91
2EJ

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PRINCIPIOS DE MATEMATICAS ACTUARIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

RICARDO VILLEGAS AZCORRA

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

MEXICO, D. F. FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR 1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: PRINCIPIOS DE MATEMATICAS ACTUARIALES.

realizado por VILLEGAS AZCORRA RICARDO

con número de cuenta 8417289-7 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	ACT. MAXIMINO GOMEZ MENDOZA
Propietario	ACT. PEDRO AGUILAR BELTRAN
Propietario	ACT. OSCAR ARANDA MARTINEZ
Suplente	ACT. CARLOS FLAVIO ESPINOSA LOPEZ
Suplente	ACT. PEDRO MEJIA TAPIA

Consejo Departamental de Matemáticas

AGRADECIMIENTO

A MIS SINODALES

Deseo agradecer al Act. Maximino Gómez Mendoza, Act. Pedro Aguilar Beltran, Act. Oscar Aranda Martìnez, al Act. Carlos Flavio Espinosa López, y al Act. Pedro Mejía Tapia, por su apoyo y asesoramiento en la realización de esta Tesis.

A MI FAMILIA

En especial, agradezco a mis padres: Ricardo Villegas Ruiz, Beatriz Azcorra Rodríguez, y a cada uno de mis hermanos Gabriela, Claudia, Arturo, y Adrián, el haberme apoyado y por continuar alentándome en mi superación profesional. Gracias por su esfuerzo y motivación.

A MIS AMIGOS

Manifiesto gratitud, para todos y cada uno de ellos por brindarme su apoyo y confianza.

RICARDO VILLEGAS AZCORRA

Contenido

Capítulo 1

ECONOMIA DEL SEGURO

1.1 Introducción

Cada uno de nosotros hace planes y tiene expectativas acerca del curso que seguirá su vida. Sin embargo, la experiencia enseña que los planes no se desarrollan con certeza y algunas veces las expectativas no se realizarán. Ocasionalmente, los planes se frustran porque estaban construidos sobre supuestos irreales. En otras situaciones, interfieren circunstancias fortuitas. El seguro esta diseñado para proteger en contra de reveses financieros severos que pueden resultar de eventos aleatorios que estorban los planes de los individuos.

Debemos entender algunas limitaciones básicas de la protección del seguro. Primero, se restringe a reducir aquellas consecuencias de los eventos aleatorios que pueden medirse en términos monetarios. Otro tipo de pérdidas pueden ser muy importantes pero no pueden compensarse mediante el seguro.

Por ejemplo, la pena y el sufrimiento pueden ser causados por un evento aleatorio. Sin embargo, las coberturas del seguro diseñadas para compensar la pena y el sufrimiento a menudo han sido problemáticas por la dificultad de medir la pérdida en unidades monetarias. Por otra parte, las pérdidas económicas pueden ser causadas por eventos tales como el incendio de una propiedad por su dueño. No obstante que tales pérdidas pueden definirse fácilmente en términos monetarios, los eventos no son asegurables debido a la naturaleza no aleatoria de la causa de las pérdidas.

Una segunda limitación básica es que el seguro no reduce directamente la probabilidad de la pérdida. La existencia de un seguro contra huracanes no altera la probabilidad de una tormenta destructiva. Sin embargo, un sistema de seguro bien diseñado frecuentemente proporcionará los incentivos financieros para realizar acciones que permitan resarcir las pérdidas. Un seguro que aliente la destrucción de la propiedad o el retiro de una persona productiva de la fuerza de trabajo afectaría la probabilidad de estos eventos económicamente adversos. Tal tipo de seguro no sería de interés público.

Los siguientes son algunos ejemplos de situaciones en las que los eventos aleatorios pueden causar pérdidas financieras:

- La destrucción de la propiedad por incendio o tormenta, generalmente, se considera como un evento aleatorio en el que la pérdida puede medirse en términos monetarios.

- La multa impuesta por un juzgado como resultado de un acto de negligencia, generalmente, se considera como un evento aleatorio que tiene como resultado pérdidas económicas.

- Una enfermedad prolongada puede atacar en una época inesperada y provocar como resultado pérdidas financieras. Estas pérdidas se deberán a los gastos extra para recobrar la salud y reducen el ingreso obtenido.

- La muerte de un adulto joven puede ocurrir mientras que las obligaciones familiares o de negocios quedan sin cumplir. O, si el individuo sobrevive hasta una edad avanzada, los recursos para solventar el costo de vida pueden agotarse.

  Estos ejemplos se diseñaron para ilustrar la definición:

  Un *sistema de seguro* es un mecanismo para reducir el efecto financiero adverso de los eventos aleatorios que impiden el cumplimiento de expectativas razonables.

Es conveniente establecer ciertas distinciones entre el seguro y algunos sistemas relacionados. Las instituciones bancarias se desarrollaron con el propósito de recibir, invertir y prestar los ahorros de individuos y corporaciones. Los flujos de caja activos y pasivos de una intitución de ahorro no siguen patrones determinísticos. Sin embargo, a diferencia de los sistemas de seguro, las instituciones de ahorro no hacen pagos con base en el tamaño de una pérdida financiera ocurrida debido a un evento fuera del control de la persona que sufre la pérdida.

Otro sistema que si paga con base en la ocurrencia de eventos aleatorios es el de juegos de azar. Sin embargo, jugar o apostar contrasta con un sistema de seguros en que este último está diseñado para proteger contra el impacto económico de los riesgos que existen independientemente de, y están fuera del control, del asegurado. El típico arreglo de apuestas se establece mediante la definición de reglas de pago acerca de la ocurrencia de un evento urdido y el riesgo es buscado voluntariamente por los participantes. Al igual que el seguro, un arreglo de apuestas típico redistribuye la riqueza, pero hasta aquí termina la similitud.

Nuestra definición de un sistema de seguro es, intencionalmente, amplia. Abarca sistemas que cubren pérdidas tanto de valores de propiedad como de vidas humanas. Pretende cubrir sistemas de seguro basados en las decisiones individuales de participar, así como también sistemas en donde la participación es una condición del empleo o la residencia.

La justificación económica del sistema de seguro es que contribuye al bienestar general mediante el mejoramiento de la perspectiva de que los planes no se frustrarán por eventos aleatorios. Tales sistemas también pueden incrementar la producción total al alentar a los individuos y corporaciones a embarcarse en empresas arriesgadas en las que la posibilidad de grandes pérdidas inhibiría dichos proyectos en ausencia del seguro. El desarrollo del seguro marítimo para reducir el impacto financiero de los peligros del mar, es un ejemplo de este punto. El comercio exterior permitió la especialización y una producción más eficiente, sin embargo, las actividades comerciales mutuamente ventajosas podrían ser muy arriesgadas para algunos socios comerciales potenciales sin la existencia de un sistema de seguro que los cubriera de posibles pérdidas en el mar.

1.2 Teoría de la Utilidad

Si las personas pudieran anticipar las consecuencias de sus decisiones, sus vidas serían más simples pero menos interesantes. Todos tomaríamos decisiones sobre la base de las preferencias para ciertas consecuencias. Sin embargo, no poseemos una anticipación perfecta. Lo más que podemos hacer es seleccionar una acción que nos conducirá a un conjunto de incertidumbres en lugar de otras. Se ha desarrollado una teoría que proporciona conocimientos sobre la toma de decisiones frente a la incertidumbre. Este cuerpo de conocimientos se llama *teoría de la utilidad*. Debido a su importancia para los sistemas de seguro, se esbozarán aquí sus puntos principales.

Una solución al problema de la toma de decisiones frente a la incertidumbre es definir el valor de un proyecto económico con un resultado aleatorio que sea su valor esperado. Mediante este *principio del valor esperado* la distribución de los resultados posibles puede reemplazarse por un sólo número, para propósitos de decisión, el valor esperado de los resultados monetarios aleatorios. Mediante este principio, un administrador sería indiferente entre asumir la pérdida aleatoria X y pagar la cantidad $E[X]$ para poder mitigar la posible pérdida. Igualmente, un administrador estaría dispuesto a pagar hasta $E[Y]$ para participar en una apuesta con un pago aleatorio Y. En economía el valor esperado de los prospectos aleatorios con pagos monetarios, frecuentemente se llama *valor justo* o *valor actuarial* del prospecto.

Muchos administradores no adoptan el principio del valor esperado. Para ellos, su nivel de riqueza y otros aspectos de la distribución de los resultados influyen sobre sus decisiones.

Abajo se presenta una ilustración diseñada para mostrar lo inadecuado del principio del valor esperado para un administrador que considera el valor del seguro contra accidentes. En todos los casos, se supone que la probabilidad de un accidentes es 0.1 y que la probabilidad de que no se presente un accidente es 0.9. Se presentan tres casos de acuerdo al monto de la pérdida proveniente de un accidente; se calcula para cada uno la pérdida esperada.

Caso	Posibles pérdidas		Pérdida esperada
1	0	1	0.1
2	0	1 000	100.0
3	0	100 000	10 000.0

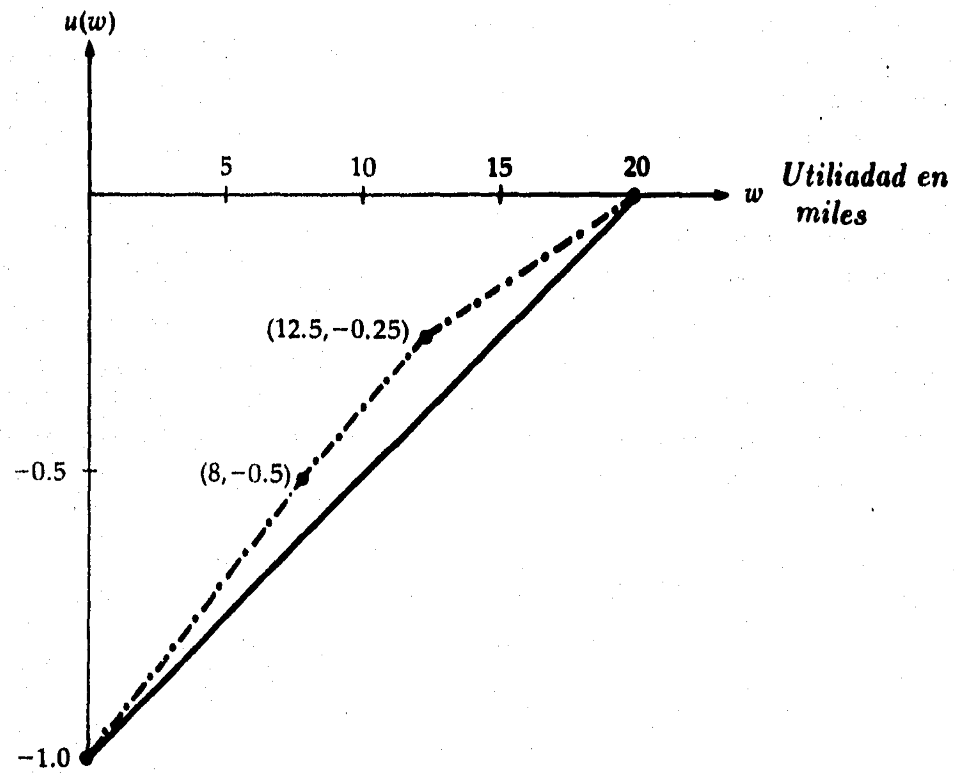
Una pérdida de 1 podría preocupar muy poco al administrador quien, por lo tanto, no podría estar dispuesto a pagar más que la pérdida esperada para obtener un seguro. Sin embargo, la pérdida de 100,000, que podría exceder su valor neto, podría ser catastrófico. En ese caso, el tomador de decisiones estaría dispuesto a pagar más que la pérdida esperada de 10,000 para obtener un seguro. La posibilidad de que difieran lo que un administrador estaría dispuesto a pagar para protegerse contra una pérdida aleatoria y el valor esperado de la misma sugiere que el principio del valor esperado es inadecuado para dictar tal conducta.

Ahora estudiaremos otro enfoque para explicar por qué un administrador podría estar dispuesto a pagar una cantidad superior al valor esperado. Al principio simplemente supondremos que el valor o utilidad que un administrador determinado asocia a un monto de riqueza w, medida en dólares, puede especificarse como una función $u(w)$, que se denomina *función de utilidad*. Demostraremos un procedimiento mediante el cual se pueden determinar algunos valores de dicha función. Para ello supondremos que nuestro administrador tiene un caudal igual a 20,000. Como veremos, una transformación lineal,

$$u^*(w) = au(w) + b \qquad a > 0,$$

produce una función $u^*(w)$, que esencialmente es equivalente a $u(w)$. De aquí se deduce que mediante la selección de a y b podemos determinar arbitrariamente el punto 0 y un punto adicional de la función de utilidad de un individuo. Por lo tanto, fijaremos $u(0) = -1$ y $u(20,000) = 0$. Estos valores son los puntos extremos de la línea sólida de la Figura 1.1.

Figura 1.1 Determinación de la Función de Utilidad



Ahora nos planteamos una pregunta de nuestro administrador: suponga que enfrenta una pérdida de

20,000 con una probabilidad 0.5, y que permanecerá en su actual nivel de riqueza con una probabilidad de 0.5. ¿Cuál es la máxima cantidad[1] G que estaría dispuesto a pagar por un seguro de protección completa contra esta pérdida aleatoria? Podemos expresar esta pregunta en la siguiente forma: ¿para qué valor de G

$$\begin{aligned} u(20,000 - G) &= 0.5u(20,000) + 0.5u(0) \\ &= (0.5)(0) + (0.5)(-1) = -0.5? \end{aligned}$$

Si paga la cantidad G, su riqueza seguramente permanecerá en $20,000 - G$. El signo igual indica que el administrador será indiferente entre pagar G con certeza y aceptar la utilidad esperada de la riqueza expresada en el lado derecho de la expresión.

Suponga que la respuesta del administrador es $G = 12,000$, por lo tanto,

$$u(20,000 - 12,000) = u(8000) = -0.5.$$

En la Figura 1.1 se aprecia este resultado sobre la linea de puntos. Quizás el aspecto más importante de la respuesta del administrador es que está dispuesto a pagar una cantidad por el seguro que es mayor que

$$(0.5)(0) + (0.5)(20,000) = 10,000,$$

el valor esperado de la pérdida.

Este procedimiento puede utilizarse para añadir tantos puntos $[w, u(w)]$, para $0 \leq w \leq 20,000$, como sean necesarios para obtener una aproximación satisfactoria de la utilidad de la función de riqueza. Una vez que se ha asignado un valor de utilidad a los niveles de riqueza w_1 y w_2, en donde $0 \leq w_1 < w_2 \leq 20,000$, podemos determinar un punto adicional preguntando lo siguiente al administrador: ¿Cuál es la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar por un seguro completo contra una situación que podría dejarlo en un nivel de riqueza w_2, con probabilidad específica de p, o en un nivel menor de riqueza w_1, con probabilidad $1 - p$? Estamos pidiendo al administrador que fije un valor G tal que

$$u(w_2 - G) = (1 - p)u(w_1) + pu(w_2). \tag{1.1}$$

Una vez que se tiene el valor $w_2 - G = w_3$, se determina el punto $[w_3, (1 - p)u(w_1) + pu(w_2)]$ como otro punto de la función de utilidad. Se utilizó el mismo procedimiento para determinar un cuarto punto $(12,500, -0.25)$ el cual se aprecia en la Figura 1.1.

[1] Por convención en la literatura de seguros las cantidades de las primas, se escriben en mayúsculas a pesar de que no sean variables aleatorias.

Después de que el administrador ha determinado su función de utilidad de la riqueza por el método esbozado, la función puede utilizarse para comparar dos prospectos económicos aleatorios. Los prospectos se denotarán con las variables aleatorias X y Y. Buscamos una regla de decisión que sea consistente con las preferencias ya deducidas en la determinación de la función de utilidad de la riqueza. Por lo tanto, si el administrador tiene una riqueza w, y debe comparar los prospectos aleatorios X y Y, él escogerá X si

$$E[u(w+X)] > E[u(w+Y)],$$

y permanecerá indiferente entre X y Y si

$$E[u(w+X)] = E[u(w+Y)].$$

No obstante que el método para deducir y utilizar una función de utilidad puede parecer plausible, es claro que nuestro desarrollo informal debe crecer mediante una cadena de razonamientos más rigurosos si es que la teoría de la utilidad debe proporcionar un marco de trabajo coherente y comprehensivo para la toma de decisiones frente a la incertidumbre. Para comprender el rol económico del seguro es necesario contar con dicho marco. A continuación se presenta un esbozo de esta teoría más rigurosa.

La teoría se inicia con el supuesto de que cuando un administrador racional se enfrenta a dos distribuciones de resultados que afectan la riqueza, estará en posibilidad de expresar preferencia por una de las distribuciones o permanecerá indiferente ante ellas. Más aún, las preferencias deben satisfacer ciertos requisitos de consistencia. La teoría culmina con un teorema que establece que si las preferencias satisfacen los requisitos de consistencia existe una función de utilidad $u(w)$ tal que si la distribución de X es preferida a la distribución de Y, $E[u(X)] > E[u(Y)]$, y si el administrador es indiferente entre las dos distribuciones, $E[u(X)] = E[u(Y)]$. Es decir, la preferencia cualitativa o la relación de indiferencia puede sustituirse por una comparación númerica consistente. En la Sección 1.6, se proporcionan referencias bibliográficas sobre los desarrollos más detallados de esta teoría.

Antes de pasar a las aplicaciones de la teoría de la utilidad dentro del seguro, debemos hacer algunas observaciones acerca de la utilidad.

Observación:

1. La teoría de la utilidad se construye sobre el supuesto de la existencia y consistencia de preferencias para las distribuciones de probabilidad de los resultados. Una función de utilidad no debería revelar sorpresas. Es una descripción numérica de las preferencias existentes.

2. Una función de utilidad no necesita, en realidad no puede, determinarse singularmente. Por ejemplo, si

$$u^*(w) = au(w) + b \qquad a > 0,$$

entonces

$$E[u(X)] > E[u(Y)]$$

es equivalente a

$$E[u^*(X)] > E[u^*(Y)].$$

Es decir, las preferencias se conservan cuando la función de utilidad es una transformación lineal creciente de la forma original. Este hecho se utilizó en la Figura 1.1. en donde se escogieron dos puntos arbitrariamente.

3. Suponga que la función de utilidad es lineal, es decir,

$$u(w) = aw + b \qquad a > 0.$$

Entonces, si $E[X] = \mu_X$ y $E[Y] = \mu_Y$, tenemos

$$E[u(X)] = a\mu_X + b > E[u(Y)] = a\mu_Y + b$$

sí y solo si $\mu_X > \mu_Y$. Es decir, para funciones lineales crecientes de utilidad, las preferencias en la distribución de los resultados están en el mismo orden que los valores esperados de las distribuciones que están siendo comparadas. Por lo tanto, el principio del valor esperado para la conducta económica racional frente a la incertidumbre es consistente con la regla de la utilidad esperada cuando la función de utilidad es lineal y creciente.

1.3 Seguro y Utilidad

En la Sección 1.2 delineamos la teoría de la utilidad con el propósito de obtener conocimiento del marco económico del seguro. Para examinar este marco empezamos con un ejemplo. Suponga que un administrador es dueño de una propiedad que puede dañarse o destruirse en el siguiente periodo contable. La cantidad de la pérdida, que puede ser 0, es una variable aleatoria que se denotará con X. Supondremos que la distribución de X es conocida. Entonces $E[X]$, la pérdida esperada en el siguiente periodo, puede interpretarse como la pérdida media a largo plazo si el experimento de exponer la propiedad al daño puede observarse bajo idénticas condiciones un gran número de veces. Es claro que este conjunto de pruebas de largo plazo no puede ser desarrollado por un sólo administrador.

Suponga que se estableció una organización de seguros (*asegurador*) para ayudar a reducir las consecuencias financieras del daño o la destrucción de la propiedad. El asegurador puede establecer contratos (*pólizas*) que prometen pagar al poseedor de la propiedad una cantidad determinada igual o menor que la pérdida financiera si la propiedad resultara dañada o destruida durante el periodo de la póliza. El pago contingente vinculado a la cantidad de la pérdida se denomina pago por *reclamación*. Como contraparte por la promesa contenida en la póliza, el poseedor de la propiedad (*asegurado*) paga una cantidad (*prima*).

La cantidad del pago de la prima se determina siguiendo la adopción de un principio de decisión económica por el asegurador y el asegurado. Existe la oportunidad de una póliza de seguro mutuamente ventajosa cuando la prima de la póliza establecida por el asegurador es menor que la máxima cantidad que el dueño de la propiedad está dispuesto a pagar por el seguro.

Dentro del rango de los resultados financieros para una póliza individual de seguro, la función de utilidad del asegurador puede aproximarse mediante una línea recta. En este caso, el asegurador adoptará el principio del valor esperado al establecer la prima, como se indicó en la Sección 1.2, Observación 3. Es decir, el asegurador establecería su precio básico para un seguro de cobertura total según la pérdida esperada, $E[X] = \mu$. En este contexto μ se denomina prima neta o pura para la póliza de seguro de un periodo. Para pagar gastos, impuestos, ganancias y alguna seguridad contra la experiencia adversa de pérdidas, el sistema de seguro decidiría establecer la prima de la póliza mediante un recargo, sumándolo a la prima neta. Por ejemplo, la prima recargada, que se denota como H, puede estar dada por

$$H = \mu(1+\theta) + c \qquad \theta > 0, c > 0.$$

En esta expresión la cantidad $\mu\theta$ puede considerarse asociada a los gastos que varían con las pérdidas esperadas y con el riesgo de que la experiencia de reclamaciones se desviará de lo esperado. La constante c representa los costos esperados que no varian con las pérdidas. Más adelante ilustraremos otros principios económicos para determinar primas que puede adoptar el asegurador.

Ahora aplicamos la teoría de la utilidad a los problemas de decisión enfrentados por el dueño de una propiedad sujeta a pérdida. El dueño de la propiedad tiene una función de utilidad de la riqueza $u(w)$ en donde w se mide en términos monetarios. El dueño enfrenta una posible pérdida debido a los eventos aleatorios que podrían dañar la propiedad. Se supone que se conoce la distribución de la pérdida aleatoria X. Igual que en (1.1) el poseedor será indiferente entre pagar una cantidad G al asegurador, habiendo el asegurador asumido la pérdida financiera aleatoria y asumiendo él mismo el riesgo. La situación se puede expresar como

$$u(w - G) = E[u(w - X)]. \tag{1.2}$$

El lado derecho de (1.2) representa la utilidad esperada de no comprar seguro cuando la riqueza corriente del dueño es w. El lado izquierdo de (1.2) representa el valor esperado de pagar G por una protección financiera total.

Si el propietario tiene una función lineal creciente de utilidad,

$$u(w) = bw + d,$$

estará adoptando el principio del valor esperado. En este caso (1.2) se transforma en

$$
\begin{aligned}
u(w-G) = b(w-G)+d &= E[u(w-X)] = E[b(w-X)+d] \\
b(w-G)+d &= b(w-\mu)+d \\
G &= \mu.
\end{aligned}
$$

Es decir, si el propietario tiene una función lineal creciente de utilidad, el pago de la prima que hará al dueño indiferente entre el seguro total y no asegurarse es igual a la pérdida esperada. En la ausencia de un subsidio el asegurador, en el largo plazo, debe cargar más que sus pérdidas esperadas. Por lo tanto, en este caso, parece haber poca oportunidad de realizar un contrato de seguro mutuamente ventajoso. Si se quiere conseguir un contrato de seguro, el asegurador debe cargar una prima mayor que las pérdidas esperadas para evitar un sesgo hacia un ingreso insuficiente. Entonces el propietario del bien no puede tener una función lineal de utilidad.

En la Sección 1.2 se mencionó que las preferencias de un administrador deben satisfacer ciertos requisitos de consistencia para asegurar la existencia de una función de utilidad. No obstante, que estos requisitos no se mencionaron, no incluyen especificaciones que forzaran a las funciones de utilidad a ser lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas o de cualquier otra forma. En realidad, cada una de las funciones mencionadas podría servir como la función de utilidad para algún administrador o pueden juntarse para reflejar las preferencias de algún otro administrador.

Sin embargo, parece natural suponer que $u(w)$ es una función creciente; entre más, mejor. Además, se ha observado que para muchos administradores, cada adición de incrementos iguales de riqueza resultan en incrementos más pequeños de la utilidad asociada. Esta es la idea de la utilidad marginal decreciente en economía.

La aproximación de la función de utilidad de la Figura 1.1 consiste de segmentos de línea recta con pendientes positivas. Es tal que $\Delta^2 u(w) \leq 0$. Si se extienden estas ideas a funciones con variaciones más uniformes, las dos propiedades sugeridas por la observación son $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$. La segunda desigualdad indica que $u(w)$ es una función cóncava hacia abajo.

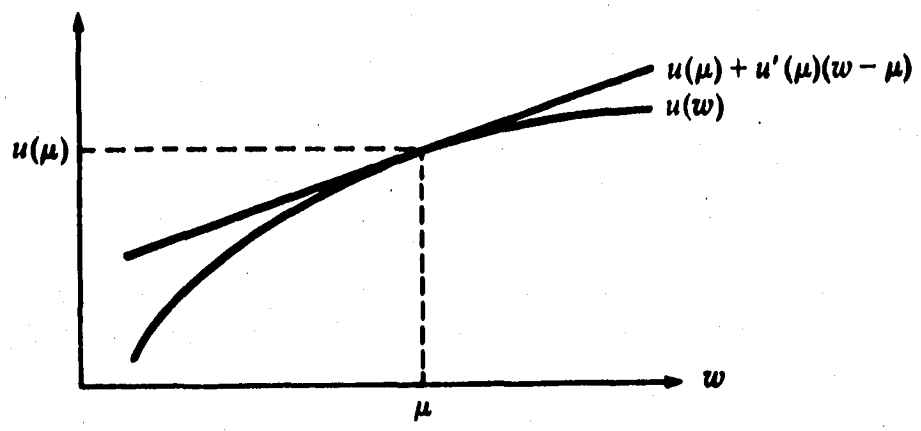
Al discutir las decisiones de seguros utilizando funciones de utilidad estrictamente cóncavas hacia abajo, haremos uso de la *desigualdad de Jensen*. Esta desigualdad establece que si $u''(w) < 0$ y X es una variable aleatoria, entonces [2]

$$E[u(X)] \leq u(E[X]). \tag{1.3}$$

La desigualdad de Jensen requiere de la existencia de dos valores esperados. El Ejercicio 1.3 requiere una prueba de dicha desigualdad. Una segunda prueba se desprende casi inmediatamente de la consideración de la Figura1.2.

[2] La desigualdad es estricta excepto cuando X es constante

Figura 1.2 Prueba de la desigualdad de Jensen suponiendo que $u'(w) > 0 y u''(w) > 0$



Si $E[X] = \mu$ existe, uno considera la línea tangente,

$$y = u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu),$$

en el punto $[\mu, u(\mu)]$. Debido a la característica de $u(w)$ de ser estrictamente concava, la gráfica de $u(w)$ estará por debajo de la línea tangente. Esto es,

$$u(w) \leq u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu) \tag{1.4}$$

para todos los valores de w. Si w se reemplaza por la variable aleatoria X, y se toma la esperanza en ambos lados de la desigualdad (1.4), tenemos $E[u(X)] \leq u(\mu)$. Esta desigualdad básica tiene varias aplicaciones en matemáticas actuariales.

Apliquemos la desigualdad de Jensen al problema del seguro del administrador como se formuló en (1.2). Supondremos que las preferencias del administrador son tales que $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$. Aplicando la desigualdad de Jensen a (1.2) tenemos

$$u(w - G) = E[u(w - X)] \leq u(w - \mu). \tag{1.5}$$

Porque $u'(w) > 0$ es una función creciente. Por lo tanto, (1.5) implica que $w - G \leq w - \mu$, o $G \geq \mu$ con $G > \mu$ a menos que X sea una constante. En términos económicos, hemos encontrado que si $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$, el administrador pagará por el seguro una cantidad mayor que la pérdida esperada. Se dirá que dicho administrador es *contrario al riesgo*. Si G es al menos igual a la prima establecida por el asegurador, existe la oportunidad de establecer una póliza de seguro mutuamente ventajosa.

Al principio de esta sección la función de utilidad de la riqueza del asegurador se representó en forma aproximada mediante una línea recta en el rango de resultados asociados con una póliza individual. Ahora emplearemos una función de utilidad general para el asegurador. Representemos por $u_I(w)$ la función de utilidad de la riqueza del asegurador y por w_I la riqueza actual del asegurador medida en términos monetarios. Entonces la prima mínima aceptable, H, para asumir la pérdida aleatoria X, desde el punto de vista del asegurador, puede determinarse a partir de (1.6):

$$u_I(w_I) = E[u_I(w_I + H - X)]. \tag{1.6}$$

El lado izquierdo de (1.6) es la utilidad asociada a la posición actual del asegurador. El lado derecho es la utilidad esperada asociada con el cobro de la prima H y pago de la pérdida aleatoria X. En otras palabras, el asegurador es indiferente entre su posición actual y la de proporcionar un seguro para X con una prima H. Si el asegurador es contrario al riesgo, $u_I'(w) > 0$, $u_I''(w) < 0$, podemos usar la desigualdad de Jensen junto con (1.6) para obtener

$$u_I(w_I) = E[u_I(w_I + H - X)] \leq u_I(w_I + H - \mu).$$

Siguiendo la misma línea de razonamiento desarrollada en relación con (1.5), podemos concluir que $H \geq \mu$. Si G, como la determinó el administrador al resolver (1.5), es tal que $G \geq H \geq \mu$, la póliza de seguro es *factible.* Es decir, la utilidad esperada no se disminuye para ninguna de las partes del contrato.

La función de utilidad está basada sobre las preferencias del administrador para varias distribuciones de resultados. Un asegurador no necesita ser un individuo. Puede ser una sociedad, corporación o agencia gubernamental. En esta situación la determinación de $u_I(w)$, la función de utilidad del asegurador, puede ser un asunto bastante complicado. Por ejemplo, si el asegurador es una corporación, una de las responsabilidades de la administración es la formulación de un conjunto de preferencias coherente para varias empresas riesgosas de seguro. Estas preferencias pueden incluir compromisos entre actitudes conflictivas hacia el riesgo por parte de los grupos de accionistas.

Varias funciones elementales se utilizan para ilustrar las propiedades de las funciones de utilidad. Aquí examinaremos las formas exponenciales, las potencias fraccionarias y las cuadráticas. Los ejercicios 1.6, 1.8, 1.9, 1.10, y 1.13 abarcan las funciones logarítmicas de utilidad.

Una *función de utilidad exponencial* tiene la forma de

$$u(w) = -e^{-\alpha w} \qquad \alpha > 0$$

y tiene varias características atractivas. Primero,

$$u'(w) = \alpha e^{-\alpha w} > 0$$

y

$$u''(w) = -\alpha^2 e^{-\alpha w} < 0.$$

Por lo tanto, $u(w)$ puede servir como la función de utilidad de un individuo con aversión al riesgo. Segundo, encontrar

$$E[-e^{-\alpha X}] = -E[e^{-\alpha X}] = -M_X(-\alpha)$$

es esencialmente lo mismo que encontrar la función generadora de momentos (*f.g.m.*) de X. En esta expresión,

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

representa la *f.g.m.* de X. Tercero, las primas del seguro no dependen de la riqueza del administrador. Esta proposición se verifica para el asegurado mediante la sustitución de la función exponencial de utilidad en (1.2). Es decir,

$$\begin{aligned} -e^{-\alpha(w-G)} &= E[-e^{-\alpha(w-X)}] \\ e^{\alpha G} &= M_X(\alpha) \\ G &= \frac{\log M_X(\alpha)}{\alpha}, \end{aligned}$$

y no depende de w.

La verificación para el asegurador se hace mediante la sustitución de la función exponencial de utilidad con parámetro α_I en (1.6):

$$\begin{aligned} -e^{-\alpha_I w_I} &= E[-e^{-\alpha_I(w_I+H-X)}] \\ -e^{-\alpha_I w_I} &= -e^{-\alpha_I(w_I+H)} M_X(\alpha_I) \\ H &= \frac{\log M_X(\alpha_I)}{\alpha_I}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1:

La función de utilidad de un administrador está dada por $u(w) = -e^{-5w}$. El tiene dos prospectos económicos aleatorios disponibles. El resultado del primero, representado por X, tiene una distribución normal con media 5 y varianza 2. De aquí que, una proposición acerca de la distribución normal con media μ y varianza σ^2 se abreviará como $N(\mu, \sigma^2)$. El segundo prospecto, representado por Y, se distribuye como $N(6, 2.5)$. ¿Cuál prospecto será preferible?

Solución:

Tenemos

$$
\begin{aligned}
E[u(X)] &= E[-e^{-5X}] \\
&= -M_X(-5) = -e^{[-5(5)+(5^2)(2)/2]} \\
&= -1,
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
E[u(Y)] &= E[-e^{-5Y}] \\
&= -M_Y(-5) = -e^{[-5(6)+(5^2)(2.5)/2]} \\
&= -e^{1.25}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$E[u(X)] = -1 > E[u(Y)] = -e^{1.25}$$

y la distribución de X es preferible a la distribución de Y. ∇

En el Ejemplo 1.1 el prospecto X es preferible al Y a pesar del hecho de que $\mu_X = 5 < \mu_Y = 6$. Como el administrador tiene aversión al riesgo, el hecho de que la distribución de Y sea más difusa que la distribución de X tiene mayor ponderación que la distribución de Y al evaluar su deseabilidad. Si Y tuviera una distribución $N(6, 2.4)$, entonces $E[u(Y)] = -1$ y el administrador sería indiferente entre la distribución de X y la de Y.

La familia de funciones de potencia fraccionaria de utilidad está dada por

$$u(w) = w^{\gamma} \qquad w > 0,\ 0 < \gamma < 1.$$

Un miembro de esta familia podría representar las preferencias de un administrador con aversión al riesgo ya que

$$u'(w) = \gamma w^{\gamma-1} > 0$$

y

$$u''(w) = \gamma(\gamma - 1)w^{\gamma-2} < 0.$$

En esta familia las primas dependen de la riqueza del administrador en una forma que puede ser bastante realista en muchas situaciones.

Ejemplo 1.2:

La función de utilidad de un administrador está dada por $u(w) = \sqrt{w}$. El tiene una riqueza de $w = 10$ y enfrenta una pérdida aleatoria X con una distribución uniforme de $(0, 10)$. ¿Cuál es la cantidad máxima que pagará por un seguro completo contra la pérdida aleatoria?

Solución:

Sustituyendo dentro de (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{10 - G} &= E[\sqrt{10 - X}] \\ &= \int_0^{10} \sqrt{10 - x}\, 10^{-1} dx \\ &= \left. \frac{-2(10 - x)^{3/2}}{3(10)} \right|_0^{10} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{10} \\ G &= 5.5556. \end{aligned}$$

El administrador tiene aversión al riesgo. Siguiendo la discusión de (1.5), esperaríamos $G > E[X]$, y en este ejemplo $G = 5.5556 > E[X] = 5$. ▽

La familia de *funciones cuadráticas de utilidad* está dada por

$$u(w) = w - \alpha w^2 \qquad w < (2\alpha)^{-1}, \alpha > 0.$$

Un miembro de esta familia podría representar las preferencias de un administrador contrario al riesgo ya que $u'(w) = 1 - 2\alpha w > 0$, cuando $w < (2\alpha)^{-1}$ y $u''(w) = -2\alpha$. No obstante que la función cuadrática de utilidad es conveniente porque las decisiones dependerán sólo de los dos primeros momentos de la distribución de resultados bajo consideración, hay ciertas consecuencias que se derivan de su uso que resultan irrazonables para algunas personas. El Ejemplo 1.3 ilustrará una de estas consecuencias.

Ejemplo 1.3:

La función de utilidad de la riqueza del administrador está dada por

$$u(w) = w - 0.01w^2 \qquad w < 50.$$

El retendrá riqueza por la cantidad w, con probabilidad p y sufrirá una pérdida financiera de monto c, con probabilidad $1 - p$. Encuentre la prima de seguro máxima que el administrador pagará por un seguro completo para los valores de w, c, y p que se presentan en el cuadro siguiente.

Solución:

Por los hechos establecidos, (1.2) se transforma en

$$
\begin{aligned}
u(w-G) &= pu(w)+(1-p)u(w-c) \\
(w-G)-0.01(w-G)^2 &= p[w-0.01w^2] \\
&\quad +(1-p)[(w-c)-0.01(w-c)^2].
\end{aligned}
$$

Para los valores dados de w, p y c está expresión se transforma en una expresión cuadrática. Se presentan dos soluciones.

Riqueza w	Pérdida c	Probabilidad p	Prima de Seguro G
10	10	0.5	5.28
20	10	0.5	5.37

∇

Como se había mencionado, en el Ejemplo 1.3, G es más grande que la pérdida esperada de 5. Sin embargo, la prima de seguro máxima para exactamente la misma distribución de la pérdida se incrementa con la riqueza del administrador. Este resultado parece poco razonable para aquéllos que anticipen que una conducta más típica sería una disminución en la cantidad que el administrador pagaría por el seguro, cuando un incremento en la riqueza le permitiera absorber más pérdida aleatoria. Desafortunadamente, una prima máxima de seguro que aumenta con la riqueza, es una propiedad de las funciones cuadráticas de utilidad. Consecuentemente, estas funciones de utilidad no deben ser seleccionadas por un administrador quien percibe que su habilidad para absorber pérdidas aleatorias se incrementa con el aumento en la riqueza.

Si replanteamos el Ejemplo 1.3 utilizando una función exponencial de utilidad, sabemos que la prima G no dependerá de w, la cantidad de riqueza. De hecho si $u(w) = -e^{-0.01w}$ puede mostrarse que $G = 5.12$ para $w = 10$ y $w = 20$.

Ejemplo 1.4:

La probabilidad de que una propiedad no sea dañada en el siguiente periodo es 0.75. La función de densidad de la probabilidad (*f.d.p.*) de una pérdida positiva está dada por

$$f(x) = 0.25[0.01e^{-0.01x}] \qquad x > 0.$$

El dueño de la propiedad tiene una función dada por

$$u(w) = -e^{-0.005w}.$$

Calcule la pérdida esperada y la prima de seguro máxima que el dueño de la propiedad pagará.

Solución.

La pérdida esperada está dada por

$$\begin{aligned} E[X] &= 0.75(0) + 0.25 \int_0^\infty x(0.01e^{-0.01x})dx \\ &= 25. \end{aligned}$$

Aplicamos (1.2) **para determinar la prima máxima que el propietario pagará por el seguro completo. La prima será consistente con las preferencias del propietario como se resume en la función de utilidad:**

$$\begin{aligned} u(w-G) &= 0.75u(w) + \int_0^\infty u(w-x)f(x)dx \\ -e^{-0.005(w-G)} &= -0.75e^{-0.005w} - 0.25 \int_0^\infty e^{-0.005(w-x)}(0.01e^{-0.01x})dx \\ e^{0.005G} &= 0.75 + (0.25)(2) \\ &= 1.25 \\ G &= 200 \log 1.25 \\ &= 44.36. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de acuerdo con las preferencias **del propietario, este pagará hasta 44.63 − 25 = 19.63** en exceso de la pérdida esperada al comprar **un seguro que cubra el total de pérdidas en el periodo** siguiente. ∇

En el Ejemplo 1.5 se introducirá la **noción de seguro que cubre un poco menos que la pérdida total.** Se hará una modificación en (1.2) **para tomar en cuenta el hecho de que las pérdidas serán compartidas** por el administrador y el sistema de **aseguramiento.**

Ejemplo 1.5:

En el Ejemplo 1.4 se le ofrece al **propietario una póliza de seguro que pagará la mitad de cualquier** pérdida durante el periodo siguiente. **El valor esperado de los pagos parciales de la pérdida es $E[X/2] =$** 12.50. Calcule la prima máxima **que el propietario pagará por este seguro.**

Solución:

Consistente con su actitud hacia el riesgo como se resume en su función de utilidad, la prima se determinará a partir de

$$
\begin{aligned}
&0.75u(w-G)+\int_0^\infty u\left(w-G-\frac{x}{2}\right)f(x)dx\\
&=0.75u(w)+\int_0^\infty u(w-x)f(x)dx.
\end{aligned}
$$

El miembro izquierdo de esta ecuación representa la utilidad esperada con la cobertura de seguro parcial. El miembro derecho representa la utilidad esperada sin seguro. Para la función exponencial de utilidad y la *f.d.p.* de las pérdidas especificada en el ejemplo 1.4, puede demostrarse que G es igual a 28.62. El administrador está dispuesto a pagar hasta $G-\mu = 28.62-12.50 = 16.12$ más que la pérdida parcial esperada por la cobertura del seguro parcial. ∇

1.4 Elementos del Seguro

Los individuos y las organizaciones enfrentan la amenaza de pérdidas financieras causadas por eventos aleatorios. En la Sección 1.3 se vió como el seguro puede incrementar la utilidad esperada de un administrador que enfrenta dichas pérdidas aleatorias. Los sistemas de seguro son únicos en el sentido de que la principal razón de su existencia es mitigar las pérdidas financieras en las que el número, tamaño o tiempo de ocurrencia son aleatorios. En esta sección revisaremos algunos de los factores que influyen la organización y manejo de un sistema de seguro.

Un sistema de seguro puede organizarse sólo después de la identificación de una clase de situaciones en donde pueden ocurrir pérdidas aleatorias. La palabra aleatorio significa aquí, de acuerdo con otros atributos, que la frecuencia, tamaño o tiempo de la pérdida no está bajo el control del asegurado en prospecto. Si tal control existiera, o si una reclamación de pago excediera la pérdida financiera real, existiría un incentivo para incurrir en la pérdida. En tal situación, los supuestos bajo los cuales se organizó el sistema de seguro no serían válidos. Las condiciones reales bajo las que se cobran las primas y se pagan las reclamaciones serán diferentes de las asumidas al organizar el sistema. Este no alcanzará el objetivo propuesto de no disminuir las utilidades esperadas de los asegurados y el asegurador.

Una vez que se identifica una clase de situaciones susceptibles de asegurarse, se puede obtener información sobre las utilidades esperadas y el proceso de generación de pérdidas. La investigación de mercados de seguros puede verse como un esfuerzo para aprender acerca de las funciones de utilidad, es decir, sobre las preferencias de riesgo de los consumidores.

El proceso que genera el tamaño y tiempo de la pérdida puede ser suficientemente estable en el tiempo en tal forma que la información del pasado puede utilizarse para planear el sistema. Cuando se organiza un nuevo sistema de seguro, frecuentemente, no están disponibles estadísticas directamente relevantes. Sin embargo, puede obtenerse suficiente información fundamental de situaciones similares de riesgo para identificar los riesgos y proporcionar estimaciones preliminares de las distribuciones de probabilidad requeridas para determinar las primas. Debido a que la mayoría de los sistemas operan bajo condiciones dinámicas, es importante que exista un plan para recabar y analizar los datos operativos del seguro en tal forma que se pueda adaptar un sistema de seguro. La adaptación en este caso puede significar cambiar primas, pagar un dividendo basado en la experiencia o un reembolso de la prima, o modificar las pólizas futuras.

En una economía competitiva, las fuerzas del mercado estimularán a los aseguradores a fijar el precio de las pólizas de corto plazo de manera que las desviaciones del valor esperado observado se comporten como variables aleatorias independientes. Las desviaciones no deben exhibir un patrón que pudiese ser explotado por los asegurados o los aseguradores para obtener ganancias consistentes. Tal tipo de desviaciones consistentes indicarían ineficiencias en el mercado asegurador.

Como resultado, la clasificación de riesgos en grupos homogéneos es una función importante del sistema asegurador basado en el mercado. Las desviaciones aleatorias de la experiencia indican eficiencia o equidad en la clasificación. En un mercado asegurador competitivo, la interacción continua de numerosos compradores y vendedores obliga a experimentar con los sistemas de clasificación ya que los participantes del mercado intentan sacar ventaja de los patrones percibidos. Debido a que las pérdidas de seguros pueden ser eventos relativamente escasos, frecuentemente es difícil identificar patrones no-aleatorios. El costo de clasificar la información para obtener un sistema refinado establece, también, un límite a la experimentación en esta área.

Para los sistemas de seguro organizados para atender a grupos más que a individuos, la cuestión no es si las desviaciones de la experiencia de seguros son aleatorias para cada individuo. En lugar de ello, lo importante es si las desviaciones del grupo son aleatorias. En la práctica, la persistencia de desviaciones respecto a lo esperado indicarían la necesidad de revisar el sistema.

Las decisiones de un seguro de grupo no se sustentan en las comparaciones de la utilidad individual esperada. En vez de ello, los planes de seguro de grupo se basan sobre una decisión colectiva respecto a sí el sistema incrementa el bienestar total del grupo. Un ejemplo es el seguro médico de grupo que proporciona beneficios a los empleados de una empresa.

1.5 Seguro Optimo

Las ideas esbozadas en las Secciones 1.2, 1.3 y 1.4 se han utilizado como fundamento de una teoría elaborada para guiar a quienes toman decisiones acerca de seguros a realizar acciones consistentes con sus preferencias. En esta sección presentaremos uno de los principales resultados de esta teoría y revisaremos muchas de las ideas introducidas hasta el momento.

Un administrador tiene una cantidad de riqueza w y enfrenta una pérdida en el siguiente periodo. Está perdida es una variable aleatoria y se denota con X. El administrador puede comprar una póliza de seguro que pagará $I(x)$ de la pérdida. Para eliminar el incentivo de incurrir en la pérdida supondremos que todas las pólizas de seguro disponibles son tales que $0 \leq I(x) \leq x$. Hacemos el supuesto simplificatorio de que cualquier póliza puede comprarse por el monto del pago de la reclamación esperada. Es decir, la prima para una póliza que paga $I(x)$ es $E[I(X)] \leq E[X]$.

El administrador ha formulado una función de utilidad $u(w)$ que es consistente con sus preferencias sobre las distribuciones de los resultados. Supondremos que el administrador es contrario al riesgo, es decir, $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$. Además, suponemos que el administrador ha decidido sobre el monto a pagar por el seguro, denotado por P. La pregunta es ¿Cuál de las pólizas de seguro de entre los diversos tipos disponibles debería comprarse para maximizar la utilidad esperada del administrador ?

Una subclase de pólizas se define como sigue:

$$I_d(x) = \begin{cases} 0 & x < d \\ x - d & x \geq d. \end{cases} \tag{1.7}$$

Esta clase de pólizas se caracteriza por el hecho de que los pagos por reclamación no empiezan hasta que la pérdida excede la cantidad deducible d. Para las pérdidas que se sitúan por encima de la cantidad deducible, el excedente se paga bajo los términos de la póliza. Algunas veces a este tipo de póliza se llama seguro para prever pérdidas adicionales (*Stop - loss*) o *seguro de pérdida excedente* (sobre la cantidad deducible).

En el problema que se plantea en esta sección la prima P es igual a las reclamaciones esperadas. En (1.8, 1.9) el símbolo $f(x)$ denota la *f.p.d.* y el símbolo $F(x)$ denota la función de distribución (*f.d.*) asociada con la variable aleatoria X:

$$P = \int_d^{\infty} (x - d) f(x) dx \tag{1.8}$$

o

$$P = \int_d^{\infty} [1 - F(x)] dx. \tag{1.9}$$

La ecuación (1.9) se obtiene integrando por partes. En el siguiente desarrollo, el monto de la prima P está dada. Entonces (1.8, 1.9) proporciona ecuaciones explícitas para el deducible correspondiente, denotado por d^*. En el Ejercicio 1.15, se demuestra que d^* existe y es único.

El principal resultado de esta sección se expresa como un teorema.

Teorema 1.1:

Si un administrador

- tiene una cantidad de riqueza w,
- es contrario al riesgo, en otras palabras, su función de utilidad de la riqueza $u(w)$ es tal que $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$,
- enfrenta una pérdida aleatoria X,
- gastará la cantidad P en un seguro donde $0 < P \leq E[X] = \mu$, y el mercado de seguro

- ofrece todas las pólizas de seguro posibles de la forma $I(x), 0 \leq I(x) \leq x$, y
- ofrece la compra de una póliza de seguro por el pago de la pérdida esperada, $E[I(X)]$,

entonces la utilidad esperada del administrador se maximizará al comprar una póliza de seguro

$$I_{d^*}(x) = \begin{cases} 0 & x < d^* \\ x - d^* & x \geq d^* \end{cases}$$

en donde d^* es la solución de

$$P - \int_d^{\infty} (x - d) f(x) dx = 0.$$

La prueba del teorema se presenta en el anexo de este capítulo.

El teorema 1.1 es un resultado importante y ejemplifica muchas de las ideas desarrolladas en este capítulo. Sin embargo, es instructivo considerar ciertas limitaciones de su aplicabilidad. Primero, el seguro no puede comprarse por el precio de las reclamaciones esperadas, a pesar de que las consideraciones adicionales para gastos, ganancias y seguridad son relativamente pequeñas en relación al costo básico, por tanto el teorema es válido para los individuos con más aversión al riesgo. También, a pesar de que el teorema indica la forma del seguro, no ayuda a determinar el monto, P, a gastar. En el teorema P es fijo.

1.6 Notas y Referencias

El papel del riesgo en los negocios fue desarrollado en una tesis pionera por Willet (1951). Borch (1974) ha publicado una serie de escritos aplicando la teoría de la utilidad a temas de seguros. DeGroot (1970) da un desarrollo completo de la teoría de la utilidad empezando desde los axiomas básicos de la consistencia entre las preferencias para varias distribuciones de resultados. DeGroot y Borch discuten la importancia histórica de la paradoja de St. Petesburgo, esbozada en el Ejercicio 1.2. El escrito de Friedman y Savage (1948) proporciona muchos conocimientos de la teoría de la utilidad y la conducta humana.

Pratt (1964) ha estudiado (1.2) y derivado varios teoremas acerca de las primas y las funciones de utilidad. El Ejercicio 1.20, que utiliza dos aproximaciones generales, está relacionado con uno de los resultados de Pratt.

El teorema 1.1 sobre seguro óptimo fue probado por Arrow (1963) en el contexto del seguro médico. El teorema del Ejercicio 1.20, en el que la meta del seguro es minimizar la varianza de las pérdidas retenidas fue el tema de las ponencias de Borch (1960) y Kahn (1961).

1.7 Anèxo

Lema:

Si $u''(y) < 0$ para toda y en (z, w), entonces

$$u(w) - u(z) \leq (w - z)u'(z). \tag{1.10}$$

Prueba:

El lema puede establecerse con la ayuda de la Figura 1.2. Usando la forma de la pendiente de punto, una línea tangente a $u(w)$ en el punto $[w_0, u(w_0)]$ tiene la ecuación $y - u(w_0) = u'(w_0)w - (w_0)$ y estará por encima de la gráfica de la función $u(w)$ excepto en el punto $[w_0, u(w_0)]$. Por lo tanto

$$u(w) - u(w_0) \leq u'(w_0)(w - w_0).$$

Puede repetirse el mismo argumento para cualquier número z.

□

En el Ejercicio 1.18 se requiere una prueba alternativa.

Prueba del teorema 1.1:

Sea $I(x)$ asociado con una póliza de seguro que satisfaga la hipótesis del teorema. Entonces del lema

$$\begin{aligned} &u(w - x + I(x) - P) - u(w - x + I_{d^*}(x) - P) \\ &\leq [I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - x + I_{d^*}(x) - P). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Además sostenemos

$$\begin{aligned} &[I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \\ &\leq [I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - d^* - P). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Para establecer la desigualdad (1.12), debemos considerar tres casos:

Caso I. $I_{d^*}(x) = I(x)$

En este caso la igualdad se cumple,(1.12) es 0 en ambos lados.

Caso II. $I_{d^*}(x) > I(x)$

En este caso $I_{d^*}(x) > I(0)$ y de (1.7), $x - I_{d^*}(x) = d^*$ Por lo tanto, la igualdad se cumple en ambos lados de (1.12) igual a $[I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - d^* - P)$.

Caso III. $I_{d^*}(x) < I(x)$

En este caso $I(x) - I_{d^*}(x) > 0$. De (1.7) obtenemos $I_{d^*}(x) - x \geq -d^*$ y $I_{d^*}(x) - x - P \geq -d^* - P$. Por lo tanto

$$u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \leq u'(w - d^* - P)$$

ya que la segunda derivada de $u(x)$ es negativa y $u'(x)$ es una función decreciente.

Por lo tanto, para cada caso

$$[I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \leq [I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - P - d^*)$$

estableciendo la desigualdad (1.12).

Ahora combinando las desigualdades (1.11) y (1.12) y tomando esperanzas, tenemos

$$\begin{aligned} &E[u(w - X + I(X) - P)] - E[u(w - X + I_{d^*}(X) - P)] \\ &\leq E[I(X) - I_{d^*}(X)]u'(w - d^* - P) = (P - P)u'(w - d^* - P) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E[u(w - X + I(X) - P] \leq E[u(w - X + I_{d^*}(X) - P]$$

Y la utilidad esperada se maximizará al seleccionar $I_{d^*}(x)$, la póliza (Stop Loss) □

1.8 Ejercicios

Sección 1.2

1.1 Suponga que la riqueza actual de un administrador es 10,000. Asigne $u(0) = -1$ y $u(10,000) = 0$.

a. Cuando enfrenta una pérdida de X con probabilidad 0.5, y permanece con su riqueza actual con una probabilidad 0.5, el administrador estaría dispuesto a pagar hasta G por un seguro completo. A continuación se dan valores de X y G en tres situaciones.

X	G
10,000	6,000
6,000	3,300
3,300	1,700

Determine tres valores de la función de utilidad de la riqueza u del administrador.

b. Calcule las primeras y segundas diferencias divididas de los valores dados de $u(0), u(10,000)$ y los tres valores intermedios de u determinada en la parte (a).

c. Póngase usted en el papel del administrador con una riqueza de $10,000$. Además deduzca a los valores dados de $u(0)$ y $u(10,000)$, tres valores adicionales de su función de utilidad de la riqueza u.

d. Sobre la base de los cinco valores de su función de utilidad, calcule las primeras y segundas diferencias divididas.

1.2 **La paradoja de San Petesburgo:** considere un juego de azar que consiste en tirar una moneda hasta que salga águila. La probabilidad de obtener un águila es 0.5 y las pruebas repetidas son independientes. Sea la variable aleatoria N el número de la prueba en que se obtiene la primera águila.

a. Demuestre que la función de probabilidad (*f.p.*) de N está dada por

$$f(n) = (1/2)^n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

b. Encuentre $E[N]$ y $Var[N]$.

c. Si se paga una recompensa de $X = 2^N$, pruebe que la esperanza de la recompensa no existe.

d. Si esta recompensa tiene una utilidad $u(w) = \log w$, encuentre $E[u(X)]$.

Sección 1.3

1.3 **Desigualdad de Jensen:** a. Suponga $u''(w) < 0, E[X] = \mu$ y $E[u(X)]$ existen; pruebe que $E[u(X)] \leq u(\mu)$ [Sugerencia: exprese $u(w)$ como una serie alrededor del punto $w = \mu$ y termine la expansión con un término de error que involucre la segunda derivada. Note que la desigualdad de Jensen no requiere que $u'(w) > 0$.]

b. Si $u''(w) > 0$, pruebe que $E[u(X)] \geq u(\mu)$.

c. Discuta la desigualdad de Jensen para el caso especial $u(w) = w^2$. ¿Qué es $E[u(X)] - u(E[X])$?

1.4 Si una función de utilidad es tal que $u'(w) > 0$ y $u''(w) > 0$, use (1.2) para demostrar que $G \leq \mu$. Un administrador con preferencias consistentes con esta función de utilidad es ***amante del riesgo.***

1.5 Construya un argumento geométrico, basado en una gráfica como la mostrada en la Figura 1.2, que si $u'(w) < 0$ y $u''(w) < 0$, entonces se determina (1.4)

1.6 Confirme que la función de utilidad $u(w) = \log w, w > 0$, es la función de utilidad de un administrador que es contrario al riesgo para $w > 0$.

1.7 Una función de utilidad está dada por

$$u(w) = \begin{cases} e^{-(w-100)^2/200} & w < 100 \\ 2 - e^{-(w-100)^2/200} & w \geq 100. \end{cases}$$

a. ¿ Si $u'(w) \geq 0$?

b. ¿ Para cuál rango de w es $u''(w) < 0$?

1.8 Si uno supone, como lo hizo J. Bernoulli en sus comentarios a la paradoja de **San Petesburgo**, que la utilidad de la riqueza satisface la ecuación diferencial

$$\frac{du(w)}{dw} = \frac{k}{w} \qquad w > 0, k > 0,$$

confirme que $u(w) = k \log w + c$.

1.9 Un administrador tiene una función de utilidad $u(w) = k \log w$. Tiene un monto de riqueza w, $w > 1$, y enfrenta una pérdida aleatoria X que tiene una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Utilice (1.2) para demostrar que la prima máxima de seguro que pagará es

$$G = w - \frac{w^w}{e(w-1)^{w-1}}.$$

1.10 a. En (1.2) use las aproximaciones

$$\begin{aligned} u(w-G) &\cong u(w-\mu) + (\mu - G)u'(w-\mu) \\ u(w-x) &\cong u(w-\mu) + (\mu - x)u'(w-\mu) + \frac{1}{2}(\mu - x)^2 u''(w-\mu) \end{aligned}$$

y derive la siguiente aproximación de G:

$$G \cong \mu - \frac{1}{2}\frac{u''(w-\mu)}{u'(w-\mu)}\sigma^2.$$

b. Si $u(w) = k \log w$, utilice la aproximación desarrollada en la parte (a) para obtener

$$G \cong \mu + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{(w-\mu)}.$$

1.11 El administrador tiene una función de utilidad $u(w) = -e^{-\alpha w}$ y se enfrenta a una pérdida aleatoria que tiene una distribución de ji-cuadrada con n grados de libertad. Si $0 < \alpha < 1/2$, utilice (1.2) para obtener una expresión para G, la prima de seguro máxima que pagará el administrador, y pruebe que $G > n = \mu$.

1.12 Vuelva a trabajar con el Ejemplo 1.4 para

a. $u(w) = -e^{-w/400}$

b. $u(w) = -e^{-w/150}$.

1.13 a. Un asegurador pequeño con valor neto 100 aceptó (y cobró la prima de) un riesgo X con la siguiente distribución de probabilidad:

$$Pr(X = 0) = Pr(X = 51) = \frac{1}{2}.$$

¿ Cuál es la cantidad máxima G que debería pagar a un reasegurador para que acepte el 100% de esta pérdida ? Suponga que la función de utilidad de la riqueza del asegurador es $u(w) = \log w$.

b. Un reasegurador grande, con un monto de riqueza de 650 y la misma función de utlidad, $u(w) = \log w$, está considerando aceptar el riesgo mencionado arriba. ¿ Cuál es la cantidad mínima H que aceptaría como prima para reasegurar el 100% de la pérdida ?

Sección 1.4

1.14 Se expide una póliza de gastos hospitalarios a un grupo que consiste de n individuos. La póliza paga B dólares cada vez que un miembro del grupo ingresa al hospital. El grupo no es homogéneo con respecto al número esperado de admisiones hospitalarias cada año. El grupo puede dividirse en r subgrupos. Hay n_i individuos en el subgrupo i y $\sum_1^r ni = n$, para el subgrupo i el número anual de admisiones para cada miembro esta dado por por una distribución Poisson con parametro $\lambda_i, i = 1, 2, ..., r$. El número anual de admisiones hospitalarias para los componentes del grupo son mutuamente independientes.

a. Demuestre que las reclamaciones de pago esperadas en 1 año son

$$B\sum_1^r n_i\lambda_i = Bn\bar{\lambda}$$

en donde

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_1^r n_i\lambda_i}{n}.$$

b. Demuestre que el número de admisiones hospitalarias en 1 año para el grupo tiene una Distribución de Poisson con parámetro $n\bar{\lambda}$.

Sección 1.5

1.15 a. Derive el lado derecho de la expresión (1.8) con respecto a d.

b. Deje que P sea un número tal que $0 < P < E[X]$. Demuestre que (1.8, 1.9) tiene una solución única d^*.

1.16 Realice la integración por partes indicada en (1.9). Use el hecho de que si $E[X]$ existe, entonces $\lim_{x \to \infty} x[1 - F(x)] = 0$.

1.17 Deje que la variable aleatoria de pérdidas, X tenga una *f.d.p.* dada por

$$f(x) = 0.1e^{-0.1x} \qquad x > 0.$$

a. Calcule $E[X]$ y $Var[X]$.

b. Si $P = 5$ va a ser gastado en un seguro que se comprará por el pago de la prima pura, demuestre que

$$I(x) = \frac{x}{2}$$

y

$$I_d(x) = \begin{cases} 0 & x < 10\log 2 \\ x - 10\log 2 & x \geq 10\log 2 \end{cases}$$

ambas representan pólizas de seguro posibles con prima pura $P = 5$. $I(x)$ se denomina *seguro proporcional.*

1.18 La variable aleatoria de pérdidas, X tiene una *f.d.p.* dada por

$$f(x) = \frac{1}{100} \qquad 0 < x < 100.$$

a. Calcule $E[X]$ y $Var[X]$.

b. Considere una póliza proporcional en donde

$$I_1(x) = kx \qquad 0 < k < 1,$$

y una póliza (Stop-Loss) en donde

$$I_2(x) = \begin{cases} 0 & x < d \\ x - d & x \geq d. \end{cases}$$

Determine k y d tales que la prima pura en cada caso sea $P = 12.5$.

c. Demuestre que $Var[X - I_1(X)] > Var[X - I_2(X)]$.

Anexo

1.19 Establezca el lema utilizando un argumento analítico en lugar de uno geométrico. [Sugerencia: expanda $u(w)$ en una serie hasta el remanente de la segunda derivada cerca del punto w_0 y reste $u(w_0)$.]

1.20 Adopte la hipótesis del Teorema 1.1 con respecto a la prima P y a las pólizas de seguro $I(x)$. Pruebe que

$$Var[X - I(X)] = E[(X - I(X) - \mu + P)^2]$$

es un mínimo cuando $I(x) = I_{d^*}(x)$. Estará probando que para una prima pura fija, una póliza de (Stop- Loss) minimizará la varianza de las reclamaciones retenidas. [Sugerencia: uno puede seguir la prueba del Teorema 1.1 probando primero que $x^2 - z^2 \geq (x - z)(2z)$ y después estableciendo que

$$\begin{aligned} [x - I(x)]^2 - [x - I_{d^*}(x)]^2 &\geq [I_{d^*}(x) - I(x)][2x - 2I_{d^*}(x)] \\ &\geq 2[I_{d^*}(x) - I(x)]d^*. \end{aligned}$$

La desigualdad final puede establecerse dividiendo la prueba en tres casos. Alternativamente, mediante la selección adecuada del nivel de riqueza y de la función de utilidad, el resultado de este ejercicio es un caso especial del Teorema 1.1]

Capítulo 2

MODELOS INDIVIDUALES DE RIESGO PARA EL CORTO PLAZO

2.1 Introducción

En el Capítulo 1 se examinó cómo un administrador puede usar el seguro para reducir los efectos financieros adversos de varios tipos de eventos aleatorios. Ese examen fue completamente general. El tomador de decisiones podría haber sido un individuo buscando protección contra pérdidas de propiedad, ahorro o ingreso. Podría tratarse, también, de una organización buscando protección contra el mismo tipo de pérdidas. De hecho la organización podría haber sido una compañia de seguros que buscaba protección contra pérdidas de fondos debido a demasiadas reclamaciones, ya sea de individuos o de su cartera de asegurados. Dicha protección se denomina reaseguramiento y será introducida en este capítulo.

Como se recordará, la teoría del Capítulo 1 requiere de un modelo probabilístico para las pérdidas potenciales. En esta parte se examinará uno de los dos modelos comúnmente utilizados en valoración de seguros, reservas y aplicaciones de reaseguros.

Para una organización de seguros, represente S la pérdida aleatoria sobre un segmento de su riesgo. Entonces S es la variable aleatoria para la cual se busca una distribución de probabilidad. Históricamente, se han establecido dos conjuntos de postulados para las distribuciones de S. El *modelo de riesgo individual* define

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{2.1}$$

en donde X_i es la pérdida sobre la unidad i asegurada y n es el número de unidades de riesgo aseguradas. Usualmente las $X_i's$ son postuladas como variables aleatorias independientes porque las matemáticas son mas fáciles y no son necesarios datos históricos sobre las relaciones de dependencia. El otro modelo es el de riesgo colectivo que se describirá en el Capítulo 11.

El modelo de riesgo individual discutido en este capítulo no reconocerá el valor del dinero en el tiempo. Esto es para simplificar y porque el título se refiere al corto plazo. Los capítulos del 4 al 10 abarcan modelos para el largo plazo.

En este capítulo se discutirán sólo *modelos cerrados*, es decir, el número de unidades aseguradas n en (2.1) es conocido y establecido al principio del periodo. Si se postularan migraciones hacia dentro y fuera del sistema de seguros se tendría un *modelo abierto*.

2.2 Modelos para Variables Aleatorias de Reclamación Individual

Primero se revisarán los conceptos básicos del seguro de vida. *En un seguro de vida a plazo de 1 - año* el asegurador acepta pagar una cantidad b si el asegurado muriera dentro del año de emisión de la póliza y no pagar nada si sobrevive a ese plazo. La probabilidad de una reclamación durante el año está representada por q. La variable aleatoria de reclamaciones, X, tiene una distribución que puede ser descrita ya sea por su función de probabilidad *f.p.* o por su función de distribución. *f.d.* La *f.p.* es

$$f(x) = Pr(X = x) = \begin{cases} 1-q & x = 0 \\ q & x = b \\ 0 & Otro\ Caso, \end{cases} \tag{2.2}$$

y la *f.d.* es

$$F(x) = Pr(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-q & 0 \leq x < b \\ 1 & x \geq b. \end{cases} \tag{2.3}$$

De la *f.d.* y la definición de momentos

$$E[X] = bq \tag{2.4}$$

$$E[X^2] = b^2 q,$$

y

$$Var[X] = b^2 q(1-q). \tag{2.5}$$

Estas fórmulas pueden obtenerse también escribiendo

$$X = Ib \tag{2.6}$$

en donde b es la cantidad constante pagadera en el evento del fallecimiento e I es la variable aleatoria con valor de 1 para el evento fallecimiento y 0 para otros eventos. Entonces $Pr(I = 0) = 1 - q$ y $Pr(I = 1) = q$, la media y la varianza de I son q y $q(1 - q)$ respectivamente, y la media y varianza de X son bq y $b^2q(1 - q)$ como se citó en (2.5).

La variable aleatoria I con su rango $\{0, 1\}$ es ampliamente aplicable en los modelos actuariales. En los libros de texto de probabilidad se le denomina *indicador, variable aleatoria de Bernoulli*, o *variable aleatoria binomial de una sola prueba*. Nosotros nos referiremos a ella como un indicador en aras de la brevedad y porque indica la ocurrencia, $I = 1$, o no ocurrencia, $I = 0$, de un evento determinado.

