y  $F$ , para cada caso, en las ecuaciones (V.23) y (V.24) resultando:

**CASO UNO ( $\alpha = 1$ )**

$$\gamma_1 = -2c_1$$

$$\gamma_2 = c_1^2 - 4c_2c_3$$

$$\delta = 1 - 16b_1b_2$$

**CASO DOS ( $\alpha = -1$ )**

$$\gamma_1 = 2c_1$$

$$\gamma_2 = c_2^2 + c_3^2 - c_1^2$$

$$\delta = 4(b_1^2 + b_2^2) - 1$$

**CASO TRES ( $\alpha = 0$ )**

$$\gamma_1 = c_3^2 - 4c_1c_2$$

$$\gamma_2 = 4c_1$$

$$\delta = 4b_1 + b_2^2$$

**REFERENCIAS:**

Con respecto a la elaboración de los apéndices consultar:

Lake, K. and Musgrave, P. GRTensor. Department of Physics and Astronomy  
Queens University, Kingston Ontario Canada.

## CAPITULO SEIS

### PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LAS SOLUCIONES HPL

Hay varias cantidades que ayudan a describir las propiedades geométricas y físicas de un fluido cuando existe simetría esférica. Estas cantidades se definen a continuación.

#### Radio de Curvatura.

Cuando hay simetría esférica, el fluido evoluciona en dirección exclusivamente radial y las coordenadas angulares  $(\theta, \phi)$  son ignorables. En otras palabras, todos los observadores marcados por la misma  $r$  (pero con diversos  $(\theta, \phi)$ ) son indistinguibles, por lo que las funciones métricas, así como toda cantidad física asociada, solo dependen de  $(t, r)$ . Por lo tanto, la evolución del fluido puede ser descrita en diagramas parametrizados por las dos coordenadas  $(t, r)$ . La simetría esférica también implica que el coeficiente métrico  $g_{\theta\theta}$  tiene un significado invariante: es el cuadrado del radio de la esfera bidimensional cuya métrica es  $d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ . Para las soluciones HPL, esta cantidad viene dada por

$$R(t, r) = [g_{\theta\theta}]^{1/2} = \frac{F^{1/2}(t)}{h(r) + g(t)} \quad (VI.1)$$

Como la coordenada  $r$  es comóvil, cada familia de observadores comóviles con el fluido, marcados por  $r$  constante forma una esfera bidimensional cuyo radio cambia en el tiempo de acuerdo a (VI.1).

#### Tiempo propio a lo largo del Fluido.

Al haber elegido coordenadas comóviles, las líneas de universo del fluido son paralelas al eje de la coordenada temporal, por lo que, de acuerdo a la métrica (V.2), el tiempo propio de los observadores que evolucionan a lo largo del fluido es

$$\tau(t, r) = \int_{r=r_0} \frac{dt}{h(r) + g(t)} \quad (VI.2)$$

donde la integral debe ser evaluada a valores fijos de  $r$  (por ejemplo  $r = r_0$ ). Nótese como diversos observadores (cada uno marcado por una  $r$  distinta) mide un tiempo propio diferente. El evaluar la integral que define al tiempo propio permite

averiguar si un evento dado por coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  puede ser alcanzado por observadores comóviles al fluido en un tiempo propio finito.

### Longitud propia a lo largo de la simetría conforme.

Puesto que las soluciones HPL admiten un vector conforme de Killing ortogonal a la 4-velocidad, si  $U^\alpha = (h + g)\delta_t^\alpha$ , el vector  $\xi$  debe tener la forma  $\xi = (0, \xi^r, 0, 0)$ , es decir sus curvas integrales son paralelas a las curvas que definen la coordenada  $r$  en la métrica (V.2). Este hecho permite definir invariante a la coordenada radial como la dirección a lo largo de la simetría conforme asociada a  $\xi$ . La distancia propia a lo largo de este vector es entonces una medida invariante de distancias a lo largo de esta dirección. Esta distancia propia viene dada por

$$\ell(t, r) = \int_{t=t_0} \frac{dr}{h(r) + g(t)} \quad (\text{VI.3})$$

donde esta integral debe ser evaluada para  $t$  constante (por ejemplo,  $t = t_0$ ). Es conveniente notar que la dirección dada por  $\xi$  es espacial, es decir  $\xi^\alpha \xi_\alpha > 0$ , por lo que las curvas integrales de  $\xi^\alpha$  no pueden ser líneas de universo de ninguna partícula física o fotón.

### Geodésicas nulas radiales.

Las líneas de universo de fotones emitidos o recibidos radialmente son las curvas en el espacio-tiempo dadas por  $ds^2 = 0$ . En las coordenadas de la métrica (V.2), dichas curvas están dadas por las familias de rectas a 45 grados en el diagrama  $(t, r)$ , es decir

$$t + r = v \quad t - r = w \quad (\text{VI.4})$$

donde los signos  $\pm$  distinguen entre geodésicas nulas "salientes" (signo +) y "entrantes" (signo -) y cada geodésica nula se obtiene de (VI.4) al asignar valores constantes a  $(v, w)$ . El conocer las geodésicas nulas radiales permite averiguar si dos eventos dados en el espacio-tiempo definido por (V.2) pueden ser conectados causalmente mediante fotones radiales.

A continuación se establecen las condiciones que deben cumplir las funciones métricas para que las distintas variables de estado diverjan.

### Singularidades.

A partir de las expresiones para  $R$ ,  $\rho$  y  $p$ , será posible averiguar los rangos de definición de las funciones métricas. Por ejemplo, como  $R$  es un radio de curvatura, debe ser real y no-negativo, esto implica

$$F \geq 0 \quad (VI.5a)$$

$$h(r) + g(t) \geq 0 \quad (VI.5b)$$

De las ecuaciones para la densidad de materia-energía y la presión, éstas divergen para valores de  $t$  y/o  $r$  para los cuales se cumple:

$$F(t) = 0 \quad (VI.6a)$$

$$Q(F(t)) = 0 \quad (VI.6b)$$

$$h(r) \rightarrow \infty \quad (VI.6c)$$

$$g(t) \rightarrow \infty \quad (VI.6d)$$

Como el espacio-tiempo no puede ser extendido más allá de éstos valores de  $t$  y  $r$ , éstos últimos marcan fronteras singulares del espacio-tiempo, las cuales se conoce como **singularidades**. La singularidad (VI.6a) asociada a  $F = 0$  corresponde a una esfera singular de radio cero (punto), por lo que se le llama "singularidad puntual". Las singularidades (VI.6c) y (VI.6d) también son singularidades puntuales, puesto que  $R$  definido por (VI.1) también se anula en estos límites. Sin embargo, la singularidad (VI.6b) no es una singularidad puntual, ya que  $R$  no necesariamente se anula si  $Q = 0$ .

Un aspecto interesante de las soluciones de HPL que salta a la vista de las ecuaciones (VI.1) y (VI.6) es que el radio de curvatura  $R$  solo se anula en valores de  $(t, r)$  asociados a singularidades ((VI.6a), (VI.6c) y (VI.6d)). Este hecho implica que no existe en estas soluciones lo que se denomina un "centro de simetría regular", es decir un línea de universo regular ( $\rho$  y  $p$  finitas) a lo largo de la cual  $R = 0$ . En otras palabras, los centros de simetría de estos espacio-tiempos son siempre singulares. Este fenómeno no tiene equivalente en fluidos newtonianos con simetría esférica, para los cuales siempre existe un centro de simetría regular.

Es importante averiguar si el tiempo propio definido por (VI.2) es finito al llegar a valores de  $t$  que satisfacen (VI.6a), (VI.6b) y (VI.6d) a lo largo de las

líneas de universo del fluido, pues esto indicaría que dichas líneas de universo terminan abruptamente en estas singularidades (lo cual es de esperar puesto que la densidad y presión divergen). Respecto a la singularidad (VI.6c), es necesario averiguar si se encuentra a una distancia propia  $\ell$  finita o infinita a lo largo de las líneas integrales de  $\xi$ . Para verificar el comportamiento de  $\tau$  y/o  $\ell$  en las singularidades es necesario evaluar las integrales (VI.2) y (VI.3), lo cual se hará posteriormente para cada caso particular de las soluciones de HPL.

Otra frontera del espacio-tiempo está dada por los valores  $(t, r)$  para los cuales:

$$h(r) + g(t) = 0 \quad (VI.7)$$

correspondientes a esferas de radio infinito, ya que  $R$  diverge si (VI.7) se cumple. Sin embargo, ésta es una frontera regular puesto que  $\rho$  y  $p$  no divergen, de hecho:  $p \rightarrow -\rho \rightarrow G(t)$  en éste límite. Por lo tanto, la evolución del fluido está restringida a valores  $(t, r)$  para los cuales  $\rho$  y  $p$  sea finita y  $R > 0$ , es decir valores  $(t, r)$  que satisfacen (VI.5), así como  $g(t)$  y  $h(r)$  finitos.

#### REFERENCIAS:

Algunos textos útiles son Stephani, H. [T.18] y Landau, L.D. and Lifschitz, E.M. [T.8].

## CAPITULO SIETE

### TERMODINAMICA DE LAS SOLUCIONES DE HPL

En éste capítulo se aplican los resultados del capítulo dos a una métrica esféricamente simétrica y luego a las soluciones de HPL. Para una métrica de tipo:

$$dS^2 = -B^2 dt^2 + A^2 dr^2 + Y^2 [d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2] \quad (VII.1)$$

la derivada convectiva es:

$$U^\alpha X_{,\alpha} = \frac{dX}{dr} = \frac{1}{B} \delta_t^\alpha X_{,\alpha} = \frac{\dot{X}}{B} \quad (VII.2)$$

Y así mismo:

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + U_\alpha U_\beta = g_{\alpha\beta} + B^2 \delta_\alpha^t \delta_\beta^t = g_{ij} \delta_\alpha^i \delta_\beta^j \quad (VII.3)$$

de manera que el proyector  $h_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$  es la métrica tridimensional  $g_{ij}$  ( $i, j = r, \theta, \phi$ ). El determinante de (VII.1) así como la expansión y la 4-aceleración vienen dadas por:

$$(-g)^{1/2} = BAY^2 \sin \theta \quad (VII.4)$$

$$\Theta = \frac{1}{B} (\log AY^2)_{,t} \quad (VII.5)$$

$$\dot{U}_r = \frac{B'}{B} \quad (VII.6A)$$

$$\dot{U}_t = \dot{U}_\theta = \dot{U}_\phi = 0 \quad (VII.6B)$$

Usando éstas últimas expresiones y la ecuación (II.7), las ecuaciones (II.6), (II.9) y (II.10) se pueden reescribir como:

$$\frac{\dot{n}}{n} + (\log AY^2)_{,t} = (\log nAY^2)_{,t} = 0 \quad (VII.7)$$

$$\dot{\rho} + (\rho + P)(\log AY^2)_{,t} = 0 \quad (VII.8)$$

$$p' + (\rho + P) \frac{B'}{B} = 0 \quad (VII.9)$$

Integrando (VII.7) se obtiene

$$n = \frac{N(r)}{AY^2} \quad (VII.10)$$

Donde  $N = N(r)$  es una función arbitraria que denota la distribución del número conservado de partículas en una hipersuperficie inicial arbitraria ( $t = \text{const}$ ). Finalmente, de (II.5) y (VII.2), puesto que  $\dot{S} = 0$  se sigue que:

$$S = S(r) \quad (VII.11)$$

por lo que  $S$  es una función arbitraria que se determinará mas adelante.

