16
2ET

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA DE NEGOCIACION AXIOMATICA Y ESTRATEGICA

T E S I S

Que para obtener el Título de

A C T U A R I O

p r e s e n t a

CLAUDIA CARRILLO QUIROZ

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESC

México, D. F. Septiembre de 1995

FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Teoría de la negociación axiomática y estratégica.

realizado por Claudia Carrillo Quiroz

con número de cuenta 9150589-3 , pasante de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. José Antonio Gómez Ortega	
Propietario	Dr. Fernando Brambila Paz	F-
Propietario	Dr. Carlos Hernández Garciadiego	
Suplente	M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza	E. de Oteyza
Suplente	M. en C. Emma Lam Osnaya	Emma Lam O.

Consejo Departamental de Matemáticas

A mis padres,
Angel Manuel Carrillo Hoyo y Elisa Antonia Quiroz de Carrillo.

A mis hermanos,
Gabriela y Angel.

A la memoria del Profr. José Zapata Lillo.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento

Al M. en C. José Antonio Gómez Ortega, por su disposición y dedicación en la dirección de esta tésis.

Al Dr. Fernando Brambila Paz y al Dr. Carlos Hernández Garciadiego, por sus valiosos comentarios.

A la M. en C. Emma Lam Osnaya, por la revisión y ayuda para la presentación de este trabajo.

A la M. en C. Elena De Oteyza De Oteyza especialmente por sus consejos y apoyo a lo largo de mis estudios en la Facultad de Ciencias.

Resumen

En este trabajo se presentan dos desarrollos recientes de la Teoría de Negociación, así como la interrelación que hay en ellos.

En el primer capítulo se tratan los elementos de la Teoría de Juegos que se requieren para el desarrollo del trabajo.

El segundo capítulo de esta tesis trata el enfoque axiomático de Nash para resolver una negociación. Se dan las condiciones que deben cumplir los jugadores así como aquellas que debe cumplir la función propuesta como solución negociada.

En el tercer capítulo, el enfoque estratégico, se modela el problema de negociación como un juego de ofertas alternantes y se propone como solución negociada el equilibrio perfecto en subjuegos de dicho problema.

El capítulo cuatro compara las soluciones obtenidas medante los modelos aximático y estratégico. En el modelo del segundo capítulo realmente no se necesita describir detalladamente la situación de negociación, mientras que en el modelo estratégico existe un factor determinante para alcanzar un acuerdo: la forma de valuar el tiempo; a pesar que esto podría poner en duda la validez del resultado obtenido de manera axiomática, uno de los elementos importantes de esta tesis es que se muestra la estrecha relación que existe entre la solución negociada de Nash y el límite del equilibrio perfecto en subjuegos (de ese mismo problema), cuando el tiempo en que se alcanza el acuerdo tiende a cero.

La tesis se basa en el libro "Bargaining and Markets" de Martin J. Osborne y Ariel Rubinstein.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1 Teoría de Juegos.

La teoría de juegos se interesa en cómo los individuos toman decisiones cuando están conscientes de que sus acciones los afectan entre sí y tienen ésto en cuenta.

1.1.1 Elementos de un juego.

Un juego puede ser considerado una situación de decisión estratégica y consiste de los siguientes elementos:

- Un conjunto de jugadores.
- Un orden para dichos jugadores.
- Una descripción de la información disponible para cualquier jugador en cualquier momento del juego.
- Un conjunto de acciones disponibles para cada jugador cada vez que tenga que tomar una decisión.
- Un resultado que provendrá de cada secuencia de acciones posibles de cada jugador.
- Una asignación de utilidad de Von Neumann-Morgenstern para cada jugador sobre el conjunto de resultados. La utilidad del resultado para un jugador es el pago que obtiene con dicho resultado.

Conjunto de jugadores.

Los jugadores son simplemente entidades de toma de decisión. Individuos, familias, empresas y gobiernos pueden ser considerados jugadores. Los *conjuntos de jugadores* son los conjuntos , $S^0, S^1, \ldots, S^n$, que contienen a todos los vértices no terminales del árbol del juego pertenecientes a la etapa m.
La *naturaleza*, una entidad sin objetivo, es un tipo especial de jugador en el juego. La naturaleza elige entre sus acciones de acuerdo a probabilidades fijas. Todos los jugadores excepto la naturaleza pueden ser llamados *jugadores estratégicos* y se suponen tomadores de decisiones *racionales*.

Racionalidad y conocimiento común

En la teoría de decisiones, se supone que los tomadores de decisiones hacen sus elecciones de acuerdo a criterios internos consistentes. Tal comportamiento es llamado *comportamiento racional*. La Teoría de Juegos también supone que los jugadores son racionales. Sin embargo, ha sido necesario agregar dos supuestos más. El primero es que la racionalidad de cada jugador es de *conocimiento común*; esto es, se dice que un hecho en un juego es de conocimiento común si cada jugador: lo conoce, sabe que cada uno de los demás lo conoce, sabe que cada uno de los demás sabe que cada uno de los demás lo conoce, etc. A pesar de que esta regresión infinita puede sonar extraña, es importante, ya que las decisiones dependerán no sólo de los hechos, sino también en cómo responden a esos hechos otros tomadores de decisiones. Así que el supuesto de conocimientos comunes es crucial.

El segundo supuesto es la *descripción completa* del juego; los jugadores, acciones, estrategias, orden, información y pagos son también de conocimiento común.

Orden del juego

Los jugadores deberán tomar decisiones varias veces durante el juego. Cada una de ellas se llamará *nodo de decisión*. La secuencia en que estas decisiones son tomadas se refiere al *orden del juego*. Si todos los jugadores toman sus decisiones de forma secuencial, uno después del otro, entonces el juego se llama *juego de movidas secuenciales*.

Los jugadores podrían tener que tomar decisiones al mismo tiempo, este tipo de juego se llama *juego de movidas simultáneas*.

Podemos representar el orden del juego usando un diagrama conocido como *árbol* *del juego.* Este diagrama es una gráfica conexa y sin ciclos con un vértice señalado llamado *punto de partida* del juego o *raíz.*

Las posibles acciones de un jugador se representan por un vértice o *rama.* Cada rama conecta dos nodos, uno de los cuales es el "padre" y el otro es el "hijo". El árbol debe cumplir las siguientes reglas:

- Cada nodo tiene a lo más un padre y está conectado a él por una rama.
- Ningún nodo es predecesor de sí mismo.
- Cada nodo tiene un predecesor que es un nodo inicial.
- Cada árbol de juego tiene exactamente un nodo inicial (raíz).

Información.

Nos referiremos a información cuando hablemos de cualquier observación o conocimiento que conduzca a una revaluación de las tasas de probabilidad de un jugador.

Para que la información sea valiosa para un jugador, deben cumplirse dos condiciones:

1. La información debe alterar la acción óptima del jugador en algún nodo de decisión.
2. La información debe ser revelada al jugador antes de que se alcance ése nodo crítico de decisión.

Debido a que el resultado de un juego no depende sólo de las acciones de un jugador, sino también de lo que no puede controlar, se introdujo el concepto de un nuevo jugador etiquetado como naturaleza. Un problema al modelar la adquisición de información teniendo a la naturaleza realizando algunas acciones es que el método no se sostiene cuando se modelan problemas multipersonales en los cuales los jugadores cuentan con información secreta. Otro problema es que aún con un pequeño cambio en la especificación del conocimiento de un jugador se necesitará un nuevo trazo del árbol del juego. Debido a ésto se modelará la adquisición de información usando la herramienta conocida como *conjuntos de información.*

Para cada jugador i con $i = 1, 2, \ldots, m$ existe una partición de S^i en una familia de subconjuntos $\left\{S^i_j\right\}$ el cual contiene a todos los nodos de decisiones entre los cuales un jugador no puede distinguir, siendo estos conjuntos los mencionados conjuntos de información.

Los conjuntos de información, no triviales, representan situaciones en las cuales un jugador no ha observado movidas previas, ya sea de la naturaleza o de cualquier otro jugador en el juego, es decir, todos los nodos de decisión en cualquier conjunto de información deben pertenecer al mismo jugador y deben proveer a dicho jugador el mismo conjunto de acciones.

Casi todos los juegos en economía son juegos de *memoria perfecta*. Un juego tiene memoria perfecta si ningún jugador olvida información que alguna vez supo, y todos los jugadores conocen las acciones que realizaron anteriormente. Esto origina dos restricciones en los conjuntos de información de los jugadores:

1. Todos los nodos de un conjunto $\left\{S_j^i\right\}$ deben tener el mismo número de sucesores,
2. No existe un nodo del conjunto $\left\{S_j^i\right\}$ que siga a otro de este mismo conjunto .

Se dice que un juego es de *información perfecta* si cada jugador en cada nodo de decisión sabe las acciones realizadas anteriormente por cada uno de los otros jugadores, incluyendo la naturaleza. Esto es, un juego, es de información perfecta si y sólo si cada conjunto de información contiene un sólo nodo de decisión.

Acciones y estrategias

El conjunto de opciones disponibles en cada nodo de decisión de un juego se conoce como la *acción del jugador*. Una *estrategia pura* para un jugador es una regla que le dice que acción realizar en cada uno de sus conjuntos de información en el juego, es decir, es un plan detallado que dice al jugador la acción bajo cualquier contingencia. En otras palabras una estrategia σ, para el jugador i es una función α que a cada conjunto de información S_j^i le asigna un índice I_j^i, es decir, $\alpha\left(S_j^i\right) \in I_j^i$ para $i = 1, 2, \ldots$

También se permite a los jugadores escoger aleatoriamente las acciones disponibles en cada conjunto de información; las estrategias que permiten este tipo de comportamiento aleatorio se llaman *estrategias mixtas*.

De manera más formal una estrategia mixta para un jugador consiste de una distribución de probabilidad sobre el conjunto de dichas estrategias. En el caso de que el jugador tenga sólo un número finito m de estrategias puras, una estrategia mixta se reduce a un vector, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ que satisface:

a) $x_i \geq 0$.

b) $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$

Si conocemos la estrategia σ^i empleada por cada jugador i en el juego, podemos calcular el pago esperado de cada jugador.

Pagos.

Para cada vértice terminal T del juego existe un vector $\overline{p}_T$ llamado vector de pago. La probabilidad de que la partida termine en T dado $(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n)$ puede expresarse como:

$$(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n) \rightarrow f_T(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n)$$

y al multiplicar esta probabilidad por el vector de pago obtenemos:

$$(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n) \rightarrow f_T(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n)\ \overline{p}_T = \overline{\pi}(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n)$$

donde cada componente $\pi^i(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n)$ representa el pago esperado al jugador i.

En otras palabras, considerando el supuesto de que los jugadores tienen una utilidad de Von Neumann-Morgestern asociada al conjunto de posibles resultados del juego, esta utilidad constituye el pago para cada jugador. En esta clase de juegos se supone también que los pagos son conocidos.

Si los jugadores actúan de acuerdo a estrategias puras, eligirán una secuencia de acciones que los lleve a un resultado final determinado. Este resultado se convierte en un pago para cada jugador y da lugar a una tabla de pagos ya que cada perfil de estrategias puras puede asociarse con una colección de pagos para cada jugador. Si la naturaleza es un "jugador" o se incluyen estrategias mixtas, entonces el resultado obtenido al realizar ese perfil es una lotería sobre los posibles resultados. Estas loterías tienen una utilidad esperada asociada para cada jugador, ya que, como se dijo anteriormente, cada jugador tiene una utilidad de Von Neumann-Morgestern asociada al conjunto de posibles resultados del juego. Así la tabla de pagos se extiende a todos los juegos y a todos los perfiles de estrategias.

1.1.2 Juegos cooperativos y no cooperativos.

En los juegos estrictamente competitivos es imposible para los jugadores obtener beneficio mutuo por alguna forma de cooperación, sin embargo, en juegos no estrictamente competitivos tal ganancia mutua es siempre posible. De modo que estamos forzados a considerar explícitamente si se permite o no cooperación entre los jugadores.

Los juegos cooperativos se caracterizan por el hecho de que los jugadores tienen completa libertad de comunicación previa al juego para establecer acuerdos *obligatorios* conjuntos. En un juego no cooperativo no se permite absolutamente ninguna comunicación entre los jugadores antes del juego.

Formalmente, cualquier juego cooperativo puede ser modelado como una sesión de negociación, en la cual los jugadores entran en compromisos de coacción entre sí, seguida de un juego no cooperativo y como la sesión de negociación puede ser también modelada como un juego no cooperativo, cualquier juego cooperativo, al menos en principio, podría ser modelado como uno no cooperativo. Sin embargo, a través de la experiencia se ha comprobado que hacer ésto es extremadamente difícil dando como resultado el desarrollo de herramientas, por parte de los analistas de juegos cooperativos, muy diferentes a aquellas usadas por los teóricos de juegos no cooperativos.

1.2 Equilibrio

1.2.1 Equilibrio Competitivo

Economía de cambio puro Una economía de cambio puro está definida por la existencia de los siguientes componentes:

- ℓ tipos de bienes.
- m consumidores.
- ω^i dotación inicial del consumidor i
- Paquetes de bienes x^i donde $x^i = (x_1^i, x_2^i, ... x_\ell^i) \in \Re^\ell$
- Conjunto de consumo $X^i \subset \Re^\ell$
- Una relación de orden completa, transitiva y cerrada en X^i, denotada por: $\preceq_i$.

Dentro de una economía cada consumidor observa el vector de precios $p = (p_1, p_2, \ldots, p_\ell) \in \Re^\ell - \{0\}$ y determina su presupuesto $\gamma = \{\xi^i \in \mathbf{X}^i \ / \ p \cdot \xi^i \leq p \cdot \omega^i\}$ y elige un paquete $x^{i'}$ que es maximal en γ^i respecto a $\preceq_i$.

Las iteraciones para cambiar precios de acuerdo a lo que se demanda conduce a un vector de precios p^* y a una asignación $\left(x^{i^*}\right)_{i=1}^m$ tales que:

1. x^* es maximal en $\gamma^i = \{\xi^i \in X^i \ / \ p \cdot \xi^i \leq p \cdot \omega^i\}$ $i = 1, ..., m$ y
2. $\sum_{i=1}^{m} x^{i^*} \leq \sum_{i=1}^{m} \omega^i$.

Dando como resultado una pareja $\left(\left(x^{i^*}\right)_{i=1}^{m}, p^*\right)$ llamada *equilibrio competitivo*, la cual es un concepto solución basado en un comportamiento no cooperativo de los consumidores y en el mecanismo del mercado.

El equilibrio en situaciones de comportamiento cooperativo de los consumidores se conoce como *equilibrio de Nash*, el cual se describirá a continuación.

1.2.2 Equilibrio de Nash

Un equilibrio de Nash para un juego cooperativo es una colección de estrategias, una para cada jugador, de manera que cada una de ellas sea óptima dado que los otros jugadores usan su estrategia de equilibrio. Es decir, la n-ada de estrategias $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_i^*, ..., \sigma_n^*)$ está en equilibrio, si y sólo si para cada $i = 1, ..., n$ y cada $\sigma_i \in \Sigma_i$ sucede que:

$$\pi_i\left(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*\right) \leq \pi_i\left(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_i^*, ..., \sigma_n^*\right)$$

Donde Σ_i es el conjunto de estrategias del jugador i.

En otras palabras, se dice que una n-ada de estrategias está en equilibrio si ningún jugador tiene una razón real para cambiar su estrategia, suponiendo que ningún otro jugador va a cambiar su estrategia.

Amenazas

Cuando en un juego se permite la comunicación entre los jugadores las conclusiones dependerán sólo de su habilidad para entablar compromisos obligatorios entre sí. Cuando un jugador intenta hacer creer al otro que empleará una estrategia específica, ésta se llamará *amenaza*.

Una amenaza hecha por un jugador es ***no creíble*** a menos que el llevarla a cabo, al darse la oportunidad, sea en su propio beneficio. Las amenazas que son no creíbles son ignoradas. A pesar de que el perfil de estrategias basado en una amenaza no creíble sea un equilibrio de Nash será ignorado.

Subjuegos y subjuegos en equilibrio perfecto

El equilibrio de Nash que incorpore amenazas no creíbles sería un predictor pobre del comportamiento de los jugadores por lo que necesitamos de otra herramientas: los subjuegos.

Un *subjuego* es, esencialmente, un juego pequeño dentro de un juego más grande con dos propiedades especiales:

1. Una vez que los jugadores comienzan a jugar el subjuego, lo continúan jugando por el resto del juego.

2. Todos los jugadores saben que están jugando el subjuego. Esto se logra si todos los conjuntos de información que contienen nodos de decisión del subjuego NO contienen nodos de decisión que no sean parte del subjuego.

El subjuego, dado que es un juego, tienen un nodo inicial el cual es una *subraíz* del juego original. Además los conjuntos de jugadores, el orden del juego, el conjunto de las posibles acciones y los conjuntos de información del juego original se preservan en el subjuego.

Una n-ada de estrategias es un *equilibrio perfecto* de un subjuego del juego Γ, si ésta es también un equilibrio de Nash para cada subjuego de Γ.

Capítulo 2

ENFOQUE AXIOMATICO

2.1 Problemas de negociación

Al hablar de negociación, nos referiremos a una situación en la que dos individuos tienen la posibilidad de alcanzar, de común acuerdo, un beneficio mutuo. En esta situación existe un conflicto de intereses en cuanto a saber cuál acuerdo concluir ya que ningún acuerdo puede ser impuesto a un individuo sin su aprobación.

Las siguientes afirmaciones delinean la definición del problema de negociación y la solución negociada que se da más adelante.

- Existen dos individuos, *jugadores,* que buscan alcanzar algún beneficio mediante la cooperación.
- Los jugadores tratan de llegar a un *acuerdo, a*, en el conjunto A, o al no lograr un acuerdo ocurre el *evento desacuerdo, D.*
- Cada jugador i tiene un *orden de preferencia* $\succeq_i$ sobre el conjunto $A \cup D$, siendo esta relación binaria, transitiva y reflexiva.
- Las preferencias de los jugadores están definidas en el *conjunto de loterías de acuerdos posibles*, no sólo en la de los acuerdos mismos.
- El orden de preferencia de cada jugador debe satisfacer los axiomas de Von Neumann-Morgenstern para que así exista una *función de utilidad* $u_i : A \cup D \rightarrow \Re$, (para cada jugador), de modo que "una lotería es preferida a otra si y sólo si la utilidad esperada de la primera es mayor que la de la segunda".

- Si u_i es una función de utilidad para $\succeq_i$ y v_i es una función de utilidad, entonces v_i representa a $\succeq_i$ si y sólo si $v_i = \alpha u_i + \beta$ para alguna $\alpha, \beta \in \Re$ con $\alpha > 0$.

- Los jugadores, A, D y $\succeq_i$ definen una situación de negociación.

- Dados el conjunto de los acuerdos posibles, el evento desacuerdo y las utilidades, podemos construir el *conjunto* de todas las *parejas de utilidad* que pueden ser resultado de la negociación. Este conjunto es la unión del conjunto S de parejas de utilidad factibles, esto es, las parejas: $(u_1(a), u_2(a))$ con $a \in A$, y el punto $d = (u_1(D), u_2(D))$. La pareja (S, d) será la primitiva del problema.

- La *solución negociada* asocia a cada situación de negociación un evento, ya sea acuerdo o desacuerdo.

Problema de negociación

Un *problema de negociación* es una pareja (S, d), donde $S \subset \Re^2$ es compacto y convexo, $d \in S$ y existe $s \in S$ tal que $s_i > d_i$ para $i = 1, 2$.

El conjunto de todos los problemas de negociación se denota por β.

Una *solución negociada* es una función $f : \beta \to \Re^2$ que asigna a cada problema de negociación $(S, d) \in \beta$ un único elemento de S.

El conjunto S debe ser compacto ya que las utilidades que pueden obtenerse en un resultado de la negociación son limitadas (acotado), además de que la utilidad no puede crecer sin límite (cerrado), pues si lo hiciera la negociación no tendría interés ya que siempre se podría encontrar una utilidad que mejorara a la utilidad propuesta. Debe ser convexo para garantizar que contiene a cualquier lotería.

2.2 Axiomas de Nash

Nash impone cuatro condiciones a la solución negociada $f : \beta \to \Re^2$;

INV (Invarianza a representaciones de utilidad equivalentes)

Supongamos que el problema de negociación $\left\langle S', d' \right\rangle$ es obtenido de $\langle S, d \rangle$ por las transformaciones $s_i \to \alpha_i s_i + \beta_i$ donde $\alpha_i > 0$ para $i = 1, 2$. Entonces $f_i \left\langle S', d' \right\rangle = \alpha_i f_i \langle S, d \rangle + \beta_i$ para $i = 1, 2$.

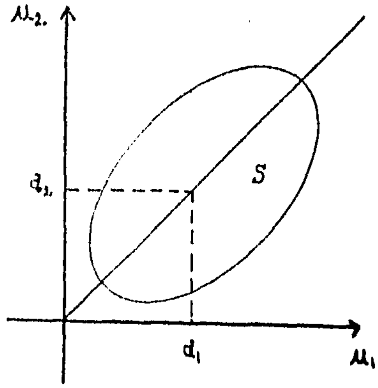
Esto es si la función de utilidad u_i genera el conjunto S cuando se aplica a un conjunto de acuerdos A entonces las funciones de utilidad $v_i = \alpha_i u_i + \beta_i$ generan el conjunto S' al aplicarse al mismo conjunto A.

Como v_i representa las mismas preferencias que u_i, el resultado físico predecido por la solución negociada debe ser el mismo para $\left\langle S', d' \right\rangle$ y $\langle S, d \rangle$.

SIM (Simetría)

Si el problema de negociación $\langle S, d \rangle$ es simétrico, entonces $f_1 \langle S, d \rangle = f_2 \langle S, d \rangle$.

Si los jugadores son intercambiables, entonces la solución negociada debe asignar la misma utilidad a cada jugador, es decir, la solución consistirá en dividir la ganancia obtenida, por medio de la colaboración, en partes iguales; por lo tanto la solución negociada será un punto en la diagonal de S.



IAI (Independencia de alternativas irrelevantes)

Si $\langle S, d\rangle$ y $\langle T, d\rangle$ son problemas de negociación con $S \subset T$ y $f(T, d) \in S$, entonces $f(S, d) = f(T, d)$.

Esto es, cuando todas las alternativas en T están disponibles y los jugadores llegan a un acuerdo s del conjunto pequeño S, entonces pedimos que los jugadores lleguen al mismo acuerdo s cuando sólo las alternativas en S están disponibles.

Al acordar en s cuando podían haber escogido cualquier punto en T los jugadores han descartado como *irrelevantes* los resultados en T diferentes de s.

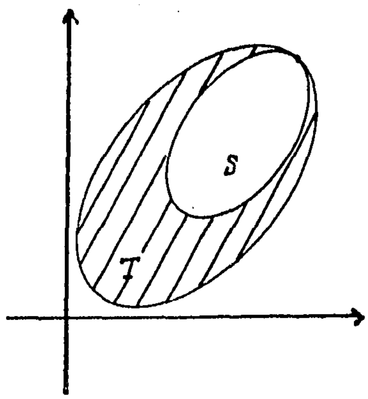


Figura 2.1:

PAR (Eficiencia de Pareto)

Supongamos que $\langle S, d\rangle$ es un problema de negociación $s \in S$, $t \in S$ y $t_i > s_i$ para $i = 1, 2$. Entonces $f(S, d) \neq s$.

Esta condición requiere que los jugadores nunca "acuerden" en un resultado s cuando existe otro resultado t en el cual los dos estarán mejor. Si acordaran en el resultado inferior s, habría lugar para una renegociación y la pareja de utilidades para el evento desacuerdo sería s.

2.3 Teorema de Nash.

La idea de Nash de derivar una solución de los cuatro axiomas anteriores muestra que existe precisamente una solución de negociación que los satisface y esta solución tiene una forma muy simple: *selecciona la pareja de utilidad que maximice el producto de las ganancias de los jugadores en utilidad sobre el resultado de desacuerdo.*

Teorema.

Existe una única solución negociada f^N, definida en todos los problemas de negociación $\langle S, d\rangle$ que satisface INV, SIM, IAI y PAR. Y está dada por:
$f^N(S,d) = \arg\max (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$ tal que $(d_1, d_2) \leq (s_1, s_2) \in S$, ésto es,
$f^N(S,d) = (s_1^*, s_2^*)$ si (s_1^*, s_2^*) maximiza la función $(s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$ dentro del conjunto $\{s \in S;\ d \leq s\}$

Demostración:

a) Primero se verificará que la función f^N está bien definida.

El conjunto $\{s \in S; d \leq s\}$ es compacto y la función $H(s_1, s_2) = (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$ es continua, así que existe al menos una solución al problema de maximización que define a f^N.

Si demostramos que el maximizador es único, la función quedará bien definida.

Lema 1

Si existe algún punto $(s_1, s_2) \in S$ tal que $s_1 > d_1$, $s_2 > d_2$, entonces existe un único punto $(\overline{s_1}, \overline{s_2})$ el cual maximiza la función $H\ (s_1, s_2) = (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$ sobre el subconjunto de S para el cual $s \geq d$.

Demostración.

Sabemos ya que este subconjunto de S es compacto.

Dado que H es continua debe tener un máximo sobre este conjunto y deberá ser positivo.

Supongamos que existen dos puntos diferentes (s_1', s_2') y (s_1'', s_2'') que maximizan la función $H\ (s_1, s_2)$.

Sea M el máximo.

Como $M > 0$ no puede suceder que $s_1' = s_1''$, ya que implicaría que $s_2' = s_2''$.

Supongamos $s_1' < s_1''$ lo que implica que $s_2' > s_2''$.

Dado que S es convexo, $(\widehat{s}_1, \widehat{s}_2) = \left(\frac{s_1'+s_1''}{2}, \frac{s_2'+s_2''}{2}\right) \in S$ y entonces,

$$H(\widehat{s}_1, \widehat{s}_2) = \left[\frac{(s_1'-d_1)+(s_1''-d_1)}{2}\right]\left[\frac{(s_2'-d_2)+(s_2''-d_2)}{2}\right]$$

$$= \frac{(s_1'-d_1)(s_2'-d_2)}{2} + \frac{(s_1''-d_1)(s_2''-d_2)}{2} + \frac{(s_2''-s_2')(s_1'-s_1'')}{4}$$

$$= \frac{M}{2} + \frac{M}{2} + \frac{(s_2''-s_2')(s_1'-s_1'')}{4}$$

Como $\frac{(s_2''-s_2')(s_1'-s_1'')}{4} > 0$ tenemos que $H(\widehat{s}_1, \widehat{s}_2) = M + \frac{(s_2''-s_2')(s_1'-s_1'')}{4} > M$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto el maximizador es único.

b) Verificamos que cumple los cuatro axiomas.

INV: Si $\langle S', d' \rangle$ y $\langle S, d \rangle$ son como los citados en el axioma, entonces $s' \in S' \Leftrightarrow$ existe $s \in S$ tal que $s_i' = \alpha_i s_i + \beta_i$ donde $\alpha_i > 0$ para $i = 1, 2$. Para tales parejas de utilidad s y s' tenemos:

$$H = \left(s_1' - d_1'\right)\left(s_2' - d_2'\right)$$
$$= [(\alpha_1 s_1 + \beta_1) - (\alpha_1 d_1 + \beta_1)][(\alpha_2 s_2 + \beta_2) - (\alpha_2 d_2 + \beta_2)]$$
$$= (\alpha_1 s_1 - \alpha_1 d_1)(\alpha_2 s_2 - \alpha_2 d_2) = \alpha_1 (s_1 - d_1)\,\alpha_2 (s_2 - d_2)$$
$$= \alpha_1 \alpha_2 (s_1 - d_1)(s_2 - d_2).$$

Así $(\widehat{s}_1, \widehat{s}_2)$ maximiza $(s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$ sobre S si y sólo si $(\alpha_1 \widehat{s}_1 + \beta_1\ , \alpha_2 \widehat{s}_2 + \beta_2)$ maximiza $\left(s_1' - d_1'\right)\left(s_2' - d_2'\right)$ sobre S'.