Ahora buscaremos modelos más generales en los que la cantidad de reclamaciones es también una variable aleatoria y pueden ocurrir varias reclamaciones en un periodo. Las coberturas de salud, automóviles y otras propiedades y obligaciones proporcionan ejemplos inmediatos. Extendiendo (2.6) postulamos que

$$X = IB \tag{2.7}$$

en donde X es la variable aleatoria de reclamaciones para el periodo, B proporciona el monto total de las reclamaciones incurridas durante el periodo, e I es el indicador para el evento de que al menos ocurra una reclamación. Como el indicador de este evento, I reporta la ocurrencia ($I = 1$) o no ($I = 0$) de reclamaciones en este periodo y no el número de reclamaciones en el periodo. $Pr(I = 1)$ se denotará todavía con q.

Veamos varias situaciones y determinemos las distribuciones de I y B para un modelo. Primero considérese un seguro de vida de un año que paga un beneficio extra en caso de muerte accidental. Para especificar, si la muerte es accidental, el monto del beneficio es 50,000. Por otras causas de muerte el monto del beneficio es 25,000. Supongamos que dada la edad, salud y ocupación de un individuo determinado, la probabilidad de una muerte accidental dentro del año es 0.0005 mientras que la probabilidad de muerte no accidental es 0.0020. Más suscintamente,

$$Pr(I = 1 \ y \ B = 50,000) = 0.0005$$

y

$$Pr(I = 1 \ y \ B = 25,000) = 0.0020.$$

Sumando los valores posibles de B, tenemos

$$Pr(I=1)=0.0025,$$

y entonces

$$Pr(I=0)=1-Pr(I=1)=0.9975.$$

La distribución condicional de B, dado $I=1$, es

$$Pr(B=25{,}000|I=1)=\frac{Pr(B=25{,}000 \text{ y } I=1)}{Pr(I=1)}=\frac{0.0020}{0.0025}=0.8$$

$$Pr(B=50{,}000|I=1)=\frac{Pr(B=50{,}000 \text{ y } I=1)}{Pr(I=1)}=\frac{0.0005}{0.0025}=0.2.$$

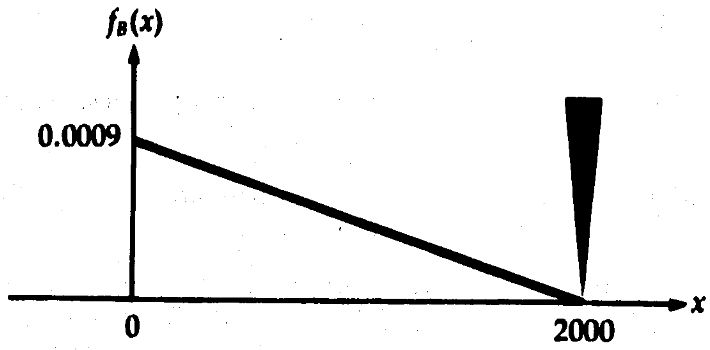
Consideremos ahora un seguro de automóvil que contempla cobertura por colisión (indemniza al propietario en caso de daños a su auto por colisión) por arriba de un deducible de 250 y hasta una reclamación máxima de 2,000. Con propósitos ilustrativos, supóngase que para un individuo particular la probabilidad de una reclamación en un periodo es 0.15 y la de más de una reclamación es 0:

$$Pr(I=0)=0.85$$

$$Pr(I=1)=0.15.$$

(Se hace el supuesto irreal de no más de una reclamación por periodo para simplificar la distribución de B. Quitaremos este supuesto en una sección posterior después de discutir la distribución de la suma de un número de reclamaciones.) Como B es la reclamación incurrida por el asegurador, más que la cantidad del daño al auto, podemos inferir dos características de I y B. Primero, el evento $I=0$ incluye aquellas colisiones en las que el daño es menor que los 250 deducibles. La otra es que la distribución de las B tendrá una masa de probabilidad del tamaño máximo de reclamación de 2,000. Supongamos que esta masa de probabilidad es 0.1. Aún más, supongamos que las cantidades reclamadas entre 0 y 2,000 pueden graficarse mediante una distribución continua con una *f.d.p.* proporcional a $1-x/2{,}000$ para $0<x<2{,}000$. (En la práctica la curva continua elegida para representar la distribución de las reclamaciones sería el resultado de un estudio por tamaño de reclamaciones en un periodo reciente.) Resumiendo estos supuestos acerca de la distribución condicional de B, dado $I=1$, tenemos una distribución mixta con densidad positiva de 0 a 2,000 y una masa de 2,000. Esto se ilustra en la Figura 2.1.

Figura 2.1 Funciónes de densidad y masa de B, dado $I = 1$



En la figura, la región del área del triángulo sin sombrear es 0.9, y la masa en 2,000 es 0.1. La *f.d.* de esta distribución condicional es

$$Pr(B \leq x | I = 1) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 0.9\left[1 - \left(1 - \frac{x}{2000}\right)^2\right] & 0 < x < 2000 \\ 1 & x \geq 2000. \end{cases}$$

En la Sección 2.4 veremos que los momentos de la variable aleatoria de reclamaciones, X, en especial la media y la varianza, son ampliamente utilizadas. Para este seguro de automóvil, calcularemos la media y la varianza mediante dos métodos.

Primero derivaremos la función de distribución de X y la usaremos para calcular $E[X]$ y $Var[X]$. Dejando que $F(x)$ sea la *f.d.* de X, tenemos

$$\begin{aligned} F(x) &= Pr(X \leq x) = Pr(IB \leq x) \\ &= Pr(IB \leq x | I = 0)Pr(I = 0) \\ &+ Pr(IB \leq x | I = 1)Pr(I = 1). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para $x < 0$,

$$F(x) = 0(0.85) + 0(0.15) = 0.$$

Para $0 \leq x < 2,000$,

$$F(x) = 1(0.85) + 0.9\left[1 - \left(1 - \frac{x}{2,000}\right)^2\right](0.15).$$

Para $x \geq 2,000$,

$$F(x) = 1(0.85) + 1(0.15) = 1.$$

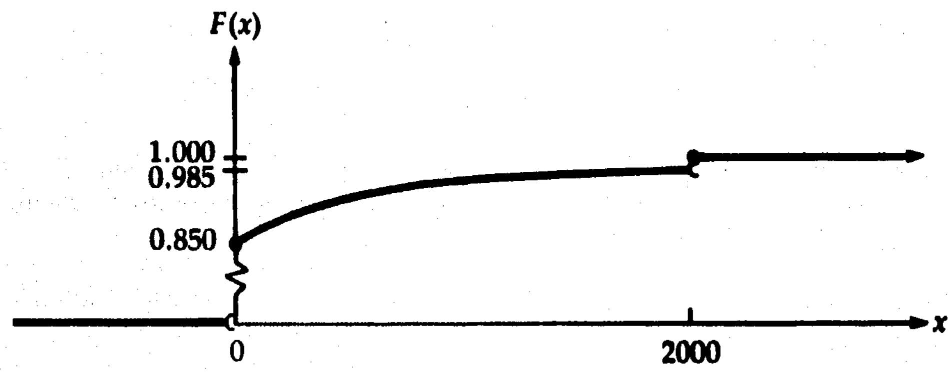
Esta es una distribución mixta. Tiene masas de probabilidad y partes continuas como puede observarse en la Figura 2.2.

Existe una combinación *f.p.* y *f.d.p.* que corresponde a esta *f.d.* dada por

$$f(0) = Pr(X = 0) = 0.85$$

$$f(2,000) = Pr(X = 2,000) = 0.015 \tag{2.9}$$

Figura 2.2 Función de distribución de $X = IB$



$$f(x) = \begin{cases} F'(x) = 0.000135\left(1 - \dfrac{x}{2,000}\right) & 0 < x < 2,000 \\ 0 & \textit{Otro Caso.} \end{cases}$$

Pueden calcularse entonces los momentos de X mediante

$$E(X^k) = 0f(0) + (2,000)^k f(2,000) + \int_0^{2,000} x^k f(x)dx, \tag{2.10}$$

específicamente,

$$E[X] = 120$$

y

$$E[X^2] = 150,000.$$

por lo tanto,

$$Var[X] = 135,600.$$

Existen varias fórmulas generales relacionadas con los momentos de las variables aleatorias mediante esperanza condicional. Para la media y la varianza son

$$E[W] = E[E[W|V]] \tag{2.11}$$

y

$$Var[W] = Var[E[W|V]] + E[Var[W|V]]. \tag{2.12}$$

En estas ecuaciones calculamos los términos del miembro izquierdo mediante el uso directo de la distribución de las $W's$. En los términos del derecho, la $E[W|V]$ y $Var[W|V]$ se calculan usando la distribución condicional de las $W's$ para un valor dado de V. Estos componentes son entonces funciones de la variable aleatoria V y podemos calcular sus momentos mediante el uso de la distribución de las $V's$.

Las distribuciones condicionales se utilizan en muchos modelos actuariales. Esto hace que las fórmulas anteriores sean directamente aplicables. En nuestro modelo, $X = IB$, podemos sustituir X por W e I por V para obtener

$$E[X] = E[E[X|I]] \tag{2.13}$$

y

$$Var[X] = Var[E[X|I]] + E[Var[X|I]]. \tag{2.14}$$

Ahora pongamos

$$\mu = E[B|I = 1] \tag{2.15}$$

$$\sigma^2 = Var[B|I = 1] \tag{2.16}$$

y observando las medias condicionales

$$E[X|I = 0] = 0 \tag{2.17}$$

y

$$E[X|I = 1] = E[B|I = 1] = \mu. \tag{2.18}$$

Las fórmulas (2.17) y (2.18) definen a $E[X|I]$ como una función de I, que puede expresarse mediante la fórmula

$$E[X|I] = \mu I. \tag{2.19}$$

Por tanto,

$$E[E[X|I]] = \mu E[I] = \mu q \tag{2.20}$$

y

$$Var[E[X|I]] = \mu^2 Var[I] = \mu^2 q(1 - q). \tag{2.21}$$

Como $X = 0$ para $I = 0$, tenemos que

$$Var[X|I = 0] = 0. \tag{2.22}$$

Para $I = 1$ tenemos que $X = B$ y

$$Var[X|I = 1] = Var[B|I = 1] = \sigma^2. \tag{2.23}$$

Las fórmulas (2.22) y (2.23) pueden combinarse como

$$Var[X|I] = \sigma^2 I. \tag{2.24}$$

Entonces

$$E[Var[X|I]] = \sigma^2 E[I] = \sigma^2 q. \tag{2.25}$$

Sustituyendo (2.20), (2.21) y (2.25) en (2.13) y (2.14) tenemos

$$E[X] = \mu q \tag{2.26}$$

y

$$Var[X] = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q. \tag{2.27}$$

Apliquemos ahora estas fórmulas para calcular $E[X]$ y $Var[X]$ para el seguro del automóvil de (2.10). Como la *f.d.p.* para B, dado $I = 1$, es

$$f_{B|I}(x|1) = \begin{cases} 0.0009\left(1 - \dfrac{x}{2000}\right) & 0 < x < 2000 \\ 0 & \textit{Otro Caso,} \end{cases}$$

con $Pr(B = 2,000|I = 1) = 0.1$ tenemos

$$\mu = \int_0^{2,000} 0.0009x\left(1 - \frac{x}{2,000}\right)dx + (0.1)(2,000) = 800$$

$$E[B^2|I = 1] = \int_0^{2,000} 0.0009x^2\left(1 - \frac{x}{2,000}\right)dx + (0.1)(2,000)^2 = 1,000,000$$

y

$$\sigma^2 = 1,000,000 - (800)^2 = 360,000.$$

Finalmente, con $q = 0.15$ obtenemos lo siguiente de (2.26) y (2.27):

$$E[X] = 800(0.15) = 120$$

y

$$\begin{aligned} Var[X] &= (800)^2(0.15)(0.85) + (360,000)(0.15) \\ &= 135,600. \end{aligned}$$

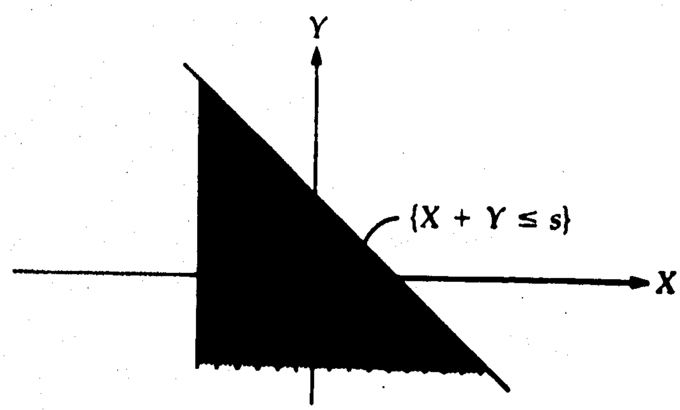
Existen otros modelos posibles para B en diferentes situaciones de seguro. Por ejemplo, consideremos un modelo para el número de muertes debidas a accidentes aéreos durante un año de operación de una aerolínea. Podemos empezar con una variable aleatoria para el número de muertes, X en un solo vuelo y después añadir un conjunto de este tipo de variables aleatorias sobre el conjunto de vuelos del año. Para un solo vuelo, el evento $I = 1$ será el evento de un accidente durante el vuelo. El número de muertes en el accidente, B, se graficará como el producto de dos variables aleatorias, L y Q, en donde L es el factor de recargo, el número de personas a bordo en el momento del accidente, y Q es la proporción de muertes entre las personas a bordo. El número de muertes B, se grafica en esta forma debido a que quizás sea más fácil disponer de datos estadísticos para las distribuciones de L y Q que los datos totales para B. Tenemos $X = ILQ$. No obstante, que la proporción de pasajeros muertos debido al accidente y la de asientos ocupados probablemente están relacionados, puede suponerse como una primera aproximación que L y Q son independientes.

2.3 Suma de Variables Aleatorias Independientes

En el modelo de riesgo individual, las reclamaciones de una organización aseguradora se grafican como la suma de reclamaciones de muchos individuos asegurados.

Se supone las reclamaciones individuales son independientes en la mayoría de las aplicaciones. En esta sección revisaremos dos métodos para determinar la distribución de la suma de variables aleatorias independientes. Primero consideremos la suma de dos variables aleatorias, $S = X + Y$, en el espacio muestral dibujado en la Figura 2.3.

Figura 2.3 **Evento** $[X + Y \leq s]$



La línea $X + Y = s$ y la región por debajo de la línea representan el evento $[S = X + Y \leq s]$. Por tanto la *f.d.* de S es

$$F_s(s) = Pr(S \leq s) = Pr(X + Y \leq s). \tag{2.28}$$

Para dos variables aleatorias discretas, positivas, podemos usar la ley de la probabilidad total para expresar (2.28) como

$$F_S(s) = \sum_{all\ y \leq s} Pr(X + Y \leq s | Y = y) Pr(Y = y)$$

$$= \sum_{all\ y \leq s} Pr(X \leq s - y | Y = y) Pr(Y = y). \tag{2.29}$$

Cuando X y Y son independientes, esta última suma se puede expresar

$$F_S(s) = \sum_{all\ y \leq s} F_X(s - y) f_Y(y). \tag{2.30}$$

La *f.p.* correspondiente para esta *f.d.* puede calcularse mediante

$$f_S(s) = \sum_{all\ y \leq s} f_X(s - y) f_Y(y). \tag{2.31}$$

Para variables aleatorias continuas, positivas las fórmulas correspondientes a (2.29), (2.30), y (2.31) son

$$F_S(s) = \int_o^S Pr(X \leq s - y | Y = y) f_Y(y) dy \tag{2.32}$$

$$F_S(s) = \int_o^s F_X(s - y) f_Y(y) dy \tag{2.33}$$

$$f_S(s) = \int_o^s f_X(s - y) f_Y(y) dy. \tag{2.34}$$

Cuando cualquiere de ellas, o ambas, de X y Y tienen una distribución de tipo mixto (típicas en las aplicaciones de modelos de riesgo individual), las fórmulas son análogas pero más complejas. Para variables aleatorias que también pueden tomar valores negativos, las sumas e integrales en las fórmulas anteriores son para todos los valores de $-\infty$ a $+\infty$.

En el análisis matemático la operación en (2.30) y (2.33) se denomina *convolución* del par de funciones de distribución $F_X(x)$ y $F_Y(y)$ y se denota como $F_X * F_Y$. El proceso de convolución es simple en concepto, sin embargo, puede ser tediosa de calcular aun en ejemplos simples.

Ejemplo 2.1.:

Sea X con una distribución uniforme en $(0,2)$ y sea Y independiente de X con una distribución uniforme en $(0,3)$. Determine la *f.d.* de $S = X + Y$.

Solución

Como X y Y son continuas, usaremos (2.33):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

y

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & 0 < y < 3 \\ 0 & \textit{Otro Caso.} \end{cases}$$

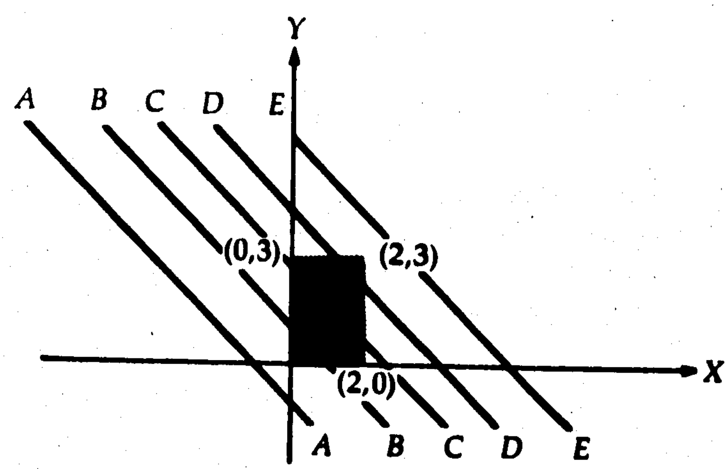
Entonces

$$F_S(s) = \int_0^s F_X(s-y) f_Y(y) dy.$$

El espacio de la muestra X, Y se ilustra en la Figura 2.4. La región rectangular contiene todas las probabilidades para X y Y. El evento de interés, $X + Y \leq s$, se ilustró en la figura para cinco valores de s. Para cada valor, la línea intersecta el eje de las y en s y la línea de $x = 2$ en $s - 2$. Los valores de F_s para estos cinco casos son

Figura 2.4

Convolución de Dos Distribuciones Uniformes



$$F_s(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \quad \textit{linea A} \\ \int_o^s \frac{1}{3}\frac{s-y}{2}dy = \frac{s^2}{12} & 0 \leq s < 2 \quad \textit{linea B} \\ \int_o^{s-2} \frac{1}{3}1dy + \int_{s-2}^{s} \frac{1}{3}\frac{s-y}{2}dy = \frac{s-1}{3} & 2 \leq s < 3 \quad \textit{linea C} \\ \int_o^{s-2} \frac{1}{3}1dy + \int_{s-2}^{3} \frac{1}{3}\frac{s-y}{2}dy = 1 - \frac{(5-s)^2}{12} & 3 \leq s < 5 \quad \textit{linea D} \\ 1 & s \geq 5 \quad \textit{linea E} \end{cases}$$

∇

Para determinar la distribución de la suma de más de dos variables aleatorias, podemos usar el proceso de convolución iterativamente. Para $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ en donde las $X_i's$ son variables aleatorias independientes, F_i es la *f.d.* de X_i, y $F^{(k)}$ es la *f.d.* de $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, tendríamos

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1 \\ F^{(3)} &= F_3 * F^{(2)} \\ F^{(4)} &= F_4 * F^{(3)} \\ &\vdots \\ F_S &= F^{(n)} = F_n * F^{(n-1)}. \end{aligned}$$

El ejemplo 2.2 ilustra este procedimiento para tres variables aleatorias discretas. Identificamos una distribución de variables aleatorias ($F_i = F$, $i = 1, 2, \cdots, n$) esta distribución es llamada convolución de F y es denotada por F^{*n}.

Ejemplo 2.2:

Las variables aleatorias X_1, X_2 y X_3 son independientes con distribuciones definidas por las Columnas (1), (2) y (3) del cuadro. Derive la *f.d.* de la *f.p.* de $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Solución:

La notación del párrafo anterior se utiliza en el cuadro:

- Las columnas (1) – (3) contienen la información ya proporcionada.
- La columna (4) es la *f.d.* de la columna (1).
- La columna (5) se deriva de las columnas (2) y (4) usando (2.30).

- La columna (6) se deriva de las columnas (3) y (5) usando (2.30).

La derivación de la columna (6) completa la determinación de la distribución de S, y su *f.p.* podría derivarse restando la columna (6). Con propósitos ilustrativos hemos incluido la columna (7), que puede derivarse de las columnas (1) y (2) usando (2.31). Entonces las columnas (3) y (7) pueden usarse en (2.31) para obtener la columna (8).

x	(1) $f_1(x)$	(2) $f_2(x)$	(3) $f_3(x)$	(4) $f_1(x)$	(5) $f^{(2)}(x)$	(6) $f^{(3)}(x)$	(7) $f^{(2)}(x)$	(8) $f^{(3)}(x)$
0	0.4	0.5	0.6	0.4	0.20	0.120	0.20	0.120
1	0.3	0.2	0.0	0.7	0.43	0.258	0.23	0.138
2	0.2	0.1	0.1	0.9	0.63	0.398	0.20	0.140
3	0.1	0.1	0.1	1.0	0.79	0.537	0.16	0.139
4	0.0	0.1	0.1	1.0	0.90	0.666	0.11	0.129
5	0.0	0.0	0.1	1.0	0.96	0.781	0.06	0.115
6	0.0	0.0	0.0	1.0	0.99	0.869	0.03	0.088
7	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	0.928	0.01	0.059
8	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	0.964	0.00	0.036
9	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	0.985	0.00	0.021
10	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	0.995	0.00	0.010
11	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	0.999	0.00	0.004
12	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	1.000	0.00	0.001

∇

Puede resultar muy complejo e involucrar numerosos cálculos, intentar varias iteraciones del proceso de convolución. En muchos casos, el resultado no puede representarse en alguna fórmula más simple que las expresadas anteriormente. Estas fórmulas son convenientes para utilizarse en calculadoras programables y computadoras.

Otro método para determinar la distribución de la suma de variables aleatorias independientes está basado en la singularidad de la ***función generadora de momentos*** (***f.g.m.***), la que, para la variable aleatoria X, se define como $M_X(t) = E[e^{tX}]$. Si esta esperanza es finita para toda t en un intervalo abierto, entonces $M_X(t)$ es la única *f.g.m.* de la distribución de X y no es la *f.g.m.* de ninguna otra distribución. Esta singularidad puede emplearse en la siguiente forma: para la suma $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tenemos

$$M_S(t) = E[e^{tS}] = E[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}]$$

$$= E[e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_n}] \qquad (2.35)$$

Sí $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son independientes, entonces la esperanza del producto de (2.35) es igual a

$$E[e^{tX_1}]E[e^{tX_2}]\cdots E[e^{tX_n}]$$

así que

$$M_S(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t). \tag{2.36}$$

El reconocimiento de la distribución singular que corresponde a (2.36) completaría la determinación de la distribución de las $S's$. Si no es posible la identificación mediante el reconocimiento, entonces deberá emplearse un proceso basado en matemáticas que está fuera de los alcances de este libro (véase la Sección 2.6).

2.4 Aproximaciones para la Distribución de la Suma.

El teorema del límite central sugiere un método para obtener valores numéricos para la distribución de la suma de variables aleatorias independientes. El planteamiento usual del teorema es para una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, $X_1, X_2, \cdots$, con $E[Xi] = \mu$ y $Var[x_i] = \sigma^2$. Para cada n, la distribución de $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ donde $\bar{X}_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$, tiene una media 0 y varianza 1. La secuencia de distribuciones ($n = 1, 2, \cdots$) se sabe que se aproxima a la distribución normal estándar. Cuando n es grande el teorema se aplica para aproximar la distribución de $\bar{X}_n$ con una distribución normal con media μ y varianza σ^2/n. En forma equivalente la distribución de la suma de las n variables aleatorias se aproxima mediante una distribución normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$. La efectividad de estas aproximaciones depende no solo del número de variables sino también de la desviación de los sumandos de la normalidad. Muchos libros de texto de estadística elemental recomiendan que n sea al menos 30 para que las aproximaciones resulten razonables. Una rutina utilizada para generar variables aleatorias normalmente distribuidas para simulación está basada en el promedio de sólo 12 variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en $(0, 1)$.

En muchos modelos de riesgo individual las variables aleatorias no están idénticamente distribuidas en la suma. Esto se ilustrará mediante ejemplos en la siguiente sección. El teorema del límite central se extiende a secuencias de variables aleatorias no distribuidas idénticamente.

Para ilustrar algunas aplicaciones del modelo de riesgo individual, usaremos una aproximación normal a la distribución de la suma de variables aleatorias independientes para obtener respuestas numéricas. Si

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

entonces

$$E[S] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k],$$

y además, bajo el supuesto de independencia,

$$Var[S] = \sum_{k=1}^{n} Var[X_k].$$

Para la aplicación sólo necesitamos

- evaluar las medias y varianzas de las variables aleatorias de pérdida individual,
- sumarlas para obtener la media y la varianza de la pérdidade la organización aseguradora como un todo,
- aplicar la aproximación normal.

En la siguiente sección se presentan ilustraciones de este proceso.

2.5 Aplicaciones a Seguros.

En esta sección tres ejemplos ilustran los resultados de la Sección 2.2 y el uso de la aproximación normal.

Ejemplo 2.3:

Una compañía de seguros expide contratos de vida a plazo de un año con beneficios por la cantidad de 1 y 2 unidades a individuos con probabilidades de morir de 0.02 o 0.10. El siguiente cuadro muestra el número de individuos n_k en cada uno de las cuatro clases creadas con un beneficio por la cantidad b_k, y una probabilidad de reclamación q_k.

k	q_k	b_k	n_k
1	0.02	1	500
2	0.02	2	500
3	0.10	1	300
4	0.10	2	500

La compañía desea recaudar, de esta población de 1,800 individuos, una cantidad igual al **95*th*** percentil de la distribución de las reclamaciones totales. Más aún, desea que la participación de cada individuo sea proporcional a la reclamación esperada por ese individuo. La participación del individuo j con media $E[X_j]$ sería $(1+\theta)E[X_j]$. El requisito del 95*th* percentil sugiere que $\theta > 0$. Esta cantidad extra, $\theta E[X_j]$, es el ***recargo prendario*** y θ es el ***recargo prendario relativo***. Calcule θ.

Solución:

El criterio para θ es $Pr(S \leq (1+\theta)E[S]) = 0.95$ en donde $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1,800}$. Esta probabilidad establecida es equivalente a obtener

$$Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} \leq \frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var[S]}}\right) = 0.95.$$

Siguiendo la discusión del teorema del límite central de la Sección 2.4, aproximaremos la distribución de $(S - E[S])/\sqrt{Var[S]}$ mediante la distribución normal estándar y el uso de su 95*th* percentil para obtener

$$\frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var[S]}} = 1.645.$$

Quedan por calcular la media y la varianza de S y calcular θ mediante esta ecuación.

Para las cuatro clases de individuos asegurados, tenemos los resultados que se muestran abajo.

			Media	*Varianza*	
k	q_k	b_k	$b_k q_k$	$b_k^2 q_k(1-q_k)$	n_k
1	0.02	1	0.02	0.0196	500
2	0.02	2	0.04	0.0784	500
3	0.10	1	0.10	0.0900	300
4	0.10	2	0.20	0.3600	500

Entonces

$$E[S] = \sum_{j=1}^{1,800} E[X_j] = \sum_{k=1}^{4} n_k \mu_k = 160$$

y

$$Var[S] = \sum_{j=1}^{1,800} Var[X_j] = \sum_{k=1}^{4} n_k \sigma_k^2 = 256.$$

Por lo tanto, el recargo prendario relativo es

$$\theta = 1.645 \frac{\sqrt{Var[S]}}{E[S]} = 1.645 \frac{16}{160} = 0.1645.$$

∇

Ejemplo 2.4:

Los tenedores de pólizas de una compañía aseguradora de automóviles se clasifican en dos clases.

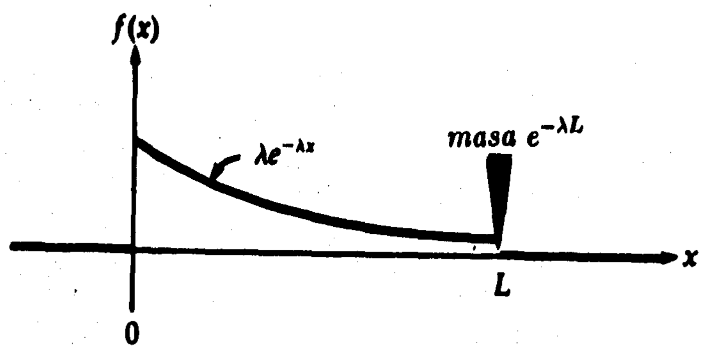
Clase k	Número en la Clase n_k	Probabilidad de Reclamacion q_k	Distribución del Monto de Reclamo, B_k, Parametros de la Exponencial Truncada λ	L
1	500	0.10	1	2.5
2	2,000	0.05	2	5.0

Se define una distribución exponencial truncada **mediante la *f.d.***

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & 0 \le x < L \\ 1 & x \ge L. \end{cases}$$

Esta es una distribución mixta con ***f.d.p.*** $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, 0 < x < L$, **y una masa de probabilidad** $e^{-\lambda L}$ en L. En la Figura 2.5 aparecen **la *f.d.p.* y la masa de probabilidad.**

Figura 2.5: Distribución exponencial truncada



Otra vez, la probabilidad de que las reclamaciones totales excedan la cantidad recaudada de los tenedores de pólizas es 0.05. Suponemos que el recargo prendario relativo, θ, será el mismo para las dos clases. Calcule θ.

Solución:

Este ejemplo es muy parecido al anterior. Difiere en que las cantidades de reclamación son variables aleatorias. Primero obtenemos fórmulas para los momentos de la distribución exponencial truncada como preparación para aplicar (2.26) y (2.27):

$$\begin{aligned}
\mu &= E[B|I=1] = \int_o^L x\lambda e^{-\lambda x}dx + Le^{-\lambda L} = \frac{1-e^{-\lambda L}}{\lambda} \\
E[B^2|I=1] &= \int_o^L x^2\lambda e^{-\lambda x}dx + L^2e^{-\lambda L} = \frac{2}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda L}) - \frac{2L}{\lambda}e^{-\lambda L} \\
\sigma^2 &= E[B^2|I=1] - (E[B|I=1])^2 = \frac{1-2\lambda Le^{-\lambda L} - e^{-2\lambda L}}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Usando los valores de los parámetros dados y aplicando las fórmulas (2.26) y (2.27) obtenemos los siguientes resultados.

k	q_x	μ_k	σ_k^2	Media $q_k\mu_k$	Varianza $\mu_k^2 q_k(1-q_k)+\sigma^2 q_k$	n_k
1	0.10	0.9179	0.5828	0.09179	0.13411	500
2	0.05	0.5000	0.2498	0.02500	0.02436	2,000

Entonces S, la suma de las reclamaciones, tiene momentos

$$E[S] = 500(0.09179) + 2000(0.02500) = 95.89$$

$$Var[S] = 500(0.13411) + 2000(0.02436) = 115.78.$$

El criterio de θ es el mismo que el del Ejemplo 2.3,

$$Pr(S \leq (1+\theta)E[S]) = 0.95.$$

Otra vez mediante la aproximación normal,

$$\frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var[S]}} = 1.645$$

y

$$\theta = \frac{1.645\sqrt{115.78}}{95.89} = 0.1846.$$

∇

Ejemplo 2.5:

Una compañía de seguros de vida cubre 16,000 vidas por un plazo de un año en las cantidades que se señalan acontinuación.

Monto de Beneficios b_k	Número Cubierto n_k
10,000	8,000
20,000	3,500
30,000	2,500
50,000	1,500
100,000	500

La probabilidad de una reclamación q_k para cada una de las 16,000 vidas, que se supone son mutuamente independientes, es 0.02. La compañía quiere establecer un límite de retención . Por cada vida, el *límite de retención* es la cantidad abajo de la cual esta compañía (*transferente*) retendrá el seguro y por encima de la cual comprará el *reaseguro* de otra compañia (*reaseguradora*). Por ejemplo, si el límite de retención es 20,000, la compañía retiene hasta 20,000 en cada vida y compra reaseguro para el excedente a partir esa cantidad para cada uno de los 4,500 individuos con montos de beneficios superiores a 20,000. Como criterio de decisión la compañía desea minimizar la probabilidad de que las reclamaciones retenidas más la cantidad que paga por el reaseguro excedan 8,250,000. El reaseguro está disponible a un costo de 0.025 por unidad de cobertura (a 125% de la cantidad de reclamación esperada por unidad, 0.02). Consideraremos el paquete del negocio como cerrado. Las nuevas pólizas vendidas durante el año no pueden entrar a este proceso de decisión. Calcule el límite de retención que minimice la probabilidad de que las reclamaciones retenidas por la compañías el costo del reaseguro excedan 8,250,000.

Solución parcial:

Primero, hagamos todos los cálculos en unidades beneficio de 10,000. Como paso ilustrativo sea S la cantidad de reclamaciones retenidas pagadas cuando el límite de retención es 2(20,000). Nuestra cartera de negocios retenidos está dado por

Monto Retenido b_k	Número Cubierto n_k
1	8,000
2	8,000

$$E[S] = \sum_{k=1}^{2} n_k b_k q_k = 8,000(1)(0.02) + 8,000(1)(0.02) = 480$$

y

$$\begin{aligned} Var[S] &= \sum_{k=1}^{2} n_k b_k^2 q_k (1 - q_k) \\ &= 8,000(1)(0.02)(0.98) + 8,000(4)(0.02)(0.98) = 784. \end{aligned}$$

Además de las reclamaciones retenidas, S, tenemos el costo de las primas de reaseguro. La cobertura total del plan es

$$8,000(1) + 3,500(2) + 2,500(3) + 1,500(5) + 500(10) = 35,000.$$

La cantidad retenida es

$$8,000(1) + 8,000(2) = 24,000.$$

Por lo tanto, la cantidad total reasegurada es $35,000 - 24,000 = 11,000$ y el costo de reaseguro es $11,000(0.025) = 275$. Por lo tanto, con el límite de retención de 2, las reclamaciones retenidas más el costo de reaseguro es $S + 275$. El criterio de decisión se basa en la probabilidad de que este costo total excederá 825,

$$\begin{aligned} Pr(S + 275 > 825) &= Pr(S > 550) \\ &= Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} > \frac{550 - E[S]}{\sqrt{Var[S]}}\right) \\ &= Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} > 2.5\right). \end{aligned}$$

Utilizando la distribución normal tenemos que esto es aproximadamente 0.0062. La solución se completa en los Ejercicios 2.13 y 2.14 ∇

2.6 Notas y Referencias

La base del material de las Secciones 2.2, 2.3 y 2.4 pueden encontrarse en varios textos de probabilidad y estadística. Mood et al. (1974) probaron los teoremas dados en las fórmulas (2.2)y (2.12). También presentan una extensa discusión de los métodos matemáticos avanzados para derivar la función de distribución que corresponde a una función generadora de momentos determinada, véase Bellman et al. (1966).

DeGroot (1986) presenta la discusión de varias condiciones bajo las que se sustenta el teorema del límite central. Kendally Stuart (1977) proporcionan material sobre *expansiones normales de potencia* que pueden considerarse como modificaciones de la aproximación normal para mejorar los resultados numéricos. Bowers (1967) también describe el uso de las expansiones normal es de potencia y da una aplicación para aproximar la distribución de los valores presentes para una cartera anual.

2.7 Ejercicios

Sección 2.2

2.1 Utilice (2.4) y (2.5) para obtener la media y la varianza de la variable aleatoria de reclamaciones X en donde $q = 0.05$ y la cantidad de reclamaciones está fijada en 10.

2.2 Obtener la media y la varianza de la variable aleatoria de reclamaciones X en donde $q = 0.05$ y la variable aleatoria de reclamaciones B esta distribuida uniformemente entre 0 y 20.

2.3 Sea X el número de águilas observadas en cinco tiradas de una moneda. Después, se arrojan X dados verdaderos. Sea Y la suma de los números que salen en los dados. Determine la media y la varianza de Y [Sugerencia: aplique (2.11) y (2.12).]

2.4 Sea X el número que sale cuando se arroja un dado sin cargar. Sea Y el número de águilas que se obtienen cuando se arrojan X monedas sin cargar. Calcule $E[Y]$ y $Var[Y]$.

2.5 Sea X el número que se obtiene cuando se arroja un dado sin cargar. Sea Y la suma de los números obtenidos cuando se tiran después X dados sin cargar. Calcule E[Y] y Var[Y].

2.6 La probabilidad de un incendio en una cierta estructura en un tiempo determinado es 0.02. Si ocurre un incendio, el daño a la estructura está distribuido uniformemente en el intervalo de 0 a su valor total,

a. Calcule la media y varianza del daño del incendio a la estructura dentro del periodo de tiempo.

Sección 2.3

2.7 Las variables aleatorias independientes X_k para cuatro vidas tienen las funciones discretas de probabilidad que se muestran abajo.

x	$Pr(X_1 = x)$	$Pr(X_2 = x)$	$Pr(X_3 = x)$	$Pr(X_4 = x)$
0	0.6	0.7	0.6	0.9
1	0.0	0.2	0.0	0.0
2	0.3	0.1	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.4	0.0
4	0.1	0.0	0.0	0.1

Utilice un proceso de convolución en los valores enteros , positivos de x para obtener $F_S(x)$ para $x = 0, 1, 2, \cdots, 13$ en donde $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

2.8 Sea X_i para $i = 1, 2, 3$ independiente e idénticamente distribuida con la *f.d.*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

Sea $S = X_1 + X_2 + X_3$.

a. Demuestre que $F_S(x)$ está dada por

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/6 & 0 \leq x < 1 \\ \left[x^3 - 3(x-1)^3\right]/6 & 1 \leq x < 2 \\ \left[x^3 - 3(x-1)^3 + 3(x-2)^3\right]/6 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

b. **Demuestre que** $E[S] = 1.5$ y $Var[S] = 0.25$.

c. **Evalúe las siguientes probabilidades usando la *f.d.* de la parte (a).**

$$\begin{array}{ll} (i) & Pr(S \leq 0.5) \\ (ii) & Pr(S \leq 1.0) \\ (iii) & Pr(S \leq 1.5) \end{array}$$

2.9 Considere tres variables aleatorias independientes X_1, X_2, X_3. **Cada una tiene una distribución** exponencial con $E[X_i] = i$, $i = 1, 2, 3$. Derive la *f.d.p.* **de** $S = X_1 + X_2 + X_3$

a. mediante el proceso de convolución

b. a partir de la *f.g.m.* de S usando fracciones parciales.

Sección 2.4

2.10 Calcule la media y la varianza de X y Y del Ejemplo 2.1. **Utilice la distribución normal para** aproximar $Pr(X + Y > 4)$. **Compárelo con la respuesta exacta.**

2.11 a. Use el teorema del límite central **para calcular b, c y d, para una a determinada, en la proposición**

$$Pr\left[\sum_1^n X_i \geq n\mu + a\sqrt{n}\sigma\right] \cong c + b\Phi(d)$$

en donde las X_i' **son independientes e idénticamente distribuidas con una media μ y varianza σ^2** y $\Phi(z)$ **es la *f.d.* de la distribución normal estándar.**

b. **Evalúe las probabilidades de (2.8.c) usando la aproximación normal desarrollada en la parte (a).**

2.12 **La variable aleatoria U tiene una *f.g.m.***

a. Use la *f.g.m.* para calcular la media y la varianza de U.

b. Use una aproximación normal para calcular los puntos $y_{0.05}$ y $y_{0.01}$ tales que $Pr(U > y_\epsilon) = \epsilon$.

Notése que la variable aleatoria U tiene una distribución Gamma con parámetros $\alpha = 9$ y $\beta = 1/2$. Las distribuciones Gamma con $\alpha = n/2$ y $\beta = 1/2$ son distribuciones ji-cuadrada con n grados de libertad. Por lo tanto U tiene un distribución ji-cuadrada con 18 grados de libertad. De las tablas de *f.d.* de las distribuciones ji-cuadrada, obtenemos $y_{0.05} = 28.869$ y $y_{0.01} = 34.805$.

Sección 2.5

2.13 Calcule la probabilidad de que el costo total del ejemplo 2.5 exceda $8,250,000$ si el límite de retención es

a. $30,000$ b. $50,000$.

2.14 Calcule el límite de retención que minimice la probabilidad de que el costo total del Ejemplo 2.5 exceda $8,250,000$. Suponga que el límite está entre $30,000$ y $50,000$.

2.15 Una compañía aseguradora contra incendios cubre 160 estructuras en contra de daños por incendio hasta una cantidad establecida en el contrato. El número de contratos y las cantidades contratadas se dan en el siguiente cuadro:

Cantidad Contratada	Número de Contratos
10,000	80
20,000	35
30,000	25
50,000	15
100,000	5

Suponga, que para cada una de las estructuras, la probabilidad de una reclamación dentro del periodo de un año es de 0.04 y que la probabilidad de más de una reclamación es 0. Suponga que los incendios en las estructuras son eventos mutuamente independientes. Todavía más, suponga que la distribución condicional del tamaño de la reclamación, suponiendo que ya ocurrió una reclamación, está uniformemente distribuida sobre el intervalo de 0 a la cantidad contratada. Sea N el número de reclamaciones y S la cantidad de reclamaciones en el periodo de un año.

a. Calcule la media y la varianza de N.

b. Calcule la media y la varianza de S.

c. ¿ Cual recargo prendario relativo, θ debería usarse en tal forma que la compañía pueda cobrar una cantidad igual al $99th$ percentil de la distribución de las reclamaciones totales ?(Utilice una aproximación normal.)

2.16 Considere una cartera de 32 pólizas. Para cada póliza, la probabilidad q de una reclamación es 1/6 y B, la cantidad beneficiada dado que existe una reclamación, tiene una *f.d.p.*

$$F(y) = \begin{cases} 2(1-y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \textit{Otro Caso.} \end{cases}$$

Sea S las reclamaciones totales de la cartera. Utilizando una aproximación normal, estime $Pr(S > 4)$.

Capítulo 3

DISTRIBUCIONES DE SOBREVIVENCIA Y TABLAS DE VIDA

3.1 Introducción

El Capítulo 1 estuvo dedicado a mostrar cómo el seguro puede incrementar la utilidad esperada de los individuos que enfrentan pérdidas aleatorias. En el Capítulo 2 se desarrollaron modelos simples para pólizas de seguro de un periodo único. Las bases de estos modelos fueron las variables aleatorias de Bernoulli asociadas con la ocurrencia o no de una pérdida. La ocurrencia de una pérdida, en algunos ejemplos, resulto en un segundo proceso, generando el monto de la perdida. Los Capítulos del 4 al 7 tendrán que ver principalmente con los modelos referidos a sistemas de seguros diseñados para manejar pérdidas aleatorias en donde la aleatoriedad está relacionada con el tiempo de sobrevivencia individual. En estos capítulos la variable aleatoria del ***tiempo transcurrido hasta el fallecimiento***, $T(x)$, será la pieza fundamental. Este capítulo desarrollará un conjunto de ideas para describir y utilizar la distribución del tiempo transcurrido hasta el fallecimiento, y la distribución de la edad al fallecimiento, X correspondiente.

Demostraremos cómo la distribución de la variable aleatoria, edad al fallecimiento, puede resumirse mediante una *tabla de vida.* Dichas tablas son útiles en muchos campos de la ciencia. Consecuentemente se ha desarrollado una profusa notación y nomenclatura entre las diversas profesiones que las utilizan. Por ejemplo, los ingenieros las utilizan para estudiar la confiabilidad de sistemas mecánicos y electrónicos complejos. Los bioestadísticos lo hacen para comparar la efectividad de tratamientos alternativos de enfermedades graves. Los demográfos se valen de ellas como herramientas en las proyecciones de población. En este texto, las tablas de vida se utilizarán para construir modelos para sistemas de seguros diseñados para ayudar a los individuos a enfrentar las incertidumbres relativas a la fecha de su muerte. Esta aplicación determinará el punto de vista adoptado. Sin embargo, cuando las tablas de vida proporcionen un puente con otras disciplinas, se añadirán notas relativas para aplicaciones alternativas.

Una tabla de vida es un componente indispensable de muchas modelos en la ciencia actuarial. De hecho, algunos académicos sitúan la fecha de inicio de la ciencia actuarial en 1693. En ese año, Edmund Halley publicó "Una estimación de los grados de mortalidad de la humanidad, tomado de varias tablas de nacimientos y funerales de la ciudad de Breslau." La tabla de vida, llamada Tabla de Breslau, contenida en el estudio de Halley continúa teniendo interés debido a su notación e ideas sorprendentemente modernas.

3.2 Probabilidad para la Edad al Fallecimiento.

En esta sección formulamos la incertidumbre de la *edad al fallecimiento* en términos de probabilidad.

3.2.1 La Función de Sobrevivencia

Consideremos a un niño recién nacido. La *edad al fallecimiento* de este recién nacido, X, es una variable aleatoria de tipo continuo. Permitamos que $F(x)$ represente la *f.d.* de X,

$$F(x) = Pr(X \leq x) \qquad x \geq 0, \tag{3.1}$$

y asentemos que

$$s(x) = 1 - F(x) = Pr(X > x) \qquad x \geq 0. \tag{3.2}$$

Siempre supondremos que $F(0) = 0$, lo que implica $s(0) = 1$. La función $s(x)$ se denomina ***función de sobrevivencia.*** Para cualquier x positiva, $s(x)$ es la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad x. La distribución de X puede definirse especificando ya sea la función $F(x)$ o la función $S(x)$. En la ciencia actuarial y la demografía, la función de sobrevivencia tradicionalmente se ha utilizado como punto de partida para desarrollos. Para la probabilidad y la estadística, la *f.d.* generalmente juega ése papel. Sin embargo, de las propiedades de la *f.d.*, puede uno deducir propiedades correspondientes a la función de sobrevivencia.

Utilizando las leyes de probabilidad, puede uno hacer planteamientos de probabilidad acerca de la *edad al fallecimiento* en términos ya sea de la función de sobrevivencia o de la función de distribución. Por ejemplo, la probabilidad de que un recién nacido muera entre la edad x y $z(x < z)$ es

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leq z) &= F(z) - F(x) \\ &= s(x) - s(z). \end{aligned}$$

3.2.2 Tiempo Transcurrido hasta el Fallecimiento para una Persona de Edad x

La probabilidad condicional de que un recién nacido muera entre las edades x y z, dada la sobrevivencia a la edad x, es

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leq z | X > x) &= \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(z)}{s(x)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

El símbolo (x) se usará para denotar una *vida de x años.* El tiempo futuro de vida de (x), $X - x$, también se denotará con $T(x)$.

En la ciencia actuarial, frecuentemente, es necesario hacer proposiciones de probabilidad acerca de $T(x)$. Con este propósito, y para promover la investigación y la comunicación, originalmente se adoptó un conjunto de símbolos, que forman parte de la Notación Internacional Actuarial, por el Congreso Internacional Actuarial de 1898. Se establecieron símbolos para funciones actuariales comunes y lineamientos para adoptar nuevos símbolos. Desde entonces este sistema ha estado sujeto a constantes revisiones y el Comité Permanente de Notación de la Asociación Internacional Actuarial, revisa o amplía lo que resulta necesario. Hasta donde sea posible, se seguirán estas notaciones convencionales.

Estos símbolos difieren de los que utiliza la notación de probabilidad, y el lector puede no estar familiarizado con ellos. Por ejemplo, una función de una sola variable que se escribiría $q(x)$ en la notación de probabilidad en este sistema se escribe q_x. De la misma manera, una función multivariada se escribe en notación actuarial usando combinaciones de subíndices, índices y otros símbolos. Las reglas generales para definir una función en la notación actuarial se dan en el *Anexo* 4. El lector puede estudiar estas formas, si a si lo desea, antes de continuar con las discusiones del texto sobre la variable aleatoria el *tiempo de vida futuro.*

Para hacer planteamientos de probabilidad acerca de $T(x)$, tenemos las notaciones

$${}_tq_x = Pr[T(x) \leq t] \qquad t \geq 0 \tag{3.4}$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = Pr[T(x) > t] \qquad t \geq 0. \tag{3.5}$$

El símbolo ${}_tq_x$ puede interpretarse como la probabilidad de que (x) muera dentro de t años; es decir, ${}_tq_x$ es la función de distribución $T(x)$. Por otra parte, ${}_tp_x$ puede interpretarse como la probabilidad de que (x) alcance la edad $x + t$; es decir ${}_tp_x$ es la función de sobrevivencia para (x). En el caso específico de una vida de edad 0, tenemos $T(0) = X$ y

$$ {}_xp_o = s(x) \qquad x \geq 0. \tag{3.6}$$

Si $t = 1$, la convención nos permite omitir el prefijo en los símbolos definidos en (3.4) y (3.5), y tenemos

$$\begin{aligned} q_x &= Pr[(x)\text{muera en el término de un año}] \\ p_x &= Pr[(x)\text{alcance la edad } x+1]. \end{aligned}$$

Existe un símbolo especial para el evento más general de que (x) sobreviva t años y muera dentro de los siguientes u años; es decir que (x) muera entre las edades $x+t$ y $x+t+u$. Este símbolo especial está dado por

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= Pr[t < T(x) \leq t+u] \\ &= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como antes si $u = 1$, se elimina el prefijo en ${}_{t|u}q_x$ y tenemos ${}_{t|}q_x$.

En este punto parece que existen dos expresiones para la probabilidad de que (x) muera entre la edades x y $x+u$. La fórmula (3.7) con $t = 0$ es una de ellas, (3.3) con $z = x+u$ es la otra. ¿ Son diferentes estas dos probabilidades ? La (3.3) puede interpretarse como la probabilidad condicional de que un recién nacido muera entre la edad x y $z = x+u$, dada la edad de sobrevivencia x. La única información sobre el recién nacido, actualmente de edad x, es su sobrevivencia a esa edad. Por lo tanto el planteamiento de probabilidad está basado en una distribución condicional de la sobrevivencia de los recién nacidos.

Por otra parte, (3.7) con $t = 0$ define la probabilidad de que una *vida observada* a la edad x, muera entre la edad x y $x+u$. La observación de una vida a la edad, x, podría incluir otra información además de la simple sobrevivencia. Esta podría ser que la vida acaba de pasar un examen físico para el seguro, o podría ser que la vida ha iniciado un tratamiento debido a una enfermedad seria. Las tablas de vida en las que la observación de una vida en la edad x implica más que la simple sobrevivencia de un recién nacido a la edad x se discutirán en las Sección 3.8. En esta sección continuaremos el desarrollo de la teoría sin más referencias a la distinción entre (3.3) y (3.7). La observación de sobrevivencia a la edad x producirá la misma distribución condicional ya que la hipótesis de que un recién nacido sobrevive a la edad de x es decir,

$$ {}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_o}{{}_xp_o} = \frac{s(x+t)}{s(x)} \tag{3.8}$$

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}. \tag{3.9} $$

Bajo este enfoque, (3.7), y sus múltiples casos especiales pueden expresarse como

$$ \begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x+t)} \\ &= {}_tp_x \, {}_uq_{x+t}. \end{aligned} \tag{3.10} $$

3.2.3 Tiempo de Vida Futuro Truncado

Una variable aleatoria discreta asociada con el tiempo de vida futuro es el número de años futuros completados por (x) antes de su muerte o el tiempo de vida futuro truncado de (x). Esta variable aleatoria, $K(x)$, tiene la *f.p.*

$$ \begin{aligned} Pr[K(x) = k] &= P[k \leq T(x) < k+1] \\ &= Pr[k < T(x) \leq k+1] \\ &= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\ &= {}_kp_x \, q_{x+k} = {}_{k|}q_x \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{3.11} $$

El cambio de desigualdades es posible ya que, bajo nuestro supuesto de que $T(x)$ es una variable aleatoria de tipo contínuo $Pr[T(x) = k] = Pr[T(x) = k+1] = 0$. La expresion (3.11) es un caso especial de (3.7) en donde $u = 1$ y k es un entero positivo. De (3.11) podemos ver que la *f.d.* de $K(x)$ es la función escalonada

$$ \sum_{h=0}^{k} {}_{h|}q_x = {}_{k+1}q_x, \ k = 0, 1, 2, \cdots $$

De este contexto frecuentemente se sigue que $T(x)$ es el tiempo de vida futuro de (x), en cuyo caso podemos escribir T en lugar de $T(x)$. De la misma forma podemos escribir K en lugar de $K(x)$.

3.2.4 La Fuerza de la Mortalidad

La fórmula (3.3) expresa, en términos de la *f.d.* y en los de la función de sobrevivencia, la probabilidad condicional de que (0) muera entre la edad de x y z dada la sobrevivencia a x. Manteniendo constantes $z - x$, digamos en c, considerada posteriormente como función de x, esta probabilidad condicional describe la distribución de la probabilidad de muerte en el futuro inmediato (entre el tiempo 0 y c) para una vida que alcanzó la edad x. Se puede obtener una función análoga para la muerte instantánea utilizando la densidad de probabilidad de muerte a la edad alcanzada x, es decir, usando (3.3) con $z = x + \Delta x$,

$$\begin{aligned} Pr[x < X \leq x + \Delta x | X > x] &= \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &\cong \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

En esta expresión $F'(x) = f(x)$ es la *f.d.p.* de la variable aleatoria contínua de la edad a la muerte. La función

$$\frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

en (3.12) tiene una interpretación condicional de la densidad de probabilidad. Para cada edad x, proporciona el valor de la *f.d.p.* condicional de X a la edad exacta de x, dada la sobrevivencia en esa edad. Se denota como μ_x. Tenemos

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{f(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{-s'(x)}{s(x)}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Las propiedades de $f(x)$ y de $1 - F(x)$ implican que $\mu_x \geq 0$.

En la ciencia actuarial y en demografía μ_x se denomina *fuerza de la mortalidad* . En la teoría de la confiabilidad, el estudio de las probabilidades de sobrevivencia de partes manufacturadas y de sistemas, μ_x se denomina *tasa de fracasos* o *tasa de azar* o, más completamente *función de tasas de azar*.

Así como es válido para la función de sobrevivencia, la fuerza de la mortalidad puede usarse para especificar la función de distribución de X. Para obtener este resultado, empezamos con (3.13), cambiemos x por y y arreglemos la expresión para obtener

$$-\mu_y dy = d \log s(y).$$

Integrando la expresión de x a $x+n$, tenemos

$$\begin{aligned} -\int_x^{x+n} \mu_y dy &= \log\left[\frac{s(x+n)}{s(x)}\right] \\ &= \log {}_n p_x \end{aligned}$$

y al tomar exponentes se obtiene

$$ {}_n p_x = \exp\left(-\int_x^{x+n} \mu_y dy\right). \tag{3.14}$$

Algunas veces es conveniente volver a expresar (3.14), con $s = y - x$, como

$$ {}_n p_x = \exp\left(-\int_o^{n} \mu_{x+s} ds\right). \tag{3.15}$$

En especial, cambiaremos la notación para que sea congruente con la que se usó en (3.6) estableciendo la edad ya vivida en 0 y denotando el tiempo de sobrevivencia con x. Entonces tenemos

$$ {}_n p_o = s(x) = \exp\left(-\int_o^{x} \mu_s ds\right). \tag{3.16}$$

Además

$$F(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp\left(-\int_o^{x} \mu_s ds\right). \tag{3.17}$$

y

$$\begin{aligned} F'(x) = f(x) &= \exp\left(-\int_o^{x} \mu_s ds\right)\mu_x \\ &= {}_x p_o \mu_x. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Déjemos que $G(t)$ y $g(t)$ denoten, respectivamente, la *f.d.* y la *f.d.p.* de $T(x)$, el tiempo futuro de vida de (x). A partir de (3.4) sabemos que $G(t) = {}_tq_x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{d}{dt}{}_tq_x \\ &= \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right] \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)}\left[-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}\right] \\ &= {}_tp_x\,\mu_{x+t} \qquad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por lo tanto, ${}_tp_x\,\mu_{x+t}dt$ es la probabilidad de que (x) muera entre t y $t+dt$, y

$$\int_0^\infty {}_tp_x\,\mu_{x+t}dt = 1$$

en donde el límite superior de la integral está escrito como infinito positivo (una abreviación para integrar sobre toda la probabilidad de densidad positiva).

De (3.19) se sigue que

$$\frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = -\frac{d}{dt}{}_tp_x = {}_tp_x\,\mu_{x+t} \tag{3.20}$$

Esta forma equivalente es útil para varios desarrollos en matemáticas actuariales.

Ya que

$$\lim_{n\to\infty} {}_np_x = 0,$$

tenemos

$$\lim_{n\to\infty}(-\log {}_np_x) = \infty;$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\int_x^{x+n} \mu_y dy = \infty.$$

Tabla 3.1.1

Definiciones

Nombre del concepto	Símbolo
Variable aleatoria de la edad al fallecimiento	X
Vida de edad x	(x)
Variable aleatoria del tiempo transcurrido antes del fallecimiento Variable aleatoria del tiempo de vida futuro de (x) Variable aleatoria del tiempo de vida restante de (x)	T (x) o T

Los desarrollos de esta sección se resumen en las Tablas 3.1.1 y 3.1.2.

Tabla 3.1.2 Funciones de la teoría de probabilidad para edad al fallecimiento, X

	f.d. $F(x)$	f.d.p. $f(x)$	Función de Sobrevivencia $s(x)$	Fuerza de la Mortalidad μ_x
		Requisitos		
Para $x < 0$	$F(x) = 0$	$f(x) = 0$	$s(x) = 1$	$\mu_x = 0$
Para $x = 0$	$F(x) = 0$	$f(x) \geq 0$	$s(x) = 1$	$\mu_x \geq 0$
Para ≥ 0	decreciente	$f(x) \geq 0$	creciente	$\mu_x \geq 0$
$\lim_{x\to\infty}$	$F(\infty) = 1$	$\int_0^\infty f(x)dx = 1$	$s(\infty) = 0$	$\int_0^\infty \mu_x dx = \infty$
		Relaciones		
Función en términos de				
$F(x)$	$F(x)$	$F'(x)$	$1 - F$	$F'(x)/[1 - F(x)]$
$f(x)$	$\int_0^\infty f(x)ds$	$f(x)$	$1 - \int_0^\infty f(s)ds$	$f(x)/\int_x^\infty f(s)ds$
$s(x) =_x p_o$	$1 - s(x)$	$-s'(x)$	$s(x)$	$-s'(x)/s(x)$
μ_x	$1 - e^{(-\int_0^x \mu_s ds)}$	$e^{(-\int_0^x \mu_s ds)}\mu_x$	$e^{(-\int_0^x \mu_s ds)}$	μ_x

La porción media inferior del Tabla 3.1.2 resume algunas de las relaciones entre las funciones de la teoría general de probabilidad y las específicas para aplicaciones para la *edad al fallecimiento*. Existen otros muchos ejemplos en los que las cuestiones de edad a la muerte pueden formarse en el escenario de probabilidad más general. Lo siguiente ilustra este punto.

Ejemplo 3.1:

Si $\bar{A}$ se refiere al complemento del evento A dentro del espacio muestral y $Pr(\bar{A}) \neq 0$, lo siguiente expresa una identidad en teoría de la probabilidad:

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(\bar{A})Pr(B|\bar{A}).$$

Reescriba esta identidad en notación actuarial para los eventos $A = [T(x) \leq t]$ y $B = [t < T(x) \leq 1], 0 < t < 1$.

Solución:

$Pr(A \cup B)$ se transforma en $Pr[T(x) \leq 1] = q_x$, $Pr(A)$ es ${}_tq_x$ y $Pr(B|\bar{A})$ es ${}_{1-t}q_{x+t}$, por tanto

$$q_x = {}_tq_x + {}_tp_x \, {}_{1-t}q_{x+t}.$$

∇

3.3 Tablas de Vida

Las tablas de vida que se publican contienen usualmente tabulaciones, por edades individuales, de las funciones básicas q_x, l_x, d_x, y posiblemente funciones derivadas adicionales. Antes de presentar dicha tabla, examinaremos una interpretación de estas funciones que está directamente relacionada con las funciones de probabilidad discutidas en la sección precedente.

3.3.1 Relaciones entre las Funciones de las Tablas de Vida y las de Sobrevivencia

En (3.9) expresamos la probabilidad condicional de que (x) expirará dentro de t años por

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

y, en particular, tenemos

$$q_x = 1 - \frac{s(x+1)}{s(x)}.$$

Ahora consideramos un grupo de l_o recién nacidos, $l_o = 100{,}000$, por ejemplo. Cada edad al fallecimiento de los recién nacidos tiene una distribución especificada por la función de sobrevivencia $s(x)$.

En adición, sea $\mathcal{L}(x)$ el número de sobrevivientes de la cohorte a la edad x. Indexamos estas vidas con $j = 1, 2, \cdots, l_o$ y observamos que

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{j=1}^{l_o} I_j$$

en donde I_j es un indicador para la sobrevivencia del ser j; es decir,

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si el ser } j \text{ sobrevive a la edad } x \\ 0 & \text{si es de Otra Manera.} \end{cases}$$

Ya que $E[I_j] = s(x)$,

$$E[\mathcal{L}(x)] = \sum_{j=1}^{l_o} E[I_j] = l_o s(x).$$

Representemos $E[\mathcal{L}(x)]$ por l_x ; esto es, l_x representa el número esperado de los l_o recién nacidos sobrevivientes a la edad x, y tendremos

$$l_x = l_o s(x). \tag{3.21}$$

Además, bajo el supuesto de que los indicadores I_j son mutuamente independientes, $\mathcal{L}(x)$ tiene una distribución binomial con parámetros $n = l_o$ y $p = s(x)$. Note, sin embargo,que (3.21) no requiere del supuesto de independencia.

En un arreglo similar, ${}_n\mathcal{D}_x$ representará el número de muertes entre las edades x y $x + n$ de entre los seres iniciales l_o. Representaremos $E[{}_n\mathcal{D}_x]$ por ${}_nd_x$. Ya que un recién nacido tiene una probabilidad $s(x) - s(x + n)$ de morir entre las edades x y $x + n$ podemos, por un argumento similar al empleado para l_x, expresar

$$\begin{aligned} {}_nd_x = E[{}_n\mathcal{D}_x] &= l_o[s(x) - s(x+n)] \\ &= l_x - l_{x+n}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Cuando $n = 1$, omitimos el prefijo sobre ${}_n\mathcal{D}_x$ y ${}_nd_x$.

De (3.21), vemos que

$$-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = -\frac{1}{s(x)}\frac{ds(x)}{dx} = \mu_x \tag{3.23}$$

y

$$-dl_x = l_x\mu_x dx. \tag{3.24}$$

Ya que

$$l_x\mu_x = l_o\,{}_xp_o\mu_x = l_o f(x),$$

el factor $l_x\mu_x$ en (3.24) puede ser interpretado como la densidad esperada de muertes en el intervalo de edades $(x, x+dx)$. Notamos adicionalmente que

$$\begin{aligned} l_x &= l_o \exp(-\int_o^x \mu_y dy) && (3.25)\\ l_{x+n} &= l_x \exp(-\int_x^{x+n} \mu_y dy) && (3.26)\\ l_x - l_{x+n} &= \int_x^{x+n} l_y\mu_y dy. && (3.27) \end{aligned}$$

Ha habido pocas observaciones de edad al fallecimiento más allá de 110, para los seres humanos. Consecuentemente, se supone a menudo que hay una edad w tal que $s(x) > 0$ para $x < w$, y $s(x) = 0$ para $x \geq w$. La edad w, si se asume, se denomina la *edad límite.*

Por conveniencia, para referirse a este concepto de l_o recién nacidos, cada uno con función de sobrevivencia $s(x)$, lo denominaremos un *grupo aleatorio de sobrevivencia.*

3.3.2 Ejemplo de Tablas de Vida

En " La Tabla de Vida para la Población Total: Estados Unidos, 1979 – 1981 " (Tabla 3.2), las funciones ${}_tq_x$, l_x y ${}_td_x$ están presentadas con $l_o = 100,000$. Excepto para el primer año de vida, el valor de t en las funciones tabuladas ${}_tq_x$ y ${}_td_x$ es 1. Las otras funciones que aparecen en la tabla se discutirán en la Sección 3.5.

La tabla citada no fue construida observando 100,000 recién nacidos hasta el fallecimiento del último sobreviviente. En lugar de ello, se estimaron probabilidades de muerte, dada la sobrevivencia a varias edades, derivadas de la experiencia de la población total de Estados Unidos en los años cercanos al censo de 1980. Al usar el concepto de grupo aleatorio de sobrevivencia con esta tabla, debemos hacer la suposición de que las probabilidades derivadas de la tabla serán apropiadas para el tiempo de vida de los que pertenecen al grupo de sobrevivencia.

Varias observaciones acerca de la tabla en cuestión son instructivas.

Observaciones:

1. Se esperaría que muriera, aproximadamente, 1% de un grupo de sobrevivencia de recién nacidos durante el primer año de vida.
2. Se esperaría que cerca del 77% de un grupo de recién nacidos sobreviviera hasta la edad de 65 años.
3. Se esperaría que el número máximo de muertes dentro de un grupo ocurra a la edad de 83 años.
4. La edad límite no esta definida. Está claro que hay una probabilidad de sobrevivencia a la edad de 110 años, pero la tabla no indica la edad w donde $s(w) = 0$.
5. Los mínimos locales del número esperado de muertes ocurren alrededor de las edades 11 y 27.
6. Aunque los valores de l_x han sido redondeados a enteros, de acuerdo con (3.21) no hay razones que obliguen a hacerlo así.

Una presentación como la de la Tabla 3.2 es el método convencional para describir la distribución de la edad al fallecimiento. Alternativamente, una función de sobrevivencia podría describirse en una forma analítica, como $s(x) = e^{-cx}, c > 0, x \geq 0$. Sin embargo, la mayoría de los estudios de la mortalidad humana para propósitos de seguros utiliza la representacion $s(x) = l_x/l_o$, como se ilustra en la Tabla 3.2. Como $100,000s(x)$ se presenta sólo para valores enteros de x, no hay necesidad de interpolar para evaluar $s(x)$ para valores fraccionarios. Esto será tema de la Seccion 3.6.

Ejemplo 3.2:

Sobre la base de la tabla 3.2, evalúe la probabilidad de que (20)

a. Viva hasta 100 años

b. Muera antes de los 70

c. Muera en la décima década de su vida.

Solución:

a. $\frac{s(100)}{s(20)} = \frac{l_{100}}{l_{20}} = \frac{1150}{97,741} = 0.0118$

b. $\frac{[s(20)-s(70)]}{s(20)} = 1 - \frac{l_{70}}{l_{20}} = 1 - \frac{68,248}{97,741} = 0.3017$

c. $\frac{[s(90)-s(100)]}{s(20)} = \frac{(l_{90}-l_{100})}{l_{20}} = \frac{(14,154-1150)}{97,741} = 0.1330$

∇

La comprensión de las funciones de las tablas de vida puede obtenerse estudiando las figuras 3.1, 3.2 y 3.3. Estas se han dibujado para que representen la mortalidad humana común y no se toman directamente de la Tabla 3.2.

En la Figura 3.1 apreciamos que

- La fuerza de mortalidad es positiva y el requisito

$$\int_{o}^{\infty} \mu_x dx = \infty$$

se satisface. (Veáse Tabla 3.1.2)

Tabla 3.2
Tabla de Vida para la Población Total : Estados Unidos, 1979 - 1981.