Se introducen a continuación las formas funcionales de la métrica de las soluciones de HPL; así:

$$B = A = (h + g)^{-1} \quad (VII.12)$$

$$Y = \frac{F^{1/2}(t)}{h + g} \quad (VII.13)$$

Se puede reescribir las ecuaciones (VII.5) (VII.6A) y (VII.10) como:

$$\Theta = (h + g) \left( \log \frac{F(t)}{(h + g)^3} \right)_{,t} \quad (VII.14)$$

$$\dot{U}_r = -\frac{h'}{h + g} \quad (VII.15)$$

$$n = \frac{N(r)(h + g)^3}{F(t)} \quad (VII.16)$$

Como se mencionó en el capítulo dos, la proyección de la ecuación de Gibbs sobre  $U^\alpha$  se anula trivialmente en virtud de la conservación de  $n^\alpha$  y  $U_\alpha T^{\alpha\beta}$ . Sin embargo, la proyección de la ecuación de Gibbs ortogonal a  $U^\alpha$  viene dada por:

$$TS' = \left( \frac{\rho}{n} \right)' + p \left( \frac{1}{n} \right)' \quad (VII.17)$$

La cual no se anula para las soluciones de HPL, por lo que éstas no admiten una ecuación de estado del tipo barotrópico  $p = p(\rho)$ . La condición de integrabilidad de la ecuación de Gibbs viene dada en éste caso por:

$$\dot{T}S' - \dot{\rho}\left(\frac{1}{n}\right)' + p'\left(\frac{1}{n}\right)' = 0 \quad (\text{VII.18})$$

Manipulando (VII.17) y (VII.18), se cumple:

$$\dot{T}S' = \rho'\dot{n} + \dot{p}n' \quad (\text{VII.19})$$

Usando (V.26), (V.27) y (VII.16) se obtienen:

$$\left(\frac{\rho}{n}\right)_{,r} = \frac{\delta}{4F(t)} \left(\frac{1}{N(r)(h+g)}\right)_{,r} + G(t)F(t) \left(\frac{1}{N(r)(h+g)^3}\right)_{,r}$$

$$p\left(\frac{1}{n}\right)_{,r} = \left[\frac{\delta(h+g)^2}{4F(t)} - F(t)G(t) - \delta(h+g)\frac{(\alpha g - \frac{1}{2}\gamma_1)F(t)}{2Q}\right] \left(\frac{1}{N(r)(h+g)^3}\right)_{,r}$$

De donde resulta la siguiente ecuación para la temperatura:

$$T = \frac{\delta}{N(h+g)^2} \left(\frac{h'}{S'}\right) \left[\frac{3F(\alpha g - \frac{1}{2}\gamma_1)}{2Q(h+g)} - \frac{1}{F}\right] + \frac{\delta}{N^2(h+g)} \left(\frac{N'}{S'}\right) \left[\frac{F(\alpha g - \frac{1}{2}\gamma_1)}{2Q(h+g)} - \frac{1}{2F}\right] \quad (\text{VII.20})$$

Se supone como caso particular  $N' = 0$ , es decir  $N = N_o = \text{const}$ , luego:

$$T = \frac{[3F^2(\alpha g - \frac{1}{2}\gamma_1) - 2Q(h+g)]}{2QF(h+g)^3} \left(\frac{\delta h'}{N_o S'}\right) \quad (\text{VII.21})$$

Por simplicidad se escoge:

$$\frac{\delta h'}{N_o S'} = 1 \quad (\text{VII.22})$$

Así las expresiones para la temperatura y la entropía resultan:

$$T = \frac{[3F^2(\alpha g - \frac{1}{2}\gamma_1) - 2Q(h+g)]}{2QF(h+g)^3} \quad (\text{VII.23})$$

$$S = S_o + \frac{\delta h}{N_o} \quad (\text{VII.24})$$

En donde  $S$  y  $h$  son tales que los cocientes  $(\frac{N'}{S'} \text{ y } \frac{h'}{S'})$  estén bien definidos para todo valor de  $r$ .

Estas expresiones relacionan a la entropía y la temperatura con las funciones métricas ya conocidas. Las ecuaciones (VII.23) y (VII.24) serán examinadas por separado para cada caso particular de las soluciones propuestas.

#### REFERENCIAS:

Ver por ejemplo Schutz,B.[T.15] y Stephani,H.[T.18].

## CAPITULO OCHO

### CONCLUSIONES

En éste capítulo se examina en forma cualitativa el comportamiento de las variables de estado para cada caso particular de las soluciones mostradas y la existencia de singularidades de acuerdo con los criterios establecidos en el capítulo seis. La evolución en  $t$  y  $r$  permitirá verificar, para cada caso, si las variables de estado divergen en tales singularidades. Como se podrá comprobar las posibles singularidades ocurren cuando las funciones métricas  $F, g$  y  $h$  toman valores próximos a los indicados en la ecuación (VI.6). A continuación se resúmen las ecuaciones de las variables de estado encontradas en distintos capítulos en términos de las funciones métricas y constantes cuyos valores permiten simplificar el análisis:

#### DENSIDAD

$$\rho = \frac{\delta(h+g)^2}{4F^2} + G(t) \quad (V.26)$$

#### PRESION

$$p = \frac{\delta(h+g)^2}{4F^2} - G(t) + \frac{\delta(h+g)(\alpha g - \frac{1}{2}\gamma_1)}{2Q(F)} \quad (V.27)$$

#### DENSIDAD DEL NUMERO DE PARTICULAS

$$n = \frac{N_o(h+g)^3}{F(t)} \quad (VII.16)$$

#### TEMPERATURA

$$T = \frac{[3F^2(\alpha g - \frac{1}{2}\gamma_1) - 2Q(h+g)]}{2QF(h+g)^3} \quad (VII.23)$$

#### ENTROPIA

$$S = S_o + \frac{\delta h}{N_o} \quad (VII.24)$$

Las expresiones para  $Q$  y  $G$  corresponden a las mostradas en las ecuaciones (V.28) y (V.29)

A continuación se analiza para cada caso el comportamiento de las variables de estado en puntos próximos a las singularidades consideradas en la ecuación (VI.6).

#### CASO UNO:

$$(c_1 = 0, c_2 = c_3 = 1, b_1 = \frac{1}{18}, b_2 = \frac{1}{4})$$

$$(\alpha = 1, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = -4, \delta = \frac{3}{4})$$

Funciones métricas:

La función  $h(r)$  para éste caso se escribe:

$$h(r) = \exp(r) + \exp(-r) \quad (VIII.1)$$

Tal función diverge(+) cuando  $r \rightarrow \pm\infty$  y es estrictamente mayor que cero en el intervalo  $< -\infty, +\infty >$ .

El comportamiento de las funciones  $F(t), g(t)$  y  $Q(t) = 4F^2 - 4F + \delta$  se muestra en la gráfica correspondiente a éste caso (ver gráfica caso I después de la página 41). La función  $F(t)$  se escribe:

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} \exp(-2t) + \frac{1}{4} \exp(2t) \quad (VIII.2)$$

Tal función es estrictamente mayor que cero en el intervalo  $< -\infty, +\infty >$ . La función  $g(t)$  se escribe:

$$g(t) = \frac{2[4 \exp(4t) - 1]^{\frac{1}{18}} 4^{\frac{7}{8}}}{\exp(\frac{t}{2})} \sqrt{\left| \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \exp(2t)}{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \exp(2t)} \right|} \quad (VIII.3)$$

Esta función no es real para valores menores que el mostrado en la gráfica citada lo cual es una restricción del dominio para las funciones  $Q(t)$  y  $F(t)$ . La función  $Q(t)$  se escribe:

$$Q(t) = \left[ \frac{1}{8} \exp(2t) - \frac{1}{2} \exp(-2t) \right]^2 \quad (VIII.4)$$

La cual presenta una singularidad del tipo (VI.6b) cuando  $t \rightarrow \frac{1}{4} \ln 4$

Variables termodinámicas:

A. Evolución a lo largo del fluido (dirección temporal).

Aquí se considera a  $h(r)$  como una función constante finita. En éste caso la densidad de energía se escribe como:

$$\rho = \frac{3(h+g)^2}{16F^2} + 12 + 3g^2 + \frac{3F^2g^2}{2Q} \quad (VIII.5)$$

Cuyo comportamiento cuando  $t \rightarrow \frac{1}{4} \ln 4$  es que  $\rho \rightarrow +\infty$ . La presión puede escribirse como:

$$p = \frac{3(h+g)^2}{16F^2} - 12 - 3g^2 - \frac{3F^2g^2}{2Q} + \frac{3g(h+g)}{8Q} \quad (VIII.6)$$

Donde  $p \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow \frac{1}{4} \ln 4$  y depende de  $h(r)$ . Con respecto al número de partículas se tiene que:

$$n = \frac{N_o(h+g)^3}{F} \quad (VIII.7)$$

Donde  $n \rightarrow \text{const} > 0$  cuando  $t \rightarrow \frac{1}{4} \ln 4$ . En éste caso la temperatura se escribe:

$$T = \frac{3Fg}{2Q(h+g)^3} - \frac{1}{F(h+g)^2} \quad (VIII.8)$$

Donde  $T \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow \frac{1}{4} \ln 4$ . Finalmente observese que la entropía no depende explícitamente del tiempo.

B. Evolución en la dirección radial.

Aquí se considera  $g(t)$  como una constante finita. Empleando las ecuaciones anteriores se observa que cuando  $r \rightarrow \pm\infty$  ( $\rho \rightarrow +\infty$ ,  $p \rightarrow +\infty$ ,  $n \rightarrow +\infty$  y  $T \rightarrow 0$ ). Por otra parte la entropía se escribe:

$$S = S_o + \frac{3h}{4N_o} \quad (VIII.9)$$

Donde  $S \rightarrow \pm\infty$  cuando  $r \rightarrow \pm\infty$ .