SIM: Si $\langle S, d \rangle$ es simétrico y $(\widehat{s}_1, \widehat{s}_2)$ maximiza $(s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$ sobre S; entonces como H es una función simétrica, $(\widehat{s}_2, \widehat{s}_1)$ también maximiza H sobre S. Como el maximizador es único $\widehat{s}_1 = \widehat{s}_2$.

IAI: Si $S \subset T$ y $\widehat{s} \in S$ maximiza H sobre T, entonces $\widehat{s} \in S$ también maximiza H sobre S.

PAR: Como H es creciente en cada uno de sus argumentos $\widehat{s}$ no maximiza H sobre S si existe $t \in S$ con $t_i > \widehat{s}_i$ para $i = 1, 2$. (Entre mayor es s_i H es mayor.)

c) Se mostrará que f^N es la única función que satisface los cuatro axiomas.

Supóngase que f es una solución que satisface los cuatro axiomas.

Paso 1. Sea $\langle S, d\rangle$ un problema de negociación arbitrario.

P.D. $f(S,d) = f^N(S,d)$

Sea $\left\langle S', d'\right\rangle$ el problema obtenido de $\langle S, d\rangle$ por la transformación $S \mapsto \alpha S+\beta = S'$, $d \mapsto 0$ y de manera que $f^N(S,d) \to \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f^N\left(S', 0\right)$.

Como f y f^N satisfacen el axioma INV:

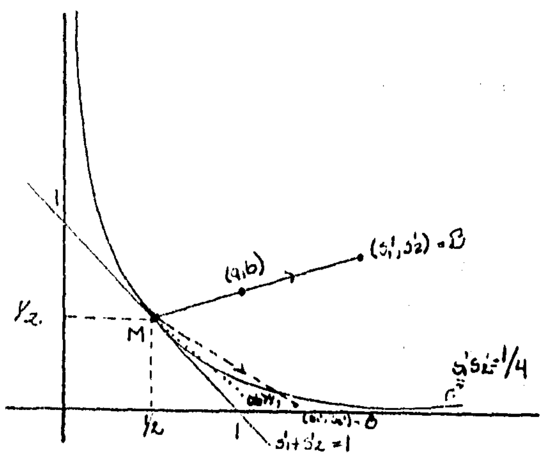
$f\left(S', 0\right) = \alpha f(S,d) + \beta$ y $f^N\left(S', 0\right) = \alpha f^N(S,d) + \beta$, luego es claro que $f\left(S', 0\right) = f^N\left(S', 0\right)$ si y sólo si $f(S,d) = f^N(S,d)$ por lo que si queremos demostrar que $f(S,d) = f^N(S,d)$, bastará mostrar que: $f\left(S', 0\right) = f^N\left(S', 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

En los pasos siguientes mostraremos que $f\left(S', 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Paso 2. S' no contiene puntos $\langle s_1', s_2'\rangle$ con $s_1' + s_2' > 1$.

Como $f^N\left(S', 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, tenemos que $S' \subset B = \left\{(s_1', s_2') ; \ s_1' s_2' \leq \frac{1}{4}\right\}$

Si para algún $(s_1', s_2') \in S'$, se tiene que $s_1' + s_2' > 1$ entonces la lotería $L\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (s_1', s_2')\right)$ queda por arriba de la línea $s_1' + s_2' = 1$ y de los puntos $(a,b) = \left(\frac{1-\varepsilon}{2} + \varepsilon s_1', \frac{1-\varepsilon}{2} + \varepsilon s_2'\right)$ de la lotería, para $0 < \varepsilon$ pequeño, algunos quedan fuera de B, cuando sabemos que por ser S' convexo deben estar en S' y por tanto en B.



Paso 3. Como S' es acotado, el **Paso 2** asegura que podemos encontrar un rectángulo T simétrico a la línea de 45° que contiene a S', y en cuya frontera está $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

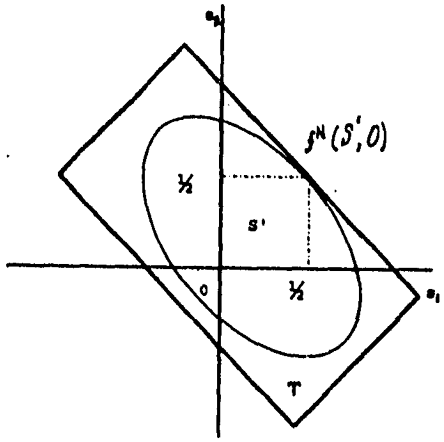


Figura 2.2:

Paso 4. Por SIM tenemos que la solución debe estar sobre la diagonal del conjunto, y como cumple con PAR $f(T,0) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ya que todos los puntos en la diagonal dan un valor menor que $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Paso 5. Por IAI sabemos $f(T,0) = f\left(S',0\right)$ y esto implica que $f\left(S',0\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Con ésto finaliza la demostración del Teorema.

Llamaremos a $f^N\langle S,d\rangle$ la **solución negociada de Nash** para el problema de negociación $\langle S,d\rangle$. Ésta se puede caracterizar de la siguiente manera:

Sea la frontera fuerte de Pareto de S, el conjunto:

$\{s \in S :$ no existe $s' \in S$ con $s \neq s'$ y $s'_i \geq s_i$ para $i = 1,2\}$ y sea $s_2 = \Psi(s_1)$ la ecuación de la frontera en el primer cuadrante..

La pareja de utilidad (s_1^*, s_2^*) es la *solución de Nash* para el problema $\langle S,d\rangle$ si y sólo si $s_2^* = \Psi(s_1^*)$ y s_1^* maximiza $(s_1 - d_1)(\Psi(s_1) - d_2)$.

Afirmación

Si Ψ es dos veces diferenciable alrededor de s_1^*, entonces la segunda condición es equivalente a $\frac{(s_2^*-d_2)}{(s_1^*-d_1)} = \left|\Psi'(s_1^*)\right|$ y $\Psi''(s_1) < \frac{2(s_2^*-d_2)}{(s_1^*-d_1)^2}$

Demostración

Supongamos s_1^* maximiza $H = (s_1 - d_1)(\Psi(s_1) - d_2)$, entonces $\frac{\partial H}{\partial s_1}(s_1^*) = 0$, pero $\frac{\partial H}{\partial s_1}(s_1^*) = (s_1^* - d_1)(\Psi'(s_1^*) - 0) + (\Psi(s_1^*) - d_2) = (s_1^* - d_1)\Psi'(s_1^*) + (s_2^* - d_2)$, por lo tanto

$$(s_1^* - d_1)\Psi'(s_1^*) + (s_2^* - d_2) = 0 \Rightarrow \Psi'(s_1^*) = \frac{-(s_2^*-d_2)}{(s_1^*-d_1)} \Rightarrow |\Psi'(s_1^*)| = \frac{(s_2^*-d_2)}{(s_1^*-d_1)}.$$

Y por ser máximo $\frac{\partial^2 H}{\partial s_1^2}(s_1^*) < 0$, lo cual es equivalente a $\Psi''(s_1) < \frac{2(s_2^*-d_2)}{(s_1^*-d_1)^2}$. El recíproco es aplicar el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

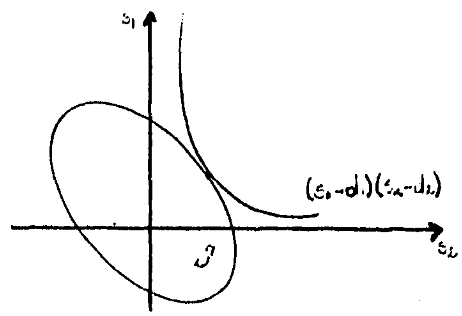


Figura 2.3:

Se puede dar también una definición alternativa en términos de las preferencias de los jugadores:

Sea $p \cdot a = \{pa + (1-p)D$, con $p \in [0,1]\}$ que representa la lotería donde el acuerdo a se alcanza con probabilidad p y el desacuerdo D con probabilidad $(1-p)$.

Sea $\preceq_i$ el orden de preferencia del jugador i sobre el conjunto de loterías de la forma $p \cdot a$.

Consideremos el acuerdo a^* con la propiedad de que para $(i,j) = (1,2)$ e $(i,j) = (2,1)$, para todo $a \in A$, $p \in [0,1]$ para las cuales $p \cdot a \succeq_i a^*$ tenemos que $p \cdot a^* \succeq_j a$.

Interpretación: Si a^* es conocida. Si el jugador i objeta a^* proponiendo una alternativa a aún frente al riesgo de que se llegue al desacuerdo con probabilidad $(1-p)$, entonces el jugador j está dispuesto a tomar el mismo riesgo y rechazar el acuerdo a en favor del acuerdo a^*.

Afirmación

El acuerdo a^* induce la solución de Nash.

Sea u_i la representación de la utilidad para $\succsim_i$ tal que $u_i(D) = 0$.

P.D. a^* maximiza $u_1(a)u_2(a)$

Primero, si ninguno prefiere a que a^*, es decir, $a^* \succsim_1 a$ y $a^* \succsim_2 a$, entonces $u_1(a^*) \geq u_1(a)$ y $u_2(a^*) \geq u_2(a)$; por lo tanto $u_1(a^*)u_2(a^*) \geq u_1(a)u_2(a)$ para todo $a \in A$.

Por lo tanto a^* maximiza $u_1(a)u_2(a)$.

Ahora bien, si el jugador 1 prefiere a que a^* entonces $a \succ_1 a^* \Rightarrow$ existe $0 < p_0 < 1$ tal que $\{p_0 a + (1-p_0)D\} \succ_1 a^* \Rightarrow p_0 u_1(a) + (1-p_0)u_1(D) > u_1(a^*)$
$\Rightarrow p_0 u_1(a) \geq u_1(a^*) \Rightarrow 1 > p_0 > \frac{u_1(a^*)}{u_1(a)}$.

Sea $A = \{p \in (0,1)$, tales que $pu_1(a) > u_1(a^*)\}$. Sabemos que éste conjunto es distinto del vacío pues $p_0 \in A$. Sabemos también que $\frac{u_1(a^*)}{u_1(a)}$ es cota inferior de A.

Definamos ahora inf $\{p \in (0,1)$ tales que $pu_1(a) > u_1(a^*)\}$ Sabemos que en un intervalo abierto el extremo izquierdo es el ínfimo, por lo tanto $p_o = \inf A = \frac{u_1(a^*)}{u_1(a)}$.

Por la condición que define a a^* sabemos que para todo $p \in A$ sucede que $pu_2(a^*) > u_2(a)$ y ésto implica que $\frac{u_2(a)}{u_2(a^*)}$ es también cota inferior de A, pero como el ínfimo es la máxima de las cotas inferiores tenemos:

$$\frac{u_1(a^*)}{u_1(a)} \geq \frac{u_2(a)}{u_2(a^*)} \Rightarrow u_1(a^*)u_2(a^*) \geq u_2(a)u_1(a).$$

Por lo tanto a^* maximiza $u_1(a)u_2(a)$.

2.4 Aplicaciones

2.4.1 Repartiendo un dólar

Dos personas desean dividir un dólar de alguna forma y si no llegan a un acuerdo el dólar se pierde. Podemos pensar que a_1 y a_2 son las partes en que se divide siendo a_i la parte que recibe el jugador i.

$A = \{(a_1, a_2) \in \Re^2 : a_1 + a_2 \leq 1$ y $a_i \geq 0$ para $i = 1, 2\}$ y denotemos al desacuerdo con $D = (0, 0)$.

A cada jugador sólo le interesa la parte que va a recibir. El jugador i prefiere $a \in A$ que $b \in A \Leftrightarrow a_i > b_i$. De modo que la preferencia del jugador i sobre loterías puede representarse por una función $u_i : [0, 1] \rightarrow \Re$, si los jugadores son adversos al riesgo (u_i es cóncava) y sin pérdida de generalidad $u_i(0) = 0$.

Entonces

$S = \{(s_1, s_2) \in \Re^2 : (s_1, s_2) = (u_1(a_1), u_2(a_2))$ para alguna $(a_1, a_2) \in A\}$. Claramente es compacto y convexo. Además S contiene a $d = (u_1(0), u_2(0)) = (0, 0)$ y existe un punto $s \in S$ tal que $s_i > d_i$ para $i = 1, 2$. Por lo tanto $\langle S, d\rangle$ es un problema de negociación.

Primero, supondremos que las preferencias de los jugadores pueden ser las mismas entonces éstas pueden ser representadas por la misma función de utilidad por lo que $\langle S, d\rangle$ es un problema simétrico.

Como los acuerdos que se pueden alcanzar son de la forma $(a, 1 - a)$ entonces tenemos que: $S = \{(s_1, s_2) \in \Re^2 : (s_1, s_2) = (u(a), u(1 - a))\ ,\ 0 < a < 1\}$.

Por SIM sabemos que la solución está en la diagonal, es decir, lo argumentos son iguales.

Por PAR tenemos que no puede ser solución un punto que sea menor a alguno del conjunto; entonces la manera de obtener la división más grande con argumentos iguales es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Por lo tanto la solución es $\left(u\left(\frac{1}{2}\right), u\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, que corresponde al acuerdo físico de repartir equitativamente el dólar.

Ahora, si las preferencias de los jugadores son diferentes la pareja $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ya no es solución; la solución dependerá de la naturaleza de las preferencias.

Supongamos que el jugador 2 es más adverso al riesgo entonces sus preferencias, que antes estaban representadas por u_2, pueden ser representadas por $v_2 = h \circ u_2$, donde $h : \Re \rightarrow \Re$ es una función cóncava y creciente con $h(0) = 0$; lo que implica que v_2 es también creciente y cóncava.

Sea $\left\langle S', d'\right\rangle$ el problema de negociación para esta situación con funciones de utilidad v_1 y v_2; sea z_u la solución de Nash para: $\max_{0 \leq z \leq 1} u_1(z) u_2(1 - z)$. y sea z_v la solución de Nash para este nuevo problema: $\max_{0 \leq z \leq 1} v_1(z) v_2(1 - z)$

Afirmación

Si u_1, u_2 y h son diferenciables y además $0 < z_u, z_v < 1$, entonces z_u es solución de $\frac{u_1'(z)}{u_1(z)} = \frac{u_2'(1-z)}{u_2(1-z)}$ y z_v es solución de $\frac{u_1'(z)}{u_1(z)} = \frac{h_2'(u_2(1-z))u_2'(1-z)}{h(u_2(1-z))}$

$H = u_1(z)\, u_2(1-z) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial z} = u_1(z)\, u_2'(1-z)(-1) + u_2(1-z)\, u_1'(z)$

por lo tanto $H' = 0 \Longleftrightarrow -u_1(z)\, u_2'(1-z) + u_2(1-z)\, u_1'(z) = 0 \Longleftrightarrow \frac{u_1'(z)}{u_1(z)} = \frac{u_2'(1-z)}{u_2(1-z)}$

$H = v_1(z), v_2(1-z) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial z} = u_1'(z)\, h(u_2(1-z)) - h'(u_2(1-z))\, u_2'(1-z)\, u_1(z)$

$H' = 0 \Leftrightarrow u_1'(z)\, h(u_2(1-z)) - h'(u_2(1-z))\, u_2'(1-z)\, u_1(z) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{u_1'(z)}{u_1(z)} = \frac{h'(u_2(1-z))u_2'(1-z)}{h(u_2(1-z))}$

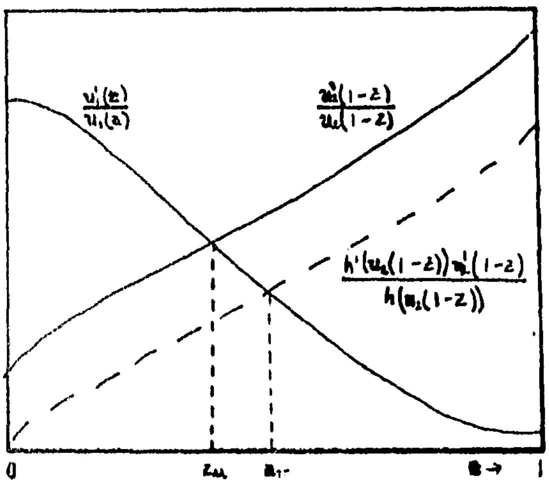
Si h es una función cóncava sabemos que $h'(t) < \frac{h(t)}{t}$ para todo t. Ahora por el teorema del valor medio sabemos que existe t_0, tal que,

$$h(t) - h(0) = h'(t_0)(t-0) \Rightarrow \frac{h(t) - h(0)}{t-0} = h'(t_0) \geq h'(t).$$

En nuestro contexto de la división del dólar por lo anterior obtenemos:

$h'(u_2(1-z)) < \frac{h(u_2(1-z))}{u_2(1-z)} \Rightarrow h'(u_2(1-z))\frac{u_2'(1-z)}{h(u_2(1-z))} < \frac{h(u_2(1-z))}{u_2(1-z)}\frac{u_2'(1-z)}{h(u_2(1-z))} \Rightarrow$

$\frac{h'(u_2(1-z))u_2'(1-z)}{h(u_2(1-z))} < \frac{u_2'(1-z)}{u_2(1-z)} \Rightarrow z_v \leq z_u$



2.4.2 Negociando salarios

En el ejemplo anterior se especifica la división de una cantidad de dinero, en otros casos el acuerdo puede ser muy complejo. En el contexto de negociación entre una compañía y un sindicato el acuerdo puede especificar un acuerdo de futuros pagos, beneficios o niveles de empleo.

Consideremos un caso relativamente simple:
Una compañía y un sindicato negociando un paquete de sueldo-contrataciones.

- Supongamos que el sindicato representa a L trabajadores y que cada uno de ellos puede obtener un sueldo de ω_0 fuera de la compañía.
- Si la compañía contrata a ℓ trabajadores, entonces produce $f(\ell)$ unidades de producto. ($f(\ell)$ = producción obtenida de ℓ trabajadores.)
- Supongamos que $f(\ell)$ es estrictamente cóncava y $f(0) = 0$; $f(\ell) > \ell\omega_0$ para algún ℓ.
- Consideremos el precio del producto normalizado a 1.

Un acuerdo es una pareja de sueldo-empleos (ω, ℓ).

La utilidad de Von Neumann-Morgenstern de la compañía por dicho acuerdo es la producción obtenida de ℓ trabajadores menos el sueldo de los mismos : $f(\ell) - \ell\omega$.

La utilidad del sindicato es la cantidad total de dinero recibida por sus miembros: $\ell\omega + (L - \ell)\omega_0$.

- Restringimos los acuerdos a las parejas de utilidad (ω, ℓ) en las cuales el beneficio de la firma es no negativa, es decir, $\omega \leq \frac{f(\ell)}{\ell}$ y los sueldos son al menos ω_0.
- Las parejas de utilidad que se pueden obtener por acuerdo son:

$$S = \{(f(\ell) - \ell\omega, \ell\omega + (L - \ell)\omega_0) : f(\ell) \geq \ell\omega, 0 \leq \ell \leq L \text{ y } \omega \geq \omega_0\}$$

Si las dos partes no llegan a un acuerdo la compañía obtiene un beneficio de cero ya que, $f(0) = 0$ y el sindicato obtiene como beneficio los salarios fuera de la compañía: $L\omega_0$. Por lo que el punto de desacuerdo es: $(0, L\omega_0)$.

Cada pareja de utilidad toma la forma (ω, ℓ) donde $\omega_0 \leq \omega \leq \frac{f(\ell)}{\ell}$

Podemos re-escribir al conjunto S como:

$S = \{(s_1, s_2) \in \Re^2 : s_1 + s_2 = f(\ell) + (L - \ell)\,\omega_0; s_1 \geq 0, s_2 \geq L\omega_0\}$

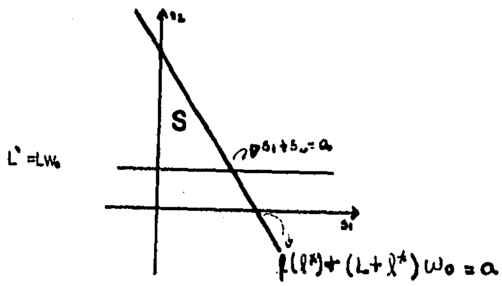
Sea ℓ^* el único maximizador de $f(\ell) + (L - \ell)\,\omega_0$ entonces:

$S = \{(s_1, s_2) \in \Re^2 : s_1 + s_2 \leq f(\ell^*) + (L - \ell^*)\,\omega_0; s_1 \geq 0, s_2 \geq L\omega_0\}$. Este es un conjunto convexo y compacto que contiene al punto de desacuerdo $(0, L\omega_0)$. Por lo tanto $\langle S, d \rangle$ es un problema de negociación.

Analicemos esta situación, como siempre sea

$f^N = \arg\max\,(s_1 - d_1)(s_2 - d_2) = \arg\max \left\{ s_1 \left(s_2 - L' \right) ;\text{ con } (s_1, s_2) \text{ en el triángulo } S \right\}.$

$f^N = \arg\max\,[(f(\ell) - \ell\omega) - 0]\,[(\ell\omega + (L - \ell)\,\omega_0) - L\omega_0]$



Sea $H = [f(\ell^*) - \ell^*\omega][\ell^*\omega + L\omega_0 - \ell^*\omega_0 - L\omega_0] = (f(\ell^*) - \ell^*\omega)(\ell^*\omega - \ell^*\omega_0)$
$= -(\ell^*)^2\omega^2 + (\ell^*\omega_0 + \ell^* f(\ell^*))\omega - \ell^*\omega_0 f(\ell^*)$.
De modo que H describe una parábola. Sus ceros son: $\frac{f(\ell^*)}{\ell^*}$ y ω_0.

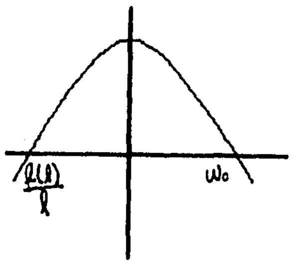


Figura 2.4:

Su punto medio $\frac{1}{2}\left(\frac{f(\ell^*)}{\ell^*} + \omega_0\right)$ es donde alcanza el máximo ya que $H' = -2\ell^*\omega + \left[\ell^* f(\ell^*) + (\ell^*)^2\omega_0\right] = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\ell^* f(\ell^*) + (\ell^*)^2\omega_0}{2\ell^*} = \frac{1}{2}\left[\frac{\ell^* f(\ell^*)}{\ell^*} + \omega_0\right]$.

Por lo tanto $\frac{1}{2}\left[\frac{f(\ell^*)}{\ell^*} + \omega_0\right] = \omega = \omega^*$ da el óptimo, que se interpreta como el promedio del sueldo fuera de la compañía y las unidades producidas por trabajar.

Así ya se tienen las contrataciones que maximizan. Ahora al sustituir ω^* debemos obtener s_1^*.

$s_1^* = f(\ell^*) - \ell^*\omega^* = f(\ell^*) - \ell^*\left[\frac{1}{2}\left(\frac{f(\ell^*)}{\ell^*} + \omega_0\right)\right] = f(\ell^*) - \frac{1}{2}f(\ell^*) - \frac{1}{2}\ell^*\omega_0$
$= \frac{1}{2}[f(\ell^*) - \ell^*\omega_0]$

Por lo tanto $\arg\max_{\omega \geq \omega_0} [f(\ell^*) - \ell^*\omega]\,\ell^*(\omega - \omega_0) = \left(\frac{1}{2}\left[\frac{f(\ell^*)}{\ell^*} + \omega_0\right], \ell^*\right)$.

2.5 ¿Es superfluo algún axioma?

Se ha mostrado que los cuatro axiomas de Nash definen, de manera única, una solución negociada, pero no se ha descartado la posibilidad de que algún subconjunto de éstos axiomas sea suficiente para determinar la solución única.

Para mostrar que ningún axioma es superfluo, se exhibirán (para cada axioma) soluciones que no cumplan con alguno de ellos, pero satisfagan los tres axiomas restantes y se verá que las soluciones son diferentes a la solución de Nash.

INV Sea $g : \Re^2_+ \to \Re$ una función creciente y estrictamente cuasicóncava (es decir: $g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \min\{g(x_1), g(x_2)\}$), y supongamos que cada uno de los puntos del conjunto $g(x_1, x_2) = c$ tiene recta tangente con pendiente -1 cuando $x_1 = x_2$.

Considérese la solución negociada que asigna a cada problema de negociación $\langle S, d\rangle$ el maximizador (único) de $g(s_1 - d_1, s_2 - d_2)$ sobre $\{s \in S : s \geq d\}$

Esta solución satisface PAR e IAI ya que es el maximizador de una función creciente. Satisface también SIM por la condición de la pendiente de su frontera.

Para mostrar que la solución difiere de la de Nash, tomemos la función particular $g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ y consideremos el problema de negociación $\langle S, d\rangle$ en el cual $d = (0,0)$ y S es el casco convexo de los puntos $(0,0), (1,0)$ y $(0,2)$.

El maximizador de g para este problema está en $2s_1 + s_2 = 2$. Como $g(s_1 - d_1, s_2 - d_2) = \sqrt{s_1 - d_1} + \sqrt{s_2 - d_2} = \sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}$ y puesto que $s_2 = 2(1 - s_1)$ tenemos: $g(s_1, s_2) = \sqrt{s_1} + \sqrt{2(1-s_1)}$, por lo tanto $g_{s_1}(s_1, s_2) = \frac{1}{2\sqrt{s_1}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-s_1)}} = 0 \iff$ $\frac{1}{2\sqrt{s_1}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-s_1)}} \Leftrightarrow \sqrt{2(1-s_1)} = 2\sqrt{s_1} \Leftrightarrow 2(1-s_1) = 4s_1 \Leftrightarrow 2 = 6s_1 \Leftrightarrow$

$s_1 = \frac{1}{3}$ y $s_2 = \frac{4}{3}$.

Ahora la solución de Nash es diferente pues:

$f^N(s_1, s_2) = (s_1 - d_1)(s_2 - d_2) = s_1 s_2 = s_1(2(1-s_1)) = 2s_1(1-s_1)$ por lo tanto $\left(f^N\right)_{s_1}(s_1, s_2) = 2s_1(-1) + (1-s_1)2 = 0 \Leftrightarrow 2(1-s_1) = 2s_1 \Leftrightarrow$

$s_1 = \frac{1}{2}$ y $s_2 = 1$.

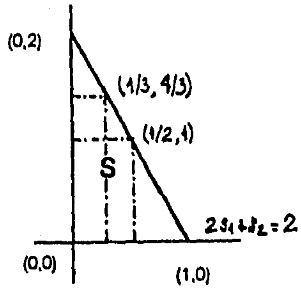


Figura 2.5:

SIM Para cada $\alpha \in (0,1)$ considere la solución f^{α} que asigna a $\langle S,d\rangle$ la pareja de utilidad:

$$\arg \max_{(d_1,d_2)\leq(s_1 s_2)} (s_1 - d_1)^{\alpha} (s_2 - d_2)^{1-\alpha}$$

La familia de soluciones $\{f^{\alpha}\}_{\alpha\in(0,1)}$ se conoce como la familia de *soluciones asimétricas de Nash.*

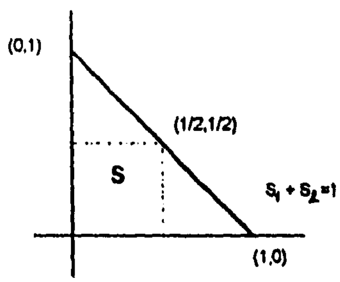
Para el problema $\langle S,d\rangle$ en el cual $d = (0,0)$ y S es el casco convexo de $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ tenemos que para $\alpha \neq \frac{1}{2}$, f^{α} (S,d) difiere de la solución de Nash.