(1) x	(2) ${}_tq_x$	(3) l_x	(4) ${}_td_x$	(5) ${}_tL_x$	(6) T_x	(7) $\mathring{e}_x$
DIAS						
0 - 1	0.00463	100,000	463	273	7,387,758	73.88
1 - 7	0.00246	99,537	245	1,635	7,387,485	74.22
7 - 28	0.00139	99,292	138	5,708	7,385,850	74.38
28 -365	0.00418	99,154	414	91,357	7,380,142	74.43
AÑOS						
0 - 1	0.01260	100,000	1260	98,973	7,387,758	73.88
1 - 2	0.00093	98,740	92	98,694	7,288,785	73.82
2 - 3	0.00065	98,648	64	98,617	7,190,091	72.89
3 - 4	0.00050	98,584	49	98,560	7,091,474	71.93
4 - 5	0.00040	98,535	40	98,515	6,992,914	70.97
5 - 6	0.00037	98,495	36	98,477	6,894,399	70.00
6 - 7	0.00033	98,459	33	98,442	6,795,922	69.02
7 - 8	0.00030	98,426	30	98,412	6,697,480	68.05
8 - 9	0.00027	98,396	26	98,383	6,599,068	67.07
9 - 10	0.00023	98,370	23	98,358	6,500,685	66.08
10 - 11	0.00020	98,347	19	98,338	6,402,327	65.10
11 - 12	0.00019	98,328	19	98,319	6,303,989	64.11
12 - 13	0.00025	98,309	24	98,297	6,205,670	63.12
13 - 14	0.00037	98,285	37	98,266	6,107,373	62.14
14 - 15	0.00053	98,248	52	98,222	6,009,107	61.16
15 - 16	0.00069	98,196	67	98,163	5,910,885	60.19
16 - 17	0.00083	98,129	82	98,087	5,812,722	59.24
17 - 18	0.00095	98,047	94	98,000	5,714,635	58.28
18 - 19	0.00105	97,953	102	97,902	5,616,635	57.34
19 - 20	0.00112	97,851	110	97,796	5,518,733	56.40

Tabla 3.2
Tabla de V. para la Población Total : Estados Unidos, 1979 - 1981.

(1) x	(2) ${}_tq_x$	(3) l_x	(4) ${}_td_x$	(5) ${}_tL_x$	(6) T_x	(7) $\mathring{e}_x$
Años						
20 - 21	0.00120	97,741	118	97,682	5,420,937	55.46
21 - 22	0.00127	97,623	124	97,561	5,323,255	54.53
22 - 23	0.00132	97,499	129	97,435	5,225,694	53.60
23 - 24	0.00134	97,370	130	97,306	5,128,259	52.67
24 - 25	0.00133	97,240	130	97,175	5,030,953	51.74
25 - 26	0.00132	97,110	128	97,046	4,933,778	50.81
26 - 27	0.00131	96,982	126	96,919	4,836,732	49.87
27 - 28	0.00130	96,856	126	96,793	4,739,813	48.94
28 - 29	0.00130	96,730	126	96,667	4,643,020	48.00
29 - 30	0.00131	96,604	127	96,541	4,546,353	47.06
30 - 31	0.00133	96,477	127	96,414	4,449,812	46.12
31 - 32	0.00134	96,350	130	96,284	4,353,398	45.18
32 - 33	0.00137	96,220	132	96,155	4,257,114	44.24
33 - 34	0.00142	96,088	137	96,019	4,160,959	43.30
34 - 35	0.00150	95,951	143	95,880	4,064,940	42.36
35 - 36	0.00159	95,808	153	95,731	3,969,060	41.43
36 - 37	0.00170	95,655	163	95,574	3,873,329	40.49
37 - 38	0.00183	95,492	175	95,404	3,777,755	39.56
38 - 39	0.00197	95,317	188	95,224	3,682,351	38.63
39 - 40	0.00213	95,129	203	95,027	3,587,127	37.71
40 - 41	0.00232	94,926	220	94,817	3,492,100	36.79
41 - 42	0.00254	94,706	241	94,585	3,397,283	35.87
42 - 43	0.00279	94,465	264	94,334	3,302,698	34.96
43 - 44	0.00306	94,201	288	94,057	3,208,364	34.06
44 - 45	0.00335	93,913	314	93,756	3,114,307	33.16

Tabla 3.2
Tabla de V. para la Población Total : Estados Unidos, 1979 - 1981.

(1) x	(2) ${}_tq_x$	(3) l_x	(4) ${}_td_x$	(5) ${}_tL_x$	(6) T_x	(7) $\mathring{e}_x$
Años						
45 - 46	0.00366	93,599	343	93,427	3,020,551	32.27
46 - 47	0.00401	93,256	374	93,069	2,927,124	31.39
47 - 48	0.00442	92,882	410	92,677	2,834,055	30.51
48 - 49	0.00488	92,472	451	92,246	2,741,378	29.65
49 - 50	0.00538	92,021	495	91,773	2,649,132	28.79
50 - 51	0.00589	91,526	540	91,256	2,557,359	27.94
51 - 52	0.00642	90,986	584	90,695	2,466,103	27.10
52 - 53	0.00699	90,402	631	90,086	2,375,408	26.28
53 - 54	0.00761	89,771	684	89,430	2,285,322	25.46
54 - 55	0.00830	89,087	739	88,717	2,195,892	24.65
55 - 56	0.00902	88,348	797	87,950	2,107,175	23.85
56 - 57	0.00978	87,551	856	87,122	2,019,225	23.06
57 - 58	0.01059	86,695	919	86,236	1,932,103	22.29
58 - 59	0.01151	85,776	987	85,283	1,845,867	21.52
59 - 60	0.01254	84,789	1063	84,258	1,760,584	20.76
60 - 61	0.01368	83,726	1145	83,153	1,676,326	20.02
61 - 62	0.01493	82,581	1233	81,965	1,593,173	19.29
62 - 63	0.01628	81,348	1324	80,686	1,511,208	18.58
63 - 64	0.01767	80,024	1415	79,316	1,430,522	17.88
64 - 65	0.01911	78,609	1502	77,859	1,351,206	17.19
65 - 66	0.02059	77,107	1587	76,314	1,273,347	16.51
66 - 67	0.02216	75,520	1674	74,683	1,197,033	15.85
67 - 68	0.02389	73,846	1764	72,964	1,122,350	15.20
68 - 69	0.02585	72,082	1864	71,150	1,049,386	14.56
69 - 70	0.02806	70,218	1970	69,233	978,236	13.93

Tabla 3.2
Tabla de V. para la Población Total : Estados Unidos, 1979 - 1981.

(1) x	(2) ${}_tq_x$	(3) l_x	(4) ${}_td_x$	(5) ${}_tL_x$	(6) T_x	(7) $\mathring{e}_x$
Años						
70 - 71	0.03052	68,248	2083	67,206	909,003	13.32
71 - 72	0.03315	66,165	2193	65,069	841,797	12.72
72 - 73	0.03593	63,972	2299	62,823	776,728	12.14
73 - 74	0.03882	61,673	2394	60,476	713,905	11.58
74 - 75	0.04184	59,279	2480	58,039	653,429	11.02
75 - 76	0.04507	56,799	2560	55,520	595,390	10.48
76 - 77	0.04867	54,239	2640	52,919	539,870	9.95
77 - 78	0.05274	51,599	2721	50,238	486,951	9.44
78 - 79	0.05742	48,878	2807	47,475	436,713	8.93
79 - 80	0.06277	46,071	2891	44,626	389,238	8.45
80 - 81	0.06882	43,180	2972	41,694	344,612	7.98
81 - 82	0.07552	40,208	3036	38,689	302,918	7.53
82 - 83	0.08278	37,172	3077	35,634	264,229	7.11
83 - 84	0.09041	34,095	3083	32,553	228,595	6.70
84 - 85	0.09842	31,012	3052	29,486	196,042	6.32
85 - 86	0.10725	27,960	2999	26,461	166,556	5.96
86 - 87	0.11712	24,961	2923	23,500	140,095	5.61
87 - 88	0.12717	22,038	2803	20,636	116,595	5.29
88 - 89	0.13708	19,235	2637	17,917	95,959	4.99
89 - 90	0.14728	16,598	2444	15,376	78,042	4.70
90 - 91	0.15868	14,154	2246	13,031	62,666	4.43
91 - 92	0.17169	11,908	2045	10,886	49,635	4.17
92 - 93	0.18570	9,863	1831	8,948	38,749	3.93
93 - 94	0.20023	8,032	1608	7,228	29,801	3.71
94 - 95	0.21495	6,424	1381	5,733	22,573	3.51

Tabla 3.2
Tabla de V. para la Población Total : Estados Unidos, 1979 - 1981.

(1) x	(2) ${}_tq_x$	(3) l_x	(4) ${}_td_x$	(5) ${}_tL_x$	(6) T_x	(7) $\mathring{e}_x$
Años						
95 - 96	0.22976	5,043	1159	4,463	16,840	3.34
96 - 97	0.24338	3,884	945	3,412	12,377	3.19
97 - 98	0.25637	2,939	754	2,562	8,965	3.05
98 - 99	0.26868	2,185	587	1,891	6,403	2.93
99 - 100	0.28030	1,598	448	1,374	4,511	2.82
100 - 101	0.29120	1,150	335	983	3,137	2.73
101 - 102	0.30139	815	245	692	2,154	2.64
102 - 103	0.31089	570	177	481	1,462	2.57
103 - 104	0.31970	393	126	330	981	2.50
104 - 105	0.32786	267	88	223	651	2.44
105 - 106	0.33539	179	60	150	428	2.38
106 - 107	0.34233	119	41	99	278	2.33
107 - 108	0.34870	78	27	64	179	2.29
108 - 109	0.35453	51	18	42	115	2.24
109 - 110	0.35988	33	12	27	73	2.20

(1) Intervalo de Edad Periodo de Vida entre las Edades

(2) Porción de Muerte Porción de Personas Vivas al

Principio del Intervalo de Edad que Mueren Durante el Intervalo

De 100,000 Nacidos Vivos

(3) Número de Vivos al Inicio del Intervalo de Edad

(4) Número de Muertos Durante el Intervalo de Edad

Población Estacionaria* (*Años Vividos*)

(5) En el Intervalo de Edad

(6) En Este y en Todos los Intervalos de Edades Subsiguientes

(7) Tiempo Medio de Vida Restante Número Promedio de

Años de Vida que Restan al Principio del Intervalo de Edad

* La población estacionaria es un concepto demográfico que se trata en el Capítulo 18.

Figura 3.1: La Fuerza de Mortalidad

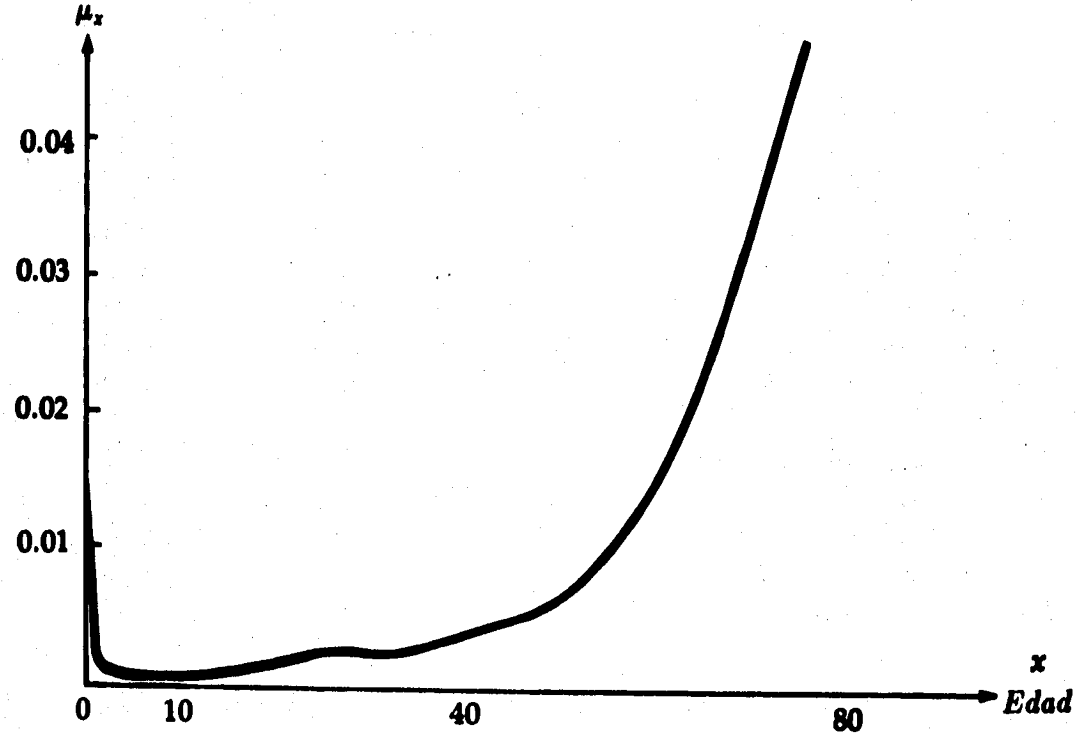


Figura 3.2: Grafica de $l_x\mu_x$

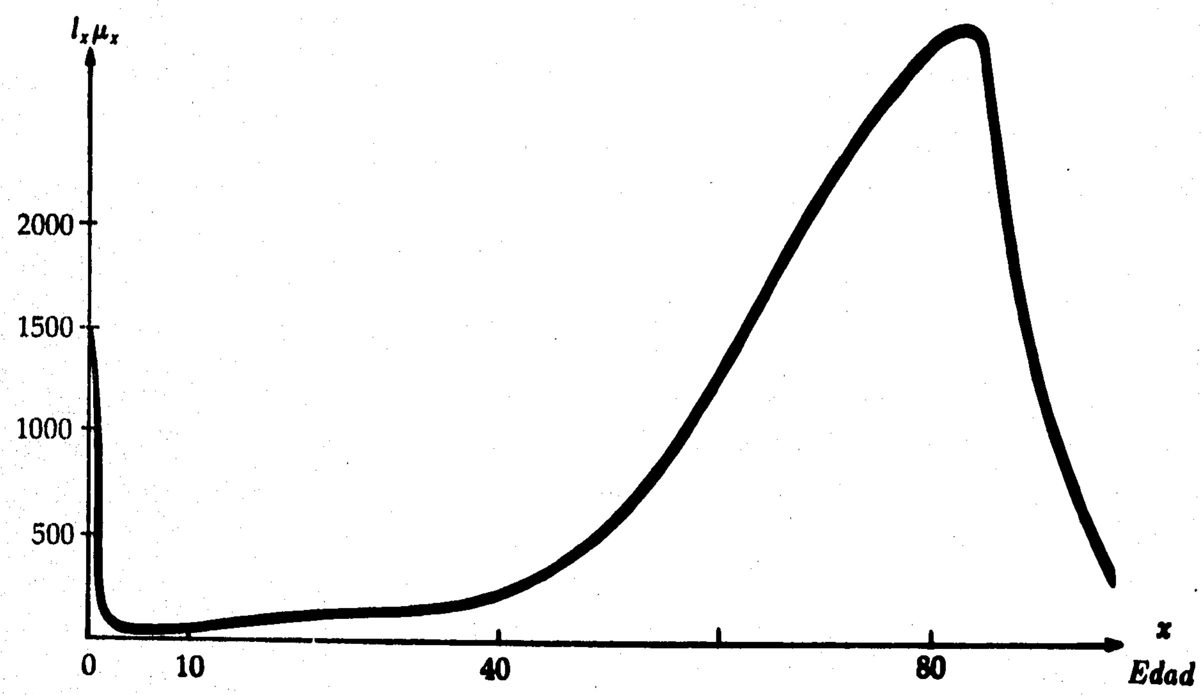
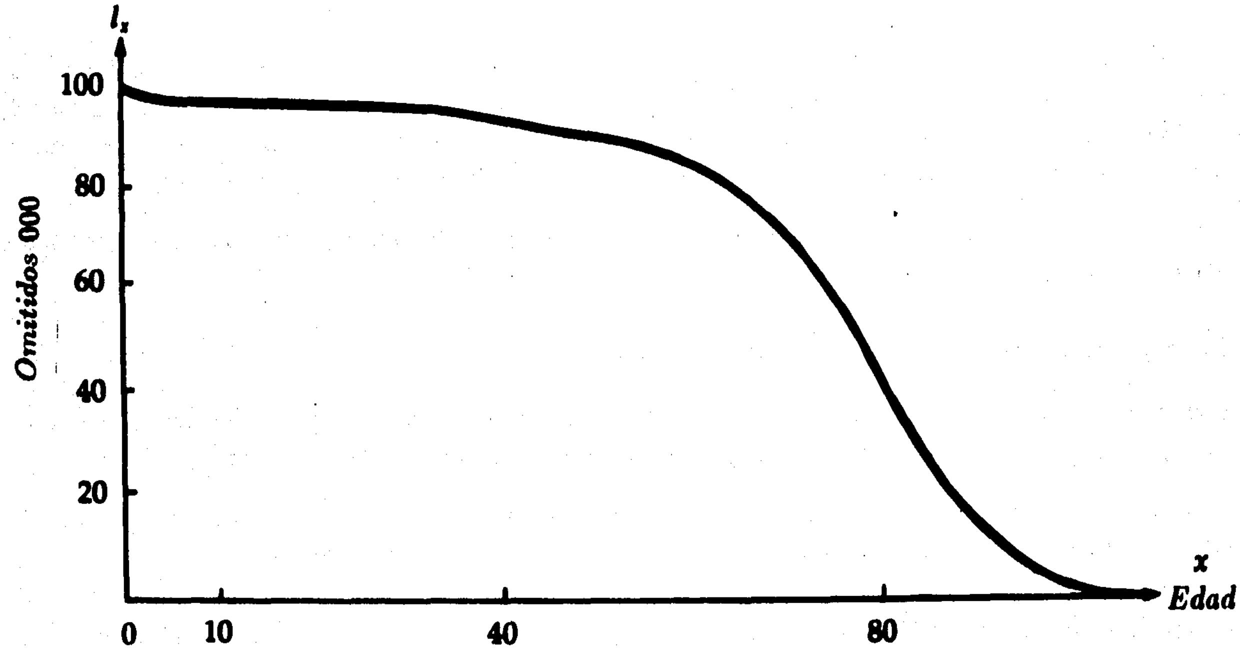


Figura 3.3: Grafica de l_x



- **La fuerza de mortalidad** se inicia muy alta y luega **cae a un mínimo alrededor de la edad 10.**

En las Figuras 3.2 y 3.3 se aprecia que

- La función l_x, μ_x, es proporcional a la *f.d.p.* de la edad **al fallecimiento de un recién nacido. Ya** que $l_x\,\mu_x$, es la densidad esperada de muertes a la edad x, **bajo la idea del grupo de sobrevivencia** aleatoria, la figura de l_x, μ_x, se llama ***la curva de fallecimientos.***
- Hay un mínimo local $l_x\,\mu_x$, aproximadamente en la edad 10. **La moda de la distribución de** fallecimientos-la edad a la cual ocurre el máximo de la curva x-es cercano a la edad de 80 años.
- La función l_x es proporcional a la función de sobrevivencia $s(x)$. **Puede también interpretarse** como el número esperado de vivos a la edad x **a partir de un grupo inicial de tamaño l_o.**
- Los puntos extremos locales de $l_x\mu_x$ **corresponden a puntos de inflexión de l_x ya que**

$$\frac{d}{dx}l_x\mu_x = \frac{d}{dx}\left(-\frac{d}{dx}l_x\right) = -\frac{d^2}{dx^2}l_x.$$

3.4 El Grupo Determinístico de Sobrevivencia

Procederemos ahora a una segunda, y no probabilística, interpretación de la tabla de vida. Esta está enraizada matemáticamente en el concepto de tasas de decremento (crecimiento negativo). Como tal, está relacionada con las aplicaciones de la tasa de crecimiento en biología y economía. Es de naturaleza determinística y conduce al concepto de un *grupo o cohorte determinístico de sobrevivencia.*

Un grupo determinístico de sobrevivencia, como se representa en una tabla de vida, tiene las siguientes características:

- El grupo inicialmente consiste de l_o vivos de edad 0.
- Los integrantes del grupo están sujetos en cada edad de sus vidas, a tasas efectivas anuales de mortalidad (decremento) especificadas por los valores de qx en la tabla de vida.
- El grupo es cerrado. No se permite la entrada después del l_o inicial. El único decremento se da como un resultado de las tasas efectivas anuales de mortalidad (decremento).

A partir de estas características se entiende que el progreso del grupo estará determinado por

$$
\begin{array}{rclclcl}
l_1 & = & l_o(1-q_o) & = & l_o - d_o & & \\
l_2 & = & l_1(1-q_1) & = & l_1 - d_1 & = & l_o - (d_o + d_1) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
l_x & = & l_{x-1}(1-q_{x-1}) & = & l_{x-1} - d_{x-1} & = & l_o - \sum_{y=0}^{x-1} d_y \\
 & = & l_o\left(1 - \dfrac{\sum_{y=0}^{x-1} d_y}{l_o}\right) & = & l_o(1 - {}_x q_o) & &
\end{array}
\tag{3.28}
$$

en donde l_x es el número de integrantes que llegan a la edad x en el grupo de sobrevivencia. Esta cadena de igualdades generada mediante un valor l_o llamado raíz y un conjunto de valores q_x, puede volverse a expresar como

$$
\begin{array}{rclclcl}
l_1 & = & l_o p_o & & & & \\
l_2 & = & l_1 p_1 & = & (l_o p_o) p_1 & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
l_x & = & l_{x-1} p_{x-1} & = & l_o \left(\prod_{y=0}^{x-1} p_y\right) & = & l_o\, {}_x p_o .
\end{array}
\tag{3.29}
$$

Existe una analogía entre el grupo determinístico de sobrevivencia y el modelo del interés compuesto. El cuadro 3.3 se diseñó para resumir este paralelismo.

Tabla 3.3 Conceptos Relacionados de las Matemáticas del Interés Compuesto y de los Grupos Determínisticos de Sobrevivencia.

Interés Compuesto	Grupo de sobrevivencia
$A(t) =$ Tamaño del fondo en el tiempo t, tiempo medido en años	$l_x =$ Tamaño del grupo en la edad x, edad medida en años
Tasa anual efectiva de interés (incremento) $i_t = \frac{A(t+1)-A(t)}{A(t)}$	Tasa anual efectiva de mortalidad (decremento) $q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$
Tasa efectiva de interés en el año n, empezando en el año t * ${}_n i_t = \frac{A(t+n)-A(t)}{A(t)}$	Tasa efectiva de mortalidad en el año n empezando en la edad x ${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$
Fuerza de interés en el tiempo t $\delta_t = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{A(t)\Delta t} \right] = \frac{1}{A(t)} \frac{dA(t)}{dt}$	Fuerza de mortalidad en la edad x $\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{l_x \Delta x} \right] = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx}$

∗ No hay un símbolo universalmente aceptado para una tasa efectiva de interés en el año-n.

Los encabezados de las columnas ${}_t q_x$, l_x y ${}_t d_x$ en la Tabla 3.2 se refieren a la interpretación del grupo determinístico de sobrevivencia. Mientras las bases matemáticas del grupo aleatorio de sobrevivencia y el grupo determinístico de sobrevivencia son diferentes, las funciones resultantes q_x, l_x, d_x tienen las mismas propiedades matemáticas y el subsecuente análisis. El concepto de grupo aleatorio de sobrevivencia tiene la ventaja de permitir el uso total de la teoría de probabilidad. El grupo determinístico de sobrevivencia es conceptualmente simple y fácil de aplicar, pero no toma en cuenta la variación aleatoria en el número de sobrevivientes.

3.5 Otras Funciones de la Tabla de Vida

Antes de proceder a derivar expresiones para los momentos de la distribución de $T(x)$, probaremos un teorema que es útil para el cálculo de los valores esperados. Se probarán dos versiones del teorema. Una versión, Teorema 3.1, pertenecerá a variables aleatorias continuas. La segunda, Teorema 3.2, pertenecerá a variables aleatorias discretas.

Teorema 3.1:

Si T es un tipo de variable aleatoria continua una *f.d.* $G(t)$ tal que $G(0) = 0$ y *f.d.p.* $G'(t) = g(t)$, y $z(t)$ es tal que

- es una función diferenciable, monotónica, positiva y
- E[z(T)] existe,

entonces

$$\begin{aligned} E[z(T)] &= \int_o^\infty z(t)g(t)dt \\ &= z(0) + \int_o^\infty z'(t)[1 - G(t)]dt. \end{aligned}$$

Prueba:

Integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} \int_o^t z(s)g(s)ds &= -\int_o^t z(s)d[1 - G(s)] \\ &= -z(s)[1 - G(s)]|_o^t + \int_o^t [1 - G(s)]z'(s)ds. \end{aligned}$$

El Teorema se cumple si $\lim_{t\to\infty} z(t)[1 - G(t)] = 0$. Consideramos dos casos:

a. Si la función positiva $z(t)$ no es creciente, entonces claramente $\lim_{t\to\infty} z(t)[1 - G(t)] = 0$.

b. Si la función positiva $z(t)$ no es decreciente, entonces

$$0 \leq z(t)[1 - G(t)] = z(t)\int_t^\infty g(s)ds \leq \int_t^\infty z(s)g(s)ds.$$

Pero si $E[z(t)]$ existe, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty z(s)g(s)ds = 0,$$

De aquí que

$$\lim_{t\to\infty} z(t)[1 - G(t)] = 0,$$

y se cumple el teorema. □

El Teorema 3.1 se utilizará para relacionar dos fórmulas para $E[T(x)]$. Este valor esperado se representa por $\mathring{e}_x$ el que se denomina *esperanza- completa-de-vida*. Por definición, tenemos

$$\mathring{e}_x = E[T(x)] = \int_0^\infty t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt. \tag{3.30}$$

usando el Teorema 3.1 con $z(t) = t$ y $G(t) = 1 - {}_tp_x$, tenemos

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt. \tag{3.31}$$

La ***esperanza completa de vida*** a varias edades se utiliza a menudo para comparar niveles de salud pública entre poblaciones diferentes.

También usamos el Teorema 3.1 con $z(t) = t^2$ para obtener expresiones equivalentes para $E[T(x)^2]$ por medio de

$$\begin{aligned} E[T(x)^2] &= \int_0^\infty t^2\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt \\ &= 2\int_0^\infty t\, {}_tp_x\, dt. \end{aligned}$$

Este resultado es útil para el cálculo de la $Var[T(x)]$ mediante

$$\begin{aligned} V[T(x)] &= E[T(x)^2] - E[T(x)]^2 \\ &= 2\int_0^\infty t\, {}_tp_x\, dt - \mathring{e}_x^2 . \end{aligned}$$

En estas aplicaciones del Teorema 3.1 hemos asumido que existen $E[T(x)]$ y $E[T(x)^2]$. Uno puede construir funciones de sobrevivencia tales como $s(x) = (1+x)^{-1}$ donde esto no fuera verdadero.

Pueden determinarse otras características de la distribución de $T(x)$ La ***mediana del tiempo de vida futuro*** de (x), representado por $m(x)$, puede encontrarse resolviendo

$$Pr[T(x) > m(x)] = \frac{1}{2},$$

o

$$\frac{s[x+m(x)]}{s(x)} = \frac{1}{2}, \tag{3.32}$$

para $m(x)$. En especial, $m(0)$ está dado mediante la solución de $s[m(0)] = 1/2$. También puede uno encontrar la moda de $T(x)$ mediante la localización del valor de t que producirá un valor máximo de ${}_tp_x\ \mu_{x+t}$.

Para variables aleatorias discretas, tenemos un teorema análogo al Teorema 3.1 el que puede establecerse mediante una prueba paralela.

Teorema 3.2:

Si K es una variable aleatoria discreta con probabilidad sólo para enteros no negativos, con *f.d.* $G(k)$ y *f.p.* $g(k) = \Delta G(k-1)$, y $z(k)$ es una función monotónica positiva tal que existe $E[z(K)]$, entonces

$$\begin{aligned} E[z(K)] &= \sum_{k=0}^{\infty} z(k)g(k) \\ &= z(0) + \sum_{k=0}^{\infty}[1-G(k)]\Delta z(k). \end{aligned}$$

Prueba:

Sumando por partes tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} z(j)g(j) &= -\sum_{j=0}^{k-1} z(j)\Delta[1-G(j-1)] \\ &= -z(j)[1-G(j-1)]|_o^k + \sum_{j=0}^{k-1}[1-G(j)]\Delta z(j). \end{aligned}$$

El teorema se cumple si

$$\lim_{k\to\infty} z(k)[1-G(k-1)] = 0.$$

Consideramos

- **Si la función positiva $z(k)$ no es creciente, entonces es claro que**

$$\lim_{k\to\infty} z(k)[1-G(k-1)] = 0.$$

- **Si la función positiva $z(k)$ no es decreciente, entonces**

$$0 \le z(k)[1-G(k-1)] = z(k)\sum_{j=k}^{\infty} g(j) \le \sum_{j=k}^{\infty} z(j)g(j).$$

Pero, si existe $E[z(K)]$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} z(j)g(j) = 0,$$

de aquí que

$$\lim_{k\to\infty} z(k)[1-G(k-1)] = 0,$$

y el teorema se cumple. □

En el caso especial donde K es el tiempo de vida truncado de (x), podemos usar el Teorema 3.2 para establecer la conclusión

$$E[z(k)] = z(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta z(k)\, {}_{k+1}p_x. \tag{3.33}$$

Este resultado puede utilizarse para calcular algunas de las propiedades de la distribución de k en un arreglo paralelo al usado en el Teorema 3.1 en relación con T. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} E[K] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\, {}_kp_x\, q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_x \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde, al aplicar el Teorema 3.2, k juega el papel de $z(k)$. El símbolo para $E[K]$ es e_x y se llama *esperanza de vida truncada.*

Siguiendo la misma línea utilizada para el modelo contínuo, tenemos

$$\begin{aligned} E[K^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \, {}_kp_x \, q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \, {}_{k+1}p_x. \end{aligned} \tag{3.35}$$

En (3.35) el Teorema 3.2 se usa con k^2 jugando el papel de $z(k)$. Entonces

$$\begin{aligned} Var[K] &= E[K^2] - E[K]^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \, {}_{k+1}p_x - e_x^2. \end{aligned}$$

Para completar la discusión de algunos de los componentes en la Tabla 3.2, debemos definir funciones adicionales. El símbolo L_x representará el número esperado total de años de vida entre las edades x y $x+1$ de los sobrevivientes del grupo inicial de l_o vidas. Tenemos

$$L_x = \int_o^1 t \, l_{x+t} \, \mu_{x+t} \, dt + l_{x+1} \tag{3.36}$$

donde la integral contabiliza los años vividos por aquéllos que murieron entre las edades x y $x+1$, y el término $l_x + 1$ contabiliza los años vividos entre las edades x y $x+1$ por los que sobrevivieron a la edad $x+1$. La integración por partes produce

$$\begin{aligned} L_x &= -\int_o^1 t \, dl_{x+t} + l_{x+1} \\ &= t \, l_{x+t} \,|_o^1 + \int_o^1 l_{x+t} \, dt + l_{x+1} \\ &= \int_o^1 l_{x+t} \, dt. \end{aligned} \tag{3.37}$$

La función L_x se utiliza para definir la *tasa central fallecimiento a la edad x*, representada por m_x donde

$$m_x = \frac{\int_o^1 l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt}{\int_o^1 l_{x+t}\,dt} = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x}. \tag{3.38}$$

En el Capítulo 9 se encuentra una aplicación de esta función.

El símbolo T_x, denotará el número total de años vividos después de la edad x por el grupo de sobrevivencia con l_o integrantes iniciales. Tenemos que

$$\begin{aligned} T_x &= \int_o^\infty t\, l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt \\ &= -\int_o^\infty t\, dl_{x+t} \\ &= \int_o^\infty l_{x+t}\,dt. \end{aligned} \tag{3.39}$$

La expresión final puede interpretarse como la integral del tiempo total vivido entre las edades $x+t$ y $x+t+dt$ por los l_x+t vivos que sobrevivieron a ése intervalo. También, el desarrollo de (3.39) puede obtenerse inmediatamente del Teorema 3.1 observando que

$$l_{x+t}\,\mu_{x+t} = l_x\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}.$$

El número promedio de años del tiempo de vida futuro de los l_x sobrevivientes del grupo en la edad x está dado por

$$\begin{aligned} \frac{T_x}{l_x} &= \frac{\int_o^\infty l_{x+t}dt}{l_x} \\ &= \int_o^\infty {}_tp_x dt \\ &= \mathring{e}_x, \end{aligned}$$

como se determinó previamente en (3.30) y (3.31).

Una función final, relacionada con la interpretación de la tabla de vida desarrollada en esta sección, es el número promedio de años vividos entre las edades x y $x+1$ por aquellos integrantes del grupo de sobrevivencia que murieron entre esas edades. Esta función se denota por $a(x)$ y está definida por

$$a(x) = \frac{\int_o^1 t\, l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt}{\int_o^1 l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt}. \tag{3.40}$$

Desde el punto de vista probabilístico de la tabla de vida, tendríamos

$$a(x) = \frac{\int_o^1 t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt}{\int_o^1 {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt} = E[T|T < 1].$$

Si suponemos que

$$l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt = d_x\, dt \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

es decir, si las muertes están distribuidas uniformemente en el año de edad, tenemos

$$a(x) = \int_o^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

Esta es la forma usual de aproximación para $a(x)$, excepto para edades menores o mayores para las que la Figura 3.2 demuestra que este supuesto puede ser inapropiado.

Ejemplo 3.3:

Demuestre que

$$L_x = a(x) l_x + [1 - a(x)] l_{x+1}$$

y

$$L_x \cong \frac{l_x + l_{x+1}}{2}.$$

Solución:

De (3.36) y (3.40), tenemos

$$a(x) = \frac{L_x - l_{x+1}}{l_x - l_{x+1}}$$

o

$$L_x = a(x)l_x + [1 - a(x)]l_{x+1}.$$

La fórmula

$$L_x \cong \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

puede justificarse usando la regla trapezoidal para aproximar la integración de (3.37) ∇

La terminología clave de las tablas de vida, que se definió en las Secciones 3.3-3.5, se resume en el Tabla 3.4.

3.6 Supuestos para las Edades Fraccionarias

En este capítulo hemos discutido la variable aleatoria continua del tiempo restante de vida, T, y la variable aleatoria discreta del *tiempo de vida futuro truncado* K. La tabla de vida desarrollada en la Sección 3.3 especifica completamente la distribución de probabilidad de K. Para especificar la distribución de T, debemos postular una forma analítica o adoptar una tabla de vida y un supuesto acerca de la distribución entre enteros.

Examinaremos tres supuestos ampliamente utilizados en la ciencia actuarial. Se expresarán en términos de la función de sobrevivencia. En cada expresión, x es un entero y $0 \leq t \leq 1$. Los supuestos son los siguientes:

- Distribución uniforme de muertes $s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1)$.
- Fuerza constante de mortalidad $s(x+t) = s(x)e^{-\mu t}$ en donde $\mu = -\log p_x$.
- El supuesto de Balducci[1] $1/s(x+t) = (1-t)/s(x) + t/s(x+1)$.

[1] Este supuesto se nombró así después de Balducci, un actuario italiano, quien señaló su papel en el método actuarial tradicional de construcción de tablas de vida. Sin embargo, debe señalarse que los tres métodos ya habían sido propuestos por Wittstein en 1862.

Tabla 3.4 Definiciones

Nombre del Concepto	Símbolo
Variable aleatoria del tiempo futuro truncado de vida de (x)	$K(x) = K$
Esperanza truncada de vida de (x)	$e_x = E[K(x)] = E[K]$
Esperanza completa de vida de (x)	$\mathring{e}_x = E[T(x)] = E[T]$
Variable aleatoria del tiempo de vida futuro de (x)	$T(x)$ o T
Número total de años vividos después de la edad x, por el grupo de sobrevivencia (cohorte) con l_o integrantes iniciales en la edad 0.	T_x
Variable aleatoria del número de sobrevivientes de la cohorte a la edad x	$\mathcal{L}(x)$
Número esperado de sobrevivientes de la cohorte a la edad x	l_x
Número de muertes entre las edades x y $x+n$	${}_n\mathcal{D}_x$
Número esperado de muertes entre x y $x+n$	${}_nd_x = E[{}_n\mathcal{D}_x]$
Mediana del tiempo futuro de vida de (x)	$m(x)$
Tasa central de mortalidad a la edad x	m_x

Podríamos haber elegido proponer definiciones equivalentes **en términos de la *f.d.p.*, la *f.d.* o la fuerza** de mortalidad

Tabla 3.5 Funciones de la teoría de la **probabilidad para edades fraccionarias**

Supuesto / Función	(1) Distribución uniforme	(2) Fuerza constante	(3) Balducci
${}_tq_x$	tq_x	$1 - e^{-\mu t}$	$\frac{tq_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_tp_x$	$1 - tq_x$	$e^{-\mu t}$	$\frac{p_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_yq_{x+t}$	$\frac{yq_x}{1-tq_x}$	$1 - e^{-\mu y}$	$\frac{yq_x}{1-(1-y-t)q_x}$
μ_{x+t}	$\frac{q_x}{1-tq_x}$	μ	$\frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_tp_x\,\mu_{x+t}$	q_x	$e^{-\mu t}\mu$	$\frac{p_xq_x}{[1-(1-t)q_x]^2}$

Nótese que, en este cuadro, x es un entero, $0 < t < 1, 0 \leq y \leq 1, y + t \leq 1$ y $\mu = -\log p_x$. Para los tres primeros renglones, las relaciones también son verdaderas para $t = 0$ y $t = 1$.

Con estas definiciones básicas se pueden derivar fórmulas para otras funciones estándar de probabilidad en términos de tablas de vida de probabilidades. Estos resultados se presentan en la Tabla 3.5.

Las derivaciones de las entradas de la Tabla 3.5 son ejercicios para sustituir los supuestos establecidos acerca de $s(x+t)$ en las fórmulas apropiadas de las Secciones 3.2 y 3.3. Ilustraremos este proceso para la distribución uniforme de fallecimientos. Este supuesto se utilizará extensamente en el presente texto.

Para derivar la primera entrada de la columna de la distribución uniforme, uno puede empezar con

$$ {}_tq_x = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \qquad 0 \le t \le 1, $$

después sustituir para $s(x+t)$,

$$ {}_tq_x = \frac{s(x) - [(1-t)s(x) + ts(x+1)]}{s(x)} = \frac{t[s(x) - s(x+1)]}{s(x)} = tq_x. $$

La segunda entrada es el complemento de la primera.

Para la tercera, empezamos con

$$ {}_yq_{x+t} = \frac{s(x+t) - s(x+t+y)}{s(x+t)}, $$

después sustituimos para $s(x+t)$ y $s(x+t+y)$ para obtener

$$ \begin{aligned} {}_yq_{x+t} &= \frac{[(1-t)s(x) + ts(x+1)] - [(1-t-y)s(x) + (t+y)s(x+1)]}{(1-t)s(x) + ts(x+1)} \\ &= \frac{y[s(x) - s(x+1)]/s(x)}{\{s(x) - t[s(x) - s(x+1)]\}/s(x)} \\ &= \frac{yq_x}{1 - tq_x}. \end{aligned} $$

Para la cuarta, utilizamos

$$ \mu_{x+t} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}, $$

entonces, sustituyendo para $s(x+t)$, tenemos

$$\mu_{x+t} = \frac{[s(x) - s(x+1)]}{[(1-t)s(x) + t\,s(x+1)]}.$$

Dividiendo el numerador y el denominador del lado derecho entre $s(x)$,produce

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{(1 - tq_x)}.$$

La entrada final de la columna de la distribución uniforme es resultado del producto de la segunda y la cuarta.

Sí , como antes, x es un entero, se puede obtener definiendo una variable aleatoria $S = S(x)$ mediante

$$T = K + S \tag{3.41}$$

en donde T es tiempo hasta la muerte, K es el tiempo futuro recortado de vida y S es la variable aleatoria que representa la parte fraccionaria vivida en el año del fallecimiento. Entonces

$$\begin{aligned} Pr[K < T \leq k + s] &= Pr[(K = k) \cap (S \leq s)] \\ &= {}_{k|s}q_x \\ &= {}_kp_x\, {}_sq_{x+k}. \end{aligned}$$

Hasta este punto, el desarrollo ha requerido expresar la probabilidad necesaria en términos de símbolos actuariales especiales. Si ahora utilizamos el supuesto de la distribución uniforme como se muestra en la Tabla 3.5 para ${}_sq_{x+k}$, tenemos que

$$\begin{aligned} Pr[(K = k) \cap (S \leq s)] &= {}_kp_x\, s\, q_{x+k} \\ &= {}_{k|}q_x\, s \\ &= Pr(K = k)Pr(S \leq s). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Por lo tanto, la probabilidad conjunta de K y S puede factorizarse en las probabilidades separadas K y S. De ahí se sigue que, bajo el supuesto de distribución uniforme de muertes, las variables aleatorias K y S son independientes. Lo que es más, ya que $Pr(S \leq s) = s$ es la *f.d.* de una distribución uniforme en $(0,1)$, S tiene esa distribución uniforme.

Ejemplo 3.4:

Bajo el supuesto de fuerza constante de la mortalidad, ¿ son independientes las variables aleatorias K y S ?

Solución:

Utilizando las entradas de la Tabla 3.5 para el supuesto de fuerza constante, obtenemos

$$
\begin{aligned}
Pr[(K=k)\cap(S\leq s)] &= {}_kp_x\,{}_sq_{x+k}\\
&= {}_kp_x[1-(p_{x+k})^s].
\end{aligned}
$$

Para comentar este resultado, distinguimos dos casos:

- **Si p_{x+k} no es independiente de k, no podemos factorizar la probabilidad conjunta de K y S en probabilidades separadas. Concluimos que K y S no son independientes.**
- **En el caso especial en donde $p_{x+k}=p$, es una constante,**

$$
\begin{aligned}
Pr[(K=k)\cap(S\leq s)] &= p^k(1-p^s)=\frac{(1-p)p^k(1-p^s)}{1-p}\\
&= Pr(K=k)Pr(S\leq s),
\end{aligned}
$$

y concluimos que K y S son independientes. ∇

Ejemplo 3.5:

Bajo el supuesto de distribución uniforme de los **fallecimientos,demuestre que**

a. $\mathring{e}_x = e_x + \dfrac{1}{2}$

b. $Var[T] = Var[K] + \dfrac{1}{12}$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\text{a. } \mathring{e}_x &= E[T]=E[K+S]\\
&= E[K]+E[S]\\
&= e_x+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$\text{b. } Var[T] = Var[K+S]$$

A partir de la independencia de K y S, bajo el supuesto de la distribución uniforme, se sigue que

$$Var[T] = Var[K] + Var[S].$$

Además, ya que S esta distribuido uniformemente en $(0,1)$,

$$Var[T] = Var[K] + \frac{1}{12}.$$

∇

3.7 Algunas Leyes Analíticas de la Mortalidad

Hay tres justificaciones principales para postular una forma analítica para las funciones de mortalidad o de sobrevivencia. La primera es filosófica. Muchos fenómenos estudiados en física pueden explicarse eficientemente mediante fórmulas simples. Por lo tanto, usando argumentos biológicos, algunos autores han sugerido que la sobrevivencia humana está gobernada mediante una ley igualmente simple. La segunda justificación es práctica. Es más fácil comunicar una función con pocos parámetros que lo que es hacerlo con una tabla de vida con quizás 100 parámetros o probabilidades de mortalidad. Además, algunas de las formas analíticas tienen propiedades elegantes que son convenientes para evaluar expresiones de probabilidad que involucran más de una vida. La tercera justificación es la facilidad de estimar unos pocos parámetros de la función a partir de la información sobre mortalidad.

El apoyo a éste tipo de funciones ha disminuido en los últimos años. Muchos piensan que es ingenuo creer en leyes universales demortalidad. También, con el advenimiento de computadores de alta velocidad, las ventajas de algunas formas analíticas en cómputos que involucran más de una vida ya no tienen mayor importancia. Sinembargo, recientemente algunas investigaciones interesantes han reiterado los argumentos biológicos a favor de las leyes analíticas de mortalidad.

Tabla 3.6 Funciones de Mortalidad y Sobrevivencia Bajo Varias Leyes

Iniciador	μ_x	$s(x)$	Restricciones
de Moivre (1729)	$(\omega - x)^{-1}$	$1 - \frac{x}{\omega}$	$0 \leq x < \omega$
Gompertz (1825)	Bc^x	$\exp[-m(c^x - 1)]$	$B > 0, c > 1, x \geq 0$
Makeham (1860)	$A + Bc^x$	$\exp[-Ax - m(c^x - 1)]$	$B > 0, A \geq -B, c > 1, x \geq 0$
Weibull (1939)	kx^n	$\exp(-ux^{n+1})$	$k > 0, n > 0, x \geq 0$

En la Tabla 3.6 se presentan varias familias de funciones analíticas simples de mortalidad y sobrevivencia, correspondientes a varios postulados de leyes. Se incluyen también, con propósitos de identificación, los nombres de los que originaron las leyes y las fechas de su publicación.

Note que

- los símbolos especiales se definen como

$$m = \frac{B}{\log c'}, \quad u = \frac{k}{(n+1)}.$$

- la ley de Gompertz es un caso especial de la ley de Makeham con $A = 0$.
- si $c = 1$ en las leyes de Gompertz y Makeham, resulta la distribución exponencial (fuerza constante).
- en relación con la ley de Makeham, se interpreta que la constante A captura la aleatoriedad accidental, y el término Bc^x lo hace con la aleatoriedad del envejecimiento.

Las entradas en la columna $s(x)$ de la Tabla 3.6 se obtuvieron por medio de la sustitución dentro (3.16). Por ejemplo, para la ley de Makeham tenemos

$$\begin{aligned} s(x) &= \exp[-\int_0^x (A + Bc^s)ds] \\ &= \exp[-Ax - B(c^x - 1)/\log c] \\ &= \exp[-Ax - m(c^x - 1)] \end{aligned}$$

en donde $m = B/\log c$.

Con fines de cálculo, el desarrollo de las tablas de mortalidad en los ejemplos y ejercicios se rigieron por dos objetivos. Uno fue tenertasas de mortalidad en el rango medio de variaciones grupales, distinguiendo factores tales como residencia, sexo, estado del asegurado, estado de la anualidad, situación marital y ocupación. Otro fue tener la ley de Makeham para la mayoría de las edades para ilustrar como pueden efectuarse los cálculos para vidas múltiples. La tabla de vida ilustrativa del Anexo 2A está basada en la ley de Makeham para edades entre 13 y 110,

$$1000\mu_x = 0.7 + 0.05(10^{0.04})^x. \tag{3.43}$$

Los cálculos de las funciones básicas q_x, l_x y d_x de (3.43) se hicieron directamente de (3.43) en lugar de calcular l_x y d_x de los valores truncados de q_x. Se encontró que la última elección daría lugar a pequeñas diferencias en las aplicaciones. Debe tenerse presente que la tabla de vida ilustrativa, como su nombre lo implica, es sólo para propósitos ilustrativos.

3.8 Tablas Selectas y Extremas

En la Sección 3.2 discutimos cómo ${}_tp_x$ (la probabilidad que (x) sobreviva a la edad $x + t$) podría interpretarse en dos formas. La primera interpretación fue que la probabilidad puede ser evaluada por medio de una función de sobrevivencia apropiada para los recién nacidos, bajo la hipótesis simple de que hayan sobrevivido a la edad x. La segunda establece que el conocimiento adicional disponible acerca de la vida en la edad x podría hacer inapropiada a la función de sobrevivencia original para evaluar proposiciones de probabilidad acerca del tiempo de vida futuro de (x). Por ejemplo, la vida podría haber sido aceptada para un seguro de vida en la edad (x). Esta información nos conduciría a creer que la distribución del tiempo de vida futuro de las (x) es diferente de lo que de otra manera podríamos asumir sobre vidas de x años. En otro ejemplo, la vida podría haberse incapacitado a la edad x. Esta información nos conduciría a creer que la distribución del tiempo futuro de vida de (x) es diferente de aquellos no incapacitados a la edad x. En éste par de ejemplos, sería preferible una función de sobrevivencia especial que incorpora la información particular disponible. En otras palabras, el modelo completo para dichas vidas es un conjunto de funciones de sobrevivencia incluyendo una para cada edad en la que la información sobre aspectos de seguro, incapacidad, etc., está disponible. Este conjunto de funciones de sobrevivencia puede pensarse como una función de dos variables. Una variable es la edad considerada en la póliza emitida o al comienzo de la incapacidad, $[x]$, y la segunda variable es la duración desde la emisión de la póliza o la duración desde que se presentó la incapacidad, t. Entonces cada una de las funciones de las tablas de vida usuales asociadas con esta función bivariada de sobrevivencia es un arreglo bidimensional en $[x]$ y t.

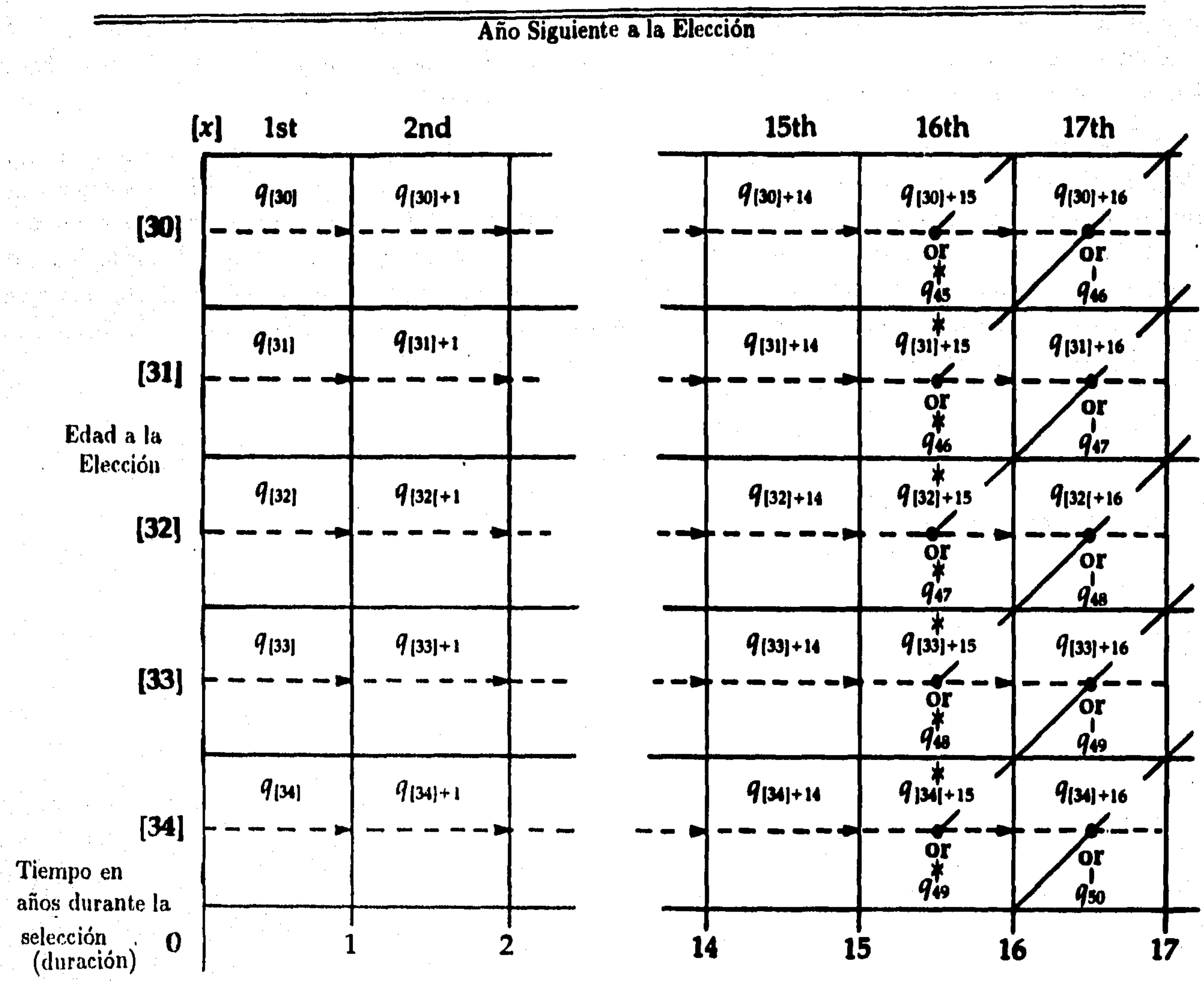
El diagrama esquemático de la Figura 3.4 ilustra estas ideas. Por ejemplo, supongamos que se dispone de alguna información especial acerca de un grupo de vidas de 30 años de edad. Tal vez han sido aceptadas para un seguro de vida o quizás se han incapacitado. Se podría construir una tabla de vida especial para estas vidas. La probabilidad condicional de muerte en cada año de duración se representaría por $q_{[30]+i}$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, y se introduciría en la primera hilera de la Figura 3.4. El subíndice refleja la naturaleza bivariada de esta función en donde el 30 entre paréntesis cuadrados, [30], señala que la función de sobrevivencia en la primera hilera está condicionada por la información especial disponible a la edad de 30. La segunda hilera de la Gráfica 3.4 contendrá las probabilidades de muerte para vidas en las que la información especial llegará a estar disponible a la edad de 31 años. En la ciencia actuarial, tal tabla de vida es llamada una tabla ***selectas de vida.***

El efecto de la selección sobre la distribución del tiempo- hasta-la- muerte, T, puede disminuir en la selección siguiente. Más allá de este periodo las $q's$ en edades iguales alcanzadas serían esencialmente iguales sin importar las edades de la selección. Más precisamente, si hubiera un entero mas pequeño r tal que $|q_{[x]+r} - q_{[x-j]+r+j}|$ fuera menor que alguna constante positiva pequeña para todas las edades de la selección $[x]$ y para toda $j > 0$, sería económico construir un conjunto de tablas ***selectas-y- extremas*** mediante el truncamiento del arreglo bidimensional después de la columna $(r+1)$. Para duraciones más alla de r, se usaría

$$q_{[x-j]+r+j} \cong q_{[x]+r} \qquad j > 0.$$

Los primeros r años de duración comprenden el ***periodo selecto.***

Figura 3.4 Mortalidad Agregada, Selecta y Extrema, Periodo Selecto de 15 Años



-----------→ Camino seguido por un grupo selecto sobreviviente en [x].

•———————• Eslabona grupos (edad a la selección y duración) después de un período selecto de 15 años dentro de los grupos de edad alcanzada.

×-×-×-×-× Camino alternativo seguido por los grupos sobrevivientes después de un periodo selecto de 15 años.

Los estudios de mortalidad de la Sociedad de Actuarios acerca de las vidas a las que se les otorgaron seguros de vida individuales sobre un base estándar, usan un periodo selecto de 15 años. Es decir se acepta que

$$q_{[x-j]+15+j} \cong q_{[x]+15} \qquad j > 0.$$

Mas allá del periodo selecto, a las probabilidades de muerte se les señala con subíndice sólo para la edad alcanzada. Esto es, $q_{[x-j]+r+j}$ se escribe como q_{x+r}. Por ejemplo, con $r = 15$, $q_{[30]+15}$ y $q_{[25]+20}$ se escribirían como q_{45}.

Una tabla de vida en la que las funciones están dadas sólo para las edades alcanzadas se denomina *tabla agregada*, como la Tabla 3.2 por ejemplo. La última columna en una tabla selecta y extrema es una tabla agregada especial a la que usualmente se le refiere como una *tabla extrema*.

La Tabla 3.7 contiene probabilidades de mortalidad y valores correspondientes de la función $l_{[x]+k}$, similares a los que presenta la Tabla de Seguros de Vida Británica, publicada para el periodo 1967 – 1970 por el Instituto de Actuarios y la Facultad de Actuarios. Esta tabla tiene un periodo selecto y es más fácil de usar para propósitos ilustrativos que las tablas con un periodo selecto de 15 años tal como las Tablas Básicas, publicadas por la Sociedad de Actuarios.

Tabla 3.7 Extracto de la Tabla Selecta y Extrema de 1967-1970

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$[x]$	$1{,}000\, q_{[x]}$	$1{,}000\, q_{[x]+1}$	$1{,}000\, q_{[x]+2}$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	$x+2$
30	0.43767	0.57371	0.69882	33,829	33,814	33,795	32
31	0.45326	0.59924	0.73813	33,807	33,791	33,771	33
32	0.47711	0.63446	0.79004	33,784	33,767	33,746	34
33	0.50961	0.68001	0.85577	33,760	33,742	33,719	35
34	0.55117	0.73655	0.93663	33,734	33,715	33,690	36

En la Tabla 3.7 observamos tres probabilidades de mortalidad para la edad de 32 años, es decir,

$$q_{[32]} = 0.00047711 < q_{[31]+1} = 0.00059924 < q_{32} = 0.00069882.$$

Es posible el orden entre estas probabilidades ya que la mortalidad debería ser menor para las vidas inmediatamente después de haber sido aceptadas para un seguro de vida. La columna (3) puede considerarse como la que presenta las probabilidades extremas demortalidad.

Para construir una tabla de vida selecta y extrema, seconstruiría primero la última porción. Pueden utilizarse fórmulas como la (3.28). Esto produciría un conjunto de valores de $l_{x+r} = l_{[x]+r}$ en donde r es la longitud del periodo seleccionado. Después se podría completar los segmentos selectos utilizando la relación

$$l_{[x]+r-k-1} = \frac{l_{[x]+r-k}}{p_{[x]+r-k-1}} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, r-1.$$

Ejemplo 3.6:

Utilice la Tabla 3.7 para evaluar

a. ${}_2p_{[30]}$ *b.* ${}_5p_{[30]}$ *c.* ${}_{1|}q_{[31]}$ *d.* ${}_3q_{[31]+1}$

Solución:

Las fórmulas desarrolladas en la primera parte de este capítulo pueden adaptarse para las tablas selectas y extremas produciendo

$$\begin{aligned}
a.\ {}_2p_{[30]} &= \frac{l_{32}}{l_{[30]}} = \frac{33,795}{33,829} = 0.99899 \\
b.\ {}_5p_{[30]} &= \frac{l_{35}}{l_{[30]}} = \frac{33,719}{33,829} = 0.99675 \\
c.\ {}_{1|}q_{[31]} &= \frac{l_{[31]+1} - l_{33}}{l_{[31]}} = \frac{33,791 - 33,771}{33,807} = 0.00059 \\
d.\ {}_3q_{[31]+1} &= \frac{l_{[31]+1} - l_{35}}{l_{[31]+1}} = \frac{33,791 - 33,719}{33,791} = 0.00213.
\end{aligned}$$

∇

3.9 Notas y Referencias

Las tablas de vida son un pilar fundamental de la ciencia actuarial. En consecuencia, se discuten ampliamente en varios libros de texto en Inglés sobre contingencias de vida,

- King (1902)
- Spurgeon (1932)
- Jordan (1967)
- Hooker y Longley-Cook (1953)
- Neill (1977),

que se han utilizado para la instrucción actuarial. Además, las tablas de vida son utilizadas por los bioestadísticos. Chiang (1968) y Elandt-Johnson y Johnson (1980) hacen una exposición sobre este último enfoque. La interpretación de la función de la tasa determinística fue discutida por Allen (1907).

En la Tabla 3.6 se hace referencia a las formas analíticas de las funciones de sobrevivencia de importancia histórica. Brillinger(1961) proporciona un argumento para ciertas formas analíticas desde el punto de vista de la prueba estadística de vida. Tenenbein y Vanderhoof (1980) reestablecieron el caso de las leyes analíticas de la mortalidad y desarrollaron fórmulas para mortalidad selecta. Algunos métodos para evaluar probabilidades para edades fraccionarias fueron revisados por Mereu (1961), y en el libro de texto de Battensobre estimación de la mortalidad (1978) (veáse también la revisión histórica de Seal (1977)). Las discusiones sobre la amplitud del periodo selecto para varios tipos de procedimientos de selección de seguros tienen una larga historia, por ejemplo, Williamson (1942), Thompson (1934) y Jenkins (1943). Las tablas básicas 1965 – 1970 de la Sociedad de Actuarios utilizaron un periodo selecto de 15 años y se publicaron en los *Reportes* de la *TSA*, 1973. La Notación Actuarial Internacional se describe en *TASA* 48 (1947).

3.10 Ejercicios

Sección 3.2

3.1 Utilizando las ideas resumidas en la Tabla 3.1.2, complete los elementos del siguiente cuadro

$s(x)$	$F(x)$	$f(x)$	μ_x
			$\tan x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$
$e^{-x},\ x \ge 0$			
	$1 - \frac{1}{1+x},\ x \ge 0$		

3.2 Confirme que cada una de las siguientes funciones pueden servir como fuerza de mortalidad. Muestre la función de sobrevivencia correspondiente. En cada caso $x \ge 0$.

a. Bc^x	$B > 0$	$c > 1$	(Gompertz)
b. kx^n	$n > 0$	$k > 0$	(Weibull)
c. $a(b+x)^{-1}$	$a > 0$	$b > 0$	(Pareto)

3.3 Confirme que lo siguiente puede servir como función de sobrevivencia. Muestre las μ_x, $f(x)$ y $F(x)$ correspondientes. .

$$s(x) = e^{-x^3/12} \qquad x \ge 0.$$

3.4 Establezca por qué cada una de las siguientes funciones no pueden servir en el rol indicado por el símbolo.

$$\begin{aligned}
\text{a. } \mu_x &= (1+x)^{-3}, \qquad x \geq 0 \\
\text{b. } s(x) &= 1 - \frac{22x}{12} + \frac{11x^2}{8} - \frac{7x^3}{24}, \qquad 0 \leq x \leq 3 \\
\text{c. } f(x) &= x^{n-1}e^{-x/2}, \qquad x \geq 0, n \geq 1
\end{aligned}$$

3.5 Si $s(x) = 1 - \frac{x}{100}$, $0 \leq x \leq 100$, calcule

a. μ_x b. $F(x)$

c. $f(x)$ d. $Pr(10 < X < 40)$.

3.6 Confirme que $_{k|}q_o = -\Delta s(k)$, y que $\sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}q_o = 1$

3.7 Si $\mu_x = 0.001$ para $20 \leq X \leq 25$, evalúe $_{2|2}q_{20}$.

Secciones 3.3, 3.4

3.8 Si el tiempo de sobrevivencia de 10 vidas de un grupo de **sobrevivencia son independientes, la** sobrevivencia definida por la Tabla 3.2, muestre la ***f.p.* de $\mathcal{L}(65)$ y la media y varianza de $\mathcal{L}(65)$.**

3.9 Si $s(x) = 1 - \frac{x}{12}$, $0 \leq x \leq 12$, $l_o = 9$, y el tiempo de **sobrevivencia es independiente, entonces se** sabe que $({}_3\mathcal{D}_0, {}_3\mathcal{D}_3, {}_3\mathcal{D}_6, {}_3\mathcal{D}_9)$ tienen una distribución **multinomial. Calcule**

a. El valor esperado de cada variable aleatoria

b. La varianza de cada variable aleatoria

c. El coeficiente de correlación entre cada **par de variables aleatorias.**

3.10 Con base en la Tabla 3.2,

a. Compare los valores de $_5q_o$ y $_5q_5$

b. Evalúe la probabilidad de que **(25) mueran entre las edades 80 y 85.**

3.11 Dado que l_{x+t} es **estrictamente decreciente en el intervalo $0 \leq t \leq 1$ muestre que**

a. **Si l_{x+t} es cóncava desde abajo, entonces $q_x > \mu_x$**

b. **Si l_{x+t} es cóncava desde arriba, entonces $q_x < \mu_x$.**

3.12 **Demuestre que**

a. $\frac{d}{dx} l_x\mu_x < 0$ cuando $\frac{d}{dx}\mu_x < \mu_x^2$

b. $\frac{d}{dx} l_x\mu_x = 0$ cuando $\frac{d}{dx}\mu_x = \mu_x^2$

c. $\frac{d}{dx} l_x\mu_x > 0$ cuando $\frac{d}{dx}\mu_x > \mu_x^2$.

3.13 Considere un grupo aleatorio de sobrevivencia consistente de dos subgrupos: (1) los sobrevivientes de 1,600 nacimientos; (2) los sobrevivientes de 540 personas reunidas 10 años después a la edad 10. A continuación se presenta un extracto de la tabla de mortalidad apropiada para ambos subgrupos:

x	l_x
0	40
10	39
70	26

Si Y_1 y Y_2 son los números de los sobrevivientes a la edad de 70 años de los subgrupos (1) y (2) respectivamente, estime un número c tal que $Pr(Y_1 + Y_2 > c) = 0.05$. Suponga que las vidas son independientes e ignore correcciones de media unidad.

Sección 3.5

3.14 Sea que $\mathring{e}_{x:\,\overline{n}|}$ denote la esperanza futura de vida de (x) **entre las edades x y $x+n$. Demuestre** que

$$\begin{aligned}\mathring{e}_{x:\,\overline{n}|} &= \int_0^n t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt + n\,{}_np_x \\ &= \int_0^n {}_tp_x\,dt.\end{aligned}$$

Esto se denomina ***esperanza parcial de vida***

3.15 Si la variable aleatoria T tiene **una *f.d.p.* dada por $f(t) = ce^{-ct}$ para $t \geq 0$, $c > 0$, calcule**

a. $\mathring{e}_x = E[T]$ **b. $Var[T]$** **c. *mediana* $[T]$.**

3.16 Si $\mu_{x+t} = t$, $t \geq 0$, **calcule**

a. ${}_tp_x\,\mu_{x+t}$ **b. $\mathring{e}_x$.**

[Sugerencia: Recuerde del estudio de probabilidad, que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ es la *f.d.p. para la distribución normal estándar* .]

3.17 Si la variable aleatoria T tiene *f.d.* dada por

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{(100-x)} & 0 \leq t < 100 - x \\ 1 & t \geq 100 - x, \end{cases}$$

calcule

a. $\mathring{e}_x$ b. $Var[T]$ c. *mediana* $[T]$.

3.18 Demuestre que

a. $\dfrac{\partial}{\partial x} {}_tp_x = {}_tp_x(\mu - \mu_{x+t})$

b. $\dfrac{d}{dx}\, \mathring{e}_x = \mathring{e}_x\, \mu_x - 1$

c. $\Delta e_x = q_x\, e_{x+t} - p_x$.

3.19 Si $s(x) = \dfrac{\sqrt{100-x}}{10}$, $0 \leq x \leq 100$, evalúe

a. ${}_{17}p_{19}$ b. ${}_{15}q_{36}$ c. ${}_{15|13}q_{36}$

d. μ_{36} e. $\mathring{e}_{36}$

3.20 Confirme las siguientes proposiciones:

a. $a(x)\ d_x = L_x - l_{x+1}$

b. La aproximación desarrollada en el Ejemplo 3.3 no se utilizó para calcular L_o, pero si se usó para calcular L_1.

c. $T_x = \sum_{k=0}^{\infty} L_{x+k}$

Sección 3.6

3.21 Verifique las elementos para la fuerza constante de mortalidad y los supuestos de Balducci en la Tabla 3.5.

3.22 Grafique μ_{x+t} , $0 < t < 1$, para cada uno de los tres supuestos del Tabla 3.5. También grafique la función de sobrevivencia para cada supuesto.