**Aspectos geométricos:**

Se discute ahora el comportamiento del radio de curvatura (ver definición en el capítulo VI). Para el caso de interés el radio de curvatura se escribe:

$$R = \frac{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{16} \exp(-2t) + \frac{1}{4} \exp(2t)\right]^{\frac{1}{2}}}{\exp(r) + \exp(-r) + \frac{2[4 \exp(4t) - 1]^{\frac{1}{2}}}{16 \cdot 4^{\frac{7}{8}} \exp(\frac{t}{2})} \sqrt{\left|\frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \exp(2t)}{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \exp(2t)}\right|}} \quad (VIII.10)$$

Donde  $R \rightarrow const > 0$  cuando  $t \rightarrow \frac{1}{4} \ln 4$  y  $R \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \pm\infty$  (singularidad puntual). La integral escrita a continuación permite determinar la longitud propia a lo largo de la dirección radial (ver capítulo VI):

$$l = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\exp(r) + \exp(-r) + const} \approx \{\arctan[\exp(r)]\}_{r_0}^r \quad (VIII.11)$$

Donde se considera a la función  $g(t)$  como una constante finita. Esta integral toma un valor finito cuando  $r \rightarrow \pm\infty$ ; lo cual muestra que tal singularidad se alcanza a una distancia propia finita a lo largo de la dirección radial a pesar de que la coordenada radial,  $r$ , sea infinita.

**Resumen:**

El comportamiento global en éste caso muestra los siguientes resultados:

A. Cuando  $t \rightarrow \frac{1}{4} \ln 4$  las variables termodinámicas  $(\rho, p, T) \rightarrow +\infty$ . Mientras que  $n$  y  $R$  tienden a valores constantes positivos.

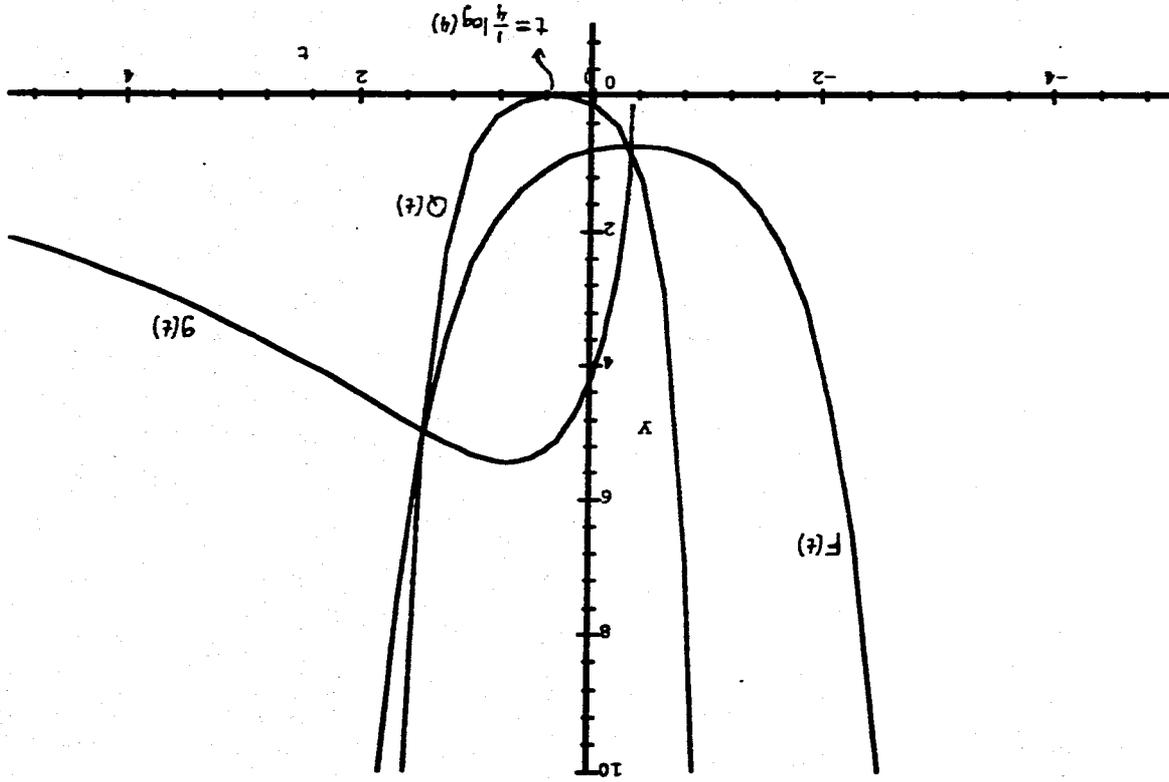
B. Cuando  $r \rightarrow \pm\infty$  las variables termodinámicas  $(\rho, p, n, S) \rightarrow +\infty$ . Mientras que  $T$  y  $R$  tienden a cero.

Tal situación no corresponde al comportamiento esperado de algún tipo de fluido ó materia conocida.

**CASO DOS:**

$$(c_1 = c_2 = 0, c_3 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1)$$

Caso I : Funciones  $Q(z)$ ,  $F(z)$ ,  $G(z)$



$$(\alpha = -1, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \delta = 3)$$

Funciones métricas:

Para éste caso la función  $h(r)$  se escribe como (ver capítulo V):

$$h(r) = \sin(r) \quad (VIII.12)$$

Donde  $r \in \langle -\infty, +\infty \rangle$  y  $h(r)$  es una función impar y acotada.

El comportamiento de las funciones  $F(t), g(t)$  y  $Q(t) = -4F^2 - 4F + \delta$  permitirá determinar la restricción del dominio y aquellos valores de  $t$  donde las variables de estado divergen (ver gráfica caso II después de la página 43). La función  $F(t)$  se escribe:

$$F(t) = -\frac{1}{2} + \sin(2t) \quad (VIII.13)$$

Donde  $F \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\frac{\pi}{12}$  y ocurre una singularidad del tipo VI.6a. Además se impone para el análisis la condición que  $F(t)$  sea mayor que cero de acuerdo con la definición para el radio de curvatura. La función  $g(t)$  se escribe para éste caso:

$$g(t) = -\cos(t) [1 - \tan(t)]^{\frac{1}{2}} [1 + \tan(t)]^{\frac{3}{2}} \quad (VIII.14)$$

La cual está definida en el intervalo  $t \in \langle -\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4} \rangle$ , (fuera de éste la función no es real), y ello representa una restricción del dominio de las funciones que dependen de  $t$ . La función  $Q(t)$  para éste caso se escribe:

$$Q(t) = 4 \cos^2(2t) \quad (VIII.15)$$

Donde  $Q \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \pm\frac{\pi}{4}$  y ocurre una singularidad del tipo VI.6b.

De lo anterior se concluye que el intervalo de definición de las funciones  $F(t), g(t)$  y  $Q(t)$  es en éste caso (ver gráfica caso II)  $t \in \langle \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \rangle$ .

Variabíes termodinámicas:

A. Evolución a lo largo del fluido (dirección temporal).

$$(\alpha = -1, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \delta = 3)$$

Funciones métricas:

Para éste caso la función  $h(r)$  se escribe como (ver capítulo V):

$$h(r) = \sin(r) \quad (VIII.12)$$

Donde  $r \in \langle -\infty, +\infty \rangle$  y  $h(r)$  es una función impar y acotada.

El comportamiento de las funciones  $F(t), g(t)$  y  $Q(t) = -4F^2 - 4F + \delta$  permitirá determinar la restricción del dominio y aquellos valores de  $t$  donde las variables de estado divergen (ver gráfica caso II después de la página 43). La función  $F(t)$  se escribe:

$$F(t) = -\frac{1}{2} + \sin(2t) \quad (VIII.13)$$

Donde  $F \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\frac{\pi}{12}$  y ocurre una singularidad del tipo VI.6a. Además se impone para el análisis la condición que  $F(t)$  sea mayor que cero de acuerdo con la definición para el radio de curvatura. La función  $g(t)$  se escribe para éste caso:

$$g(t) = -\cos(t) [1 - \tan(t)]^{\frac{1}{2}} [1 + \tan(t)]^{\frac{3}{2}} \quad (VIII.14)$$

La cual está definida en el intervalo  $t \in \langle -\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4} \rangle$ , (fuera de éste la función no es real), y ello representa una restricción del dominio de las funciones que dependen de  $t$ . La función  $Q(t)$  para éste caso se escribe:

$$Q(t) = 4 \cos^2(2t) \quad (VIII.15)$$

Donde  $Q \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \pm\frac{\pi}{4}$  y ocurre una singularidad del tipo VI.6b.

De lo anterior se concluye que el intervalo de definición de las funciones  $F(t), g(t)$  y  $Q(t)$  es en éste caso (ver gráfica caso II)  $t \in \langle \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \rangle$ .

Variables termodinámicas:

A. Evolución a lo largo del fluido (dirección temporal).

Aquí se considera a la función  $h(r)$  como una constante finita. La densidad de energía se escribe entonces:

$$\rho = \frac{3(h+g)^2}{4F^2} - 3 - 3g^2 - \frac{3F^2g}{Q} \quad (\text{VIII.16})$$

Donde  $\rho \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow +\frac{\pi}{12}$  y cuando  $t \rightarrow +\frac{\pi}{4}$ . La presión se escribe en éste caso:

$$p = \frac{3(h+g)^2}{4F^2} + 3 + 3g^2 + \frac{3F^2g}{Q} + \frac{3g(h+g)}{2Q} \quad (\text{VIII.17})$$

Donde si  $t \rightarrow +\frac{\pi}{12}$  entonces  $p \rightarrow +\infty$  y si  $t \rightarrow +\frac{\pi}{4}$  entonces  $p \rightarrow \pm\infty$ , dependiendo del valor de  $h(r)$ . El número de partículas se escribe:

$$n = \frac{N_o(h+g)^3}{F} \quad (\text{VIII.18})$$

Donde  $n \rightarrow \pm\infty$  cuando  $t \rightarrow +\frac{\pi}{12}$  dependiendo del valor de  $h(r)$  y  $n \rightarrow \text{const}$  dependiendo del valor de  $h(r)$ . La temperatura para éste caso tiene la forma:

$$T = \frac{-3Fg}{2Q(h+g)^3} - \frac{1}{F(h+g)^2} \quad (\text{VIII.19})$$

Donde  $T \rightarrow -\infty$  cuando  $t \rightarrow +\frac{\pi}{12}$  y cuando  $t \rightarrow +\frac{\pi}{4}$ .