Cada f^{α} satisface INV, IAI y PAR por los mismos argumentos que la solución de Nash.

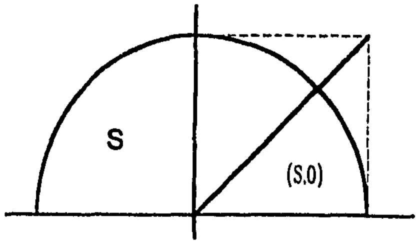
$f^{\alpha}(s_1,s_2) = (s_1 - d_1)^{\alpha}(s_2 - d_2)^{1-\alpha} = s_1^{\alpha}(1-s_1)^{1-\alpha}$ y
$(f^{\alpha})'(s_1,s_2) = \alpha(s_1)^{\alpha-1}(1-s_1)^{1-\alpha} - \frac{(s_1)^{\alpha}(1-\alpha)}{(1-s_1)^{\alpha}}$. Por lo tanto
$(f^{\alpha})_{s_1}(s_1,s_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s_1)^{\alpha-1}(1-s_1)^{1-\alpha} = \frac{(s_1)^{\alpha}(1-\alpha)}{(1-s_1)^{\alpha}}$
$\Leftrightarrow \alpha(1-s_1) = s_1(1-\alpha) \Leftrightarrow s_1 = \alpha$ y $s_2 = 1-\alpha$.

Mientras que para Nash:

$f^{N}(s_1,s_2) = (s_1 - d_1)(s_2 - d_2) = s_1 s_2 = s_1(1-s_1)$ por lo tanto
$\left(f^{N}\right)_{s_1}(s_1,s_2) = s_1(-1) + (1-s_1) = 0 \Leftrightarrow (1-s_1) = s_1 \Leftrightarrow s_1 = \frac{1}{2}$ y $s_2 = \frac{1}{2}$.



IAI Para cualquier problema de negociación $\langle S, d\rangle$ sea $\overline{s_i}$ la máxima utilidad que el jugador i obtiene en $\{s \in S : s \geq d\}$ para $i = 1, 2$. Consideremos la solución $f^{ks}(S, d)$ que asigna a $\langle S, d\rangle$ el miembro maximal de S sobre la línea que une a d y $(\overline{s_1}, \overline{s_2})$.

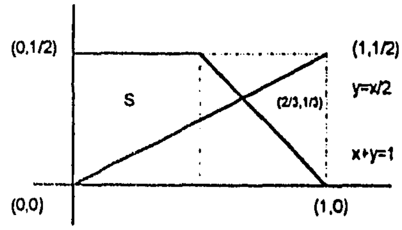


Para el problema de negociación en el cual $d = (0, 0)$ y S es el casco convexo de $(0,0), (1,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tenemos que $f^{ks}(S,d) \neq f^{N}(S,d)$, en efecto $f^{ks}(S,d)$ es la intersección de las rectas: $s_1 - 2s_2 = 0$ y $s_1 + s_2 = 1$, es decir, $s_1 = \frac{2}{3}$ y $s_2 = \frac{1}{3}$.

Y por el ejemplo anterior sabemos que $f^{N}(S,d) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Es inmediato que la solución satisface SIM, PAR e INV.

Esta solución se conoce como la *solución de Kalai-Smorodinsky*.



PAR Consideremos la solución f^d definida por $f^d(S,d) = d$. Esta solución satisface INV, SIM e IAI y es diferente a la solución de Nash.

Para cada uno de los cuatro axiomas se ha descrito una solución diferente a la de Nash que satisface los tres axiomas restantes.

Algunas de estas situaciones tienen axiomatizaciones interesantes:

Diremos que una solución negociada f satisface racionalidad individual fuerte (RIF) si $f(S,d) \succ d$ para cada problema de negociación $\langle S, d\rangle$. Entonces una solución satisface INV, PAR, IAI y RIF si y sólo si es una solución asimétirca de Nash, (esto es, de la forma f^{α} para algún $\alpha \in (0,1)$).

La solución de Kalai-Smorodinsky, f^{ks}, es la única solución que satisface INV, SIM, PAR y un axioma de "monotonicidad", el cual requiere que si $S \subset T$ y si para $i = 1, 2$ las utilidades máximas que el jugador i puede obtener en $\{s \in S : s \geq d\}$ y $\{s \in T : s \geq d\}$ son las mismas, entonces cada jugador recibe al menos tanta utilidad en la solución de $\langle T, d\rangle$ como en la solución de $\langle S, d\rangle$.

Finalmente, la solución f^d que asigna a cada problema de negociación el punto de desacuerdo es la única solución distinta a la solución de Nash que satisface INV, SIM, IAI y la condición de que cada solución dé a cada jugador al menos su utilidad en el desacuerdo.

De este modo PAR puede ser reemplazado por RIF en la caracterización de Nash.

2.6 Extensión de la teoría

2.6.1 Más de dos jugadores

Todos los argumentos concernientes a la solución de Nash pueden ser extendidos a situaciones en las cuales hay más de dos jugadores. Si hay n jugadores entonces un problema de negociación es una pareja $\langle S, d\rangle$, en la cual S es un subconjunto, convexo y compacto, de $\Re^n$, $d \in S$, y existe $s \in S$ tal que $s_i > d_i$ para $i = 1, ..., n$.

Los cuatro axiomas INV, SIM, IAI y PAR pueden ser extendidos para aplicarse a problemas con n jugadores, y puede mostrarse que la única solución negociada que satisface los axiomas es la función que asocia a cada problema $\langle S, d\rangle$ el vector de utilidades:

$$\arg\max_{d \leq s \in S} \prod_{i=1}^{n} (s_i - d_i).$$

2.6.2 Una interpretación alternativa de la utilidad

Hasta ahora se han interpretado los elementos de S como parejas de utilidades derivadas de las preferencias de los jugadores sobre loterías[1] en el conjunto de acuerdos físicos. Se ha supuesto que estas preferencias satisfacen las condiciones de Von Neumann y Morgenstern, de manera que las funciones de utilidad que las representan son únicas salvo una transformación afín. Bajo esta suposición, el axioma INV es apropiado.

[1] Entendemos por lotería el evento en el cual el acuerdo a se alcanza con probabilidad p y el evento b se alcanza con probabilidad $(1-p)$. Usualmente se denota $\{pa + (1-p)b\}$.

Existen interpretaciones alternativas en las cuales el riesgo no entra explícitamente. Para hacer que la teoría de Nash tenga sentido se requiere sólo que las utilidades representen las preferencias señaladas de manera única salvo una transformación afín.

Una alternativa para comenzar con una preferencia del jugador sobre loterías es adoptar como primitiva la preferencia del jugador sobre el conjunto de acuerdos combinada con sus respuestas a todas las preguntas posibles de la forma "¿Prefieres a que a' más de lo que prefieres b que b'?".

Bajo suposiciones adicionales las preferencias de los jugadores pueden ser representadas por una función de utilidad que es única salvo una transformación afín.[2]

Anteriormente (repartiendo un dólar) se han interpretado los resultados como mostrar el efecto de cambios en el grado de adversión al riesgo de los jugadores sobre la solución de Nash. Bajo la interpretación alternativa de la utilidad presentada aquí, los resultados muestran el efecto de cambios en la razón a la cual las utilidades marginales de los jugadores decrecen. Particularmente los resultados para el juego dividiendo un dólar son los siguientes: Si la utilidad marginal del jugador $2'$ decrece más rápido que la del jugador 2, entonces la parte del dólar para el jugador 1 en la solución de Nash, es más grande cuando su oponente es el jugador $2'$ que cuando es el jugador 2. Si la utilidad marginal del jugador 2 decrece más rápido que la del jugador 1 entonces la parte del dólar para el jugador 1 en la solución de Nash excede a $\frac{1}{2}$.

2.6.3 Una definición alternativa del Problema de Negociación.

Un problema de negociación, como se ha definido hasta ahora, consiste de un conjunto S, convexo y compacto contenido en $\Re^2$ y un elemento $d \in S$. Sin embargo, la solución de Nash en (S, d) depende solamente de d y de la frontera de Pareto de S.

El que S sea compacto y convexo es importante sólo mientras estas condiciones aseguren que la frontera de Pareto de S está bien definida y es cóncava.

En lugar de comenzar con el conjunto S, se podían haber impuesto los axiomas a un problema definido por una función cóncava no decreciente (y un punto de desacuerdo d). Como se hará posteriormente.

[2] Ver Krantz, Luce, Suppes y Traversky; Foundations of Measurement, Vol. I; 1971

Capítulo 3

ENFOQUE ESTRATEGICO: MODELO DE OFERTAS ALTERNANTES.

3.1 Enfoque estratégico

En el enfoque axiomático el resultado de la negociación está definido por una lista de propiedades que debe cumplir. En el enfoque estratégico el resultado es un equilibrio de un modelo explícito del proceso de negociación.

Cualquier modelo estratégico incorpora una descripción detallada de un proceso de negociación. Como veremos una gran variedad de tales procedimientos, nos enfrentamos con la difícil tarea de formular un modelo manejable que exprese las influencias principales en el resultado.

Un modelo complejo que imponga poca estructura a la negociación es improbable a rendir resultados definitivos; un modelo simple puede omitir un elemento clave en la determinación del arreglo. Con esta observación en mente, se construye en este capítulo un modelo que se concentra en sólo un hecho sobresaliente de la negociación: la *actitud del participante ante la demora.*

3.2 La estructura de la negociación

3.2.1 Elementos de la situación que se modela.

- *Dos jugadores* negocian sobre un *"pastel" de tamaño 1.*
- Un *acuerdo* es una pareja (x_1, x_2), donde x_i es la parte del pastel para el jugador i.
- El *conjunto* de *posibles acuerdos* es
  $X = \{(x_1, x_2) \in \Re^2 : x_1 + x_2 = 1 \text{ y } x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2\}$.
- Las *preferencias* de los jugadores sobre X son diametralmente opuestas. Cada jugador sólo se interesa por la parte del pastel que va a recibir y prefiere recibir más que menos. Esto es, el jugador i prefiere $x \in X$ a $y \in X$ si y sólo si $x_i > y_i$. Debemos notar que X es el conjunto de acuerdos, no el conjunto de parejas de utilidad, no estamos prestando atención al caso en el cual lo anterior es un segmento de recta.

Este es un arreglo simple, pero es lo suficientemente rico para incluir los ejemplos antes estudiados en la sección de Aplicaciones. En el caso de la división de un dólar, interpretamos como x_i la cantidad del mismo que el jugador i recibe. En el modelo de negociación de salarios, x_i es el beneficio de la compañía. Ahora en un caso de negociación del precio de venta de un bien indivisible, por ejemplo, x_i sería el precio que el comprador paga al vendedor.

3.2.2 El proceso de negociación.

Los jugadores pueden actuar sólo en tiempos de un conjunto infinito $T = \{0, 1, 2, ...\}$.

En cada tiempo $t \in T$ uno de los jugadores, digamos j, acepta la oferta: escoge (A), o la rechaza: escoge (R). Si la oferta es aceptada, entonces la negociación termina y el acuerdo se implementa. Si la oferta es rechazada, entonces la jugada pasa al tiempo $t + 1$, en este período el jugador j propone un acuerdo, que el jugador i podría aceptar o rechazar.

El juego continúa de esta manera; cada vez que una oferta es rechazada, la jugada pasa al siguiente período, en el cual es el turno, del jugador que rechazó, para proponer un acuerdo.

- No hay límite en el número de períodos.
- Una vez que una oferta ha sido rechazada queda vetada.

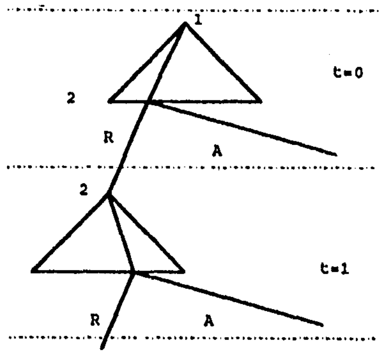


Figura 3.1:

- El jugador que hizo la oferta es libre para proponer cualquier acuerdo en el futuro.
- No hay restricciones en lo que se debe o no aceptar.
- En todo momento, cada jugador conoce todas sus "movidas" previas y todas las del otro jugador.
- Este procedimiento se modela como un juego extensivo. Por conveniencia se da al juego una estructura de tiempo explícita. Los dos primeros períodos del juego se muestran en la figura de la siguiente página.

El juego comienza en la parte alta del árbol y el tiempo empieza en el período 0. El número al lado de cada nodo indica el jugador al que le toca moverse en ese período. Así el jugador 1 es el primero en moverse; tiene un continuo (una infinidad no numerable) de elecciones (indicado por el triángulo anexado a su nodo de decisión). Este continuo corresponde a los acuerdos (miembros de X) que el jugador 1 puede proponer.

Cada proposición posible lleva a un nodo de decisión para el jugador 2, en el cual acepta (A) o rechaza (R) la proposición. (Se señala el nodo correspondiente a la propuesta x^0).

Si el jugador 2 rechaza la oferta del jugador 1 (rama a mano izquierda), entonces el juego pasa al período 1, donde es el turno del jugador 2 para hacer una oferta.

Una oferta típica del jugador 2 es x^1; para cada oferta, el jugador 1 elige A o R. Si el jugador 1 escoge A, entonces el juego termina con el resultado $(x^1, 1)$, si escoge R el juego continúa, entonces el jugador 1 hace una oferta más, el jugador 2 responde y así sucesivamente.

Hay que notar que el árbol es infinito en dos aspectos:

Primero, en cualquier nodo donde un jugador haga una oferta, existe un continuo en lugar de un número finito de elecciones. Consecuentemente no es posible mostrar en el diagrama *cada* nodo subsecuente del otro jugador. Se ha seleccionado una opción "típica" en cada punto mencionado.

Segundo, el árbol contiene trayectorias no acotadas en las cuales *todas* las ofertas son rechazadas, de manera que nunca se alcanza el nodo terminal. se asume que cada trayectoria lleva al mismo resultado, el cual denotamos D (desacuerdo).

Nótese también que los papeles de los jugadores son casi simétricos, la única asimetría es que el jugador 1 es el primero en hacer una oferta.

En lugar de etiquetar a los nodos terminales, aquellos en los que se concluye un acuerdo, con pagos, se les han anexado etiquetas de la forma (x, t), dada la naturaleza del acuerdo y el tiempo en el cual es alcanzado. También se ha supuesto que todas las trayectorias infinitas, en las cuales el acuerdo nunca es alcanzado, llevan al mismo resultado D.

A fin de analizar las opciones de los jugadores tenemos que especificar sus preferencias sobre estos resultados. Pero antes de hacerlo (siguiente sección), hay que notar que al definir un resultado ya sea como una pareja (x, t) o D hemos hecho una suposición restrictiva acerca de estas preferencias:

Para cualquier período $t \geq 1$ *muchas* trayectorias llevan, a través del árbol, a un nodo terminal con etiqueta (x, t), ya que se asigna este resultado toda vez que los jugadores acuerden x en el tiempo t, sin importar la trayectoria previa a las ofertas rechazadas. (En el diagrama 3.1 no es claro ésto, dado que sólo contiene una oferta "típica" en cada estado). Así suponemos que los jugadores se preocupan sólo por la naturaleza del acuerdo y el tiempo en el que se alcanza, *no* por la secuencia de ofertas y contraofertas que llevan al acuerdo.

En particular, ningún jugador *lamenta* haber propuesto una oferta que se rechaza. Análogamente, se supone que los jugadores son indiferentes acerca de la secuencia de ofertas y rechazos que llevan al desacuerdo.

Finalmente notemos que la estructura del juego es diferente a la de un juego de repetición. La estructura de este árbol es repetitiva, pero una vez que el jugador acepta una oferta, el juego cesa de repetirse.

3.3 Preferencias

3.3.1 Suposiciones.

En el enfoque axiomático de Nash, las preferencias de los jugadores sobre los resultados físicos son justificadas por sus actitudes ante el riesgo; se vió en la sección; Extensión de la teoría, que las preferencias sobre resultados físicos solamente, pueden no ser suficiente para determinar una solución. Aquí, la estructura del juego requiere que incluyamos en la descripción de las preferencias de los jugadores sus actitudes hacia acuerdos alcanzados en varios puntos a la vez. Estas *preferencias de tiempo* son la fuerza motriz del modelo.

A fin de completar la descripción del juego necesitamos especificar las preferencias de los jugadores.

Se supone que cada jugador $i = 1, 2$ tiene un orden de preferencia completo, transitivo y reflexivo, $\preceq_i$, sobre el conjunto $(X \times T) \cup \{D\}$ de *resultados*.

Definición

Un **juego de negociación de ofertas alternantes** es un juego extensivo con la estructura definida en la sección 3.2, en el cual el orden de preferencia, $\preceq_i$, de cada jugador sobre $(X \times T) \cup \{D\}$ es completo, transitivo y reflexivo.

En el análisis principal de este capítulo se imponen ciertas condiciones sobre los órdenes de preferencia de los jugadores. Estas condiciones son lo suficientemente débiles para permitir una amplia variedad de preferencias. En particular, preferencias sobre $X \times T$ para el jugador i que son representadas por la función $\delta_i^t u_i(x_i)$ donde $0 < \delta_i < 1$ y u_i es cualquier función cóncava creciente. A δ_i se le conoce como *factor de descuento.*

Específicamente nuestras suposiciones son las siguientes:

Primero, el resultado menos preferido es D.

A1 (*el desacuerdo es el peor resultado*).

Para todo $(x, t) \in X \times T$ tenemos $(x, t) \succeq_i D$.

Las condiciones restantes son concernientes al comportamiento de $\preceq_i$ en $X \times T$.

Primero, se requiere que entre acuerdos alcanzados en el mismo período, el jugador i prefiera valores más grandes de x_i y prefiera obtener cualquier partición del pastel "ahora que después".

A2 (*el pastel es deseado*)

Para cualquier $t \in T$, $x \in X$ y $y \in X$ tenemos $(x,t) \succ_i (y,t) \Leftrightarrow x_i > y_i$.

A3 (*el tiempo es valioso*)

Para cualquier $t \in T$, $s \in T$ y $x \in X$ tenemos $(x,t) \succeq_i (x,s)$ si $t < s$, con preferencia estricta si $x_i > 0$.

A continuación suponemos que el orden de preferencia del jugador i es continuo.

A4 (*continuidad*)

Sean $\{(x_n,t)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{(y_n,s)\}_{n=1}^{\infty}$ las sucesiones de miembros de $X \times T$ para las cuales $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Entonces $(x,t) \succeq_i (y,s)$ cada vez que $(x_n,t) \succeq_i (y_n,s)$ para todo n.

El orden $\succeq_i$ satisface las suposiciones A2 hasta A4 si y sólo si las preferencias de i sobre $X \times T$ pueden ser representadas por una función de utilidad continua $U_i : [0,1] \times T \to \Re$ que es creciente en su primer argumento (la parte recibida por i) y decreciente en su segundo argumento (el período en el que se recibe) cuando el primer argumento es positivo.

La siguiente suposición simplifica grandemente la estructura de las preferencias. Requiere que las preferencias entre (x,t) y (y,s) dependan sólo de x , y y la *diferencia* $s-t$. Así, por ejemplo, ésto implica que si $(x,1) \sim_i (y,2)$ entonces $(x,4) \sim_i (y,5)$.

A5 (*estacionalidad*)

Para cualquier $t \in T$, $x \in X$ y $y \in X$ tenemos $(x,t) \succeq_i (y,t+1) \Leftrightarrow (x,0) \succeq_i (y,1)$.

Si el orden de preferencia $\succeq_i$ satisface A2 hasta A5 entonces existe una función de utilidad U_i que representa las preferencias de i sobre $X \times T$ y tiene la forma específica: para cada $\delta \in (0,1)$ existe una función continua creciente $u_i : [0,1] \to \Re$ tal que $U_i(x,t) = \delta^t u_i(x_i)$.

Hay que notar que para cada valor de δ podemos encontrar una función adecuada u_i (no necesariamente cóneava), y que el valor de δ no está determinado por las preferencias de los jugadores.

Para facilitar el análisis subsecuente es conveniente introducir notación adicional.

Para cualquier resultado (x,t) se sigue de A2 a A4, que existe un único $y \in X$ tal que el jugador i es indiferente entre (x,t) y $(y,0)$ (en cuyo caso A3 implica que si $x_i > 0$ y $t \geq 1$ entonces $y_i < x_i$), o que *cada* resultado $(y,0)$ (incluyendo $y_i = 0$) es preferido por i a (x,t).

En efecto, si $(x,t) \succ_i (y,0)$ para todo y, en particular debería cumplirse para $y = x$, pero eso sería $(x,t) \succ_i (x,0)$ lo que podría pasar sólo si $t < 0$. Lo cual es una contradicción.

Definamos $v_i : [0,1] \times T \to [0,1]$ para $i = 1,2$ como sigue:

$$v_i(x_i,t) = \begin{cases} y_i & \text{si } (y,0) \sim_i (x,t) \\ 0 \text{ si } & (y,0) \succ_i (x,t) \text{ para toda } y \in X \end{cases}$$

El análisis puede ser simplificado haciendo la suposición más restrictiva de que para toda (x,t) y para $i = 1,2$ existe y tal que $(y,0) \sim_i (x,t)$. Esta restricción deja fuera algunos casos interesantes y por lo tanto no se incluye aquí.

Se sigue de la definición de v_i que si $v_i(x_i,t) > 0$ entonces el jugador i es indiferente entre recibir $v_i(x_i,t)$ en el período 0 y x_i en el período t, esto es $v_i(x_i,t) \sim_i (x_i,t)$. Con un pequeño abuso de notación nos referiremos a $v_i(x_i,t)$ como el *valor presente* de (x_i,t) *para el jugador* i aún cuando $v_i(x_i,t) = 0$.

Nótese que $(y,0) \succsim_i (x,t)$ cada vez que $y_i = v_i(x_i,t)$ y $(y,t) \succ_i (x,s)$ cada vez que $v_i(y_i,t) > v_i(x_i,s)$.

Si el orden de preferencia $\succsim_i$ satisface las suposiciones A1 hasta A4, entonces para cada $t \in T$ la función $v_i(\cdot,t)$ es continua, no decreciente y creciente cada vez que $v_i(x_i,t) \geq 0$, más aún, tenemos $v_i(x_i,t) \leq x_i$ para cada $(x,t) \in X \times T$ y $v_i(x_i,t) < x_i$ cada vez que $x_i > 0$ y $t \geq 1$. Suponiendo además A5, tenemos que $v_i(v_i(x_i,1),1) = v_i(x_i,2)$ para cualquier $x \in X$.

Un ejemplo de las funciones $v_1(\cdot,1)$ y $v_2(\cdot,1)$ se muestran en la siguiente figura.

Bajo la suposición A3 cualquier cantidad dada vale menos entre más tarde se reciba. La condición final que se impone a las preferencias es la de que la pérdida por

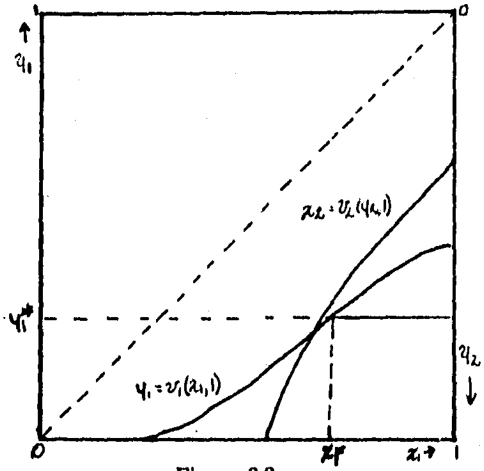


Figura 3.2:

demora asociada a cualquier cantidad dada es una función creciente de la cantidad.

A6 (*pérdida creciente por demora*)

La diferencia $x_i - v_i(x_i, 1)$ es una función creciente de x_i.

Bajo esta suposición la gráfica de cada función $v(\cdot, 1)$ en la figura (3.2) tiene una pendiente (relativa a su orígen) de menos de 1 en cualquier punto.

La suposición A6 también restringe el caracter de la función u_i en cualquier representación $\delta^t u_i(x_i)$ de $\succsim_i$.

Afirmación

Si u_i es diferenciable entonces A6 implica que $\delta u_i'(x_i) < u_i'(v_i(x_i, 1))$ siempre que $v_i(x_i, 1) > 0$.

Demostración:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - v_i(x_i, 1)) \geq 0 \Rightarrow 1 - v_i'(x_i, 1) \geq 0 \Rightarrow v_i'(x_i, 1) \leq 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(U_i(x_i) - U_i(v_i(x_i, 1), 0)) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\delta^1 u_i(x_i) - \delta^0 u_i(v_i(x_i, 1))\right] \leq 0 \Rightarrow$$

$$\delta u_i'(x_i) - u_i'(v_i(x_i,1))\, v_i'(x_i,0) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\delta u_i'(x_i) - u_i'(v_i(x_i,1)) \leq \delta u_i'(x_i) - u_i'(v_i(x_i,1))\, v_i'(x_i,0) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\delta u_i'(x_i) \leq u_i'(v_i(x_i,1))$$

Esta condición es más débil que la condición de concavidad de u_i, la cual dice que $u_i'(x_i) \leq u_i'(v_i(x_i,1))$, es decir, en una función cóncava la derivada del menor es más grande que la del mayor.

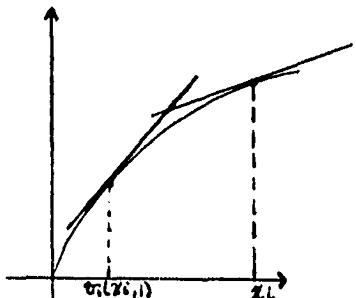


Figura 3.3:

Esto completa la especificación de las preferencias de los jugadores.

Como no existe incertidumbre explícita en la estructura de un juego de negociación de ofertas alternantes, y como restringimos la atención a situaciones en las cuales ningún jugador usa ningún mecanismo de azar para hacer su elección, no hay necesidad de hacer suposiciones acerca de las preferencias de los jugadores sobre resultados inciertos.

3.3.2 La intersección de las gráficas de $v_1(\cdot,1)$ y $v_2(\cdot,1)$

En el análisis subsecuente la intersección de las gráficas $v_1(\cdot,1)$ y $v_2(\cdot,1)$ tiene especial significancia.

Se mostrará ahora que la intersección es única, esto es, existe sólo una pareja $(x,y) \in X \times X$ tal que $y_1 = v_1(x_1,1)$ y $x_2 = v_2(y_2,1)$.

Esta unicidad se ilustra en la figura 3.2.

Lema 2

Si el orden de preferencia $\succeq_i$ de cada jugador i satisface A2 hasta A6, entonces existe una única pareja $(x^*, y^*) \in X \times X$ tal que $y_1^* = v_1(x_1^*, 1)$ y $x_2^* = v_2(y_2^*, 1)$.

Demostración:

Para cada $x \in X$ sea $\Psi(x) = (\Psi_1(x), \Psi_2(x))$ el acuerdo para el cual $\Psi_1(x) = v_1(x_1, 1)$, y definamos $H : X \to \Re$ por $H(x_1, x_2) = x_2 - v_2(\Psi_2(x), 1)$ que resulta una función continua.