3.23 Utilizando la columna l_x del Tabla 3.2, calcule ${}_{1/2}p_{65}$ para cada uno de los tres supuestos del Tabla 3.5.

3.24 Use la Tabla 3.2 y un supuesto de distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad para encontrar la mediana de $[T]$, en donde T es el tiempo futuro de vida de una persona

a. edad 0 b. edad 50.

3.25 Si $q_{70} = 0.04$ y $q_{71} = 0.05$, calcule la probabilidad de que (70) morirá entre las edades $70_{1/2}$ y $71_{1/2}$ bajo

a. el supuesto de que las muertes están distribuidas uniformemente encada año de edad

b. el supuesto de Balducci para cada año de edad.

3.26 Usando la columna l_x de la Tabla 3.2 y cada uno de los supuestos del Tabla 3.5, calcule

a. $\lim_{x \to 60^-} \mu_x$ b. $\lim_{x \to 60^+} \mu_x$ c. $\mu_{60_{1/2}}$

3.27 Si se adopta el supuesto de la fuerza constante, demuestre que

a. $a(x) = \dfrac{[(1 - e^{-\mu})/\mu] - e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}}$ b. $a(x) \cong \dfrac{1}{2} - \dfrac{q_x}{12}$.

3.28 Si se adopta el supuesto de Balducci, demuestre que

a. $a(x) = -\dfrac{p_x}{q_x^2}[q_x + \log p_x]$ b. $a(x) \cong \dfrac{1}{2} - \dfrac{q_x}{6}$.

Sección 3.7

3.29 Verifique los elementos en el Tabla 3.6 para la ley de Moivre y la de Weibull.

3.30 Considere una modificación de la ley de Moivre dada por

$$s(x) = \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^{\alpha} \qquad 0 \le x < \omega, \qquad \alpha > 0.$$

Calcule

a. μ_x b. $\mathring{e}_x$.

Sección 3.8

3.31 Usando el Tabla 3.7, calcule

a. ${}_2q_{[32]+1}$ b. ${}_2p_{[31]+1}$.

3.32 A la cantidad

$$1 - \frac{q_{[x]+k}}{q_{x+k}} = I(x,k)$$

se le ha llamado *índice de selección* . Cuando está cercano a 0 la indicación es que la selección se ha consumido. De la Tabla 3.7 calcule el índice para $x = 32$, $k = 0, 1$.

Misceláneos

3.33 Un persona de 50 años de edad está sujeto a un azar extra durante el año de edad 50 a 51. Si la probabilidad normal de muerte de la edad 50 a la 51 es 0.006, y si el riesgo extra puede expresarse como una adición a la fuerza normal de la mortalidad que disminuye uniformemente de 0.03 al principio del año a 0 al final del año, calcule la probabilidad de que dicha persona sobreviva a la edad 51.

3.34 Si la fuerza de la mortalidad μ_{x+t} , $0 \le t \le 1$, cambia a $\mu_{x+t} - c$ en donde c es una constante positiva, encuentre el valor de c para el que la probabilidad de que (x) muera en el término de un año sea la mitad. Exprese la respuesta en términos de q_x.

3.35 A partir de una tabla de mortalidad estándar, se prepara una segunda tabla duplicando la fuerza de la mortalidad de la tabla estándar. ¿La tasa de mortalidad, q'_x, en cualquier edad determinada en la nueva tabla es más del doble; exactamente el doble o menos que el doble de la tasa de mortalidad, q_x, de la tabla estándar ?

3.36 Si $\mu_x = Bc^x, c > 1$, demuestre que la función $l_x\ \mu_x$ tiene su máximo en la edad x_o en donde $\mu_{x_o} = \log c$. [Sugerencia: Este ejercicio utiliza el ejercicio 3.12].

3.37 Suponga que $\mu_x = \dfrac{Ac^x}{1 + Bc^x}$ para $x > 0$.

a. Calcule la función de sobrevivencia, $s(x)$.

b. Verifique que el modo de distribución de X, la edad a la muerte,está dado por

$$x_o = \frac{\log(\log c) - \log A}{\log c}.$$

3.38 Si $\mu_x = \frac{3}{100-x} - \frac{10}{250-x}$ para $40 < x < 100$, calcule

a. ${}_{40}p_{50}$

b. el modo de distribución de X, la edad a la muerte.

3.39. a. Demuestre que, bajo el supuesto de la distribución uniformede las muertes,

$$m_x = \frac{q_x}{1-(1/2)q_x} \text{ y } q_x = \frac{m_x}{1+(1/2)m_x}.$$

b. Calcule m_x en términos de q_x bajo el supuesto de la fuerza constante.

c. Calcule m_x en términos de q_x bajo el supuesto de Balducci.

d. Si $l_x = 100 - x$ para $0 \leq x \leq 100$, calcule ${}_{10}m_{50}$ en donde

$${}_n m_x = \frac{\int_0^n l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt}{\int_0^n l_{x+t}\,dt}.$$

3.40 Demuestre que K y S son independientes si y solo si la expresión

$$\frac{{}_s q_{x+k}}{q_{x+k}}$$

no depende de k para $0 \leq s \leq 1$.

Capítulo 4

SEGURO DE VIDA

4.1 Introducción

Hemos afirmado que los sistemas de seguros fueron establecidos para reducir el impacto financiero adverso de algunos tipos de eventos aleatorios. En estos sistemas los individuos y las organizaciones adoptan modelos de utilidad para representar preferencias, modelos estocásticos para representar impactos financieros inciertos y principios económicos para guiar el establecimiento de precios. Después del análisis de estos modelos se alcanzaron algunos acuerdos.

En el Capítulo 2 desarrollamos un modelo elemental para el efecto financiero de eventos aleatorios en los que la ocurrencia y el tamaño del mismo eran inciertos. En ese modelo, se supuso suficientemente corto, el plazo de la póliza, de tal forma que pudiese ignorarse la incertidumbre del ingreso invertido de un tiempo de pago aleatorio.

En este capítulo desarrollaremos modelos para los seguros de vida diseñados para reducir el efecto financiero del evento aleatorio de muerte prematura. Debido a la naturaleza de largo plazo de estos seguros, el monto de ganancias de la inversión, hasta el tiempo del pago, proporciona un elemento significativo de incertidumbre. En realidad, habrá seguros para los que la ocurrencia y el tamaño de la reclamación son ciertas y la fecha de la reclamación es la única incertidumbre en el modelo. En los seguros de vida considerados aquí, el tamaño y la fecha del pago dependerán sólo de la fecha de la muerte del asegurado. En otras palabras, nuestro modelo se construirá en términos de funciones de T, la variable aleatoria del tiempo de vida futuro del asegurado.

No obstante que todo en este capítulo se establecerá en términos de seguros de vidas humanas, las ideas serían las mismas para otros objetos tales como equipo, maquinaria, préstamos y negocios. En realidad, el modelo general es útil para cualquier situación en la que el tamaño y la fecha de un efecto financiero pueden expresarse únicamente en términos de la fecha del evento aleatorio.

4.2 Seguros Pagaderos al Momento de la Muerte

Como se contempla en este capítulo, el monto y la fecha de pago de las indemnizaciones de un seguro de vida dependerá solamente de la amplitud del intervalo comprendido entre la expedición del seguro y la muerte del asegurado. Nuestro modelo se desarrollará con una función de indemnización, b_t, y una función de descuento, v_t. En el, v_t es el factor de descuento del interés desde tiempo de pago (al final) hasta al tiempo de expedición de la póliza (al principio), t es la amplitud del intervalo desde la expedición hasta la muerte. En el caso de dotaciones, que se cubren en esta sección, t puede ser más grande que o igual a la amplitud del intervalo desde la expedición hasta el pago.

Para la función de descuento asumiremos que la fuerza subyacente de interés es determinística, es decir, el modelo no incluirá una distribución de probabilidad para la fuerza del interés. Más aún, generalmente mostraremos las fórmulas simples que resultan de suponer una fuerza de interés constante, así como determinística.

Definiremos la función del valor presente, z_t, mediante

$$z_t = b_t \, v_t \tag{4.1}$$

Por lo tanto, z_t es el valor presente, a la expedición de la póliza, del pago de la indemnización.

El tiempo transcurrido desde la expedición de la póliza hasta la muerte del asegurado es la variable aleatoria del tiempo futuro de vida del asegurado, $T = T(x)$, definida en la sección 3.2.2. Por lo tanto, el valor presente del pago a la expedición de la póliza, es la variable aleatoria z_T. Unicamente que el contexto requiera un símbolo más elaborado, denotaremos a esta variable aleatoria con Z, y fundamentaremos el modelo para el seguro en la ecuación

$$Z = b_T v_T \tag{4.2}$$

La variable aleatoria Z es ejemplo de una variable aleatoria de reclamación y como tal, de un X_i plazo en la suma del modelo de riesgo individual, como se definió en (2.1) Este modelo se utilizará en secciones posteriores cuando consideramos aplicaciones que involucran carteras. Ahora nos dedicaremos al desarrollo del modelo de probabilidad para Z.

El primer paso en nuestro análisis del seguro de vida será definir b_t y v_t. El siguiente será determinar algunas características de la distribución de probabilidad de Z que son consecuencias de una distribución supuesta para T. Trabajaremos a través de estos pasos para varios seguros convencionales. En la Tabla 4.1 se proporciona un resumen.

4.2.1 Nivel de Indemnización del Seguro

Un *seguro de vida a n años de plazo*, proporciona un pago solo si el asegurado muere dentro del plazo de n años de un seguro que comienza en su expedición. Si una unidad se pagara en el momento de la muerte de (x), entonces

$$b_t = \begin{cases} 1 & t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

$$v_t = v^t \quad t \geq 0$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ 0 & T > n. \end{cases}$$

Estas definiciones utilizan dos convenciones. Primero, como el tiempo de vida futuro es una variable no negativa, definimos b_t, v_t y Z sólo sobre valores positivos. Segundo, para un valor t en donde b_t es 0, el valor de v_t es irrelevante. Por lo tanto, adoptaremos definiciones de v_t a conveniencia.

Para un seguro de vida, la esperanza de la variable aleatoria del valor presente, Z, se denomina *prima neta única.* Es neta porque no se ha recargado como se discutió en el Capítulo 1. Es única en contraste con la anual, semianual, cuatrimestral, mensual u otras primas aceptables en la práctica de los seguros de vida.

El lector encontrará que la esperanza del valor presente de un conjunto de pagos contingentes sobre la ocurrencia de un conjunto de eventos se refiere a diferentes plazos en diferentes contextos. En el Capítulo 1, a la pérdida esperada se le denominó prima pura. Esta terminología se utiliza comúnmente en seguros sobre propiedad y obligaciones. En el Capítulo 5, la esperanza del valor presente de un conjunto de pagos contingentes para la sobrevivencia (una anualidad contingente) se denomina *valor presente actuarial.* Ello es consistente con la terminología del plan de retiro. Aquí utilizaremos prima neta única, no obstante que cualquiera de los tres términos sería apropiado. Una expresión más exacta, pero más pesada sería *esperanza del valor presente de los pagos.* Denotaremos la prima neta única mediante sus símbolos de acuerdo a la Notación Actuarial Internacional (véase el Anexo 4).

La prima neta única para el seguro a plazo de n años con una unidad pagadera al momento de la muerte de (x) es $E[Z]$, denotada por $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}$. Esta puede calcularse al reconocer a Z como una función de T así que $E[Z] = E[z_T]$. Después utilizamos la *f.d.p.* de T dada en (3.19) para obtener

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = E[Z] = E[z_T] = \int_0^\infty z_t\, g(t)dt = \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt. \tag{4.3}$$

El momento j de la distribución de Z puede encontrarse mediante

$$\begin{aligned} E[Z^j] &= \int_0^n (v^t)^j\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt \\ &= \int_0^n e^{-(\delta j)t}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt. \end{aligned}$$

La segunda integral muestra que el momento j de Z es igual a la prima neta única de un seguro a plazo de n años para un monto de una unidad pagadera al momento de la muerte de (x), calculada a una fuerza de interés igual a j veces la fuerza de interés determinada, o $j\delta$.

Esta propiedad de los momentos de orden superior es válida, generalmente, para seguros que pagan una unidad cuando la fuerza de interés es determinística, constante o no. Estableceremos suficientes condiciones para esto en el siguiente teorema.

Teorema 4.1:

Para un seguro sobre (x), la fuerza de interés en el tiempo t (desde la expedición de la póliza) sea δ_t y sean las funciones de beneficio y de descuento b_t y v_t, respectivamente. Si $b_t^j = b_t$ para todas las t, entonces $E[Z^j]$ calculada a la fuerza deinterés δ_t es igual $E[Z]$ calcualda a la fuerza de interés $j\delta_t$ para $j > 0$. Es decir $E[Z^j]@\delta_t = E[Z]@j\delta_t$.

Prueba

$$\begin{aligned} E[Z^j] &= E[(b_T v_T)^j] \\ &= E[(b_T^j v_T^j)] \\ &= E[(b_T v_T^j)] \end{aligned}$$

En general,

$$v_t = \exp\left(-\int_0^t \delta_s \, ds\right) \tag{4.4}$$

en donde t es el tiempo transcurrido desde la expedición de la póliza hasta la muerte del asegurado.

Elevando ambos lados de (4.4) a la potencia j, tenemos

$$v_t^j = \exp\left(-\int_0^t j\delta_s \, ds\right),$$

es decir, v_t a la fuerza de interés $j\delta_t$.

□

Del Teorema 4.1 resulta que

$$Var[Z] = {}^2\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} - (\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}})^2 \tag{4.5}$$

en donde ${}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ es la prima neta única para un seguro a n años plazo para una unidad calculada a la fuerza de interés 2δ.

Como se probó, el Teorema 4.1 es para un seguro que paga la suma asegurada al momento de la muerte t. Puede extenderse a seguros en los que la suma es pagadera en un tiempo que es una función del momento de la muerte. Esto se logra al reemplazar t, en el límite superior de la integral de (4.4) con la función del momento de la muerte.

El *seguro de vida completo* prevee un pago después de la muerte del asegurado en cualquier tiempo en el futuro. Si el pago debe ser el monto de una unidad al momento de la muerte de (x), entonces

$$\begin{array}{ll} b_t = 1 & t \geq 0 \\ v_t = v^t & t \geq 0 \\ Z = v^T & T \geq 0. \end{array}$$

La prima neta única es

$$\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^x v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t} dt. \tag{4.6}$$

El seguro de vida completo es el caso límite de un seguro a n años de plazo cuando $n \to \infty$.

Ejemplo 4.1:

Se supone que la $f.d.p.$ del tiempo de vida futuro, T para (x) es

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{80} & 0 < t < 80 \\ 0 & Otro\,Caso. \end{cases}$$

A una fuerza de interés, δ, calcule para Z (la variable aleatoria del valor presente para un seguro de vida completo de monto unitario expedido a (x)):

a. la prima neta única
b. la varianza
c. el percentil 90th, $\xi_{0.9}$.

Solución:

a. $\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^\infty v^t, g(t)\, dt = \int_0^{80} e^{-\delta t}\frac{1}{80}dt = \frac{1 - e^{-80\delta}}{80\delta} \qquad \delta \neq 0$

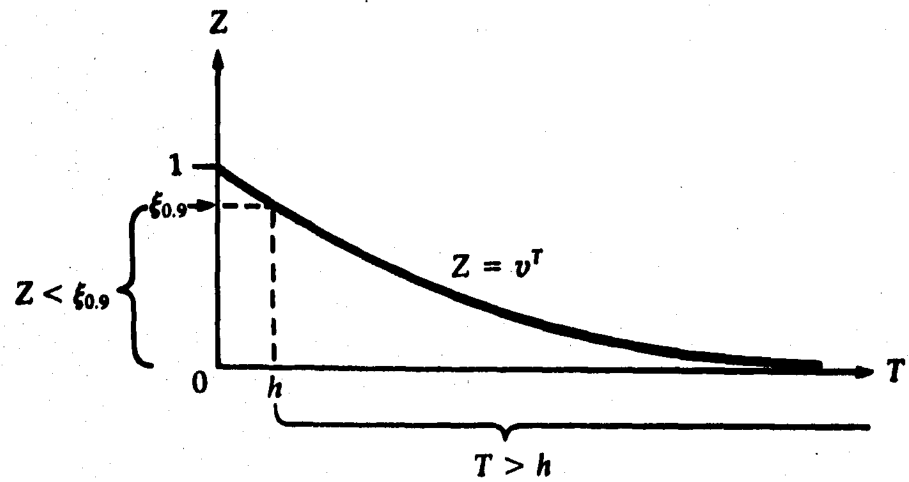
b. Por el Teorema 4.1,

$$Var[Z] = \frac{1-e^{-160\delta}}{160\delta} - \left(\frac{1-e^{-80\delta}}{80\delta}\right)^2 \qquad \delta \neq 0.$$

c. **Para la variable aleatoria contínua, Z, tenemos**

$$Pr(Z \leq \xi_{0.9}) = 0.9.$$

Figura 4.1 **Determinación de $\xi_{0.9}$**



Como tenemos la $f.d.p.$ para T y no para Z, **procedemos encontrando el evento T que corresponda** a $Z \leq \xi_{0.9}$. La Figura 4.1 muestra la relación entre el **espacio muestral de T (en el eje horizontal) y el** espacio muestral de Z (en el eje vertical).

Aquí h es tal que

$$Pr(T > h) = 0.9$$

$$\int_h^{80} \frac{1}{80} dt = 0.9,$$

por lo tanto

$$h = 8$$

y

$$\xi_{0.9} = v^8.$$

∇

Volvemos ahora la atención a una aplicación común que involucra cartera de riesgos–determinando un fondo de inversión inicial para un segmento de seguros en la cartera total. Se utilizará el modelo de riesgo individual y la aproximación normal (como se discutió en la Sección 2.4).

Ejemplo 4.2:

Suponga que cada una de 100 vidas independientes

- tiene edad x,
- está sujeta a una fuerza constante de mortalidad, $\mu = 0.04$, y
- está asegurada por un monto de indemnización por fallecimiento de 10 unidades, pagadero en el momento de la muerte.

Los pagos de indemnización serán retirados de un fondo de inversión que gana $\delta = 0.06$. Calcule el monto mínimo en $t = 0$ de tal forma que la probabilidad de que habrá suficientes fondos a la mano para retirar el pago de indemnizaciones a la muerte de cada individuo sea aproximadamente 0.95.

Solución:

Para cada vida,

$$\begin{aligned} b_t &= 10 & t &\geq 0 \\ v_t &= v^t & t &\geq 0 \\ Z &= 10v^T & T &\geq 0. \end{aligned}$$

Si pensamos que las vidas están numeradas, quizás por el orden de expedición de las pólizas, entonces en $t = 0$ el valor presente de todos los pagos que se harán es

$$S = \sum_{1}^{100} Z_j$$

en donde Z_j es el valor presente en $t = 0$ para el pago a realizarse a la muerte de la j-ésima vida.

Para calcular la media y la varianza, podemos utilizar el hecho de que Z es 10 veces el valor presente de la variable aleatoria para el monto unitario del seguro de vida completo. Para fuerzas constantes de interés, δ, y la mortalidad, μ, la prima neta única para el monto unitario del seguro de vida entera es

$$\bar{A}_x = \int_o^{\infty} e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu dt = \frac{\mu}{\mu + \delta}.$$

Entonces, para este ejemplo

$$
\begin{aligned}
E[Z] &= 10\bar{A}_x = 10\frac{0.04}{0.1} = 4 \\
E[Z^2] &= 10^2\,{}^2\bar{A}_x = 100\frac{0.04}{0.04+2(0.06)} = 25
\end{aligned}
$$

y la $Var[Z] = 9$.

Usando estos valores para la media y la varianza de cada término en la suma para S, tenemos

$$
\begin{aligned}
E[S] &= 100(4) = 400 \\
Var[S] &= 100(9) = 900.
\end{aligned}
$$

Analíticamente, el monto mínimo requerido es un número, h, tal que

$$Pr(S \leq h) = 0.95,$$

o equivalentemente

$$Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sigma(s)} \leq \frac{h - 400}{30}\right) = 0.95.$$

Mediante el uso de una aproximación normal, obtenemos

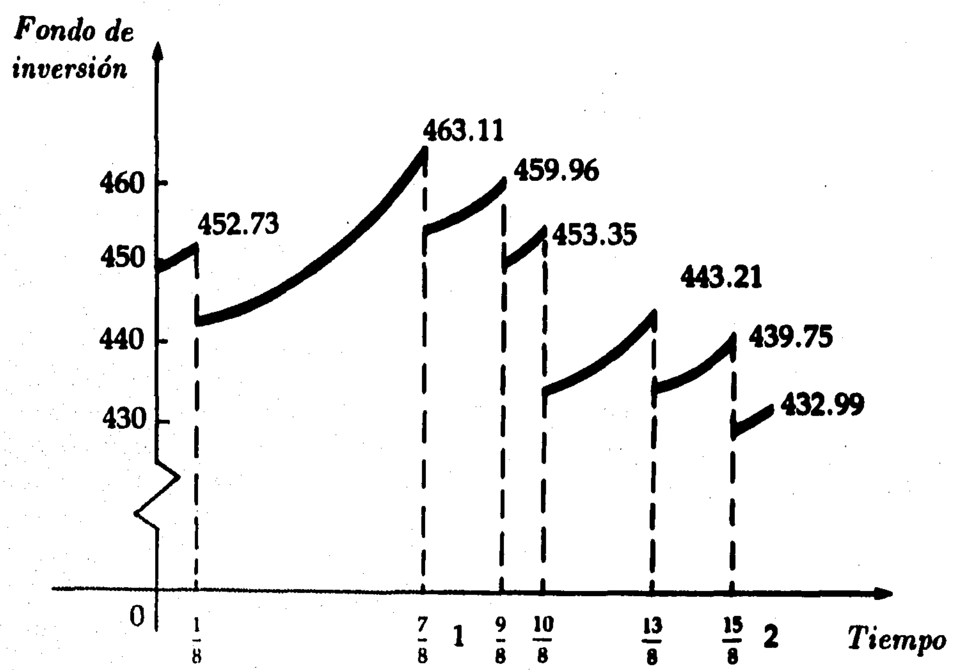
$$
\begin{aligned}
\frac{h-400}{30} &= 1.645 \\
h &= 449.35.
\end{aligned}
$$

∇

La diferencia de 49.35 entre este fondo inicial de 449.35 y la esperanza del valor presente de todos los pagos, 400, es el recargo por riesgo del Capítulo 1. El recargo es 0.4935 por vida, o 4.935% por unidad de pago, o 12.34% de la prima neta única.

Este ejemplo, como los Ejemplos 2.2 y 2.3 utilizaron el modelo de riesgo individual y una aproximación normal a la distribución de probabilidad de S. En los ejemplos de corto plazo, se determinó que el ingreso recaudado, igual a las reclamaciones esperadas más un recargo por riesgo, tuviera una probabilidad alta de exceder las reclamaciones. En este ejemplo de seguro de vida de largo plazo, el ingreso recaudado más el ingreso por intereses a la tasa de interés asumida, se determinó que era suficiente para cubrir los pagos por indemnizaciones. El fondo inicial de 449.35 cubrirá menos del 45% del pago eventual de 1,000. En la Figura 4.2 se muestra la cantidad del fondo durante los dos primeros años para un patrón de pago en el que ocurre un fallecimiento en los periodos 1/8, 7/8, 9/8, 13/8 y 15/8, y dos fallecimientos en el periodo 10/8. Entre los pagos de indemnización representados por las discontinuidades, estan los arcos exponenciales representando el crecimiento del fondo en $\delta = 0.06$.

Figura 4.2: Gráfica de un Resultado para el Fondo.



Hay muchos patrones de pago, cada uno con su propia gráfica. Tanto el número de reclamaciones y el tiempo en que se presentan afectan al fondo. Por ejemplo, si las 7 reclamaciones hubiesen ocurrido en el primer instante, en lugar del patrón de pago de la Figura 4.2, el fondo habría caido inmediatamente a 379.95 y después se hubiese incrementado a 427.72 al final del segundo año.

Estos ejemplos ilustran los diferentes roles de los tres elementos aleatorios en la construcción del modelo de riesgo, es decir, ya sea que ocurra una reclamación o no, el tamaño y el tiempo de pago de al menos una se presenta. En el Ejemplo 2.2 sólo había incertidumbre acerca de la ocurrencia de la reclamación. En el Ejemplo 4.2 sólo la había acerca del tiempo de la reclamación del pago. Otras incertidumbres fueron ingnoradas en estos modelos. En los Ejemplos 4.1 y 4.2 ignoramos la posibilidad de que el fondo ganará intereses a tasas diferentes de las determinísticas asumidas.

4.2.2 Seguro Dotal

Una *dotación pura de n años* prevee un pago al final de n años si y solo si el asegurado sobrevive al menos n años desde la expedición de la póliza. Si el monto pagadero es una unidad, entonces

$$b_t = \begin{cases} 0 & t \leq n \\ 1 & t > n \end{cases}$$

$$v_t = v^n \quad t \geq 0$$

$$Z = \begin{cases} 0 & T \leq n \\ v^n & t > n \end{cases}$$

El único elemento de incertidumbre en la dotación pura es si ocurrirá o no la reclamación. El tamaño y el tiempo del pago, si ocurre una reclamación, están predeterminados. La prima neta única se denota como $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$. En la expresión $Z = v^n Y$, Y es el indicador del evento de la sobrevivencia a la edad $x+n$. Esta Y tiene el valor 1 si el asegurado sobrevive a la edad $x+n$. La prima neta única es

$$\begin{aligned} A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} &= E[Z] = v^n E[Y] = v^n \, {}_np_x \\ &\text{y} \\ Var[Z] &= v^{2n} Var[Y] = v^{2n} \, {}_np_x \, {}_nq_x \\ &= {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} - (A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}})^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Un *seguro dotal de n años* prevee una cantidad pagadera ya sea después de la muerte del asegurado o a la sobrevivencia del mismo al final del plazo de n años; lo que ocurra primero. Si el seguro es por el monto de una unidad y el beneficio por fallecimiento es pagadero en el momento de la muerte, entonces

$$
\begin{aligned}
b_t &= 1 \qquad t \geq 0 \\
v_t &= \begin{cases} v^t & t \leq n \\ v^n & t > n \end{cases} \\
Z &= \begin{cases} v^T & T \leq n \\ v^n & T > n. \end{cases}
\end{aligned}
$$

La prima neta única se denota por $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$.

Este seguro puede ser visto como la combinación de un seguro a plazo de n años y de una dotación pura a n años, cada una por el monto de una unidad. Permitamos que Z_1, Z_2 y Z_3 representen el valor presente del plazo de las variables aleatorias, la dotación pura y el seguro dotal, respectivamente, con indemnizaciones pagaderas al momento de la muerte de (x). De las definiciones precedentes tenemos

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \begin{cases} v^T & T \leq n \\ 0 & T > n \end{cases} \\
Z_2 &= \begin{cases} 0 & T \leq n \\ v^n & T > n \end{cases} \\
Z_3 &= \begin{cases} v^T & T \leq n \\ v^n & T > n. \end{cases}
\end{aligned}
$$

se sigue que

$$Z_3 = Z_1 + Z_2 \tag{4.8}$$

y tomando esperanzas en ambos lados

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}. \tag{4.9}$$

Como $b_t = 1$ para el seguro dotal, tenemos mediante el **Teorema 4.1,**

$$E[Z_3^j] \;@\; \delta = E[Z_3]@j\delta.$$

Más aún,

$$Var[Z_3] = {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2. \tag{4.10}$$

También podemos encontrar la $Var[Z_3]$ utilizando (4.8),

$$Var[Z_3] = Var[Z_1] + Var[Z_2] + 2Cov[Z_1, Z_2]. \tag{4.11}$$

Mediante el uso de la fórmula

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] \tag{4.12}$$

y la observación de que

$$Z_1 Z_2 = 0$$

para toda T, tenemos

$$Cov[Z_1, Z_2] = -E[Z_1]E[Z_2] = -\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\ A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \tag{4.13}$$

Sustituyendo (4.5), (4.7) y (4.13) en (4.11) produce unafórmula para la $Var[Z_3]$ en términos de primas netas únicas para un seguro a n años plazo y una dotación pura.

Como las primas netas únicas son positivas, la $Cov[Z_1 Z_2]$ es negativa. Esto debía anticiparse ya que del par Z_1 y Z_2, uno es siempre 0 y el otro es positivo. Por otra parte, el coeficiente de correlación de Z_1 y Z_2 no es -1 porque no son funciones lineales una de la otra.

4.2.3 Seguro Diferido

Un *seguro diferido a m años* prevee una indemnización después de la muerte del asegurado sólo si el asegurado muere al menos m años después de la expedición de la póliza. La indemnización pagadera y el plazo del seguro puede ser cualquiera de los mencionados anteriormente. Por ejemplo, un seguro de vida completo diferido a m años con un monto unitario pagadero al momento del fallecimiento tiene

$$\begin{aligned} b_t &= \begin{cases} 1 & t > m \\ 0 & t \leq m \end{cases} \\ v_t &= v^t \qquad t > 0 \\ Z &= \begin{cases} v^T & T > m \\ 0 & T \leq m. \end{cases} \end{aligned}$$

La prima neta única se denota por ${}_{m|}\bar{A}_x$ y es igual a

$$\int_m^\infty v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt. \tag{4.14}$$

Ejemplo 4.3:

Considere un seguro de vida completo diferido a 5 años pagadero al momento de la muerte de (x). El individuos está sujeto a una fuerza constante de mortalidad $\mu = 0.04$. Para la distribución del valor presente del pago del beneficio, en $\delta = 0.10$, calcule la

a. **esperanza**
b. **varianza**
c. **mediana $\xi_{0.5}$.**

Solución

a. **Para fuerzas arbitrarias μ y δ,**

$${}_{5|}\bar{A}_x = \int_5^\infty e^{-\delta t}e^{-\mu t}\,\mu dt = \frac{\mu}{\mu+\delta}e^{-5(\mu+\delta)},$$

por tanto para $\mu = 0.04$ y $\delta = 0.10$,

$${}_{5|}\bar{A}_x = \frac{2}{7}e^{-0.7} = 0.1419.$$

b. Por el Teorema 4.1

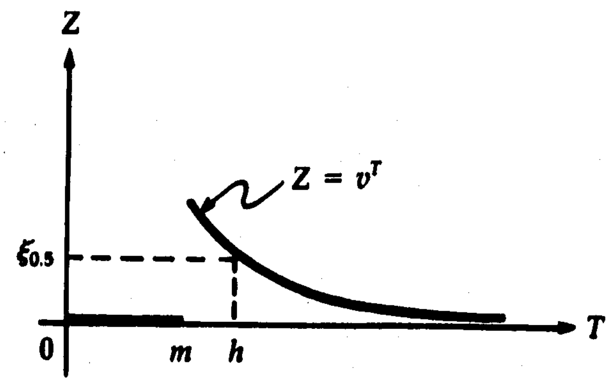
$$Var[Z] = \frac{0.04}{0.04+0.20}e^{-5(0.04+0.20)} - \frac{4}{49}e^{-1.4} = 0.0301.$$

c. Al igual que en el Ejemplo 4.1, **una gráfica de la relación entre Z y T proporciona un perfil de** la solución. En la Figura 4.3 se **grafica el periodo diferido de m años en general y para el caso cuando** $Pr(T \leq m) < 0.5$.

Mientras que T es una **variable aleatoria contínua, Z está mezclada con una masa de probabilidad** en 0 porque $Z = 0$ corresponde a $T \leq m$. Si $Pr(Z = 0) \geq 0.5$, **entonces $\xi_{0.5} = 0$, de otra manera $\xi_{0.5}$ es** la solución de

$$Pr(Z \leq \xi_{0.5}) = 0.5. \tag{4.15}$$

Figura 4.3: Determinación de la Mediana



En este ejemplo

$$Pr(Z = 0) = Pr(T \leq 5) = \int_o^5 e^{-0.04t}\, 0.04\, dt = 1 - e^{-0.2} = 0.1813,$$

por lo tanto $\xi_{0.5}$ no es 0 y podemos escribir (4.15) en la forma

$$Pr(Z = 0) + Pr(0 < Z \leq \xi_{0.5}) = 0.5,$$

y después reducirla a

$$Pr(0 < Z \leq \xi_{0.5}) = 0.3187.$$

Esta ecuación es equivalente a

$$Pr(v^T < \xi_{0.5}) = 0.3187$$

que puede transformarse a

$$Pr = \left(T > \frac{\log \xi_{0.5}}{\log v}\right) = 0.3187.$$

Por lo tanto buscamos una h tal que

$$
\begin{aligned}
{}_hp_x &= 0.3187 \\
e^{-0.04h} &= 0.3187, \\
h &= \tfrac{\log(0.3187)}{-0.04}.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\frac{\log \xi_{0.5}}{\log v} = \frac{\log(0.3187)}{-0.04}$$

y por tanto

$$\xi_{0.5} = (0.3187)^{5/0.04} = 0.0573.$$

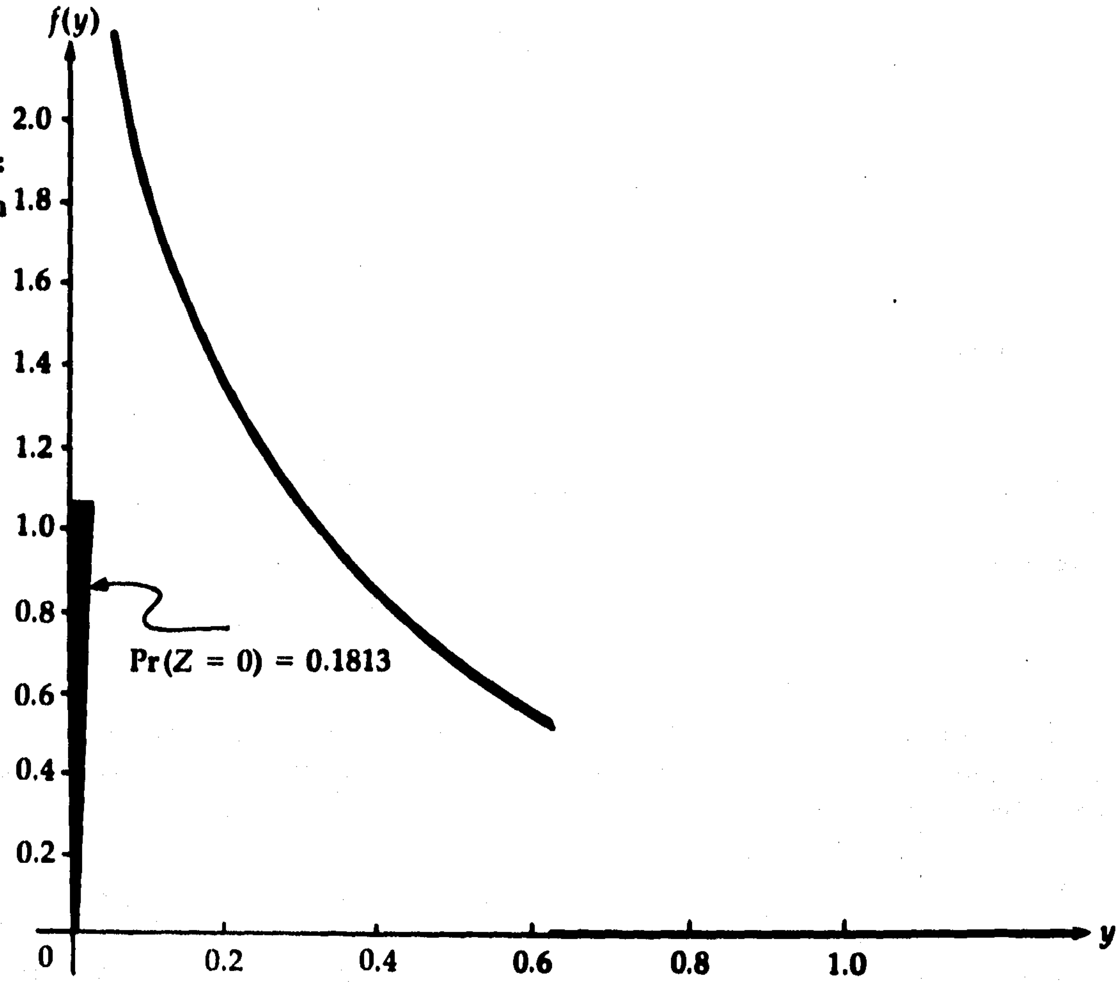
En este ejemplo el valor más grande de Z con probabilidad de densidad diferente de $e^{-0.1(5)} = 0.6065$, es correspondiente a $T = 5$. Mediante un desarrollo similar al utilizado para encontrar la mediana, puede demostrarse que

$$F(y) = Pr(Z \leq y) = 0.1813 + y^{0.4}, \text{ para } 0 < y \leq 0.6065.$$

Entonces la función de densidad de probabilidad es $0.4y^{-0.6}$, $0 < y \leq 0.6065$. En la Figura 4.4 se presenta un diagrama de la distribución de Z. El espacio sombreado en forma de clavo representa la masa de probabilidad en $Z = 0$, su valor es 0.1813, y no debe leerse de la escala del eje vertical ya que sólo aplica a la *f.d.p.* en $y > 0$.

En este ejemplo la distribución de Z está muy sesgada a la derecha. Mientras que su masa total está en el intervalo $[0, 0.6065]$ y su media es 0.1419, su mediana es solo 0.0573. Esta asimetría en dirección de valores positivos más grandes es característica de muchas distribuciones de reclamaciones en todos los campos del seguro. ∇

Figura 4.4: Distribución de Z



4.2.4 Seguro de Beneficio Variable

El modelo general dado por (4.1) puede utilizarse para el análisis en la mayoría de las aplicaciones. Lo hemos utilizado en seguros de vida con nivel de indemnización fijo. También puede aplicarse a aquéllos en los que el nivel de indemnización por fallecimiento puede incrementarse o disminuir en progresión aritmética, durante todo el plazo del seguro o una parte del mismo. A menudo, dichos seguros se venden como una indemnización adicional cuando un seguro base prevee el pago de primas periódicas al fallecimiento o cuando un contrato anual contiene una garanatía de pagos suficientes para igualar la prima inicial.

Un *seguro de vida entera creciente* que prevee el pago de 1 al momento del fallecimiento dentro del primer año, 2 al momento del fallecimiento en el segundo año y así sucesivamente se caracteriza por las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} b_t &= [t+1] & t &\geq 0 \\ v_t &= v^t & t &\geq 0 \\ Z &= [T+1]v^T & T &\geq 0. \end{aligned}$$

Los paréntesis cuadrados denotan la función *entero más grande*,

$$[t] = k \qquad\qquad k \le t < k+1,\ k = 0, \pm 1, \cdots.$$

La prima neta única para ese tipo de seguro es

$$(I\bar{A})_x = E[Z] = \int_0^\infty [t+1]\, v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt.$$

Los momentos de orden superior no son iguales a la prima neta única a una fuerza de interés ajustada, como fue el caso para los seguros con pagos de indemnizaciones fijas. Estos momentos pueden calcularse directamente a partir de sus definiciones.

Los incrementos en la indemnización del seguro pueden ocurrir con mayor frecuencia que una vez al año. Para un seguro de vida entera mensualmente creciente la indemnización sería $1/m$ al momento del fallecimiento durante el primer mes del año del plazo del seguro, $2/m$ al momento del fallecimiento durante el segundo mes del año durante el plazo del seguro y así sucesivamente creciendo $1/m$ a intervalos mensuales durante todo el plazo del seguro. Para tal tipo de seguro de vida completo, las funciones son

$$\begin{aligned} b_t &= \frac{[tm+1]}{m} && t \ge 0 \\ v_t &= v^t && t \ge 0 \\ Z &= \frac{v^T[Tm+1]}{m} && T \ge 0. \end{aligned}$$

La prima neta única es

$$(I^{(m)}\bar{A})_x = E[Z].$$

El caso límite, a medida que $m \to \infty$ en el seguro de vida creciente mensualmente, es un pago t del seguro al momento del fallecimiento, t. Sus funciones son

$$\begin{aligned} b_t &= T && t \ge 0 \\ v_t &= v^t && t \ge 0 \\ Z &= Tv^t && T \ge 0. \end{aligned}$$

Su símbolo de la prima neta única es $(\bar{I}\bar{A})_x$.

Este seguro de vida completo continuamente creciente es equivalente a un conjunto de seguros de vida completos de nivel diferido. Esta equivalencia se demuestra gráficamente en la Figura 4.5 en donde la región entre la línea $b_t = t$ y el eje de las t representan el seguro a lo largo del tiempo futuro de vida. Si se juntan las regiones infinitésimales en dirección vertical para una t fija, se obtiene la indemnización total pagadero en t. Si se juntan en dirección horizontal para una s fija, se obtiene un seguro de vida completo diferido a s años por el monto del nivel ds.

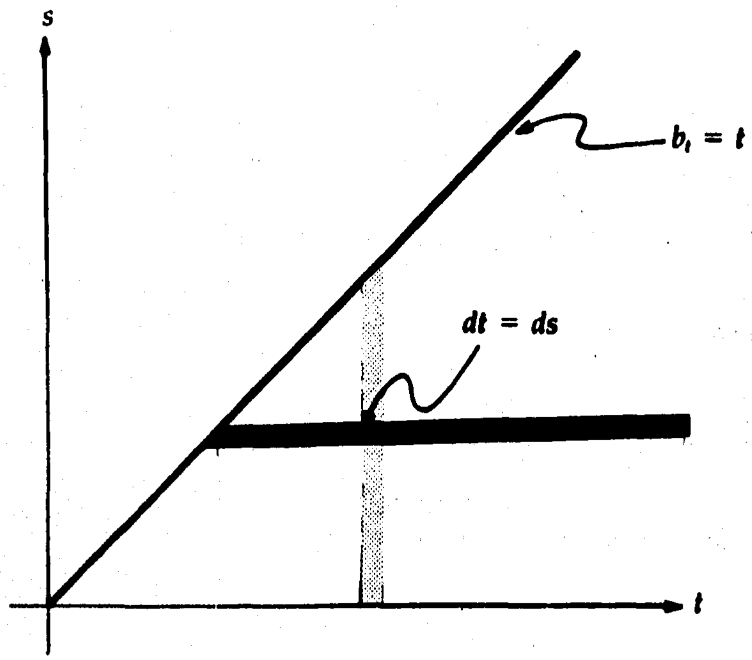
Esta equivalencia implica que las primas netas únicas para las coberturas son iguales. La igualdad puede establecerse de las iguiente forma.

Por definición,

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty t\, v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt,$$

e interpretando t en la integrante como la integral de 0 a t en la Figuraa 4.5 tenemos

Figura 4.5: Seguro de Crecimiento Continuo



$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty \left(\int_0^t ds\right) v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt.$$

Si cambiamos el orden de la integración y, para cada valor de s, integramos en t de s a ∞, tenemos

$$
\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{A})_x &= \int_0^\infty \int_s^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt\, ds, \\
&= \int_0^\infty {}_{s|}\bar{A}_x\, ds
\end{aligned}
$$

por (4.14).

Si, para cualquiera de estos seguros de vida crecientes mensualmente, el beneficio es pagadero sólo si ocurre el fallecimiento dentro de un plazo de n años, el seguro es un seguro de vida creciente a n años.

El complemento del seguro de vida creciente a n años es *el seguro de vida decreciente a n años* plazo que prevee un pago de n al momento de la muerte durante el primer año, $n-1$ al momento de la muerte durante el segundo año y asi sucesivamente y la cobertura termina al final del n-ésimo año.

Ese tipo de seguro tiene las siguientes funciones:

$$
\begin{aligned}
b_t &= \begin{cases} n-[t] & t \le n \\ 0 & t > n \end{cases} \\
v_t &= v^t \qquad t > 0 \\
Z &= \begin{cases} v^T(n-[T]) & T \le n \\ 0 & T > n. \end{cases}
\end{aligned}
$$

La prima neta única para este seguro es

$$
(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,(n-[t])\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt.
$$

Este seguro es complementario al seguro creciente de n años plazo en el sentido de que la suma de sus funciones de beneficio es la constante $n+1$ para el enésimo año del plazo.

La Tabla 4.1 es un resumen de los modelos de esta sección. El nombre del plan del seguro aparece en la primera columna seguido por las funciones de beneficio y de descuento que lo definen en términos del tiempo futuro de vida del asegurado a la expedición de la póliza. Después se presenta la función de valor presente, que siempre se deriva como el producto de las funciones anteriores. En la quinta columna se muestra la Notación Actuarial Internacional. En la última columna, se hace referencia a una nota de pié de página que establece si el Teorema 4.1 puede o no utilizarse para calcular los momentos de orden superior.

Tabla 4.1

Resumen de Seguros Pagaderos Inmediatamente al Fallecimiento

(1) Nombre del seguro	(2) Función de Beneficios b_t	(3) Función de Desc. v_t	(4) función Val. Pres. z_t	(5) (Prima) neta única	(6) Mom. de Orden Sup.
Ord. de Vida	1	v^t	v^t	$\bar{A}_x$	1.
Temp. a n Años	$1 \quad t \leq n$ $0 \quad t > n$	v^t	$v^t \quad t \leq n$ $0 \quad t > n$	$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}$	1.
Dotal Puro a n Años	$1 \quad t \leq n$ $0 \quad t > n$	v^n	$0 \quad t \leq n$ $v^n \quad t > n$	$A_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}$	1.
Dotal a n Años	1	$v^t \quad t \leq n$ $v^n \quad t > n$	$v^t \quad t \leq n$ $v^n \quad t > n$	$\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}$	1.
Diferido m Años, Temp. n Años	$1 \quad m < t \leq n+m$ $0 \quad t \leq m, t > n+m$	v^t	$v^t \quad m < t \leq n+m$ $0 \quad t \leq m, t > n+m$	${}_{m\|n}\bar{A}_x$	1.
Creciente Anual, Temp. n Años	$[t+1] \quad t \leq n$ $0 \quad t > n$	v^t	$[t+1]v^t \quad t \leq n$ $0 \quad t > n$	$(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}\rceil}$	2.
Decrec. Anual Temp. n Años	$n-[t] \quad t \leq n$ $0 \quad t > n$	v^t	$(n-[t])v^t \quad t \leq n$ $0 \quad t > n$	$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}\rceil}$	2.
Ordin.de Vida Crec. mensual	$[tm+1]/m$	v^t	$v^t[tm+1]/m$	$(I^{(m)}\bar{A})_x$	2.

b_t, v_t y z_t están definidas solo para $t \geq 0$.

1. El momento j–ésimo es igual a la prima neta única a j veces la fuerza de interés dada, denotada por ${}^j\bar{A}$ para $j > 1$. Entonces la varianza es ${}^2\bar{A} - \bar{A}^2$, simbólicamente.

2. Calcular directamente a partir de la definición, $E[Z^j]$.

4.3 Seguros Pagaderos al Final del Año del Fallecimiento

En la sección anterior desarrollamos modelos para seguros de vida con beneficios por fallecimiento pagaderos al momento de la muerte. En la práctica, este es el tiempo de pago para casi todos los seguros. Los modelos fueron construidos en términos de T, el tiempo futuro de vida del asegurado a la expedición de la póliza. En la mayoría de las aplicaciones del seguro de vida, la mejor información disponible sobre la distribución de probabilidad de T tiene la forma de una tabla de vida discreta, es decir, la distribución de probabilidad de K, el tiempo de vida futuro truncado del asegurado a la expedición de la póliza es una función de T. En esta y en la siguiente sección cruzaremos esta brecha mediante la construcción de modelos para seguros de vida en los que el tamaño y tiempo del pago de los beneficios al fallecimiento dependen únicamente del número de años completos vividos por el asegurado desde la expedición de la póliza hasta el tiempo de su fallecimiento. Nos referiremos simplemente a estos seguros como *pagaderos al final del año del fallecimiento* .

Nuestro modelo estará en términos de las funciones del tiempo-futuro-de-vida-truncado del asegurado. La función de beneficio, b_{k+1}, y la función de descuento, v_{k+1}, serán, respectivamente, el monto del beneficio pagadero y el factor de descuento requerido para el periodo desde el momento del pago a la expedición de la póliza, cuando el tiempo futuro de vida truncado del asegurado es k, es decir, cuando el asegurado muere en el año $k+1$ del seguro. El valor presente, a la expedición de la póliza, de este pago de beneficio, denotada por z_{k+1}, es

$$z_{k+1} = b_{k+1}\, v_{k+1}. \tag{4.16}$$

Al momento de la expedición de la póliza, el año del fallecimiento del seguro es 1 más la variable aleatoria del tiempo futuro de vida truncado, K, definida en la Sección 3.2.3.

Al igual que en la sección anterior, denotaremos la variable aleatoria del valor-presente Z_{K+1}, con Z.

Para un seguro a plazo de n años que proporciona el monto de una unidad al final del año del fallecimiento, tenemos

$$\begin{aligned}
b_{k+1} &= \begin{cases} 1 & k = 0, 1, \cdots, n-1 \\ 0 & \textit{Otro Caso} \end{cases} \\
v_{k+1} &= v^{k+1} \\
Z &= \begin{cases} v^{k+1} & k = 0, 1, \cdots, n-1 \\ 0 & \textit{Otro Caso.} \end{cases}
\end{aligned}$$

La prima neta única para este seguro está dada por

$$A^{1}_{x:\overline{n|}} = E[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}. \tag{4.17}$$

El Teorema 4.1, con los cambios en notación apropiados, también se mantiene para los seguros pagaderos al final del año del fallecimiento.

Por ejemplo, para el seguro anterior a plazo de n años,

$$Var[Z] = {}^2A^{1}_{x:\overline{n|}} - (A^{1}_{x:\overline{n|}})^2$$

en donde

$${}^2A^{1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)}\, {}_kp_x\, q_{x+k}.$$

Para un seguro de vida entera expedido a (x), el modelo puede obtenerse dejando $n \to \infty$ en el modelo para el seguro a plazo de n años. Para la prima neta única tenemos

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} u^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}. \tag{4.18}$$

Multiplicando ambos lados de (4.18) por l_x se genera

$$l_x\, A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, d_{x+k}. \tag{4.19}$$

La ecuación (4.19) muestra el balance, al tiempo de expedición de la póliza, entre el fondo agregado de primas netas únicas para l_x vidas aseguradas a la edad x y el flujo de fondos de acuerdo a sus muertes esperadas. Es una ecuación de interés compuesto del valor establecido sobre la base del valor esperado.

La expresión,

$$\sum_{k=r}^{\infty} v^{k+1}\, d_{x+k}, \tag{4.20}$$

es esa parte del fondo a la expedición que, junto con el interés a la tasa asumida, proveerá los pagos para las muertes esperadas después del r−ésimo año del seguro. La acumulación de (4.20) a la tasa de interés asumida para r años produce

$$\sum_{k=r}^{\infty} v^{k-r+1}\, d_{x+k}, \tag{4.21}$$

la cantidad esperada en el fondo despues de r años del seguro. La comparación entre la expresión (4.21) con (4.19) demuestra que es $l_{x+r}\, A_{x+r}$. La diferencia entre esta cantidad y el fondo real se debe a desviaciones de los fallecimientos reales de los esperados (de acuerdo a la tabla de vida adoptada), y a las desviaciones entre el ingreso real de los intereses del ingreso por intereses a la tasa asumida.

Ejemplo 4.4:

Un grupo de 100 hombres de 30 años establecen un fondo para pagar 1,000 el final del año del fallecimiento de cada integrante a su sobreviviente designado. Su acuerdo mutuo es pagar al fondo una cantidad igual a la prima neta única del seguro de vida entera calculado sobre la base de la Tabla de Vida Total para Hombres: E.U.A., 1979 – 1981, al 6% de interés. Los integrantes, no seleccionados por una compañía aseguradora, decidieron utilizar esta tabla de población para hombres como base para su plan. La experiencia real del fondo es una muerte en el segundo y el quinto años; el ingreso por intereses fue de 6% en el primer año, 61/2% en el segundo y tercero, 7% en el cuarto y quinto años.

¿ Cuál es la diferencia, al final de los cinco primeros años entre el tamaño esperado del fondo como se determinó al concebirse el plan y el fondo real?

Solución :

Sobre las bases acordadas, $1,000A_{30} = 115.18$, por tanto para las 100 vidas, el fondo empieza en $11,518$. También, $A_{35} = 0.1445842$ y $l_{35}/l_{30} = 0.9902582$.

Para 100 vidas de 30 años de edad, el tamaño esperado del fondo después de 5 años será

$$(1,000)(100)\frac{l_{35}}{l_{30}}A_{35} = 14,317.57.$$

El desarrollo del fondo real sería el siguiente, en donde F_k denota su tamaño al final del año del seguro k:

$$\begin{aligned}
F_0 &= 11,518\\
F_1 &= (11,518.00)(1.06) = 12,209.08\\
F_2 &= (12,209.08)(1.065) - 1,000 = 12,002.67\\
F_3 &= (12,002.67)(1.065) = 12,782.84\\
F_4 &= (12,782.84)(1.07) = 13,677.64\\
F_5 &= (13,677.64)(1.07) - 1,000 = 13,635.07.
\end{aligned}$$

Por tanto la diferencia requerida es $14,317.57 - 13,635.07 = 682.50$. Este es un resultado agregado en el sentido de que combina la experiencia de inversión y la experiencia de mortalidad para el periodo de 5 años. Hubo ganancias de las utilidades de la inversión en exceso de la tasa asumida de 6%. Por otra parte, hubo pérdidas en la experiencia de la mortalidad de 2 fallecimientos si se compara con el número esperado de 0.9742. La interpretación de dicho resultado en tárminos de las diversas fuentes tales como las utilidades de la inversión, la mortalidad etc., es una de las responsabilidades de la práctica actuarial.

∇

El seguro dotal a n años por la cantidad de una unidad pagadera al final del año del fallecimiento es una combinación del seguro a plazo de n años de esta sección y la dotación pura a n años por la cantidad de una unidad que se discutió en la sección anterior. Por lo tanto sus funciones son

$$\begin{aligned}
b_{k+1} &= 1 \qquad k = 0, 1, \cdots\\
v_{k+1} &= \begin{cases} v^{k+1} & k = 0, 1, \cdots, n-1\\ v^n & k = n, n+1, \cdots. \end{cases}\\
Z &= \begin{cases} v^{k+1} & k = 0, 1, \cdots, n-1\\ v^n & k = n, n+1, \cdots. \end{cases}
\end{aligned}$$

La prima neta única es

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} + v^n\, {}_np_x. \tag{4.22}$$

El seguro creciente de vida entera, que paga $k+1$ unidades al final del año del seguro $k+1$ siempre y cuando el asegurado muera en ese año del seguro tiene las siguientes variables aleatorias de beneficios, descuento y valor presente:

$$\begin{aligned} b_{K+1} &= K+1 & K &= 0,1,2,\cdots \\ v_{K+1} &= v^{K+1} & K &= 0,1,2,\cdots \\ Z &= (K+1)v^{K+1} & K &= 0,1,2,\cdots. \end{aligned}$$

La prima neta única está denotada por $(IA)_x$.

El seguro decreciente a plazo de n años, durante el periodo del $n-$ésimo año, proporciona un beneficio al final del año del fallecimiento en una cantidad igual a $n-k$ en donde k es el número de años completos vividos por el asegurado desde la expedición de la póliza. Sus funciones son

$$b_{k+1} = \begin{cases} n-k & k = 0,1,\cdots,n-1 \\ 0 & k = n, n+1,\cdots \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1} \qquad k = 0,1,\cdots$$

$$Z = \begin{cases} (n-K)v^{k+1} & K = 0,1,\cdots,n-1 \\ 0 & K = n, n+1,\cdots. \end{cases}$$

El símbolo de la prima neta única para este seguro es $(DA)^{1}_{x:\overline{n}|}$.

Como se ilustró en la Figura 4.5 para seguros pagaderos al momento del fallecimiento, los seguros crecientes pagaderos al final del año del fallecimiento son equivalentes a una combinación de seguros diferidos cada uno por el monto de una unidad. Igualmente, los seguros de plazos decrecientes son equivalentes a una combinación de seguros de plazos fijos de diferentes plazos. La Figura 4.6 ilustra esto para un seguro decreciente a 8 años de plazo.

Esta muestra la gráfica de la función de beneficio b_{K+1}. Cada unidad en forma de cuadro entre los escalones horizontales y el eje de las k representa un seguro diferido a plazo de un año. Cuando estos se suman verticalmente, se obtienen los seguros diferidos a plazo de un año para las cantidades decrecientes. Cuando los cuadros se suman horizontalmente, se obtienen los seguros a plazo de cantidad fija, de duración variable. En la Figura 4.6 también se indican estas sumas verticales y horizontales.

La igualdad de las primas netas únicas para la combinación de los seguros a plazo fijo y la combinación de los seguros a plazo diferido pueden demostrarse analíticamente. Por tanto, por la definición

$$
\begin{aligned}
(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(v^k\,{}_kp_x)(v\,q_{x+k}) \qquad (4.23)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,{}_{k|}A^{1}_{x:\overline{1}|},
\end{aligned}
$$

el total de las sumas de la columna.

En (4.23) podemos sustituir

$$n-k=\sum_{j=0}^{n-k-1}(1)$$

para obtener

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-j-1}(1)\,v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}.$$

Cambiando el orden de las sumatorias obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}(1)\,v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k},$$

y después comparando la sumatoria interna a (4.17) podemos expresar

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|}=\sum_{j=0}^{n-1}A^{1}_{x:\overline{n-j}|}.$$

La Tabla 4.2 constituye un resumen de funciones y símbolos para los seguros elementales pagaderos al final del año del fallecimiento que hemos discutido en esta sección.

Figura 4.6: Seguro Decreciente a 8 Años de Plazo

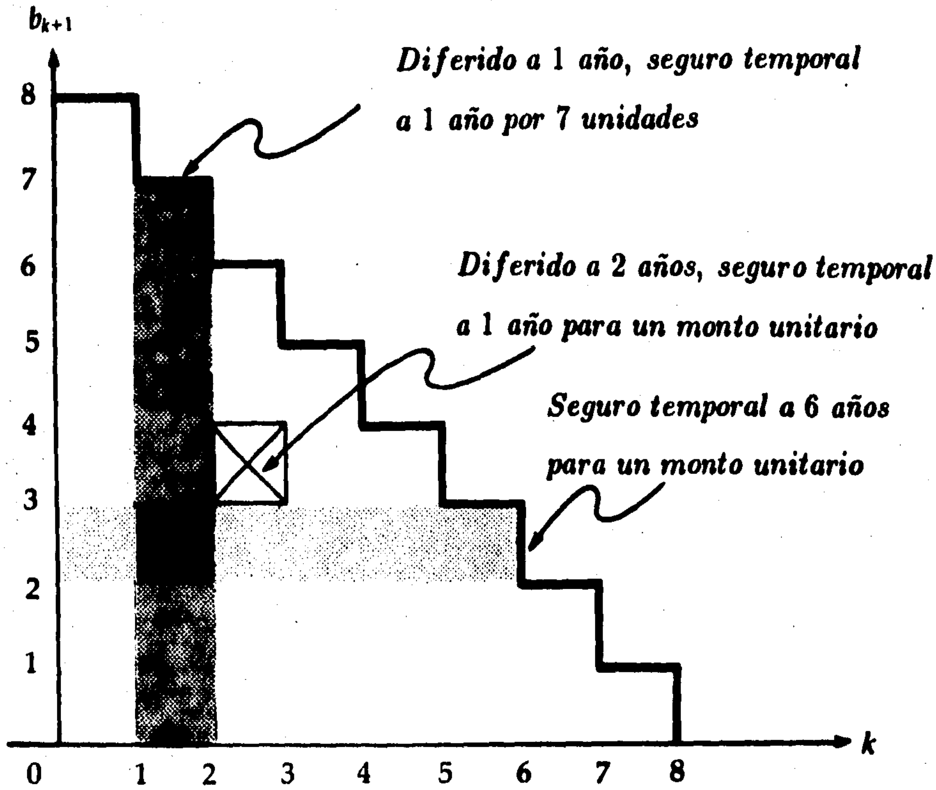


Tabla 4.2

Resumen de Seguros Pagaderos al Final del Año del **Fallecimiento**

(1) Nombre del Seguro	(2) Función de Beneficios b_{k+1}	(3) Función de Descuentos v_{k+1}	(4) Función del V. Pres. Z_{k+1}	(5) Prima Neta Única	(6) Mom. super.
Vida entera	1	v^{k+1}	v^{k+1}	A_x	1.
A n años	$1 \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$ $0 \quad k = n, n+1, \cdots$	v^{k+1}	$v^{k+1} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$ $0 \quad k = n, n+1, \cdots$	$A^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$	1.
Dotal a n años	1	$v^{k+1} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$ $v^{n} \quad k = n, n+1, \cdots$	$v^{k+1} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$ $v^{n} \quad k = n, n+1, \cdots$	$A_{x:\overline{n}\rvert}$	1.
Dif. m años a n años	$1 \quad k = m, m+1, \cdots, m+n-1$ $0 \quad k = 0, \cdots, m-1$ $k = m+n, \cdots$	v^{k+1}	$v^{k+1} \quad k = m, m+1, \cdots, m+n-1$ $0 \quad k = 0, \cdots, m-1$ $k = m+n, \cdots$	${}_{m\rvert n}A_x$	1.
A n años Crec. anual	$k+1 \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$ $0 \quad k = n, n+1, \cdots$	v^{k+1}	$(k+1)v^{k+1} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$ $0 \quad k = n, n+1, \cdots$	$(IA)^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$	2.
A n años Decrec. anual	$n-k \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$ $0 \quad k = n, n+1, \cdots$	v^{k+1}	$(n-k)v^{k+1} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$ $0 \quad k = n, n+1, \cdots$	$(DA)^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$	2.
Vida entera Crec. anual	$k+1 \quad k = 0, 1 \cdots$	v^{k+1}	$(k+1)v^{k+1} \quad k = 0, 1, \cdots$	$(IA)_x$	2.

b_{k+1}, v_{k+1} y Z_{k+1} están definidos sólo para valores enteros positivos de k.

1. El Teorema 4.1 se mantiene, por tanto $Var[Z] = {}^2A - A^2$ simbólicamente.

2. El Teorema 4.1 no se mantiene

4.4 Relaciones entre Seguros Pagaderos al Momento del Fallecimiento y al Final del Año del Mismo.

Empezaremos el estudio de estas relaciones con un análisis de la prima neta única para el seguro de vida entera que paga una unidad de beneficios al momento del fallecimiento. De (4.6) tenemos

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \int_0^{\infty} v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 v^{k+s} \, {}_{k+s}p_x \, \mu_{x+k+s} \, ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x \int_0^1 v^{s-1} \, {}_sp_{x+k} \, \mu_{x+k+s} \, ds. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

La integral de (4.24) puede expresarse en funciones discretas de tablas de vida adoptando uno de los supuestos acerca de la forma de la función de mortalidad entre enteros como se discutió en la Sección 3.6.

Bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos sobre el año de edad,

$$
{}_sp_{x+k} \, \mu_{x+k+s} = q_{x+k} \qquad 0 \leq s \leq 1,
$$

que puede colocarse en (4.24) para obtener

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s} \, ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} \, \bar{s}_{\overline{1}|} = \frac{i}{\delta} A_x. \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Esta ecuación podría haberse predicho bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos entre edades enteras. El efecto del supuesto es hacer la unidad pagadera al momento del fallecimiento equivalente a una unidad pagadera continuamente durante todo el año del fallecimiento.

Con respecto al interés, una unidad pagadera continuamente durante todo el año es equivalente a i/δ al final del año.

La identidad en (4.25) puede alcanzarse utilizando las propiedades de la variable aleatoria del tiempo futuro de vida bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos, como se desarrolló en la Sección 3.6. De (3.41) escribimos $T = K + S$ en donde S es la variable aleatoria de la *fracción del año que se vivió en el año de la muerte* . Observamos que, bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos, K y S son independientes y S tiene una distribución uniforme sobre el intervalo unitario. Como corolarios a estas observaciones, $K+1$ y $1-S$ también son independientes, y $1-S$ tiene una distribución uniforme sobre el intervalo unitario. En la identidad

$$\bar{A}_x = E[v^T] = E[v^{K+1}(1+i)^{1-S}],$$

podemos usar la independencia de $K+1$ y $1-S$ para calcular la esperanza del producto como el producto de las esperanzas,

$$E[v^{K+1}(1+i)^{1-S}] = E[v^{K+1}]E[(1+i)^{1-S}]. \tag{4.26}$$

El primer factor del lado derecho es A_x. Como $1-S$ tiene la distribución uniforme sobre el intervalo unitario, el segundo factor es

$$E[(1+i)^{1-S}] = \int_0^1 (1+i)^t \, 1 \, dt = \frac{i}{\delta}.$$

Por lo tanto, otra vez tenemos $\bar{A}_x = (i/\delta)A_x$ bajo el supuesto de la distribución uniforme de los fallecimientos.

En la Sección 3.6 también discutimos el supuesto que la fuerza de mortalidad es constante entre edades enteras. La interrelación entre la prima neta simple para toda la vida del asegurado pagadera al momento de su muerte y en el extremo del año de la muerte, bajo ese supuesto se desarrollará en el Ejercicio 4.16. Ya que el supuesto de Balducci implica que la fuerza de mortalidad decrece con los años de edad (ver Ejercicio 3.22), no es muy realista para las vidas humanas. Además conduce a una interrelación más complicada que no se desarrollará aquí .

Ahora regresemos a un análisis del seguro que se incrementa anualmente en un plazo de n años pagadero en el momento del fallecimiento. Para este seguro, el valor presente de la variable aleatoria es

$$Z = \begin{cases} [T+1]v^T & T < n \\ 0 & T \geq n. \end{cases}$$

Ya que $[T+1] = K+1$, podemos usar la relación $T = K+S$ para obtener

$$Z = \begin{cases} (K+1)v^{K+1}\, v^{S-1} & T < n \\ 0 & T \geq n. \end{cases}$$

Ahora si W fuera el valor presente neto de la variable aleatoria para el seguro que se incrementa anualmente en un plazo de n años pagadero al final del año del fallecimiento,

$$W = \begin{cases} (K+1)v^{K+1} & K = 0, 1, \cdots, n-1 \\ 0 & K = n, n+1, \cdots. \end{cases}$$

Entonces

$$Z = W(1+i)^{1-S}$$

y

$$E[Z] = E[W(1+i)^{1-S}].$$

Ya que W es función sólo de $K+1$ y $K+1$ y $1-S$ son independientes,

$$\begin{aligned} E[Z] &= E[W]E[(1+i)^{1-S}] \\ &= (IA)^{1}_{x:\overline{n}|}\frac{i}{\delta}. \end{aligned}$$

Estos resultados para los seguros de vida entera y de **plazo creciente son muy similares, bajo el** supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos **durante el año de edad**

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}A_x$$

y

$$(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}.$$

Miremos ahora. en el modelo general para encontrar las bases de las similitudes. De (4.2),

$$Z = b_T\, v_T. \tag{4.27}$$

Para los dos seguros anteriores las condiciones usadas fueron

- $v_T = v^T$, y
- b_T fue función sólo de la parte entera de T, el tiempo de vida futuro truncado, K.