#### B. Evolución en la dirección radial.

Aquí  $F(t)$ ,  $g(t)$  y  $Q(t)$  son funciones constantes finitas. El análisis de la función  $h(r)$  permite descubrir que en la dirección radial no existen singularidades ya que no existe valor de  $r$  donde se cumpla la ecuación VI.6c. Por lo tanto las variables termodinámicas ( $\rho$ ,  $p$ ,  $n$ ,  $T$ ) tienen valores constantes que dependen de las funciones  $F(t)$ ,  $g(t)$  y  $Q(t)$ . Para éste caso la entropía se escribe:

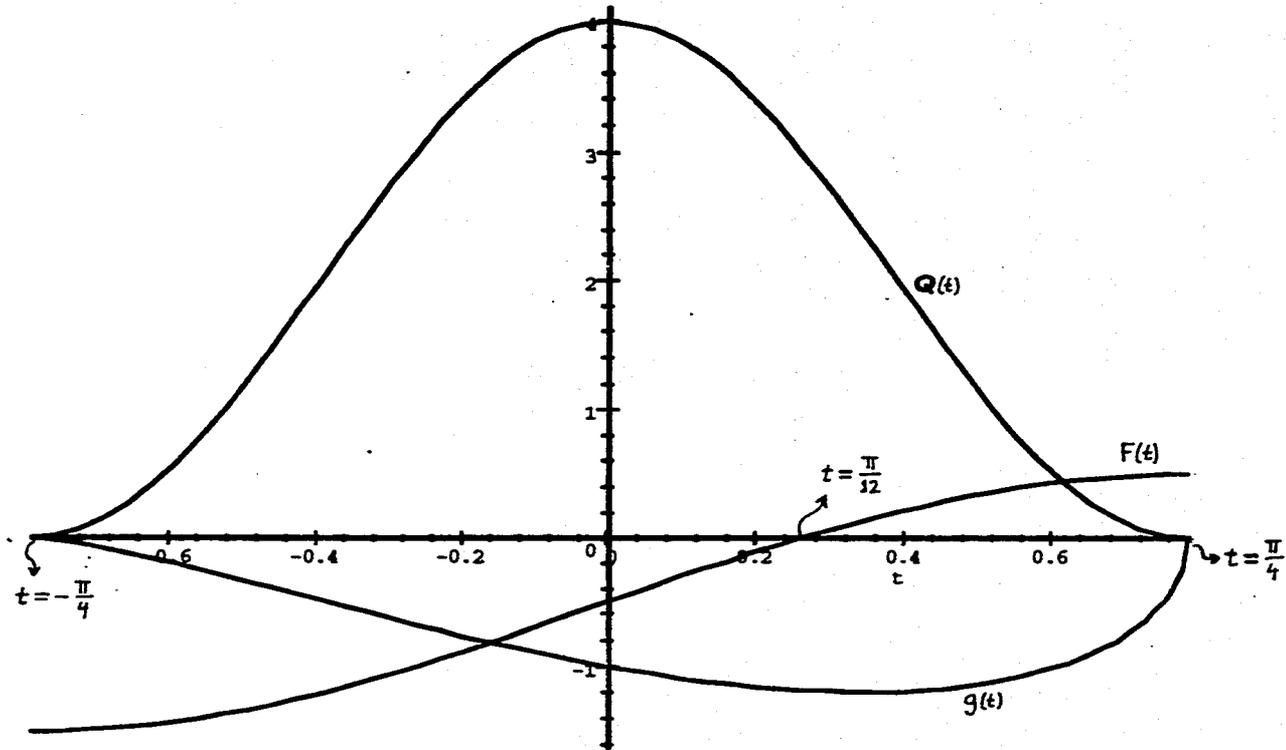
$$S = S_o + \frac{3h}{N_o} \quad (\text{VIII.20})$$

La cual tiene un comportamiento que depende de  $h(r)$  pero no diverge.

#### Aspectos geométricos:

Para el caso de interés el radio de curvatura tiene la forma:

Caso II: Funciones  $Q(t)$ ,  $F(t)$ ,  $g(t)$



$$R = \frac{[-\frac{1}{2} + \sin(2t)]^{\frac{1}{2}}}{\sin(r) - \cos(t) [1 - \tan(t)]^{\frac{1}{2}} [1 + \tan(t)]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{VIII.21})$$

Donde  $R \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\frac{\pi}{12}$  (singularidad puntual) y  $R \rightarrow \text{const}$ , que depende del valor de  $h(r)$ , cuando  $t \rightarrow +\frac{\pi}{4}$ .

La integral escrita a continuación permite evaluar la longitud propia a lo largo de la simetría conforme:

$$l = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sin(r) + \text{const}} \approx \{\ln[\tan(\frac{r}{2})]\}_{r_0}^r \quad (\text{VIII.22})$$

Donde  $g(t)$  es una función constante finita. Notese que ésta integral siempre converge dado que la función  $h(r)$  está definida para toda  $r \in \langle -\infty, +\infty \rangle$ .

Resúmen:

El comportamiento global de éste caso muestra los siguientes resultados:

A. Cuando  $t \rightarrow +\frac{\pi}{12}$  las variables termodinámicas  $(\rho, p) \rightarrow +\infty$ ,  $n \rightarrow \pm\infty$  y  $T \rightarrow -\infty$ . Mientras que  $R \rightarrow 0$  y  $S \rightarrow \text{const}$ .

B. Cuando  $t \rightarrow +\frac{\pi}{4}$  las variables termodinámicas  $\rho \rightarrow +\infty$ ,  $p \rightarrow \pm\infty$ ,  $n \rightarrow \text{const}$  y  $T \rightarrow -\infty$ . Mientras que  $R \rightarrow \text{const}$  y  $S \rightarrow \text{const}$ .

Tal comportamiento no es representativo de algún tipo de fluido o materia conocida.

CASO TRES:

$$(c_1 = c_2 = 0, c_3 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2)$$

$$(\alpha = 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \delta = 8)$$

Funciones métricas:

La expresión en éste caso para la función  $h(r)$  (ver capítulo V) tiene la forma:

$$h(r) = r^2 \quad (\text{VIII.23})$$

Donde  $h \rightarrow +\infty$  cuando  $r \rightarrow \pm\infty$  y ocurre una singularidad del tipo VI.6c. Se observa además que  $h(r) \geq 0$  en el intervalo  $r \in \langle -\infty, +\infty \rangle$ .

El comportamiento de las funciones  $F(t), g(t)$  y  $Q(t) = \delta - 4F$  mostrado en la gráfica para éste caso (ver página siguiente a la 47) permite conocer aquellos valores de  $t$  donde las variables de estado divergen y las posibles restricciones en el dominio de las funciones métricas. Así entonces:

$$F(t) = 1 + 2t - t^2 \quad (\text{VIII.24})$$

Donde  $F \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 1 - \sqrt{2}$  y ocurre una singularidad del tipo VI.6a. Recuerdese que ésta función debe ser mayor que cero según la definición para el radio de curvatura. Para éste caso la función  $g(t)$  se escribe:

$$g(t) = 8 \ln(2) + 4 \ln(2 - 2t) + 2t - t^2 \quad (\text{VIII.25})$$

Tal función no está definida para valores mayores que uno (donde ocurre una singularidad del tipo VI.6d) lo cual representa una restricción en el dominio de las funciones que dependen de  $t$ . La expresión para la función  $Q(t)$  es:

$$Q(t) = 4(1 - t)^2 \quad (\text{VIII.26})$$

Donde  $Q \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 1$  y ocurre una singularidad del tipo VI.6b. De acuerdo con lo anterior el dominio de las funciones  $F(t), g(t)$  y  $Q(t)$  se limita al intervalo  $\langle 1 - \sqrt{2}, 1 \rangle$ .

Variables termodinámicas:

A. Evolución a lo largo del fluido (dirección temporal).

En éste caso la densidad de energía se escribe:

$$\rho = \frac{2(h+g)^2}{F^2} - 3g + \frac{3F^2}{4Q} \quad (\text{VIII.27})$$

Donde  $\rho \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow 1 - \sqrt{2}$  y  $t \rightarrow 1$ . Con respecto a la presión se tiene:

$$p = \frac{2(h+g)^2}{F^2} + 3g - \frac{3F^2}{4Q} - \frac{2(h+g)}{Q} \quad (\text{VIII.28})$$

Donde  $p \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow 1 - \sqrt{2}$  y  $p \rightarrow -\infty$  cuando  $t \rightarrow 1$ . Para el número de partículas se escribe:

$$n = \frac{N_o(h+g)^3}{F} \quad (\text{VIII.29})$$

En donde  $n \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow 1 - \sqrt{2}$  y  $n \rightarrow -\infty$  cuando  $t \rightarrow 1$ . Para la temperatura se tiene la siguiente expresión:

$$T = -\frac{3F}{4Q(h+g)^3} - \frac{1}{F(h+g)^2} \quad (\text{VIII.30})$$

Donde  $T \rightarrow -\infty$  cuando  $t \rightarrow 1 - \sqrt{2}$  y  $t \rightarrow 1$ .

#### B. Evolución en la dirección radial.

Aquí se considera a  $F(t)$ ,  $g(t)$  y  $Q(t)$  funciones constantes finitas. De acuerdo con las expresiones escritas en éste caso para las variables termodinámicas se tiene: Cuando  $r \rightarrow \pm\infty$  las variables  $(\rho, p) \rightarrow +\infty$ ,  $n \rightarrow +\infty$  (dependiendo de los valores para  $g$  y  $N_o$ ) y además  $T \rightarrow 0$ . La entropía, por otra parte, tiene la forma:

$$S = S_o + \frac{8h}{N_o} \quad (\text{VIII.31})$$

Donde  $S \rightarrow +\infty$  cuando  $r \rightarrow \pm\infty$  y que depende del valor de  $N_o$ .

#### Aspectos geométricos:

El radio de curvatura para éste caso tiene la siguiente expresión:

$$R = \frac{[1 + 2t - t^2]^{\frac{1}{2}}}{r^2 + 8 \ln 2 + 4 \ln(2 - 2t) + 2t - t^2} \quad (\text{VIII.32})$$

El cual tiende a cero (singularidad puntual) cuando  $r \rightarrow \pm\infty$ ,  $t \rightarrow 1 - \sqrt{2}$  y  $t \rightarrow 1$ .

El evaluar la integral escrita a continuación:

$$l = \int_{r_o}^r \frac{dr}{r^2 + const} \approx \left\{ -\frac{1}{r} \right\}_{r_o}^r \quad (\text{VIII.33})$$

Donde  $g(t)$  es una constante finita. Muestra que la singularidad cuando  $r \rightarrow \pm\infty$  se alcanza en una longitud propia finita, (a lo largo de la simetría conforme), a pesar de que la coordenada radial,  $r$ , sea infinita.