La pareja de acuerdos x y $y = \Psi_2(x)$ satisface también $x_2 = v_2(y_2, 1) \Longleftrightarrow H(x) = 0$, esto es, $x_2 = v_2(y_2, 1) \Leftrightarrow x_2 = v_2(\Psi_2(x), 1)$

$v_2 : [0,1] \times T \to [0,1] \Rightarrow 0 \leq v_2(\cdot,\cdot) \leq 1$

$H(0,1) = 1 - v_2(\Psi_2(0,1), 1) \geq 0$ y $H(1,0) = 0 - v_2(\Psi_2(1,0), 1) \leq 0$

Sea $f(x_1) = H(x_1, 1 - x_1)$, entonces

$f(0) = H(0,1) \geq 0$ y $f(1) = H(1,0) \leq 0$ por lo tanto como $f(x_1)$ es una función continua, el teorema del valor intermedio garantiza que existe $\widetilde{x}_i$, un cero de $f(x_1)$ que se traduce en cero de H.

$$\begin{aligned} H(x) &= x_2 - v_2(\Psi_2(x), 1) = (1 - x_1) - v_2(\Psi_2(x), 1) + [v_1(x_1, 1) - v_1(x_1, 1)] \\ &= [v_1(x_1, 1) - x_1] + [1 - v_1(x_1, 1) - v_2(1 - v_1(x, 1), 1)] = f(x_1) \end{aligned}$$

Por el axioma A6 $v_i(x_i, 1) - x_i$ es decreciente y como $v_i(x_i, 1)$ es no decreciente en x_i los dos sumandos son decrecientes.

Con lo que tenemos que f es continua y decreciente lo que implica que existe un *único* cero. El cero es la pareja (x^*, y^*) que es la intersección de las rectas: $\begin{matrix} x_2 = v_2(y_2, 1) \\ y_1 = v_1(x_1, 1) \end{matrix}$

3.3.3 Ejemplos

Posteriormente se seguirá trabajando con la función de utilidad U_i definida por $U_i(x, t) = \delta_i^t x_i$ para todo $(x, t) \in X \times T$ y $U_i(D) = 0$ donde $0 < \delta_i < 1$.

Afiramación

Las preferencias que representa esta función satisfacen A1 hasta A6.

Demostración:

A1

P.D. $(x_i, t) \succeq_i D$

Para todo $(x, t) \in X \times T$ tenemos que $\delta_i^t x_i \geq 0 \Rightarrow U_i(x_i, t) \geq U_i(D)$

A2

P.D. $U_i(x, t) > U_i(y, t) \Leftrightarrow x_i > y_i$

$\Rightarrow)$ $\delta_i^t x_i > \delta_i^t y_i \Rightarrow x_i > y_i$

$\Leftarrow)$ $x_i > y_i \Rightarrow \delta_i^t x_i > \delta_i^t y_i \Rightarrow U_i(x, t) > U_i(y, t)$

A3

P.D. $U_i(x, t) \geq U_i(x, s)$ si $t < s$

Para $0 \leq x_i \leq 1$ y $0 < \delta < 1$, $\quad t < s \Leftrightarrow \delta_i^t > \delta_i^s \Leftrightarrow \delta_i^t x_i > \delta_i^s x_i$

$\Longleftrightarrow U_i(x, t) \geq U_i(x, s)$.

A4

P.D. $U_i(x_n, t) \geq U_i(y_n, s) \Rightarrow U_i(x, t) \geq U_i(y, s)$ cuando $\lim_{n\to 0} x_n = x$ y $\lim_{n\to 0} y_n = y$.

$U_i(x_n, t) \geq U_i(y_n, s) \Rightarrow \delta_i^t x_{n_i} \geq \delta_i^t y_{n_i} \Rightarrow \lim_{n\to 0} \delta_i^t x_{n_i} \geq \lim_{n\to 0} \delta_i^t y_{n_i} \Rightarrow \delta_i^t x \geq \delta_i^t y$ $\Rightarrow U_i(x, t) \geq U_i(y, s)$.

A5

P.D. $U_i(x, t) \geq U_i(y, t+1) \Leftrightarrow U_i(x, 0) \geq U_i(y, 1)$

$U_i(x, t) \geq U_i(y, t+1) \Leftrightarrow \delta_i^t x_i \geq \delta_i^{t+1} y_i \Leftrightarrow x \geq \delta_i^1 y \Leftrightarrow U_i(x, 0) \geq U_i(y, 1)$

Nos referimos a δ_i como el *factor de descuento* del jugador i y a las preferencias como *preferencias de tiempo con tasa constante de descuento.* (Este es el nombre convencional de las preferencias. Sin embargo, dado que cualquier preferencia que satisfaga A2 hasta A5 puede ser representada sobre $X \times T$ por una función de utilidad de la forma $\delta_i^t u_i(x_i)$ el rasgo distintivo es la linealidad de u_i, y no la constancia de la tasa.

Se tiene $v_i(x_i, t) = \delta_i^t x_i$ en este caso.

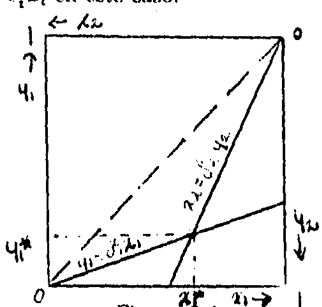


Figura 3.4:

Ejemplo

La función de utilidad definida por $U_i(x_i,t) = x_i - c_i t$ y $U_i(D) = -\infty$, donde $c_i > 0$ representa preferencias para el jugador i satisface A1 hasta A5, pero no A6.

Demostración:

A1

Para toda $(x,t) \in X \times T$ tenemos que $x_i - c_i t > -\infty \Rightarrow U_i(x_i,t) \geq U_i(D)$

A2

$U_i(x,t) \geq U_i(y,t) \Leftrightarrow x_i - c_i t > y_i - c_i t \Leftrightarrow x_i > y_i$

A3

$t < s \Rightarrow -c_i t > -c_i s \Rightarrow x_i - c_i t > x_i - c_i s \Rightarrow U_i(x,t) \geq U_i(y,s)$

A4

$U_i(x_n,t) \geq U_i(y_n,s) \Rightarrow x_{n_i} - c_i t \geq y_{n_i} - c_i s \Rightarrow \lim\limits_{n\to 0} (x_{n_i} - c_i t) \geq \lim\limits_{n\to 0} (y_{n_i} - c_i s)$
$\Rightarrow x_i - c_i t \geq y_i - c_i s \Rightarrow U_i(x,t) \geq U_i(y,s)$

A5

$U_i(x,t) \geq U_i(y,t+1) \Leftrightarrow x_i - c_i t > y_i - c_i(t+1) \Leftrightarrow x_i > y_i - c_i$
$\Leftrightarrow U_i(x,0) \geq U_i(y_i,1)$

Veamos ahora que el axioma A6 no se cumple

Se tiene $v_i(x_i,t) = \begin{cases} x_i - c_i t \text{ si } x_i \geq c_i t \\ 0 \quad \text{otro caso} \end{cases}$

Así si $x_i \geq c_i t$ entonces $v_i(x_i,1) = x_i - c_i$, de modo que $x_i - v_i(x_i,1) = c_i$ que es constante en lugar de ser creciente en x_i.

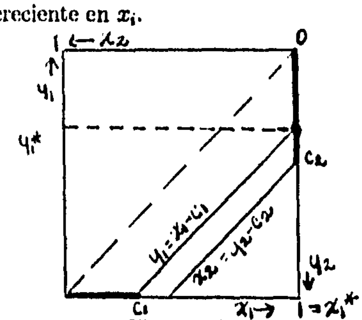


Figura 3.5:

Nos referimos a c_i como el *costo de demora* o *costo de negociación* del jugador i, y a las preferencias como *preferencias de tiempo con un costo de demora constante.*

Hay que notar que aunque las preferencias con costo de demora constante violan

A6, sigue existiendo una pareja única $(x,y) \in X \times T$ tal que $y_1 = v_1(x_1,1)$ y $x_2 = v_2(y_2,1)$ siempre y cuando $c_1 \neq c_2$. Ver gráfica en la sección 3.9.2

Nótese también que las dos familias de preferencias son cualitativamente diferentes. Por ejemplo, si el jugador i tiene preferencias con una tasa de descuento constante entonces es indiferente acerca del tiempo de un acuerdo que le dé 0, mientras que si tiene preferencias con costo de demora constante prefiere obtener ese acuerdo lo antes posible. (Como las preferencias con costo constante por demora satisfacen A2 hasta A5 pueden ser representadas en $X \times T$ por una función de utilidad de la forma $\delta_i^t u_i(x_i)$. Sin embargo, no existe un valor de δ_i para el cual u_i sea lineal.).

3.4 Estrategias

La estrategia de un jugador en un juego extensivo especifica una acción[1] en cada nodo del árbol en el cual es su turno de elegir.

Así en un problema de negociación de ofertas alternantes una estrategia del jugador 1, por ejemplo, comienza especificando:

i) el acuerdo que propone en $t = 0$ y

ii) para cada pareja consistente de una propuesta del jugador 1 en $t = 0$ y una contra propuesta del jugador 2 en $t = 1$, la elección A o R en $t = 1$; y si R es escogida, una contrapropuesta más en el período $t = 2$.

La estrategia continúa especificando acciones en cada período futuro para cada posible historia de acciones hasta ese punto. Es decir, las estrategias de los jugadores en un juego de negociación de ofertas alternantes se definen de la siguiente manera:

Sea X^t el conjunto de todas las sucesiones $(x^0, ..., x^{t-1})$ de miembros de X.

Una *estrategia del jugador 1* es una sucesión $\sigma = \{\sigma^t\}_{t=0}^{\infty}$ de funciones donde cada una asigna a cada historia una acción del conjunto relevante. Así,

$$\sigma^t : X^t \to X \text{ si } t \text{ es par y}$$
$$\sigma^t : X^t \to \{A, R\} \text{ si } t \text{ es impar.}$$

[1] Tal plan de acción se llama a veces estrategia pura para distinguirla del plan en el cual el jugador usa un mecanismo de azar para elegir su acción. En el presente trabajo no es necesario porque se permite usar a los jugadores el azar sólo cuando se dice explícitamente.

La estrategia del jugador 1 consiste en dar una oferta en todo período par t, para toda historia de t ofertas rechazadas, y una respuesta (aceptar o rechazar) en todo período impar t para toda historia consistente de t ofertas rechazadas seguidas por una proposición del jugador 2.

Análogamente, una *estrategia del jugador 2* es una sucesión $\tau = \{\tau^t\}_{t=0}^{\infty}$ de funciones, con

$$\tau^t : X^t \rightarrow \{A, R\} \text{ si } t \text{ es par y}$$
$$\tau^t : X^t \rightarrow X \text{ si } t \text{ es impar.}$$

El jugador 2 acepta o rechaza la oferta del jugador 1 en cada período par y hace una oferta en cada período impar.

El conjunto X^0 consta de la historia "nula" precedente al período 0, formalmente es un sólo punto, de manera que σ^0 puede ser identificado como un miembro de X.

Hay que notar que una estrategia especifica acciones en cada período, para *toda* posible historia de acciones hasta ese punto, incluyendo historias que son excluídas por acciones previas del jugador 1.

Toda estrategia del jugador 1 debe, por ejemplo, describir una elección de aceptar o rechazar (A o R) en $t = 1$, en el caso de que proponga $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en $t = 0$ y el jugador 2 rechace esta oferta y haga una contraoferta, aún si su estrategia pide al jugador 1 hacer una oferta distinta de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en $t = 0$. Así la estrategia del jugador 1 tiene que decir qué hará en nodos que nunca serán alcanzados si sigue las indicaciones de su *propia* estrategia en períodos de tiempo anteriores. Al principio ésto puede parecer extraño. En la afirmación "*hoy voy a realizar la acción: x y mañana tomaré la acción: m en el caso de que realice x hoy y n en el caso de que haga y hoy*" la última condición parece superflua.

Si el interés se centra en el equilibrio de Nash (ver sección 3.6) entonces hay redundancia en esta especificación de la estrategia. Supongamos que la estrategia σ' del jugador 1 difiere de la estrategia σ sólo en las acciones que recomienda después de historias que no se alcanzan cuando se sigue σ. Entonces las parejas de estrategias $\left(\sigma', \tau\right)$ y $\left(\sigma', \tau\right)$ llevan al mismo resultado para toda estrategia τ del jugador 2.

Sin embargo, se desea usar el concepto de subjuego en equilibrio perfecto (ver sección 3.7), entonces se necesita una estrategia del jugador para especificar sus acciones después de historias que nunca ocurrirán si usa dicha estrategia.

A fin de examinar lo óptimo de la estrategia del jugador i después de una historia arbitraria, por ejemplo después de una en la que el jugador j toma acciones inconsistentes con su estrategia original, necesitamos contemplar la expectativa del jugador i sobre las acciones futuras del jugador j. Las componentes de la estrategia del jugador j que especifican sus acciones después de dicha historia, pueden ser interpretadas como reflejar las creencias de j acerca de lo que i espera que haga él después de esta historia.

Hay que notar que no se pide que las estrategias sean "estacionarias": se permite que las ofertas y reacciones a ofertas dependan de eventos en todos los períodos previos. La suposición de estacionalidad se hace algunas veces en modelos de negociación, pero es problemático. Una estrategia estacionaria es "simple" en el sentido de que las acciones que recomienda en todo período no dependen del tiempo ni de los eventos en períodos previos. Sin embargo, tal estrategia significa que el jugador j espera que i se adhiera a su comportamiento estacionario aún si el mismo no lo hace. Por ejemplo, una estrategia estacionaria en la que el jugador 1 siempre hace la propuesta $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ significa que aún después de que el jugador 1 hizo la oferta $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ mil veces, el jugador 2 aún cree que el jugador 1 hará la oferta $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en el siguiente período. Si se desea suponer que las estrategias de los jugadores son "simples", entonces parece que en estas circunstancias uno debe suponer que el jugador 2 cree que el jugador 1 continuará ofreciendo $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

3.5 Estrategias como autómata

Una estrategia en un juego de negociación de ofertas alternantes puede ser muy compleja. La acción tomada por un jugador en cualquier punto puede depender arbitrariamente en toda la historia de acciones hasta ese punto. Sin embargo, la mayoría de las estrategias que encontramos en lo siguiente de este trabajo tienen una estructura relativamente simple.

Ahora introduciremos un lenguaje que nos permite describir tales estrategias en una manera compacta y sin ambigüedades.

La idea es simple:

- Se codifican las características de la historia que son relevantes para la elección de un jugador en una variable llamada *estado*.
- Una *acción* del jugador en cualquier punto está determinada por el estado y por el valor de algunas variables conocidas por todos.

- Conforme el juego continúa, (el estado puede cambiar o puede permanecer igual), su progresión está dada por una *regla de transición*. Asignando una acción a cada uno de los varios estados (generalmente no muchos), y dando una regla de transición, lo cual es frecuentemente más simple que especificar una acción después de cada una de las historias posibles.

Las variables conocidas incluyen la identidad del jugador de quien es el turno moverse y el tipo de acción que debe tomar (proponer una oferta o responder a una oferta). La progresión de estas variables está dada por la estructura del juego. Estas variables incluyen también la actual oferta sobresaliente y, en algunos casos, la oferta que se rechazó más recientemente.

A continuación se presentan las descripciones de los perfiles de estrategias en tablas:

		estado Q	estado P
jugador 1	propone	x^Q	x^P
	acepta	$x_1 \geq \alpha$	$x_1 > \beta$
jugador 2	propone	y^Q	y^P
	acepta	$x_1 = 0$	$x_1 < \eta$
	Transiciones	Ir a P si el jugador 1 propone x con $x_1 > \theta$	Absorbente

Aquí tenemos dos estados: Q y P.

Como siempre, convenimos que la columna a la izquierda describa el estado inicial. Las primeras cuatro filas especifican el comportamiento de los jugadores en cada estado Q, por ejemplo, el jugador uno propone el acuerdo x^Q cada vez que es su turno de hacer una oferta y acepta cualquier proposición x para la cual $x_1 \geq \alpha$ cuando es su turno de responder a una oferta.

La última fila indica las transiciones. La entrada en esta fila, que queda en la columna correspondiente al estado I, donde $I = Q$ o P, da las condiciones bajo las cuales hay una transición a un estado diferente. La entrada absorbente para el estado P significa que no hay transición fuera del estado P, es decir, una vez que se alcanza este estado permanece para siempre.

De acuerdo a nuestra convención, toda transición ocurre inmediatamente después del evento que la dispara. Si por ejemplo, en el estado Q el jugador 1 propone x con $x_1 > x_1^Q$ entonces el estado cambia a P antes de que el jugador 2 responda.

Hay que notar que el mismo conjunto de estados y la misma regla de transición son usados para describir las estrategias de ambos jugadores. Este hecho es común a todos los equilibrios que tratamos en este trabajo.

Esta manera de representar la estrategia de un jugador está relacionada muy de cerca a la noción de un autómata como se usa en la teoría de computación. La noción de autómata se ha usado también en trabajos recientes sobre juegos de repetición y provee una herramienta natural para definir medidas de la complejidad de una estrategia. Aquí se usa meramente como parte de un lenguaje conveniente para describir estrategias.

Se terminará esta discusión dirigiéndonos a un punto delicado concerniente a la relación entre un autómata como se ha difinido y la noción usada en teoría de la computación. Se llamará a ésta última "autómata estándar". Las dos nociones no son exactamente iguales ya que nuestra descripción de las acciones de los jugadores depende no sólo del estado sino también de las variables conocidas. Para poder representar las estrategias de los jugadores como autómatas estándar se necesita incorporar las variables conocidas en la definición de los estados. El autómata estándar que representa la estrategia del jugador I en la tabla anterior, por ejemplo, es el siguiente: El conjunto de estados es: $\{[S,i] \ / \ i=1,2 \text{ y } S=Q,P\} \cup \{[S,i,x] \ / \ x \in X, i=1,2 \text{ y } S=Q,P\} \cup \{[x] \ / \ x \in X\}$, la interpretación es que:

$[S,i]$ es el estado en el cual el jugador i hace una oferta.

$[S,i,x]$ es el estado en el cual el jugador i responde a una oferta x.

$[x]$ es el estado en el cual la oferta x ha sido aceptada.

El estado inicial es $[Q, 1]$.

La acción que toma el jugador 1 en el estado $[S,i]$ es : la oferta especificada en la columna S de la tabla cuando $i=1$, o bien, nula si $i=2$.

La acción que toma en el estado $[S,i,x]$ es: "aceptar" o "rechazar", como está determinado por x y la regla especificada en la columna S para el jugador i, si $i=1$ y la acción es nula si $i=2$.

La acción que toma en el estado $[x]$ es nula.

La *regla de transición* es como sigue:

Si el estado es $[S,i,x]$ y la acción que toma el jugador i es "rechazar" entonces el nuevo estado es $[S,i]$ si la acción es "aceptar" entonces el estado es $[x]$.

Si el estado es $[S,i]$ y la acción es la propuesta x, entonces el nuevo estado es

$\left[S', j, x\right]$, donde j es el otro jugador y S' está determinado por la regla de transición dada en la columna S.

Finalmente, si el estado es $[x]$, permanece $[x]$.

3.6 Equilibrio de Nash

La siguiente noción de equilibrio se debe John Nash.

Una pareja de estrategias (σ, τ) es un *equilibrio de Nash* si, dada τ, ninguna estrategia del jugador 1 lleva a un resultado que el jugador 1 prefiera al resultado generado por (σ, τ), y dado σ, ninguna estrategia del jugador 2 da un resultado que el jugador 2 prefiera al resultado generado por (σ, τ).

El equilibrio de Nash es una solución muy usada en la teoría de juegos. En este trabajo no se discute en detalle el cómo debe ser interpretado. Se puede pensar como una situación estable en el sentido de que todos los jugadores alcanzan un óptimo en el equilibrio. No se ve al equilibrio necesariamente como el resultado de un acuerdo forzado, ni se pretende que sea una consecuencia necesaria de que los jugadores actúen racionalmente, para que el perfil de sus estrategias dé un equilibrio de Nash.

Se ve al equilibrio de Nash como una solución apropiada en situaciones en las cuales los jugadores son racionales, experimentados y han jugado el mismo juego, o al menos juegos similares, muchas veces.

En algunos juegos existe un único equilibrio de Nash, de modo que la teoría da una predicción muy exacta. Desafortunadamente, ésto no se da para un juego de negociación de ofertas alternantes en el cual las preferencias de los jugadores satisfacen A1 a A6. En particular, para *cada* acuerdo $x \in X$, el resultado $(x, 0)$ es generado por un equilibrio de Nash de dicho juego.

Para mostrar ésto, sea $\overline{x} \in X$ y considérese la pareja de estrategias (estacionarias) $(\overline{\sigma}, \overline{\tau})$, en la cual el jugador 1 *siempre* propone $\overline{x}$ y acepta una oferta si y sólo si $x_1 \geq \overline{x}_1$ y el jugador 2 *siempre* propone $\overline{x}$ y acepta una oferta si y sólo si $x_2 \geq \overline{x}_2$.

Formalmente para el jugador 1 sea:

$$\overline{\sigma}^t\left(x^0, ..., x^{t-1}\right) = \overline{x} \text{ para todo} \left(x^0, ..., x^{t-1}\right) \in X^t \text{ si } t \text{ es par y}$$

$$\overline{\sigma}^t\left(x^0, ..., x^{t-1}\right) = \begin{cases} A \text{ si } x_1^{t-1} \geq \overline{x}_1 \\ R \text{ si } x_1^{t-1} < \overline{x}_1 \end{cases} \text{ si } t \text{ es impar}$$

La estrategia del jugador 2 se define análogamente:

$$\overline{\tau}^t\left(x^0,...,x^{t-1}\right) = \begin{cases} A \text{ si } x_1^{t-1} \leq \overline{x}_1 \\ R \text{ si } x_1^{t-1} > \overline{x}_1 \end{cases} \quad \text{si } t \text{ es par y}$$

$$\overline{\tau}^t\left(x^0,...,x^{t-1}\right) = \overline{x} \text{ para todo} \left(x^0,...,x^{t-1}\right) \in X^t \text{ si } t \text{ es impar.}$$

Una representación de $(\overline{\sigma}, \overline{\tau})$ como una pareja de un autómata (de un estado) está dada por la siguiente tabla:

		$*$
jugador 1	propone	$\overline{x}$
	acepta	$x_1 \geq \overline{x}_1$
jugador 2	propone	$\overline{x}$
	acepta	$x_1 \leq \overline{x}_1$

Si los jugadores usan la pareja de estrategias $(\overline{\sigma}, \overline{\tau})$, entonces el jugador 1 propone $\overline{x}$ en $t = 0$, lo cual el jugador 2 acepta inmediatamente, de modo que el resultado es $(\overline{x}, 0)$.

Para ver que $(\overline{\sigma}, \overline{\tau})$ es un equilibrio de Nash supongamos que el jugador i usa una estrategia diferente. El desacuerdo perpetuo es el peor resultado puesto que se cumple A1, y el jugador j nunca propone una oferta diferente de $\overline{x}$ o acepta un acuerdo x con $x_j < \overline{x}_j$. Por lo tanto el mejor resultado que el jugador i puede obtener, dada la estrategia del jugador j es $(\overline{x}, 0)$.

El conjunto de resultados generados por el equilibrio de Nash incluye no sólo todo acuerdo posible en el período 0, sino también algunos acuerdos en el período 1 o más tarde.

Supongamos, por ejemplo, que $\widehat{\sigma}$ y $\widehat{\tau}$ difieren de $\overline{\sigma}$ y $\overline{\tau}$ sólo en el período 0, cuando el jugador 1 hace la oferta $(1, 0)$ (en lugar de $\overline{x}$) y el jugador 2 rechaza toda oferta. La pareja de estrategias $(\widehat{\sigma}, \widehat{\tau})$ conduce al acuerdo $(\overline{x}, 1)$ y es un equilibrio si $(\overline{x}, 1) \succeq_2 ((1, 0), 0)$.

A menos que el jugador 2 sea tan impaciente que prefiera recibir 0 hoy que 1 mañana, existe valores de $\overline{x}$ que satisfacen esta condición, de modo que el equilibrio existe cuando el acuerdo se alcanza en el período 1.

Un argumento similar muestra que, para algunas preferencias, existen equilibrios de Nash en los cuales el equilibrio se alcanza en el período 2, o más tarde.

En resumen, la noción del equilibrio de Nash pone pocas restricciones sobre el resultado en un juego de negociación de ofertas alternantes. Por esta razón, nos dirigimos a una noción de equilibrio más fuerte.

3.7 Equilibrio Perfecto en Subjuegos (EPS)

Se pueden interpretar algunas de las acciones prescritas por las estrategias $\overline{\sigma}$ y $\overline{\tau}$ definidas arriba como "amenazas increíbles".

La estrategia $\overline{\tau}$ pide aljugador 2 rechazar cualquier oferta menos favorable, para él, que $\overline{x}$. Sin embargo, si el jugador 2 se enfrenta con tal oferta, entonces, bajo la suposición de que el jugador 1 seguirá siempre la estrategia $\overline{\sigma}$, puede ser de interés para el jugador 2 aceptar la oferta en lugar de rechazarla.

Supongamos que $\overline{x}_1 < 1$ y que el jugador 1 hace una oferta x en la cual $x_1 = \overline{x}_1 + \varepsilon$ en el período t, donde $\varepsilon > 0$ es pequeña.

Si el jugador 2 acepta esta oferta él recibe $\overline{x}_2 - \varepsilon$ en el período t, mientras que si la rechaza, entonces de acuerdo con la pareja de estrategias $(\overline{\sigma}, \overline{\tau})$ él ofrece $\overline{x}$ en el período $t+1$, lo que el jugador 1 acepta, así que el resultado es $(\overline{x}, t+1)$. El jugador 2 prefiere recibir $\overline{x}_2 - \varepsilon$ en el período t en lugar de $\overline{x}_2$ en el período $t+1$. Si ε es lo suficientemente pequeña su "amenaza" de rechazo de la oferta no es convincente.

La noción de equilibrio de Nash no descarta "amenazas increíbles", porque evalúa lo deseable de una estrategia sólo desde elpunto de vista del inicio del juego. Conforme se siguen las acciones recomendadas por una pareja de estrategias, se traza un camino a través del árbol; sólo un pequeño subconjunto de todos los nodos del árbol es alcanzado a lo largo de este camino.

La optimalidad de acciones propuestas en nodos no alcanzados no se examina cuando se pregunta si una pareja de estrategias es equilibrio de Nash.

Si dos estrategias τ y τ' del jugador 2 difieren sólo en las acciones que prescriben en nodos que no se alcanzan cuando el jugador 1 usa la estrategia σ, entonces (σ, τ) y $\left(\sigma, \tau'\right)$ producen el mismo camino a través del árbol, luego el jugador 2 es indiferente entre τ y τ' cuando el jugador 1 usa σ. Para ser específicos, consideremos la estrategia τ' del jugador 2 que difiere de la estrategia $\overline{\tau}$, definida en la sección anterior, sólo en el período 0, cuando el jugador 2 acepta algunas ofertas x en las cuales $x_2 < \overline{x}_2$. Cuando el jugador 1 usa la estrategia $\overline{\sigma}$, las estrategias τ y τ' generan precisamente el mismo camino a través del árbol -ya que la estrategia $\overline{\sigma}$ pide al jugador 1 ofrecer precisamente $\overline{x}$, no una oferta menos favorable para el jugador 2-. De este modo el jugador 2 es indiferente entre τ y τ' cuando el jugador 1 usa $\overline{\sigma}$; cuando consideramos si $(\overline{\sigma}, \overline{\tau})$ era un equilibrio de Nash no examinamos lo deseable de la acción propuesta por el jugador 2 en el período 0, en el caso de que el jugador 1 haga una oferta *diferente* a $\overline{x}$.