Escribiendo esta última propiedad como $b_T = b^*_{K+1}$ podemos escribir (4.27) como

$$\begin{aligned} Z &= b^*_{K+1} v^T \\ &= b^*_{K+1} v^{K+1} (1+i)^{1-S} \end{aligned}$$

y

$$E[Z] = E[b^*_{K+1} v^{K+1} (1+i)^{1-S}]. \tag{4.28}$$

Bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos durante el año de edad, podemos inferir la independencia de K y S y que $1-S$ también tiene una distribución uniforme. Entonces podemos escribir (4.28) como

$$\begin{aligned} E[Z] &= E[b^*_{K+1} v^{K+1}] E[(1+i)^{1-S}] \\ &= E[b^*_{K+1} v^{K+1}] \frac{i}{\delta}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Ejemplo 4.5:

Calcule la prima neta y la varianza para un seguro dotal de 30 años y la cantidad de 10,000 proporcionando el beneficio del fallecimiento en el momento de la muerte para un hombre que tiene 35 años en el momento de emisión de la poliza. Use la tabla de vida ilustrativa, la suposición de distribución uniforme de fallecimientos e $i = 0.06$. (Entonces ${}^2\bar{A}^{1}_{35:\overline{30}|} = 0.0309294$.)

Solución:

Para el seguro dotal, $v_T \neq v^T$. Por lo tanto no podemos aplicar (4.29) directamente. Recordando (4.8), la cual muestra el seguro dotal como la suma de un seguro a plazos y del dotal puro, podemos aplicar (4.29) al componente de seguro a plazos y luego calculamos la parte del seguro dotal puro. Después, usando (4.9) y (4.10) podemos calcular la prima neta simple como sigue:

$$\bar{A}_{35:\overline{30}|} = \frac{i}{\delta} A^{1}_{35:\overline{30}|} + A_{35:\overset{1}{\overline{30}|}}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1.0297087)\left[A_{35} - (1.06)^{-30}\frac{l_{65}}{l_{35}}A_{65}\right] + (1.06)^{-30}\frac{l_{65}}{l_{35}} \\
&= 0.208727,
\end{aligned}
$$

y la varianza como

$$
\begin{aligned}
Var[Z] &= {}^2\bar{A}_{35:\overline{30|}} - (\bar{A}_{35:\overline{30|}})^2 \\
&= 0.0309294 + (1.1236)^{-30}\frac{l_{65}}{l_{35}} - (0.208727)^2 \\
&= 0.011606.
\end{aligned}
$$

Para la suma asegurada de 10,000, $10,000\bar{A}_{35:\overline{30|}} = 2,087.27$ y $(10,000)^2\,Var[Z] = 1,160,600$. ∇

Ejemplo 4.6:

Calcule, para un hombre de 50 años, la prima neta simple para un seguro decreciente a 5 años de plazo, pagando 5,000 en el momento del fallecimiento en el primer año, 4,000 en el segundo año, y así sucesivamente. Use la tabla de vida ilustrativa, el supuesto de distribución uniforme de los fallecimientos e $i = 0.06$.

Solución:

Refiriéndonos a la Tabla 4.1 vemos que

$$
b_t = \begin{cases} 5 - [t] & t \leq 5 \\ 0 & t > 5 \end{cases}
$$

es una función sólo de k, la parte entera de t, y de aquí que podamos escribirla como

$$
b_t = \begin{cases} 5 - k & k = 0,1,2,3,4 \\ 0 & k = 4. \end{cases}
$$

La función de descuento es v^t, así tenemos

$$
\begin{aligned}
(D\bar{A})^{1}_{50:\overline{5|}} &= \frac{i}{\delta}(DA)^{1}_{50:\overline{5|}} \\
&= (1.0297087)\sum_{k=0}^{4}(5-k)v^{k+1}\,{}_kp_{50}\,q_{50+k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1.0297087)\frac{\sum_{k=0}^{4}(5-k)v^{k+1}\,d_{50+k}}{l_{50}} \\
&= 0.088307.
\end{aligned}
$$

Entonces, $1{,}000(D\bar{A})^{1}_{50:\overline{5}|} = 88.307.$ ∇

Para un seguro que proporciona beneficios por defunción al momento del fallecimiento que no es función de K, se requiere mayor análisis para expresar sus valores en términos de los de un seguro pagadero al final del año del fallecimiento. Por ejemplo, consideremos el seguro de vida entera continuamente creciente pagadero al momento del fallecimiento. Este tipo de seguro se discutió ampliamente en la Sección 4.2 y su función de beneficios se analizó en la Figura 4.5. Sus funciones son

$$
\begin{aligned}
b_t &= t && t>0 \\
v_t &= v^t && t>0 \\
z_t &= tv^t && t>0.
\end{aligned}
$$

Para encontrar $(\bar{I}\bar{A})_x$ reescribiremos

$$
\begin{aligned}
Z &= (K+S)v^{K+S} \\
&= (K+1)v^{K+S} - (1-S)v^{K+1}(1+i)^{1-S} \\
&= (K+1)v^{K+1}(1+i)^{1-S} - v^{K+1}(1-S)(1+i)^{1-S}.
\end{aligned}
$$

Ahora tomando esperanzas, bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos, tenemos

$$
\begin{aligned}
E[Z] &= E[(k+1)v^{K+1}]E[(1+i)^{1-S}] - E[v^{K+1}]E[(1-S)(1+i)^{1-S}] \\
&= (IA)_x\frac{i}{\delta} - A_x E[(1-S)(1+i)^{1-S}].
\end{aligned}
$$

Podemos simplificar el último factor directamente ya que $1-S$ tiene un distribución uniforme,

$$
E[(1-S)(1+i)^{1-S}] = \int_0^1 u(1+i)^u\,du = (\bar{D}\bar{s})_{\overline{1}|} = \frac{1+i}{\delta} - \frac{i}{\delta^2}.
$$

Por tanto, podemos escribir

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}\left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A_x\right].$$

4.5 Ecuaciones Recurrentes

Se pueden derivar directamente ecuaciones recurrentes para los valores de los modelos de seguros a partir de las expresiones de las secciones anteriores. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} \\
&= vq_x + \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} \\
&= vq_x + vp_x \sum_{k=1}^{\infty} v^{k}\, {}_{k-1}p_{x+1}\, q_{x+k} \\
&= vq_x + vp_x \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1}\, {}_jp_{x+1}\, q_{x+1+j} \\
&= vq_x + vp_x\, A_{x+1}.
\end{aligned}$$

Esta demostración algebraica tiene la interpretación de que, al final del primer año, la prima neta única para el seguro de vida entera de (x), A_x, debe proporcionar, ya sea una unidad en el evento del fallecimiento dentro del año, o la prima neta única para el seguro de vida entera por una unidad a la edad alcanzada en el caso de sobrevivir.

Estas expresiones también pueden obtenerse desde un punto de vista probabilístico. Consideremos A_x otra vez pero ahora apartir de su definición $E[Z] = E[v^{K+1}]$, lo que

$$A_x = E[Z] = E[v^{K+1}|K \geq 0],$$

es redundante ya que todas las probabilidades de $K's$ son enteros no negativos.

Ahora $E[Z]$ puede calcularse considerando que (x) muere en el primer año, es decir, $K = 0$, y su complemento, (x) sobrevive el primer año, es decir, $K \geq 1$. Podemos escribir

$$E[Z] = E[v^{K+1}|K = 0]\, Pr(K = 0) + E[v^{K+1}|K \geq 1]\, Pr(K \geq 1). \tag{4.30}$$

En esta expreción podemos sustituir literalmente

$$\begin{aligned} E[v^{K+1}|K=0] &= v \\ Pr(K=0) &= q_x, \\ &\text{y} \\ Pr(K \geq 1) &= p_x. \end{aligned}$$

Para encontrar una expresión para el factor restante, lo reescribimos como

$$E[v^{K+1}|K \geq 1] = vE[v^{(K-1)+1}|(K-1) \geq 0].$$

Como K es el tiempo futuro de vida truncado de (x), dado que $K \geq 1$, $K-1$ debe ser el mismo de $(x+1)$.

Si deseamos utilizar las mismas probabilidades para la distribución condicional de $K-1$ dado $K \geq 1$, como lo haríamos para una nueva vida considerada $x+1$, entonces podemos escribir

$$E[v^{(K-1)+1}|K-1 \geq 0] = A_{x+1} \tag{4.31}$$

y sustituirla en (4.30) para obtener

$$A_x = vq_x + vA_{x+1}\,p_x. \tag{4.32}$$

Esta igualdad asumida,

(la distribución del tiempo futuro de vida de una nueva vida asegurada de edad $x+1$)

= (la distribución del tiempo futuro de vida de una vida de edad actual $x+1$ que fue asegurada hace 1 año),

se discutió en la Sección 3.8. En términos de tablas selectas, el lado derecho de la expresión (4.31) sería $A_{[x]+1}$. En(4.32), cada x sería $[x]$.

Después de reemplazar p_x por $1-q_x$ y multiplicar ambos lados por $(1+i)l_x$, (4.32) puede rearreglarse como

$$l_x(1+i)A_x = l_x A_{x+1} + d_x(1-A_{x+1}).$$

Para el grupo aleatorio sobreviviente, esta ecuación tiene la siguiente interpretación: junto con el interés de un año, A_x proporcionará A_{x+1} para todos y un $1-A_{x+1}$ adicional para aquellos que se esperaba muriesen en el año.

Dividiendo por l_x y después restando $A_x + q_x(1-A_{x+1})$ en ambos lados de la ecuación anterior tenemos

$$A_{x+1} - A_x = iA_x - q_x(1 - A_{x+1}). \tag{4.33}$$

Esta expresión muestra que la diferencia en las primas netas únicas entre la edad de expedición, x, y la edad alcanzada un año después, $x+1$, es igual al interés de la prima neta única a la edad de la expedición menos el costo de proporcionar una unidad de seguro por un año.

Puede obtenerse otra expresión para A_x restando iA_x en ambos lados de (4.33) y después multiplicando por v^x,

$$v^x A_{x+1} - v^{x-1} A_x = -v^x q_x(1 - A_{x+1}). \tag{4.34}$$

Ahora, sumando de $x = y$ hasta ∞, obtenemos

$$-v^{y-1} A_y = -\sum_{x=y}^{\infty} v^x q_x(1 - A_{x+1}),$$

y por tanto

$$A_y = \sum_{x+y}^{\infty} v^{x-y+1} q_x(1 - A_{x+1}).$$

Esta expresión muestra que la prima neta única para (y) es el valor presente de los costos anuales de seguro durante el tiempo de vida del asegurado.

Se pueden establecer expresiones similares para seguros pagaderos al momento del fallecimiento. Estos se desarrollan utilizando cálculo infinitesimal y llevan a ecuaciones diferenciales.

Para un seguro de vida entera para (x),

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = -\mu_x + \bar{A}_x(\delta + \mu_x) = \delta\bar{A}_x - \mu_x(1 - \bar{A}_x), \tag{4.35}$$

que son las análogas continuas de (4.33). La verificación de estas expresiones se dejó para el Ejercicio 4.17.

Por otra parte (4.35), puede desarrollarse a partir de la definición de $\bar{A}_x$, utilizando la esperanza condicional como lo hicimos para A_x,

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= E[v^T] \\ &= E[v^T\, T \leq h]Pr(T \leq h) + E[v^T|T > h]Pr(T > h). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Ahora

$$Pr(T \leq h) = {}_hq_x \text{ y } Pr(T > h) = {}_hp_x, \tag{4.37}$$

y la *f.d.p.* condicional de T dado que $T \leq h$ es

$$f(t|T \leq h) = \begin{cases} \frac{f(t)}{F(h)} = \frac{{}_tp_x\,\mu_{x+t}}{{}_hq_x} & 0 \leq t \leq h \\ 0 & \textit{Otro Caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$E[v^T|T \leq h] = \int_o^h v^t \frac{{}_tp_x\,\mu_{x+t}}{{}_hq_x}\,dt. \tag{4.38}$$

Como lo hicimos en la expresión para A_x, escribiremos

$$\begin{aligned} E[v^T|T > h] &= v^h E[v^{T-h}|(T-h) > 0] \\ &= v^h \bar{A}_{x+h}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Sustituyendo (4.37), (4.38) y (4.39) en (4.36)

$$\bar{A}_x = \int_o^h v^t \frac{{}_tp_x\,\mu_{x+t}}{{}_hq_x}\,dt\,{}_hq_x + v^h\,\bar{A}_{x+h}\,{}_hp_x. \tag{4.40}$$

Después, en ambos lados de (4.40), multiplicamos por -1, sumamos $\bar{A}_{x+h}$ y dividimos por h para obtener

$$\frac{\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x}{h} = \frac{-1}{h}\int_o^h v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt + \bar{A}_{x+h}\frac{1 - v^h\,{}_hp_x}{h}. \tag{4.41}$$

Ahora

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_o^h v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = \frac{d}{ds}\int_o^s v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt|_{s=o} = \mu_x$$

y

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-v^h\,{}_hp_x}{h} = -\frac{d}{dt}(v^t\,{}_tp_x)|_{t=o} = \mu_x + \delta.$$

Utilizando estos dos límites cuando $h \to 0$ en (4.41) obtenemos (4.35)

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = -\mu_x + \bar{A}_x(\mu_x + \delta).$$

4.6 Funciones Conmutativas

Se desarrollaron funciones conmutativas para escribir las fórmulas de las primas netas únicas en términos de valores intermedios almacenados. Notamos que en (4.19),

$$l_x\,A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,d_{x+k},$$

cada término de la suma es una función de la duración y de la edad alcanzada. Cuando la fuerza de interés es constante, podemos multiplicar ambos lados de (4.19) por v^x, y después expresar cada término como una función únicamente de la edad alcanzada. Es decir,

$$v^x\,l_x\,A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1}\,d_{x+k},$$

lo que motiva la definición de las funciones conmutativas:

$$\begin{aligned}
D_x &= v^x\,l_x \\
C_x &= v^{x+1}d_x = D_x v q_x \\
M_x &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} \\
R_x &= \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C_{x+k}.
\end{aligned}$$

Con estas definiciones, la prima neta única para un seguro a plazo diferido que paga una unidad de beneficio al final del año del fallecimiento de (x), si la muerte ocurre entre las edades y y z, puede expresarse como

$$ {}_{y-x|z-y}A_x = \frac{M_y - M_z}{D_x}. $$

De la Tabla 4.2 vemos que la prima neta única para el n-ésimo año de un seguro a plazo creciente pagadero al final del año del fallecimiento de (x) es

$$
\begin{aligned}
(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\,{}_{k|}q_x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)v^{x+k+1}\,d_{x+k}}{v^x\,l_x} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_{x+k}}{D_x} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(M_{x+k} - M_{x+n})}{D_x} \\
&= \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

La prima neta única para el n-ésimo año de dotación pura puede escribirse como

$$ \mathrm{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{4.43} $$

Para la prima neta única para el n-ésimo año de un seguro dotal, escribimos

$$ A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. $$

Las funciones conmutativas también han sido definidas para ser utilizadas en fórmulas para las primas netas únicas de seguros pagaderos al momento del fallecimiento. Por ejemplo,

$$ \bar{C}_x = \int_0^1 v^{x+t}\,l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt $$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 D_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt. \qquad (4.44)\\
\bar{M}_x &= \sum_{y=x}^{\infty} \bar{C}_y = \int_x^{\infty} D_y\,\mu_y\,dy\\
\bar{R}_x &= \sum_{y=x}^{\infty} \bar{M}_y.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.7:

Calcule, para una vida de 30 años de edad al momento de la expedición de la póliza, la prima neta única para un seguro decreciente a 10 años de plazo que paga 10,000 al momento del fallecimiento en el primer año, 9,000 al momento del fallecimiento en el segundo y así sucesivamente.

a. terminando la cobertura al final del décimo año

b. terminando la cobertura al final del quinto año.

Utilice la tabla de vida ilustrativa, el supuesto de distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad e $i = 0.06$.

Solución:

a. Siguiendo el argumento del Ejemplo 4.6, tenemos

$$1,000(D\bar{A})^{\,1}_{30:\overline{10|}} = 1,000\frac{i}{\delta}(DA)^{\,1}_{30:\overline{10|}}.$$

Para expresar $(DA)^{\,1}_{30:\overline{10|}}$ en funciones conmutativas podemos imaginarlo como la prima por 10 unidades de un seguro de vida entera a la edad de 30 años menos una unidad de un seguro de vida entera que comienza en cada una de las edades de 31 hasta 40 años. (Veáse la Figura 4.6) Por tanto

$$
\begin{aligned}
(DA)^{\,1}_{30:\overline{10|}} &= \frac{10M_{30} - \sum_{y=31}^{40} M_y}{D_{30}}\\
&= \frac{10M_{30} - R_{31} + R_{41}}{D_{30}}.
\end{aligned}
$$

para el seguro descrito, tenemos

$$
\begin{aligned}
1,000\frac{i}{\delta}(DA)^{\,1}_{30:\overline{10|}} &= 1,000(1.02971)(0.078164991)\\
&= 80.49.
\end{aligned}
$$

b. Este seguro es una combinación de 5 unidades de un seguro a plazo de 5 años y un seguro decreciente a plazo de 5 años. Por tanto la prima neta única es

$$
\begin{aligned}
& 1,000[5\bar{A}^{\,1}_{30:\overline{5|}} + (DA)^{\,1}_{30:\overline{5|}}] \\
= \; & 1,000(1.02971)\left[\frac{5(M_{30} - M_{35}) + 5M_{30} - R_{31} + R_{36}}{D_{30}}\right] \\
= \; & 1,000(1.02971)\left(\frac{10M_{30} - 5M_{35} - R_{31} + R_{36}}{D_{30}}\right) \\
= \; & 58.69.
\end{aligned}
$$

∇

4.7 Notas y Referencias

En el Anexo 6 se da una lista de los libros de texto sobre contingencias de vida, en ellos se presentan otros desarrollos de fórmulas para las primas netas únicas de seguros de vida. Por ejemplo, Jordan (1967) emplea ampliamente funciones conmutativas con tasas de interés constante.

Hay poco material en estos libros de texto sobre el concepto del tiempo transcurrido hasta el fallecimiento de un asegurado como variable aleatoria. Hasta fechas recientes, la investigación y exposición de este concepto se llamó *teoría del riesgo individual.* Cramer (1930) hace una exposición detallada de las ideas hasta esa epoca. Kahn (1962) y Seal (1969) proporcionan información bibliográfica concisa sobre investigación y estudios que abarca un periodo de 100 años.

Desde 1970 ha habido interés en los modelos actuariales que consideran tanto el tiempo hasta la muerte y la tasa de retorno sobre la inversión como variables aleatorias. Bellhouse y Panjer (1980), y algunas de las referencias que citan, desarrollan estos modelos estocásticos.

4.8 Ejercicios

Asuma, a menos que se establezca otra indicación, que los seguros son pagaderos al momento del fallecimiento, y que la fuerza de interés es constante δ con i y d como las tasas de interés y descuento equivalentes.

Sección 4.2

4.1 Si $\mu_x = \mu$, es una constante positiva, para todas las $x > 0$, demuestre que $\bar{A}_x = \mu/(\mu + \delta)$.

4.2 Sea $\mu_x = 1/(1+x)$, para toda $x > 0$.

a. Integre parcialmente para demostrar que

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{1+x}{1+x+t} dt.$$

b. Use la expresión en (a) para demostrar que $d\bar{A}_x/dx < 0$ para toda $x > 0$.

4.3 Demuestre que $d\bar{A}_x/di = -v(\bar{I}\bar{A})_x$.

4.4. Demuestre que las expresiones para la varianza del valor presente de un seguro dotal a n años que paga una unidad de beneficio como se da en (4.10) y en (4.11), son idénticas.

4.5 Sea que Z_1 y Z_2 se definan como en la ecuación (4.8).

a. Demuestre que $\lim_{n\to 0} Cov[Z_1, Z_2] = \lim_{n\to 0} Cov[Z_1, Z_2] = 0$.

b. Desarrolle una ecuación implícita para el plazo de la dotación para la que se minimice la $Cov[Z_1, Z_2]$.

c. Desarrolle una fórmula para el mínimo en (b).

d. Simplifique las fórmulas en (b) y (c) para el caso cuando la fuerza de mortalidad es una constante μ.

4.6 Suponga que la mortalidad está descrita por $l_x = 100 - x$ para $0 \leq x \leq 100$ y que la fuerza de interés es $\delta = 0.05$.

a. Calcule $\bar{A}^{1}_{40:\overline{25}|}$.

b. Determine la prima neta única para un seguro a 25 años de plazo con un beneficio por fallecimiento en el tiempo t igual a $e^{0.05t}$ para una persona de 40 años de edad al momento de expedición de la póliza.

4.7 Suponiendo que la función de sobrevivencia de Moivre con $\omega = 100$ e $i = 0.10$, calcule

a. $\bar{A}^{1}_{30:\overline{10}|}$

b. la varianza del valor presente, al momento de expedición de la póliza, del beneficio del seguro en (a).

4.8 Si $\delta_t = 0.2/(1 + 0.005t)$ y $l_x = 100 - x$ para $0 \leq x \leq 100$, calcule

a. para un seguro de vida entera expedido a la edad x, la prima neta única y la varianza del valor presente de los beneficios.

b. $(\bar{I}\bar{A})_x$.

4.9 a. Demuestre que $\bar{A}_x$ es la función generadora de momentos de T, el tiempo futuro de vida de (x), evaluado en $-\delta$.

b. Por tanto, demuestre que si T tiene una distribución gama con parámetros α y β, entonces $\bar{A}_x = (1 + \delta/\beta)^{-\alpha}$.

4.10 Dado $b_t = t$, $\mu_{x+t} = \mu$ y $\delta_t = \delta$ para toda $t > 0$, derive expresiones para

a. $(\bar{I}\bar{A})_x = E[b_T v^T]$. b. $Var[b_T v^T]$.

Sección 4.3

4.11 Si $l_x = 100 - x$ para $0 \leq x \leq 100$ e $i = 0.05$ evalúe

a. $A_{40:\overline{25|}}$ b. $(IA)_{40}$.

4.12 Demuestre que $A_{x:\overline{n|}} = A^{1}_{x:\overline{m|}} + v^m\, {}_np_x\, A_{x+m:\overline{n-m|}}$ para $m < n$ e interprete verbalmente el resultado.

4.13 Si $A_x = 0.25$, $A_{x+20} = 0.40$ y $A_{x:\overline{20|}} = 0.55$, calcule

a. $A_{x:\overline{20|}}^{\ \ 1}$ b. $A^{1}_{x:\overline{20|}}$.

4.14 a. Describa los beneficios de un seguro con prima neta única dada mediante el símbolo $(IA)_{x:\overline{n|}}$.

b. Exprese la prima neta única de (a) en términos de los símbolos de las Tablas 4.1 y 4.2.

Sección 4.4

4.15 Considere la escala de tiempo medida en intervalos de amplitud $1/m$ en donde la unidad es un año. Sea un seguro de vida entera por una unidad pagadero al final del intervalo mensual en el que ocurra el fallecimiento. Sea k el número de años completos de seguro vividos antes de la muerte y sea j el número de meses completos vividos del año en que ocurre el fallecimiento.

a.¿ Cuál es la función del valor presente para este seguro?

b.Establezca una fórmula análoga a (4.24) para la prima neta única, $A_x^{(m)}$, de este seguro.

c.Demuestre algebraicamente que, bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos durante el año de edad del seguro,

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x.$$

4.16 Demuestre, bajo el supuesto de una fuerza constante de la mortalidad entre edades enteras, que (4.24) puede escribirse

$$\bar{A}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, \mu_{x+k} \frac{i + q_{x+k}}{\delta + \mu_{x+k}}$$

donde $\mu_{x+k} = -\log p_{x+k}$.

Sección 4.5

4.17 a. **Demuestre que (4.6) puede reescribirse como**

$$\bar{A}_x = \frac{1}{{}_xp_0\, v^x}\int_x^\infty v^y\, {}_yp_0\, \mu_y\, dy \qquad x \geq 0.$$

b. **Saque la derivada de la fórmula de (a) para establecer (4.35),**

$$\frac{d\bar{A}_x}{dx} = \bar{A}_x(\mu_x + \delta) - \mu_x \qquad x \geq 0.$$

c. **Use la misma técnica para demostrar**

$$\frac{d\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}}{dx} = \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}(\mu_x + \delta) + \mathrm{A}_{x:\overline{n|}}^{\;\;\;1}\mu_{x+n} - \mu_x \qquad x \geq 0.$$

4.18 **Resuelva la ecuación diferencial (4.35) como se indica:**

a. Utilice el factor de integración

$$\exp\left[-\int_y^x(\delta + \mu_z)dz\right]$$

para obtener

$$\bar{A}_y = \int_y^\infty \mu_x \exp\left[-\int_y^x(\delta + \mu_z)dz\right]dx.$$

b. Use el factor de integración $e^{-\delta x}$ para obtener

$$\bar{A}_y = \int_y^\infty \mu_x v^{x-y}(1 - \bar{A}_x)dx.$$

4.19 Demuestre que

$$(IA)_x = vq_x + v[A_{x+1} + (IA)_{x+1}]p_x.$$

¿ Qué supuestos usó para establecer la identidad?

4.20 Demuestre algebraicamente e interprete

$$\frac{1}{D_x}\left[\sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k}\, v^{n-k-1} + D_{x+n}\right] = v^n.$$

4.21 Verifique la equivalencia de las tres últimas expresiones en (4.42).

4.22 Exprese, en funciones conmutativas, la prima neta única para una póliza de doble protección a la edad de 65 años que proporcione un beneficio de 2 en el caso de que la muerte ocurra antes de los 65 años y un beneficio de 1 después de los 65 años de edad. Suponga que los beneficios se pagan al final del año del fallecimiento.

4.23 Se expide una póliza a la edad 0 con la siguiente escala graduada de beneficios por fallecimiento pagaderos al momento del fallecimiento.

Edad	Beneficios
0	1,000
1	2,000
2	4,000
3	6,000
4	8,000
5 – 20	10,000
21y más	50,000

Escriba la prima neta única en términos de **funciones conmutativas.**

4.24 Bajo el supuesto de una distribución **uniforme de los fallecimientos, exprese las primas netas** únicas que se indican abajo en términos de D_x, C_x, M_x y R_x.

a. $(I\ddot{A})_{30:\overline{35|}}$ b. $(\bar{I}\bar{A})_{30:\overline{35|}}$ c. $(\bar{I}_{\overline{10|}}\bar{A})_{30:\overline{35|}}$.

Misceláneos

4.25 a. Determine si es cierto o no que un incremento constante en la fuerza de mortalidad tiene el mismo efecto sobre A_x como el mismo incremento en la fuerza de interés.

b. Demuestre que si la probabilidad simple de fallecimiento q_{x+n} se incrementa a $q_{x+n}+c$, entonces A_x se incrementará por

$$cv^{n+1}\,{}_np_x(1 - A_{x+n+1}).$$

4.26 La prima neta única para una dotación pura modificada de 1,000 expedida a la edad x por n años es 700 con rendimiento de la prima neta única si ocurre el fallecimiento durante el periodo del n-ésimo año, y es de 650 sin reembolso al fallecimiento.

a. Calcule la prima neta única para una dotación pura modificada de 1,000 expedida a la edad x por n años si $100k\%$ de la prima neta única debe regresarse al fallecimiento ocurrido durante el periodo.

b. Para la dotación pura modificada en (a), exprese la varianza del valor presente a la expedición de la póliza en términos de primas netas únicas para dotaciones puras y seguros a plazos.

4.27 Un productor de artículos vende su producto con una garantía de 5 años prometiendo el reembolso del efectivo igual a la parte prorrateada del precio de compra inicial si se presentan fallas dentro de los primeros 5 años. Por ejemplo, si la falla se reporta a los $3-3/4$ años siguientes a la compra, se reembolsará el 25% del precio de compra. A partir de estudios estadísticos la probabilidad de que se presenten fallas en un producto nuevo durante el primer año se estima que es 0.2, en cada uno del segundo, tercero y cuarto años, 0.1, y en el quinto, 0.2.

a. Suponiendo que las fallas se reportan de manera uniforme dentro de cada año desde la compra, determine la fracción del precio de compra que sirve como la prima neta única para esta garantía. Suponga que $i = 0.10$.

b. Si el reembolso garantizado es la reducción del precio de compra de un producto nuevo con 5 años de garantía, ¿ cambiaría la respuesta de (a)?

4.28 a. Demuestre que

$$\mu_x \cong \frac{(i/\delta)(M_{x-1} - M_{x+1})}{2D_x}.$$

b. Aproxime μ_{30} utilizando la Tabla de Vida Ilustrativa con $i = 0.06$.

c. Usando $i = 0$, rehaga la parte (b).

Capítulo 5

ANUALIDADES VITALICIAS

5.1 Introducción

En el capítulo anterior estudiamos los pagos dependientes del fallecimiento, como los que proporcionan diversas formas de seguros de vida. En este capítulo estudiaremos los pagos dependientes de la sobrevivencia, como los que otorgan diferentes formas de anualidades vitalicias. Una ***anualidad vitalicia*** es una serie de pagos hechos en forma continua o a intervalos iguales (como meses, trimestres, años) mientras se sobrevive. Puede ser temporal, es decir, limitada a un plazo determinado de años, o puede ser pagadera durante toda la vida. Los intervalos de pago pueden comenzar inmediatamente o, alternativa mente, la anualidad puede diferirse. Los pagos pueden cobrarse al principio de los intervalos de pago (*anualidades anticipadas*) o al final de los mismos (***anualidades de pago al final del periodo***).

A través del estudio de las *anualidades ciertas,* en la teoría del interés, el estudiante ya tiene un conocimiento de la terminología, de la notación y teoría de la anualidad. La teoría de la anualidad vitalicia es análoga pero introduce a la sobrevivencia como condición para el pago. Esta condición ya ha sido vista en el Capítulo 4 en conexión con la dotación pura y los pagos vencidos bajo los seguros dotales.

Las anualidades vitalicias juegan un papel muy importante en las operaciones de seguros de vida. Como veremos en el próximo capítulo, los seguros de vida generalmente se compran por una anualidad vitalicia de primas más que por una prima única. La cantidad pagadera al momento de la reclamación puede convertirse mediante una opción establecida en alguna forma de anualidad vitalicia para el beneficiario. Algunos tipos de seguros de vida llevan este concepto aún más lejos y en lugar de ofrecer principalmente una suma total pagadera al fallecimiento, preveen formas establecidas de beneficios en términos de ingreso. Así , por ejemplo, puede haber un ingreso mensual pagadero al cónyuge sobreviviente o al asegurado que se retira.

Las anualidades son todavía más importantes en los sistemas de pensiones. De hecho, un plan de retiro puede ser considerado como un sistema de compra de anualidades vitalicias diferidas (pagaderas durante el retiro) mediante alguna forma de anualidades temporales con aportaciones durante el servicio activo. La anualidad temporal puede consistir en aportaciones variables y su valuación puede tomar en cuenta no sólo el interés y la mortalidad sino otros factores como los incrementos de salarios y la terminación de la participación por razones distintas al fallecimiento.

Las anualidades vitalicias también tienen un papel en la incapacidad y en los seguros de compensación de los trabajadores. En el caso de los seguros de incapacidad, puede resultar necesario la terminación del beneficio de la anualidad debido a la recuperación del incapacitado. Para el caso del cónyuge sobreviviente los beneficios de la compensación del trabajador, pueden terminar la anualidad al volver a casarse.

Como preparación para la aplicación de lo que llamaremos la ***técnica del pago corriente*** para la valuación de las anualidades vitalicias, consideraremos, en la Sección 5.2 un pago contingente único a la sobrevivencia. Esta es una analogía con la teoría del interés compuesto en la que empezamos con el valor acumulado y el valor presente de un pago único y después se extendieron los conceptos de valuación a una serie de pagos mediante la suma o la integración. La técnica del pago corriente procede en líneas similares para las anualidades vitalicias. Alternativamente, emplearemos una ***técnica de pago agregado*** que procede mediante la consideración del valor total recibido en la fecha en que termina la anualidad por fallecimiento o expiración de su plazo. Cada una de estas técnicas tienes sus ventajas especiales y ofrece diversas visiones. La equivalencia de las fórmulas producidas por ambas técnicas se sigue como una consecuencia inmediata de los Teoremas 3.1 y 3.2.

Al igual que en el capítulo precedente sobre seguros de vida, supondremos, a menos que se especifique lo contrario, una tasa efectiva constante de interés anual i (o su equivalente fuerza constante de interés δ).

En la mayoría de las aplicaciones de la teoría desarrollada en este capítulo, los pagos anuales continuan mientras que una vida humana permanece en un estatus particular. Sin embargo, las aplicaciones posibles de la teoría son mucho más amplias. Puede aplicarse a cualquier conjunto de pagos periódicos en el que los pagos no se hacen con certidumbre. En capítulos posteriores se verán ejemplos de estas aplicaciones que tratan de múltiples vidas o múltiples causas de decremento.

5.2 Pago Unico Dependiente de la Sobrevivencia

Consideraremos ahora una unidad de pago vencido al final de n años siempre que una vida de edad actual x sobreviva los n años. En el Capítulo 4, dicho beneficio se denominó una dotación pura a n años de 1 con respecto a (x). Vinculado a seguros, era natural utilizar el término prima neta única y la notación $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ para la esperanza del valor presente de una unidad de dotación pura. En conexión con las anualidades, y en particular para los fondos de pensión, se utiliza frecuentemente el término valor presente actuarial y la notación ${}_nE_x$ los cuales emplearemos aquí . La palabra actuarial aquí implica que una esperanza u otros factores además del interés han sido considerados en el cálculo. Luego el valor presente actuarial de 1 vencido al final de n años siempre que (x) sobreviva es (veáse la Tabla 4.1)

$$ {}_nE_x = A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n \, {}_np_x \tag{5.1}$$

Ejemplo 5.1

Encuentre el valor presente actuarial de 10,000 vencidos al final de 40 años si un hombre de 25 años de edad sobrevive. Como base de valuación, utilice la Tabla de Vida Ilustrativa con interés a la tasa efectiva anual de 6%.

Solución:

Aquí necesitamos

$$\begin{aligned} 10{,}000\,{}_{40}E_{25} &= 10{,}000\,v^{40}\,{}_{40}p_{25} \\ &= 10{,}000(0.09722219)(0.78765825) \\ &= 765.78. \end{aligned}$$

En este ejemplo, el descuento del interés tiene mucho más efecto que el factor de sobrevivencia.

∇

La fórmula (5.1) puede reescribirse en la forma

$$l_x\,{}_nE_x(1+i)^n = l_{x+n}. \tag{5.2}$$

En términos del concepto de grupo determínistico de sobrevivencia. esto indica que si los l_x sobrevivien tes a la edad x , depositan cada uno ${}_nE_x$ en un fondo de acumulación con tasa de interés i, habrá una cantidad suficiente al final de n años para pagar 1 a cada uno de los l_{x+n} sobrevivientes a la edad $x+n$. Aquí estamos suponiendo que el tamaño del grupo a la edad x disminuirá exactamente como lo indica la tabla de vida.

Para ilustrar mediante los datos del Ejemplo 5.1, si los $l_{25} = 95{,}650.15$ sobrevivientes a la edad de 25 contribuyen 765.78 (de acuerdo a la tabla de vida ilustrativa) y si este fondo se acumula a una tasa efectiva de interés de 6% durante 40 años, tenemos los siguientes resultados:

Fondo original	=	73,246,972
Factor de acumulación $(1.06)^{40}$	=	10.285718
Fondo acumulado al final de 40 años	=	753,397,698
Sobrevivientes a la edad $65(l_{65})$	=	75,339.63
Participación por cada sobreviviente	=	10,000.

Este cálculo exhibe el valor presente actuarial

$$10{,}000\,{}_{40}E_{25} = 765.78$$

como la cantidad que si es pagada por cada sobreviviente a la edad de 25 años, acumularía, al 6% de interés, un fondo suficiente para otorgar 10,000 por sobreviviente a la edad de 65 años. Sólo los sobrevivientes a esa edad participan en la distribución del fondo; las contribuciones de los $l_{25} - l_{65}$ muertos acumulados con intereses se aplican para incrementar la participación de cada sobreviviente. Debido a la doble operación del interés incrementando el fondo y de la sobrevivencia disminuyendo el número de beneficiarios del fondo, a menudo esto se describe diciendo que los 765.78 se acumuló en 40 años con beneficio de intereses y sobrevivencia a 10,000. En el presente texto, nos referiremos a los 10,000 como el valor actuarial acumulado a la edad de 65 años de 765.78 a la edad de 25 años. Para mayor conocimiento sobre estos conceptos, veáse el Ejercicio 5.3.

En forma general, definiremos el *valor actuarial acumulado* al final de n años de una aportación de 1 a la edad x como una cantidad S tal que su valor actuarial presente sea 1. Por lo tanto $S\,{}_nE_x = 1$ o

$$S = \frac{1}{{}_nE_x} = \frac{1}{v^n\,{}_np_x} = (1+i)^n\frac{l_x}{l_{x+n}}. \tag{5.3}$$

La fórmula (5.3) muestra el factor de acumulación actuarial $1/{}_nE_x$ como el producto del factor de acumulación del interés $(1+i)^n$ y un factor de acumulación de la sobrevivencia $1/{}_np_x = l_x/l_{x+n}$.

Ejemplo 5.2:

Encuentre el valor actuarial acumulado a los 65 años de 1,000 aportados a los 25, con base en la Tabla de Vida Ilustrativa con interés a una tasa efectiva anual de 6%.

Solución:

$$1,000\frac{1}{{}_{40}E_{25}} = 1,000(1.06)^{40}\frac{l_{25}}{l_{65}} = 13,058.60$$

En este ejemplo, la tasa anual de mortalidad tiene un rango de 0.0012230 a los 25 años a 0.0195231 a los 64 y tiene mucho menos efecto que el interés a la tasa anual de 6%. ∇

Ejemplo 5.3

Obtenga fórmulas para

$$\text{a. } \frac{\partial}{\partial x}\,{}_nE_x \qquad \text{b. } \frac{\partial}{\partial n}\,{}_nE_x.$$

Observe cómo varía ${}_nE_x$ con x para n determinadas y cómo varía con n para x determinadas.

Solución:

a. $\frac{\partial}{\partial x}\,{}_nE_x = v^n\frac{\partial}{\partial x}\,{}_np_x = v^n\,{}_np_x(\mu_x - \mu_{x+n}) = {}_nE_x(\mu_x - \mu_{x+n})$

Note que si $\mu'_y > 0, x \leq y \leq x+n$, en tal forma que μ_y es una función creciente, entonces $\partial\,{}_nE_x/\partial x < 0$ y ${}_nE_x$ decrece con la edad. También, si $\mu_y = c, x \leq y \leq x+n$, entonces $\partial\,{}_nE_x/\partial x = 0$ y ${}_nE_x$ no cambia con la edad. Finalmente, si $\mu'_y < 0, x \leq y \leq x+n$, como puede suceder en edades jóvenes, entonces ${}_nE_x$ se incrementa con la edad.

b.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}{}_nE_x &= \frac{\partial}{\partial n}\exp\left[-\int_x^{x+n}(\mu_y+\delta)dy\right]\\ &= {}_nE_x\frac{\partial}{\partial n}\left[-\int_x^{x+n}(\mu_y+\delta)dy\right]\\ &= -{}_nE_x(\mu_{x+n}+\delta)\end{aligned}$$

Aquí se observa que $\partial\,{}_nE_x/\partial n < 0$, es decir, ${}_nE_x$ es una función decreciente de n, como se habría esperado.

∇

Ejemplo 5.4:

Demuestre e interprete las relaciones para $n > t$.

a. ${}_nE_x = {}_tE_x\,{}_{n-t}E_{x+t}$

b. $\dfrac{{}_tE_x}{{}_nE_x} = \dfrac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}}$

Solución:

a. ${}_nE_x = v^n\,{}_np_x = v^t\,v^{n-t}\,{}_tp_x\,{}_{n-t}p_{x+t} = {}_tE_x\,{}_{n-t}E_{x+t}$

Puede encontrarse el valor presente actuarial de 1 vencido al final de n años si (x) sobrevive tomando el valor presente actuarial a la edad $x+t$ del pago vencido a la edad $x+n$ y después tomar el valor presente actuarial a la edad x del valor encontrado para la edad $x+t$.

b. Esta fórmula se deduce al reordenar la fórmula en (a). El valor actuarial acumulado a la edad $x+n$ de una unidad aportada a la edad $x+t$ puede encontrarse tomando el valor presente actuarial a la edad x de la unidad y acumulando dicho valor a la edad $x+n$.

∇

5.3 Anualidades Vitalicias Continuas

Cuando definimos los valores presentes actuariales de las anualidades vitalicias, podemos utilizar una técnica de pago agregado o una de pago corriente. Los pasos para la técnica de pago agregado son:

- registrar únicamente el interés del valor presente de todos los pagos a realizarse mediante la anualidad si el fallecimiento ocurre en el tiempo t;
- multiplicar el valor presente, encontrado en el punto anterior, por la probabilidad o densidad de la probabilidad del fallecimiento en el tiempo t;
- sumar (integrar) sobre todos los periodos de fallecimiento t.

Para la técnica de pago corriente, los pasos son

- registrar el monto del pago vencido en el tiempo t;
- determinar el valor presente actuarial del pago vencido en el tiempo t;
- sumar (integrar) estos valores presentes para todos los periodos de pago t.

La primera técnica se presta para interpretarse en términos de la variable aleatoria del tiempo futuro de vida. Se nota que los pasos producen una expectativa. La técnica de pago corriente puede basarse también en un modelo probabilístico. Es posible hacer una interpretación determinística para ambas técnicas, pero la de pago corriente se utilizaría, normalmente, para modelos determinísticos.

Estas técnicas se ilustran muy bien por lo que hemos definido como el valor presente actuarial de una anualidad vitalicia total por un monto de 1 al año pagadero continuamente mientras sobrevive (x). La notación para este valor es $\bar{a}_x$.

Con T representando el tiempo futuro de vida de (x), el valor presente de los pagos anuales hechos hasta el fallecimiento de $Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$, y por la técnica de pago agregado nos conduce a definir el valor presente actuarial de la anualidad como

$$\bar{a}_x = E[Y] = E[\bar{a}_{\overline{T}|}]. \tag{5.4}$$

Como la *f.d.p.* de T es ${}_tp_x\,\mu_{x+t}$, tenemos

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \bar{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt. \tag{5.5}$$

Alternativamente, en analogía con la fórmula de interés compuesto

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,dt,$$

consideramos (bajo la técnica de pago corriente) el valor presente actuarial $v^t\,{}_tp_x\,dt$ del pago momentáneo dt hecho en el tiempo t e integramos todos esos valores para obtener la definición

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt. \tag{5.6}$$

Usando el Teorema 3.1, con $z(t) = \bar{a}_{\overline{t}|}$, $g(t) = {}_tp_x\, \mu_{x+t}$, (5.5) se reduce a (5.6), lo que demuestra la equivalencia de las definiciones (5.4) y (5.6).

Más aún, aplicando el Teorema 3.1 con $z(t) = v^t, g(t) = {}_tp_x\, \mu_{x+t}$ a

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt,$$

encontramos

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= 1 + \int_0^\infty {}_tp_x\, dv^t \\ &= 1 - \delta \bar{a}_x \end{aligned} \tag{5.7}$$

o

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x. \tag{5.8}$$

La fórmula (5.8) es análoga a la relación

$$1 = \delta \bar{a}_{\overline{t}|} + v^t$$

en la teoría del interés, e indica que una unidad invertida ahora, producirá un interés anual de δ pagadero continuamente mientras (x) sobrevive más el reembolso de la unidad a la muerte de (x).

Pueden obtenerse las relaciones entre $\bar{a}_x$ y $\bar{A}_x$ expresando

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - v^T}{\delta} = \frac{1 - Z}{\delta} \tag{5.9}$$

en donde $Z = v^T$ es la variable aleatoria del valor presente para un seguro de vida entera. Luego sustituyendo en (5.4), obtenemos

$$\bar{a}_x = E\left[\frac{1 - Z}{\delta}\right] = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}, \tag{5.10}$$

que es equivalente a (5.7) y (5.8). La fórmula (5.10) puede escribirse como

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{\overline{\infty|}} - \bar{a}_{\overline{\infty|}}\bar{A}_x. \tag{5.11}$$

Esta última fórmula indica que la anualidad de vida entera es equivalente a una perpetuidad pagadera continuamente menos una perpetuidad que comienza a la muerte de (x) (lo que en efecto, termina la anualidad vitalicia).

Para medir, sobre la base de los supuestos de nuestro modelo, el riesgo de mortalidad en una anualidad vitalicia continua, estamos interesados en la $Var[\bar{a}_{\overline{T|}}]$. Determinamos

$$\begin{aligned} Var[\bar{a}_{\overline{T|}}] &= Var\left[\frac{1-v^T}{\delta}\right] \\ &= \frac{1}{\delta^2}Var[v^T] \\ &= \frac{1}{\delta^2}[{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2] \end{aligned} \tag{5.12}$$

en donde, como en el Capítulo 4, ${}^2\bar{A}_x$ se calcula con base en la fuerza de interes 2δ.

Se puede observar, además, que

$$\delta\bar{a}_{\overline{T|}} + v^T = 1 \tag{5.13}$$

idénticamente, de lo que se sigue que

$$E[\delta\bar{a}_{\overline{T|}} + v^T] = \delta\bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$$

[fórmula (5.8)], y

$$Var[\delta\bar{a}_{\overline{T|}} + v^T] = 0.$$

La formula (5.13) demuestra que no hay riesgo de mortalidad en la combinación de la anualidad continua de vida con δ para un seguro de vida pagadero en el momento de muerte.

Ejemplo 5.5

Bajo los supuestos de una fuerza constante de mortalidad, $\mu = 0.04$, y de una fuerza constante de interés $\delta = 0.06$, evalúe

a. $\bar{a}_x$

b. la desviación estándar de $\bar{a}_{\overline{T}|}$

c. la probabilidad de que $\bar{a}_{\overline{T}|}$ exceda $\bar{a}_x$.

Solución:

a.

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= \int_o^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt \\
&= \int_o^\infty e^{-0.06t}e^{-0.04t}\,dt \\
&= \int_o^\infty e^{-0.10t}\,dt = 10
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x = E[e^{-0.06T}] &= \int_o^\infty e^{-0.06t}e^{-0.04t}(0.04)dt = 0.4 \\
{}^2\bar{A}_x &= \int_o^\infty e^{-0.12t}e^{-0.04t}(0.04)dt = 0.25 \\
Var[\bar{a}_{\overline{T}|}] &= \frac{1}{(0.06)^2}[0.25 - (0.4)^2] = 25
\end{aligned}$$

Por tanto la desviación estándar de $\bar{a}_{\overline{T}|}$ es igual a 5.

c.

$$\begin{aligned}
& Pr[\bar{a}_{\overline{T}|} > \bar{a}_x] = Pr[\bar{a}_{\overline{T}|} > 10] \\
&= Pr\left[\frac{1 - v^T}{0.06} > 10\right] = Pr[0.4 > e^{-0.06T}] \\
&= Pr\left[T > \left(-\frac{\log 0.4}{0.06}\right)\right] = Pr[T > 15.27] \\
&= \int_{15.27}^\infty e^{-0.04t}0.04dt = 0.54
\end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo los supuestos establecidos, existe una posibilidad de 54% de que $\bar{a}_x$ será insuficiente para proporcionar la unidad de la anualidad vitalicia.

∇

Ahora nos dedicaremos a las anualidades temporales y diferidas de vida. El valor presente actuarial de una anualidad temporal de vida de n años a 1 anual, pagadera continuamente mientras (x) sobreviva durante los siguientes n años, se denota por $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$. De la técnica de pago corriente,

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, dt. \tag{5.14}$$

Ahora, aplicando integración por partes a

$$\bar{A}^{\;1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt = \int_0^n v^t\, (-d\, {}_tp_x),$$

tenemos

$$\bar{A}^{\;1}_{x:\overline{n}|} = 1 - v^n\, {}_np_x - \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|},$$

o

$$1 = \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}. \tag{5.15}$$

Se deja al estudiante comparar las fórmulas (5.8) y (5.15) e interpretar la última.

La técnica de pago agregado empieza con la variable aleatoria del valor presente Y en donde

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & T \geq n \end{cases} \tag{5.16}$$

y establece

$$\begin{aligned} \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= E[Y] \\ &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_x. \end{aligned}$$

Depués de integrar por partes, se convierte en (5.14). Al sustituir $(1 - v^T)/\delta$ por $\bar{a}_{\overline{T}|}$ y $(1 - v^n)/\delta$ por $\bar{a}_{\overline{n}|}$, en (5.16), se nota que $Y = (1 - Z)/\delta$ en donde

$$Z = \begin{cases} v^T & 0 \leq T < n \\ v^n & T \geq n \end{cases}$$

es la variable aleatoria del valor presente para un seguro dotal de n años [veáse la Tabla 4.1 y compárelo con (5.9)].

Ahora

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = E[Y] = \frac{1}{\delta}(1 - E[Z]) = \frac{1}{\delta}[1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}] \tag{5.17}$$

y es equivalente a (5.15).

Para calcular la varianza podemos usar la relación $Y = (1 - Z)/\delta$ y (4.10) para obtener

$$Var[Y] = \frac{1}{\delta^2}Var[Z] = \frac{1}{\delta^2}[{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\overline{n}|}]. \tag{5.18}$$

En términos de valores anuales, la fórmula (5.18) se convierte en

$$\begin{aligned} Var[Y] &= \frac{1}{\delta^2}[1 - 2\delta^2\, \bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2] \\ &= \frac{2}{\delta}[\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|}] - \bar{a}^2_{x:\overline{n}|}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

El valor presente actuarial de una anualidad vitalicia diferida de 1 al año pagadera continuamente mientras (x) sobreviva más allá de la edad $x + n$ se denota por ${}_{n|}\bar{a}_x$. Por la técnica de pago corriente, tenemos

$${}_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt \tag{5.20}$$

y también las relaciones

$$\begin{aligned} {}_{n|}\bar{a}_x &= \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt - \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, dt \\ &= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|} && (5.21) \\ &= \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_x}{\delta}. && (5.22) \end{aligned}$$

Para aplicar la técnica de pago agregado, se empieza con la variable aleatoria del valor presente Y en donde

$$Y = \begin{cases} 0 = \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{T}|} & 0 \le T < n \\ v^n\, \bar{a}_{\overline{T-n}|} = \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|} & T \ge n. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
{}_{n|}\bar{a}_x &= E[Y] = \int_n^\infty v^n\, \bar{a}_{\overline{t-n}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt \\
&= \int_0^\infty v^n\, \bar{a}_{\overline{s}|}\, {}_{n+s}p_x\, \mu_{x+n+s}\, ds \\
&= v^n\, {}_np_x \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{s}|}\, {}_sp_{x+n}\, \mu_{x+n+s}\, ds,
\end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$ {}_{n|}\bar{a}_x = {}_nE_x\, \bar{a}_{x+n}. \tag{5.23}$$

Esta fórmula pudo haberse obtenido de (5.20) sustituyendo $t = n + s$. También, de las definiciones de Y podemos ver que

(la Y para una anualidad vitalicia diferida total a n años)

= (la Y para una anualidad vitalicia)

− (la Y para una anualidad vitalicia temporal a n años)

y que tomando esperanzas volvería a producir (5.21).

Una forma para calcular la varianza de Y para la anualidad diferida es la siguiente:

$$\begin{aligned}
Var[Y] &= \int_n^\infty v^{2n}\, \bar{a}^2_{\overline{t-n}|}\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2 \\
&= v^{2n}\, {}_np_x \int_0^\infty \bar{a}^2_{\overline{s}|}\, {}_sp_{x+n}\, \mu_{x+n+s}\, ds - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2,
\end{aligned}$$

mediante el Teorema 3.1,

$$\begin{aligned}
&= v^{2n}\, {}_np_x \int_0^\infty 2\bar{a}_{\overline{s}|}\, v^s\, {}_sp_{x+n}\, ds - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2 \\
&= \frac{2}{\delta} v^{2n}\, {}_np_x \int_0^\infty (v^s - v^{2s})\, {}_sp_{x+n}\, ds - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2 \\
&= \frac{2}{\delta} v^{2n}\, {}_np_x [\bar{a}_{x+n} - {}^2\bar{a}_{x+n}] - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Para un desarrollo alternativo de esta fórmula, veáse el Ejercicio 5.40.

El valor presente actuarial de una anualidad vitalicia temporal diferida de 1 año pagadero continuamente mientras (x) sobreviva entre las edades $x+m$ y $x+m+n$ se denota por ${}_{m|n}\bar{a}_x$. Entonces

$$\begin{aligned}
{}_{m|n}\bar{a}_x &= \int_m^{m+n} v^t\, {}_tp_x\, dt & (5.25)\\
&= \bar{a}_{x:\overline{m+n|}} - \bar{a}_{x:\overline{m|}} & (5.26)\\
&= \frac{\bar{A}_{x:\overline{m|}} - \bar{A}_{x:\overline{m+n|}}}{\delta} & (5.27)\\
&= {}_mE_x\, \bar{a}_{x+m:\overline{n|}} & (5.28)
\end{aligned}$$

Análogo a la función

$$\bar{s}_{\overline{n|}} = \int_o^n (1+i)^{n-t} dt$$

en la teoría del interés, tenemos aquí

$$\bar{s}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{{}_nE_x}\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_o^n \frac{{}_tE_x}{{}_nE_x} dt = \int_o^n \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}} dt, \tag{5.29}$$

representando el valor actuarial acumulado al final del plazo de una anualidad vitalicia temporal a n años de 1 anual pagadero continuamente mientras (x) sobreviva. Dicho valor está disponible a la edad $x+n$ sólo si (x) sobrevive.

Como un comentario final acerca de las anualidades vitalicias continuas, obtenemos una expresión para $d\bar{a}_x/dx$ al diferenciar la integral de la fórmula (5.6), por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{a}_x}{dx} = \int_o^\infty v^t \left(\frac{\partial}{\partial x}\, {}_tp_x\right) dt &= \int_o^\infty v^t\, {}_tp_x\, (\mu_x - \mu_{x+t}) dt\\
&= \mu_x \bar{a}_x - \bar{A}_x\\
&= \mu_x \bar{a}_x - (1 - \delta \bar{a}_x),
\end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx} = (\mu_x + \delta)\bar{a}_x - 1. \tag{5.30}$$

La interpretación de (5.30) es que el valor presente actuarial cambia a una tasa que es una combinación de una tasa de interés del ingreso $\delta\bar{a}_x$, la tasa de beneficio de la sobrevivencia $\mu_x\bar{a}_x$ y la tasa del pago desembolsado.

Ejemplo 5.6:

Obtenga fórmulas para

$$\text{a. } \frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_{x:\overline{n}|} \qquad \text{b. } \frac{\partial}{\partial n}\,{}_{n|}\bar{a}_x.$$

Solución:

a. Procediendo como en el desarrollo de (5.30), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \mu_x\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} \\
&= \mu_x\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x) \\
&= (\mu_x + \delta)\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - {}_nE_x).
\end{aligned}$$

b. $\frac{\partial}{\partial n}\,{}_{n|}\bar{a}_x = \frac{\partial}{\partial n}\int_n^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt = -v^n\,{}_np_x$ ∇

La Tabla 5.1 resume los conceptos para anualidades vitalicias continuas.

Tabla 5.1 Resumen de Anualidades Vitalicias Continuas (Anualidad de 1 al año pagadera continuamente)

Nombre de la Anualidad	Variable aleatoria del Valor Presente Y	**Valor presente actuarial $E[Y]$ igual a**
Anualidad vitalicia total	$\bar{a}_{\overline{T}|}\quad T \ge 0$	$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt$
Anualidad vitalicia temporal a n años	$\begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & 0 \le T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & T \ge n \end{cases}$	$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt$
Anualidad vitalicia diferida a n años	$\begin{cases} 0 & 0 \le T < n \\ \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|} & T \ge n \end{cases}$	${}_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt$
Anualidad vitalicia temporal n años, Diferida m años,	$\begin{cases} 0 & 0 \le T < m \\ \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{m}|} & m \le T < m+n \\ \bar{a}_{\overline{m+n}|} - \bar{a}_{\overline{m}|} & T \ge m+n \end{cases}$	${}_{m|n}\bar{a}_x = \int_m^{m+n} v^t\,{}_tp_x\,dt$

Referencias Adicionales

- $1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$
- $1 = \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}$
- ${}_{n|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}$
- $\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} = \displaystyle\int_o^n (1+i)^{n-t} \frac{l_{x+t}}{l_{x+n}}\, dt.$

5.4 Anualidades Vitalicias Discretas

La teoría de las anualidades vitalicias discretas es análoga, paso por paso, a la teoría de las anualidades vitalicias continuas, con las integrales reemplazadas por sumas, integrandos por sumandos y diferenciales por diferencias. Para anualidades continuas no hubo distinción entre pagos al inicio de los intervalos de pago o al final, es decir, entre anualidades de pago anticipado y anualidades de pago al final del periodo. La distinción es significativa para las anualidades discretas, y empezaremos con las anualidades de pago anticipado ya que tienen el papel más destacado en aplicaciones actuariales. Por ejemplo, la mayoría de los seguros de vida individuales se compran mediante una anualidad de pago anticipado con primas periódicas.

Consideremos $\ddot{a}_x$, el valor presente actuarial de una anualidad vitalicia de pago anticipado entera de 1 pagable al principio de cada año mientras (x) sobreviva. Como el valor presente actuarial del pago anticipado en el tiempo k es

$${}_kE_x = v^k\, {}_kp_x,$$

de la técnica de pago corriente tenemos

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x. \tag{5.31}$$

En términos de la función de sobrevivencia, l_x, la fórmula (5.31) es

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, l_{x+k}. \tag{5.32}$$

Entonces, por la interpretación del grupo de sobrevivencia de la tabla de vida, $\ddot{a}_x$ es la cantidad que cada una de los l_x vivos a la edad x deben aportar a un fondo para que el mismo, con interés, pueda pagar 1 a cada de uno de los l_{x+k} sobrevivientes a la edad $x+k; k = 0, 1, 2, \cdots$.

Para utilizar la técnica del pago agregado, consideramos el valor presente de los pagos de anualidades de la variable aleatoria $Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, en donde la variable aleatoria K es el tiempo futuro de vida truncado de (x). Luego

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= E[Y] = E[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_{k|}q_x, \end{aligned} \tag{5.33}$$

como $Pr[K = k] = {}_{k|}q_x$. Mediante el Teorema 3.2, y el uso de la relación

$$\Delta \ddot{a}_{\overline{k+1}|} = v^{k+1},$$

(5.33) se convierte en

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\; {}_{k+1}p_x,$$

que es equivalente a (5.31).

De (5.33) obtenemos en seguida

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= E\left[\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right] \\ &= \frac{1}{d}[1 - A_x], \end{aligned} \tag{5.34}$$

y

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|} A_x, \tag{5.35}$$

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x. \tag{5.36}$$

Estas deberán compararse con sus contrapartes continuas (5.10), (5.11) y (5.8). La fórmula (5.36) indica que una unidad invertida ahora producirá un interés anticipado de d por año mientras (x) sobrevive, más el reembolso de la unidad al final del año del fallecimiento de (x).

La fórmula de la varianza es

$$Var[\ddot{a}_{\overline{K+1|}}] = Var\left[\frac{1-v^{K+1}}{d}\right] = \frac{1}{d^2}Var[v^{K+1}]$$

$$= \frac{1}{d^2}[{}^2A_x - A_x^2]. \qquad (5.37)$$

[Veáse (5.12)]

El valor presente actuarial de una anualidad vitalicia provisional a n años de 1 pagable al principio de cada año mientras (x) sobrevive se denota por $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$. La técnica de pago corriente produce la fórmula

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x. \qquad (5.38)$$

Por el enfoque de pago agregado, definimos

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1|}} & 0 \leq K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & K \geq n \end{cases} \qquad (5.39)$$

y establecemos

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = E[Y].$$

Pero como $Y = (1-Z)/d$ en donde

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & 0 \leq K < n \\ v^n & K \geq n \end{cases}$$

es la variable aleatoria del valor **presente para una unidad de seguro dotal, pagadera al final del año del** fallecimiento, o a la maduración, **tenemos**

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{d}(1 - E[Z]) = \frac{1}{d}(1 - A_{x:\overline{n|}}). \qquad (5.40)$$

[Veáse (5.17)]

Reacomodando (5.40) produce

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} \tag{5.41}$$

[veáse (5.15)].

Para calcular la varianza, podemos utilizar

$$Var[Y] = \frac{1}{d^2}Var[Z] = \frac{1}{d^2}[{}^2A_{x:\overline{n}|} - A^2_{x:\overline{n}|}] \tag{5.42}$$

[veáse la Tabla 4.2, nota de pié de página (1)].

El valor presente actuarial de una anualidad vitalicia de 1 diferida de 1 pagable al principio de cada año mientras (x) sobrevive de la edad $x+n$ en adelante se denota por ${}_{n|}\ddot{a}_x$. Aquí

$$\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x &= \sum_{k=n}^{\infty} v^k\,{}_kp_x && (5.43)\\
&= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} && (5.44)\\
&= \frac{A_{x:\overline{n}|} - A_x}{d} && (5.45)\\
&= {}_nE_x\,\ddot{a}_{x+n} && (5.46)
\end{aligned}$$

[veánse (5.20)-(5.23)].

El valor actuarial acumulado al final del plazo de una anualidad vitalicia de pago anticipado provisional a n años de 1 por año, pagadera mientras (x) sobrevive, se representa por $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$. Las fórmulas de esta función son

$$\begin{aligned}
\ddot{s}_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{{}_nE_x}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} && (5.47)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_kE_x}{{}_nE_x}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{{}_{n-k}E_{x+k}}, && (5.48)
\end{aligned}$$

que son análogas a las fórmulas para $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ en la teoría del interés.

Para anualidades de pago al final de los periodos de pago, las notaciones $\ddot{a}$ y $\ddot{s}$ se reemplazan por a y s. Por tanto a_x representa el valor presente actuarial de una anualidad de 1 al final de cada año mientras (x) sobrevive. Las fórmulas para a_x pueden obtenerse mediante métodos similares a los que ya se utilizaron para anualidades de pago anticipado o uno puede usar las relaciones entre los valores de dos tipos de anualidades. Ya que la anualidad vitalicia de pago al final del periodo difiere de la anualidad vitalicia de pago anticipado sólo por el pago inicial,

$$a_x = \ddot{a}_x - 1 \tag{5.49}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \, {}_kp_x. \tag{5.50}$$

Alternativamente,

$$a_x = E[a_{\overline{K}|}] \tag{5.51}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{k}|} \, {}_{k|}q_x.$$

De la fórmula (5.51), se sigue que

$$\begin{aligned} a_x &= E\left[\frac{1-v^K}{i}\right] \\ &= E\left[\frac{1-(1+i)v^{K+1}}{i}\right] \\ &= \frac{1}{i}[1-(1+i)A_x], \end{aligned}$$

que puede reescribirse ya sea como

$$a_x = a_{\overline{\infty}|} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|} A_x, \tag{5.52}$$

o como

$$1 = ia_x + (1+i)A_x. \tag{5.53}$$

La fórmula (5.53) tiene significado para los estatutos de impuestos sobre los bienes patrimoniales. Para cada unidad de un bien patrimonial defina ia_x como el *bien patrimonial vitalicio* y $(1+i)A_x = 1 - ia_x$ como el *residuo.*

El valor presente actuarial de una anualidad temporal a n años de 1 al final de cada año, para n años mientras (x) sobrevive se denota con $a_{x:\overline{n|}}$, y puede expresarse como

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} v^k \, {}_kp_x, \tag{5.54}$$

o como

$$a_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - 1 + {}_nE_x. \tag{5.55}$$

En la última fórmula, ${}_nE_x$ es el valor presente actuarial del pago vencido el final de n años bajo la anualidad inmediata pero no bajo la vencida. La fórmula puede reacomodarse como

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}}. \tag{5.56}$$

Para una anualidad diferida de 1 pagadero al final de cada año mientras (x) sobreviva despues de la edad $x+n$, denotamos el valor actuarial presente con ${}_{n|}a_x$ y se tienen las fórmulas

$$\begin{aligned} {}_{n|}a_x &= \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k \, {}_kp_x & (5.57)\\ &= a_x - a_{x:\overline{n|}} & (5.58)\\ &= {}_nE_x \, a_{x+n}. & (5.59)\end{aligned}$$

Esta sección concluirá con las fórmulas que relacionan las funciones de $\ddot{a}$, a y A. Tenemos

$$\begin{aligned} A_x &= E[v^{K+1}] \\ &= E[a_{\overline{K+1|}} - a_{\overline{K|}}] \\ &= E[v\ddot{a}_{\overline{K+1|}} - a_{\overline{K|}}] \\ &= v\ddot{a}_x - a_x. & (5.60)\end{aligned}$$

Para interpretar (5.60), notamos que los pagos de v al inicio de cada año mientras (x) sobreviva, provistos por $v\ddot{a}_x$, quedarán compensados por los pagos equivalentes de 1 al final de cada año, provistos por a_x, excepto en el año del fallecimiento. Por lo tanto el lado derecho de (5.60) es equivalente a 1 al final del año del fallecimiento de (x), es decir a A_x.

Para un seguro a n años de plazo, la relación correspondiente es

$$A^1_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}. \tag{5.61}$$

También, para un seguro dotal a n años

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x.$$

Sustituyendo de (5.61) y usando la relación

$$a_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n-1}|} + {}_nE_x$$

nos conduce a

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}. \tag{5.62}$$

La Tabla 5.2 Resume conceptos para anualidades discretas de vida.

Tabla 5.2 Resumen de Anualidades Discretas de Vida [**Anualidades de 1 por año pagaderas al principio de cada año (anualidades vencidas) o al final de cada año (anualidades inmediatas)**]

Nombre de la Anualidad	Variable aleatoria del valor presente Y		Valor presente actuarial $E[Y]$ igual a
Anualidad de vida entera			
–vencido	$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$	$K \geq 0$	$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_x$
–inmediato	$a_{\overline{K}|}$	$K \geq 0$	$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_kp_x$
Anualidad temporal de vida entera a n años			
–vencido	$\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$ $\ddot{a}_{\overline{n}|}$	$0 \leq K < n$ $K \geq n$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x$
–inmediato	$a_{\overline{K}|}$ $a_{\overline{n}|}$	$0 \leq K < n$ $K \geq n$	$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k {}_kp_x$
Anualidad diferida de vida entera a n años			
–vencido	0 $\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|}$	$0 \leq K < n$ $K \geq n$	${}_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_kp_x$
–inmediato	0 $a_{\overline{K}|} - a_{\overline{n}|}$	$0 \leq K < n$ $K \geq n$	${}_{n|}a_x = \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k {}_kp_x$

Las relaciones adicionales son

- $1 \;=\; d\ddot{a}_x + A_x$
- $A_x \;=\; v\ddot{a}_x - a_x$
- $1 \;=\; d\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}$
- $\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \;=\; 1 + a_{x:\overline{n-1|}}$
- $A^{\;1}_{x:\overline{n|}} \;=\; v\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}}$
- $A_{x:\overline{n|}} \;=\; v\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n-1|}}$
- ${}_{n|}\ddot{a}_x \;=\; \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$
- $\ddot{s}_{x:\overline{n|}} \;=\; \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{{}_nE_x} \;=\; \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^{n-k}\frac{l_{x+k}}{l_{x+n}}.$

5.5 Anualidades de Vida con Pagos m-ésimos

En la práctica, las anualidades de vida a menudo son pagaderas en una base mensual, trimestral o semi-anual. Al igual que para la notación anual, el valor actuarial presente de una anualidad de vida a 1 por año, pagadero a plazos de $1/m$ al principio de cada mes de un año mientras (x) sobreviva, se denota como $\ddot{a}_x^{(m)}$. Con la técnica de pago corriente,

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{(m)}\sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m}\;{}_{h/m}p_x. \tag{5.63}$$

Podriamos proceder partiendo de (5.63),pero es mas conveniente utilizar la relación

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}. \tag{5.64}$$

Esto se sigue del hecho de que una inversión de 1 produce intereses al principio de cada periodo y pagos de la unidad, al final de cada periodo en el cual la muerte ocurre. (Para una prueba mas de la relación (5.64) vea (5.34), (5.36) y el Ejercicio 5.14.)