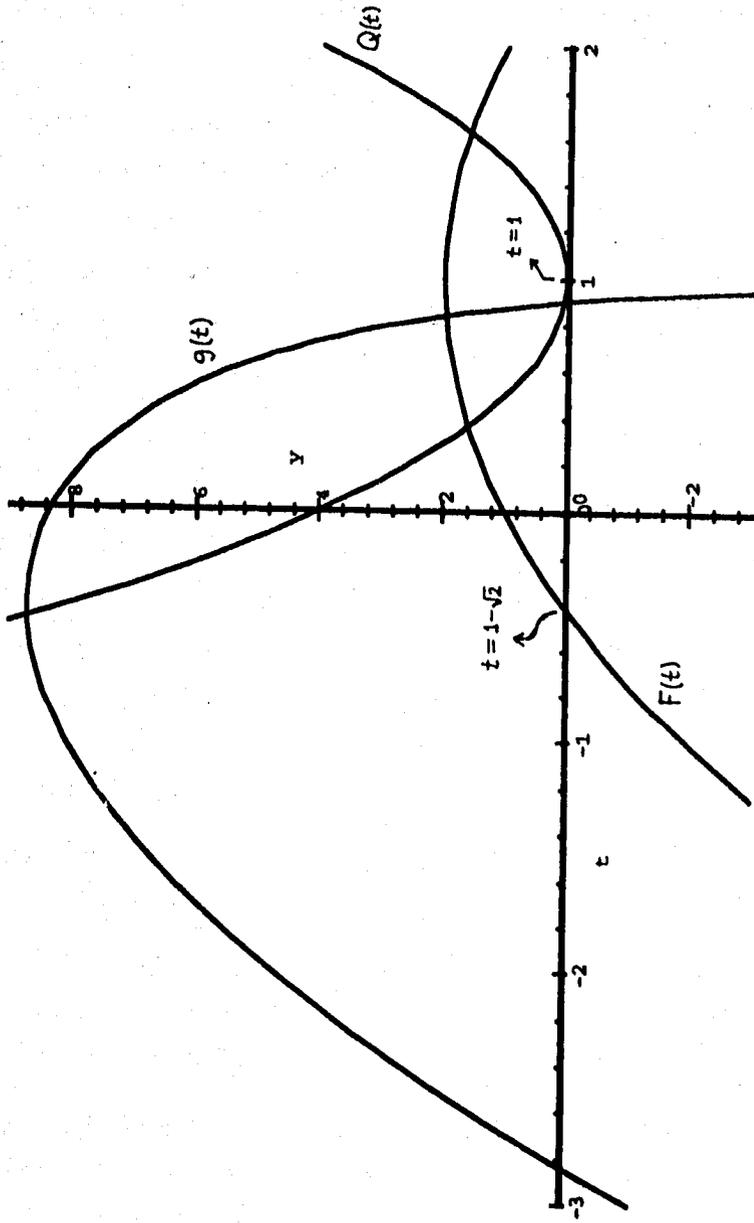
**Resumen:**

El comportamiento global para éste caso es el siguiente:

- A. Cuando  $t \rightarrow 1 - \sqrt{2}$  entonces ( $\rho \rightarrow +\infty, p \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty, T \rightarrow -\infty$  y  $R \rightarrow 0$ ).
- B. Cuando  $t \rightarrow 1$  entonces ( $\rho \rightarrow +\infty, p \rightarrow -\infty, n \rightarrow -\infty, T \rightarrow -\infty$  y  $R \rightarrow 0$ ).
- C. Cuando  $r \rightarrow \pm\infty$  entonces ( $\rho \rightarrow +\infty, p \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty, T \rightarrow 0, R \rightarrow 0$  y  $S \rightarrow +\infty$ ). Donde debe notarse que la entropía sólo depende de la variable  $r$ .

Nuevamente en éste caso el comportamiento de las variables termodinámicas en torno a las singularidades permite entender que los resultados encontrados no coinciden con la evolución de algún tipo de fluido o materia conocida.

Caso III: Funciones  $Q(t)$ ,  $F(t)$ ,  $g(t)$



## BIBLIOGRAFIA

- T .1 Coley,A.A. and Truper,B.O.J.(1990)  
Class.Quantum.Grav.7.2195-2214
- T .2 Eddington,A.A.(1923)  
The Mathematical Theory of Relativity  
Cambridge University Press
- T .3 Einstein,A.(1950)  
The Meaning of Relativity  
Princeton University Press
- T .4 Herrera,L and Ponce de León,J.(1985)  
J.Math.Phys.26 .778-784
- T .5 Hughston,L.P. and Tod,K.P.(1990)  
An Introduction to General Relativity  
Cambridge University Press
- T .6 Kramer,D.,Stephani,H.,Mac Callum,M.A.H. and Herlt,E.(1980)  
Exact Solutions of Einstein Field Equations  
Cambridge University Press
- T .7 Lake,K.(1983)  
Gen.Rel.Grav.15.357-361
- T .8 Landau,L.D. and Lifschitz,E.M.(1971)  
The Classical Theory of Fields  
Addison-Wesley.3ed.R.Mass.
- T .9 Lightman,A.P.,Press, W.H.,Price,R.H. and Teukolsky,S.A.(1975)  
Problem Book in Relativity and Gravitation  
Princeton University Press

**T.10 Misner, C.W., Thorne, K.S. and Wheeler, J.A. (1973)**

**Gravitation**

**W.H. Freeman & Co. San Francisco**

**T.11 Rindler, W. (1969)**

**Essential Relativity**

**Van Nostrand Reinhold Co. New York**

**T.12 Sussman, R.A. (1987)**

**J.Math.Phys.28.1118**

**T.13 Sussman, R.A. (1988)**

**J.Math.Phys.29.945**

**T.14 Sussman, R.A. (1991)**

**J.Math.Phys.32.223-230**

**T.15 Schutz, B. (1990)**

**A First Course in General Relativity**

**Cambridge University Press**

**T.16 Schutz, B. (1980)**

**Geometrical Methods of Mathematical Physics**

**Cambridge University Press**

**T.17 Spivak, M. (1979)**

**A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (vol 1-5)**

**Publisher Perish**

**T.18 Stephani, H. (1982)**

**General Relativity**

**Cambridge University Press**

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

T.19 Tolman,R.C.(1934)

Relativity,Thermodynamics and Cosmology

Clarendon Press London

T.20 Van de Bergh,N. and Wills,P.(1985)

Gen.Rel.Grav.17.223-243

T.21 Weinberg,S.(1972)

Gravitation and Cosmology

John Wiley. New York

## Apendice A

Escalar de Ricci , Ecuaciones de Einstein y Condición de Isotropía de Presiones para la métrica de las soluciones HPL en coordenadas isotérmicas.

Se cargan los programas "difalias" y "grtensor". El primero expresa derivadas parciales como subíndices, el segundo permite calcular componentes de tensores de curvatura.

```
> read `DeeDee:GRTensor:programs:difalias.m`;
```

---

```
> read `DeeDee:GRTensor:programs:grtensor.m`;
```

---

Se carga el archivo "hpl.txt" con la métrica HPL y se calcula el tensor mixto de Einstein.

```
> grload(hpl, `DeeDee:GRTensor:metricas:hpl.txt`);
```

*Default metric = hpl*

*For the hpl metric.*

*Coordinates*

$$x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi, x^4 = t$$

*The line element*

$$ds^2 = \frac{dr^2}{(g+h)^2} + \frac{F d\theta^2}{(g+h)^2} + \frac{F \sin(\theta)^2 d\phi^2}{(g+h)^2} - \frac{dt^2}{(g+h)^2}$$

---

```
> grcalc(MEinstein);
```

```
Calculated invmetric  
Calculated dlmetric  
Calculated Christoffell  
Calculated Chr2  
Calculated Ricci  
Calculated Ricciscalar  
Calculated Einstein  
Calculated MEinstein
```

*CPU Time = 2.016*

---

El escalar de Ricci es

> grdisplay (Ricci scalar);

For the hpl metric.

Ricci scalar

$$\text{scalarR} = \frac{1}{2} \left( 4Fh^2 - 12F_t F g_t g - 12F_t F g_t h + 8FF_{t,t} g h - F_t^2 h^2 + 4Fg^2 \right. \\ \left. + 8Fgh + 4FF_{t,t} g^2 + 4FF_{t,t} h^2 - 2F_t^2 g h - F_t^2 g^2 - 12g_{t,t} F^2 g \right. \\ \left. - 12g_{t,t} F^2 h + 12h_{r,r} F^2 g + 12h_{r,r} F^2 h - 24h_r^2 F^2 + 24g_t^2 F^2 \right) / F^2$$

Las ecuaciones de campo son  $G_{ab} = \kappa T_{ab}$ , para un fluido perfecto, por lo que tienen la forma  $G_4 = -\kappa\rho$ ,  $G_1 = G_2 = G_3 = \kappa p$

> kappa\*rho+MGhpl\_44=0;

$$\kappa\rho - \frac{1}{4} \left( 4Fh^2 - 8F_t F g_t g - 8F_t F g_t h + F_t^2 h^2 + 4Fg^2 + 8Fgh + 2F_t^2 g h \right. \\ \left. + F_t^2 g^2 + 8h_{r,r} F^2 g + 8h_{r,r} F^2 h - 12h_r^2 F^2 + 12g_t^2 F^2 \right) / F^2 = 0$$

> kappa\*p-MGhpl\_11=0;

$$\kappa p + \frac{1}{4} \left( 4Fh^2 - 8F_t F g_t g - 8F_t F g_t h + 8FF_{t,t} g h - F_t^2 h^2 + 4Fg^2 + 8Fgh \right. \\ \left. + 4FF_{t,t} g^2 + 4FF_{t,t} h^2 - 2F_t^2 g h - F_t^2 g^2 - 8g_{t,t} F^2 g - 8g_{t,t} F^2 h \right. \\ \left. - 12h_r^2 F^2 + 12g_t^2 F^2 \right) / F^2 = 0$$

> kappa\*p-MGhpl\_22=0;

$$\kappa p + \frac{1}{4} \left( -4F_t F g_t g - 4F_t F g_t h + 4FF_{t,t} g h - F_t^2 h^2 + 2FF_{t,t} g^2 + 2FF_{t,t} h^2 \right. \\ \left. - 2F_t^2 g h - F_t^2 g^2 - 8g_{t,t} F^2 g - 8g_{t,t} F^2 h + 8h_{r,r} F^2 g + 8h_{r,r} F^2 h \right. \\ \left. - 12h_r^2 F^2 + 12g_t^2 F^2 \right) / F^2 = 0$$

> kappa\*p-MGhpl\_33=0;

$$\kappa p + \frac{1}{4} \left( -4F_t F g_t g - 4F_t F g_t h + 4FF_{t,t} g h - F_t^2 h^2 + 2FF_{t,t} g^2 + 2FF_{t,t} h^2 - 2F_t^2 g h - F_t^2 g^2 - 8g_{t,t} F^2 g - 8g_{t,t} F^2 h + 8h_{r,r} F^2 g + 8h_{r,r} F^2 h - 12h_r^2 F^2 + 12g_t^2 F^2 \right) / F^2 = 0$$

Nótese como  $G_{22}=G_{33}$ , pero  $G_{11}$  es diferente de  $G_{22}$ . Como el fluido perfecto exige que  $G_{11}=G_{22}=\kappa p$ , entonces las funciones métricas deben satisfacer la restricción  $G_{11}-G_{22}=0$ .

Dicha restricción es la Condición de Isotropía de Presiones (CIP) la cual se calcula y simplifica a continuación.