La noción de Selten de un subjuego en equilibrio perfecto adhiere a este problema el requisito de que las estrategias de los jugadores sean óptimas en el juego que comienza en cada nodo del árbol, sea o no alcanzado ese nodo, si los jugadores se apegan a *sus* estrategias.

En el contexto de la pareja de utilidad $(\overline{\sigma}, \overline{\tau})$ considerada en la sección 3.6, se pregunta lo siguiente: supongamos que el jugador 1 hace una oferta x distinta de $\overline{x}$ en el período 0. Si en otro caso sigue los preceptos de $\overline{\sigma}$ ¿es deseable para el jugador 2 adherirse a $\overline{\tau}$? Como la respuesta es: no cuando $x_1 = \overline{x}_1 + \epsilon$ donde $\epsilon > 0$ es pequeña, la pareja $(\overline{\sigma}, \overline{\tau})$ no es un equilibrio perfecto del subjuego.

Definición

Una pareja de estrategias es un **equilibrio perfecto en subjuegos** de un problema de negociación de ofertas alternantes, si la pareja de estrategias que induce en cada subjuego es un equilibrio de Nash en ese subjuego.

Si representamos las estrategias como autómatas (estándar) (ver sección 3.5), entonces para establecer que un perfil de estrategias es un equilibrio perfecto de subjuegos es suficiente verificar que ningún jugador, en ningún estado, puede incrementar su pago por una desviación de "un tiro". Específicamente, para toda pareja de autómatas estándar y todo estado, existe un resultado asociado con el autómata si comienzan a operar en ese estado en el período 0. Puesto que las preferencias de tiempo de los jugadores son estacionarias (A5), cada jugador enfrenta un problema de decisión Markoviano, dado el autómata del otro jugador. Cualquier cambio en su estrategia que incremente su pago lleva a un acuerdo en un número finito de períodos (ya que sus preferencias satisfacen A1) de modo que su estrategia es óptima si, en todo estado en el cual él tenga que "mover", su acción lleva a un estado para el cual el resultado es el que el jugador prefiere más de entre los acuerdos en todos los estados que pueden alcanzarse por alguna de sus acciones.

3.8 El resultado principal

Ahora se muestra que la noción de equilibrio perfecto en subjuegos (EPS), en contraste con el equilibrio de Nash, predice un único resultado en un juego de ofertas alternantes en el cual las preferencias de los jugadores satisfacen los axiomas A1 hasta A6.

Las estrategias $\overline{\sigma}$ y $\overline{\tau}$ discutidas en la sección previa piden a los dos jugadores proponer el mismo acuerdo x y aceptar ofertas sólo si al menos son tan buenas como x.

Consideremos una pareja de estrategias alternativas $(\widehat{\sigma}, \widehat{\tau})$ en la cual el jugador 1 siempre (sin importar la historia) ofrece $\widehat{x}$ y acepta una oferta y si y sólo si $y_1 \geq \widehat{y}_1$ y el jugador 2 ofrece $\widehat{y}$ y acepta una oferta x si y sólo si $x_2 \geq \widehat{x}_2$. Ahora, ¿bajo qué condiciones para $\widehat{x}$ y $\widehat{y}$, $(\widehat{\sigma}, \widehat{\tau})$ es un EPS?

En el caso que el jugador 2 rechace una oferta x en el período 0, él ofrece $\widehat{y}$ en el período 1 lo que el jugador 1 acepta.

Así para que su rechazo de toda oferta x con $x_2 \geq \widehat{x}_2$ sea creíble, se debe tener $(\widehat{y}, 1) \succeq_2 (x, 0)$ siempre que $x_2 < \widehat{x}_2$; de este modo si $\widehat{x}_2 > 0$ se necesita que $(\widehat{y}, 1) \succeq_2 (\widehat{x}, 0)$ por continuidad (A4). Al mismo tiempo debemos tener $(\widehat{x}, 0) \succeq_2 (\widehat{y}, 1)$ o el jugador 2 tendría un incentivo para rechazar la oferta $\widehat{x}$ del jugador 1 en el período 0.

Se concluye que si la pareja de utilidad $(\widehat{\sigma}, \widehat{\tau})$ es un EPS entonces $(\widehat{x}, 0) \sim_2 (\widehat{y}, 1)$, o bien $\widehat{x} = (1, 0)$ y $(\widehat{x}, 0) \succeq_2 (\widehat{y}, 1)$, ésto de manera compacta se escribe: $v_2(\widehat{y}_2, 1) = \widehat{x}_2$.

Aplicando una lógica similar a la regla del jugador 1 para aceptar ofertas en el período 1, tenemos que si rechaza una oferta y, él ofrece $\widehat{x}$ en el período 2, lo que el jugador 2 acepta, entonces para que sea creíble que va a rechazar debe suceder que $(\widehat{x}, 2) \succeq_1 (y, 1)$ siempre que $y_1 < \widehat{y}_1$ y por A4 entonces $(\widehat{x}, 2) \succeq_1 (\widehat{y}, 1)$. Al mismo tiempo debe pasar que $(\widehat{y}, 1) \succeq_1 (\widehat{x}, 2)$ pues si no el jugador 1 rechazaría $\widehat{y}$ en el período 1, por lo tanto se concluye que necesitamos ya sea $(\widehat{y}, 1) \sim_1 (\widehat{x}, 2)$ o $\widehat{y} = (0, 1)$ y $(\widehat{y}, 1) \succeq_1 (\widehat{x}, 2)$; por la hipótesis de estacionalidad (A5), ésto es equivalente a $v_1(\widehat{x}_1, 1) = \widehat{y}_1$.

Este argumento muestra que si $(\widehat{\sigma}, \widehat{\tau})$ es un EPS entonces $(\widehat{x}, \widehat{y})$ debe coincidir con la solución única (x^*, y^*) de las siguientes ecuaciones.

$$v_1(x_1^*, 1) = y_1^* \qquad \text{y} \qquad v_2(y_2^*, 1) = x_2^*$$

La unicidad se da por el lema en la sección 0.9.2 de donde sabemos $x_1^* > y_1^*$ y $x_2^* < y_2^*$.

Nótese que si $y_1^* > 0$ y $x_2^* > 0$ entonces $(y^*, 0) \sim_1 (x^*, 1)$ y $(x^*, 0) \sim_2 (y^*, 1)$ puesto que al ser y_1^* el valor presente de x_1^* el valor de ambos es el mismo en el período 0, análogamente al ser x_2^* el valor presente de y_2^* su valor en el período 0 es el mismo. Además si las preferencias de los jugadores son tales que para cada jugador i y todo resultado (x, t) existe un acuerdo y tal que el jugador i es indifernete entre $(y, 0)$ y (x, t), entonces en la única solución (x^*, y^*) de las ecuaciones: $v_2(\hat{y}_2, 1) = \hat{x}_2$ y $v_1(\hat{x}_1, 1) = \hat{y}_1$ se tiene que $y_1^* > 0$ y $x_2^* > 0$, de modo que (x^*, y^*) satisface también $(y^*, 0) \sim_1 (x^*, 1)$ y $(x^*, 0) \sim_2 (y^*, 1)$.

El resultado principal de este capítulo es que cualquier juego de negociación de ofertas alternantes en el cual las preferencias de los jugadores satisfacen los supuestos A1 hasta A6 tiene un único eps con la estructura de $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$.

Teorema

Todo problema de negociación de ofertas alternantes en el cual las preferencias de los jugadores satisfagan A1 hasta A6 tiene un único EPS (σ^*, τ^*). En este equilibrio el jugador 1 propone el acuerdo x^* cada vez que le toca hacer una oferta y acepta una oferta y del jugador 2 si y sólo si $y_1 \geq y_1^*$. El jugador 2 siempre propone y^* y acepta aquellas ofertas x con $x_2 \geq x_2^*$. El resultado es que el jugador 1 propone x^* en el período 0 y el jugador 2 acepta inmediatamente esta oferta.

Formalmente, la estrategia de EPS σ^* del jugador 1, descrita en el teorema, está definida por:

$$\sigma^{*t}(x^0, \ldots, x^{t-1}) = x^* \text{ para todo } (x^0, \ldots, x^{t-1}) \in X^t \text{ si } t \text{ es par y}$$

$$\sigma^{*t}(x^0, \ldots, x^{t-1}) = \begin{cases} A \text{ si } y_1^{t-1} \geq x_1^* \\ R \text{ si } y_1^{t-1} < x_1^* \end{cases} \quad \text{si } t \text{ es impar}$$

La estrategia del jugador 2 se define análogamente:

$$\tau^{*t}(y^0, \ldots, y^{t-1}) = \begin{cases} A \text{ si } x_2^{t-1} \geq y_2^* \\ R \text{ si } x_2^{t-1} < y_2^* \end{cases} \quad \text{si } t \text{ es par y}$$

$$\tau^{*t}(y^0, \ldots, y^{t-1}) = y^* \text{ para todo } (y^0, \ldots, y^{t-1}) \in Y^t \text{ si } t \text{ es impar.}$$

Nótese que no se ha supuesto que las estrategias son estacionarias, se ha permitido que las acciones en cualquier período dependan de la historia completa del juego. El teorema establece que sólo las estrategias de EPS toman esta forma.

Demostración

Veamos primero que la pareja de estrategias (σ^*, τ^*) es un EPS. Se necesita mostrar que (σ^*, τ^*) induce un equilibrio de Nash en todo subjuego. Considermeos un subjuego que comienza con una oferta del jugador 1 en el período t^*. Dado que el jugador 2 usa la estrategia τ^*:

- cualquier estrategia del jugador 1 que proponga x^* en el período t^* lleva al resultado (x^*, t^*).
- cualquier otra estrategia del jugador 1 puede generar tres resultados:

$$(x,t) \text{ donde } x_1 \leq x_1^* \text{ porque el jugador 2 aceptó y } t \geq t^*$$
$$(y^*,t) \text{ donde } t \geq t^* + 1$$
$$D$$

Afirmamos que (x^*, t^*) es el mejor resultado.

En efecto, para D tenemos por A1 $(x^*, t^*) \succeq_1 D$. Ahora, comparando (x^*, t^*) con (y^*, t): como $x_1^* > y_1^*$, por A2 se sigue que: $(x^*, t^*) \succeq_1 (y^*, t^*)$; como $t \geq t^*$, por A3 tenemos que $(y^*, t^*) \succeq_1 (y^*, t)$. Por lo tanto $(x^*, t^*) \succeq_1 (y^*, t)$. Y por último para comparando (x,t); como $x_1 \leq x_1^*$, por A2 $(x^*, t^*) \succeq_1 (x, t^*)$ y como $t^* \leq t$, por A3 $(x, t^*) \succeq_1 (x, t)$. Por lo tanto $(x^*, t^*) \succeq_1 (x, t)$.

Conclusión: el mejor de estos resultados para el jugador 1 es (x^*, t^*), de modo que la estrategia σ^* es una mejor respuesta a τ^* en el subjuego.

Dado que el jugador 1 usa la estrategia σ^* :

- cualquier estrategia del jugador 2 que acepta x^* en el período t^* lleva a un resultado (x^*, t^*).
- cualquier otra estrategia del jugador 2 genera resultados:

$$(x^*, t) \text{ para } t > 0$$
$$(y,t) \text{ donde } y_2 \leq y_2^* \text{ porque el jugador 1 aceptó y } t \geq t^* + 1$$
$$D$$

Afirmamos que (x^*, t^*) es el mejor resultado.

Para D tenemos por A1 $(x^*, t^*) \succeq_2 D$. Ahora, comparando (x^*, t^*) con (x^*, t) como $t^* < t$, por A3 $(x^*, t^*) \succeq_2 (x^*, t)$. Para (y, t) como $y_2 \leq y_2^*$, por A2 $(y^*, 0) \succeq_2 (y, 0)$; si $t^* > 0$, por A3 $(y, 0) \succeq_2 (y, t^*)$ y $(y^*, t^*) \succeq_2 (y, t^* + 1)$; si $t \geq t^* + 1$, también por A3 $(y, t^* + 1) \succeq_2 (y, t)$. Por lo tanto $(y^*, 0) \succeq_2 (y, t) \Rightarrow (y^*, t^* + 1) \succeq_2 (y, t)$.

Ahora bien, sabemos que $y_2^* > x_2^*$ y $y_2^* \geq y_2$, tenemos dos posibilidades: $y_2^* > x_2^* \geq y_2$ o $y_2^* \geq y_2 > x_2^*$. Consideremos la primera:
$y_2^* > x_2^* \geq y_2 \overset{\text{por A2}}{\Rightarrow} (x^*, t^*) \succeq_2 (y, t^*)$; $t^* + 1 \geq t^* \overset{\text{por A3}}{\Rightarrow} (y, t^*) \succeq_2 (y, t^* + 1)$. Por lo tanto $(x^*, t^*) \succeq_2 (y, t^* + 1)$ y como $t \geq t^* + 1$, por A3 tenemos que $(x^*, t^*) \succeq_2 (y, t)$.

Considerando la segunda:
$y_2^* \geq y_2 > x_2^* \overset{\text{por A2}}{\Rightarrow} (y^*, t^*) \succeq_2 (y, t^*) \succeq_2 (x^*, t^*)$; $t \geq t^* \overset{\text{por A3}}{\Rightarrow} (x^*, t^*) \succeq_2 (x^*, t)$. Por lo tanto $(y^*, t^*) \succeq_2 (x^*, t)$ y como $t \geq t^* + 1$, por A3 $(y^*, t^* + 1) \succeq_2 (x^*, t)$.

Conclusión: tenemos dos "mejores" resultados para el jugador 2 que son (x^*, y^*) y $(y^*, t^* + 1)$. Pero por definición tenemos $x_2^* = v_2(y_2, 0)$ tal que $(x^*, 0) \succeq_2 (y^*, 1)$ y por A5 $(x^*, t^*) \succeq_2 (y^*, t^* + 1)$. Así τ^* es la mejor respuesta para el jugador 2 a σ^* en el subjuego.

Argumentos similares se aplican a subjuegos que comienzan con una oferta del jugador 2 y subjuegos comenzando con una respuesta por parte de cada jugador.

Ahora se irá a la parte más difícil del argumento la cual muestra que (σ^*, τ^*) es el único EPS.

Por la suposición de estacionalidad A5, tenemos que para $i = 1, 2$, todos los subjuegos que comienzan con una oferta del jugador i son isomorfos; sea G_i ese subjuego. La existencia del EPS señalado anteriormente nos permite definir:

$$M_i = \sup \{v_i(x_i, t) : \text{ existe un EPS de } G_i \text{ con resultado } (x, t)\}$$

Sea m_i el ínfimo correspondiente.

Mostraremos que $M_1 = m_1 = x_1^*$ y $M_2 = m_2 = y_2^*$, de modo que el valor presente para el jugador 1 de todo resultado en EPS de G_1 es x_1^*, y el valor presente para el jugador 2 de todo resultado en EPS de G_2 es y_2^*. Decimos que esto es suficiente por las siguientes consideraciones.

Necesitamos mostrar que se sigue de las ecuaciones $M_1 = m_1 = x_1^*$ y $M_2 = m_2 = y_2^*$ que todo EPS de G_1 es (σ^*, τ^*).

Afirmación

En cualquier EPS la primera oferta es aceptada.

Demostración

Supongamos que se cumple que $M_1 = m_1 = x_1^*$ y $M_2 = m_2 = y_2^*$ y no se cumple la afirmación, es decir, que existe un EPS en el cual la primera oferta x del jugador 1 es rechazada; entonces después de que se rechazó esa oferta los jugadores entran a un juego G_2 donde deben seguir un EPS. Como supusimos que $M_1 = m_1 = x_1^*$ y $M_2 = m_2 = y_2^*$ eran ciertas el valor presente para el jugador 2 de ese EPS es y_2^*, de manera que el valor presente para el jugador 1 no puede ser más de y_1^*. Pero sabemos que $v_1(y_1^*, 1) \leq y_1^* < x_1^*$ lo que contradice $M_1 = m_1 = x_1^*$ y $M_2 = m_2 = y_2^*$ porque el valor presente del EPS para el jugador 1 es menor que x_1^*. Por lo tanto en cada EPS de G_1 se acepta la primera oferta. Un argumento similar puede aplicarse para G_2. Se sigue que en cualquier EPS de G_1, el jugador 1 propone x^*, lo que el jugador 2 acepta, y él a su vez propone y^*, lo que el jugador 1 acepta. También por las ecuaciones $v_1(x_1^*, 1) = y_1^*$ y $v_2(y_2^*, 1) = x_2^*$, el jugador 1 rechaza cualquier oferta y en la cual $y_1 < y_1^*$ y acepta cualquier oferta y si $y_1 > y_1^*$; el jugador 2 rechaza cualquier oferta x en la cual $x_2 < x_2^*$ y acepta cualquier oferta x si $x_2 > x_2^*$.

Queda por comprobar que $M_1 = m_1 = x_1^*$ y $M_2 = m_2 = y_2^*$, lo que haremos en dos pasos que son:

Recordemos que en un EPS debe suceder que la estrategia del jugador 1 induce el mejor resultado sabiendo que el jugador 2 se apegará a la suya, la cual debe incluir la mejor oferta inicial.

Paso 1.

Afirmación: El jugador 1 debe aceptar cualquier oferta en la cual $z_1 > v_1(M_1, 1)$.

Demostración:

Si no acepta se alcanzaría un resultado $((x_1, x_2), t)$ con $t \geq 1$. El rechazar conduce a un subjego que comienza el jugador 1 y el resultado alcanzado en términos del tiempo real del juego es $((x_1, x_2), t-1)$. Así tenemos que

$$v_1(x_1, t-1) \leq M_1 \Rightarrow v_1(v_1(x_1, t-1), 1) \leq v_1(M_1, 1) < z_1$$

pero $v_1(v_1(x_1, t-1), 1) = v_1(x_1, t)$ [2] (ver 39). Con lo que podemos concluir que

[2] $v_1(v_1(x, t-1), 1) = v_1(x_1, t)$ para $t \geq 2$, para $t = 1$ es obvio, pues tendríamos $v_1(v_1(x_1, 0), 1) = v_1(x_1, 1)$

$$((z_1, 1 - z_1), 0) \succ_1 ((v_1(x_1, t), 1 - v_1(x_1, t)), 0) \succeq_1 ((x_1, x_2), t)$$

por lo que haber rechazado nos condujo a un resultado menos preferido que el z_1 propuesto originalmente.

Supongamos que en el primer período del subjuego G_2 el jugador 2 propone z con $z_1 > v_1(M_1, 1)$.

Afirmación: $m_2 \geq 1 - v_1(M_1, 1)$.

Demostración:

Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $m_2 < 1 - v_1(M_1, 1)$. Sabemos que existe un par de estrategias (σ, τ) que inducen un EPS con resultado $((x_1^*, x_2^*), t)$. Si me muevo un poco a la derecha del ínfimo encuentro un elemento del conjunto tal que $m_2 \leq v_2(x_2^*, t) < 1 - v_1(M_1, 1)$. Ahora si $v_2(x_2^*, t) < z_2 < 1 - v_1(M_1, 1)$, entonces $z_1 = 1 - z_2 > v_1(M_1, 1)$, de modo que, como acabamos de ver el jugador 1 tiene que aceptar dando como resultado que:

$$((z_1, z_2), 0) \succ_2 ((1 - v_2(x_2^*, t), v_2(x_2^*, t)), 0) \succeq_2 ((x_1^*, x_2^*), t)$$

lo cual contradice que (σ, τ) induce un EPS, pues encontramos que z_2 es una "salida" mejor para el jugador 2. Por lo tanto $m_2 \geq 1 - v_1(M_1, 1)$.

Paso 2.

Afirmación: $M_1 \leq 1 - v_2(m_2, 1)$

Demostración

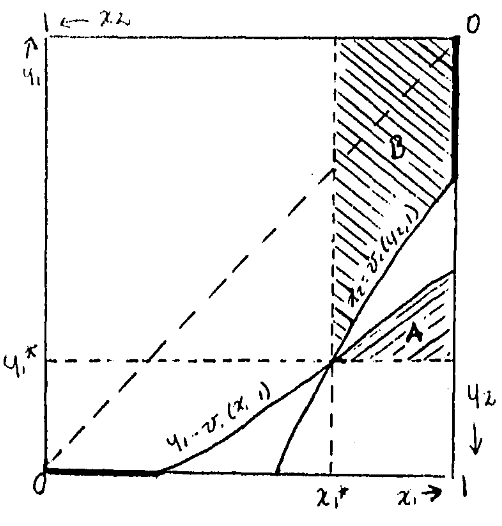
Consideremos el primer período del subjuego G_1 donde el jugador 1 propone el acuerdo (x_1, x_2). Si el jugador 2 rechaza entoces se obtiene un resultado (y_1^*, y_2^*) al tiempo $t \geq 1$, pero con respecto al juego que se inicia con una propuesta del jugador al tiempo $t - 1$ tenemos que $v_2(x_2, t-1) \geq m_2 \Rightarrow v_2(v_2(x_2, t-1)) \geq v_2(m_2, 1)$, pero $v_2(v_2(x_2, t-1)) = v_2(x_2, t)$ entonces tenemos $x_2 \geq v_2(x_2, t) \geq v_2(m_2, 1)$. Por lo que

el jugador 2 rechaza cualquier oferta con $x_2 < v_2(m_2, 1)$.
Si el acuerdo se alcanza en $t = 0$ $\quad x_2 \geq v_2(m_2, 1)$, El $x_1 = 1 - x_2 \leq 1 - v_2(m_2, 1)$.
Si el acuerdo se alcanza en $t \geq 1$ $\quad v_1(x_1, t) \leq x_1 = 1 - x_2 \leq 1 - v_2(m_2, 1)$. Por lo tanto tenemos que

$$t = 0 \Rightarrow v_1(x_1, 0) = x_1 \leq 1 - v_2(m_2, 1) \;\; \text{y} \;\; t \geq 1 \Rightarrow v_1(x_1, t) \leq 1 - v_2(m_2, 1)$$

esto nos indica que $1 - v_2(m_2, 1)$ es una cota superior y como sabemos que el supremo es la mínima cota superior entonces $M_1 \leq 1 - v_2(m_2, 1)$

El paso 1 establece que en la siguiente figura la pareja $(M_1, 1 - m_2)$ (relativa al origen en el extremo inferior izquierdo) cae debajo de la línea $y_1 = v_1(x_1, 1)$. Análogamente el paso 2 establece que $(M_1, 1 - m_2)$ cae a la izquerda de la línea $x_2 = v_2(y_2, 1)$. Como vimos en la primera parte de la demostración que (σ^*, τ^*) es un EPS de G_1, sabemos que $M_1 \geq x_1^*$; el mismo argumento muestra que existe un EPS de G_2 en el cual el resultado es $(y^*, 0)$ de modo que $m_2 \leq y_2^*$, y por lo tanto $1 - m_2 \geq y_1^*$. Combinando estos hechos concluímos de la figura que $M_1 = x_1^*$ y $m_2 = y_2^*$. Usando los mismos argumentos, invirtiendo el papel de los jugadores, se puede mostrar que $m_1 = x_1^*$ y $M_2 = y_2^*$; concluyendo así la demostración.



3.9 Ejemplos

3.9.1 Tasas de descuento constantes

Supóngase que los jugadores tienen preferencias de tiempo con tasas constantes de descuento, es decir, las preferencias del jugador 1 sobre los resultados (x,t) están representados por la función de utilidad $\delta_i^t x_i$ donde $\delta_i \in (0,1)$. Entonces tenemos $y_1^* = v_1(x_1^*, 1) = \delta_1 x_1^*$ y $x_2^* = v_2(y_2^*, 1) = \delta_2 y_2^*$ (ver sección 3.3.3).

De modo que:

$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (1 - x_2^*, x_2^*) = (1 - \delta_2 y_2^*, \delta_2 y_2^*)$

$y^* = (y_1^*, y_2^*)$ pero $y_1^* = \delta_1 x_1^* = \delta_1(1 - \delta_2 y_2^*) = \delta_1[1 - \delta_2(1 - y_1^*)] = \delta_1[1 - \delta_2 + \delta_2 y_1^*]$

$= \delta_1 - \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_2 y_1^*$, por lo tanto $y_1^*(1 - \delta_1\delta_2) = \delta_1 - \delta_1\delta_2$ y al despejar tenemos $y_1^* = \frac{\delta_1 - \delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} = \frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}$. También $y_2^* = 1 - y_1^* = 1 - \frac{\delta_1 - \delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} = \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}$.

Por lo tanto $y^* = \left(\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}\right)$.

Ahora sustituyendo y_2^* en x^*:

$x_1^* = 1 - \delta_2 y_2^* = 1 - \delta_2\left(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}\right) = \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$ y $x_2^* = \delta_2 y_2^* = \delta_2\left(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}\right) = \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}$.

Por lo tanto $x^* = \left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$.

Hay que notar que conforme δ_1 se acerca a 1, el acuerdo x^* se acerca al $(1,0)$, $\left(\lim_{\delta_1 \to 1} x^* = \left(\frac{1-\delta_2}{1-(1)\delta_2}, \frac{\delta_2(1-1)}{1-(1)\delta_2}\right) = \left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_2}, \frac{0}{1-\delta_2}\right) = (1,0)\right)$, es decir, conforme el jugador 1 se vuelve más paciente su parte del pastel aumenta, y en el límite el recibe todo el pastel.

Análogamente conforme el jugador 2 se vuelve más paciente la parte del jugador 1 se acerca al 0, ya que $\lim_{\delta_2 \to 1} y^* = \left(\frac{\delta_1(1-1)}{1-\delta_1(1)}, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1(1)}\right) = \left(\frac{0}{1-\delta_1}, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1}\right) = (0,1)$.

Observemos que si los factores de descuento son iguales, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, entonces:

$$x^* = \left(\frac{1-\delta}{1-\delta^2}, \frac{\delta(1-\delta)}{1-\delta^2}\right) = \left(\frac{1-\delta}{(1-\delta)(1+\delta)}, \frac{\delta(1-\delta)}{(1-\delta)(1+\delta)}\right) = \left(\frac{1}{(1+\delta)}, \frac{\delta}{(1+\delta)}\right)$$

$$y^* = \left(\frac{\delta(1-\delta)}{1-\delta^2}, \frac{1-\delta}{1-\delta^2}\right) = \left(\frac{\delta(1-\delta)}{(1-\delta)(1+\delta)}, \frac{1-\delta}{(1-\delta)(1+\delta)}\right) = \left(\frac{\delta}{(1+\delta)}, \frac{1}{(1+\delta)}\right)$$

Los casos en los cuales δ_1 o δ_2 son iguales a 1 quedan excluídos por la suposición A3: *el tiempo es valioso.*

Sin embargo, si sólo una de las δ_i es igual a 1, entonces la prueba de que existe un único vector de pagos en EPS es aún válida, a pesar de que en este caso existe una multiplicidad del EPS. Por ejemplo:

Si $\delta_1 = 1$ y $\delta_2 < 1$, entonces el único vector de pagos en EPS es $(1,0)$, ya que $x^* = \left(\frac{1-\delta_2}{1-(1)\delta_2}, \frac{\delta_2(1-1)}{1-(1)\delta_2}\right) = (1,0)$ y $y^* = \left(\frac{1(1-\delta_2)}{1-\delta_2}, \frac{1-1}{1-(1)\delta_2}\right) = (1,0)$.