De los dos miembros de la derecha de (5.64), obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}[A_x^{(m)} - A_x] \\ &= \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}\ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{\infty|}}^{(m)}[A_x^{(m)} - A_x]. \end{aligned} \tag{5.65}$$

Esto puede ser interpretado como sigue: El m-ésimo pago de una anualidad vitalicia es equivalente a una serie de anualidades ciertas a un año con edades iniciales (x), con cancelación en el año de muerte.

La cancelación esta complementada con el pago del m-ésimo perpetuamente, empezando al final del m-ésimo de la muerte menos una perpetuidad al final del año de muerte.

Alternativamente, podriamos de (5.64) escribir

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}} = \ddot{a}_{\overline{\infty|}}^{(m)} - \ddot{a}_{\overline{\infty|}}^{(m)} A_x^{(m)}, \tag{5.66}$$

la parte que esta a la izqierda queda a interpretación del lector.

Ahora, suponga una distribución uniforme de fallecimientos en cada año (x) y recuerde que bajo esta hipótesis

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x = s_{\overline{1|}}^{(m)} A_x$$

(vea Ejercicio 4.15). Entonces (5.65) llega a ser

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} \ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1|}}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} A_x, \tag{5.67}$$

lo cual muestra el término de cancelación para el año de muerte, en términos de la función estandard A_x.

Sustituyendo $1 - d\ddot{a}_x$ por A_x en (5.67) y notando que $d^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} = d$, obtenemos una fórmula en términos de anualidades, llamemosle,

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1 - s_{\overline{1|}}^{(m)}(1 - d\ddot{a}_x)}{d^{(m)}} \\ &= s_{\overline{1|}}^{(m)} \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} \ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1|}}^{(m)} - 1}{d^{(m)}}. \end{aligned} \tag{5.68}$$

La fórmula (5.68) no se interpreta directamente pero tiene la ventaja de que expresa $\ddot{a}_x^{(m)}$ en términos de las funciones de anualidad únicamente. También es más comparable con la aproximación tradicional para $\ddot{a}_x^{(m)}$. Esta puede obtenerse para $\ddot{a}_x^{(m)}$ aplicando la fórmula de sumatoria de Woolhouse al miembro derecho de (5.63) para obtener

$$\ddot{a}_x^{(m)} \cong \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2 - 1}{12m^2}(\mu_x + \delta). \tag{5.69}$$

En la práctica, generalmente esto se reduce a

$$\ddot{a}_x^{(m)} \cong \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}, \tag{5.70}$$

que también se obtiene del supuesto de que la función conmutativa

$$D_{x+h/m} = v^{x+h/m}\, l_{x+h/m}$$

es una función lineal,

$$D_x - \frac{h}{m}[D_x - D_{x+1}],$$

en cada año de edad (veáse Ejercicio 5.15). Debe notarse que la linealidad de $D_{x+h/m}$ en cada año de edad no es la misma que la de $l_{x+h/m}$ en cada año de edad, lo que es el caso bajo el supuesto de la distribución uniforme de los fallecimientos. El uso consistente del supuesto de la distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad asegura que las relaciones como

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}$$

sean satisfechas exactamente. También se ha observado que las fórmulas derivadas de (5.70) pueden, para tasas altas de interés y tasas bajas de mortalidad, producir valores anuales distorsionados como $\ddot{a}_{x:\overline{1}|}^{(12)} > \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(12)}$. Por estas razones, (5.67) y la equivalente (5.68) se presentan como reemplazos para la aproximación tradicional (5.70).

Es conveniente para propósitos de escritura expresar (5.68) en la forma

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) \tag{5.71}$$

donde

$$\alpha(m) = s_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}, \tag{5.72}$$

y

$$\beta(m) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}. \tag{5.73}$$

Notamos que $\alpha(m)$ y $\beta(m)$ dependen sólo de m y la tasa de interes, y son independientes del año de edad. Además, para $m = 1$, (5.71) es una identidad donde $\alpha(1) = 1$ y $\beta(1) = 0$. También, $\beta(m)$ es el coeficiente del término de cancelación en (5.67); es decir, (5.67) puede escribirse como

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \beta(m)A_x. \tag{5.74}$$

Para expansión de las series de $\alpha(m)$ y $\beta(m)$, ver Ejercicio 5.44.

Ejemplo 5.7:

En base a la Tabla de Vida Ilustrativa, con interes a la tasa anual efectiva de 6%, calcule el valor presente actuarial para una anualidad vencida de toda la vida de 1,000 por mes y una edad de retiro de 65.

Solución:

Aquí

$$\begin{aligned}
\alpha(12) &= s_{\overline{1}|}^{(12)}\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(12)} = (1.02721070)(0.97378368) = 1.0002810 \\
\beta(12) &= \frac{s_{\overline{1}|}^{(12)} - 1}{d^{(12)}} = 0.46811951 \\
\frac{11}{24} &= 0.45833333.
\end{aligned}$$

Observe que $\alpha(12) \cong 1$, y $\beta(12)$ esta muy próximo a el 11/24 que aparece en la aproximación tradicional.

Por la Tabla de Vida Ilustrativa, como esta definida por (3.43), con tasa de interes al 6%,

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{65} &= 9.89693 \\
A_{65} &= 1 - d\ddot{a}_{65} = 0.4397965 \\
1{,}000\mu_{65} &= 0.7 + 0.05(10^{0.04})^{65} = 20.605359.
\end{aligned}$$

Entonces, $12{,}000\,\ddot{a}_{65}^{(12)}$ puede calcularse como sigue:

$$\begin{aligned}
\text{Por (5.74),} \quad & 12{,}000[\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(12)}\ddot{a}_{65} - \beta(12)A_{65}] \\
&= 12{,}000[(0.97378368)(9.89693) \\
&\quad -(0.46811951)(0.4397965)] = 113{,}179.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Por (5.71),}\quad & 12,000[\alpha(12)\ddot{a}_{65} - \beta(12)] \\
= \; & 12,000[(1.0002810)(9.89693) - 0.46811951] \\
= \; & 113,179.
\end{aligned}$$

$$\text{Por (5.70),}\quad 12,000\left[\ddot{a}_{65} - \frac{11}{24}\right] = 113,263.$$

$$\text{Por (5.69),}\quad 12,000\left[\ddot{a}_{65} - \frac{11}{24} - \frac{143}{1,728}(\mu_{65} + \delta)\right] = 113,185.$$

Las fórmulas (5.74) y (5.71) son algebráicamente equivalentes y por lo tanto deben producir el mismo valor. La Fórmula (5.70) es una versión abreviada de (5.69) y es clara la pequeña disparidad relativa en los resultados. No hay razón para esperar que las fórmulas basadas en una distribución uniforme de fallecimientos, (5.74) y (5.71), produzcan resultados idénticos a aquellos basados en la fórmula de Woolhouse, (5.70) y (5.69). Sin embargo, el ejemplo ilustra que, ususalmente,las diferencias son relativamente pequeñas.

∇

Ahora que los pagos han sido establecidos para pagos cada m periodos de anualidades para toda la vida, es fácil desarrollar fórmulas para anualidades temporales y diferidas. Entonces de (5.74), tenemos

$$\begin{aligned}
\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}^{(m)}_{x} - {}_nE_x\,\ddot{a}^{(m)}_{x+n} \\
&= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ddot{a}_x - \beta(m)A_x - {}_nE_x[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ddot{a}_{x+n} - \beta(m)A_{x+n}] \\
&= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ddot{a}_{x+n} - \beta(m)A^{\,1}_{x:\overline{n}|}.
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Analogamente,

$$_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\,{}_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)\,{}_{n|}A_x, \tag{5.76}$$

y de (5.71)

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)[1 - {}_nE_x] \tag{5.77}$$

$$_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x = \alpha(m)\,{}_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)\,{}_nE_x. \tag{5.78}$$

Los valores de anualidades-instantáneas con pagos cada m periodos puede obtenerse ajustando los valores de las correspondientes anualidades vencidas, por ejemplo.

$$
\begin{aligned}
a_x^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} \\
a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} - \frac{1}{m}(1 - {}_nE_x).
\end{aligned}
$$

Alternativamente, uno puede desarrollar fórmulas para pagos cada m periodos de anualidades instantaneas en términos de funciones para pagos anuales de anualidades inmediatas, por medio de relaciones tales como

$$
1 = ia_x + (1+i)A_x = i^{(m)}a_x^{(m)} + \left(1 + \frac{i^{(m)}}{(m)}\right)A_x^{(m)} \tag{5.79}
$$

[análogas a las relaciones (5.64)]. El significado aquí es que una inversión de 1 producirá interes al final de periodo de interes mas los reembolsos de la unidad junto con el interes entonces vencido al final del periodo de interes en el que ocurre el fallecimiento. Esto seá explorado adicionalmente en los Ejercicios 5.17 - 5.20. Las fórmulas tradicionales se presentan en el Ejercicio 5.21.

5.6 Funciones Conmutativas Formulas de Anualidades con Pagos Nivelados

La función $D_x = v^x lx$ fue introducida en el Capítulo 4 para la valoración de los seguros. Ahora reexaminaremos su papel en la valoración de los pagos contingentes de sobrevivencia. En (4.6), $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = {}_nE_x$ fue expresado como D_{x+n}/D_x. De aquí que.(5.3) pueda escribirse como

$$
\frac{1}{{}_nE_x} = \frac{v^x\, l_x}{v^{x+n}\, l_{x+n}} = \frac{D_x}{D_{x+n}}. \tag{5.80}
$$

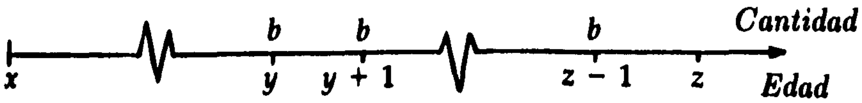
Expresado en forma más general, el valor actuarial a la edad x de un pago b a la edad y es

$$
\frac{bD_y}{D_x}. \tag{5.81}
$$

El lector deberá verificar esta fórmula para el caso en que $x < y$ donde representa un valor presente acuarial, y para el caso en que $x > y$ donde representa un valor actuarial acumulado.

Consideremos ahora una anualidad de (x) con pagos como se señalan sobre la linea del diagrama, Figura 5.1.

Figura 5.1 **Diagrama de Linea para un Nivel de Pagos de Anualidades**



Por (5.81), el valor actuarial a la edad x de los pagos de anualidades a las edades $y, y+1, \cdots, z-1$ es

$$\frac{b}{D_x}\sum_{u=y}^{z-1} D_u.$$

Ahora, introduciendo la función $Nx = \sum_{u=x}^{\infty} D_u$, encontramos el valor de la anualidad expresada como

$$\frac{b}{D_x}(N_y - N_z). \tag{5.82}$$

Aquí x es la edad a la cual el valor actuarial va a ser calculado, y es la edad a la cual se hace el primer pago anual, b, y z es la edad un año después del último pago anual, b. Notamos que x podría tener cualquier relación con y y z; esto es, x podría ser menos que, igual a o más grande que cualesquier y o z.

La utilidad de las funciones conmutativas está casi completamente restringida a aplicaciones donde se asumen una tasa constante de interés y una tabla de vida específica. En donde se hacen más consideraciones generales, pueden requerirse más funciones básicas. Donde se asumen tasas constantes, tales funciones pueden aún ser preferidas. Sin embargo, si están disponibles tablas para las funciones D_x y N_x, uno tiene formas más flexibles y directas para clacular los valores de las anualidades de vida utilizando fórmulas tales como (5.82). En lugar de reescribir fórmulas en términos de D_x y N_x para las distintas formas de las anualidades, simplemente notaremos que las fórmulas generales (5.81) y (5.82) son suficientes para la mayoría de los propósitos en los que se usan las funciones conmutativas para valuar las anualidades de pago anual.

Para valuar las anualidades de pagos mensuales, observamos que (5.63) puede escribirse como

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{mD_x}\sum_{h=0}^{\infty} D_{x+h/m}, \tag{5.83}$$

que sugiere la introducción de una función

$$N_x^{(m)} = \frac{1}{(m)} \sum_{h=0}^{\infty} D_{x+h/m}. \tag{5.84}$$

Luego

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x^{(m)}}{D_x}.$$

Si ahora suponemos una distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad, tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) \\ &= \frac{\alpha(m)N_x - \beta(m)D_x}{D_x}, \end{aligned}$$

y al comparar las dos fórmulas para $\ddot{a}_x^{(m)}$ obtener una fórmula para $N_x^{(m)}$, esto es,

$$N_x^{(m)} = \alpha(m)N_x - \beta(m)D_x. \tag{5.85}$$

En la práctica, con base en (5.70), también se usa la aproximación

$$N_x^{(m)} \cong N_x - \frac{m-1}{2m} D_x \tag{5.86}$$

Sin embargo, (5.85) sigue consistentemente el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad.

Si está disponible la función $N_x^{(m)}$, una fórmula general de valuación para anualidades con nivel de pagos mensual, en analogía con (5.82), es

$$\frac{b}{D_x}(N_y^{(m)} - N_z^{(m)}) \tag{5.87}$$

en donde b es el nivel del ingreso anual y b/m es el pago mensual.

Ejemplo 5.8:

Exprese, en términos de funciones conmutativas, el valor presente actuarial para (25) de una anualidad diferida de 1,000 al mes, el primer pago se hace a la edad de 65 años.

Solución:

El ingreso anual es 12,000, y el valor requerido es

$$\frac{12,000 N_{65}^{(12)}}{D_{25}}$$

donde $N_{65}^{(12)} = \alpha(12)N_{65} - \beta(12)D_{65}$.

∇

Ejemplo 5.9:

Exprese, en términos de funciones conmutativas, el valor actuarial acumulado a la edad de 65 años con pagos mensuales de 100 al principio de cada mes durante la sobrevivencia de (25) de la edad de 25 a la de 65.

Solución:

Aquí la aplicación de (5.87) produce

$$\frac{1,200}{D_{65}}[N_{25}^{(12)} - N_{65}^{(12)}].$$

∇

Regresando ahora a (5.83) y dejando que $m \to \infty$, obtenemos

$$\bar{a}_x = \frac{1}{D_x}\int_o^\infty D_{x+t}dt, \tag{5.88}$$

que sugiere la definición

$$\bar{N}_x = \int_o^\infty D_{x+t}dt = \int_x^\infty D_y dy. \tag{5.89}$$

Además, bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad, tenemos, al igual que para (5.85),

$$\bar{N}_x = \alpha(\infty)N_x - \beta(\infty)D_x$$

donde, de (5.72) y (5.73),

$$\alpha(\infty) = \bar{s}_{\overline{1}|}\bar{a}_{\overline{1}|} = \frac{id}{\delta^2} \tag{5.90}$$

$$\beta(\infty) = \frac{i-\delta}{\delta^2}. \tag{5.91}$$

Para la expansión de series de $\alpha(\infty)$, $\beta(\infty)$, veáse el Ejercicio 5.44.

En la práctica se utiliza la fórmula,

$$\bar{N}_x \cong N_x - \frac{1}{2}D_x, \tag{5.92}$$

que puede obtenerse aplicando la regla trapezoidal para evaluar la integral de (5.88), o dejando que $m \to \infty$ en (5.86).

Con estas nuevas funciones, una fórmula general para valuar el nivel de ingreso de anualidades continuas, es

$$\frac{b}{D_x}(\bar{N}_y - \bar{N}_z). \tag{5.93}$$

5.7 Anualidades Variables

En esta Sección consederaremos el problema de valuar anualidades para las que el ingreso anual, pagadero en plazos mensuales, cambia anualmente. Supongamos que la secuencia de ingresos anuales es $b_x, b_{x+1}, \cdots, b_y, \cdots, b_{x+n-1}$ y que los pagos se hacen al principio de los intervalos mensuales interrumpiéndose en la edad $x+n$. El valor presente actuarial a la edad y de los pagos a realizarse durante el año de edad $(y, y+1)$ es $b_y\ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|}$, y que el valor presente actuarial, $(apv)_x$, a la edad x, de la anualidad entera puede expresarse como

$$(apv)_x = \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y \ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|}\, {}_{y-x}E_x. \tag{5.94}$$

Si se supone una distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad, tenemos de (5.77)

$$(apv)_x = \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y[\alpha(m) - \beta(m)(1 - {}_1E_y)]\, {}_{y-x}E_x. \tag{5.95}$$

Si se prefiere trabajar con funciones conmutativas, puede reescribirse (5.95) en la forma

$$(apv)_x = \frac{1}{D_x} \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y[\alpha(m)D_y - \beta(m)(D_y - D_{y+1})]. \tag{5.96}$$

Si definimos

$$D_y^{(m)} = N_y^{(m)} - N_{y+1}^{(m)},$$

vemos de (5.85) que

$$D_y^{(m)} = \alpha(m)D_y - \beta(m)(D_y - D_{y+1}). \tag{5.97}$$

Por lo tanto, (5.96) se convierte en

$$(apv)_x = \frac{1}{D_x} \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y\, D_y^{(m)}. \tag{5.98}$$

Se bosquejarán fórmulas paralelas para anualidades inmediatas variables. La fórmula correspondiente a (5.94) es

$$(apv)_x = \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y\, a_{y:\overline{1}|}^{(m)}\, {}_{y-x}E_x. \tag{5.99}$$

bajo el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad,

$$a_{y:\overline{1}|}^{(m)} = \ddot{a}_{y:\overline{1}|}^{(m)} - \frac{1}{m}(1 - {}_1E_y) = \alpha(m) - \left[\beta(m) + \frac{1}{m}\right][1 - {}_1E_y].$$

Correspondiendo a (5.96), ahora es

$$(apv)_x = \frac{1}{D_x} \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y \left\{\alpha(m)D_y - \left[\beta(m) + \frac{1}{m}\right][D_y - D_{y+1}]\right\}, \tag{5.100}$$

que sugiere la definición

$$\tilde{D}_y^{(m)} = \alpha(m)D_y - \left[\beta(m) + \frac{1}{m}\right][D_y - D_{y+1}]. \tag{5.101}$$

Entones (5.100) se convierte en

$$(apv)_x = \frac{1}{D_x} \sum_{y=x}^{x+n-1} b_y \tilde{D}_y^{(m)}. \tag{5.102}$$

Para aplicaciones, veáse el Ejercicio 5.24.

Cuando los ingresos anuales son nivelados, es decir, $b_y = b$ (una constante), (5.98) se simplifica a $(b/D_x)[N_x^{(m)} - N_{x+n}^{(m)}]$. En otros casos especiales, en donde los ingresos anuales b_y son lineales en y, puede resultar útil introducir una función conmutativa $S_y^{(m)}$ donde

$$N_y^{(m)} = S_y^{(m)} - S_{y+1}^{(m)}$$

o

$$S_x^{(m)} = \sum_{y=x}^{\infty} N_y^{(m)}. \tag{5.103}$$

No se elaborarán fórmulas para estos casos especiales, pero se explorarán algunas en los Ejercicios 5.25 – 5.27.

Ejemplo 5.10

Con base en la Tabla de Vida Ilustrativa, con interés a la tasa anual efectiva de 6%, calcule

a. $N_{70}^{(12)}$ y $S_{70}^{(12)}$

b. el valor presente actuarial de una anualidad a (70) con pagos mensuales de 100 en el primer año, 110 en el segundo, y así sucesivamente, incrementándose el ingreso mensual en 10 por cada año subsiguiente.

Solución:

a. Por (5.85),

$$\begin{aligned} N_{70}^{(12)} &= \alpha(12)N_{70} - \beta(12)D_{70} \\ &= (1.0002810)(9597.05) - (0.46811951)(1119.94) \\ &= 9075.48. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} S_{70}^{(12)} &= \alpha(12)S_{70} - \beta(12)N_{70} \\ &= 62,643.28. \end{aligned}$$

b. El valor presente actuarial puede escribirse como

$$\frac{12[90N_{70}^{(12)} + 10S_{70}^{(12)}]}{D_{70}} = 15,464.$$

∇

5.8 Ecuaciones Recurrentes

Consideremos nuevamente una anualidad anticipada con pagos mensuales variables e ingresos anuales $b_x, b_{x+1}, \cdots, b_{x+n-1}$. Sea que $(apv)_y$ denote el valor presente actuarial a la edad y de los pagos de la anualidad de la edad y a la $x+n$; luego como puede observarse de (5.94),

$$(apv)_y = b_y\, \ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|} + {}_1E_y (apv)_{y+1} \tag{5.104}$$

es una ecuación recurrente para los cálculos sucesivos de los valores de $(apv)_y$, $y = x+n-1, x+n-2, \cdots, x$, con un valor inicial $(apv)_{x+n} = 0$. Pueden preferirse dichos cálculos recurrentes, que producen todos los valores de $(apv)_y$, $y = x, x+1, \cdots, x+n-1$, al cálculo de un valor $(apv)_x$ único mediante fórmulas como (5.94) o (5.98). Sin embargo, éstas últimas pueden resultar de utilidad para verificar errores de acumulación en el cálculo recurrente.

Como por ejemplo, si se desea una tabla de valores de $\ddot{a}_x^{(m)}$, para $x = c, c+1, \cdots, \omega - 1$ puede procederse mediante la ecuación recurrente

$$\ddot{a}_y^{(m)} = \ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|} + {}_1E_y\, \ddot{a}^{(m)}_{y+1}. \tag{5.105}$$

Bajo el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad,

$$\ddot{a}^{(m)}_{y:\overline{1}|} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} - \beta(m) v q_y$$

[veáse (5.75)]. Luego

$$\ddot{a}_y^{(m)} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} - \beta(m) v q_y + v p_y\, \ddot{a}^{(m)}_{y+1} \tag{5.106}$$

proporciona un medio recurrente de calcular, a partir de un valor inicial de $\ddot{a}_{\omega}^{(m)} = 0$, los valores sucesivos de $\ddot{a}_y^{(m)}, y = \omega - 1, \omega - 2, \cdots, c+1, c$. Para $m = 1$, las fórmulas se simplifican a

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\omega} &= 0 \\ \ddot{a}_y &= 1 + vp_y\,\ddot{a}_{y+1}, \end{aligned} \tag{5.107}$$

que pueden interpretarse directamente.

Ejemplo 5.11:

Demuestre que (5.106) puede reacomodarse

$$\ddot{a}_y^{(m)}(1+i) - \ddot{s}_{\overline{1}|}^{(m)} + q_y[\beta(m) + \ddot{a}_{y+1}^{(m)}] = \ddot{a}_{y+1}^{(m)}. \tag{5.108}$$

Proporcione una interpretación verbal de esta fórmula.

Solución:

Multiplique (5.106) por $(1+i)$, sustituya $1-q_y$ por p_y, después transponga los términos para obtener (5.108).

Si se utiliza la aproximación tradicional

$$\ddot{a}_y^{(m)} \cong \ddot{a}_y - \frac{m-1}{2m},$$

la fórmula comparable con (5.108) es

$$\ddot{a}_y^{(m)}(1+i) - \left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right) + q_y\left(\frac{m-1}{2m} + \ddot{a}_{y+1}^{(m)}\right) \cong \ddot{a}_{y+1}^{(m)}. \tag{5.109}$$

La fórmula (5.109) se utiliza en el análisis de pérdidas y ganancias de los sistemas de pensión. La fórmula (5.108)indica que

(el valor presente actuarial, $\ddot{a}_y^{(m)}$, acumulado con el interés de un año)

− (el valor acumulado de los pagos mensuales del año)

(los valores de los pagos mensuales de los años futuros

+ y los pagos corrientes que se espera se cancelen por el fallecimiento en el año corriente)

= (el valor presente actuarial de la anualidad desde la edad $y+1$).

La Fórmula (5.109) tiene una interpretación similar bajo el supuesto de que

$$D_{x+t} = (1-t)D_x + tD_{x+t} \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

mientras que (5.108) se basa en la distribución uniforme de fallecimientos. ∇

5.9 Anualidades Vitalicias con Pagos al Final del Periodo y Anualidades Anticipadas Prorrateadas

En el caso de las anualidades continuas, el ingreso es pagadero continuamente hasta el momento del fallecimiento, y no hay un pago final de ajuste. Con anualidades discretas, particularmente aquellas con pagos anuales, podría surgir una pregunta acerca de tener un ajuste prorrateado tomando en cuenta la fecha del fallecimiento. Por ejemplo, si una anualidad vitalicia de pagos al final del periodo aporta pagos anuales de $5,000$, y el aportador muere 1 mes antes de la fecha de vencimiento del siguiente pago, puede haber un pago fraccionario final por los 11 meses que el aportante sobrevivió desde el último pago. Como otro ejemplo, si se compra un contrato de seguro de vida mediante primas anuales de $1,000$ pagaderas en los aniversarios de la fecha de expedición, y si el asegurado muere 1 mes antes de la fecha de aniversario, puede haber una prima de reembolso por los 11 meses que el asegurado no completó en el año de la póliza.

Denotamos con $\mathring{a}_x^{(m)}$ el valor presente actuarial de una anualidad vitalicia de 1 año pagadero en entregas de $1/m$ al final de cada mes de un año mientras (x) sobreviva, más un pago de ajuste para tomar en cuenta el periodo entre la fecha del último pago mensual y la fecha del fallecimiento. Para completar la definición de la anualidad necesitamos decidir sobre el pago de ajuste. Como un pago de $1/m$ al final de un mes de un año es equivalente a los pagos continuos a la tasa

$$\frac{1}{m}\frac{1}{\bar{s}_{\overline{1/m|}}}$$

por año durante el mes, deberemos escoger

$$\frac{1}{m}\frac{\bar{s}_{\overline{t|}}}{\bar{s}_{\overline{1/m|}}} \tag{5.110}$$

para ser el pago de ajuste si el fallecimiento ocurre en el tiempo t en el mes del fallecimiento, $0 < t < 1/m$. Con esta definición del pago de ajuste, la anualidad vitalicia con pagos al final de cada periodo es exactamente equivalente a una anualidad continua con pagos a una tasa anual de

$$\frac{1}{m}\frac{1}{\bar{s}_{\overline{1/m|}}} = \frac{1}{m}\frac{\delta}{(1+i)^{1/m}-1} = \frac{\delta}{i^{(m)}}. \qquad (5.111)$$

Esto püede verse notando que, en cualquier mes de un año durante el que (x) sobreviva, la anualidad continua aporta pagos de valor

$$\frac{1}{m\bar{s}_{\overline{1/m|}}}\bar{s}_{\overline{1/m|}} = \frac{1}{m}$$

al final del mes. Y, en el mes del fallecimiento, la anualidad continua aporta pagos equivalentes a

$$\frac{1}{m\bar{s}_{\overline{1/m|}}}\bar{s}_{\overline{t|}}$$

al tiempo del fallecimiento, como lo hace la anualidad vitalicia. Por lo tanto, tenemos ahora

$$\mathring{a}_x^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_x, \qquad (5.112)$$

que es análoga a la relación

$$a_{\overline{n|}}^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_{\overline{n|}}$$

en la teoría del interés compuesto.

En la práctica, el pago de ajuste puede tomarse como t, aproximando (5.110). Sin embargo, resulta una teoría más simple si se toma en cuenta el interés y el ajuste es similar al de (5.110). Por ejemplo, notamos que en este último caso

$$\begin{aligned} 1 & -i^{(m)}\,\mathring{a}_x^{(m)} = 1 - \delta\bar{a}_x = \bar{A}_x, \\ 1 & = i^{(m)}\,\mathring{a}_x^{(m)} + \bar{A}_x. \end{aligned} \qquad (5.113)$$

La interpretación de (5.113) es que 1 invertido durante la vida de (x) producirá un interés de $i^{(m)}/m$ al final de cada mes de un año mientras (x) sobreviva, más un ajuste de

$$i^{(m)}\frac{\bar{s}_{\overline{t|}}}{m\bar{s}_{\overline{1/m|}}} = \delta\bar{s}_{\overline{t|}} = (1+i)^t - 1$$

por el interés en el mes del fallecimiento, más el repago de 1 al fallecimiento. (Para mayor profundidad en el pago de ajuste bajo $\mathring{a}_x^{(m)}$, veáse el Ejercicio 5.31 para el caso $m = 1$.)

Veamos ahora la teoría paralela para las anualidades vencidas. Denotamos mediante $\ddot{a}_x^{\{m\}}$ el valor presente actuarial de una anualidad prorrateada de 1 anual pagadero a plazos de $1/m$ al principio de cada mes de un año mientras (x) sobreviva, con un reembolso al fallecimiento a quien lo paga para tomar en cuenta el periodo entre la fecha del fallecimiento y la fecha del siguiente pago mensual. Como un pago de $1/m$ al principio de un mes del año es equivalente a pagos continuos a la tasa

$$\frac{1}{m}\frac{1}{\bar{a}_{\overline{1/m}|}}$$

por año durante el mes, escogemos

$$\frac{1}{m}\frac{\bar{a}_{\overline{1/m-t}|}}{\bar{a}_{\overline{1/m}|}} \tag{5.114}$$

para ser el reembolso si el fallecimiento ocurre en el tiempo t en el mes del fallecimiento, $0 < t < 1/m$. La expresión (5.114) representa el reembolso equitativo al tiempo del fallecimiento de la porción no ganada del pago de $1/m$ al principio del mes del fallecimiento. Con esta definición del pago de reembolso, la anualidad vitalicia anticipada prorrateada es exactamente equivalente a una anualidad continua con pagos a la tasa anual de

$$\frac{1}{m}\frac{1}{\bar{a}_{\overline{1/m}|}} = \frac{1}{m}\frac{\delta}{1-v^{1/m}} = \frac{\delta}{d^{(m)}}. \tag{5.115}$$

Esto es,

$$\ddot{a}_x^{\{m\}} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_x \tag{5.116}$$

y

$$1 - d^{(m)}\ddot{a}_x^{\{m\}} = 1 - \delta\bar{a}_x = \bar{A}_x,$$

o

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{\{m\}} + \bar{A}_x, \tag{5.117}$$

que se deja al lector para su interpretación.

Ejemplo 5.12:

Establezca la fórmulas:

$$
\begin{aligned}
\text{a. } \mathring{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|} \\
\text{b. } \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|} \\
\text{c. } \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= (1+i)^{1/m}\mathring{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\text{a. } \mathring{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \mathring{a}^{(m)}_{x} - {}_nE_x\, \mathring{a}^{(m)}_{x+n} = \frac{\delta}{i^{(m)}}[\bar{a}_x - {}_nE_x\, \bar{a}_{x+n}] = \frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|} \\
\text{b. } \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}^{(m)}_{x} - {}_nE_x\, \ddot{a}^{(m)}_{x+n} = \frac{\delta}{d^{(m)}}[\bar{a}_x - {}_nE_x\, \bar{a}_{x+n}] = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|} \\
\text{c. } \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{\delta}{v^{1/m}i^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = (1+i)^{1/m}\mathring{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

La interpretación de (c) es que tanto $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ como $\mathring{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ **proporcionan mensualmente ingresos de 1 por** año, ajustados hasta la fecha del fallecimiento. **Sin embargo,** $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ **hace pagos a plazo al principio de los** intervalos mensuales y $\mathring{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ los hace al final. Es **un interesante, aunque no obvio ejercicio ver cómo, en** la mensualidad del fallecimiento, los pagos de $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ **(que consisten de $1/m$ al principio del mes menos** el reembolso al fallecimiento) tienen un valor de $(1+i)^{1/m}$ **veces el ajuste aportado por** $\mathring{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$.

∇

De (5.112), (3.31), y del hecho de que $\lim_{\delta\to 0}(\delta/i) = 1$, **observamos que para $\delta = 0$**

$$\mathring{a}_x = \bar{a}_x = \mathring{e}_x = \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|}.$$

En este caso especial,

(el valor presente actuarial de una anualidad a la edad x)

= (al valor presente de una anualidad por tiempo fijo para un plazo igual a la esperanza de vida a la edad x).

este es un concepto erroneo donde la igualdad que tenemos $\delta > 0$, pero el siguiente ejemplo demuestra lo contrario.

Ejemplo 5.13:

Para $\delta > 0$, demuestre que

$$\text{a. } \bar{a}_x < \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|} \qquad \text{b. } a_x < a_{\overline{e_x}|}, \qquad x < \omega - 1.$$

Solución:

a. Aquí es conveniente utilizar la desigualdad de Jensen mostrada en la Figura 1.2. Reemplazamos la variable aleatoria X por la variable T del tiempo futuro de vida, y $u(X)$ por $\bar{a}_{\overline{T}|}$, y notamos que

$$\frac{d^2}{dt^2}\bar{a}_{\overline{T}|} = -\delta e^{-\delta t} < 0$$

para $\delta > 0$. Luego de (5.4), (1.3) y (3.30), tenemos que

$$\bar{a}_x = E[\bar{a}_{\overline{T}|}] < \bar{a}_{\overline{E[T]}|} = \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|},$$

que demuestra la desigualdad.

b. El argumento similar para la anualidad discreta empieza con la variable K del tiempo futuro truncado de vida y la función $a_{\overline{K}|}$, $K = 0, 1, 2, \cdots$. La prueba de la desigualdad de Jensen no depende del tipo de distribución de la probabilidad (continua, discreta o mixta), pero si supone que la función $u(x)$ es diferenciable con $u''(x) > 0$. En nuestro ejemplo, estamos tratando con la función $a_{\overline{t}|} = (1 - e^{-\delta t})/i$, la que es diferenciable para cualquier orden y tiene

$$\frac{d^2}{dt^2}a_{\overline{t}|} = -\frac{\delta^2}{i}v^t < 0 \qquad \delta > 0.$$

Entonces, por la desigualdad de Jensen,

$$a_x = E[a_{\overline{K}|}] \leq a_{\overline{E[K]}|} = a_{\overline{e_x}|}.$$

La desigualdad es estricta excepto cuando K es constante. Por ejemplo, cuando $x = \omega - 1$, K es 0 y la igualdad se mantiene. Para $x < \omega - 1$ y $\delta > 0$, tenemos $a_x < a_{\overline{e_x}|}$. ∇

La relación de $\bar{a}_x$ para $\bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|}$ se explora con mayor profundidad en el Ejercicio 5.45.

5.10 Notas y Referencias

Algunas referencias bibliográficas para la fórmula de la sumatoria de Woolhouse son Kellison (1975) o Jordan (1967). Ejemplos sobre la distorsión de los valores anuales basados en la aproximación tradicional se dan en los números de Enero y Abril de 1977 de *The Actuary*. Taylor (1952) presentó nuevas fórmulas similares a (5.65). Varios estudios de la distribución de la probabilidad de los costos de las anualidades fueron realizados por Boermeester (1956), Fretwell y Hickman (1964), y Bowers (1967). Mereu (1962) proporcionó los medios para calcular los valores de las anualidades directamente a partir de las constantes de Makeham. Las anualidades vitalicias y prorrateadas están involucradas, explícita o implícitamente, en las ponencias de Rasor y Greville (1952), Lauer (1967) y Scher (1974), y en las discusiones de ellas.

5.11 Ejercicios

Sección 5.2

5.1 Calcule el valor presente actuarial de 1,000 vencidos al final de 20 años si una vida de 50 sobrevive. Use la Tabla de Vida Ilustrativa con interés a una tasa anual efectiva de 6%.

5.2 ¿ Cuál es el valor futuro de 1,000 acumulados de los 50 a 70 años con una tasa efectiva anual de interés de 6% y con sobrevivencia dada por la Tabla de Vida Ilustrativa?

5.3 Pruebe e interprete la relación

$$ {}_nE_x + {}_nE_x[(1+i)^n - 1] + {}_nE_x(1+i)^n \frac{l_x - l_{x+n}}{l_{x+n}} = 1. $$

Sección 5.3

5.4 Usando el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad y la Tabla de Vida Ilustrativa con una tasa efectiva anual de interés de 6%, calcule

a. $\bar{a}_{20}$, $\bar{a}_{50}$, $\bar{a}_{80}$

b. $Var[\bar{a}_{\overline{T}|}$ para $x = 20, 50, 80$.

[Sugerencia: use (5.10) y (4.25).]

5.5 Usando los valores obtenidos en el Ejercicio 5.4, calcule la desviación estándar y el coeficiente de variación, σ/μ , el valor presente de las siguientes variables aleatorias

a. Anualidades individuales emitidas a las edades de 20, 50, 80 con ingresos vitalicios de 1,000 al año pagaderos continuamente.

b. Un grupo de 100 anualidades, cada una emitida a la edad de 50 años con un ingreso vitalicio de 1,000 al año pagaderos continuamente.

5.6 Demuestre que la $Var[\bar{a}_{\overline{T|}}]$ puede expresarse como

$$\frac{2}{\delta}[\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x] - \bar{a}_x^2$$

donde ${}^2\bar{a}_x$ esta basada en la fuerza de interés 2δ.

5.7 Calcule la $Cov[\delta\bar{a}_{\overline{T|}}, v^T]$.

5.8 Y se adopta un enfoque determinístico (función de cambio porcentual), (5.30) podría tomarse como el punto de partida para el desarrollo de una teoría de anualidades vitalicias continuas. Para ello, podría empezarse con

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}_y}{dy} &= (\mu_y + \delta)\bar{a}_y - 1 \qquad x \leq y < \omega \\ \bar{a}_y &= 0 \qquad \omega \leq y. \end{aligned}$$

a. Use el factor de integración $\exp[-\int_o^y (\mu_z + \delta)dz]$ para resolver la ecuación diferencial para obtener (5.4).

b. Use el factor de integración $e^{-\delta y}$ para obtener la curiosa ecuación

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{\overline{\omega-x|}} - \int_x^\omega e^{-\delta(y-x)}\bar{a}_y\,\mu_y\,dy,$$

y de una explicación verbal de ella.

Sección 5.4

5.9 Defina ${}_{m|n}\ddot{a}_x$ y escriba fórmulas para ella que sean similares a (5.25)-(5.28) para ${}_{m|n}\bar{a}_x$.

5.10 Demuestre que

$$Var[a_{\overline{K|}}] = Var[\ddot{a}_{\overline{K+1|}}] = \frac{1}{d^2}Var[v^{K+1}].$$

5.11 Pruebe e interprete las siguientes relaciones.

a. $a_{x:\overline{n|}} = {}_1E_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n|}}$

b. ${}_{n|}a_x = \frac{A_{x:\overline{n|}} - A_x}{d} - {}_nE_x$

5.12 Pruebe algebraicamente (5.62) empezando desde (5.41).

5.13 ¿ Es

$$1 = i\ a_{x:\overline{n}|} + (1+i)A_{x:\overline{n}|}$$

una fórmula correcta? Si no, corríjala.

Sección 5.5

5.14 Considere

$$\ddot{a}_x^{(m)} = E[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+J_m}|}]$$

donde K es el tiempo futuro de vida truncado de (x) y

$$J_m = \frac{j+1}{m}$$

cuando

$$\frac{j}{m} < S \leq \frac{j+1}{m} \qquad j = 0, 1, \cdots, m-1$$

donde S es igual que en (3.41). Usando el Ejercicio 4.15, **demuestre que**

a. $1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}$

b. $J_m = [mS + 1]/m$, excepto cuando $S = (j+1)/m$.

Los paréntesis cuadrados indican la función de enteros más grande. [Note que $Pr(S = (j+1)/m = 0.]$

5.15 Haciendo el supuesto de que

$$D_{y+h/m} = D_y - \frac{h}{m}(D_y - D_{y+1}) \qquad h = 0, 1, \cdots, m-1,$$

en cada año de edad, verifique que

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m}.$$

5.16 Escriba las fórmulas tradicionales correspondientes a (5.77) y (5.78) y verifíquelas utilizando (5.70).

5.17 Demuestre que la anualidad con pagos al final de cada periodo similares a la fórmula (5.65) es

$$a_x^{(m)} = s_{\overline{1}|}^{(m)}\, a_x + \frac{1}{i^{(m)}}\left[(1+i)A_x - \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) A_x^{(m)}\right],$$

y que bajo el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad estas se convierten en

$$a_x^{(m)} = s_{\overline{1}|}^{(m)} a_x + (1+i)\frac{1 - \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}}{i^{(m)}} A_x.$$

5.18 Demuestre que la anualidad con pagos al final de cada periodo similares a las fórmulas (5.66) son

$$a_x^{(m)} = \frac{1 - [1 + i^{(m)}/m]A_x^{(m)}}{i^{(m)}} = a_{\overline{\infty}|}^{(m)} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}\, A_x^{(m)}$$

y que bajo el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos en cada año de edad estas se convierten en

$$a_x^{(m)} = \alpha(m)a_x + \gamma(m)$$

donde $\gamma(m) = (1 - \ddot{a}_{\overline{1}|}^{m})/i^{(m)}$.

5.19 Como bajo el supuesto de una distribución uniforme **de fallecimientos en cada año de edad,**

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) \\ a_x^{(m)} &= \alpha(m)a_x - \gamma(m), \end{aligned}$$

y ya que

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} - a_x^{(m)} &= \frac{1}{m} \\ \ddot{a}_x - a_x &= 1, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\gamma(m) = \alpha(m) - \beta(m) - \frac{1}{m}.$$

Verifique está relación sustituyendo para $\alpha(m), \beta(m)$.

5.20 a. Usando (5.63) como punto de partida, verifique que

$$\lim_{m\to\infty} \ddot{a}_x^{(m)} = \bar{a}_x.$$

b. Use (5.70) y el resultado de (a) para demostrar

$$\bar{a}_x \cong a_x + \frac{1}{2}.$$

c. Empiece con (5.6) para demostrar que la regla trapezoidal por integración aproximada produce el resultado en (b).

5.21 Utilizando la aproximación tradicional dada en (5.70), establezca los siguiente:

a. $a_x^{(m)} \cong a_x + \dfrac{m-1}{2m}$

b. $a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \cong a_{x:\overline{n}|} + \dfrac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)$

c. ${}_{n|}a_x^{(m)} \cong {}_{n|}a_x + \dfrac{m-1}{2m}\,{}_nE_x.$

5.22 a. Desarrolle una fórmula para $\ddot{s}_{25:\overline{40}|}^{(m)}$ en términos de $\ddot{s}_{25:\overline{40}|}$.

b. Con base en la Tabla de Vida Ilustrativa con una tasa **anual efectiva de interés de 6%, calcule** los valores de

$(i)\ \ddot{a}_{25:\overline{40}|}^{(12)}$ $\qquad (ii)\ \ddot{s}_{25:\overline{40}|}^{(12)}.$

Sección 5.6

5.23 Proporcione fórmulas, en términos de funciones **conmutativas, para**

a. $\ddot{a}_x$	b. a_x	c. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$
d. $a_{x:\overline{n}|}$	e. ${}_{n|}\ddot{a}_x$	f. ${}_{n|}a_x$
g. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$	h. ${}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)}$.	

5.24 Para evaluar anualidades vitalicias **con pagos al final de cada periodo con ingreso anual b, puede** utilizarse la función **conmutativa especial**

$$\tilde{N}_x^{(m)} = \alpha(m)N_{x+1} + \gamma(m)D_x = \alpha(m)N_x - \left[\beta(m) + \frac{1}{m}\right] D_x$$

y la fórmula general

$$\frac{b}{D_x}[\tilde{N}_y^{(m)} - \tilde{N}_x^{(m)}].$$

Escriba las fórmulas en términos de $\tilde{N}_x^{(12)}$ para

a. $a_{60}^{(12)}$ b. $a_{40:\overline{25}|}^{(12)}$ c. ${}_{30|}a_{40}^{(12)}$.

Sección 5.7

5.25 **El valor presente actuarial de una anualidad vitalicia estándar creciente temporal respecto a (x) con**

- **ingreso anual de 1 en el primer año, 2 en el segundo, y así sucesivamente, finalizando con n en el n-ésimo año,**
- **pagos mensuales con una base anticipada,**

se denota con $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)}$. Demuestre que $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ **puede expresarse de las siguientes formas.**

a. $\sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n-k}|}^{(m)}$

b. $\frac{1}{D_x}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)D_{x+k}^{(m)}$

c. $\frac{1}{D_x}\sum_{k=0}^{n-1}[N_{x+k}^{(m)} - N_{x+n}^{(m)}]$

d. $\frac{1}{D_x}[S_x^{(m)} - S_{x+n}^{(m)} - nN_{x+n}^{(m)}]$

5.26 El valor presente actuarial de **una anualidad vitalicia temporal decreciente respecto a (x) con**

- ingreso anual de n en el primer año, **$n-1$ en el segundo, y así sucesivamente, finalizando con 1 en** el n-ésimo año,
- pagos mensuales con una base **anticipada,**

se denota con $(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)}$. **Demuestre que $(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ puede expresarse de las siguientes formas.**

a. $\sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{x:\overline{k}|}^{(m)}$

b. $\frac{1}{D_x}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)D_{x+k}^{(m)}$

c. $\frac{1}{D_x}\sum_{k=1}^{n}[N_x^{(m)} - N_{x+k}^{(m)}]$

d. $\frac{1}{D_x}[nN_x^{(m)} - (S_{x+1}^{(m)} - S_{x+n+1}^{(m)})]$

5.27 Si en el Ejercicio 5.25 el ingreso anual no se interrumpe a la edad $x+n$ sino continua al nivel n mientras (x) sobreviva después de ello, el valor presente actuarial se denota con $(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x^{(m)}$. Demuestre que para $(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x^{(m)}$ se sostienen las siguientes expresiones.

a. $\sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)}$

b. $\frac{1}{D_x}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)D_{x+k}^{(m)} + nN_{x+n}^{(m)}\right]$

c. $\frac{1}{D_x}\sum_{k=0}^{n-1} N_{x+k}^{(m)}$

d. $\frac{1}{D_x}[S_x^{(m)} - S_{x+n}^{(m)}]$

5.28 Verifique la fórmula

$$\delta(\bar{I}\bar{a})_{\overline{T}|} + Tv^T = \bar{a}_{\overline{T}|}$$

donde T representa el tiempo futuro de vida de (x). **Utilicela para probar que**

$$\delta(\bar{I}\bar{a})_x + (\bar{I}\bar{A})_x = \bar{a}_x$$

en donde $(\bar{I}\bar{a})_x$ es el valor presente actuarial **de una anualidad vitalicia de (x) en la que los pagos** se hacen continuamente a la tasa de t **por año en el tiempo t.**

Sección 5.8

5.29 a. Demuestre que, cuando $m = 1$, **la fórmula (5.109) se convierte en**

$$\ddot{a}_y(1+i) - (1+i) + q_y\ddot{a}_{y+1} = \ddot{a}_{y+1}.$$

b. Exprese **la fórmula de la parte (a)** en **términos de valores de la anualidad con pagos al final de** cada periodo **para obtener lo siguiente.**

(i) $a_y(1+i) + q_y(1+a_{y+1}) = 1 + a_{y+1}$

(ii) $1 = ia_y + q_y(1+a_{y+1}) + a_y - a_{y+1}$

De una interpretación verbal de cada una.

5.30 Demuestre que, para n y x dadas, las siguientes recurrentes se sostienen para $h = 0, 1 \cdots, n-1$.

a. $(D\ddot{a})^{(12)}_{x+h:\overline{n-h}|} = (n-h)\ddot{a}^{(12)}_{x+h:\overline{1}|} + {}_1E_{x+h}(D\ddot{a})^{(12)}_{x+h+1:\overline{n-h-1}|}$

b. $(apv)_{x+h} = (h+1)\ddot{a}^{(12)}_{x+h:\overline{1}|} + {}_1E_{x+h}(apv)_{x+h+1}$

en donde $(apv)_{x+h} = h\ddot{a}^{(12)}_{x+h:\overline{n-h}|} + (I\ddot{a})^{(12)}_{x+h:\overline{n-h}|}$.

Sección 5.9

5.31 a. Demuestre que, para la técnica de pago agregado al evaluar $\mathring{a}_x$, el valor presente de la variable aleatoria es

$$a_{\overline{K}|} + \frac{v^T \bar{s}_{\overline{T-K}|}}{\bar{s}_{\overline{1}|}} = a_{\overline{K}|} + v^T \frac{\delta}{i} \bar{s}_{\overline{T-K}|}$$

en donde K, T son el tiempo de vida futuro truncado y completo de (x), respectivamente, y que se reduce a

$$\frac{1-v^T}{i} = a_{\overline{T}|}.$$

b. Por tanto, demuestre

$$\mathring{a}_x = E\left[\frac{1-v^T}{i}\right] = \frac{\delta}{i}\bar{a}_x,$$

y obtenga una fórmula para

$$Var\left[\frac{1-v^T}{i}\right].$$

5.32 a. Demuestre que para $\ddot{a}^{\{1\}}_x$ el valor presente de la variable aleatoria es

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - v^T \frac{\delta}{d} \bar{a}_{\overline{K+1-T}|}$$

y que se reduce a

$$\frac{1-v^T}{d} = \ddot{a}_{\overline{T}|}.$$

b. Por tanto, demuestre que

$$\ddot{a}_x^{\{1\}} = \frac{\delta}{d}\bar{a}_x.$$

Misceláneos

5.33 Para $0 \leq t \leq 1$ y el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos en cada año de edad, demuestre que

a. $\ddot{a}_{x+t} = \dfrac{(1+it)\ddot{a}_x - t(1+i)}{1-tq_x}$

b. ${}_{t|}\ddot{a}_x = v^t[(1+it)\ddot{a}_x - t(1+i)]$

c. ${}_{1-t|}\ddot{a}_{x+t} = \dfrac{(1+i)^t}{1-tq_x}(\ddot{a}_x - 1)$

d. $A_{x+t} = \dfrac{1+it}{1-tq_x}A_x - \dfrac{tq_x}{1-tq_x}.$

5.34 Obtenga fórmulas para la evaluación de una anualidad vitalicia anticipada de (x) con un pago inicial de 1 y con pagos anuales crecientes después de ello mediante

a. 3% del pago anual inicial

b. 3% del pago anual del año anterior.

5.35 Exprese $(\bar{D}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$ como una integral y compruebe la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial n}(\bar{D}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{n}|}.$$

5.36 Proporcione una expresión para el valor acumulado actuarial a la edad de 70 de una anualidad con los siguientes pagos mensuales:

- 100 al final de cada mes desde la edad 30 a la 40,
- 200 al final de cada mes desde la edad 40 a la 50,
- 500 al final de cada mes desde la edad 50 a la 60,
- 1,000 al final de cada mes desde la edad 60 a la 70.

5.37 Derive una expresión simplificada de la prima neta única para un seguro a plazo de 25 años pagadero inmediatamente al fallecimiento de (35), en el que el beneficio por fallecimiento en caso de muerte a la edad $35+t$ es $\bar{s}_{\overline{t}|}$, $0 \leq t \leq 25$. Interprete su resultado.

5.38 Derive una expresión simplificada de la prima neta única para un seguro a plazo de n años pagadero al final del año del fallecimiento de (x), en el que el beneficio por fallecimiento en el año $k+1$ es $\ddot{s}_{\overline{k+1}|}$, $0 \leq k < n$. Interprete el resultado.

5.39 Obtenga una expresión simplificada para

$$(I\ddot{a})^{(12)}_{x:\overline{25}|} - (Ia)^{(12)}_{x:\overline{25}|}.$$

5.40 Consider una anualidad vitalicia continua diferida a n años de 1 por año como un seguro con probabilidad de reclamación, ${}_np_x$ y monto de reclamación aleatorio $v^n\bar{a}_{\overline{T}|}$. Aquí T tiene *f.d.p.* ${}_tp_{x+n}\,\mu_{x+n+t}$. Aplique (2.14) para demostrar que la varianza de este seguro es igual a

$$v^{2n}\,{}_np_x\,(1 - {}_np_x)\,\bar{a}^2_{x+n} + v^{2n}\,{}_np_x\,\frac{{}^2\bar{A}_{x+n} - \bar{A}^2_{x+n}}{\delta^2},$$

y verifique que esto se reduce a (5.24).

5.41 Escriba el análogo discreto de la fórmula de la varianza en el Ejercicio 5.40.

5.42 Sea I_k el indicador de la variable aleatoria con $Pr(I_k = 1) = {}_kp_x$, $Pr(I_k = 0) = {}_kq_x$. Demuestre lo siguiente:

a. El valor presente actuarial de una anualidad vitalicia a (x), con pago anual b_k al sobrevivir a la edad $x + k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ puede escribirse como

$$E\left[\sum_{k=0}^{\infty} v^k\, b_k\, I_k\right].$$

b.

$$\begin{aligned} E[I_j\, I_k] &= {}_kp_x & j \leq k \\ Cov[I_j\, I_k] &= {}_kp_x\, {}_jq_x & j \leq k. \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} &Var\left[\sum_{k=0}^{\infty} v^k\, b_k\, I_k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k}\, b_k^2\, {}_kp_x\, {}_kq_x + 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j<k} v^{j+k}\, b_j\, b_k\, {}_kp_x\, {}_jq_x. \end{aligned}$$

5.43 Si un índice de 2 a la izquierda indica que el interés está a fuerza 2δ demuestre que

a. ${}^2A_x = 1 - (2d - d^2)\,{}^2\ddot{a}_x$

b. $Var[v^{K+1}] = 2d(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x) - d^2(\ddot{a}_x^2 - {}^2\ddot{a}_x)$

c. $Var[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \frac{2}{d}(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x) - (\ddot{a}_x^2 - {}^2\ddot{a}_x)$.

5.44 a. expanda, en términos de potencias de δ, los coeficientes de la anualidad $\alpha(m)$ y $\beta(m)$.

b. ¿ En qué se convierten las expansiones de (a) para $m = \infty$?

5.45 Si $g(x)$ es una función no negativa y X es una variable aleatoria con *f.d.p* $f(x)$, justifique la desigualdad

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \geq k\, Pr[g(X) \geq k] \qquad k > 0,$$

y usela para demostrar que

$$\bar{a}_x \geq \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|} Pr(\bar{a}_{\overline{T}|} \geq \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|}) = \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|} Pr(T \geq \mathring{e}_x).$$

5.46 Se utiliza una unidad para comprar una combinación de beneficios consistentes en un ingreso vitalicio de 1 por año pagadero continuamente mientras (x) sobreviva y un seguro de J pagaderos inmediatamente a la muerte de (x). Escribe el valor presente de la variable aleatoria para esta combinación, y proporcione su media y varianza.

5.47 Usando el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos para cada año de edad y la Tabla de Vida Ilustrativa con una tasa anual efectiva de interés de 6%, calcule

a. $\ddot{a}^{(12)}_{40}$ b. $\ddot{a}^{(12)}_{40:\overline{30}|}$ c. ${}_{30|}\ddot{a}^{(12)}_{40}$.

5.48 Demuestre que, si $q_x < \left(\frac{i^{(2)}}{2}\right)^2$, la aproximación tradicional

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)$$

en el caso especial con $n = 1$, $m = 2$ conduce a

$$\ddot{a}^{(2)}_{x:\overline{1}|} > \ddot{a}^{(2)}_{\overline{1}|}.$$

5.49 Si $A''_{x:\overline{m}|}$ y $\ddot{a}''_{x:\overline{m}|}$ son valores presentes actuariales calculados utilizando

- una tasa de interés de i para los primeros n años, $n < m$, y
- una tasa de interés i' para los restantes $m - n$ años, demuestre algebraicamente e interprete

a. $A''_{x:\overline{m}|} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - v^n\,{}_np_x\, d'\,\ddot{a}'_{x+n:\overline{m-n}|}$

b. $A''_{x:\overline{m}|} = 1 - d'\,\ddot{a}''_{x:\overline{m}|} + (d' - d)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$.

5.50 Demuestre que

$$\frac{d\ddot{a}_x}{di} = -v(Ia)_x$$

donde

$$(Ia)_x = \sum_{t=1}^{\infty} t\, v^t\, {}_tp_x,$$

e interprete la relación.

5.51 Si, en el Ejemplo 5.10, los pagos anuales nivelados después

a. 10 se incrementan,

b. 20 se incrementan,

encuentre el valor presente actuarial de la anualidad.

5.52 Demuestre que un incremento constante en la fuerza de mortalidad tiene el mismo efecto sobre $\ddot{a}_x$ como el de un incremento constante en la fuerza de interés, pero que este no es el caso para $\ddot{a}_x^{(m)}$ evaluado mediante $\alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)$.

5.53 Demuestre que

a. $\alpha(m) - \beta(m)d = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}$

b. la fórmula recurrente (5.106) puede reescribirse como

$$\ddot{a}_y^{(m)} = \alpha(m) - \beta(m)(1 - v\,p_y) + v\,p_y\,\ddot{a}_{y+1}^{(m)}.$$

5.54 Considere el siguiente portafolio de anualidades anticipadas que se pagan actualmente de los activos de un fondo de pensiones.

Edad	Número de Beneficiarios de la Anualidad
65	30
75	20
85	10

Cada anualidad tiene un pago anual de 1 durante todo el tiempo que el beneficiario sobreviva. Suponga una tasa de interés de 6% de ganancia y una mortalidad igual a la que da la Tabla de Vida Ilustrativa. Calcule para el valor presente de estas obligaciones del fondo de pensión

a. la esperanza

b. la varianza

c. el percentil 95 de la distribución.

Para las partes (b) y (c), suponga que las vidas son mutuamente independientes.

Capítulo 6

PRIMAS NETAS

6.1 Introducción

En los Capítulos 4 y 5 discutimos los valores presentes actuariales de los pagos de varios seguros de vida y anualidades. Estas ideas se combinarán en este capítulo, porque en la práctica un seguro de vida individual generalmente se compra por una anualidad vitalicia de primas brutas. Las primas brutas proporcionan lo necesario para cubrir las indemnizaciones del seguro de vida, los gastos de iniciación y mantenimiento del seguro, y los márgenes de ganancia y para compensar posibles experiencias desfavorables. En el presente capítulo se cubrirán las primas netas anuales que sólo sufragan los pagos de indemnizaciones. Dichas primas netas anuales asumirán la forma de una anualidad vitalicia que empieza cuando se emite el seguro.

En el Capítulo 1 discutimos la idea que la determinación de la prima del seguro requiere la adopción de un principio sobre primas. El Ejemplo 6.1 ilustra la aplicación de dos principios. Uno de ellos determinará la prima para cubrir sólo el valor presente esperado de las indemnizaciones del seguro.

Ejemplo 6.1

Un asegurador planea expedir una póliza para una vida de 0 años cuyo tiempo de vida futuro truncado, K, está regulado por la *f.p.*

$$_{k|}q_0 = \frac{1}{4} \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

La póliza pagará 1 unidad al final del año del fallecimiento a cambio del pago de una prima P al principio de cada año, siempre que la vida sobreviva. Encuentre la prima anual P, determinada por

a. Principio I: P deberá ser tal que la esperanza del valor presente, a la expedición de la póliza, de la pérdida financiera sea 0.

b. Principio II: P deberá ser la cantidad mínima tal que la probabilidad de una pérdida financiera positiva sea a lo sumo 1/4.

Para ambas partes, suponga que el asegurador utilizará una tasa efectiva anual de $i = 0.06$.

Solución:

Para $K = k$ y una prima arbitraria, P , el valor presente de la pérdida financiera a la emisión de la póliza es $v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1}|}$.

a. De acuerdo con el Principio I, P debería escogerse tal que

$$\sum_{k=0}^{3}(v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1}|})Pr(K = k) = 0, \tag{6.1}$$

que da $P = 0.3667$.

b. Como $v^j - P\ddot{a}_{\overline{j}|}$ disminuye a medida que j se incrementa, **el requisito del Principio II se sostendrá** si P es tal que $v^2 - P\ddot{a}_{\overline{2}|} = 0$. **Entonces la pérdida financiera es positiva sólo para $K = 0$. Por tanto,** por este principio, $P = 0.4580$.

Estos resultados se resumen en la tabla siguiente:

			Valor Presente de la Pérdida Financiera	
			Prima del principio	
Resultado k	Probabilidad $_{k\|}q_0$	Fórmula General	I	II
0	1/4	$v - P\ddot{a}_{\overline{1}\|}$	0.5767	0.4854
1	1/4	$v^2 - P\ddot{a}_{\overline{2}\|}$	0.1774	0.0000
2	1/4	$v^3 - P\ddot{a}_{\overline{3}\|}$	−0.1993	−0.4580
3	1/4	$v^4 - P\ddot{a}_{\overline{4}\|}$	−0.5547	−0.8900
		La prima es	0.3667	0.4580

▽

De aquí en adelante, se seguirá el **Principio I para la determinación de las primas. Para formalizar** sus conceptos, definimos **la pérdida del asegurador, L, como la diferencia entre la variable aleatoria** referida al valor presente de **los indemnizaciones a pagarse por el asegurador y la variable aleatoria** concerniente al valor presente de **la anualidad de las primas a pagarse por el asegurado. El principio I** se denomina el ***principio de equivalencia*** y exige que

$$E[L] = 0. \tag{6.2}$$

Hablaremos de primas netas como aquellas que satisfacen (6.2). Estas primas netas serán tales que

E[valor presente de los beneficios - valor presente de las primas netas] = 0,

lo que equivale a

E[valor presente de los beneficios] = E [valor presente de las primas netas].

En otras palabras, las primas netas se seleccionan en forma tal que el valor presente actuarial de las indemnizaciones iguale al valor presente actuarial de las primas netas. Los métodos que se desarrollaron en los Capítulos 4 y 5 para calcular estos valores presentes actuariales pueden utilizarse para reducir la igualdad a una forma de la cual puedan obtenerse las primas. Por ejemplo, cuando los beneficios y primas son constantes, como en el Ejemplo 6.1, la ecuación (6.1) puede reescribirse como $A_0 = P\ddot{a}_0$, y $\ddot{a}_0$ puede calcularse como

$$\sum_{k=0}^{3} v^k \, {}_kp_0.$$

Cuando se usa el principio de equivalencia para determinar la prima única que se cobrará al expedir la póliza para un seguro de vida o para una anualidad vitalicia, la prima es igual al valor presente actuarial de los pagos y se denomina la prima neta única.

6.2 Primas Totalmente Continuas

Los principios básicos involucrados en la determinación de las primas netas anuales usando el principio de equivalencia se ilustrarán primero para el caso de la prima neta anual uniforme totalmente continua para una unidad de seguro de vida entera pagadera inmediatamente a la muerte de (x). Para cualquier prima pagada continuamente, $\bar{P}$, considere

$$l(t) = v^t - \bar{P}\bar{a}_{\overline{t|}}, \tag{6.3}$$

el valor presente de la pérdida del asegurador si la muerte ocurre en el tiempo t.

Notamos que $l(t)$ es una función decreciente de t con $l(0) = 1$ y $l(t)$ aproximándose a $-\bar{P}/\delta$ a medida que $t \to \infty$. Si $l(t_0) = 0$, la muerte antes de t_0 resulta en una pérdida mientras que la muerte después de t_0 produce una pérdida negativa, es decir, una ganancia.

Consideremos ahora la variable pérdida aleatoria,

$$L = l(T) = v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T|}}, \tag{6.4}$$

correspondiente a la función de pérdida $l(t)$. Si el asegurador determina su prima mediante el principio de equivalencia, la prima se representa por $\bar{P}(\bar{A}_x)$ y es tal que

$$E[L] = 0. \tag{6.5}$$

De (4.6) y (5.5, 5.6) se sigue que

$$\bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x = 0,$$

o

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}. \tag{6.6}$$

La varianza de L puede utilizarse como una medida de la variabilidad de las pérdidas en un seguro de vida entero individual debido a la naturaleza aleatoria del tiempo transcurrido hasta que se sobreviene la muerte. Como $E[L] = 0$,

$$Var[L] = E[L^2]. \tag{6.7}$$

Para la pérdida de (6.4), tenemos

$$\begin{aligned} Var[v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T|}}] &= Var\left[v^T - \frac{\bar{P}(1-v^T)}{\delta}\right] \\ &= Var\left[v^T\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}}{\delta}\right] \\ &= Var\left[v^T\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)\right] \\ &= Var[v^T]\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2 \\ &= ({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2)\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Para la prima determinada mediante el principio de equivalencia, podemos utilizar (6.6) y (5.8), $\delta\bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$, para reescribir (6.8) como

$$Var[L] = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{(\delta\bar{a}_x)^2}. \tag{6.9}$$

Ejemplo 6.2:

Bajo los supuestos establecidos en el Ejemplo 5.5, calcule $\bar{P}(\bar{A}_x)$ y $Var[L]$.

Solución:

El Ejemplo 5.5 implica una fuerza de mortalidad constante, $\mu = 0.04$, y una fuerza de interés constante, $\delta = 0.06$. Estos supuestos producen $\bar{a}_x = 10$, $\bar{A}_x = 0.4$ y ${}^2\bar{A}_x = 0.25$. Usando (6.6), obtenemos

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = 0.04,$$

y de (6.9)

$$Var[L] = \frac{0.25 - 0.16}{(0.6)^2} = 0.25.$$

∇

Con referencia a (6.8) podemos observar que el numerador de esta última expresión puede interpretarse como la varianza de la pérdida, $v^T - \bar{A}_x$, asociada con la prima única de un seguro de vida entero. Esta última varianza es 0.09, y por tanto la desviación estándar de la pérdida asociada con esta prima anual del seguro es $\sqrt{0.25/0.09} = 5/3$ por la desviación estándar de la pérdida en el caso de la prima única. La incertidumbre adicional relativa al valor presente del ingreso de la prima neta aumenta la variabilidad de las pérdidas debido a la naturaleza aleatoria del tiempo-transcurrido-hasta-que- sobreviene-la-muerte.

En el Ejemplo 6.2, $\bar{P}(\bar{A}_x) = 0.04$, es la fuerza constante de la mortalidad. Podemos confirmar que este es un resultado general usando parte de los Ejemplos 4.2 y 5.5. Bajo el supuesto de la fuerza de mortalidad constante,

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu + \delta}$$

y

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\mu + \delta},$$

por tanto

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\mu(\mu+\delta)^{-1}}{(\mu+\delta)^{-1}} = \mu,$$

que no depende de la fuerza de interés o de la edad a la expedición.