> numer(simplify(MGhpl\_11-MGhpl\_22));

$$-2F_{t,t} g h + 2g_t F_t h - 2g^2 - F_{t,t} h^2 - F_{t,t} g^2 - 4g h + 2g_t F_t g - 2h^2 + 4h_{r,r} F g + 4h_{r,r} F g$$

> collect(" , [h[r,r],F[t,t]], factor);

$$4F(g+h)h_{r,r} - (g+h)^2 F_{t,t} + 2(g+h)(-h-g+F_t g_t)$$

> subs(g+h=J, " );

$$4FJh_{r,r} - J^2 F_{t,t} + 2J(-h-g+F_t g_t)$$

> expand("/J);

$$4Fh_{r,r} - JF_{t,t} - 2h - 2g + 2F_t g_t$$

> subs(J=g+h, " );

$$4Fh_{r,r} - (g+h)F_{t,t} - 2h - 2g + 2F_t g_t$$

La expresión anterior es la forma simplificada de la CIP

> CIP:= " ;

$$CIP := 4Fh_{r,r} - (g+h)F_{t,t} - 2h - 2g + 2F_t g_t$$

---

La integración de la CIP es mas directa si consideramos su derivada con respecto a "r"

```
> collect(diff(CIP,r), h[r]);
```

$$(-F_{t,t} - 2)h_r + 4Fh_{r,r,r}$$

---

```
> CIP_r:=collect(expand('/(F*h[r])), F);
```

$$CIP_r := 4 \frac{h_{r,r,r}}{h_r} + \frac{-F_{t,t} - 2}{F}$$

---

Debido a que el primer término depende solo de "r" y el segundo solo de "t", cada término debe ser igual por separado a una constante. Por lo tanto, CIP\_r se decompone en dos ecuaciones diferenciales acopladas por la constante de separación. Esto conduce a tres casos particulares, según el signo (positivo, negativo, o cero) de la constante de separación. Estos casos serán examinados en el Apendice B.

```
> save scalarRhpl_, MGhpl_44, MGhpl_11, CIP, CIP_r, 'hpl.m';
```

---

```
>
```

## Apéndice B

Caso particular correspondiente a valor positivo de la constante de separación de la CIP. Sea dicha constante:  $a_0^2 > 0$ .

Se cargan: el programa "difalias" y el archivo binario "hpl.m" que contiene los resultados calculados en el Apéndice A.

```
> read `DeeDee:GRTensor:programs:difalias.m`;
```

---

```
> DifAlias(r,h): DifAlias(t, [F,g]);
```

---

```
> read `DeeDee:Artículos:Salvador:hpl.m`;
```

---

La ecuación a resolver por separación es CIP\_r

```
> CIP_r;
```

$$4 \frac{h_{r,r,r}}{h_r} + \frac{-F_{t,t}}{F} - 2$$

---

la cual se separa en dos ecuaciones diferenciales acopladas por la constante de separación.

```
> EcsDifs:=[op(1,CIP_r)*h[r]/4-a0^2*h[r], -F*op(2,CIP_r)-4*a0^2*F];
```

$$EcsDifs := [h_{r,r,r} - a_0^2 h_r, F_{t,t} + 2 - 4 a_0^2 F]$$

---

```
> Sol_h:=dsolve(EcsDifs[1], h);
```

$$Sol_h := h = _C1 + _C2 e^{(r a_0)} + _C3 e^{(-r a_0)}$$

---

```
> Sol_F:=dsolve(EcsDifs[2], F);
```

$$Sol_F := F = \frac{1}{2} \frac{1}{a_0^2} + _C1 e^{(-2 a_0 t)} + _C2 e^{(2 a_0 t)}$$

---

La forma de las funciones h y F es:

> h1:=subs(\_C1=c1, \_C2=c2, \_C3=c3, rhs(Sol\_h));

$$h1 := c1 + c2 e^{(r a0)} + c3 e^{(-r a0)}$$

---

> F1:=subs(\_C1=b1, \_C2=b2, rhs(Sol\_F));

$$F1 := \frac{1}{2} \frac{1}{a0^2} + b1 e^{(-2 a0 t)} + b2 e^{(2 a0 t)}$$

---

Para obtener la función g, se sustituye h1 y F1 en CIP y se procede a simplificar el resultado

> simplify(eval(subs(F=F1, h=h1, CIP)));

$$\begin{aligned} & -4 a0^2 g b1 e^{(-2 a0 t)} - 4 a0^2 g b2 e^{(2 a0 t)} - 4 a0^2 c1 b1 e^{(-2 a0 t)} \\ & - 4 a0^2 c1 b2 e^{(2 a0 t)} - 2 c1 - 2 g - 4 a0 g b1 e^{(-2 a0 t)} \\ & + 4 a0 g b2 e^{(2 a0 t)} \end{aligned}$$

---

> collect(expand(\* / 2), [b1, b2, a0], factor);

$$\begin{aligned} & \left( -2 \frac{(c1 + g) a0^2}{(e^{(a0 t)})^2} - 2 \frac{a0 g t}{(e^{(a0 t)})^2} \right) b1 \\ & + \left( -2 (e^{(a0 t)})^2 (c1 + g) a0^2 + 2 a0 g t (e^{(a0 t)})^2 \right) b2 - c1 - g \end{aligned}$$

---

> DifAlias(t, g0):

---

> siderel:=(c1+g=g0);

$$siderel := \{c1 + g = g0\}$$

---

> simplify(" ", siderel);

$$\left( -2 a0 \left( \frac{\partial}{\partial t} (-c1 + g0) \right) b1 + 2 (e^{(a0 t)})^4 a0 b2 \left( \frac{\partial}{\partial t} (-c1 + g0) \right) \right)$$

$$+ \left( -2 a_0^2 b_1 - 2 (e^{(a_0 t)})^4 a_0^2 b_2 - (e^{(a_0 t)})^2 \right) g_0 \Big/ (e^{(a_0 t)})^2$$

> eval(subs(g0=c1+g, diff(-c1+g0,t)=g[t], "));

$$\left( -2 a_0 g_t b_1 + 2 (e^{(a_0 t)})^4 a_0 b_2 g_t \right. \\ \left. + \left( -2 a_0^2 b_1 - 2 (e^{(a_0 t)})^4 a_0^2 b_2 - (e^{(a_0 t)})^2 \right) (c_1 + g) \right) \Big/ (e^{(a_0 t)})^2$$

> subs(g+c1=G0, " );

$$\left( -2 a_0 g_t b_1 + 2 (e^{(a_0 t)})^4 a_0 b_2 g_t \right. \\ \left. + \left( -2 a_0^2 b_1 - 2 (e^{(a_0 t)})^4 a_0^2 b_2 - (e^{(a_0 t)})^2 \right) G_0 \right) \Big/ (e^{(a_0 t)})^2$$

> collect(" , [g[t],G0], factor);

$$-2 \frac{a_0 (b_1 - (e^{(a_0 t)})^4 b_2) g_t}{(e^{(a_0 t)})^2} - \frac{(2 a_0^2 b_1 + 2 (e^{(a_0 t)})^4 a_0^2 b_2 + (e^{(a_0 t)})^2) G_0}{(e^{(a_0 t)})^2}$$

La ecuacion diferencial para g viene dada por

> EcD\_g1:=subs(G0=c1+g, " );

$$EcD\_g1 := -2 \frac{a_0 (b_1 - (e^{(a_0 t)})^4 b_2) g_t}{(e^{(a_0 t)})^2} \\ - \frac{(2 a_0^2 b_1 + 2 (e^{(a_0 t)})^4 a_0^2 b_2 + (e^{(a_0 t)})^2) (c_1 + g)}{(e^{(a_0 t)})^2}$$

Esta es una ecuacion diferencial de primer orden en g.  
Para transformarla en una cuadratura e integrarla es necesario

separar la parte que contiene a g y su derivada. Esto se hace resolviendo algebraicamente EcD\_g1 en términos de g[t]

> solve(subs(g+c1=G0, EcD\_g1), g[t]);

$$\frac{-2 \frac{G0 a0^2 b1}{(e^{(a0 t)})^2} - 2 (e^{(a0 t)})^2 G0 a0^2 b2 - G0}{-2 \frac{a0 b1}{(e^{(a0 t)})^2} + 2 a0 (e^{(a0 t)})^2 b2}$$

Se eliminan los términos que contienen c1+g=G0, obteniendo una expresión, G1\_t, que es igual a 2\*a0\*g[t]/(c1+g)

> G1\_t:=simplify(collect(expand(2\*a0\*\*/G0), a0, normal));

$$G1_t := -\frac{2 a0^2 b1 + 2 a0^2 e^{(4 a0 t)} b2 + e^{(2 a0 t)}}{b1 - e^{(4 a0 t)} b2}$$

La integral de esta expresion sera igual a la integral de 2\*a0\*g[t]/(c1+g), es decir: 2a0\*log(c1+g)

> int(G1\_t,t);

$$\ln\left(-b1 + (e^{(a0 t)})^4 b2\right) a0 - 2 a0 \ln(e^{(a0 t)}) - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{b2 (e^{(a0 t)})^2}{\sqrt{b1 b2}}\right)}{a0 \sqrt{b1 b2}}$$

> convert(\*, ln);

$$\ln\left(-b1 + (e^{(a0 t)})^4 b2\right) a0 - 2 a0 \ln(e^{(a0 t)}) - \frac{1}{2} \frac{\ln\left(\frac{b2 (e^{(a0 t)})^2}{\sqrt{b1 b2}} + 1\right) - \ln\left(1 - \frac{b2 (e^{(a0 t)})^2}{\sqrt{b1 b2}}\right)}{a0 \sqrt{b1 b2}}$$

> combine(\*, ln);

$$\ln(-b1 + (e^{(a0 t)})^4 b2) a0 + a0 \ln\left(\frac{1}{(e^{(a0 t)})^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{\frac{b2 (e^{(a0 t)})^2}{\sqrt{b1 b2}} + 1} \cdot \frac{1 - \frac{b2 (e^{(a0 t)})^2}{\sqrt{b1 b2}}}{a0 \sqrt{b1 b2}}}\right)$$

---

> G1:=\*:

La funcion g viene dada por  $g = -c1 + \exp(G1/(2*a0))$ .

Es útil declarar que los coeficientes a0, b1, b2 son reales positivos.