3.9.2 Costo constante por demora

Preferencias que muestran costos constantes por demora están representadas por la función de utilidad $x_i - c_i t$, donde $c_i > 0$. Como se observó en la sección 3.3.3, estas preferencias no satisfacen la suposición A6; sin embargo, siempre y cuando $c_1 \neq c_2$ existe una única pareja (x^*, y^*) que satisface las ecuaciones $v_1(x_1^*, 1) = y_1^*$ y $v_2(y_2^*, 1) = x_2^*$.

En efecto, ya que,

$$x_2 = \begin{cases} 0 \text{ si } y_2 < c_2 \\ y_2 - c_2 \text{ si } y_2 \geq c_2 \end{cases} \quad y \quad y_2 = \begin{cases} 0 \text{ si } x_1 < c_1 \\ x_1 - c_1 \text{ si } x_1 \geq c_1 \end{cases}$$

Sabemos que $x_1 + x_2 = 1$ y $y_1 + y_2 = 1$, con $x_1 > y_1$; $x_2 < y_2$ y $c_i < 1$ para $i = 1, 2$.

Si $c_1 \neq c_2$ entonces $y_2 < c_2$ o $x_1 < c_1$, porque en caso contrario tendríamos $x_2 = y_2 - c_2$ y $y_1 = x_1 - c_1$, teniendo así (por $x_1 + x_2 = 1$ y $y_1 + y_2 = 1$) que $c_1 = c_2$, lo cual es una contradicción.

Caso 1 $c_1 < c_2$

i) Supongamos que $y_2 < c_2$, entonces $x_2 = 0$; por lo tanto $x_1 = 1$. $x_1 = 1 > c_1$, por lo tanto $y_1 = x_1 - c_1 = 1 - c_1$

ii) Supongamos $x_1 < c_1$, entonces $y_1 = 1$; por lo tanto $y_2 = 1$. $x_2 = 1 > c_2$, por lo tanto $x_2 = y_2 - c_2 = 1 - c_2 \Rightarrow x_1 = c_2 > c_1$ lo cual es una contradicción

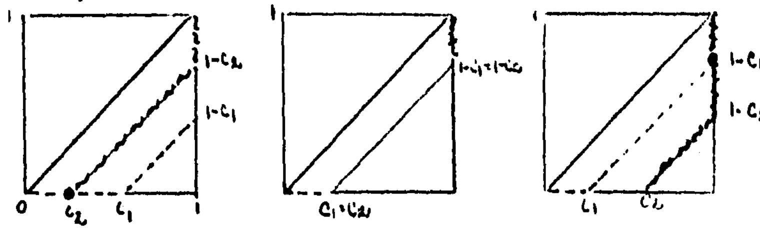
Caso 2 $c_1 > c_2$

i) Supongamos $x_1 < c_1$, por lo tanto $y_1 = 0$ por lo que $y_2 = 1$. $y_2 = 1 > c_2$ por lo tanto $x_2 = y_2 - c_2 = 1 - c_2$, por lo tanto $x_1 = c_2$.

ii) Supongamos que $y_2 < c_2$, entonces $x_2 = 0$ por lo tanto $x_1 = 1$. $x_1 = 1 > c_1$ por lo tanto $y_1 = x_1 - c_1 = 1 - c_1$, entonces $y_2 = c_1 > c_2$ lo cual es una contradicción.

La predicción es completamente extrema: el jugador 1 obtiene todo el pastel si su costo por demora es menor al del jugador 2, mientras que el jugador 2 obtiene $1 - c_2$ si su costo de demora es menor.

Cuando los costos por demora son el mismo y menores que 1 no existe ya solución única a las ecuaciones de valor presente, en este caso hay múltiples EPS si el costo por demora es lo suficientemente pequeño, y en algunos de estos equilibrios el acuerdo no es alcanzado en el período 0.



3.10 Propiedades del Equilibrio Perfecto en Subjuegos

3.10.1 Demora

La estructura de un juego de negociación de ofertas alternantes permite que la negociación continúe indefinidamente. Sin embargo, en el único EPS termina inmediatamente; desde un punto de vista económico, el proceso de negociación es eficiente: no se pierden recursos en la demora. ¿A qué características del modelo podemos atribuir este resultado?

Vimos que en un equilibrio de Nash, la demora es posible. Así, la noción de la perfección en subjuegos juega un papel en el resultado. Pero la perfección sola no deja fuera a la demora, nuestras suposiciones sobre las preferencias son también importantes.

Para ver ésto, nótese que la prueba de que el acuerdo es alcanzado inmediatamente si el juego tiene un único vector de pagos en EPS, recae sólo en las suposiciones A1, A2 y A3. En otras palabras, si las preferencias de los jugadores satisfacen estos tres axiomas y existe un único EPS entonces no existe demora.

Un EPS implica que existe una pareja de estrategias (σ^*, τ^*) que induce la pareja (x^*, y^*) tal que para toda pareja (x, y) tenemos que:

$$(x, y^*) \preceq (x^*, y^*) \qquad \text{y} \qquad (x^*, y) \preceq (x^*, y^*)$$

Sabemos que el EPS único (x^*, y^*) debe cumplir A1, A2 y A3 esto es:

A1: $(x^*, y^*) \succeq_i D$ ya que el cualquier acuerdo es mejor que el desacuerdo.

A2: $(x^*, y^*) \succ_i ((x, y), t) \Leftrightarrow (x^*, y^*) \succ (x, y)$ por definición de EPS

A3: $((x^*, y^*), t) \succeq_i ((x^*, y^*), s)$ si $t < s$

De este modo la presencia de la demora está intimamente relacionada a la existencia de equilibrios múltiples, que se originan, por ejemplo, si las preferencias de tiempo de los jugadores tienen el mismo costo constante por demora.

Es conveniente demostrar este punto considerando otro caso en el cual existe una multiplicidad de equilibrios.

Supongamos que $a_1 > b_1 > c_1$ y que las preferencias de los jugadores satisfacen A1, A2, A3 y A5. $(a_2 < b_2 < c_2)$.

Aún más, supongamos que si un jugador prefiere (x,t) a (y,t) entonces también prefiere $(x,t+1)$ a (y,t) de modo que:

$$(a,1) \succ_1 (b,0)\,;(b,1) \succ_1 (c,0) \qquad \text{y} \qquad (b,1) \succ_2 (a,0)\,;(c,1) \succ_2 (b,0)$$

Entonces para cada $\overline{x} \in X$ la pareja de estrategias en las cuales cada jugador siempre insiste en $\overline{x}$, (esto es, el jugador i siempre ofrece $\overline{x}$ y acepta una oferta x si y sólo si $x_1 \geq \overline{x}_1$), es un EPS.

Supongamos que el jugador 2 permanece con su estrategia $\overline{\tau}$ que consiste en proponer $\overline{x}$ y aceptar x si $x_2 \geq \overline{x}_2$ y el jugador 1 juega con una estrategia σ distinta, en cuanto a lo que el jugador ofrece, a $\overline{\sigma}$ que consiste en proponer $\overline{x}$ y aceptar x si $x_1 \geq \overline{x}_1$.

Si el jugador 1 propone $\overline{x}$ entonces el jugador 2 acepta y el resultado es $(\overline{x},0)$.

Si el jugador 1 propone x entonces si el jugador 2 acepta el resultado es $(\overline{x},0)$ donde $x_2 \geq \overline{x}_2$ o el jugador 2 rechaza y propone $\overline{x}$ y el resultado es $(\overline{x},1)$.

Tenemos que $x_2 \geq \overline{x}_2 \Rightarrow x_1 \leq \overline{x}_1 \Rightarrow (\overline{x},0) \succeq_1 (x,0) \succeq_1 (x,1)$ y $(\overline{x},1) \succeq_1 (x,1)$. Por lo tanto al jugador 1 le conviene proponer $\overline{x}$ en el período 0 $(\overline{\sigma})$.

Análogamente si el jugador 1 permanece con su estrategia $\overline{\sigma}$ y el jugador 2 juega con una estrategia τ distinta, en las propuestas a $\overline{\tau}$ entonces:

Si el jugador 2 propone $\overline{x}$ en el período 1 el jugador 1 acepta y el resultado es $(\overline{x},1)$.

Si el jugador 2 propone x entonces si el jugador 1 acepta el resultado es $(x,1)$ donde $x_1 \geq \overline{x}_1$ o el jugador 1 rechaza y propone $\overline{x}$ y el resultado es $(\overline{x},2)$.

Tenemos que $x_1 \geq \overline{x}_1 \Rightarrow x_2 \leq \overline{x}_2 \Rightarrow (\overline{x}_1,1) \succeq_2 (x,1)$ y $(\overline{x},1) \succeq_2 (\overline{x},2) \succeq_2 (x,2)$. Por lo tanto al jugador 2 le conviene proponer $\overline{x}$ en el período 1 $(\overline{\tau})$.

Con lo que concluímos que la pareja de estrategias en las cuales cada jugador siempre insiste en $\overline{x}$ es un EPS.

Ahora construímos un EPS en el cual el acuerdo es alcanzado en el período 1.

En el período 0 el jugador 1 propone a.

El jugador 2 rechazará una oferta a o b y acepta una oferta c.

Si el jugador 1 ofrece a en el período 0 y ésto se rechaza, entonces a partir del período 1 la pareja de estrategias del EPS en la cual el jugador insiste en b (como se describe arriba) es jugada.

Si el jugador 1 ofrece b o c en el período 0 y ésto se rechaza, entonce a partir del período 1 en el EPS se juega con la pareja de estrategias en la cual cada jugador insiste en c.

Estas estrategias se describen en la siguiente tabla como *autómata.*

	A	B	C
$J1$ propone	a	b	c
acepta		a y b	a, b y c
$J2$ propone		b	c
acepta	c	b y c	c
Transición	Ir a B si el jugador 2 rechaza a Ir a C si el jugador 2 rechaza b o c	Absorbente	Absorbente

Existen tres estados A, B y C; como es nuestra convención, el estado en la columna a la extrema izquierda (A) es el estado inicial. Como no es posible alcanzar una situación en la cual el estado es A ya sea que el jugador 1 responda a una oferta o el jugador 2 tenga que hacer una oferta, los correspondientes cuadros quedan en blanco.

El resultado de este perfil de estrategias es que el jugador 1 ofrece a en el período 0, y el jugador 2 rechaza esta oferta y propone b en el período 1, lo cual el jugador 1 acepta. Esto es, para el jugador 1: la estrategia σ consiste en proponer a y aceptar x siempre que $x_1 \geq c_1$; y para el jugador 2 la estrategia τ le pide que proponga b y acepte x si es que $x_2 \geq c_2$.

Para verificar que las estrategias constituyen un EPS:

Supongamos que el jugador 2 sigue τ :

Si el jugador 1 propone a el jugador 2 rechaza y propone b lo cual el jugador 1 acepta obteniendo el resultado $(b, 1)$.

Si el jugador 1 propone b el jugador 2 rechaza y propone b lo cual el jugador 1 acepta obteneiendo el resultado $(b, 1)$.

Si el jugador 1 propone c el jugador 2 acepta y el resultado es $(c, 0)$.

$$a_1 > b_1 > c_1 \Rightarrow (a_1, 0) \succ_1 (b_1, 0) \succ_1 (c_1, 0) \text{ y } (b_1, 0) \succ_1 (b_1, 1).$$

Por lo que le conviene al jugador 1 proponer a.

Supongamos que el jugador 1 sigue σ :

Si el jugador 2 propone b el jugador 1 acepta obteniendo el resultado $(b, 1)$.

Si el jugador 2 propone c el jugador 1 acepta y el resultado es $(c, 1)$.

$$a_2 < b_2 < c_2 \Rightarrow (b_2, 1) \succ_1 (c_2, 1).$$

Por lo que le conviene al jugador 1 proponer b.

Conclusión: a ambos les conviene seguir la pareja de estrategias (σ, τ) descrita arriba que induce el resultado EPS $(b, 1)$.

Un ingrediente final del modelo que aparece para contribuir al resultado de que un acuerdo es alcanzado sin demora es la suposición básica de que cada jugador está completamente informado acerca de las preferencias de su oponente.

La intución sugiere que si un jugador está inseguro acerca de las características de su oponente entonces la negociación puede alargarse: un jugador podría hacer una oferta que es aceptada por algunas clases de oponentes y rechazada por otros.

3.10.2 Paciencia

El equilibrio depende del carácter de las preferencias de los jugadores.

Una característica que podemos aislar es el grado de *paciencia*.

Defínanse las preferencias $\succeq_1'$ como menos paciente que $\succeq_1$ si $v_1'(x_1, 1) \leq v_1(x_1, 1)$ para todo $x \in X$ y $v_1'(x_1, 1) < v_1(x_1, 1)$ para algún $x \in X$.

Es inmediato de un diagrama como el de la figura siguiente que el valor de x_1^* que resuelve las ecuaciones: $v_1(x_1^*, 1) = y_1^*$ y $v_2(y_2^*, 1) = x_2^*$ para las preferencias $\succeq_1'$ no es más grande que el valor que las resuelve para las preferencias $\succeq_1$, y puede ser menor.

Así, el modelo predice que cuando un jugador se vuelve menos paciente, su parte negociada del pastel decrece.

Si los jugadores tienen preferencias de tiempo con tasas constantes de descuento, entonces ser menos paciente significa tener un valor más pequeño de δ_i.

En este caso podemos leer los resultados de $x^* = \left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$ como: si δ_1 decrece entonces x_1^* decrece, mientras que si δ_2 decrece entonces x_1^* aumenta.

3.10.3 Simetría

La estructura de un problema de negociación de ofertas alternantes es asimétrico en un aspecto: uno de los negociadores es el primero en hacer una oferta.

Si el jugador que comienza la negociación tiene las preferencias $\succsim_2$ mientras que el jugador que es el primero en responder tiene las preferencias $\succsim_1$, entonces el Teorema de la sección 3.8 implica que en el único EPS los jugadores alcanzan el acuerdo y^* en el período 0. (ver sección 3.3).

Como $x_1^* > y_1^*$, ser el primero que hace una oferta da una ventaja al jugador.

Si las actitudes de los jugadores ante el tiempo son iguales entonces podemos ser más específicos. En este caso $v_1 = v_2$, de modo que en la solución a $y_1^* = v_1(x_1^*, 1)$ y $x_2^* = v_2(y_2^*, 1)$ tenemos que: $x_1^* = y_2^*$.

Dado que $x_1^* > y_1^*$ tenemos que $x_1^* > \frac{1}{2}$ y $y_1^* < \frac{1}{2}$, en efecto; ésto se sigue de $1 = y_1^* + y_2^* = y_1^* + x_1^*$ y la condición $x_1^* > y_1^*$.

Lo que nos dice que el primero en moverse obtiene más de la mitad del pastel.

En un juego donde un jugador hace todas las ofertas, existe un único EPS en el cual ese jugador obtiene todo el pastel (sin importar las preferencias de los jugadores).

El hecho de que el jugador que hace la primera oferta tenga una ventaja cuando los jugadores alternan ofertas es un reflejo de la extrema asimetría cuando un sólo jugador hace todas las ofertas.

La asimetría en la estructura del juego de negociación de ofertas alternantes es artificial. Una manera de disminuir su efecto es reducir la cantidad de tiempo comprendido entre períodos. Notemos qué pasa cuando los jugadores tienen preferencias de tiempo con tasas constantes de descuento. En este caso podemos simular el efecto de encoger la longitud del período en un factor Δ, la utilidad del jugador i para el acuerdo x alcanzado después de una demora de t períodos es $\delta_i^{\Delta t} x_i$.

Sea $x^*(\Delta)$ el acuerdo alcanzado (en el período 0) en el único EPS del juego alterado por Δ en el cual el jugador 1 es el primero en hacer una oferta.

Sea $y^*(\Delta)$ el acuerdo alcanzado en este juego cuando el jugador 2 es el primero en hacer una oferta.

Sabemos que: $x^* = \left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$ y $y^* = \left(\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}\right)$ sustituyendo tenemos: $x_1^*(\Delta) = \frac{1-\delta_2^\Delta}{1-\delta_1^\Delta\delta_2^\Delta}$ y $y^* = \frac{1-\delta_1^\Delta}{1-\delta_1^\Delta\delta_2^\Delta}$. Sacando el límite usando L'Hôpital:

$$\lim_{\Delta\to 0} x^{*}(\Delta) = \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{1-\delta_2^{\Delta}}{1-\delta_1^{\Delta}\delta_2^{\Delta}}, \frac{\delta_2^{\Delta}(1-\delta_1^{\Delta})}{1-\delta_1^{\Delta}\delta_2^{\Delta}}\right)$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{-\delta_2^{\Delta}\log(\delta_2)}{-\delta_1^{\Delta}\delta_2^{\Delta}[\log(\delta_2)+\log(\delta_1)]}, \frac{-\delta_1^{\Delta}\delta_2^{\Delta}\log(\delta_1)+\delta_2^{\Delta}\log(\delta_2)-\delta_1^{\Delta}\delta_2^{\Delta}\log(\delta_2)}{-\delta_1^{\Delta}\delta_2^{\Delta}[\log(\delta_2)+\log(\delta_1)]}\right)$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{\log(\delta_2)}{\delta_1^{\Delta}[\log(\delta_2)+\log(\delta_1)]}, \frac{\delta_1^{\Delta}\log(\delta_1)-\log(\delta_2)\left[1-\delta_1^{\Delta}\right]}{\delta_1^{\Delta}[\log(\delta_2)+\log(\delta_1)]}\right) = \left(\frac{\log(\delta_2)}{\log(\delta_2)+\log(\delta_1)}, \frac{\log(\delta_1)}{\log(\delta_2)+\log(\delta_1)}\right)$$

Análogamente para

$$\lim_{\Delta\to 0} y^{*}(\Delta) = \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}\right)$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\left(\frac{\left\{\delta_2^{\Delta}\log(\delta_2)-\log(\delta_1)\left[1-\delta_2^{\Delta}\right]\right\}}{\delta_2^{\Delta}[\log(\delta_2)+\log(\delta_1)]}, \frac{\log(\delta_1)}{\delta_2^{\Delta}[\log(\delta_2)+\log(\delta_1)]}\right) = \left(\frac{\log(\delta_2)}{\log(\delta_2)+\log(\delta_1)}, \frac{\log(\delta_1)}{\log(\delta_2)+\log(\delta_1)}\right)$$

Con lo que obtenemos que $\lim_{\Delta\to 0} x^{*}(\Delta) = \lim_{\Delta\to 0} y^{*}(\Delta) = \left(\frac{\log(\delta_2)}{\log(\delta_2)+\log(\delta_1)}, \frac{\log(\delta_1)}{\log(\delta_2)+\log(\delta_1)}\right)$.

Así el límite, conforme la longitud del período se reduce a 0, de la cantidad recibida por un jugador es la misma sin importar qué jugador haga la primera oferta.

Como una alternativa para encoger la longitud del período, podemos modificar el juego para hacer su estructura simétrica. Una manera de hacerlo es considerar un juego en el cual al principio de cada período cada jugador sea escogido con probabilidad $\frac{1}{2}$ (independientemente del período que se encuentre) para ser el que haga la primera oferta.

Como esto introduce incertidumbre en la estructura del juego, necesitamos hacer suposiciones acerca de las preferencias de los jugadores en loterías sobre resultados.

Si hacemos las suposiciones de Von Neumann-Morgenstern, entonces podemos mostrar que este juego tiene un único EPS. En este equilibrio, el jugador 1 siempre ofrece $\widetilde{x}$ y el jugador 2 siempre ofrece $\widetilde{y}$, donde $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, es tal que el jugador 1 es indiferente entre $(\widetilde{y}, 0)$ y la lotería entre $(\widetilde{x}, 1)$ y $(\widetilde{y}, 1)$ con probabilidades iguales, esto es $(\widetilde{y}, 0) \sim_1 \{\alpha(\widetilde{x}, 1) + \alpha(\widetilde{y}, 1)\}$ y el jugador 2 es indiferente entre $(\widetilde{x}, 0)$ y la misma lotería: $(\widetilde{x}, 0) \sim_2 \{\alpha(\widetilde{x}, 1) + \alpha(\widetilde{y}, 1)\}$, en efecto:

Si el jugador 1 porpone $\widetilde{x}$ y el jugador 2 acepta entonces el resultado es $(\widetilde{x}, 0)$, si propone x y el jugador 2 acepta entonces el resultado es $(x, 0)$; si el jugador 2 rechaza propone $\widetilde{y}$ entonces el resultado es $(\widetilde{y}, t)$ con $t \geq 1$. Entonces tenemos

$(\tilde{x},0) \succsim_1 (\tilde{x},1) \sim_1 (\tilde{y},0) \sim_1 (\tilde{y},1) \succsim_1 (\tilde{y},t)$ por lo que al jugador 1 le conviene la estrategia donde siempre se propone $\tilde{x}$.

Si el jugador 2 propone $\tilde{y}$ y el jugador 1 acepta entonces el resultado es $(\tilde{y},1)$, si propone y y el jugador 1 acepta entonces el resultado es $(y,1)$; si el jugador 1 rechaza propone $\tilde{x}$ entonces el resultado es $(\tilde{x},t)$ con $t \geq 2$. Entonces tenemos
$(\tilde{y},1) \sim_2 (\tilde{x},1) \sim_2 (\tilde{x},0) \succsim_2 (\tilde{x},1) \succsim_2 (\tilde{x},t)$ por lo tanto al jugador 2 le conviene la estrategia donde siempre se proponga $\tilde{y}$.

3.11 Estacionalidad de preferencias

El teorema de la sección 3.8 se continúa manteniendo si se debilita A5 y se requiere sólo que la preferencia del jugador 1 entre los resultados (x,t) y $(y,t+1)$ cuando t es *impar* es independiente de t, y las preferencias del jugador 2 entre (x,t) y $(y,t+1)$ cuando t es *par* es independiente de t.

La razón es que en adición a A1, A2 y A3 la única propiedad de preferencias que se ha usado concierne a las preferencias de los jugadores entre aceptar una oferta y rechazarla y así mover el juego a un subjuego que comienza en el siguiente período.

De este modo la preferencia del jugador 1 entre (x,t) y $(y,t+1)$ cuanto t es *par*, y la preferencia del jugador 2 entre estos dos acuerdos cuando t es *impar*, son irrelevantes. Siempre y cuando las preferencias continúnen satisfaciendo A1, A2 y A3 existe un único EPS, el cual se caracteriza por una adecuada versión modificada de las ecuaciones $y_1^* = v_1(x_1^*,1)$ y $x_2^* = v_2(y_2^*,1)$ que es $v_1(y_1^*,1) = v_1(x_1^*,2)$ y $x_2^* = v_2(y_2^*,1)$. Que se obtiene tomando valor presente de ambos lados de la primera ecuación: $v_1(y_1^*,1) = v_1(v_1(x_1^*,1),1) = v_1(x_1^*,2)$.

Para ilustrar este punto considérese el caso en el cual cada período corresponde a un intervalo de tiempo real.

Supongamos que las preferencias del jugador i sobre las parejas (x,θ), donde x es un acuerdo y θ es el tiempo real en el cual el acuerdo es alcanzado, están representadas por la función de utilidad $\delta^\theta x_i$.

Supongamos que el tiempo que toma al jugador i hacer una nueva propuesta después que rechaza alguna es Δ_i.

Entonces el único EPS de este juego es el mismo que el único EPS del juego en el cual cada período tiene una longitud 1 y los jugadores tenen factores constantes de descuento δ^{Δ_i}.

Entre más rápido el jugador i pueda hacer una contraoferta después de rechazar una oferta del jugador j, δ^{Δ_i} es más grande, y por ende x_1^* es más grande y y_1^* más chica.

En el límite, cuando el jugador 1 puede responder instantáneamente ($\Delta_i = 0$), pero el jugador 2 no puede, el jugador 1 obtene todo el pastel ($x_1^* = y_1^* = (1,0)$).

En más adelante se estudiará el caso de tiempos de respuesta asimétricos.

3.12 Horizontes finitos vs. horizontes infinitos

La elección de un horizonte infinito para un juego de negociación tiene un importante uso en la modelación. A primera vista la suposición de un horizonte infinito no es realista, la vida de todo individuo es finita. Como alternativa, podemos construir un modelo en el cual el horizonte es: ya sea un número finito fijo o una variable aleatoria con un soporte finito.

Un juego de negociación de ofertas alternantes con un horizonte finito tiene un único EPS (bajo las suposiciones sobre preferencias hechas en la sección 3.3) que puede ser calculado por inducción hacia atrás.

Conforme el horizonte se incrementa, el acuerdo alcanzado en este equilibrio converge a un acuerdo alcanzado en el EPS único del modelo con un horizonte infinito. Binmore[3] usa este hecho para proveer una prueba alternativa del Teorema de la sección 3.8. Así el modelo del horizonte infinito de este capítulo predice un resultado muy similar al predicho por un modelo con un horizonte finito " muy largo ".

A pesar de la similitud en las predicciones de los modelos, no hay que ver las diferencias entre ellos como insignificantes. El modelo con horizonte infinito encaja en una situación en la cual los jugadores perciben que, después de cualquier rechazo de una oferta, hay lugar para una contraoferta. Tal percepción ignora el hecho de que la muerte de uno de los jugadores o el fin del mundo puede impedir cualquier contrapropuesta.

El modelo con un horizonte finito encaja en una situación en la cual la etapa final del juego es percibida claramente por los jugadores, quienes la toman completamente en cuenta cuando formulan sus estrategias.

La diferencia significativa entre los dos modelos no recae en el realismo de los horizontes que se disponen sino en el razonamiento estratégico de los jugadores.

[3] 1987, "Perfect Equilibria in Bargaining Models", pp.77-105 en Binmore y Dasgupta.

En muchos contextos un modelo en el cual el horizonte es infinito captura mejor este proceso de razonamiento. En tales casos, un teorema de convergencia para juegos con horizontes infinitos puede ser util como un mecanismo técnico, aún si los juegos finitos en sí son de interés intrínseco limitado.

3.13 Un juego de ofertas alternantes con tres negociadores

Aquí se considera el caso en el que *tres* jugadores tienen acceso al pastel de tamaño 1 y desean acordar como repartirlo entre ellos. El acuerdo requiere la aprobación de los tres jugadores: ningún subconjunto de ellos puede alcanzar el acuerdo.

Existen muchas maneras de extender el juego de ofertas alternantes a este caso. Una extensión que parece ser natural fué sugerida y analizada por Shaked, encontró el decepcionante resultado de que si los jugadores son lo suficientemente pacientes entonces para *toda* partición del paste existe un EPS en el cual se alcanza el acuerdo inmediato sobre esa partición.

El juego de Shaked es el siguiente:

- En el primer período el jugador 1 propone una partición, esto es un vector $x = (x_1, x_2, x_3)$ con $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, y el jugador 2 y el jugador 3 por turnos aceptan o rechazan esa propuesta. Si cualquiera de ellos rechaza entonces el juego pasa al siguiente período.

- En el segundo período es el truno del jugador 2 de proponer una partición, a la cual el jugador 3 y el jugador 1 responden en turnos. Si al menos uno de ellos rechaza la propuesta, entonces el juego pasa, otra vez, al período que sigue.

- En este período el jugador 3 hace una propuesta y el jugador 1 y el jugador 2 responden.

- Los jugadores rotan propuestas de esta manera hasta que una propuesta es aceptada por los restantes dos jugadores.

- Las preferencias de los jugadores satisfacen A1 hasta A6 de la sección 3.3.1.

Recordemos que $v_i(x_i, t)$ es el valor presente para el jugador i del acuerdo x en el período t. (sección 3.3.1).