Utilizando el principio de equivalencia, al igual que en (6.2), podemos determinar fórmulas para las primas netas anuales de una diversidad de seguros de vida totalmente continuos. Nuestra pérdida general es

$$b_T v_T - \bar{P}Y = Z - \bar{P}Y \tag{6.10}$$

en donde

- b_t y v_t son, respectivamente, el monto del beneficio y el factor de descuento definido en relación con (4.1),
- $\bar{P}$ es un símbolo general para una prima neta anual totalmente continua,
- Y es una variable aleatoria de una anualidad continua como se definió, por ejemplo, en (5.16), y
- Z se define por (4.2)

La aplicación del principio de equivalencia produce

$$E[b_T v_T - \bar{P}Y] = 0$$

o

$$\bar{P} = \frac{E[b_T v_T]}{E[Y]}.$$

Estas ideas se usan para exhibir las fórmulas de las primas anuales de la Tabla 6.1

Es interesante apreciar cómo sigue el patrón una anualidad vitalicia entera diferida a n años de 1 por año pagadera continuamente. En este caso $b_T v_T = 0$, $T \leq n$ y $b_T v_T = \bar{a}_{\overline{T-n}|}$, $T > n$. Luego,

$$\begin{aligned} E[b_T v_T] &= {}_n p_x \, E[\bar{a}_{\overline{T-n}|} v^n | T > n] \\ &= v^n \, {}_n p_x \, \bar{a}_{x+n} = A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}} \bar{a}_{x+n}. \end{aligned}$$

Tabla 6.1 Primas anuales netas totalmente continuas

Plan	Componentes de la Pérdida $b_T v_T$	$\bar{P}Y$ donde Y es	Fórmula de la Prima $\bar{P} = \frac{E[b_T v_T]}{E[Y]}$
Seguro de Vida Entero	$1v^T$	$\bar{a}_{\overline{T}\rvert}$	$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$
Seguro a Plazo de n Años	$1v^T$ 0	$\bar{a}_{\overline{T}\rvert}, \quad T \leq n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rvert}, \quad T > n$	$\bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rvert}) = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rvert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$
Seguro Dotal a n Años	$1v^T$ $1v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rvert}, \quad T \leq n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rvert}, \quad T > n$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$
Seguro de Vida Entero a h Pagos*	$1v^T$ $1v^T$	$\bar{a}_{\overline{T}\rvert}, \quad T \leq h$ $\bar{a}_{\overline{h}\rvert}, \quad T > h$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$
Seguro Dotal a n Años a h Pagos*	$1v^T$ $1v^T$ $1v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rvert}, \quad T \leq h$ $\bar{a}_{\overline{h}\rvert}, \quad h < T \leq n$ $\bar{a}_{\overline{h}\rvert}, \quad T > n$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}}{\bar{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$
Dotalización a n Años	0 $1v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rvert}, \quad T \leq n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rvert}, \quad T > n$	$\bar{P}(A_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1}) = \frac{A_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$
Anualidad Vitalicia Diferida a n Años	0 $\bar{a}_{\overline{T-n}\rvert}v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rvert}, \quad T \leq n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rvert}, \quad T > n$	$\bar{P}({}_{n\rvert}\bar{a}_x) = \frac{A_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1}\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$

* Los seguros descritos en la cuarta y quinta filas preveen un periodo de pago de la prima más corto que el periodo sobre el que se pagan las indemnizaciones del fallecimiento.

En la practica sinembargo las anualidades de vida diferidas usualmente proven algun tipo de beneficio por mortalidad durante el periodo de diferimiento. Un contrato de este tipo es examinado en el Ejemplo 6.12.

Ejemplo 6.3:

Exprese la varianza de la pérdida, L, asociada con un seguro dotal a n años, en términos de primas netas únicas, (veáse la tercera fila de la Tabla 6.1).

Solución:

Usando la notación de (4.8), tenemos

$$Var[L] = Var\left[Z_3\left(1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})}{\delta}\right].$$

Utilice ahora (4.10) para obtener

$$Var[L] = \left[1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta}\right]^2 [{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\overline{n}|}].$$

La fórmula (5.15) puede reescribirse como

$$(\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|})^{-1} = 1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\delta},$$

la que implica que

$$Var[L] = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\overline{n}|}}{(\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2}$$

∇

Las dos identidades, (5.8) y (5.15), pueden utilizarse para derivar relaciones entre primas netas continuas. Por ejemplo, empezando con (5.8)

$$\begin{aligned} \delta\bar{a}_x + \bar{A}_x &= 1 \\ \delta + \bar{P}(\bar{A}_x) &= \frac{1}{\bar{a}_x} \\ \bar{P}(\bar{A}_x) &= \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta \\ &= \frac{1 - \delta\bar{a}_x}{\bar{a}_x} \\ &= \frac{\delta\bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Empezando con (5.15) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|} &= 1 \\ \delta + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \\ \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} - \delta \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$= \frac{1-\delta\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$= \frac{\delta\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}.$$

En el Ejemplo 6.7 se dan interpretaciones verbales de las analogías discretas de (6.11) y (6.12).

6.3 Primas Totalmente Discretas

En la Sección 6.2 discutimos la teoría de las primas netas anuales totalmente continuas. En esta sección consideraremos seguros de primas anuales como el que apareció en el Ejemplo 6.1. Es decir, la suma asegurada es pagadera al final del año, de la póliza, en el que ocurre el fallecimiento y la primera prima se paga a la expedición del seguro . Las primas subsiguientes son pagaderas, mientras sobreviva el asegurado, en los aniversarios de la expedición de la póliza durante el periodo de pago contractual de la prima. El conjunto de primas anuales forman de esta manera una anualidad vitalicia anticipada. Este modelo no se adapta a la práctica pero es de importancia histórica en el desarrollo de la teoría actuarial.

Bajo estas circunstancias, la prima anual neta uniforme para una unidad de seguro de vida entero se denota por P_x , en donde la ausencia de $(\bar{A}_x)$ significa que el seguro es pagadero al final del año de la póliza en que sucede el fallecimiento. La pérdida para este seguro es

$$L = v^{K+1} - P_x\,\ddot{a}_{\overline{K+1}|} \qquad K = 0, 1, 2, \cdots. \tag{6.13}$$

El principio de equivalencia exige que $E[L] = 0$, o

$$E[v^{K+1}] - P_x\,E[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = 0,$$

lo que produce

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}. \tag{6.14}$$

Este es el análogo discreto de (6.6).

Usando (5.36) en lugar de (5.8), con pasos paralelos a los dados al obtener la fórmula (6.8), obtenemos

$$Var[L] = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{(d\,\ddot{a}_x)^2}. \tag{6.15}$$

Ejemplo 6.4:

Si

$$_{k|}q_x = c(0.96)^{k+1} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

en donde $c = 0.04/0.96$ e $i = 0.06$, calcule P_x y $Var[L]$.

Solución:

Primero exhibimos los componentes de (6.14),

$$\begin{aligned} A_x &= c\sum_{k=0}^{\infty}(1.06)^{-k-1}(0.96)^{k+1} = 0.40 \\ \ddot{a}_x &= \frac{1 - A_x}{d} = 10.60. \end{aligned}$$

Después usando (6.14) obtenemos

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = 0.0377.$$

Para la $Var[L]$, calculamos

$$^2A_x = c\sum_{k=0}^{\infty}[(1.06)^2]^{-k-1}(0.96)^{k+1} = 0.2445.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Var[L] &= \frac{0.2445 - 0.1600}{[(0.06)(10.60)/(1.06)]^2} \\ &= 0.2347. \end{aligned}$$

∇

Existe una conexión entre los Ejemplos 6.2 y 6.4. Ya que

$$_{k|}q_x = \int_k^{k+1} {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt \qquad k =, 0, 1, 2, \cdots, \tag{6.16}$$

para la situación descrita en el Ejemplo 6.4, tenemos

$$\frac{0.04}{0.96}(0.96)^{k+1} = \int_k^{k+1} {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt.$$

Si la fuerza de mortalidad es una constante, μ, se sigue que

$$\frac{0.04}{0.96}(0.96)^{k+1} = e^{-(k+1)\mu}(e^{\mu} - 1),$$

y entonces $e^{-\mu} = 0.96$ y $\mu = 0.0408$. La distribución geométrica con *f.p.*

$$_{k|}q_x = \frac{0.04}{0.96}(0.96)^{k+1},$$

es una versión discreta de la distribución exponencial con $\mu = 0.0408$. La fórmula (6.16) proporciona el puente entre las versiones continua y discreta. Las primas netas anuales totalmente continuas correspondientes a $P_x = 0.0377$ del Ejemplo 6.4 serían $\bar{P}(\bar{A}_x) = \mu = 0.0408$.

Continuando con el uso del principio de equivalencia, podemos determinar fórmulas para las primas netas anuales de una diversidad de seguros de vida totalmente discretos. Nuestra pérdida general será

$$b_{K+1}\, v_{K+1} - PY$$

en donde

- b_{k+1} y v_{k+1} son, respectivamente, las funciones de indemnizaciones y de descuentos definidas en (4.16),
- P es un símbolo general para una prima anual pagada, mientras el asegurado sobreviva, al principio de cada año de la póliza durante el periodo de pagos de la prima, y
- Y es la anualidad discreta de la variable aleatoria como se definió, por ejemplo en (5.39).

La aplicación del principio de equivalencia nos produce

$$E[b_{K+1}\, v_{K+1} - PY] = 0,$$

o

$$P = \frac{E[b_{K+1}v_{K+1}]}{E[Y]}.$$

Estas ideas se utilizan en la Tabla 6.2 para exhibir las fórmulas para las primas de seguros totalmente discretos.

Ejemplo 6.5:

Exprese la varianza de la pérdida, L, asociada con un seguro dotal a n años, en términos de primas netas únicas (veáse el tercer renglón de la Tabla 6.2).

Solución:

Empezamos con la notación de la Tabla 6.2, Deje que

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & K = 0, 1, \cdots, n-1 \\ v^n & K = n, n+1, \cdots. \end{cases}$$

Luego, podemos escribir, con referencia al renglón de la Tabla 6.2,

$$L = Z - P_{x:\overline{n}|}\frac{1-Z}{d},$$

por tanto, tenemos

$$Var[L] = Var\left[Z\left(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right) - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right].$$

Podemos usar el Teorema 4.1 para encontrar la **$Var[Z]$, como se indica en la Tabla 4.2, y entonces** obtener

$$Var[L] = \left(1 + \frac{P_{x:\overline{n}|}}{d}\right)^2 ({}^2A_{x:\overline{n}|} - A^2_{x:\overline{n}|}).$$

Tabla 6.2 Primas anuales netas totalmente discretas

Plan	Componentes de la Pérdida $b_{K+1}\, v_{K+1}$	PY donde Y es	Fórmula de la Prima $P = \frac{E[b_{K+1}\, v_{K+1}]}{E[Y]}$
Seguro de vida Entera	$1v^{K+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K = 0, 1, 2, \cdots$	$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$
Seguro a Plazo de n Años	$1v^{K+1}$ 0	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K = 0, 1, \cdots, n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$, $K = n, n+1, \cdots$	$P^1_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{A^1_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
Seguro Dotal a n Años	$1v^{K+1}$ $1v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K = 0, 1, \cdots, n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$, $K = n, n+1, \cdots$	$P_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{A_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
Seguro de Vida Entera a h Pagos	$1v^{K+1}$ $1v^{K+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K = 0, 1, \cdots, h-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}$, $K = h, h+1, \cdots$	${}_hP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
Seguro Dotal a n Años a h Pagos	$1v^{K+1}$ $1v^{K+1}$ $1v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K = 0, 1, \cdots, h-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}$, $K = h, \cdots, n-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}$, $K = n, n+1, \cdots$	${}_hP_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{A_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
Dotación Pura a n Años	0 $1v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K = 0, 1, \cdots, n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$, $K = n, n+1, \cdots$	$P_{x:\overset{1}{\overline{n}\rceil}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}\rceil}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
Anualidad Vitalicia Diferida a n Años	0 $\ddot{a}_{\overline{K+1-n}\rceil}\, v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$, $K = 0, 1, \cdots, n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$, $K = n, n+1, \cdots$	$P({}_{n\mid}\ddot{a}_x) = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}\rceil}}\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$

La fórmula (5.41) y el componente del tercer renglón de la Tabla 6.2 pueden combinarse en la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
d\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} + A_{x:\overline{n}\rceil} &= 1 \\
1 + \frac{P_{x:\overline{n}\rceil}}{d} &= \frac{1}{d\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la varianza que buscamos es

$$
\frac{{}^2A_{x:\overline{n}\rceil} - A^2_{x:\overline{n}\rceil}}{(d\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil})^2} \tag{6.17}
$$

∇

Ejemplo 6.6:

Considere un seguro de vida entera totalmente discreto de 10,000. Deje que π represente una prima anual para esta póliza y $L(\pi)$ denote la variable aleatoria pérdida a la expedición para una de dichas pólizas sobre la base de la Tabla de Vida Ilustrativa; una tasa de interés de 6% y expedición a la edad de 35 años.

a. Determine la prima, π_a, tal que la distribución de $L(\pi_a)$ tenga media 0. Calcule la varianza de $L(\pi_a)$.

b. Aproxime la prima más baja, π_b, en tal forma que la probabilidad de que la pérdida $L(\pi_b)$ sea positiva, sea menor que 0.5. Encuentre la varianza de $L(\pi_b)$.

c. Determine la prima, π_c, mediante la aproximación normal, de que la probabilidad de una pérdida positiva total de 100 de esas pólizas independientes sea 0.05 la aproximación.

Solución:

a. Por el principio de equivalencia, (6.2),

$$\begin{aligned}\pi_a = 10,000\,P_{35} &= 10,000\frac{A_{35}}{\ddot{a}_{35}} \\ &= \frac{1287.194}{15.39262} \\ &= 83.62.\end{aligned}$$

de (6.15)

$$\begin{aligned}Var[L(\pi_a)]) &= (10,000)^2\frac{{}^2A_{35} - A_{35}^2}{(d\ddot{a}_{35})} \\ &= 10^8\,\frac{0.0348843 - (0.1287194)^2}{[(0.06/1.06)(15.39262)]^2} \\ &= \frac{1,831,562}{0.7591295} \\ &= 2,412,713.\end{aligned}$$

b. Queremos π_b tal que

$$Pr[L(\pi_b) > 0] < 0.5,$$

o en términos del tiempo de vida futuro truncado, K,

$$Pr(10,000\,v^{K+1} - \pi_b \ddot{a}_{\overline{K+1|}} > 0) < 0.5.$$

De la Tabla de Vida Ilustrativa, ${}_{42}p_{35} = 0.5125101$ y ${}_{43}p_{35} = 0.48088964$. Por lo tanto, si se escoge π_b en tal forma que

$$10,000\,v^{43} - \pi_b\,\ddot{a}_{\overline{43|}} = 0,$$

entonces $Pr[L(\pi_b) > 0] = Pr(K < 42) < 0.5$. Por tanto,

$$\pi_b = \frac{10,000}{\ddot{s}_{\overline{43|}}} = 50.31.$$

Utilizando el análogo totalmente discreto de (6.8) podemos escribir

$$\begin{aligned} Var[L(\pi_b)] &= (10,000)^2({}^2A_{35} - A_{35}^2)\left[1 + \frac{\pi_b}{10,000}\frac{1}{d}\right]^2 \\ &= (1,831,562)(1.18567) \\ &= 2,171,630. \end{aligned}$$

c. Con una prima π_c , la pérdida en una póliza es

$$L(\pi_c) = 10,000\,v^{K+1} - \pi_c \ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right) v^{K+1} - \frac{\pi_c}{d};$$

su esperanza y varianza son las siguientes:

$$\begin{aligned} E[L(\pi_c)] &= \left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right) A_{35} - \frac{\pi_c}{d} \\ &= (0.1287194)\left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right) - \frac{\pi_c}{d} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var[L(\pi_c)] &= \left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right)^2 ({}^2A_{35} - A_{35}^2) \\ &= \left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right)^2 (0.01831562). \end{aligned}$$

Para cada una de las pólizas tenemos la pérdida $L_i(\pi_c) = L(\pi_c)$, $i = 1, 2, \cdots, 100$, y

$$S = \sum_{i=1}^{100} L_i(\pi_c)$$

para la pérdida total del portafolio. Entonces

$$E[S] = 100E[L(\pi_c)],$$

y, usando el supuesto de pólizas independientes,

$$Var[S] = 100Var[L(\pi_c)].$$

Para determinar π_c en tal forma que $Pr(S > 0) = 0.05$ por la aproximación normal, queremos

$$\begin{aligned}
\frac{0 - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} &= 1.645 \\
10\left(\frac{-E[L(\pi_c)]}{\sqrt{Var[L(\pi_c)]}}\right) &= 1.645 \\
10\left[\frac{-A_{35}\left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right) + \frac{\pi_c}{d}}{\left(10,000 + \frac{\pi_c}{d}\right)\sqrt{{}^2A_{35} - A_{35}^2}}\right] &= 1.645.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\pi_c &= 10,000d\left[\frac{(0.1645)\sqrt{{}^2A_{35} - A_{35}^2} + A_{35}}{1 - (A_{35} + 0.1645\sqrt{{}^2A_{35} - A_{35}^2})}\right] \\
&= 100.66.
\end{aligned}$$

∇

Las dos identidades, (5.36) y (5.41), pueden utilizarse para derivar relaciones entre primas discretas. Por ejemplo, empezando con (5.36) , tenemos para los seguros de vida entera

$$d\ddot{a}_x + A_x = 1$$

$$
\begin{aligned}
d + P_x &= \frac{1}{\ddot{a}_x} \\
P_x &= \frac{1}{\ddot{a}_x} - d \\
&= \frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} \\
&= \frac{dA_x}{1 - A_x}.
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

Empezando con (5.41) obtenemos una cadena similar de igualdades para seguros dotales discretos a n años:

$$
\begin{aligned}
d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} &= 1 \\
d + P_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
P_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d \\
&= \frac{1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{dA_{x:\overline{n}|}}{1 - A_{x:\overline{n}|}}.
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

Ejemplo 6.7:

Proporcione interpretaciones verbales a las siguientes ecuaciones tomadas del conjunto (6.18)

$$
\frac{1}{\ddot{a}_x} = P_x + d \tag{6.20}
$$

y

$$
P_x = \frac{dA_x}{1 - A_x}. \tag{6.21}
$$

Solución:

Usaremos la palabra equivalente para significar igual en términos del valor presente actuarial. En la expresion (6.20) podemos apreciar, en primer lugar, que una unidad en el presente es equivalente a una anualidad vitalicia de $\ddot{a}_x^{-1}$ pagadera al principio de cada uno de los años que sobreviva (x). También es equivalente al interés anticipado de d al principio de cada uno de los años que sobreviva (x) con el reembolso de la unidad al final del año en que sobrevenga la muerte de (x). A su vez, mientras (x) sobreviva, el reembolso de la unidad al final del año del fallecimiento es equivalente a una anualidad vitalicia de pago anticipado de P_x. Por lo tanto la unidad en el presente es equivalente a $P_x + d$ al principio de cada año durante el tiempo de vida de (x). Entonces $\ddot{a}_x^{-1} = P_x + d$, para cada lado de la igualdad, representa el pago anual de una anualidad vitalicia producida por una unidad disponible en el presente .

De (6.21) consideramos un asegurado (x) que toma prestada la prima neta única A_x para la compra de un seguro de vida de pago unitario despues de la muerte y de prima única (no dividida en periodos). El asegurado acepta pagar un interés anticipado por la cantidad de dA_x sobre el préstamo al principio de cada año durante el tiempo de sobrevivencia y reembolsar A_x de la indemnización unitaria por defunción al final del año en que ocurra el deceso. En esencia, el asegurado está pagando una prima neta anual de dA_x por un seguro de monto $1 - A_x$. Entonces, para una unidad completa de seguro, la prima neta anual debe ser $dA_x/(1 - A_x)$.

∇

Existen interpretaciones similares para las relaciones correspondientes que involucran seguros dotales como las que se dan en el segunda y quinta igualdades en el conjunto (6.19). Hay analogía entre (6.20), la fórmula correspondiente que involucra a los seguros dotales,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{-1} = P_{x:\overline{n}|} + d,$$

y la fórmula de interés,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{-1} = \ddot{s}_{\overline{n}|}^{-1} + d.$$

Ejemplo 6.8:

Demuestre e interprete la fórmula

$$P_{x:\overline{n}|} = {}_nP_x + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(1 - A_{x+n}). \tag{6.22}$$

Solución:

La prueba se completa usando los registros de la Tabla 6.2:

$$\begin{aligned} P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{1} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \\ {}_nP_x\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A_x = A_{x:\overline{n}|}^{1} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}A_{x+n}. \end{aligned}$$

restando,

$$(P_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1}(1 - A_{x+n}),$$

de la cual se sigue (6.22).

La interpretación es que ambas $P_{x:\overline{n}|}$ y ${}_nP_x$ son pagaderas durante la sobrevivencia de (x) hasta un máximo de n años. Durante estos años, ambos seguros proporcionan una indemnización por defunción de 1 pagadera al final del año de la muerte de (x). Si (x) sobrevive los n años, $P_{x:\overline{n}|}$ proporciona una indemnización al vencimiento de 1, mientras que ${}_nP_x$ proporciona un seguro de vida entera sin primas adicionales, es decir, un seguro con un valor presente actuarial de A_{x+n}. Por tanto, la diferencia $P_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x$ es la prima anual uniforme de una dotación pura de $1 - A_{x+n}$.

∇

En la práctica, los seguros de vida son pagaderos inmediatamente después del fallecimiento en lugar de al final del año, de la póliza, en que ocurre el fallecimiento, por lo tanto es necesario el pago anual de primas netas semicontinuas. Dichas primas, siguiendo el mismo orden utilizado en las Tablas 6.1 y 6.2 se denotarán como $P(\bar{A}_x)$, $P(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|})$, $P(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$, ${}_hP(\bar{A}_x)$, y ${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$. No hay necesidad de una dotación pura a n años con prima anual semicontinua porque no se involucra una indemnización por defunción. El principio de equivalencia puede aplicarse para producir fórmulas como las de la Tabla 6.2, pero con el símbolo general A remplazado por $\bar{A}$. Por ejemplo,

$$P(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}. \tag{6.23}$$

Observemos que la notación para estas primas no es $\bar{P}_x$, la prima anual pagadera continuamente para una indemnizacion de seguro de vida entera de pago unitario pagadera al final del año del fallecimiento e igual a $A_x/\bar{a}_x$. Si se supone una distribución uniforme de fallecimientos para cada año de edad, podemos usar las nociones de la Sección 4.4. para escribir

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_x) &= \frac{i}{\delta}\frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{i}{\delta}P_x \\ P(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) &= \frac{i}{\delta}P^{1}_{x:\overline{n}|} \end{aligned} \tag{6.24}$$

y

$$P(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}P^{1}_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1}.$$

6.4 Primas Reales Pagaderas m Veces

Si las primas son pagaderas m veces en el año de la póliza, en lugar de anualmente, sin ajuste en la indemnización al fallecimiento, las primas resultantes se denominan *primas reales fraccionarias.* Por tanto $P_x^{(m)}$ denota la *prima anual neta real uniforme*, pagadera en m plazos, de un seguro de vida entera de pago unitario pagadero al final del año del fallecimiento. El símbolo $P^{(m)}(\bar{A}_x)$ tendría la misma interpretación excepto que el seguro es pagadero al momento de la muerte. Típicamente, m es 2, 4 o 12.

En el desarrollo de esta sección se enfatizará el pago de indemnizaciones al final del año de la póliza en que ocurre el fallecimiento. El Tabla 6.3 especifica los símbolos y fórmulas para primas fraccionarias reales de los seguros de vida comunes. Las fórmulas de las primas pueden obtenerse aplicando el principio de equivalencia.

En algunas aplicaciones es útil escribir el pago m-ésimo de la prima como un múltiplo de la prima anual. Esto se ejemplificará para ${}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ la prima de un seguro muy general. La fórmula resultante puede modificarse para producir fórmulas de primas para otros seguros comunes. Del último renglón de la Tabla 6.3 tenemos

$$
{}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)}}. \tag{6.25}
$$

Ya que

$$
A_{x:\overline{n}|} = {}_hP_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{h}|},
$$

(6.25) puede reacomodarse como

$$
{}_hP_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{{}_hP_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)}}. \tag{6.26}
$$

La formula (6.26) se usara en el siguiente capitulo. Se expresa como el pago de la prima mensual que es igual al correspondiente pago anual de la prima a razón del valor de la anualidad. Esto llamado como un arreglo de varios caminos, correspondiendo a las diferentes formulas usadas en la relación $\ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)}$ y $\ddot{a}_{x:\overline{h}|}$ (vea el Ejercicio 6.11)

Tabla 6.3 Primas fraccionarias Reales*

Plan	Procedimientos de pago: Al Final del Año de la Póliza	Al Momento de la Muerte
Seguro de Vida Entera	$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$
Seguro a Plazo de n Años	$P_{\overset{1}{x}:\overline{n}\vert}^{(m)} = \frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}\vert}) = \frac{\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}}$
Seguro Dotal a n Años	$P_{x:\overline{n}\vert}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}}$
Seguro de Vida Entera con h Años de Pago	${}_hP_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\vert}^{(m)}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\vert}^{(m)}}$
Seguro Dotal con h Años de Pago a n Años	${}_hP_{x:\overline{n}\vert}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\vert}^{(m)}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}\vert})\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\vert}^{(m)}}$

* La cantidad actual de cada prima fraccionaria pagadera m veces cada año de la póliza durante el periodo de pago de la prima y la sobrevivencia de (x), es $P^{(m)}/m$. Notése que aquí h se refiere al número de años de pago, no al número de pagos.

Ejemplo 6.9:

a. Calcule la prima neta anual igual pagadera en pagos semestrales para un seguro dotal a 20 años de 10,000 con pagos hechos al final del año de la póliza en el que ocurre la muerte (discreta) expedida a los (50), sobre la base de la Tabla de Vida Ilustrativa con una tasa de interés anual efectivo de 6%.

b. Determine la prima correspondiente con procedimiento de pago al momento de la muerte (semi-continuo).

Para ambas partes suponga una distribución uniforme de muertes para cada edad.

Solución:

a. Requerimos $10,000P^{(2)}_{50:\overline{20}\vert}$. Calculamos como paso preliminar

$$\begin{aligned} d &= 0.056603774, \\ i^{(2)} &= 0.059126028, \\ d^{(2)} &= 0.057428275, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(2)} &= 0.98564294, \\
s_{\overline{1}|}^{(2)} &= 1.01478151, \\
\alpha(2) &= \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(2)} s_{\overline{1}|}^{(2)} = 1.0002122, \\
\beta(2) &= \frac{s_{\overline{1}|}^{(2)} - 1}{d^{(2)}} = 0.25739081,
\end{aligned}
$$

y las primas siguientes:

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{50:\overline{20}|} &= 11.291832, \\
A_{50:\overline{20}|}^{1} &= 0.13036536, \\
P_{50:\overline{20}|}^{1} &= 0.01154510, \\
{}_{20}E_{50} &= 0.23047353, \\
A_{50:\overline{20}|} &= 0.36083889, \\
P_{50:\overline{20}|} &= 0.03195574.
\end{aligned}
$$

Después, con el supuesto de distribución uniforme de fallecimientos para cada edad, la prima requerida puede calcularse mediante el uso de (6.25), con $x = 50$, $n = 20$, $h = 20$ y $m = 2$. Con este propósito calculamos

$$
\ddot{a}_{50:\overline{20}|}^{(2)} = \alpha(2)\ddot{a}_{50:\overline{20}|} - \beta(2)(1 - {}_{20}E_{50}) = 11.096159,
$$

y después

$$
10,000 P_{50:\overline{20}|}^{(2)} = 325.19.
$$

b. La prima semicontinua correspondiente puede obtenerse multiplicando los valores de (a) por la fracción

$$
\frac{P(\bar{A}_{50:\overline{20}|})}{P_{50:\overline{20}|}} = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{A_{50:\overline{20}|}}.
$$

Bajo el supuesto de la distribución uniforme de muertes la fracción

$$
\frac{(i/\delta)P_{50:\overline{20}|}^{1} + P_{50:\overline{20}|}^{\;\;\;1}}{P_{50:\overline{20}|}}, \tag{6.27}
$$

y el resultado es

$$10,000\, P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = 328.68.$$

∇

6.5 Primas Prorrateadas

Un segundo tipo de primas fraccionarias es la ***prima prorrateada***. Aquí , en el momento de la muerte, se hace un reembolso de una parte de la prima relacionada con el periodo transcurrido entre el momento de la muerte y el del tiempo del siguiente pago de la prima programado. En la práctica esto puede hacerse sobre una base prorrateada sin interés. En la presente sección lo consideraremos y tomaremos la secuencia de las m primas como una anualidad vitalicia vencida prorrateada en el sentido de la Sección 5.9. Los símbolos utilizados para denotar estas primas anuales prorrateadas netas iguales pagaderas m serán iguales a los símbolos para las primas fraccionarias reales con base semicontinua. Difieren en que el subíndice m se encerrará en llaves en lugar de entre paréntesis, por ejemplo, $P^{\{m\}}(\bar{A}_x)$. En vista de la carecterística del reembolso de la prima, es natural suponer que la indemnización por fallecimiento es pagadera al momento de la muerte.

Usaremos otras vez un seguro dotal a n años plazo con h años de pago, para ejemplificar el desarrollo de fórmulas para primas prorrateables pagadas m veces. El principio de equivalencia conduce a las fórmulas

$${}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\, \ddot{a}^{\{m\}}_{x:\overline{h}|} = \bar{A}_{x:\overline{n}|}$$

y

$${}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\overline{h}|}}. \tag{6.28}$$

Usando la parte (b) del Ejemplo 5.12 obtenemos

$${}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{(\delta/d^{(m)})\,\bar{a}_{x:\overline{h}|}} \frac{d^{(m)}}{\delta}\, {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}). \tag{6.29}$$

Esto implica que el pago a plazos es

$$\frac{1}{m}\, {}_hP^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) \frac{1-v^{1/m}}{\delta} = {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\, \bar{a}_{\overline{1/m}|}, \tag{6.30}$$

y en particular, para $m = 1$,

$$_hP^{\{1\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}_{\overline{1}|}. \tag{6.31}$$

Las fórmulas (6.30) y (6.31) demuestran que estas primas prorrateables son equivalentes a primas totalmente continuas, descontadas del interés al principio de cada periodo de pago. Existen fórmulas similares para otros tipos de seguro. Por ejemplo, permitiendo que h y $n \to \infty$, (6.31) se transforma en

$$P^{\{1\}}(\bar{A}_x) = \bar{P}(\bar{A}_x)\ddot{a}_{\overline{1}|}. \tag{6.32}$$

La prima neta prorrateable $P^{\{1\}}(\bar{A}_x)$ y la prima neta semicontinua $P(\bar{A}_x)$ son ambas pagaderas anualmente al principio de cada año mientras (x) sobreviva. Cada seguro proporciona una unidad a la muerte de (x). Los dos seguros difieren únicamente con respecto al reembolso proporcionado por $P^{\{1\}}(\bar{A}_x)$. Por lo tanto la diferencia

$$P^{\{1\}}(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x) \tag{6.33}$$

es una prima anual neta uniforme pagadera al principio de cada año debido a la característica del reembolso de la prima. En el siguiente análisis verificaremos esta afirmación acerca de la expresión (6.33).

Del Ejercicio 5.32, notamos que la variable aleatoria para el valor presente de la característica del reembolso de la prima es

$$\frac{P^{\{1\}}(\bar{A}_x)\, v^T\, \bar{a}_{\overline{K+1-T}|}}{\ddot{a}_{\overline{1}|}}$$

donde K y T se definen igual que en el Capítulo 3. Por el principio de equivalencia, la prima neta única para esta característica es

$$\bar{A}_x^{PR} = P^{\{1\}}(\bar{A}_x)E\left[v^T\frac{\bar{a}_{\overline{K+1-T}|}}{\ddot{a}_{\overline{1}|}}\right].$$

Utilizando (6.32) obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x^{PR} &= \bar{P}(\bar{A}_x)E\left[\frac{v^T - v^{K+1}}{\delta}\right] \\
&= \bar{P}(\bar{A}_x)\left(\frac{\bar{A}_x - A_x}{\delta}\right).
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Luego la prima anual neta igual es

$$\bar{P}(\bar{A}_x^{PR}) = \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)(\bar{A}_x - A_x)}{\delta \ddot{a}_x}. \tag{6.35}$$

La fórmula (6.34) tiene la siguiente interpretación: el valor presente actuarial de la característica de reembolso es la diferencia entre el valor de una perpetuidad continua de $\bar{P}(\bar{A}_x)$ por año empezando a la muerte de (x), y el valor de una perpetuidad continua de $\bar{P}(\bar{A}_x)$ pagadera desde el final del año de la muerte de (x).

Volvemos ahora a (6.33) en donde, por (6.32) tenemos

$$\begin{aligned} P^{\{1\}}(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x) &= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{d}{\delta} - \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x} \\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)\left(\frac{d}{\delta} - \frac{\bar{a}_x}{\ddot{a}_x}\right) \\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{d\ddot{a}_x - \delta\bar{a}_x}{\delta\ddot{a}_x} \\ &= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{\bar{A}_x - A_x}{\delta\ddot{a}_x} \\ &= P(\bar{A}_x^{PR}), \end{aligned} \tag{6.36}$$

como lo obtuvimos en (6.35). Esto confirma nuestra afirmación acerca de (6.33).

Podemos ampliar este análisis a los pagos m de primas y a otros seguros de vida además del de vida entera. En general,

$$P^{\{m\}}(\bar{A}) - P^{(m)}(\bar{A})$$

es un pago m de prima para la característica de reembolso.

Ejemplo 6.10:

Si la póliza del Ejemplo 6.9(b) tuviera primas prorrateables ¿qué incremento ocurriría en la prima anual neta ?

Solución:

La prima anual prorrateable por unidad de seguro esta dada por (6.29),

$$P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{50:\overline{20}|})\frac{d^{(2)}}{\delta} = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{\bar{a}_{50:\overline{20}|}}\frac{d^{(2)}}{\delta}.$$

Bajo el supuesto de distribución uniforme de muertes en cada intervalo de edad, esta se transforma en

$$\begin{aligned} &= \frac{(i/\delta)A^{1}_{50:\overline{20}|} + A_{50:\overline{20}|}^{\;\;1}}{\alpha(\infty)\ddot{a}_{50:\overline{20}|} - \beta(\infty)(1 - {}_{20}E_{50})}\frac{d^{(2)}}{\delta} \\ &= \frac{(i/\delta)P^{1}_{50:\overline{20}|} + P_{50:\overline{20}|}^{\;\;1}}{\alpha(\infty) - \beta(\infty)(P^{1}_{50:\overline{20}|} + d)}\frac{d^{(2)}}{\delta}. \end{aligned}$$

Aquí $\alpha(\infty) = \bar{s}_{\overline{1}|}\bar{a}_{\overline{1}|} = id/\delta^2 = 1.00028$, $\beta(\infty) = (\bar{s}_{\overline{1}|} - 1)/\delta = 0.50985$. **Usando otros valores disponibles en el Ejemplo 6.9 encontramos**

$$10,000\, P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = 329.69.$$

Entonces el incremento en la prima anual es

$$10,000\,[P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) - P^{(2)}(A_{50:\overline{20}|})] = 1.01,$$

que es la prima anual neta pagadera semestralmente para **la característica de reembolso.**

∇

6.6 Funciones Conmutativas

Hemos visto que las primas anuales netas pueden expresarse en términos de primas netas únicas de seguros de vida y de valor presente actuarial de las anualidades. En los Capítulos 4 y 5 se dieron fórmulas para estas primas y anualidades en términos de funciones conmutativas. Ahora podemos escribir las primas anuales netas en términos de funciones conmutativas. La prima anual neta totalmente continua para un seguro dotal a n años plazo con h pago anuales para (x) se expresa como

$${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}}. \qquad (6.37)$$

Casos especiales de (6.37) incluyen, para $n = \omega - x$,

$$ {}_hP(\bar{A}_x) = \frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}} \tag{6.38} $$

y para $h = n = \omega - x$,

$$ \bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x}. \tag{6.39} $$

Para los seguros a plazo, tenemos fórmulas tales como

$$ \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}} \tag{6.40} $$

y

$$ {}_h\bar{P}(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{n\bar{M}_x - \bar{R}_{x+1} + \bar{R}_{x+n+1}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}}. \tag{6.41} $$

Para seguros de vida con pago anual e indemnización al fallecimiento pagadero al final del año de la muerte, las fórmulas correspondientes a (6.37), (6.38) y (6.40) son

$$ {}_hP_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+h}} \tag{6.42} $$

$$ {}_hP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+h}} \tag{6.43} $$

$$ P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{6.44} $$

Para primas reales pagoderas m veces sobre seguros pagaderos al final del año del fallecimiento, tenemos fórmulas tales como

$$ {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N^{(m)}_x - N^{(m)}_{x+h}} \tag{6.45} $$

[veánse (5.85) y (5.86)].

Las fórmulas para primas prorrateables m veces pueden escribirse como primas descontadas totalmente continuas como se mostró en (6.30) y (6.31).

Ejemplo 6.11:

Exprese en términos de funciones conmutativas, la prima anual neta inicial para un seguro de vida entera de una unidad para (x) si después de 5 años la prima anual neta es el doble de la que se pagaba durante los primeros cinco años. Se utiliza un modelo completamente discreto.

Solución:

Sea P la prima anual neta inicial. La ecuación de valor, derivado del principio de equivalencia, utilizado para determinar P es

$$P(N_x - N_{x+5}) + 2PN_{x+5} = M_x.$$

Por tanto

$$P = \frac{M_x}{N_x + N_{x+5}}.$$

∇

6.7 Indemnizaciones de Tipo Acumulativo

El análisis de esta sección se hará en términos de primas anuales para seguros pagaderos al final del año del fallecimiento. Es posible realizar un desarrollo similar para primas completamente continuas y, con algunos ajustes, para primas semicontinuas. Primero buscamos la prima neta única para un seguro a plazo de n años en (x) para el que la suma asegurada, en caso de que el fallecimiento ocurra en el año $k+1$, es $\ddot{s}_{\overline{k+1}|j}$. La variable aleatoria del valor presente de esta indemnización, a la expedición de la póliza es

$$W = \begin{cases} v^{K+1}\,\ddot{s}_{\overline{K+1}|j} = \frac{1}{d_{(j)}}[v^{K+1}(1+j)^{K+1} - v^{K+1}] & 0 \le K < n \\ 0 & K \ge n \end{cases}$$

en donde el valor presente del asegurador se computa a una tasa de interés i y $d_{(j)}$ es la tasa de descuento equivalente a la tasa de interés j. Por el principio de equivalencia, la prima neta única es

$$E[W] = \frac{A'^{\,1}_{x:\overline{n}|} - A^{1}_{x:\overline{n}|}}{d_{(j)}} \qquad (6.46)$$

en donde $A'^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ se calcula a la tasa de interés $i' = (i-j)/(1-j)$.

Si $i = j$, entonces $i' = 0$ y la prima neta única es

$$
\begin{aligned}
\frac{{}_nq_x - A^{\,1}_{x:\overline{n}|}}{d} &= \frac{1 - {}_nP_x - A_{x:\overline{n}|} + v^n\,{}_nP_x}{d} \\
&= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x\,\ddot{a}_{\overline{n}|} \\
&= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x\,\ddot{s}_{\overline{n}|}. \qquad (6.47)
\end{aligned}
$$

La fórmula (6.47) indica que, cuando $j = i$, este seguro a plazos especial es equivalente a una anualidad vitalicia vencida a n años excepto para el caso de que (x) sobreviva los n años. Entonces el seguro a plazo proveerá una indemnización de 0 mientras que los pagos de la anualidad vitalicia, dada la sobrevivencia de n años tendría un valor $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ en el tiempo n.

Ahora consideremos la situación en la que (x) tiene la oportunidad de comprar un seguro dotal de una unidad a n años con una prima anual de $P_{x:\overline{n}|}$ o de establecer un fondo de ahorros con depósitos de $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$ al principio de cada uno de los n años y de comprar un seguro a plazos decreciente. El seguro especial proveerá, en el caso de la muerte en el año $k+1$, la diferencia,

$$1 - \frac{\ddot{s}_{\overline{k+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$$

entre la indemnización de uno bajo el seguro dotal y la acumulación en el fondo de ahorros. Supondremos además que la misma tasa de interés i es aplicable para valuar todas estas transacciones. Se proporcionan las mismas indemnizaciones por el seguro dotal y por la combinación del seguro especial a plazo y el fondo de ahorros. Por lo tanto se puede anticipar que

(la prima anual neta $P_{x:\overline{n}|}$ del seguro dotal)

= (la prima neta anual del seguro especial a plazo)

+ (el depósito $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$ del fondo de ahorros anual).

Para verificar esta conjetura consideremos la variable aleatoria valor presente para el seguro especial a plazo decreciente,

$$\tilde{W} = \begin{cases} V^{K+1}\left(1 - \dfrac{\ddot{s}_{\overline{K+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right) = v^{K+1} - \dfrac{\ddot{a}_{\overline{K+1}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} & 0 \le K < n \\ 0 & K \ge n. \end{cases} \qquad (6.48)$$

Mediante la aplicación del principio de equivalencia la prima neta única, denotada por $\tilde{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$, esta dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{1}_{x:\overline{n}|} &= E[\tilde{W}] \\
&= A^{1}_{x:\overline{n}|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x\, \ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} \\
&= A^{1}_{x:\overline{n}|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x\, \ddot{s}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}
\end{aligned}$$

[veáse (6.47)].

La prima anual neta para el seguro especial a plazo es por lo tanto

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\tilde{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} &= P^{1}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + \mathrm{P}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \\
&= P_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$P_{x:\overline{n}|} = \tilde{P}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}. \tag{6.49}$$

Ya hemos visto que

$$P_{x:\overline{n}|} = P^{1}_{x:\overline{n}|} + \mathrm{P}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1},$$

y ahora (6.49) proporciona una descomposición alternativa de $P_{x:\overline{n}|}$. Los componentes son la prima anual para el seguro especial a plazo y los depósitos del fondo de ahorros anual, $1/\ddot{s}_{\overline{n}|}$, que se acumularán hasta 1 al final de n años.

Ejemplo 6.12:

Derive fórmulas para la prima anual neta para un seguro sobre (x) a 20 años de plazo por 5 000 que proporciona, en caso de muerte dentro de los 20 años, el reembolso de las primas anuales netas pagadas

a. sin interés

b. acumulada a la tasa de interés empleada en la determinación de las primas.

En cada caso, el reembolso de las primas es adicional a los 5 000 de suma asegurada y los pagos por indemnización se hacen al final del año de la muerte.

Solución:

a. Deje que π_a sea la prima neta. Entonces

$$\pi_a\, \ddot{a}_{x:\overline{20|}} = 5,000\, A^{1}_{x:\overline{20|}} + \pi_a\, (IA)^{1}_{x:\overline{20|}}$$

y

$$\pi_a = 5,000 \frac{A^{1}_{x:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{20|}} - (IA)^{1}_{x:\overline{20|}}}.$$

b. Deje que π_b sea la prima neta. Usamos (6.47) para obtener

$$\pi_b\, \ddot{a}_{x:\overline{20|}} = 5,000\, A^{1}_{x:\overline{20|}} + \pi_b [\ddot{a}_{x:\overline{20|}} - {}_{20}E_x\, \ddot{s}_{\overline{20|}}]$$

$$\pi_b\, {}_{20}E_x\, \ddot{s}_{\overline{20|}} = 5,000\, A^{1}_{x:\overline{20|}}$$

$$\begin{aligned} \pi_b &= 5,000 \frac{A^{1}_{x:\overline{20|}}}{{}_{20}E_x\, \ddot{s}_{\overline{20|}}} \\ &= 5,000 \frac{A^{1}_{x:\overline{20|}}}{{}_{20}p_x\, \ddot{a}_{\overline{20|}}}. \end{aligned}$$

En la práctica, las primas anuales brutas se reembolsarían, y las fórmulas lo tomarían en cuenta.

∇

Ejemplo 6.13:

Una anualidad diferida expedida a (x) por un ingreso anual de 1 comenzando a la edad $x + n$ se pagará mediante primas anuales netas durante el periodo diferido. La indemnización por fallecimiento durante el perido de pago de primas es el reembolso de las primas anuales netas acumuladas con interés a la tasa usada para la prima. Suponiendo que la indemnización por fallecimiento se paga al final del año del mismo, determine la prima anual neta.

Solución:

Igualando el valor presente actuarial de las primas anuales netas π , al valor presente actuarial de las indemnizaciones, tenemos

$$\pi\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_nE_x\, \ddot{a}_{x+n} + \pi(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x\, \ddot{s}_{\overline{n}|})$$

en donde el segundo término del lado derecho viene de (6.47).

Resolviendo para π tenemos

$$\pi = \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}.$$

∇

6.8 Notas y Referencias

Lukacs (1945) proporciona una investigación del desarrollo del principio de equivalencia. Las primas derivadas mediante la aplicación del principio de equivalencia frecuentemente se denominas primas actuariales en la literatura de la economía de la incertidumbre. Las primas fraccionarias de diversos tipos son importantantes en la práctica. Scher (1974) discutió los desarrollos en este terreno, especificamente, las relaciones entre primas completamente continuas, porporcionales y semicontinuas. La descomposición de una prima de seguro dotal apareció en una ponencia de Linton (1919).

6.9 Ejercicios

Sección 6.1

6.1 Calcule la esperanza y la varianza del valor presente de la pérdida financiera del seguro del Ejemplo 6.1, cuando se determina la prima mediante el Principio I.

Sección 6.2

6.2 Si la fuerza de mortalidad se incremente estrictamente con la edad, demuestre que $\bar{P}(\bar{A}_x) > \mu_x$. [Sugerencia: demuestre que $\bar{P}(\bar{A}_x)$ es un promedio poderado de μ_{x+t}, $t > 0$.]

6.3 Siguiendo el Ejemplo 6.2, derive una expresión general para

$$\frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{(\delta \bar{a}_x)^2}$$

en donde $\mu_{x+t} = \mu$ y δ es la furza de interes para $t > 0$

6.4 Si $\delta = 0$, demuestre que

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\mathring{e}_x}.$$

6.5 Demuestre que la varianza de la pérdida asociada con la prima neta única de un seguro de vida entera es menor que la varianza de una pérdida asociada con un prima anual de un seguro de vida entera. Suponga el pago inmediato de las reclamaciones a la muerte y pagos continuos de primas anuales netas.

6.6 Demuestre que

$$\left(1 + \frac{d\bar{a}_x}{dx}\right) \bar{P}(\bar{A}_x) - \frac{d\bar{A}_x}{dx} = \mu_x.$$

Sección 6.3

6.7 Con base en la Tabla de Vida Ilustrativa y una tasa de interés de 6%, calcule los valores para las primas anuales de la siguiente Tabla. Indique cualquier patrón de desigualdades que aparezca en la matriz de resultados.

Totalmente Continuas	Semicontinuas	Totalmente Discretas
$\bar{P}(\bar{A}_{35:\overline{10}\rceil})$	$P(\bar{A}_{35:\overline{10}\rceil})$	$P_{35:\overline{10}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}_{35:\overline{30}\rceil})$	$P(\bar{A}_{35:\overline{30}\rceil})$	$P_{35:\overline{30}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}_{35:\overline{60}\rceil})$	$P(\bar{A}_{35:\overline{60}\rceil})$	$P_{35:\overline{60}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}_{35})$	$P(\bar{A}_{35})$	P_{35}
$\bar{P}(\bar{A}^{1}_{35:\overline{30}\rceil})$	$P(\bar{A}^{1}_{35:\overline{30}\rceil})$	$P^{1}_{35:\overline{30}\rceil}$
$\bar{P}(\bar{A}^{1}_{35:\overline{10}\rceil})$	$P(\bar{A}^{1}_{35:\overline{10}\rceil})$	$P^{1}_{35:\overline{10}\rceil}$

6.8 Demuestre que

$${}_{20}P^{1}_{x:\overline{30}\rceil} - P^{1}_{x:\overline{20}\rceil} = {}_{20}P({}_{20|10}A_x).$$

6.9 Generalice el Ejemplo 6.4 en donde

$$_{k|}q_x = (1-r)r^k \qquad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Es decir, derive expresiones en términos de r e i para A_x, $\ddot{a}_x$, P_x y $({}^2A_x - A_x^2)/(d\ddot{a}_x)^2$.

Sección 6.4

6.10 Usando la información dada en el Ejemplo 6.9, calcule el valor $P_{50}^{(2)}$.

6.11 Usando varias fórmulas para $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$, demuestre que la fracción

$$\frac{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}^{(m)}}$$

en (6.26) puede expresarse como el recíproco de

a. $\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} - \beta(m)P_{x:\overline{h}|}^{\;1}$
b. $\alpha(m) - \beta(m)(P_{x:\overline{h}|}^{\;1} + d)$
c. $1 - \frac{m-1}{2m}(P_{x:\overline{h}|}^{\;1} + d)$.

6.12 Refiérase al Ejemplo 6.9(b) y calcule directamente

$$P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{50:\overline{20}|}^{(2)}}$$

usando la Tabla de Vida Ilustrativa para la prima neta única de la dotación en el numerador y para el valor de la anualidad vitalicia en el denominador.

6.13 Si

$$\frac{P_{x:\overline{20}|}^{1\;(12)}}{P_{x:\overline{20}|}^{1}} = 1.032$$

y $P_{x:\overline{20}|} = 0.040$, ¿ Cuál es el valor de $P_{x:\overline{20}|}^{(12)}$?

Sección 6.5

6.14 Arregle en orden de magnitud. Indique su razonamiento.

$$P^{(2)}(\bar{A}_{40:\overline{25}|}),\ \bar{P}(\bar{A}_{40:\overline{25}|}),\ P^{\{4\}}(\bar{A}_{40:\overline{25}|}),\ P(\bar{A}_{40:\overline{25}|}),\ P^{\{12\}}(\bar{A}_{40:\overline{25}|}),$$

6.15 Dado que

$$\frac{d}{d^{(12)}} = \frac{99}{100},$$

evalúe

$$\frac{P^{\{12\}}(\bar{A}_x)}{P^{\{1\}}(\bar{A}_x)}.$$

6.16 Si $\bar{P}(\bar{A}_x) = 0.03$, y si el interés es a la tasa anual efectiva de 5%, calcule la prima neta semestral de un seguro de vida entera por 50,000 en (x) en donde las primas son proporcionales.

6.17 Demuestre que

$$P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) - P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\left[\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|} - A^{(m)}_{x:\overline{n}|}}{\delta \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}\right].$$

Sección 6.6

6.18 De fórmulas, en términos de funciones conmutativas **para**

a. ${}_{20}P^{(12)}(\bar{A}_{x:\overline{30}|})$ b. ${}_{20}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{30}|})$

c. ${}_{20}P^{\{4\}}(\bar{A}_{x:\overline{30}|})$ d. ${}_{20}P({}_{40|}\ddot{a}_{25})$.

6.19 Usando funciones conmutativas **apropiadas, escriba una ecuación en la forma de (6.37) para** la prima anual neta **proporcional pagadera anualmente por 20 años, sobre un seguro a plazo** decreciente **para una vida de edad 30. La suma asegurada inicialmente es 200,000 decreciendo en 5,000 al final de cada año hasta la edad de 70 cuando el seguro termine.**

Sección 6.7

6.20 Exprese

$$1 - \frac{\ddot{s}_{\overline{20}|}}{\ddot{s}_{45:\overline{20}|}}$$

como una prima anual. Interprete su resultado.

6.21 Con base en la Tabla de Vida Ilustrativa y una tasa de interés de 6%, calcule los componentes de las dos descomposiciones

a. $1,000P_{50:\overline{20}|} = 1,000(P^{\,1}_{50:\overline{20}|} + P_{50:\overset{\,1}{\overline{20}|}})$

b. $1,000P_{50:\overline{20}|} = 1,000\left(\tilde{P}^{\,1}_{50:\overline{20}|} + \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{20}|}}\right).$

6.22 Considere la variable aleatoria continua similar a (6.48),

$$\tilde{\tilde{W}} = \begin{cases} v^T\left(1 - \frac{\bar{s}_{\overline{T}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}\right) & 0 \leq T < n \\ 0 & T \geq n. \end{cases}$$

La pérdida,

$$L = \tilde{\tilde{W}} - \tilde{\tilde{A}}^{\,1}_{x:\overline{n}|},$$

puede usarse con el principio de equivalencia **para determinar $\tilde{\tilde{A}}^{\,1}_{x:\overline{n}|}$. la prima neta única para** esta póliza especial. Demuestre que

a. $\tilde{\tilde{A}}^{\,1}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} - \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}_np_x\,\bar{a}_{\overline{n}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}$

b. $E[\tilde{\tilde{W}}^{\,2}] = \frac{(1+i)^{2n}\,{}^2\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} - 2(1+i)^n\,\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} + (1 - {}_np_x)}{[(1+i)^n - 1]^2}.$

Misceláneos

6.23 Exprese

$$A_{40}\,P_{40:\overline{25}|} + (1 - A_{40})\,P_{40}$$

como una prima anual neta. Interprete su resultado.

6.24 a. Demuestre que

$$\frac{1}{\ddot{a}_{65:\overline{10}|}} - \frac{1}{\ddot{s}_{65:\overline{10}|}} = P_{65:\overline{10}|}^{\;\;1} + d.$$

b. ¿ Cuál es la fórmula correspondiente para

$$\frac{1}{\ddot{a}^{(12)}_{65:\overline{10}|}} - \frac{1}{\ddot{s}^{(12)}_{65:\overline{10}|}}?$$

c. Demuestre que el monto del ingreso anual provisto por una prima neta única de 100,000 en donde

- el ingreso es pagadero al principio de cada mes mientras (65) sobrevive durante los siguientes 10 años, y
- la prima única es reembolsada al final de 10 años si (65) alcanza la edad de 75,

está dada por

$$100,000\left(\frac{1}{\ddot{a}^{(12)}_{65:\overline{10}|}} - \frac{1}{\ddot{s}^{(12)}_{65:\overline{10}|}}\right) = 100,000(\beta)$$

en donde (β) denota la respuesta de la parte (b) del presente ejercicio.

d. En terminos de las funciones de conmutación muestre que el ingreso anual de la parte (c) puede ser expresado como

$$100,000\frac{D_{65} - D_{75}}{N_{65}^{(12)} - N_{75}^{(12)}}.$$

6.25 Un seguro expedido a (35) con primas iguales a la edad 65 proporciona

- 100,000 en caso de que el asegurado sobreviva a los 65 años de edad, y
- el reembolso de las primas anuales brutas con interés a la tasa de valuación al final del año del fallecimiento si el asegurado muere antes de los 65.

Si la prima anual bruta G es 1.1 π en donde π es la prima neta anual escriba una expreción para π.

6.26 Si ${}_{15}P_{45} = 0.038$, $P_{45:\overline{15}|}$ y $A_{60} = 0.625$, calcule, $P_{45:\overline{15}|}^{\;\;1}$.

6.27 Una póliza de vida de 20 pagos está diseñado para reembolsar, en el caso del fallecimiento, 10,000 más todas las primas brutas sin interés. La característica del reembolso de la prima se aplica durante el periodo de pagos de las primas y después del mismo. Las primas son anuales y las reclamaciones por defunción se pagan al final del año del fallecimiento. Calcule en términos de funciones conmutativas, para una póliza expedida a (x), la prima anual bruta si esta debe ser 110% de la prima neta más 25.

6.28 Calcule, en términos de funciones conmutativas, la prima anual neta inicial de un seguro de vida entera expedido a (25), sujeto a las siguientes previsiones:

- La cantidad nominal es 1 para los primeros 10 años y 2 de ahí en adelante.
- Cada prima durante los primeros 10 años es 1/2 de cada prima pagadera de ahí en adelante.
- Las primas son pagaderas anualmente hasta la edad 65.
- Las reclamaciones se pagan al final del año del fallecimiento.

6.29 Reescriba en términos de funciones conmutativas, las primas de la Tabla 6.3 con procedimientos de pago al momento del fallecimiento.

6.30 Deje que L_1 sea la pérdida del asegurador sobre un seguro de vida entera de una unidad expedido a (x) en una base de primas netas totalmente continuas. Sea L_2 sea la pérdida de (x) en una anualidad vitalicia continua comprada por una prima neta única de 1. Demuestre que $L_1 \equiv L_2$ y de una explicación verbal.

6.31 Se emite un contrato de vida ordinario por una unidad sobre una base totalmente discreta a una persona de edad x con primas anuales de 0.048. Suponga $d = 0.06$, $A_x = 0.4$ y ${}^2A_x = 0.2$. Deje que L sea la función de pérdidas del asegurador a la emisisón de esta póliza.

a. Calcule $E[L]$.

b. Calcule $Var[L]$.

c. Ahora considere una cartera de 100 pólizas de este tipo con las cantidades nominales que se dan a continuación:

Cantidad Nominal	Número de Pólizas
1	80
4	20

Suponga que las pérdidas son independientes y use una aproximación normal para calcular la probabilidad de que el valor presente de las ganancias para la cartera exceda de 20.

Capítulo 7

RESERVAS DE PRIMAS NETAS

7.1 Introducción

En el Capítulo 6 se introdujo el principio de equivalencia. Como lo utilizamos en nuestra discusión, una relación de equivalencia se establece en el momento en que se inicia un contrato entre dos partes que acceden a intercambiar un conjunto de pagos. Por ejemplo, en un préstamo amortizable el prestatario puede pagar una serie de pagos mensuales iguales, equivalentes a un pago único al prestamista en la fecha del préstamo. Un asegurado puede pagar una serie de primas netas a un asegurador, equivalente en la fecha de la expedición de la póliza, a la suma asegurada sobre la muerte del asegurado, o a la sobrevivencia del mismo a la fecha de vencimiento. Un individuo puede adquirir una anualidad vitalicia diferida por medio de primas iguales pagaderas a una organización, equivalente en la fecha del contrato de consentimiento, a pagos mensuales de la organización al individuo cuando sobrevive más allá de una fecha especificada. La equivalencia en el ejemplo del préstamo está en términos de valor presente mientras que en los del seguro y la anualidad es una equivalencia entre dos valores presentes actuariales.

Sin embargo, después de un periodo ya no habrá equivalencia entre las dos obligaciones financieras futuras de las partes. El que pide prestado puede tener que seguir haciendo pagos mientras que el prestamista ya cumplió con sus responsabilidades. En otros casos, ambas partes pueden todavía tener obligaciones. Al asegurado puede requirírsele que pague primas netas adicionales mientras que el asegurador tiene el deber de pagar la cantidad nominal al vencimiento o muerte del asegurado. En nuestro ejemplo anterior sobre la anualidad diferida, el individuo puede haber completado sus pagos mientras que la organización todavía tiene que hacer remuneraciones mensuales.

En este capítulo aplicaremos el principio de equivalencia a pagos de periodos más allá de la fecha de iniciación. Para ello se requiere un elemento de balance, éste será una obligación o deuda para una de las partes y un activo para la otra. En el caso del préstamo, el elemento de balance es la deuda principal, un activo para el prestamista y una obligación para el prestatario. En los otros dos casos, el elemento de balance se denominará *reservas de primas netas.* Esta es una obligación que deberá reconocerse en cualquier estado financiero de un asegurador u organización de anualidades, cualquiera que sea el caso. También es un activo para el asegurado o individuo que adquiera una anualidad.

Parte de las secciones de este capítulo serán similares a las del Capítulo 6 sobre primas netas. También asumiremos que las tasas de mortalidad y de interés, adoptadas a la expedición de la póliza para la determinación de las primas netas, continuarán siendo apropiadas y se utilizarán para la determinación de las reservas de primas.

Ejemplo 7.1:

Suponga que un asegurado está vivo todavía un año después de iniciado el acuerdo de seguro del Ejemplo 6.1. Evalúe el valor presente de las obligaciones financieras futuras en ese momento. Utilice la prima anual 0.3667, determinada en el Ejemplo 6.1.

Solución:

La *f.p.* para K, el tiempo futuro de vida truncado, se hizo igual a 1/4 para $k = 0, 1, 2, 3$. La *f.p.* condicional para K, dado que $K \geq 1$, es

$$Pr[K = k | K \geq 1] = \frac{Pr(K = k)}{Pr(K \geq 1)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \qquad k = 1, 2, 3.$$

los valores presentes requeridos se indican en la siguiente Tabla:

Resultado k	Probabilidad Condicional	Valor Presente (1 año después de la expedición de la póliza i = 0.06) de las Obligaciones Futuras del Asegurador	Asegurado	Pérdida Esperada del Asegurador
1	1/3	$v = 0.9434$	$P = 0.3667$	0.5767
2	1/3	$v^2 = 0.8900$	$P\,\ddot{a}_{\overline{2}\rceil} = 0.7126$	0.1774
3	1/3	$v^3 = 0.8396$	$P\,\ddot{a}_{\overline{3}\rceil} = 1.0390$	−0.1994

El valor presente actuarial de las obligaciones del asegurador es

$$\frac{1}{3}(0.9434 + 0.8900 + 0.8396) = 0.8910.$$

De igual forma, el valor presente actuarial de las obligaciones del asegurado es 0.7061. El elemento de balance,

$$0.8910 - 0.7061 = 0.1849,$$

es la reserva de la prima neta un año después de la expedición de la póliza (tiempo 1), inmediatamente antes de que se pague la segunda prima.

Alternativamente, podemos examinar el valor esperado de la pérdida proyectada. Para cada valor de K, la pérdida proyectada es la diferencia entre los valores presentes de las obligaciones del asegurador y del asegurado. El valor esperado de la pérdida proyectada es

$$\frac{1}{3}(0.5767 + 0.1774 - 0.1994) = 0.1849.$$

∇

7.2 Reservas de Primas Netas Totalmente Continuas

Desarrollaremos ahora las ideas sobre reservas relacionadas con las primas netas discutidas en la Sección 6.2.

Consideremos las reservas para un seguro de vida entera por una unidad expedido a (x) sobre una base totalmente continua con una prima anual de $\bar{P}(\bar{A}_x)$. La reserva correspondiente para un asegurado que sobrevive al final de t años se denota con ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$. Para determinar ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ con el principio de equivalencia introducimos la variable aleatoria U, el tiempo transcurrido hasta que sobreviene la muerte de $(x+t)$, con *f.d.p.* dada por

$${}_u p_{x+t}\, \mu_{x+t+u} \qquad u \geq 0.$$

Después definimos la *pérdida proyectada* en el tiempo t como

$${}_tL = v^U - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{U}|}. \tag{7.1}$$

La reserva de la prima neta se define como la esperanza de la pérdida proyectada. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= E[v^U] - \bar{P}(\bar{A}_x)\, E[\bar{a}_{\overline{U}|}] \\ &= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\, \bar{a}_{x+t}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Esta fórmula establece que

(la reserva)

= (el valor presente actuarial para el seguro de vida entera desde la edad $x+t$)

- (el valor presente actuarial de las primas netas futuras pagaderas a una tasa anual de $\bar{P}(\bar{A}_x)$).

Las formulaciones de $\bar{P}(\bar{A}_x)$ y ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ están relacionadas. Cuando $t = 0$, la fórmula (7.2) produce ${}_0\bar{V}(\bar{A}_x) = 0$. Esto es una consecuencia de aplicar el principio de equivalencia para el tiempo en el que se determinan las primas netas. Notése que la distribución de U es la distribución condicional de $T - t$, dado que $T > t$. Es decir, la *f.d.* de U es

$$1 - \frac{{}_{t+u}p_x}{{}_tp_x} = {}_uq_{x+t},$$

y su *f.d.p.* es

$$\frac{{}_{t+u}p_x\,\mu_{x+t+u}}{{}_tp_x} = {}_up_{x+t}\,\mu_{x+t+u}.$$

Mediante pasos similares a los utilizados para obtener (6.8), determinamos

$${}_tL = v^U\left[1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right] - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}, \qquad (7.3)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} Var[{}_tL] &= \left[1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right]^2 Var[v^U] \\ &= \left[1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right]^2 ({}^2\bar{A}_{x+t} - \bar{A}^2_{x+t}). \qquad (7.4) \end{aligned}$$

Notése la relación con (6.8).

Ejemplo 7.2:

Siga el Ejemplo 6.2 mediante el cálculo de ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ y $Var[{}_tL]$.

Solución:

Ya que $\bar{A}_x$,$\bar{a}_x$ y $\bar{P}(\bar{A}_x)$ son independientes de la edad x, (7.2) se transforma en

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\,\bar{a}_x = 0 \qquad t \geq 0.$$

En este caso, las primas futuras son siempre equivalentes a las indemnizaciones futuras y no se necesita de reserva para el balance.

También, en este caso, (7.4) se reduce a

$$Var[{}_tL] = \left[1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}\right]^2 ({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2) = Var[L] = 0.25,$$

como en el Ejemplo 6.2. Aquí la varianza no depende ni de la edad x ni de la duración t. ∇

Ejemplo 7.3:

Si la mortalidad sigue la ley de Moivre con $l_x = 100 - x$ y la tasa de interés es 6%, calcule

a. $\bar{P}(\bar{A}_{35})$

b. ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{35})$ y $Var[{}_tL]$ para $t = 0, 10, 20, \cdots, 60$.

Solución:

a. De $l_x = 100 - x$, obtenemos ${}_tp_{35} = 1 - t/65$ y ${}_tp_{35}\,\mu_{35+t} = 1/65$ para $0 \leq t < 65$. Se sigue que

$$\bar{A}_{35} = \int_o^{65} v^t \frac{1}{65}\, dt = \frac{\bar{a}_{\overline{65}|}}{65} = 0.258047$$

y

$$\bar{a}_{35} = \frac{1 - \bar{A}_{35}}{\log 1.06} = 12.7333.$$

Entonces

$$\bar{P}(\bar{A}_{35}) = \frac{0.258047}{12.7333} = 0.020266.$$

b. A la edad $35 + t$, tenemos $\bar{A}_{35+t} = \bar{a}_{\overline{65-t}|}/(65 - t)$ y

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{35}) = \bar{A}_{35+t} - 0.020266 \frac{1 - \bar{A}_{35+t}}{\log 1.06}.$$

Además,

$${}^2\bar{A}_{35+t} = \int_o^{65-t} v^{2u} \frac{1}{65 - t}\, du = \frac{{}^2\bar{a}_{\overline{65-t}|}}{65 - t}$$

y, de (7.4),

$$Var[{}_tL] = \left(1 + \frac{0.020266}{\log 1.06}\right)^2 ({}^2\bar{A}_{35+t} - \bar{A}^2_{35+t}).$$

Aplicando estas fórmulas, obtenemos los siguientes resultados

t	${}_tV(\bar{A}_{35})$	$Var[{}_tL]$
0	0.0000	0.1187
10	0.0557	0.1201
20	0.1289	0.1174
30	0.2271	0.1073
40	0.3619	0.0861
50	0.5508	0.0508
60	0.8214	0.0097

∇

Por analogía con el nivel de indemnización y las primas netas, podemos definir la pérdida proyectada para un seguro totalmente continuo general, como

$${}_tL = b_{t+U}\, v^U - \int_0^U \pi_{t+s}\, v^s\, ds$$

en donde b_{t+U} es el monto de la indemnización pagadera si la muerte ocurre en el tiempo $t + U$ y π_{t+s} es la tasa anual de pago en el tiempo $t + s$ de la prima neta totalmente continua. La reserva de prima neta para este caso general, que se denota como ${}_t\bar{V}$, es entonces

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V} = E[{}_tL] &= \int_0^\infty \left(b_{t+u}\, v^u - \int_0^u \pi_{t+s}\, v^s\, ds\right) {}_up_{x+t}\, \mu_{x+t+u}\, du \\ &= \int_0^\infty b_{t+u}\, v^u\, {}_up_{x+t}\, \mu_{x+t+u}\, du - \int_0^\infty \pi_{t+s}\, v^s\, {}_sp_{x+t}\, ds \qquad (7.5) \end{aligned}$$

en donde la segunda integral en (7.5) se obtiene aplicando el Teorema 3.1 o, alternativamente, invirtiendo el orden de la integración. En otras palabras, ${}_t\bar{V}$ puede expresarse como el valor presente actuarial de las indemnizaciones futuras menos el valor presente actuarial de las primas netas futuras.