> assume(a0, real); additionally(a>0);

> assume(b1, real); additionally(b1>0);

> assume(b2, real); additionally(b2>0);

> simplify(exp(G1/(2\*a0)), power);

$$e^{\left(\frac{1}{4} \left( 2 \ln(-b1 + e^{(4 a0 t)} b2) a0 - 2 \sqrt{b1} \sqrt{b2} \right) + 2 a0 \ln(e^{(-2 a0 t)}) \sqrt{b1} \sqrt{b2} - \ln\left(\frac{b2 e^{(2 a0 t)} + \sqrt{b1} \sqrt{b2}}{\sqrt{b1} \sqrt{b2} - b2 e^{(2 a0 t)}}\right)\right)} / (a0^2 \sqrt{b1} \sqrt{b2})$$

> combine(\*, ln);

$$e^{\left(\frac{1}{4} \left( a0^2 \sqrt{b1} \sqrt{b2} \ln((-b1 + e^{(4 a0 t)} b2)^2) \right)\right)}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ a_0^{-2} \sqrt{b_1} \sqrt{b_2} \ln \left( e^{(-2 a_0^{-1} t)} \right)^2 \right) + \ln \left( \frac{\sqrt{b_1} \sqrt{b_2} - b_2 e^{(2 a_0^{-1} t)}}{b_2 e^{(2 a_0^{-1} t)} + \sqrt{b_1} \sqrt{b_2}} \right) \\ &\left. \right) / (a_0^{-2} \sqrt{b_1} \sqrt{b_2}) \end{aligned}$$


---

> g1:=-c1+";

$$\left. \begin{aligned} &g1 := -c1 + e \left( \frac{1}{4} \left( a_0^{-2} \sqrt{b_1} \sqrt{b_2} \ln \left( (-b_1 + e^{(4 a_0^{-1} t)} b_2) \right)^2 \right) \right. \\ &\left. + a_0^{-2} \sqrt{b_1} \sqrt{b_2} \ln \left( e^{(-2 a_0^{-1} t)} \right)^2 \right) + \ln \left( \frac{\sqrt{b_1} \sqrt{b_2} - b_2 e^{(2 a_0^{-1} t)}}{b_2 e^{(2 a_0^{-1} t)} + \sqrt{b_1} \sqrt{b_2}} \right) \\ &\left. \right) / (a_0^{-2} \sqrt{b_1} \sqrt{b_2}) \end{aligned}$$


---

Por último, es necesario comprobar que las funciones, F,g,h  
obtenidas (F1,g1,h1) satisfacen la CIP

> simplify(eval(subs(F=F1, g=g1, h=h1, CIP)));

0

---

> save F1, g1, h1, 'hpl1.m';

---

>

### Apéndice C

Caso particular correspondiente a valor positivo de la constante de separación de la CIP. Sea dicha constante:  $a_0^2 < 0$ .

Se cargan: el programa "difalias" y el archivo binario "hpl.m" que contiene los resultados calculados en el Apéndice A.

```
> read `DeeDee:GRTensor:programs:difalias.m`;
```

---

```
> DifAlias(r,h): DifAlias(t, [F,g]);
```

---

```
> read `DeeDee:Artículos:Salvador:hpl.m`;
```

La ecuación a resolver por separación es CIP\_r

```
> CIP_r;
```

$$4 \frac{h_{r,r,r,r}}{h} + \frac{-F_{t,t}^{-2}}{F}$$

---

la cual se separa en dos ecuaciones diferenciales acopladas por la constante de separación.

```
> EcsDifs:=[op(1,CIP_r)*h[r]/4+a0^2*h[r], -  
F*op(2,CIP_r)+4*a0^2*F];
```

$$EcsDifs := \left[ h_{r,r,r,r} + a_0^2 h_{r,F,t,t} + 2 + 4 a_0^2 F \right]$$

---

```
> Sol_h:=dsolve(EcsDifs[1], h);
```

$$Sol_h := h = \_C1 + \_C2 \cos(a_0 r) + \_C3 \sin(a_0 r)$$

---

```
> Sol_F:=dsolve(EcsDifs[2], F);
```

$$Sol_F := F = -\frac{1}{2} \frac{1}{a_0^2} + \_C1 \cos(2 a_0 t) + \_C2 \sin(2 a_0 t)$$

La forma de las funciones h y F es:

```
> h2:=subs(_C1=c1, _C2=c2, _C3=c3, rhs(Sol_h));
      h2 := c1 + c2 cos(a0 r) + c3 sin(a0 r)
```

```
> F2:=subs(_C1=b1, _C2=b2, rhs(Sol_F));
      F2 := -\frac{1}{2}\frac{1}{a0^2} + b1 cos(2 a0 t) + b2 sin(2 a0 t)
```

Para obtener la funcion g, se sustituye h1 y F1 en CIP y se procede a simplificar el resultado

```
> simplify(eval(subs(F=F2, h=h2, CIP)));
      4 a0^2 g b1 cos(2 a0 t) + 4 a0^2 g b2 sin(2 a0 t) + 4 a0^2 c1 b1 cos(2 a0 t)
      + 4 a0^2 c1 b2 sin(2 a0 t) - 2 c1 - 2 g - 4 a0 g b1 sin(2 a0 t)
      + 4 a0 g b2 cos(2 a0 t)

> collect(expand("/2), [b1,b2,a0], factor);
      (2 (2 cos(a0 t)^2 - 1)(g + c1) a0^2 - 4 a0 g sin(a0 t) cos(a0 t)) b1
      + (4 sin(a0 t) cos(a0 t)(g + c1) a0^2 + 2 g (2 cos(a0 t)^2 - 1) a0) b2 - c1 - g
```

```
> DifAlias(t,g0):
```

```
> siderel:={c1+g=g0};
      siderel := (g + c1 = g0)
```

```
> simplify(" ", siderel);
      -8 a0 \left(\frac{\partial}{\partial t}(-c1 + g0)\right) b1 sin(a0 t) cos(a0 t) + 8 a0 \left(\frac{\partial}{\partial t}(-c1 + g0)\right) b2 cos(a0 t)^2
      - 4 a0 \left(\frac{\partial}{\partial t}(-c1 + g0)\right) b2
      + (8 a0^2 b1 cos(a0 t)^2 - 4 a0^2 b1 + 8 a0^2 b2 sin(a0 t) cos(a0 t) - 2) g0
```

```
> eval(subs(g0=c1+g, diff(-c1+g0,t)=g[t], "));
      -8 a0 g b1 sin(a0 t) cos(a0 t) + 8 a0 g b2 cos(a0 t)^2 - 4 a0 g b2
```

$$\frac{+(8 a0^2 b1 \cos(a0 t)^2 - 4 a0^2 b1 + 8 a0^2 b2 \sin(a0 t) \cos(a0 t) - 2)(g + c1)}{}$$

> subs(g+c1=G0, " );

$$\frac{-8 a0 g_1 b1 \sin(a0 t) \cos(a0 t) + 8 a0 g_1 b2 \cos(a0 t)^2 - 4 a0 g_1 b2 + (8 a0^2 b1 \cos(a0 t)^2 - 4 a0^2 b1 + 8 a0^2 b2 \sin(a0 t) \cos(a0 t) - 2)G0}{}$$

> collect(" , [g[t],G0], factor);

$$\frac{4 a0 (-2 b1 \sin(a0 t) \cos(a0 t) + 2 b2 \cos(a0 t)^2 - b2) g_1 + (8 a0^2 b1 \cos(a0 t)^2 - 4 a0^2 b1 + 8 a0^2 b2 \sin(a0 t) \cos(a0 t) - 2)G0}{}$$

La ecuacion diferencial para g viene dada por

> EcD\_g2:=subs(G0=c1+g, " );

$$\frac{EcD_g2 := 4 a0 (-2 b1 \sin(a0 t) \cos(a0 t) + 2 b2 \cos(a0 t)^2 - b2) g_1 + (8 a0^2 b1 \cos(a0 t)^2 - 4 a0^2 b1 + 8 a0^2 b2 \sin(a0 t) \cos(a0 t) - 2)(g + c1)}{}$$

Esta es una ecuacion diferencial de primer orden en g.

Para transformarla en una cuadratura e integrarla es necesario separar la parte que contiene a g y su derivada. Esto se hace resolviendo algebraicamente EcD\_g1 en términos de g[t]

> solve(subs(g+c1=G0, EcD\_g2), g[t]);

$$\frac{-(8 G0 a0^2 b1 \cos(a0 t)^2 - 4 G0 a0^2 b1 + 8 G0 a0^2 b2 \sin(a0 t) \cos(a0 t) - 2 G0)}{(-8 a0 b1 \sin(a0 t) \cos(a0 t) + 8 a0 b2 \cos(a0 t)^2 - 4 a0 b2)}$$

Se eliminan los términos que contienen c1+g=G0, obteniendo una expresión, G1\_t, que es igual a  $2*a0*g[t]/(c1+g)$

> G2\_t:=simplify(collect(expand(2\*a0\*\*/G0), a0, normal));

$$G2_t := -\frac{4 a0^2 b1 \cos(a0 t)^2 - 2 a0^2 b1 + 4 a0^2 b2 \sin(a0 t) \cos(a0 t) - 1}{-2 b1 \sin(a0 t) \cos(a0 t) + 2 b2 \cos(a0 t)^2 - b2}$$

La integral de esta expresion sera igual a la integral de  $2*a0*g[t]/(c1+g)$ , es decir:  $2a0*log(c1+g)$

> int(G2\_t,t);

$$\begin{aligned}
& - \frac{a0 b1^2 \ln(\tan(a0 t)^2 + 1)}{b2^2 + b1^2} + \frac{a0 b1^2 \ln(2 b1 \tan(a0 t) + b2 \tan(a0 t)^2 - b2)}{b2^2 + b1^2} \\
& - \frac{a0 b2^2 \ln(\tan(a0 t)^2 + 1)}{b2^2 + b1^2} + \frac{a0 b2^2 \ln(2 b1 \tan(a0 t) + b2 \tan(a0 t)^2 - b2)}{b2^2 + b1^2} \\
& + \frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2} \frac{2 b1 + 2 b2 \tan(a0 t)}{\sqrt{b2^2 + b1^2}}\right)}{\sqrt{b2^2 + b1^2} a0}
\end{aligned}$$

> convert(", ln);

$$\begin{aligned}
& - \frac{a0 b1^2 \ln(\tan(a0 t)^2 + 1)}{b2^2 + b1^2} + \frac{a0 b1^2 \ln(2 b1 \tan(a0 t) + b2 \tan(a0 t)^2 - b2)}{b2^2 + b1^2} \\
& - \frac{a0 b2^2 \ln(\tan(a0 t)^2 + 1)}{b2^2 + b1^2} + \frac{a0 b2^2 \ln(2 b1 \tan(a0 t) + b2 \tan(a0 t)^2 - b2)}{b2^2 + b1^2} \\
& + \frac{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2} \frac{2 b1 + 2 b2 \tan(a0 t)}{\sqrt{b2^2 + b1^2}} + 1\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{2} \frac{2 b1 + 2 b2 \tan(a0 t)}{\sqrt{b2^2 + b1^2}}\right)}{\sqrt{b2^2 + b1^2} a0}
\end{aligned}$$

> combine(", ln);

$$\begin{aligned}
& \frac{a0 b1^2 \ln\left(\frac{1}{\tan(a0 t)^2 + 1}\right)}{b2^2 + b1^2} + \frac{a0 b1^2 \ln(2 b1 \tan(a0 t) + b2 \tan(a0 t)^2 - b2)}{b2^2 + b1^2} \\
& + \frac{a0 b2^2 \ln\left(\frac{1}{\tan(a0 t)^2 + 1}\right)}{b2^2 + b1^2} + \frac{a0 b2^2 \ln(2 b1 \tan(a0 t) + b2 \tan(a0 t)^2 - b2)}{b2^2 + b1^2} \\
& + \frac{\ln\left(\frac{\frac{1}{2} \frac{2 b1 + 2 b2 \tan(a0 t)}{\sqrt{b2^2 + b1^2}} + 1}{1 - \frac{1}{2} \frac{2 b1 + 2 b2 \tan(a0 t)}{\sqrt{b2^2 + b1^2}}}\right)}{\sqrt{b2^2 + b1^2} a0}
\end{aligned}$$

> G2 := ":

La funcion g viene dada por  $g = -c1 + \exp(G2/(2*a0))$ .