Proposición

Supóngase que las preferencias de los jugadores satisfacen las suposiciónes A1 hasta A6 y $v_i(1,1) \geq \frac{1}{2}$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces para cualquier partición x^* del pastel existe un EPS del juego de negociación de tres jugadores, definido como arriba, en el cual el resultado es el acuerdo inmediato sobre la partición x^*.

Demostración

Fijemos una partición x^*.

La tabla siguiente, en la cual e^i es el i-ésimo vector unidad, describe un EPS en el cual los jugadores acuerdan inmediatamente en x^* (ver la sección 3.5 para presentar equilibrios).

		x^*	e^1	e^2	e^3
1	propone	x^*	e^1	e^2	e^3
	acepta	$x_1 \geq v_1(x_1^*, 1)$	$x_1 \geq v_1(1,1)$	$x_1 \geq 0$	$x_1 \geq 0$
2	propone	x^*	e^1	e^2	e^3
	acepta	$x_2 \geq v_2(x_2^*, 1)$	$x_2 \geq 0$	$x_2 \geq v_2(1,1)$	$x_2 \geq 0$
3	propone	x^*	e^1	e^2	e^3
	acepta	$x_3 \geq v_3(x_3^*, 1)$	$x_3 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	$x_3 \geq v_3(1,1)$
	Transiciones	Si en cualquier	estado y	cualquier jugador	propone x con
		$x_i > y_i$,	entonces ir al	estado e^j, donde	$j \neq i$ es el juga-
		dor con el índice	más bajo	para el cual	$x_j < \frac{1}{2}$

En cada estado $y = (y_1, y_2, y_3)$, cada jugador i propone la partición y y acepta la partición x si y sólo si $x_i \geq v_i(y_i, 1)$.

Si en cualquier estado y un jugador propone un acuerdo x para el cual él obtenga más que y_i, entonces existe una transición al estado e^j, donde $j \neq i$ es el jugador con el índice más bajo para el cual $x_j < \frac{1}{2}$.

Como siempre, cualquier transición entre estados ocurre inmediatamente después del evento que la dispara; esto es, inmediatamente después de que es hecha una oferta, *antes* de la respuesta.

Nótese que siempre que el jugador i propone un acuerdo x para el cual $x_i > 0$ existe al menos un jugador j para el cual $x_j < \frac{1}{2}$.

Para ver que estas estrategias forman un EPS primero se considera la regla del jugador i para aceptar ofertas. Si en el estado y, el jugador i tiene que responder a una oferta, entonces lo más que puede obtener si rechaza la oferta es y_i con un período de demora, que vale para él $v_i(y_i, 1)$.

Así la aceptación de x si y sólo si $x_i \geq v_i(y_i, 1)$ es una mejor respuesta a las estrategias de los otros jugadores.

Ahora consideremos la regla del jugador i para hacer ofertas en el estado y:

- Si propone x con $x_i > y_i$, entonces el estado cambia a e^j, j rechaza la propuesta de i puesto que $x_j < \frac{1}{2} \leq v_i\left(e^j_j, 1\right) = v_i(1, 1)$ y entonces i recibe 0.
- Si propone x con $x_i \leq y_i$ entonces ya sea que esta oferta es aceptada o rechazada el jugador i obtiene a lo más y_i en el siguiente período.

Así el óptimo para el jugador i es proponer y.

La fuerza principal que mantiene el equilibrio en esta demostración es que se recompensa a uno de los jugadores por rechazar una oferta cualquiera, después de su rechazo obtiene todo el pastel.

El resultado contrasta al Teorema de la sección 3.8, que muestra que un juego de negociación de ofertas alternantes de dos jugadores tienen un único EPS. La diferencia clave entre las dos situciones parece ser la que sigue: cuando hay tres (o más) jugadores uno de los que contestan siempre puede ser recompensado por rechazar una oferta cualquiera, mientras que cuando hay sólo dos jugadores ésto no sucede.

Por ejemplo, en el juego de dos jugadores no existe un EPS en el cual el jugador 1 proponga un acuerdo x donde obtenga menos que $1 - v_2(1, 1)$, puesto que si él se distrae y propone un acuerdo y para el cual $x_1 < y_1 < 1 - v_2(1, 1)$ entonces el jugador 2 debe aceptar esta propuesta (porque él puede obtener a lo más $v_2(1, 1)$ rechazándola).

Muchas rutas pueden tomarse con el fin de aislar un único resultado en el juego de tres jugadores de Shaked. Por ejemplo, es claro que el único EPS en el cual las preferencias del jugador son estacionarias tiene una forma similar a la del único EPS del juego de dos negociadores.

Si los jugadores tienen preferencias de tiempo con un factor de descuento constante común δ, entonces este equilibrio lleva a la división $(\xi, \delta\xi, \delta^2\xi)$ del pastel, donde $\xi(1 + \delta + \delta^2) = 1$. Sin embargo, la restricción a estrategias estacionarias es extremadamente fuerte (sección 3.4).

Una ruta más atractiva es modificar la estructura del juego. Por ejemplo, Perry y Shaked han propuesto un juego en el cual los jugadores votan al hacer las demandas. Una vez que el jugador ha hecho una demanda, no puede subsecuentemente incrementar ésta demanda. El juego termina cuando la suma de las demandas es a lo más 1. Por el momento, no hay ningún análisis completo de éste juego.

Capítulo 4

RELACION ENTRE EL ENFOQUE AXIOMATICO Y EL ENFOQUE ESTRATEGICO

4.1 Introducción

En los capítulos 1 y 2 se tomaron diferentes enfoques al estudio de la negociación. El modelo en el capítulo 1, debido a Nash, es axiomático: comenzamos con una lista de propiedades que se requiere que la solución satisfaga. En contraste, el modelo de ofertas alternantes en el capítulo 2 es estratégico: se formuló el proceso de negociación como un juego extensivo específico. En este capítulo se estudiará la relación entre los dos enfoques.

El modelo axiomático de Nash tiene ventajas que son difíciles de exagerar. Este modelo alcanza gran generalidad evitando cualquier especificación del proceso de negociación, la solución definida por los axiomas es única y su forma simple es altamente manejable, facilitando la aplicación. Sin embargo, el enfoque axiomático y, el modelo de Nash en particular, tiene sus desventajas. Como se discutió en el capítulo 1, es difícil afirmar qué tan razonables son algunos axiomas sin tener en mente un procedimiento de negociación específico. En particular, los axiomas de Nash IAI (invarianza de alternativas irrelevantes) y PAR (eficiencia de Pareto) son difíciles de defender en abstracto.

Más aún, dentro del enfoque axiomático no es posible referirse a asuntos relacionados directamente al problema de negociación.

La investigación hecha hasta estos días de la relación entre el enfoque axiomático y el estratégico intenta aclarar el alcance del enfoque axiomático. A menos que se pueda encontrar un modelo estratégico sensato que tenga un equilibrio correspondiente a la solución de Nash, el atractivo de los axiomas de Nash está en duda. Las características de tal modelo estratégico aclaran el rango de situaciones en las cuales los axiomas son razonables.

La idea de relacionar soluciones axiomáticas a equilibrios de modelos estratégicos fué sugerida por Nash y es conocida como "Programa Nash".

En este capítulo seguimos el programa Nash mostrando que existe una conexión cercana entre la solución de Nash y el resultado de EPS en el juego de negociación de ofertas alternantes estudiado en el capítulo 2.

Además de proveer un contexto dentro del cual un modelo axiomático es apropiado, una conexión formal entre la solución axiomática y el equilibrio de un modelo estratégico es de ayuda en las aplicaciones.

Cuando se usa un modelo de negociación con contexto económico, es necesario establecer correspondencia entre los elementos primitivos del modelo de negociación a el problema económico. Frecuentemente hay muchas relaciones que parecen razonables. Por ejemplo, puede haber muchos candidatos para el punto de desacuerdo en el modelo de Nash. Un modelo estratégico para el cual la solución de Nash es un equilibrio puede guiarnos a una elección apropiada de modelación.

Antes de que podamos ligar las soluciones de un enfoque axiomático y un estratégico formalmente, necesitamos establecer un modelo subyacente común. Los elementos primitivos en el modelo de Nash son el conjunto de resultados (el conjunto de acuerdos y el evento desacuerdo) y las preferencias de los jugadores en loterías sobre este conjunto. En el modelo de ofertas alternantes del capítulo 2 se nos dan las preferencias de los jugadores sobre acuerdos alcanzados en varios puntos en el tiempo en lugar de sus preferencias sobre resultados inciertos.

Se empieza (en la sección 4.2) introduciendo incertidumbre a un juego de negociación de ofertas alternantes y suponiendo que los jugadores son indiferentes al tiempo de un acuerdo.

Específicamente, después, de que cualquier oferta es rechazada existe una probabilidad de que la negociación termine, y el evento **"rompimiento"** ocurra. La probabilidad de que la negociación se interrumpida de esta manera está fija.

Se muestra que el límite del EPS conforme esta probabilidad converge a cero corresponde a la solución de Nash de un problema de negociación definido apropiadamente.

4.2 Un modelo de ofertas alternantes con riesgo de rompimiento

4.2.1 El juego

Aquí se estudia un modelo estratégico de negociación similar al de ofertas alternantes del capítulo 2. Como antes el conjunto de posibles acuerdos es:

$$X = \left\{(x_1, x_2) \in \Re^2 : x_1 + x_2 = 1 \text{ y } x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2\right\}$$

(el conjunto de divisiones del pastel unitario), y los jugadores proponen miembros de X alternadamente.

El juego difiere en dos aspectos del estudiado en el capítulo 2.

Primero, al final de cada período, después de que una oferta ha sido rechazada existe una oportunidad de que la negociación termine con el evento rompimiento B. Precisamente éste evento ocurre independientemente con probabilidad $0 < q < 1$ al final de cada período.

Segundo, cada jugador es indiferente acerca del período en el cual el acuerdo es alcanzado.

Denotamos al juego extensivo resultante por $\Gamma(q)$, los primeros dos períodos del juego se muestran en la siguiente figura.

Se estudia la conexión entre la solución de Nash y el límite del EPS de $\Gamma(q)$ cuando la probabilidad q de rompimiento se vuelve sumamente pequeña.

La posibilidad de rompimiento, más que la impaciencia de los jugadores (como en el capítulo anterior), es la fuerza básica que motiva a los jugadores a alcanzar un acuerdo tan pronto como sea posible.

Podemos interpretar un rompimiento como el resultado de la intervención de una tercera parte, que explota las ganancias mutuas. Un rompimiento también puede ser interpretado como el evento en el que una amenaza hecha por una de las partes, para parar las negociaciones, realmente es concebida. Esta posibilidad es especialmente relevante cuando un negociador es un equipo (por ejemplo un gobierno), los líderes del cual pueden encontrarse inevitablemente atrapados por sus propias amenazas.

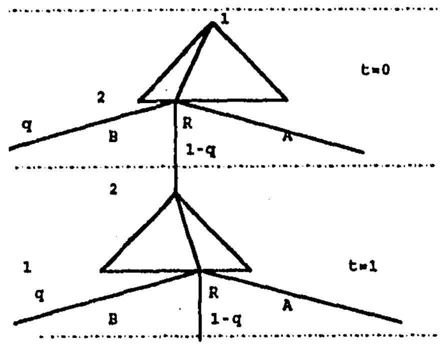


Figura 4.1:

Una estrategia para cada jugador en $\Gamma(q)$ se define exactamente como para un juego de negociación de ofertas alternantes (ver sección 3.4)

Sea (σ, τ) una pareja de estrategias que lleva al resultado (x, t) en un juego de ofertas alternantes (en el cual no existe probabilidad de rompimiento). En el juego $\Gamma(q)$ la probabilidad de que la negociación "rompa" en cualquier período es q de modo que (σ, τ) leva a (x, t) con probabilidad $(1-q)^t$, y el evento rompimiento ocurre con probabilidad:

$$q+q(1-q)^1+\cdots+q(1-q)^{t-1} = q\left[1+(1-q)^1+\cdots+(1-q)^{t-1}\right] = q\left\{\frac{1-(1-q)^t}{1-(1-q)}\right\}$$
$$= 1-(1-q)^t.$$

La probabilidad q y el evento rompimiento B están fijos siempre, de manera que la lotería depende sólo de las dos variables x y t. Se denota a la lotería por $(\langle x, t\rangle)$.

Así un resultado en $\Gamma(q)$, como un resultado en el juego de negociación de ofertas alternantes estudiado en el capítulo 2, es una pareja consistente de una acuerdo x y un tiempo t.

Las interpretaciones de las parejas $\langle x, t\rangle$ y $(\langle x, t\rangle)$ son distintas. La primera significa que el acuerdo x es alcanzado en el tiempo t, mientras que la segunda es una abreviatura para la lotería en la cual x ocurre con probabilidad $(1-q)^t$ y B ocurre con probabilidad $1-(1-q)^t$.

Sin embargo, un elemento clave en el análisis de $\Gamma(q)$ es la correspondencia exacta entre $\Gamma(q)$ y un juego de negociación de ofertas alternantes. Precisamente, una pareja de estrategias que genera el resultado (x, t) en un juego de negociación de ofertas alternantes genera el resultado $\langle(x, t)\rangle$ en el juego $\Gamma(q)$; la pareja de estrategias que genera el resultado D (desacuerdo perpetuo) en un juego de negociación de ofertas alternantes genera el evento B, con probabilidad 1, en el juego $\Gamma(q)$.

4.2.2 Preferencias

A fin de completar la descripción del juego $\Gamma(q)$, es necesario especificar las preferencias de los jugadores sobre los resultados.

Se asume que cada jugador $i = 1, 2$ tiene un orden de preferencia completo, transitivo y reflexivo, $\succsim_i$, sobre loterías en $X \cup \{B\}$ que satisface las suposiciones de Von Neumann y Morgenstern. Cada orden de preferencia puede así, ser representado por el valor esperado de una función de utilidad continua $u_i : X \cup \{B\} \to \Re$, la cual es única salvo una transformación afín. Se asume que estas funciones de utilidad satisfacen las siguientes tres condiciones, que son suficientes para garantizar que se pueden aplicar, tanto la solución de Nash como el Teorema (sección 3.8), al juego $\Gamma(q)$.

B1 (*el pastel es deseable*)

Para cualquier $x \in X$ y $y \in X$ se tiene $x \succ_i y$ si y sólo si $x_i > y_i$ para $i = 1, 2$.

B2 (*el rompimiento es el peor resultado*)

$(0, 1) \sim_1 B$ y $(1, 0) \sim_2 B$.

B3 (*aversión al riesgo*)

Para cualquier $x \in X$ y $y \in X$ y $\alpha \in [0, 1]$, cada jugador $i = 1, 2$ ya sea prefiere el resultado cierto $[\alpha x + (1 - \alpha) y] \in X$ a la lotería en la cual el acuerdo x es alcanzado con probabilidad α y y con probabilidad $1 - \alpha$, o es indiferente entre las dos.

Bajo la suposición B1, la utilidad del jugador i para $x \in X$ depende sólo de x_i, por lo que subsecuentemente se escribirá $u_i(x_i)$ en lugar de $u_i(x_1, x_2)$.

La significancia de B2 es que existe un acuerdo que ambos jugadores prefieren a B. El análisis puede ser fácilmente modificado para tratar el caso en el que algunos acuerdos son peores para alguno de los jugadores que B : el conjunto X tiene que ser meramente redefinido para excluir tales acuerdos.

Sin pérdida de generalidad, fijemos $u_i(B) = 0$ para $i = 1, 2$.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Ahora se verifica que las suposiciones B1, B2 y B3 son suficientes para permitir ajustar un problema de negociación al juego.

Definamos $S = \{(s_1, s_2) \in \Re^2 : (s_1, s_2) = (u_1(x_1), u_2(x_2))$ para alguna $x \in X\}$ y $d = (u_1(B), u_2(B))$.

Para que $\langle S, d\rangle$ sea un problema de negociación necesitamos que S sea la gráfica de una función cóncava no creciente y que exista $s \in S$ para la cual $s_i > d_i$ para $i = 1, 2$.

La primera condición se satisface porque B1 y B3 implican que cada u_i es creciente y cóncava; en efecto considerando B1 tenemos $s, s' \in S \Rightarrow s \succ_i s' \Leftrightarrow u_i(s) \succ_i u_i\left(s'\right)$ ahora por B2 tenemos $[\alpha x + (1-\alpha) y] \succsim_i \{\alpha x + (1-\alpha) y\}$

$\Rightarrow u_i [\alpha x + (1-\alpha) y] \geq u_i(\alpha x) + (1-\alpha) u_i(y)$ lo que resulta ser la definición de concavidad.

La segunda condición se sigue de B1 y B2 ya que para todo d_i existe un $s_i \in S$ tal que $s_i > s_i'$ y $s_i > d_i$.

Ahora se verifica que podemos usar el Teorema de la sección 3.8 a $\Gamma(q)$. Para hacerlo necesitamos asegurar que las preferencias sobre loterías de la forma $\langle\langle x, t\rangle\rangle$ inducidas por los órdenes de preferencia $\succsim_i$ sobre loterías en $X \cup \{B\}$ satisfacen las suposiciones A1 hasta A6 de la sección 3.3.1, cuando reemplazamos el símbolo (x, t) con $\langle\langle x, t\rangle\rangle$, y el símbolo D por B.

Bajo las suposiciones anteriores cada orden de preferencia sobre los resultados $\langle\langle x, t\rangle\rangle$ es completo transitivo y $\langle\langle x, t\rangle\rangle \succsim_i \langle\langle y, s\rangle\rangle$

$\Leftrightarrow u_i\left\{(1-q)^t x + \left[1-(1-q)^t\right] B\right\} \geq u_i\{(1-q)^s y + [1-(1-q)^s] B\}$

$\Leftrightarrow (1-q)^t u_i(x) + \left[1-(1-q)^t\right] u_i(B) \geq (1-q)^s u_i(y) + [1-(1-q)^s] u_i(B)$

$\Leftrightarrow (1-q)^t u_i(x) \geq (1-q)^s u_i(y)$ (ya que $u_i(B) = 0$).

Se sigue de B1 y B2 que $\langle\langle x, t\rangle\rangle \succsim_i B$ para todos los resultados $\langle\langle x, t\rangle\rangle$, de modo que A1 se satisface. De B1 deducimos que $\langle\langle x, t\rangle\rangle \succ_i \langle\langle y, t\rangle\rangle \Leftrightarrow x_i > y_i$ de modo que A2 se satisface. La continuidad de cada u_i asegura que A4 se satisface, y A5 se sigue inmediatamente. Finalmente se muestra que A6 se satisface.

La continuidad de u_i implica que para todo $x \in X$ existe $y \in X$ tal que $u_i(y_i) = (1-q)^t u_i(x_i)$ por lo tanto $\langle\langle y, 0\rangle\rangle \sim_i \langle\langle x, t\rangle\rangle$.

Por lo tanto el valor presente $v_i(x_i, 1)$ de la lotería $\langle\langle x, t\rangle\rangle$ satisface $u_i(v_i(x_i, 1)) = (1-q) u_i(x_i)$ o $u_i(x_i) - u_i(v_i(x_i, 1)) = q u_i(x_i)$.

Sea $x_i < y_i$. La concavidad de u_i implica $\frac{u_i(x_i) - u_i(v_i(x_i,1))}{|x_i - v_i(x_i,1)|} \geq \frac{u_i(y_i) - u_i(v_i(y_i,1))}{y_i - v_i(y_i,1)}$ ver sección 2.4.1.

Así $\frac{qu_i(x_i)}{x_i - v_i(x_i,1)} \geq \frac{qu_i(y_i)}{y_i - v_i(y_i,1)}$. Como $u_i(x_i) < u_i(y_i)$ se sigue que
$u_i(x_i)[y_i - v_i(y_i,1)] \geq u_i(y_i)[x_i - v_i(x_i,1)]$
$\Rightarrow [y_i - v_i(y_i,1)] \geq \frac{u_i(y_i)}{u_i(x_i)}[x_i - v_i(x_i,1)] > [x_i - v_i(x_i,1)]$, por lo tanto
$x_i - v_i(x_i,1) < y_i - v_i(y_i,1)$ de modo que A6 se satisface.

4.2.3 Equilibrio Perfecto en Subjuegos

Dado que las preferencias de los jugadores sobre loterías de la forma $\langle(x,t)\rangle$ satisfacen las suposiciones A1 hasta A6 de la sección 3.3, se puede deducir del teorema en la sección 3.8 el carácter del único EPS de $\Gamma(q)$, para cualquier q fija en $(0,1)$.

Como se denotó anteriormente, para toda lotería $\langle(x,t)\rangle$ existe un acuerdo $y \in X$ tal que $\langle(y,0)\rangle \sim_i \langle(x,t)\rangle$. Sea $(x^*(q), y^*(q))$ la única pareja de acuerdos satisfaciendo:

$$\langle(y^*(q),0)\rangle \sim_1 \langle(x^*(q),1)\rangle \quad \text{y} \quad \langle(x^*(q),0)\rangle \sim_2 \langle(y^*(q),1)\rangle$$

Transformando ésto en un enunciado acerca de probabilidades tenemos:

$u_1\langle(y^*(q),0)\rangle = u_1\langle(x^*(q),1)\rangle \Rightarrow$
$(1-q)^0 u_1(y_1^*(q)) + \left(1-(1-q)^0\right)u_1(B) = (1-q)^1 u_1(x_1^*(q)) + \left(1-(1-q)^1\right)u_1(B)$
$\Rightarrow u_1(y_1^*(q),0) = (1-q)u_1(x_1^*(q),1)$ y
$u_2\langle(x^*(q),0)\rangle = u_2\langle(y^*(q),1)\rangle \Rightarrow$
$(1-q)^0 u_2(x_2^*(q)) + \left(1-(1-q)^0\right)u_1(B) = (1-q)^1 u_2(y_2^*(q)) + \left(1-(1-q)^1\right)u_2(B)$
$\Rightarrow u_2(x_2^*(q),0) = (1-q)u_1(y_2^*(q),1)$

Así por el teorema en la sección 3.8 tenemos lo siguiente:

Proposición Para cada $q \in (0,1)$ el juego $\Gamma(q)$ tiene un único EPS. En este equilibrio el jugador 1 propone el acuerdo $x^*(q)$ en el período 0, el cual el jugador 2 acepta.

Demostración

Si el jugador 1 propone $x^*(q)$ lo que el jugador 2 acepta, entonces el resultado es $(x^*(q),0)$.

Si el jugador 1 propone $x(q)$ y el jugador 2 acepta, entonces el resultado es $(x(q),0)$, si el jugador 2 rechaza y propone $y^*(q)$, el jugador 1 acepta y el resultado es $(y^*(q),1)$.

Que el jugador 2 acepte $(x(q),0)$ implica que $x_2(q) > x_2^*(q) \Rightarrow x_1(q) < x_1^*(q)$
$\Rightarrow (x^*(q),0) \succ_1 (x(q),0)$.

Por otro lado sabemos que $x_1^*(q) < y_1^*(q)$, entonces
$(x^*(q), 0) \succ_1 (x^*(q), 1) \succ_1 (y^*(q), 1)$.

Por lo tanto lo mejor que puede hacer el jugador 1 es proponer $x^*(q)$ en el tiempo 0.

4.2.4 La relación con la solución de Nash

Ahora se mostrará que existe una relación muy estrecha entre la solución de Nash para el problema de negociación (S, d) y el límite del único EPS de $\Gamma(q)$ conforme $q \to 0$.

Proposición El límite, conforme $q \to 0$, del acuerdo alcanzado en el único EPS de $\Gamma(q)$ es el acuerdo dado por la solución de Nash al problema de negociación (S, d), donde S está definido en la sección 0.21.2 y $d = (0, 0)$.

Demostración

$$f^N(S, d) = \underset{(d_1, d_2) \leq (s_1, s_2) \in S}{\arg\max} (s_1 - d_1)(s_2 - d_2)$$

$$= [u_1(x_1^*(q)) - u_1(d_1)][u_2(x_2^*(q) - u_2(d_2))] = u_1(x_1^*(q))\, u_2(x_2^*(q))$$

$$= u_1(x_1^*(q))(1 - q)\, u_2(y_2^*(q)) = \frac{u_1(y_1^*(q))}{1-q}(1 - q)\, u_2(y_2^*(q))$$

$$= u_1(y_1^*(q))\, u_2(y_2^*(q)).$$

Por lo tanto
$u_1(x_1^*(q))\, u_2(x_2^*) = u_1(y_1^*(q))\, u_2(y_2^*(q))$ y
$u_1(y_1^*(q)) = u_1(x_1^*(q)) - q u_1(x_1^*(q))$.

Luego $u_1(x_1^*(q)) - u_1(y_1^*(q)) = q u_1(x_1^*(q))$ y entonces
$\lim_{q \to 0} u_1(x_1^*(q)) - u_1(y_1^*(q)) = \lim_{q \to 0} q u_1(x_1^*(q)) = 0$.

Análogamente $u_2(x_2^*(q)) = u_2(y_2^*(q)) - q u_2(y_2^*(q))$ y
$u_2(x_2^*(q)) - u_2(y_2^*(q)) = -q u_2(y_2^*(q))$ por lo que
$\lim_{q \to 0} u_2(x_2^*(q)) - u_2(y_2^*(q)) = \lim_{q \to 0} -q u_2(y_2^*(q)) = 0$.

Así (x_1^*, x_2^*) converge al maximizador de $u_1(x_1(q))\, u_2(x_2(q))$.

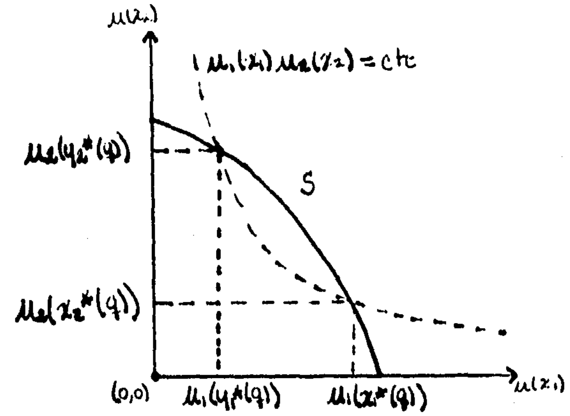


Figura 4.2:

4.3 Preferencias de tiempo

Ahora regresamos al modelo de ofertas alternantes estudiado en el capítulo 2, en el cual la impaciencia de los jugadores es la fuerza directriz. En esta sección se piensa en un período del juego de negociación como un intervalo de tiempo real de longitud $\Delta > 0$, y se examina el límite del EPS del juego conforme Δ se acerca a cero. De este modo se generaliza la discusión en la sección 3.10.3 que trata sólo con las preferencias de tiempo con una tasa constante de descuento.

Se muestra que el límite del EPS del juego de negociación conforme la demora entre ofertas se aproxima a cero puede ser calculada usando una simple fórmula muy relacionada a la usada para caracterizar la solución de Nash.

Sin embargo, no se considera que el límite sea la solución de Nash, ya que las funciones de utilidad que aparecen en la fórmula reflejan las preferencias de tiempo de los jugadores, no sus actitudes frente al riesgo como sucede en la solución de Nash.

4.3.1 Juegos de negociación con períodos cortos

Consideremos un juego de negociación de ofertas alternantes (ver definición en la sección 3.2.2), en el cual la demora entre ofertas es Δ: se pueden hacer ofertas sólo en un tiempo en el conjunto numerable $\{0, \Delta, 2\Delta, ...\}$. Se denota tal juego con $\Gamma(\Delta)$.

Se desea estudiar el efecto al hacer que Δ converja a cero. Ya que se quiere permitir cualquier valor de Δ, se comienza con un orden de preferencia para cada jugador definido en el conjunto $(X \times T_\infty) \cup \{D\}$, donde $T_\infty = [0, \infty)$.

Para cada $\Delta > 0$ tal ordenación induce un orden sobre el conjunto $(X \times \{0, \Delta, 2\Delta, ...\}) \cup \{D\}$. A fin de aplicar los resultados del capítulo 2, se imponen condiciones en los órdenes sobre $(X \times T_\infty) \cup \{D\}$ tal que los órdenes inducidos satisfacen las condiciones A1 hasta A6 de dicho capítulo.

Se requiere que cada jugador i tenga un orden de preferencia $\succsim_i$ transitivo y reflexivo sobre $(X \times T_\infty) \cup \{D\}$ que satisfaga suposiciones análogas a A1 hasta A6. Específicamente se supone que $\succsim_i$ satisface:

C1 (*el desacuerdo es el peor resultado*)

Para todo $(x, t) \in X \times T_\infty$ tenemos que $(x, t) \succsim_i D$.

C2 (*el pastel es deseado*)

Para cualquier $t \in T_\infty, x \in X$ y $y \in X$ se tiene $(x, t) \succ_i (y, t) \Leftrightarrow x_i > y_i$.

Se refuerza ligeramente A3 del capítulo 2 al requerir que cada jugador sea indiferente acerca del tiempo de un acuerdo x en el cual $x_i = 0$.

Esta condición se satisface por preferencias con tasas constantes de descuento, pero no con preferencias con costo constante por demora.

C3 (*el tiempo es valioso*)

Para cualquier $t \in T_\infty, s \in T_\infty$ y $x \in X$ con $t < s$ se tiene $(x, t) \succ_i (x, s)$ si $x_i > 0$ y $(x, t) \sim_i (x, s)$ si $x_i = 0$.

Las suposiciones A4 y A5 permanecen esencialmente sin cambio.

C4 (*continuidad*)

Sean $\{(x_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{(y_n, s_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones convergentes de miembros de $X \times T_\infty$ con límites (x, t) y (y, s) respectivamente. Entonces $(x, t) \succsim_i (y, s)$ cada vez que $(x_n, t_n) \succsim_i (y_n, s_n)$ para toda n.

C5 (*estacionalidad*)

Para cualquier $t \in T_\infty, x \in X$, $y \in X$ y $\theta \geq 0$ se tiene $(x, t) \succ_i (y, t + \theta) \Leftrightarrow (x, 0) \succ_i (y, \theta)$.

El hecho de que C3 sea más fuerte que A3 permite deducir que para cualquier resultado $(x, t) \in X \times T_\infty$ existe un acuerdo $y \in X$ tal que $(y, 0) \sim_i (x, t)$. La razón es que por C3 y C2 tenemos $(x,0) \succsim_i (x,t) \succsim_i (z,t) \sim_i (z,0)$ donde z es el acuerdo para el cual $z_i = 0$; la afirmación se sigue de C4. Consecuentemente el valor presente $v_i(x_i,t)$ de un acuerdo (x,t) satisface:

$$(y,0) \sim_i (x,t) \text{ siempre que } y_i = v_i(x_i,t)$$

Finalmente se refuerza A6. Requerimos, además de A6, que la pérdida por demora sea una función *cóncava* de la cantidad involucrada.

C6 *(pérdida por demora creciente y cóncava)*
La pérdida de demora $x_i - v_i(x_i,1)$ es una función cóncava y creciente de x_i.

La condición de convexidad de v_i en x_i no tiene analogía en el análisis del capítulo 2, es una suposición adicional que es necesario imponer a las preferencias con el fin de obtener el resultado de esta sección. La condición se satisface, por ejemplo, por preferencias de tiempo con tasa constate de descuento, ya que la pérdida por demora en este caso es lineal.

4.3.2 Equilibrio Perfecto en Subjuegos

Si el orden de preferencia $\succsim_i$ del jugador i sobre $(X \times T_\infty) \cup \{D\}$ satisface las condiciones C1 hasta C6, entonces para cualquier valor de Δ el orden inducido sobre $(X \times \{0, \Delta, 2\Delta, ...\}) \cup \{D\}$ satisface A1 hasta A6 del capítulo 2. Por lo tanto se puede aplicar el teorema de la sección 3.8 al juego $\Gamma(\Delta)$. Para cualquier valor de $\Delta > 0$ sea $(x^*(\Delta), y^*(\Delta)) \in X \times X$ la única pareja de acuerdos que satisface:

$$(y^*(\Delta), 0) \sim_1 (x^*(\Delta), 1) \qquad \text{y} \qquad (x^*(\Delta), 0) \sim_2 (y^*(\Delta), 1)$$

Proposición

Supongamos que cada orden de preferencia de los jugadores satisface C1 hasta C6. Entonces para cada $\Delta > 0$ el juego $\Gamma(\Delta)$ tiene un único EPS. en este equilibrio el jugador 1 propone el acuerdo $x^*(\Delta)$ en el período 0, el cual el jugador 2 acepta.

Demostración

Si el jugador 1 propone $x^*(\Delta)$ entonces el jugador 2 acepta y el resultado es $(x^*(\Delta), 0)$.

Si el jugador 1 propone $x(\Delta)$ entonces, si el jugador 2 acepta el resultado es $(x(\Delta), 0)$ con $x_2 \geq x_2^*, x_1 \leq x_1^*$; si el jugador 2 rechaza, entonces propone $y^*(\Delta)$ y el resultado es $(y^*(\Delta), 0)$. Pero $(x^*(\Delta), 0) \succ_1 (x(\Delta), 0)$ y
$x_1^* > y_1^* \Rightarrow (x^*(\Delta), 0) \succ_1 (y^*(\Delta), 0) \succsim_1 (y^*(\Delta), 1)$.

4.3.3 La relación con la solución de Nash

Como se notó en la discusión después de A5, las preferencias que satisfacen A2 hasta A5 del capítulo 2 pueden ser representadas sobre $X \times T$ por una función de utilidad de la forma $\delta_i^t u_i(x_i)$.

Bajo las suposiciones más fuertes aquí se puede ser más específico. Si el orden de preferencia $\succsim_i$ sobre $(X \times T_\infty) \cup \{D\}$ satisface C1 hasta C6, entonces existe $\overline{\delta}_i \in (0,1)$ tal que para cada $\delta_i \geq \overline{\delta}_i$ existe una función *cóncava* creciente $u_i : X \longrightarrow \Re$, única salvo una multiplicación por una constante positiva, con la propiedad que $\delta_i^t u_i(x_i)$ representa $\succsim_i$ sobre $X \times T_\infty$. (En el caso de que el conjunto de tiempos sea discreto, ésto se sigue de la proposición 1 de Fishburn y Rubinstein (1982); los métodos en la prueba de su teorema 2 pueden ser usados, para mostrar que el resultado se mantiene también cuando el conjunto de tiempos es T_∞).

Ahora supongamos que $\delta_i^t u_i(x_i)$ representa $\succsim_i$ sobre $(X \times T_\infty)$, $0 < \varepsilon < 1$. Entonces $[\delta_i^t u_i(x_i)]^{\frac{\log \varepsilon_i}{\log \delta_i}} = \varepsilon_i^t [u_i(x_i)]^{\frac{\log \varepsilon_i}{\log \delta_i}}$ también representa $\succsim_i$.[1]

Se concluye que si además $\varepsilon_i^t \omega_i(x_i)$ representa $\succsim_i$ entonces $\omega_i(x_i) = k_i [u_i(x_i)]^{\frac{\log \varepsilon_i}{\log \delta_i}}$ para alguna $k_i > 0$.

Considerando ahora el límite del resultado EPS de $\Gamma(\Delta)$ conforme Δ tiende a cero, fijemos un factor de descuento común $\delta < 1$ que sea lo suficientemente grande para que existan funciones cóncavas crecientes u_i para $i = 1, 2$ con la propiedad que $\delta_i^t u_i(x_i)$ represente $\succsim_i$.

Sea $S = \{s \in \Re^2 : s = (u_1(x_1), u_2(x_2))$ para algún $(x_1, x_2) \in X\}$.

Como cada u_i es cóncava y creciente, S es la gráfica de una función cóncava no creciente. Más aún, por la segunda parte de C3 tenemos $u_i(0) = 0$ para $i = 1, 2$, así que por C2 existe $s \in S$ tal que $s_i > d_i$ para $i = 1, 2$. De este modo (S, d) es un

[1] Ver nota al final del capítulo, (página 94).

embargo, la solución de Nash para $\langle S, d\rangle$ es independiente de esta elección: el maximizador de $u_1(x_1)u_2(x_2)$ es también el maximizador de $k_1k_2[u_1(x_1)u_2(x_2)]^{\frac{\log\varepsilon}{\log\delta}}$ para cualquier $0<\varepsilon<1$. Se enfatiza que al construir las funciones de utilidad u_i con $i=1,2$ se usa el *mismo* factor de descuento δ.

En algunos contextos, la economía de un problema sugiere que las preferencias de los jugadores sean representadas por funciones de utilidad particulares. Estas funciones no necesariamente coinciden con las funciones que deben ser usadas para construir S. Por ejemplo, supongamos que en algún problema es natural para los jugadores tener las funciones de utilidad $\delta_i^t x_i$ para $i=1,2$, donde $\delta_1>\delta_2$. Entonces las funciones apropiadas u_i son construídas como sigue: $u_1(x_1)=x_1$ y $u_2(x_2)=x_2^{\frac{\log\delta_1}{\log\delta_2}}$.

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Proposición

Si el orden de preferencia de cada jugador satisface C1 hasta C6 entonces el límite, conforme Δ tiende a cero, del acuerdo $x^*(\Delta)$ alcanzado en el único EPS de $\Gamma(\Delta)$ es el acuerdo dado por la solución de Nash para el problema de negociación $\langle S, d\rangle$ con
$S=\{s\in\Re^2 : s=(u_1(x_1),u_2(x_2))$ para algún $(x_1,x_2)\in X\}$ y $d=(0,0)$.

Demostración

Se sigue de la proposición en la sección 4.3.2 que $u_1(y_1^*(\Delta))=\delta^\Delta u_1(x_1^*(\Delta))$ y que $u_2(x_2^*(\Delta))=\delta^\Delta u_2(y_2^*(\Delta))$ por lo que el EPS existe, al tomar límites tenemos:
$u_1(y_1^*)=u_1(x_1^*)$ y que $u_2(x_2^*)=u_2(y_2^*)$. La justificación que éste punto es el único maximizador es análoga a la de la proposición en la sección 4.2.4.

ordenes de preferencia $\succsim_i$ sobre $(X \times T) \cup \{D\}$ para $i = 1, 2$ que satisfacen C1 hasta C6 (de modo que en particular $(x, t) \sim_i (x, s)$ cada vez que $x_i = 0$)

Escoger $\delta < 1$ suficientemente grande y encontrar funciones cóncavas u_i tales que $\delta_i^t u_i(x_i)$ represente $\succsim_i$ para $i = 1, 2$

Para cada $\Delta > 0$ el juego de negociación de ofertas alternantes $\Gamma(\Delta)$ tiene un único EPS en el cual el resultado es $(x^*(\Delta), 0)$

$$\arg\max_{(x_1,x_2)\in X} u_1(x_1)\, u_2(x_2) = \lim_{\Delta \to 0} x^*(\Delta)$$

4.3.4 Simetría y asimetría

Supongamos que las preferencias del jugador i en un juego de negociación de ofertas alternantes están representadas por $\delta_i^t \omega_i(x_i)$, donde ω_i es cóncava y $\delta_1 > \delta_2$. Para encontrar el límite conforme la demora entre ofertas converge a cero, del resultado EPS, se puede usar la proposición anterior como sigue.

Escojamos δ_1 el factor común de descuento con respecto a cuáles preferencias son representadas y fijemos $u_1 = \omega_1$. Sea $u_2(x_2) = [\omega_2(x_2)]^{\frac{\log \delta_1}{\log \delta_2}}$, tal que u_2 es cóncava creciente y $\delta_1^t u_2(x_2)$ representa las preferencias del jugador 2. Por la proposición anterior el límite del acuerdo alcanzado en un EPS de un juego de negociación de ofertas alternantes, conforme la longitud del período converge a cero, es la solución de Nash para $\langle S, d \rangle$ con $S = \{s \in \Re^2 : s = (u_1(x_1), u_2(x_2))$ para algún $(x_1, x_2) \in X\}$ y $d = (0, 0)$. Esta solución de Nash está dada por:

$$\arg\max_{(x_1,x_2)\in X} u_1(x_1)\, u_2(x_2) = \arg\max_{(x_1,x_2)\in X} \omega_1(x_1)\, [\omega_2(x_2)]^{\frac{\log \delta_1}{\log \delta_2}}$$

Pero maximizar la expresión anterior es lo mismo que maximizar:

$$\arg\max_{(x_1,x_2)\in X} \left[\omega_1(x_1)\, [\omega_2(x_2)]^{\frac{\log \delta_1}{\log \delta_2}}\right]^{\frac{\log \delta_1}{\log \delta_1 + \log \delta_2}} \text{ ya que } \frac{\log \delta_1}{\log \delta_1 + \log \delta_2} \text{ es una constante.}$$

Y podemos rescribirlo como $\arg\max_{(x_1,x_2)\in X} [\omega_1(x_1)]^{\alpha} [\omega_2(x_2)]^{1-\alpha}$ con $\alpha = \frac{\log \delta_1}{\log \delta_1 + \log \delta_2}$.

De modo que la solución es una solución asimétrica de Nash del problema de negociación construído usando las funciones de utilidad *originales* ω_1 y ω_2.

El grado de asimetría está determinado por la disparidad en los factores de descuento. Si la función de utilidad original ω_i de cada jugador es lineal, $\omega_i(x_i) = x_i$, se puede ser más específico. En este caso el acuerdo dado por la expresión anterior es: $\left(\frac{\log \delta_1}{\log \delta_1 + \log \delta_2}, \frac{\log \delta_2}{\log \delta_1 + \log \delta_2}\right)$ que coincide con el resultado en la sección 3.10.3. En el caso que hemos examinado hasta ahora, los jugadores son asimétricos porque valúan el tiempo de manera distinta. Otra fuente de asimetría puede estar incluída en la estructura del juego: la cantidad de tiempo que se comprende entre un rechazo y una oferta puede ser diferente para el jugador 1 que para el jugador 2. Específicamente, consideremos un juego de ofertas alternantes $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)$, en el cual el tiempo comprendido entre un rechazo y una contraoferta del jugador i es $\gamma_i\Delta$, para $i = 1, 2$.

Conforme Δ converge a cero, la longitud del tiempo entre cualquier rechazo y contraoferta disminuye, mientras el radio de estos tiempos para los jugadores 1 y 2 permanece constante. Supongamos que hay un factor de descuento común δ y una función u_i para cada jugador i, tal que sus preferencias sean representadas por $\delta^t u_i(x_i)$. Las preferencias inducidas sobre resultados (x, n) donde n indexa las rondas de negociación en $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)$ no son estacionarias. Sin embargo, como se denotó en la sección 3.11, el juego $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2)$ tiene un único EPS; este equilibrio se caracteriza por la solución $(x^*(\Delta), y^*(\Delta))$ de las ecuaciones:

$$u_1(y_1^*(\Delta)) = \delta^{\gamma_1\Delta} u_1(x_1^*) \qquad \text{y} \qquad u_2(x_2^*(\Delta)) = \delta^{\gamma_2\Delta} u_2(y_2^*)$$

Un argumento como el de la demostración en la proposición de la sección 4.2.4 muestra que el límite conforme Δ converge a cero del acuerdo $x^*(\Delta)$ es el acuerdo:

$$\arg\max_{(x_1,x_2)\in X} [u_1(x_1)]^{\alpha} [u_2(x_2)]^{1-\alpha} \text{ donde } \alpha = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

Una vez más el resultado está dado por la solución asimétrica de Nash. En este caso los exponentes reflejan una diferencia en el tiempo real que pasa entre un rechazo y una contraoferta, más que una diferencia en la manera en que los jugadores miden el tiempo.

Nótese que el resultado favorece al jugador que hace una contraoferta más rápido. En el caso extremo en el cual $\gamma_i = 0$ el resultado de la negociación es el mismo al del modelo en el cual sólo el jugador i hace ofertas.

4.4 Un modelo de negociación tanto con preferencias de tiempo como riesgo de rompimiento

Aquí se considerará brevemente un modelo que combina aquellos en las secciones 4.2 y 4.3.

En cualquier período, si un jugador rechaza una oferta entonces hay una probabilidad positiva fija que la negociación termine en el evento rompimiento B.

Los jugadores no son indiferentes acerca del tiempo que tomó se alcanzar un acuerdo o el evento rompimiento.

Cada preferencia de los jugadores sobre loterías en $((X \cup \{B\}) \times T_\infty) \cup \{D\}$ satisface las suposiciones de Von Neumann y Morgenstern, y *sus* preferencias sobre éste conjunto satisfacen C1 hasta C6. Además, para $i = 1, 2$ hay un acuerdo $b^i \in X$ tal que el jugador i es indiferente entre (b^i, t) y (B, t) para todo t.

Denotemos con $\Gamma(q, \Delta)$ el juego de ofertas alternantes en el cual la demora entre períodos es $\Delta > 0$, el evento rompimiento ocurre con probabilidad $q > 0$ después de cualquier rechazo, y las preferencias satisfacen las suposiciones señaladas arriba.

$\Gamma(q,\Delta)$ tiene un único EPS, el cual es caracterizado por la pareja de acuerdos $(x^*(q,\Delta), y^*(q,\Delta))$ que satisface las siguientes dos condiciones:

$$(y^*(q,\Delta),0) \sim_1 \{q\cdot(B,0)+(1-q)(x^*(q,\Delta),\Delta)\} \text{ y}$$
$$(x^*(q,\Delta),0) \sim_2 \{q\cdot(B,0)+(1-q)(y^*(q,\Delta),\Delta)\}$$

Sabemos que bajo las condiciones C1 hasta C6 existe $0<\delta<1$ y funciones cóncavas u_i para $i=1,2$ tales que las preferencias del jugador i sobre $X\times T_\infty$ son representadas por $\delta_i^t u_i(x_i)$. Sin embargo, en general, *no* es posible escoger una representación de esta forma con la propiedad de que su valor esperado represente las preferencias del jugador i sobre loterías en $X\times T_\infty$.

De cualquier manera, si existe δ y una función u_i tal, que las preferencias del jugador i sobre loterías en $X\times T_\infty$ *son* representadas como el valor esperado de $\delta_i^t u_i(x_i)$ entonces se tiene:

$$u_1(y_1^*(q,\Delta)) = q\delta^0 u_1(B)+(1-q)\,\delta^\Delta u_1(x_1^*(q,\Delta)) \text{ y}$$
$$u_2(x_2^*(q,\Delta)) = q\delta^0 u_2(B)+(1-q)\,\delta^\Delta u_2(y_2^*(q,\Delta))$$

Ahora consideremos el límite del EPS conforme la longitud Δ de cada período converge a cero.

Supongamos que $q=\lambda\Delta$, la probabilidad de rompimiento en cualquier intervalo dado de tiempo real permanece constante. En un análisis análogo al juego en la sección 4.2 tenemos que la probabilidad de rompimiento en cualquier período está dada por:
$\lambda\Delta+\delta^\Delta\lambda\Delta(1-\lambda\Delta)^1+\delta^{2\Delta}\lambda\Delta(1-\lambda\Delta)^2+\cdots = \frac{\lambda\Delta}{1-\delta^\Delta(1-\lambda\Delta)}$

Sea $\frac{\lambda\Delta}{1-\delta^\Delta(1-\lambda\Delta)} = k(\Delta)$. Entonces podemos rescribir las ecuaciones anteriores como:

$$u_1(y_1^*(\Delta))-k(\Delta)\,u_1(B) = \delta^\Delta(1-\lambda\Delta)\,[u_1(x_1^*(\Delta))-k(\Delta)\,u_1(B)] \text{ y}$$
$$u_2(x_2^*(\Delta))-k(\Delta)\,u_2(B) = \delta^\Delta(1-\lambda\Delta)\,[u_2(y_2^*(\Delta))-k(\Delta)\,u_2(B)].$$

Se sigue que:

$$[u_1(y_1^*(\Delta))-k(\Delta)\,u_1(B)]\,[u_2(x_2^*(\Delta))-k(\Delta)\,u_2(B)]$$
$$=[u_1(x_1^*(\Delta))-k(\Delta)\,u_1(B)]\,[u_2(y_2^*(\Delta))-k(\Delta)\,u_2(B)]$$

Nótese que si los jugadores usan estrategias que nunca llevan al acuerdo, entonces (dado que $q > 0$) el evento desacuerdo ocurre con probabilidad 1 en el algún período. Además $k(\Delta)\, u_i(B)$ es precisamente la utilidad esperada del jugador en este caso.

Ahora, sea $r = -\log \delta$, tal que $\delta^{\Delta} = e^{-r\Delta}$.

Sacando $\lim_{\Delta \to 0} k(\Delta) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\lambda\Delta}{1-\left(e^{--\log \delta\Delta}\right)(1-\lambda\Delta)} = \frac{\lambda}{\lambda+r}$. Un argumento similar en la proposición en la sección 4.2.4 muestra que $x^*(\Delta)$y $y^*(\Delta)$ convergen a la solución de Nash del proble ma de negociación en el cual el desacuerdo es: $\left(\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)(u_1(B), u_2(B))$, y el conjunto de acuerdos es construído utilizando las funciones de utilidad u_i las cuales en el caso especial que estamos considerando, reflejan tanto las preferencias de tiempo como las preferencias de riesgo.

Este resultado apoya nuestros primeros hallazgos: si δ está cerca de uno (r es cercana al cero), tal que el temor al rompimiento más que el costo de tiempo de la negociación es la consideración dominante, entonces, el punto desacuerdo es cercano a $(u_1(B), u_2(B))$, mientras que si λ es cercana a cero, el punto desacuerdo es cercano a $(0,0)$.

4.5 Una guía para aplicaciones

A fin de usar un modelo de negociación como un componente de un modelo económico, es necesario escoger los elementos económicos que corresponden a las primitivas del modelo de negociación. Los resultados en este capítulo pueden ayudar a nuestra elección.

4.5.1 Incertidumbre como el incentivo para alcanzar un acuerdo

Supongamos que se tiene un modelo económico en el cual la fuerza principal que ocasiona que las partes alcancen un acuerdo es el temor que las negociaciones se "rompan". En este caso el modelo de la sección 4.2 indica que podemos aplicar la solución de Nash a un problema de negociación $\langle S, d \rangle$ definido apropiadamente. Supongamos por ejemplo, que un comprador y un vendedor están negociando un precio. Supongamos que enfrentan el riesgo que el bien del vendedor pierda todo su valor. Supongamos también que el vendedor tiene en pie una oferta (de una tercera parte) para comprar el bien a un precio menor que el que podría obtener del comprador cuando esta tercera parte no existe. En este caso podemos aplicar la solución de Nash al problema de negociación en el cual el punto desacuerdo refleja las utilidades de las partes en el evento de que el bien pierda su valor, y *no* sus utilidades en el evento de que el comprador elija comerciar con el tercer participante.

4.5.2 Impaciencia como incentivo para alcanzar un acuerdo

Si la presión principal para alcanzar un acuerdo es simplemente la impaciencia de los jugadores, entonces el juego de negociación original del capítulo 2 es apropiado.

Si las preferencias de los jugadores tienen la propiedad que la pérdida por demora es cóncava (además de satisfacer todas las condiciones del capítulo 2), entonces el resultado de la sección 4.3 muestra cómo la fórmula para la solución de Nash puede ser usada para calcular el límite del acuerdo alcanzado en el EPS de un juego de negociación de ofertas alternantes conforme el período de demora converge a cero. En este caso las funciones de utilidad usadas para construir el conjunto S son funciones cóncavas u_i con la propiedad que $\delta_i^t u_i(x_i)$ representa las preferencias del jugador $i = 1,2$ para algún valor $0 < \delta < 1$. La utilidad igual a cero del desacuerdo para el jugador i es su utilidad por un acuerdo con respecto al tiempo en que lo obtuvo, al cual es indiferente (recordar condición (C3).

Tres puntos son significativos aquí. Primero, las funciones de utilidad de los jugadores *no* son las funciones de utilidad que usan para evaluar prospectos inciertos. Segundo, si se representan las preferencias de los jugadores por $\delta_1^t\omega_1(x_1)$ y $\delta_2^t\omega_2(x_2)$, donde $d_1 \neq d_2$ y construímos el conjunto S usando las funciones de utilidad ω_1 y ω_2, entonces el límite del acuerdo alcanzado está dado por una solución *asimétrica* de Nash en la cual los exponentes dependen sólo de δ_1 y δ_2. Tercero, el punto desacuerdo no corresponde a un resultado que ocurriría si los jugadores fallan en acordar, más bien está determinado por sus preferencias de tiempo.

Como un ejemplo, consideremos la negociación entre una compañía y un sindicato. En este caso podría ser que las pérdidas por demora de un acuerdo sean significativas mientras la posibilidad que una de las partes encuentre otro socio pueden ser ignoradas. Entonces se debe construir S como se discutió arriba, el punto desacuerdo debe corresponder a un resultado H con la propiedad de que cada lado es indiferente al período en el cual H se recibe.

Podría ser apropiado, por ejemplo, dejar H como el resultado en el cual el beneficio de la firma es cero y los miembros del sindicato reciben un salario que ellos ven como equivalente a la compensación que obtienen durante una huelga.

Nota

La representación $[\delta_i^t u_i(x_i)]^{\frac{\log \varepsilon_i}{\log \delta_i}} = \varepsilon_i^t [u_i(x_i)]^{\frac{\log \varepsilon_i}{\log \delta_i}}$, es resultado del Teorema 2 del "Time Preference" de Peter C. Fishburn y Ariel Rubinstein:

> Si A0 hasta A5 se mantienen, entonces, dado cualquier $0 < \alpha < 1$, existe una función f de valor real continua y creciente sobre X tal que:
>
> i) para todo $(x,t),(y,s) \in X \times T, (x,t) \succeq (y,s)$ si y sólo si $\alpha^t f(x) \succeq \alpha^s f(y)$;
>
> ii) $f(0)$ debe ser 0 si $0 \in X$ y $xf(x)$ debe ser positva para todo $x \in X - \{0\}$;
>
> iii) si T es un intervalo entonces f es única (dada α) salvo una multiplicación por constantes positivas sobre $\{x \in X : x > 0\}$ y sobre $\{x \in X : x < 0\}$.

Si se cambia α en la representación, entonces f debe ser cambiada. Por ejemplo, si $X = T = [0,1]$ y f_α es la única f -por iii)- que satisface la rpresentación cuando $f_\alpha(1) = 1$, entonces f_α y f_β están relacionadas como $f_\beta = [f_\alpha]^k$ con $k = \frac{\log \beta}{\log \alpha}$. (Esto se sigue de la pruba del teorema para el caso de tiempo continuo.)

Bibliografía.

Osborne, Martin J.; Rubinstein, Ariel.
Bargaining and Markets.
Academic Press, Inc. 1990.

Fishburn, Peter; Rubinstein, Ariel.
Time Preference
International Economic Review, Vol. 23, No. 3, octubre 1982.

Rubinstein, Ariel.
Perfect Equilibrium in a Bargaining Model
EconométricaVol. 50, No. 1, enero 1982.

Shaked, Avner; Sutton, John.
Involuntary Unemployment as a Perfect Equilibrium in a Bargaining Model
Econométrica Vol. 52, No. 6, noviembre 1984.