Es útil declarar que los coeficientes a0, b1, b2 son reales positivos.

> assume(a0, real); additionally(a0>0);

> assume(b1, real); additionally(b1>0);

> assume(b2, real); additionally(b2>0);

> simplify(exp(G2/(2\*a0)), power);

$$e^{\left(\frac{1}{2} \left( a0 \sim 2 \ln \left( \frac{1}{\tan(a0 \sim t)^2 + 1} \right) \sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2} \right. \right.}$$

$$+ a0 \sim 2 \ln(2 b1 \sim \tan(a0 \sim t) + b2 \sim \tan(a0 \sim t)^2 - b2 \sim) \sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2}$$

$$\left. \left. + \ln \left( \frac{\sqrt{b1 \sim + b2 \sim \tan(a0 \sim t) + \sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2}}}{\sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2} - b1 \sim - b2 \sim \tan(a0 \sim t)} \right) \right) / (\sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2} a0 \sim 2) \right)$$

> combine(\*, ln);

$$e^{\left(\frac{1}{2} \left( a0 \sim 2 \ln \left( \frac{1}{\tan(a0 \sim t)^2 + 1} \right) \sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2} \right. \right.}$$

$$+ a0 \sim 2 \ln(2 b1 \sim \tan(a0 \sim t) + b2 \sim \tan(a0 \sim t)^2 - b2 \sim) \sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2}$$

$$\left. \left. + \ln \left( \frac{\sqrt{b1 \sim + b2 \sim \tan(a0 \sim t) + \sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2}}}{\sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2} - b1 \sim - b2 \sim \tan(a0 \sim t)} \right) \right) / (\sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2} a0 \sim 2) \right)$$

> g2:=-c1+\*;

$$g2 := -c1 + e^{\left(\frac{1}{2} \left( a0 \sim 2 \ln \left( \frac{1}{\tan(a0 \sim t)^2 + 1} \right) \sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2} \right. \right.}$$

$$+ a0 \sim 2 \ln(2 b1 \sim \tan(a0 \sim t) + b2 \sim \tan(a0 \sim t)^2 - b2 \sim) \sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2}$$

$$\left. \left. + \ln \left( \frac{\sqrt{b1 \sim + b2 \sim \tan(a0 \sim t) + \sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2}}}{\sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2} - b1 \sim - b2 \sim \tan(a0 \sim t)} \right) \right) / (\sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2} a0 \sim 2) \right)$$

Por último, es necesario comprobar que las funciones, F,g,h  
obtenidas (F2,g2,h2) satisfacen la CIP

> simplify(eval(subs(F=F2, g=g2, h=h2, CIP)));

$$2e^{\left(\frac{1}{4} (2 a0 \sim 2 \sqrt{b2 \sim 2 + b1 \sim 2} \right)}$$

$$\begin{aligned}
& \ln(2 b1 \sim \sin(a0 \sim t) \cos(a0 \sim t) + b2 \sim - 2 b2 \sim \cos(a0 \sim t)^2) \\
& + \ln(b1 \sim \cos(a0 \sim t) + b2 \sim \sin(a0 \sim t) + \sqrt{b2 \sim^2 + b1 \sim^2} \cos(a0 \sim t)) \\
& - \ln(\sqrt{b2 \sim^2 + b1 \sim^2} \cos(a0 \sim t) - b1 \sim \cos(a0 \sim t) - b2 \sim \sin(a0 \sim t)) / (a0 \sim^2 \\
& \sqrt{b2 \sim^2 + b1 \sim^2}) \left( 4 \cos(a0 \sim t)^2 a0 \sim^2 \sin(2 a0 \sim t) b2 \sim^2 - 2 b2 \sim \cos(a0 \sim t)^2 \right. \\
& + 4 \cos(a0 \sim t)^2 a0 \sim^2 \sin(2 a0 \sim t) b1 \sim^2 \\
& - 4 \cos(a0 \sim t) \cos(2 a0 \sim t) a0 \sim^2 \sin(a0 \sim t) b2 \sim^2 \\
& - 4 \cos(a0 \sim t) \cos(2 a0 \sim t) a0 \sim^2 \sin(a0 \sim t) b1 \sim^2 \\
& + 2 b1 \sim \sin(a0 \sim t) \cos(a0 \sim t) - 2 a0 \sim^2 \sin(2 a0 \sim t) b2 \sim^2 + b2 \sim \cos(2 a0 \sim t) \\
& + b2 \sim - b1 \sim \sin(2 a0 \sim t) - 2 a0 \sim^2 \sin(2 a0 \sim t) b1 \sim^2 \left. \right) / ( \\
& - 2 b1 \sim \sin(a0 \sim t) \cos(a0 \sim t) - b2 \sim + 2 b2 \sim \cos(a0 \sim t)^2)
\end{aligned}$$

---

> simplify(", trig);

$$2e \left( \frac{1}{4} (2 a0 \sim^2 \sqrt{b2 \sim^2 + b1 \sim^2} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \ln(2 b1 \sim \sin(a0 \sim t) \cos(a0 \sim t) + b2 \sim - 2 b2 \sim \cos(a0 \sim t)^2) \\
& + \ln(b1 \sim \cos(a0 \sim t) + b2 \sim \sin(a0 \sim t) + \sqrt{b2 \sim^2 + b1 \sim^2} \cos(a0 \sim t)) \\
& - \ln(\sqrt{b2 \sim^2 + b1 \sim^2} \cos(a0 \sim t) - b1 \sim \cos(a0 \sim t) - b2 \sim \sin(a0 \sim t)) / (a0 \sim^2 \\
& \sqrt{b2 \sim^2 + b1 \sim^2}) \left( 4 \cos(a0 \sim t)^2 a0 \sim^2 \sin(2 a0 \sim t) b2 \sim^2 - 2 b2 \sim \cos(a0 \sim t)^2 \right. \\
& + 4 \cos(a0 \sim t)^2 a0 \sim^2 \sin(2 a0 \sim t) b1 \sim^2 \\
& - 4 \cos(a0 \sim t) \cos(2 a0 \sim t) a0 \sim^2 \sin(a0 \sim t) b2 \sim^2 \\
& - 4 \cos(a0 \sim t) \cos(2 a0 \sim t) a0 \sim^2 \sin(a0 \sim t) b1 \sim^2 \\
& + 2 b1 \sim \sin(a0 \sim t) \cos(a0 \sim t) - 2 a0 \sim^2 \sin(2 a0 \sim t) b2 \sim^2 + b2 \sim \cos(2 a0 \sim t) \\
& + b2 \sim - b1 \sim \sin(2 a0 \sim t) - 2 a0 \sim^2 \sin(2 a0 \sim t) b1 \sim^2 \left. \right) / ( \\
& - 2 b1 \sim \sin(a0 \sim t) \cos(a0 \sim t) - b2 \sim + 2 b2 \sim \cos(a0 \sim t)^2)
\end{aligned}$$

---

> combine(", trig);

0

---

> save F2, g2, h2, `hpl2.m`;

---

## Apendice D

Caso particular correspondiente a valor cero de la constante de separación de la CIP.

Se cargan: el programa "difalias" y el archivo binario "hpl.m" que contiene los resultados calculados en el Apéndice A.

```
> read `DeeDee:GRTensor:programs:difalias.m`;
```

---

```
> DifAlias(r,h): DifAlias(t, [F,g]);
```

---

```
> read `DeeDee:Artículos:Salvador:hpl.m`;
```

---

La ecuación a resolver por separación es CIP\_r

```
> CIP_r;
```

$$4 \frac{h_{r,r,r}}{h_r} + \frac{-F_{t,t} - 2}{F}$$

---

la cual se separa en dos ecuaciones diferenciales acopladas por la constante de separación.

```
> EcsDifs:=[op(1,CIP_r)*(h[r]/4), -F*op(2,CIP_r)];
```

$$EcsDifs := [h_{r,r,r} F_{t,t} + 2]$$

---

```
> Sol_h:=dsolve(EcsDifs[1], h);
```

$$Sol_h := h = _C1 + _C2 r + _C3 r^2$$

---

```
> Sol_F:=dsolve(EcsDifs[2], F);
```

$$Sol_F := F = -t^2 + _C1 + _C2 t$$

---

La forma de las funciones h y F es:

```
> h3:=subs(_C1=c1, _C2=c2, _C3=c3, rhs(Sol_h));
```

$$h3 := c1 + c2 r + c3 r^2$$

---

```
> F3:=subs(_C1=b1, _C2=b2, rhs(Sol_F));
```

$$F3 := -t^2 + b1 + b2 t$$

---

Para obtener la funcion g, se sustituye h1 y F1 en CIP y se procede a simplificar el resultado

```
> simplify(eval(subs(F=F3, h=h3, CIP)));
```

$$-8 c3 t^2 + 8 c3 b1 + 8 c3 b2 t - 4 g_t + 2 g_t b2$$

---

```
> collect(", [g[t], c3], factor);
```

$$(-4 t + 2 b2) g_t + (-8 t^2 + 8 b1 + 8 b2 t) c3$$

---

La ecuacion diferencial para g viene dada por

```
> EcD_g3 := " :
```

---

Esta es una ecuacion diferencial de primer orden en g, la cual se puede integrar directamente

```
> dsolve(EcD_g3, g);
```

$$g = c3 b2 t - c3 t^2 + 2 c3 b1 \ln(-2 t + b2) + 4 c3 b1 \ln(2) + \frac{1}{2} c3 b2^2 \ln(-2 t + b2) + c3 b2^2 \ln(2) + \_C1$$

---

La forma de g se sigue de la expresion anterior, cambiando la notacion  $\_C1=a1$

```
> g3:=subs(_C1=a1, rhs("));
```

$$g3 := c3 b2 t - c3 t^2 + 2 c3 b1 \ln(-2 t + b2) + 4 c3 b1 \ln(2) + \frac{1}{2} c3 b2^2 \ln(-2 t + b2) + c3 b2^2 \ln(2) + a1$$

---

Ahora se verifica que las funciones obtenidas (h3,F3,g3)  
satisfagan la CIP

```
> simplify(eval(subs(h=h3, F=F3, g=g3, CIP)));
```

0

---

```
> save F3, g3, h3, `hp13.m`;
```

---

```
>
```



Tel. 658 - 73 - 44