En correspondencia con la Tabla 6.1, presentamos la Tabla 7.1 para las reservas. No calculamos detalles de la pérdida proyectada ${}_tL$, ni son explícitas las fórmulas exhibidas para la $Var[{}_tL]$; las cuales corresponden a las diversas reservas.

7.3 Otras Fórmulas para Reservas Totalmente Continuas

Hasta ahora sólo hemos desarrollado un método para escribir fórmulas para las reservas totalmente continuas, denominado, el método de proyección que establece que la reserva es la diferencia entre los valores presentes actuariales de las indemnizaciones futuras y las primas netas futuras. A partir del método de proyección podemos desarrollar fácilmente otras tres fórmulas generales para pólizas con tasa primas niveladas o iguales. Ejemplificamos ésto para el caso de seguros dotales de n años.

La *fórmula de diferencia de primas* para ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ se obtiene al factorizar $\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ de la fórmula para ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ de la Tabla 7.1 :

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \left[\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\right]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= [\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Tabla 7.1 Reservas de Primas Netas Totalmente Continuas, Edad a la Expedición x; Duración t; Cantidad Unitaria

Plan	Reserva Notación	Fórmula Prospectiva	
Seguro de Vida Entera	${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}$	
Seguro a Plazo de n Años	${}_t\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|})$	$\bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ 0	$t < n$ $t = n$
Seguro Dotal a n Años	${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$	$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ 1	$t < n$ $t = n$
Seguro de Vida Entera con h Años de Pago	${}^h_t\bar{V}(\bar{A}_x)$	$\bar{A}_{x+t} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|}$ $\bar{A}_{x+t}$	$t < h$ $t \geq h$
Seguro Dotal a n Años con h Años de Pago	${}^h_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$	$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}|}$ $\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}$ 1	$t < h$ $h \leq t < n$ $t = n$
Dotación Pura a n Años	${}_t\bar{V}(A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1})$	$A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ \ 1} - \bar{P}(A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ 1	$t < n$ $t = n$
Anualidad Diferida a n Años	${}_t\bar{V}({}_{n|}\bar{a}_x)$	$A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ \ 1}\bar{a}_{x+n} - \bar{P}({}_{n|}\bar{a}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ $\bar{a}_{x+t}$	$t < n$ $t \geq n$

Esto muestra la reserva como el valor presente actuarial de una diferencia de primas pagadera durante el perido de pagos de primas restantes. La diferencia de primas se obtiene al restar la prima neta anual original de las primas similares de un seguro expedido a la edad alcanzada $x+t$ para las indemnizaciones restantes.

Se obtiene una segunda fórmula al factorizar el valor presente actuarial de las indemnizaciones futuras de la fórmula proyectada. Por lo tanto, para ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ tenemos

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \left[1 - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}\right]\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= \left[1 - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})}\right]\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Esto muestra la reserva como el valor presente actuarial de una porción de las indemnizaciones futuras restantes, aquella porción que no está formada por las primas netas que aún no han sido cobradas. Notése que $\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})$ es la prima neta requerida si las indemnizaciones futuras se formacen a partir de las primas netas futuras, pero $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ es la prima neta realmente pagadera. Por lo tanto, $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})/\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|})$ es la parte de las indemnizaciones futuras formadas por las primas futuras. A esto se le llama *fórmula de un seguro totalmente pagado*, denominado así en base al seguro totalmente pagado sin pérdida de indemnización que se discutirá en el Capítulo 15. Existen fórmulas similares a (7.6) y (7.7) para una amplia variedad de reservas de seguros.

Una tercera expresión es la *fórmula retrospectiva.* La desarrollaremos a partir de una relación más general. Tenemos, del Ejercicio 4.12 y de (5.26), (5.28), para $t < n - s$,

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x+s:\overline{n-s}|} &= \bar{A}^{\,1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\,\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}, \\ \bar{a}_{x+s:\overline{n-s}|} &= \bar{a}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\,\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula de proyección para ${}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ obtenemos

$$\begin{aligned} {}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) &= \bar{A}^{\,1}_{x+s:\overline{t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} \\ &\quad + {}_tE_{x+s}[\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}] \\ &= \bar{A}^{\,1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\;{}_{s+t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\bar{a}_{x+s:\overline{t}|}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Por tanto, las reservas al principio y al final de un intervalo están vinculadas mediante el siguiente argumento:

(la reserva al principio)

= (el valor presente actuarial de las indemnizaciones pagaderas durante el intervalo)

+ (el valor presente actuarial de una dotación pura por el monto de la reserva al final del intervalo)

- (el valor presente actuarial de las primas netas pagaderas durante el intervalo).

La forma simbólica reacomodada,

$$ {}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\bar{a}_{x+s:\overline{t}|} = \bar{A}^{\,1}_{x+s:\overline{t}|} + {}_tE_{x+s}\;{}_{s+t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}), \tag{7.9} $$

muestra que los valores presentes actuariales de los recursos del asegurador y los requerimientos son iguales.

La fórmula retrospectiva se obtiene de (7.9) estableciendo $s = 0$, notando que ${}_0\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = 0$ por el principio de equivalencia, y resolviendo para ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$. Por tanto,

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{{}_tE_x}\,[\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\bar{a}_{x:\overline{t}|} - \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{t}|}]. $$

Además, $\bar{s}_{x:\overline{t}|} = \bar{a}_{x:\overline{t}|}/\,{}_tE_x$ así que la fórmula se reduce a

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\bar{s}_{x:\overline{t}|} - {}_t\bar{k}_x. \tag{7.10} $$

Aquí

$$ {}_t\bar{k}_x = \frac{\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x} \tag{7.11} $$

se llama el *costo acumulado del seguro*. Se nota que

$$ \begin{aligned} {}_t\bar{k}_x &= \int_0^t \frac{v^s\,{}_sp_x\,\mu_{x+s}}{v^t\,{}_tp_x}\,ds \\ &= \frac{\int_0^t (1+i)^{t-s}\,l_{x+s}\,\mu_{x+s}\,ds}{l_{x+t}}. \end{aligned} \tag{7.12} $$

Esto puede interpretarse como la valoración de cada uno de los l_{x+s} sobrevivientes para proveer al valor acumulado de las reclamaciones por muerte del grupo sobreviviente entre las edades x y $x+t$. Por lo tanto, la reserva puede verse como la diferencia entre las primas netas, acumuladas con interés y repartidas sólo entre los sobrevivientes a la edad $x+t$, y el costo acumulado del seguro.

Puede surgir una duda en relacion a sí una fórmula proyectada o la retrospectiva debería utilizarse en los cálculos numéricos. En relación a ello, dos lineamientos son:

- La fórmula proyectada es más conveniente para duraciones posteriores al periodo de pago de la prima. En tales casos, la reserva se simplifica al valor presente actuarial, a la edad alcanzada, de las indemnizaciones futuras. Por ejemplo, para $t \geq h$, ${}^h_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t}$.
- La fórmula retrospectiva es más conveniente en un periodo diferido durante el que no se han proporcionado indemnizaciones. La reserva en este caso se simplifica al valor acumulado actuarial de las primas netas pasadas. Por ejemplo, para $t < n$, ${}_t\bar{V}({}_{n|}\ddot{a}_x^{(12)}) = \bar{P}({}_{n|}\ddot{a}_x^{(12)})\bar{s}_{x:\overline{t}|}$.

Concluímos esta sección con algunas fórmulas especiales para reservas de seguros de vida entera. Fórmulas similares son válidas para las reservas de seguros dotales a n años, pero no para las reservas de seguros en general. La primera de estas se sigue de la fórmula (6.11), $\bar{P}(\bar{A}_x) = (1/\bar{a}_x) - \delta$. Por tanto,

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= 1 - \delta\bar{a}_{x+t} - \left(\frac{1}{\bar{a}_x} - \delta\right)\bar{a}_{x+t} \\ &= 1 - \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Además, usando (7.6) da

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= [\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)]\bar{a}_{x+t} \\ &= \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) + \delta}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Finalmente, podemos reexpresar (7.13) utilizando $\bar{A}_{x+t} = 1 - \delta\bar{a}_{x+t}$ para obtener

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = 1 - \frac{1 - \bar{A}_{x+t}}{1 - \bar{A}_x} = \frac{\bar{A}_{x+t} - \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}. \tag{7.15}$$

7.4 Reservas de Primas Netas Totalmente Discretas

Las reservas que se discuten aquí están relacionadas con las primas netas anuales tratadas en la Sección 6.3, es decir, para el caso del pago de primas anuales y pago de la indemnización al final del año del fallecimiento. Consideremos un seguro de vida entera por una unidad con prima neta P_x. Para este caso, la reserva al final de k años se denota por ${}_kV_x$. Siguiendo el desarrollo en las Secciones 6.3

y 7.2, definimos la variable aleatoria J como el tiempo futuro de vida truncado de $(x+k)$ con *f.p.* ${}_jp_{x+k}\, q_{x+k+j}$, $j=0,1,2,\cdots$. La pérdida proyectada se define entonces como

$$ {}_kL = v^{J+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{J+1}|}, \tag{7.16}$$

y la definición de que ${}_kV_x = E[{}_kL]$ produce

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x\, \ddot{a}_{x+k}. \tag{7.17}$$

Esta fórmula proyectada para ${}_kV_x$ es el valor presente actuarial del seguro de vida entera desde la edad $x+k$ menos el valor presente actuarial de las primas netas futuras P_x. Comparándolo con el desarrollo en la Sección 7.2, observamos que $J = K - k$ con *f.p.*

$$ {}_jp_{x+k}\, q_{x+k+j} = \frac{{}_{k+j}p_x\, q_{x+k+j}}{{}_kp_x}. $$

Aquí estamos tratando con probabilidades condicionales sobre (x) sobrevivientes a la edad $x+k$.

En forma análoga a (7.4), tenemos

$$\begin{aligned} Var[{}_kL] &= Var\left[v^{J+1}\left(1+\frac{P_x}{d}\right)\right] \\ &= \left[1+\frac{P_x}{d}\right]^2 Var[v^{J+1}]. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Ejemplo 7.4:

Siga el Ejemplo 6.4 mediante el cálculo de ${}_kV_x$ y $Var[{}_kL]$.

Solución:

Aquí A_x, $\ddot{a}_x$ y P_x son independiente de la edad x así que $A_{x+k} = A_x$ y

$$ {}_kV_x = A_x - P_x\, \ddot{a}_x = 0 \quad k = 0,1,2,\cdots. $$

Tambien como en (7.18), $Var[{}_kL] = Var[L] = 0.2347$. ∇

Ahora consideraremos un seguro totalmente discreto más general sobre (x) en el que

- la indemnización por fallecimiento es pagadera al final del año de la póliza del fallecimiento;
- Las primas se pagan anualmente, al principio del año de la póliza;

- la indemnización por fallecimiento en el j-ésimo año de la póliza es b_j, $j = 1, 2, \cdots$;
- el pago de la prima en el j-ésimo año de la póliza es π_{j-1}, para $j = 1, 2, \cdots$.

La pérdida proyectada, a partir del final del año de la póliza k, es ahora

$$
{}_kL = b_{k+J+1}\, v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi_{k+h}\, v^h. \tag{7.19}
$$

La reserva de prima neta, denotada por ${}_kV$ se define como

$$
\begin{aligned}
{}_kV = E[{}_kL] &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[b_{k+j+1}\, v^{j+1} - \sum_{h=0}^{j} \pi_{k+h}\, v^h \right] {}_jp_{x+k}\, q_{x+k+j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} b_{k+j+1}\, v^{j+1}\, {}_jp_{x+k}\, q_{x+k+j} - \sum_{h=0}^{\infty} \pi_{k+h}\, v^h\, {}_hp_{x+k}
\end{aligned} \tag{7.20}
$$

en donde la segunda suma en (7.20) se obtiene al aplicar el Teorema 3.2 o invirtiendo el orden de la suma. Por lo tanto, así como para otras reservas, ${}_kV$ es el valor presente actuarial de las indemenizaciones futuras menos el valor presente actuarial de las primas netas futuras.

Las fórmulas que se exhiben en la Tabla 7.2 corresponden a la primas netas de la Tabla 6.2 y son similares a las de la Tabla 7.1.

Tabla 7.2 Reservas de Primas Netas Totalmente Discretas, Edad a la Expedición x; Duración k, Cantidad Unitaria

Plan	Reserva Notación	Fórmula Prospectiva	
Seguro de Vida Entera	${}_kV_x$	$A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}$	
Seguro a Plazo de n Años	${}_kV^{1}_{x:\overline{n}\vert}$	$A^{1}_{x+k:\overline{n-k}\vert} - P^{1}_{x:\overline{n}\vert}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$ 0	$k<n$ $k=n$
Seguro Dotal a n Años	${}_kV_{x:\overline{n}\vert}$	$A_{x+k:\overline{n-k}\vert} - P_{x:\overline{n}\vert}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$ 1	$k<n$ $k=n$
Seguro de Vida Entera con h Años de Pago	${}^{h}_{k}V_x$	$A_{x+k} - {}_hP_x\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\vert}$ A_{x+k}	$k<h$ $k\geq h$
Seguro Dotal a n Años con h Años de Pago	${}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}\vert}$	$A_{x+k:\overline{n-k}\vert} - {}_hP_{x:\overline{n}\vert}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\vert}$ $A_{x+k:\overline{n-k}\vert}$ 1	$k<h$ $h\leq k<n$ $k=n$
Dotación Pura a n Años	${}_kV_{x:\overline{n}\vert}^{\;\,1}$	$\mathrm{A}_{x+k:\overline{n-k}\vert}^{\;\,1} - \mathrm{P}_{x:\overline{n}\vert}^{\;\,1}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$ 1	$k<n$ $k=n$
Anualidad Diferida a n Años	${}_kV({}_{n\vert}\ddot{a}_x)$	$\mathrm{A}_{x+k:\overline{n-k}\vert}^{\;\,1}\ddot{a}_{x+n} - P({}_{n\vert}\ddot{a}_x)\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\vert}$ $\ddot{a}_{x+k}$	$k<n$ $k\geq n$

Ejemplo 7.5:

Determine la $Var[{}_kL]$ para un seguro dotal a n años

Solución:

$$
\begin{aligned}
{}_kL &= v^{J+1}\left[1+\frac{P_{x:\overline{n}\vert}}{d}\right]-\frac{P_{x:\overline{n}\vert}}{d} \qquad J<n-k \\
&= v^{n-k}\left[1+\frac{P_{x:\overline{n}\vert}}{d}\right]-\frac{P_{x:\overline{n}\vert}}{d} \qquad J\geq n-k
\end{aligned}
$$

J tiene $f.p.$ ${}_jp_{x+k}\,q_{x+k+j}$, $j=0,1,\cdots$. De ello obtenemos

$$
Var[{}_kL]=\left[1+\frac{P_{x:\overline{n}\vert}}{d}\right]^2 \left[{}^2A_{x+k:\overline{n-k}\vert}-A^2_{x+k:\overline{n-k}\vert}\right].
$$

∇

En otros casos diferentes a los del seguro de vida entera o dotales con primas pagaderas durante todo el tiempo del seguro, las expresiones de la varianza de la pérdida contienen muchos términos. En tales casos, los resultados de la Sección 7.10 pueden facilitar los cálculos.

Se pueden desarrollar fórmulas similares a las de la Sección 7.3 para las reservas de primas netas totalmente discretas. Lo ejemplificaremos expresando las fórmulas para ${}_kV_{x:\overline{n}|}$ con una explicación mínima. Las interpretaciones y los manejos algebráicos siguen muy de cerca los que se hicieron para las reservas de primas netas totalmente continuas.

La fórmula de diferencia de primas es

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = (P_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}. \tag{7.21}$$

La del seguro totalmente pagado es

$$ {}_kV_{x:\overline{n}|} = \left[1 - \frac{P_{x:\overline{n}|}}{P_{x+k:\overline{n-k}|}}\right] A_{x+k:\overline{n-k}|}. \tag{7.22}$$

Para la fórmula retrospectiva, establecemos primero un resultado similar al de (7.8), específicamente, para $h < n - j$,

$$ {}_jV_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x+j:\overline{h}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+j:\overline{h}|} + {}_hE_{x+j}\;{}_{j+h}V_{x:\overline{n}|}. \tag{7.23}$$

Entonces, si $j = 0$, tenemos, ya que ${}_0V_{x:\overline{n}|} = 0$,

$$\begin{aligned} {}_hV_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{{}_hE_x}[P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - A^{1}_{x:\overline{h}|}] \\ &= P_{x:\overline{n}|}\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x. \end{aligned}\tag{7.24}$$

Aquí el costo acumulado del seguro es ${}_hk_x = A^{1}_{x:\overline{h}|}/\,{}_hE_x$ y es posible una interpretación sobre el grupo sobreviviente.

De la fórmula retrospectiva se puede hacer una interesante observación para la reserva. Consideremos dos pólizas diferentes expedidas a (x), cada una por una unidad de seguro durante los primeros h años. Aquí h es menor que o igual al más pequeño de los dos periodos de pagos de primas. Las fórmulas retrospectivas para las reservas son:

$$ {}_hV_1 = P_1\,\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x $$

y

$$ {}_hV_2 = P_2\,\ddot{s}_{x:\overline{h}|} - {}_hk_x. $$

Se sigue que

$$ {}_hV_1 - {}_hV_2 = (P_1 - P_2)\,\ddot{s}_{x:\overline{h}|}, \tag{7.25} $$

que demuestra que la diferencia en las dos reservas es igual al valor acumulado actuarial de la diferencia $P_1 - P_2$ en las primas netas. Ya que

$$ \frac{1}{\ddot{s}_{x:\overline{h}|}} = \frac{{}_hE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \mathrm{P}_{x:\overset{1}{\overline{h}|}}, $$

la fórmula (7.25) puede reacomodarse como

$$ P_1 - P_2 = \mathrm{P}_{x:\overset{1}{\overline{h}|}}({}_hV_1 - {}_hV_2). \tag{7.26} $$

Ahora la diferencia en las primas netas se expresa como la prima neta para una dotación pura a h años de la diferencia en las reservas al final de los h años. La fórmula (6.22) es un caso especial de (7.26) con ${}_nV_{x:\overline{n}|} = 1$ y ${}_h^hV = A_{x+n}$. Otro ejemplo es

$$ P_x = P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + \mathrm{P}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\,{}_nV_x \tag{7.27} $$

ya que ${}_nV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = 0$.

Al igual que en el caso totalmente continuo, existen fórmulas especiales para las reservas de los seguros de vida entera y dotales en el caso totalmente discreto. En forma similar a (7.13) - (7.15), tenemos mediante el uso de las relaciones $A_y = 1 - d\ddot{a}_y$ y $1/\ddot{a}_y = P_y + d$

$$ \begin{aligned} {}_kV_x &= 1 - d\ddot{a}_{x+k} - \left(\frac{1}{\ddot{a}_x} - d\right)\ddot{a}_{x+k} \\ &= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}, \end{aligned} \tag{7.28} $$

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{1 - A_{x+k}}{1 - A_x} = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x} \tag{7.29} $$

y

$$
{}_kV_x = 1 - \frac{P_x + d}{P_{x+k} + d} = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} - d}. * \tag{7.30}
$$

* Fórmulas especiales similares son también válidas para las reservas del seguro dotal a n años, pero no para reservas de seguros en general.

Ejemplo 7.6:

Suponga que un seguro de vida a plazo de 5 años por 1,000 es emitido sobre una base totalmente discreta a cada miembro de un grupo de l_{50} personas de 50 años. Encuentre el flujo de caja esperado para este grupo con base en la Tabla de Vida Ilustrativa con interés de 6% y, como subproducto, obtenga las reservas de la prima neta.

Solución:

Primero calculamos la prima neta anual, $\pi = 1,000\, P^{1}_{50:\overline{5}|} = 6.55692$. Después se calculan la acumulación esperada de fondos para el grupo a través del cobro de las primas, el acreditamiento del interés y los pagos por reclamaciones como se muestra en la siguiente Tabla.

(1) Año h	(2) Primas Esperadas al Principio del Año $l_{50+h-1}\pi$	(3) Fondo Esperado al Principio del Año $(2)_h + (6)_{h-1}$	(4) Interés Esperado $(0.06)(3)_h$	(5) Reclamaciones por Fallecimiento Esperadas $1,000\, d_{50+h-1}$	(6) Fondo Esperado al Final del Año $(3)_h + (4)_h - (5)_h$	(7) Número de Sobrevivientes Esperado al Final del Año l_{50+h}	(8) $1,000\, {}_hV^{1}_{50:\overline{5}|}$ $(6)_h \div (7)_h$
1	586,903	586,903	35,214	529,884	92,233	88,979.11	1.04
2	583,429	675,662	40,540	571,432	144,770	88,407.68	1.64
3	579,682	724,452	43,467	616,416	151,503	87,791.26	1.73
4	575,640	727,143	43,629	665,065	105,707	87,126.20	1.21
5	571,280	676,987	40,619	717,606	0	86,408.60	0.00

∇

Ejemplo 7.7:

Suponga que se expide un seguro dotal a 5 años por 1,000 con base totalmente discreta a cada miembro de un grupo de 150 personas de 50 años. Encuentre el flujo de caja esperado para este grupo con base en la Tabla de Vida Ilustrativa con interés de 6%, y obtenga, como subproducto, las reservas de las primas netas.

Solución:

Aquí la prima neta anual es $\pi = 1,000\, P_{50:\overline{5}|} = 170.083$. El flujo de caja esperado se muestra en la siguiente Tabla.

(1) Año h	(2) Primas Esperadas al Principio del Año $l_{50+h-1}\pi$	(3) Fondo Esperado al Principio del Año $(2)_h + (6)_{h-1}$	(4) Interés Esperado $(0.06)(3)_h$	(5) Reclamaciones por Fallecimiento Esperadas $1,000\, d_{50+h-1}$	(6) Fondo Esperado al Final del Año $(3)_h + (4)_h - (5)_h$	(7) Número de Sobrevivientes Esperado al Final del Año l_{50+h}	(8) $1,000\, {}_hV_{50:\overline{5}|}$ $(6)_h \div (7)_h$
1	15,223,954	15,223,954	913,437	529,884	15,607,507	88,979.11	175.41
2	15,133,829	30,741,336	1,844,480	571,432	32,014,384	88,407.68	362.12
3	15,036,638	47,051,022	2,823,061	616,416	49,257,667	87,791.26	561.08
4	14,931,796	64,189,463	3,851,368	665,065	67,375,766	87,126.20	773.31
5	14,818,680	82,194,446	4,931,667	717,606	86,408,507	86,408.60	1,000.00

∇

En las Figuras 7.1 y 7.2 se muestran las primas y reclamaciones por fallecimiento esperadas para los dos ejemplos anteriores. En el Ejemplo 7.6, las primas exceden a las reclamaciones por fallecimiento esperadas durante dos años, pero a partir de ahí son menores que las reclamaciones. Las primas en exceso se acumulan en un fondo en los primeros años y se retirarán en los últimos años cuando las reclamaciones son mayores. Al final de los 5 años, se espera que el fondo se haya agotado.

Para el caso del Ejemplo 7.7, la situación es bastante diferente. Como se muestra en la Figura 7.2, las primas esperadas permanecen durante todo el tiempo en exceso de las reclamaciones por fallecimiento. El fondo esperado al final de los 5 años es suficiente para proporcionar 1,000 en los pagos por maduración a cada uno de los sobrevivientes esperados.

Figura 7.1 Primas y Reclamaciones por Fallecimiento Esperadas del Ejemplo 7.6

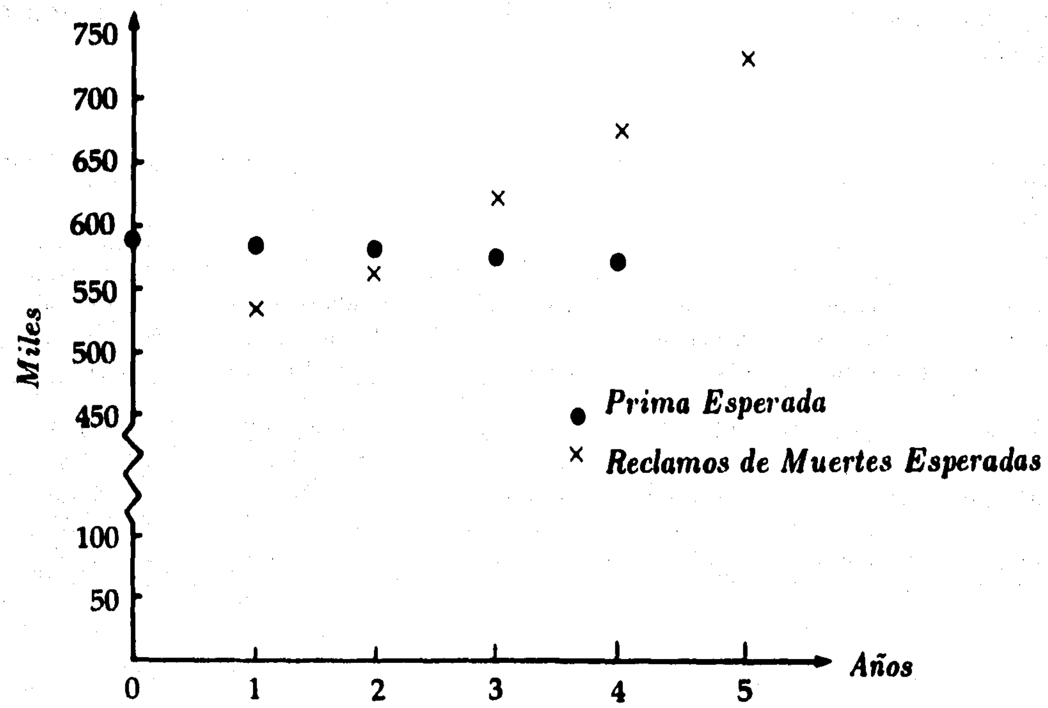
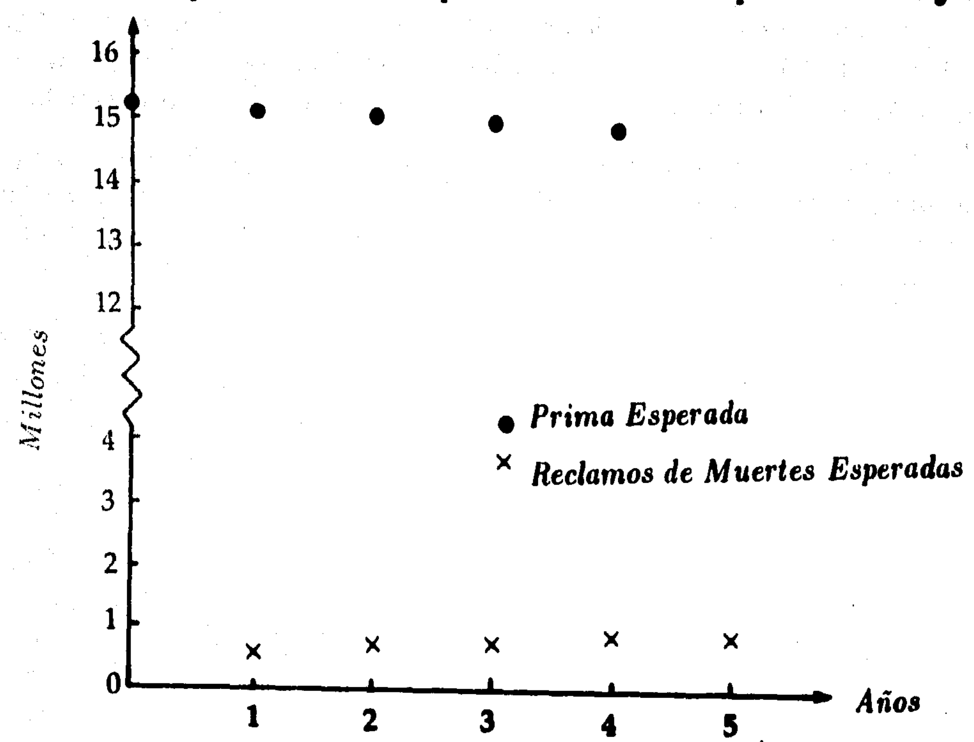


Figura 7.2 Primas y Reclamaciones por Fallecimiento Esperadas del Ejemplo 7.7



La póliza a plazo de 5 años ejemplifica un seguro de vida con una prima y acumulación bajas, mientras que la dotación a 5 años lo hace para una forma de primas y acumulación altas. La mayoría de los seguros de vida caerían entre estos dos extremos.

7.5 Reservas con una Base Semicontinua

Al final de la Sección 6.3 se señaló que, en la práctica, hay una necesidad de primas anuales netas semicontinuas $P(\bar{A}_x)$, $P(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|})$, $P(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$, ${}_hP(\bar{A}_x)$ y ${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$ para tomar en cuenta los pagos inmediatos de reclamaciones por fallecimiento. En tales casos, las fórmulas de reserva de la Tabla 7.2 necesitan revisarse mediante el reemplazo de A por $\bar{A}$ y de P por $P(\bar{A})$. Por lo tanto, por ejemplo, para un seguro dotal a n años con h pagos anuales

$$
{}^h_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \begin{cases} \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & k < h \\ \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} & h \leq k < n. \end{cases} \tag{7.31}
$$

si se supone una distribución uniforme de los fallecimientos para cada año de edad, tenemos, de (4.25) y (6.24),

$$
{}^h_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}\,{}^h_kV^{1}_{x:\overline{n}|} + {}^h_kV_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}. \tag{7.32}
$$

Bajo estas circunstancias se calculan fácilmente las reservas con una base semicontinua a partir de las correspondientes reservas totalmente discretas.

7.6 Reservas con Base en Primas Mensuales Iguales

En esta sección examinamos las fórmulas de reservas correspondientes a las de las primas mensuales verdaderas que se discutieron en la Sección 6.4. Mediante el método de proyección, se puede escribir una fórmula directa para ${}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|}$, es decir,

$$
{}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|} \qquad k < h. \tag{7.33}
$$

Esto puede evaluarse después de obtener ${}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ mediante (6.25) o (6.26), y $\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}$ mediante (5.75) o (5.77).

Ahora consideramos la diferencia entre ${}^h_kV^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ y ${}^h_kV_{x:\overline{n}|}$ en el caso general de un seguro dotal de pago limitado. Tenemos, para $k < h$,

$$
\begin{aligned}
{}^{h}_{k}V^{(m)}_{x:\overline{n}|} - {}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}|} &= {}_{h}P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - {}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|} \\
&= {}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\frac{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - {}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}.
\end{aligned}
\tag{7.34}
$$

Bajo el supuesto de una distribución uniforme de muertes para cada año de edad, (7.34) se convierte en

$$
\begin{aligned}
{}^{h}_{k}V^{(m)}_{x:\overline{n}|} - {}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}|} &= {}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\left\{\frac{\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - \beta(m)\,A^{\;1}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}\right. \\
&\qquad \left. -[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - \beta(m)\,A^{\;\;1}_{x+k:\overline{h-k}|}]\right\}.
\end{aligned}
$$

Los términos que contienen $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}$ se cancelan para producir

$$
\begin{aligned}
{}^{h}_{k}V^{(m)}_{x:\overline{n}|} - {}^{h}_{k}V_{x:\overline{n}|} &= \beta(m)\,{}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}[A^{\;\;1}_{x+k:\overline{h-k}|} - P^{\;1}_{x:\overline{h}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}] \\
&= \beta(m)\,{}_{h}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\,{}_{k}V^{\;1}_{x:\overline{h}|}.
\end{aligned}
\tag{7.35}
$$

Por lo tanto,

(la reserva para un seguro con primas m-ésimas reales)

= (la reserva totalmente discreta correspondiente)

\+ (una reserva totalmente discreta para el plazo del seguro mayor que el periodo de pago de la prima por una fracción, $\beta(m)$ de la prima m-ésima real para el plan del seguro).

Un resultado similar es válido para las reservas con un base semicontinua con primas mensuales verdaderas bajo el supuesto de la distribución uniforme de los fallecimientos para cada año de edad. Mediante el método de proyección, tenemos para $k < h$,

$$
{}^{h}_{k}V^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_{h}P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}. \tag{7.36}
$$

Siguiendo los pasos que se conectan con (7.33) y (7.35), obtenemos

$$
{}^{h}_{k}V^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}^{h}_{k}V(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \beta(m)\,{}_{h}P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,{}_{k}V^{\;1}_{x:\overline{h}|}. \tag{7.37}
$$

Adicionalmente, en la expresión anterior, permitiendo que $m \to \infty$ obtenemos para una base totalmente continua

$$ {}^{h}_{k}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}^{h}_{k}V(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) + \beta(\infty)\,{}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,{}_{k}V_{\substack{1\\x:\overline{h}|}}. \quad (7.38) $$

Notése otra vez que el plazo de la reserva está con una base totalmente discreta.

Ejemplo 7.8:

Para el seguro dotal a 20 años del Ejemplo 6.9 con primas semestrales verdaderas, calcule

a. la reserva al final de 10 años con una base totalmente discreta

b. la reserva correspondiente con base semicontinua.

También verifique (7.37) con relación a la reserva de la parte (b).

Solución:

a. Además de los valores calculados para el Ejemplo 6.9, requerimos

$$
\begin{aligned}
A^{1}_{60:\overline{10}|} &= 0.13678852\\
A_{60:\overline{10}|} &= 0.58798425\\
\ddot{a}_{60:\overline{10}|} &= 7.2789425\\
{}_{10}V_{\substack{1\\50:\overline{20}|}} &= A^{1}_{60:\overline{10}|} - P^{1}_{60:\overline{10}|}\ddot{a}_{60:\overline{10}|} = 0.052752\\
{}_{10}V_{50:\overline{20}|} &= A_{60:\overline{10}|} - P_{60:\overline{10}|}\ddot{a}_{60:\overline{10}|} = 0.355380.
\end{aligned}
$$

Luego, bajo el supuesto de una distribución uniforme de fallecimientos para cada año de edad, tenemos

$$ \ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10}|} = \alpha(2)\,\ddot{a}_{60:\overline{10}|} - \beta(2)(1 - {}_{10}E_{60}) = 7.1392299. $$

La reserva, ${}_{10}V^{(2)}_{50:\overline{20}|}$, puede calcularse usando

$$ (7.33):\ A_{60:\overline{10}|} - P^{(2)}_{50:\overline{20}|}\ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10}|} = 0.355822 $$

o

$$ (7.35):\ {}_{10}V_{50:\overline{20}|} + \beta(2)P^{(2)}_{50:\overline{20}|}\,{}_{10}V_{\substack{1\\50:\overline{20}|}} = 0.355822. $$

b. Necesitamos valores calculados adicionales,

$$\frac{i}{\delta}A^{1}_{50:\overline{20}|} = 0.13423835 \qquad P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}^{(2)}_{50:\overline{20}|}} = 0.03286830$$

$$\frac{i}{\delta}A^{1}_{60:\overline{10}|} = 0.14085233 \qquad \bar{A}_{50:\overline{20}|} = 0.36471188$$

$$P(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \frac{\bar{A}_{50:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{50:\overline{20}|}} = 0.03229873 \qquad \bar{A}_{60:\overline{10}|} = 0.59204806$$

$$\begin{aligned}
{}_{10}V(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \bar{A}_{60:\overline{20}|} - P(\bar{A}_{50:\overline{20}|})\,\ddot{a}_{60:\overline{10}|} &= 0.3569475 \\
{}_{10}V^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|}) = \bar{A}_{60:\overline{10}|} - P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|})\,\ddot{a}^{(2)}_{60:\overline{10}|} &= 0.3573937 \\
\beta(2)\,P^{(2)}(\bar{A}_{50:\overline{20}|})\,{}_{10}V_{\overset{1}{50}:\overline{20}|} &= 0.000446.
\end{aligned}$$

Este último valor es la diferencia entre los dos inmediatamente anteriores, como se estableció en (7.37)

∇

7.7 Reservas Sobre una Base Prorrateada o Continua Descontada

En la Sección 6.5 discutimos las primas prorrateadas, o continuas descontadas y ahora consideraremos ahora las reservas correspondientes. Para enteros k, tenemos mediante el método de proyección

$$ {}^{h}_{k}V^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_{h}P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\,\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|} \quad k < h. \tag{7.39}$$

Pero por (6.29),

$${}_{h}P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{d^{\{m\}}}{\delta}\,{}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}),$$

y por (5.117),

$$\ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k|}} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\,\bar{a}_{x+k:\overline{h-k|}}.$$

Sustituyendo en (7.39)

$$^{h}_{k}V^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k|}} - {}_{h}\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}})\,\bar{a}_{x+k:\overline{h-k|}} = {}^{h}_{k}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}). \tag{7.40}$$

Esto significa que las reservas totalmente continuas pueden utilizarse para todos los casos de prorrateo, independientemente del modo de pago de la prima.

En la Sección 6.5, se señaló que la prima prorrateada podría descomponerse como

$$P^{\{1\}}(\bar{A}_x) = P(\bar{A}_x) + P(\bar{A}_x^{PR}) \tag{7.41}$$

en donde el índice PR se utiliza para denotar un seguro para la característica de reembolso de la prima. Se podría esperar que una descomposición similar sería válida para las reservas. Para verificarlo, puede utilizarse el método de proyección y (6.34) para escribir

$$\begin{aligned}
{}_kV(\bar{A}_x^{PR}) &= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{\bar{A}_{x+k} - A_{x+k}}{\delta} - P(\bar{A}_x^{PR})\,\ddot{a}_{x+k} \\
&= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{d\ddot{a}_{x+k} - \delta\bar{a}_{x+k}}{\delta} - [P^{\{1\}}(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x)]\ddot{a}_{x+k}.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{d}{\delta}\bar{P}(\bar{A}_x) = P^{\{1\}}(\bar{A}_x),$$

la expresión puede reducirse a

$$\begin{aligned}
{}_kV(\bar{A}_x^{PR}) &= -\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+k} + P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k} \\
&= \bar{A}_{x+k} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+k} - [\bar{A}_{x+k} - P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+k}] \\
&= {}_k\bar{V}(\bar{A}_x) - {}_kV(\bar{A}_x) \\
&= {}_kV^{\{1\}}(\bar{A}_x) - {}_kV(\bar{A}_x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$${}_kV^{\{1\}}(\bar{A}_x) = {}_kV(\bar{A}_x) + {}_kV(\bar{A}_x^{PR}). \tag{7.42}$$

7.8 Fórmulas Recurrentes para Reservas Totalmente Discretas

En la Sección 7.4 consideramos un seguro general para (x) que proporcionaba una indemnización por fallecimiento de b_{j+1} al final del año de la póliza $j+1$, comprado mediante primas anuales netas, π_j, $j = 0, 1, \cdots$, con π_j pagadero al principio del año de la póliza $j+1$. La reserva ${}_{h-1}V$ al final del año de la póliza $h-1$ está dada por (7.20),

$$ {}_{h-1}V = \sum_{j=0}^{\infty} b_{h+j}\, v^{j+1}\, {}_{j}p_{x+h-1}\, q_{x+h-1+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j-1}\, v^{j}\, {}_{j}p_{x+h-1}. \tag{7.43} $$

Podemos partir los primeros términos de las sumas para obtener

$$ \begin{aligned} {}_{h-1}V = b_h\, v\, q_{x+h-1} \quad - \quad \pi_{h-1} + v\, p_{x+h-1} \Bigg\{ & \sum_{j=1}^{\infty} b_{h+j}\, v^{j}\, {}_{j-1}p_{x+h}\, q_{x+h+j-1} \\ - & \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{h+j-1}\, v^{j-1}\, {}_{j-1}p_{x+h} \Bigg\}. \end{aligned} $$

La expresión entre paréntesis es igual a ${}_{h}V$, por tanto

$$ {}_{h-1}V = b_h\, v\, q_{x+h-1} - \pi_{h-1} + v\, p_{x+h-1}\, {}_{h}V, $$

o

$$ {}_{h-1}V + \pi_{h-1} = b_h\, v\, q_{x+h-1} + {}_{h}V\, v\, p_{x+h-1}. \tag{7.44} $$

En palabras, los recursos requeridos al principio del año de la póliza h son iguales al valor presente actuarial de los requerimientos del final del año.

La fórmula (7.44) puede reacomodarse para separar la prima π_{h-1} en los componentes de la póliza del año h, es decir,

$$ \pi_{h-1} = b_h\, v\, q_{x+h-1} + ({}_{h}V\, v\, p_{x+h-1} - {}_{h-1}V). \tag{7.45} $$

El primer componente del lado derecho de (7.45) es la prima neta del primer año del plazo del seguro para el monto asegurado b_h. El segundo componente, ${}_{h}V\, v\, p_{x+h-1} - {}_{h-1}V$, representa el monto que, si se agrega a ${}_{h-1}V$ al principio del año, se acumularía con el interés y la sobrevivencia a ${}_{h}V$ al final del año.

Con el fin de comparaciones subsecuentes con fórmulas para un seguro totalmente continuo, multiplicamos ambos lados de (7.45) por $1+i$ y reacomodamos la fórmula

$$\pi_{h-1} + ({}_{h-1}V + \pi_{h-1})i + {}_{h}V\, q_{x+h-1} = b_h\, q_{x+h-1} + \Delta({}_{h-1}V). \tag{7.46}$$

Para indicar que ${}_{h-1}V$ y ${}_{h}V$ son reservas de fin de año, se les conoce como las ***reservas finales*** para la póliza de los años $h-1$ y h. La suma ${}_{h-1}V + \pi_{h-1}$ se denomina la ***reserva inicial*** para pólizas de un año h. El lado izquierdo de (7.46) indica los recursos para pólizas del año h, denominado premio, a los intereses del año de la reserva inicial y el valor esperado de muertes que implicán la liberación de las reservas. El lado derecho esta formado por los pagos esperados por la muerte al final del año y el incremento ${}_{h}V - {}_{h-1}V$ en la reserva.

Un análisis diferente resulta si se considera a la reserva ${}_{h}V$ esta disponible para pensar los beneficios de muerte b_h, y que sólo la parte *Cantidad neta en riesgo* , $b_h - {}_{h}V$, necesita ser cubierta. Para este análisis tenemos, sustituyendo $1-q_{x+h-1}$ por p_{x+h-1} en (7.44) y multiplicando despues por $1+i$,

$${}_{h}V = ({}_{h-1}V + \pi_{h-1})(1+i) - (b_h - {}_{h}V)q_{x+h-1}. \tag{7.47}$$

Correspondiendo a (7.45), ahora tenemos

$$\pi_{h-1} = (b_h - {}_{h}V)\, v\, q_{x+h-1} + v\, {}_{h}V - {}_{h-1}V. \tag{7.48}$$

El primer componente de la derecha es la prima para la cantidad en riesgo. El segundo componente, $v\,{}_{h}V - {}_{h-1}V$, es el monto que , sí adicionado a ${}_{h-1}V$ al principio del año, podrá acumular bajo intereses, la cantidad ${}_{h}V$ al final del año. Aquí ${}_{h}V$ es usada, en caso de muerte, para compensar el beneficio de muerte. Consecuentemente, la reserva es acumulada , como un fondo de ahorro. Esto es mostrado nuevamente por la formula correspondiente a (7.46).

$$\pi_{h-1} + ({}_{h-1}V + \pi_{h-1})i = (b_h - {}_{h}V)\, q_{x+h-1} + \Delta({}_{h-1}V), \tag{7.49}$$

lo que esta a la izquierda queda a interpretación del lector.

El primer análisis , (7.45), no hace uso de la reserva para compensar el beneficio de muerte y, consecuentemente, la reserva se acumula bajo intereses y sobrevivientes. Ambas componentes del lado derecho de (7.45) involucran riesgos de mortalidad, mientras en (7.48) sólo el primer componente lo hace. Veremos en la Sección 7.10 que (7.48) es descrito para un significado flexible para cualquier varianza de perdidas.

Ejemplo 7.9:

Una anualidad diferida a edad x , para una renta de 1 que inicia a edad $x+1$, es pagada por una prima anual durante el periodo de diferimiento. El beneficio por muerte antes de la edad $x+1$ es la reserva. Suponga que el beneficio por muerte es pagado al final del año de fallecimiento, determine la prima neta anual y la reserva al final del año k para $k \leq n$.

Solución:

De (7.48) y el hecho de que $b_h = {}_hV$ para $h = 1, 2, \cdots, n$,

$$\pi = v\,{}_hV - {}_{h-1}V.$$

Multiplicando por v^{h-1}, tenemos

$$\pi v^{h-1} = v^h\,{}_hV - v^{h-1}\,{}_{h-1}V = \Delta(v^{h-1}\,{}_{h-1}V). \tag{7.50}$$

Sumando sobre $h = 1, 2, \cdots, n$, tenemos

$$v^n\,{}_nV - v^0\,{}_0V = \pi \sum_{h=1}^{n} v^{h-1} = \pi \ddot{a}_{\overline{n|}}$$

y como ${}_0V = 0$ mientras ${}_nV = \ddot{a}_{x+n}$, se sigue que

$$\pi = \frac{v^n\,\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}} = \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}.$$

Por lo tanto, esta anualidad es idéntica a la descrita en el Ejemplo 6.13. La reserva al final de k años puede ser encontrada sumando (7.50) sobre $h = 1, 2, \cdots, k$ para obtener

$$v^k\,{}_kV = \pi \ddot{a}_{\overline{k|}}$$

de lo cual

$${}_kV = \pi \ddot{s}_{\overline{k|}}.$$

∇

Ejemplo 7.10:

Un seguro a edad (x) provee , en caso de muerte antes de n años, un pago de 1 más la reserva al final del año de muerte. Obtendra fórmulas para la prima nivelada anual y la reserva al final de k años.

Solución:

En este caso $b_h = 1 + {}_hV$, y el monto neto en riesgo tiene un valor constante de 1. Denotando la prima nivelada denominada por π y usando (7.48), tenemos

$$v\,{}_hV - {}_{h-1}V = \pi - v\,q_{x+h-1}.$$

Multiplicando por v^{h-1}, llegamos a

$$\Delta(v^{h-1}\,{}_{h-1}V) = \pi\,v^{h-1} - v^h\,q_{x+h-1}. \tag{7.51}$$

Sumando sobre $h = 1, 2, \cdots, n$, obtenemos

$$v^n\,{}_nV = \pi\,\ddot{a}_{\overline{n}|} - \sum_{h=1}^{n} v^h\,q_{x+h-1}$$

considerando en ${}_nV = 1$,

$$\pi = \frac{v^n + \sum_{h=1}^{n} v^h\,q_{x+h-1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}.$$

Sumando (7.51) sobre $h = 1, 2, \cdots, k$, y resolviendo para ${}_kV$, encontramos

$${}_kV = \pi\,\ddot{s}_{\overline{k}|} - \sum_{h=1}^{k}(1+i)^{k-h}\,q_{x+h-1}.$$

∇

7.9 Reservas de Duración Fraccionada

Consideremos un seguro general de (x) , para un beneficio de b_{j+1} al final del año de la póliza $j + 1$, aplicando por la prima neta anual de π_j, $j = 0, 1, \cdots$, con π_j pagable al principio del año póliza. La reserva de duración $k + s$ donde k es un entero, y $0 < s < 1$, esta dado respectivamente por

$${}_{k+s}V = b_{k+1}\,v^{1-s}\,{}_{1-s}q_{x+k+s} + {}_{k+1}V\,v^{1-s}\,{}_{1-s}p_{x+k+s}. \tag{7.52}$$

Bajo el supuesto de distribución uniforme de muertes, en cada año

$${}_{s}p_{x+k}\ {}_{1-s}q_{x+k+s} = {}_{s|1-s}q_{x+k} = (1-s)\,q_{x+k},$$

por tanto

$$\begin{aligned} {}_{1-s}q_{x+k+s} &= \frac{(1-s)q_{x+k}}{1-sq_{x+k}} && (7.53)\\ {}_{1-s}p_{x+k+s} &= \frac{p_{x+k}}{1-sq_{x+k}}. && (7.54) \end{aligned}$$

Entonces (7.52) puede ser escrita como

$${}_{k+s}V = \frac{v^{1-s}}{1-sq_{x+k}}[b_{k+1}\,(1-s)\,q_{x+k} + {}_{k+1}V\,p_{x+k}].$$

Sin embargo (7.44) muestra que

$$b_{k+1}\,q_{x+k} = ({}_{k}V + \pi_k)(1+i) - {}_{k+1}V\,p_{x+k},$$

también podemos expresar la reserva como

$${}_{k+s}V = \frac{v^{1-s}}{1-sq_{x+k}}[(1-s)({}_{k}V + \pi_k)(1+i) + s\,{}_{k+1}V\,p_{x+k}]. \qquad (7.55)$$

Una simple aproximación a la fórmula es frecuentemente usada en la práctica. Una forma por obtener esta de (7.55) es suponer que i y q_{x+k} son pequeños, tambien que $1+i$, p_{x+k}, v^{1-s} y $1-sq_{x+k}$ pueden ser aproximadamente 1. El resultado es

$${}_{k+s}V \cong (1-s)({}_{k}V + \pi_k) + s\,{}_{k+1}V. \qquad (7.56)$$

Esta expresión es una interpolación lineal entre la reserva inicial ${}_{k}V + \pi_k$ y la reserva terminal ${}_{k+1}V$. Otra forma de ver esta aproximación es como la suma de la reserva terminal interpolada,

$$(1-s)\,{}_{k}V + s\,{}_{k+1}V,$$

y la *prima neta no devengada*, $(1-s)\pi_k$. En general,

(la prima neta no devengada, en cualquier momento del año),

= (es la prima neta para ese año),

× (por la diferencia entre el tiempo transcurrido desde el momento en que fue pagada la prima, y el momento de cálculo).

Por lo tanto, en una base de prima anual, la prima ha sido pagada al final del año asi que al momento s, la prima neta no devengada es $(1-s)\pi_k$. Esta noción de prima neta no devengada, puede ser usada para plantear aproximaciones en donde la frecuencia de pago de primas, es a plazos menores que el anual.

Consideremos un supuesto caso donde la prima es semianual con reclamaciones pagados al final del año póliza. para $0 < s \leq 1/2$, se tiene (denotando como $\pi_k^{(2)}$ la prima anual)

$$\begin{aligned} {}_{k+s}V^{(2)} &= b_{k+1}\, v^{1-s}\, {}_{1-s}q_{x+k+s} \\ &\quad + {}_{k+1}V^{(2)}\, v^{1-s}\, {}_{1-s}p_{x+k+s} - \frac{\pi_k^{(2)}}{2} v^{1/2-s}\, {}_{1/2-s}p_{x+k+s}. \end{aligned} \tag{7.57}$$

Esto muestra, (vease Ejercicio 7.44) que bajo el supuesto de distribución uniforme de muertes, en cada año de edad,(7.57) llega a ser

$$\begin{aligned} {}_{k+s}V^{(2)} &= \frac{v^{1-s}}{1-sq_{x+k}} \Big\{(1-s)\,{}_kV^{(2)}(1+i) + s\,{}_{k+1}V^{(2)}\,p_{x+k} \\ &\quad + \frac{\pi_k^{(2)}}{2}\,[(1+i)(1-s) - s(1+i)^{1/2}\,{}_{1/2}p_{x+k}]\Big\}, \end{aligned} \tag{7.58}$$

y esto puede ser aproximado como

$${}_{k+s}V^{(2)} \cong (1-s)\,{}_kV^{(2)} + s\,{}_{k+1}V^{(2)} + \left(\frac{1}{2}-s\right)\pi_k^{(2)}. \tag{7.59}$$

Aquí en adición a la reserva terminal interpolada, hay una prima neta no devengada igual a una fracción del porcentaje de prima anual, siendo dicha fracción, la diferencia entre el tiempo transcurrido desde que la prima fue pagada (en este caso 1/2) y el momento s.

Para $1/2 < s < 1$, la expresión de la reserva es de la misma forma que (7.52) y por pasos similares a los que conducen a la (7.55) puede ser expresada como

$$\begin{aligned} {}_{k+s}V^{(2)} &= \frac{v^{1-s}}{1-s\,q_{x+k}} \Big\{(1-s)\,{}_kV^{(2)}(1+i) + s\,{}_{k+1}V^{(2)}\,p_{x+k} \\ &\quad + (1-s)(1+i)^{1/2}\frac{\pi_k^{(2)}}{2}[(1+i)^{1/2} + {}_{1/2}p_{x+k}]\Big\}; \end{aligned}$$

esto puede ser aproximado como

$$_{k+s}V^{(2)} \cong (1-s)\,_kV^{(2)} + s\,_{k+1}V^{(2)} + (1-s)\pi_k^{(2)}. \tag{7.60}$$

Esto nuevamente es la reserva terminal interpolada más la prima neta no devengada al momento s.

7.10 Asignación de Pérdidas para el año Póliza

Hemos visto en (7.48) que para cada año póliza la prima neta anual para un seguro de vida puede ser dividido en la prima neta de un seguro anual para cubrir la cantidad neta en riesgo y un depósito a un fondo de ahorro, para la acumulación de la reserva. Es así que prodríamos anticipar que la varianza asociada con un seguro dado, puede ser expresada en términos de la varianza del seguro anual considerado. Este es el caso. Este bi-producto, es un medio flexible para calcular la varianza asociada con el seguro dado.

Para el seguro totalmente discreto introducido en la Sección 7.4, la pérdida $L =_0 L$ es, por (7.19),

$$L = b_{K+1}v^{K+1} - \sum_{h=0}^{K} \pi_h v^h \tag{7.61}$$

Donde K es la esperanza de vida truncada de (x). En la expresión, L es el valor presente de los resultados financieros de estos seguros, cuando las muertes ocurren en el año póliza $k+1$. Ahora veremos como asignar una parte de estos resultados, a cada uno de los primeros $k+1$ años. La base de esta asignación es el segundo análisis de la Sección 7.8 donde la reserva es considerada un fondo de ahorro y los riesgos de la mortalidad en un año dado es considerada como la cantidad neta en riesgo de un seguro temporal a un año. Para estos propósitos, introduciremos la perdida valuada al tiempo h y dependiendo implícitamente de K, asignada al año póliza $h+1$ denominandola

$$\Lambda_h = \begin{cases} 0 & K \leq h-1 \\ vb_{h+1} - (\,_hV + \pi_h) & K = h \\ v\,_{h+1}V - (\,_hV + \pi_h) & K \geq h+1 \end{cases} \tag{7.62}$$

para $h = 0, 1, 2, \cdots$. Note que el primer caso es relativo a los asegurados muertos antes del año $h+1$, el segundo caso a los muertos en el año $h+1$, y el tercer caso, a los sobreviviente al final del año $h+1$.

De (7.44), con h reemplazado por $h+1$, podemos reformular Λ_h como

$$\Lambda_h = \begin{cases} 0 & K \leq h-1 \\ (b_{h+1} - {}_{h+1}V)\, vp_{x+h} = (b_{h+1} - {}_{h+1}V)v - (b_{h+1} - {}_{h+1}V)vq_{+h} & K = h \\ -(b_{h+1} - {}_{h+1}V)\, vq_{x+h} = 0 - (b_{h+1} - {}_{h+1}V)\, vq_{x+h} & K \geq h+1. \end{cases} \tag{7.63}$$

donde $(b_{h+1} - {}_{h+1}V)\, vq_{x+h}$ es la prima para un seguro temporal a un año por la cantidad neta en riesgo al momento $h+1$, vimos que para valores distintos de cero, Λ_h expresa la pérdida asociada con un seguro temporal a un año, nombrandola, el valor presente al tiempo h de beneficios bajo el término de seguros inferiores a la prima natural.

Consecuentemente, por (7.63),

$$E[\Lambda_h] = v(b_{h+1} - {}_{h+1}V)[p_{+h}\, {}_hp_x\, q_{x+h} + (-1)q_{x+h}\, {}_hp_x\, p_{x+h}] = 0. \tag{7.64}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Var[\Lambda_h] = E[\Lambda_h^2] &= v^2(b_{h+1} - {}_{h+1}V)^2[p_{x+h}^2\, {}_hp_x\, q_{x+h} \\ &\quad +(-1)^2\, q_{x+h}^2\, {}_hp_x\, p_{x+h}] \\ &= v^2(b_{h+1} - {}_{h+1}V)^2\, {}_hp_x\, p_{x+h}\, q_{x+h}. \end{aligned} \tag{7.65}$$

Lo siguiente por un razonamiento general de que la pérdida total, puede ser obtenida como la suma sobre el valor presente de las pérdidas asignadas a las pólizas anuales individuales.

$$L = \sum_{h=0}^{\infty} v^h\, \Lambda_h. \tag{7.66}$$

Para propósitos ilustrativos, presentamos una derivación algebraica de (7.66) para notar que

$$\sum_{h=0}^{\infty} v^h\, \Lambda_h = \sum_{h=0}^{K-1} v^h\, \Lambda_h + v^K\, \Lambda_K + \sum_{h=K+1}^{\infty} v^h\, \Lambda_h.$$

En el primer sumando $K \geq h+1$, y en el segundo, $K \leq h-1$, también por (7.62) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{\infty} v^h\, \Lambda_h &= \sum_{h=0}^{K-1}(v^{h+1}\, {}_{h+1}V - v^h\, {}_hV - v^h\, \pi_h) \\ &\quad + v^{K+1}\, b_{K+1} - v^K\, {}_KV - v^K\, \pi_K + 0. \end{aligned}$$

Cancelando términos de $v^j\,{}_jV$, $\quad j = 1,2,3\cdots$ y haciendo ${}_0V = 0$, la expresión se reduce a

$$\sum_{h=0}^{\infty} v^h\,\Lambda_h = v^{K+1}\,b_{K+1} - \sum_{h=0}^{K} v^h\,\pi_h = L.$$

Con la sumatoria empezando en $h = k$, este argumento puede ser utilizado para mostrar que

$$\sum_{h=k}^{\infty} v^h\,\Lambda_h = v^k\,{}_kL - v^k\,{}_kV \qquad k = 0,1,2,\cdots.$$

Resolviendo para ${}_kL$ obtenemos

$$ {}_kL = \sum_{h=0}^{\infty} v^h\,\Lambda_{k+h} + {}_kV \qquad k = 0,1,2,\cdots. \tag{7.67}$$

Utilizando esta expresión para k y $k+j$, tenemos

$$\begin{aligned} {}_kL &= \sum_{h=0}^{j-1} v^h\,\Lambda_{k+h} + v^j\,{}_{k+j}L \\ &\quad +({}_kV - v^j\,{}_{k+j}V) \qquad k = 0,1,\cdots,\ j = 0,1,\cdots. \end{aligned} \tag{7.68}$$

De (7.64) y (7.66), confirmamos que $E(L) = 0$. El siguiente resultado debido a Hattendorf, provee de un medio para calcular la varianza de L. Su significado real es que la variaanza de L puede ser asignada a año pólizas individuales.

Teorema 7.1:

$$a.\ Cov[\Lambda_h, \Lambda_j] = 0 \qquad h \neq j$$

$$b.\ Var[L] = \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h}\,Var[\Lambda_h]$$

Prueba:

De (7.64), $E[\Lambda_h] = 0$. Por lo tanto, $Cov[\Lambda_h, \Lambda_j] = E[\Lambda_h \Lambda_j]$. Veremos que la anterior especulación, es 0. sin pérdida de generalidad, supongamos que $j < h$. entonces, siempre cuando $\Lambda \neq 0$, sabemos que $K \geq h \geq j+1$ de ello resulta que Λ_j tiene un valor constante $v\,{}_{j+1}V - ({}_jV + \pi_j)$. De donde

$$E[\Lambda_h, \Lambda_j] = [v\, _{j+1}V - (\,_jV + \pi_j)]E[\Lambda_h].$$

Pero por (7.64) el lado derecho desaparece.

de (7.66) parte (a), resulta que, con toda covarianza igual a cero, la varianza de la suma, L, es la suma de las varianzas de $v^h\Lambda_h \quad h = 1,2,3...$, lo cual produce la parte (b).

□

La $\Lambda_h \quad h = 1,2,3...$, son variables aleatoria dependientes pero no correlacionadas; lo cual permite a la varianza de L, ser asignada a al año póliza individual.

El teorema 7.1 también nos permite calcular la varianza de $_kL, \quad k = 1,2,...$ [véase (7.19)]. Para estos propósitos, consideremos un seguro emitido a edad $x + k$, una prima inicial de $\pi_0' =_k V + \pi_k$, primas subsecuentes $\pi_h' = \pi_{k+h}$, beneficios $b_h' = b_{k+h}$, reservas $_hV' = {}_{k+h}V$, para $h = 1,2....$, y pérdidas variables L' y Λ_h' para $h = 1,2...$ entonces, por (7.19)

$$\begin{aligned}
_kL &= b_{k+J+1}\, v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi_{k+h}\, v^h \\
&= b_{J+1}'\, v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi_h'\, v^h + {}_kV = L' + {}_kV.
\end{aligned}$$

Donde $_kL$ y L' difieren por una constante $_kV$,

$$Var[_kL] = Var[L'] = \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h}\, Var[\Lambda_h'],$$

y de (7.65),

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h}\, v^2\, (b_{h+1}' - {}_{h+1}V')^2\, {}_hp_{x+h}\, p_{x+k+h}\, q_{x+k+h} \\
&= \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h}\, {}_hp_{x+k}\, [v^k(b_{k+h+1} - {}_{k+h+1}V)^2\, p_{x+k+h}\, q_{x+k+h}]. \qquad (7.69)
\end{aligned}$$

La fórmula (7.69) hace sentir, por que el teorema de Hattendorf usa el concepto de la reserva como un fondo de ahorro y relaciona la varianza de pérdidas para un seguro dado a la varianza de pérdidas en relación a futuros seguros anuales por la cantidad neta en riesgo, esta última varianza es ejemplificada para el año $k+h+1$ por la expresión entre corchetes cuadrados.

Una relación entre $Var[_kL]$ y $Var[_{k+j}L]$, $j=1,2,...$ puede ser establecida ecribiendo (7.69) como

$$\begin{aligned} Var[_kL] &= \sum_{h=0}^{j-1} v^{2h}\,{}_hp_{x+k}\,[v^2\,(b_{k+h+1} - {}_{k+h+1}V)^2\,p_{x+k+h}\,q_{x+k+h}] \\ &\quad + \sum_{h=j}^{\infty} v^{2h}\,{}_hp_{x+k}\,[v^2\,(b_{k+h+1} - {}_{k+h+1}V)^2\,p_{x+k+h}\,q_{x+k+h}]. \end{aligned}$$

Ahora en la segunda sumatoria, reeplazamos h por $l+j$, lo cual transforma esto en

$$v^{2j}\,{}_jp_{x+k}\sum_{l=0}^{\infty} v^{2l}\,{}_lp_{x+k+j}\,[v^2\,(b_{k+j+l+1} - {}_{k+j+l+1}V)^2\,p_{x+k+j+l}\,q_{x+k+j+l}].$$

Comparando esto con (7.69) muestra que esta sumatoria es $Var[_{k+j}L]$ así tenemos que

$$\begin{aligned} Var[_kL] &= \sum_{h=0}^{j-1} v^{2h}\,{}_hp_{x+k}\,[v^2\,(b_{k+h+1} - {}_{k+h+1}V)^2\,p_{x+k+h}\,q_{x+k+h}] \\ &\quad + v^{2j}\,{}_jp_{x+k}\,Var[_{k+j}L]. \end{aligned} \qquad (7.70)$$

Justamente como en la expresión para $Var[L]$ en el Teorema 7.1 fue derivada de $L=\sum_{h=0}^{\infty} v^h\Lambda_h$, la expresión (7.69) y (7.70) para $Var[_kL]$ puede ser derivada directamente utilizando (7.67) y (7.68)

Los siguientes dos ejemplos ilustran la aplicación del Teorema de Hattendorf, 7.1.

Ejemplo 7.11: Considere el asegurado del Ejemplo 7.6 quien ha sobrevivido hasta el segundo año póliza. Para este asegurado evalúe

a. $Var[_2L]$, directo

b. $Var[_2L]$, mediante el teorema de Hattendorf

c. $Var[_3L]$

d. $Var[_4L]$.

Solución:

a. Para un cálculo directo, necesitamos una tabla de valores de $_2L$.

Resultado j	$_2L = \begin{cases} 1{,}000\, v^{j+1} - 6.55692\, \ddot{a}_{\overline{j+1}\rceil},\ j = 0,1,2 \\ 0 - 6.55692\, \ddot{a}_{\overline{3}\rceil},\ j = 3,4,\cdots \end{cases}$	Resultado de la Probabilidad Condicional $_jp_{52}\, q_{52+j} = d_{52+j}/l_{52}$, $j = 0,1,2$; $_3p_{52} = l_{55}/l_{52}$, $j = 3,4,\cdots$
0	936.84	0.0069724
1	877.25	0.0075227
2	821.04	0.0081170
≥ 3	−18.58	0.9773879

Entonces $E[_2L] = 1.64$, en concordancia con el valor mostrado en el Ejemplo 7.6 y

$$
\begin{aligned}
Var[_2L] &= E[_2L^2] - (E[_2L])^2 \\
&= 17{,}717.82 - (1.64)^2 \\
&= 17{,}715.1.
\end{aligned}
$$

b. Para aplicar el Teorema de Hattendorf, podemos usar la reserva del Ejemplo 7.6 para calcular la varianza de la pérdida asociada con el seguro a un año.

h	q_{52+h}	$v^2(1{,}000 - 1{,}000_{2+h+1}V_{\overset{1}{50}:\overline{5}\rceil})^2\, p_{52+h}\, q_{52+h}$
0	0.0069724	6,140.842
1	0.0075755	6,674.910
2	0.0082364	7,269.991

Entonces de (7.69),

$$
\begin{aligned}
Var[_2L] = {} & 6140.842 + (1.06)^{-2}(6674.910)\, p_{52} \\
& + (1.06)^{-4}(7269.991)\, _2p_{52} = 17{,}715.1,
\end{aligned}
$$

lo que concuerda con el valor encontrado por cálculo directo en la parte (a).

Note que en el método directo fue necesario considerar la ganancia en el evento de supervivencia a edad 55; pero por el teorema de Hattendorf, necesitamos considerar sólo la pérdida asociada con el seguro a término de un año por la cantidad neta en riesgo en los años pólizas remanentes. Después, la cantidad neta en riesgo es 0 y el correspondiente término en (7.69) desaparece.

También note que la desviación estandar, $\sqrt{17,751.1} = 133.1$, para una póliza es sobre 80 veces la reserva, $E[{}_2L] = 1.64$.

Similarmente, utilizamos (7.69) para calcular

c. $Var[{}_3L] = 6674.910 + (1.06)^{-2}(7269.991)p_{53} = 13096.2$

d. $Var[{}_4L] = 7269.991$, o despues de redondear, 7270.0.

∇

Ejemplo 7.12

Considere un portafolio de 1,500 pólizas del tipo descrito en el Ejejmplo 7.6 y discutido en el Ejemplo 7.11. Suponga que todas la pólizas tienen prima anual y de pago inmediato. Adicionalmente suponga que 750 pólizas son de duración 2,500 de duración 3 y 250 de duración 4, y que las pólizas en cada grupo son adicionalmente divididas entre aquéllas que de monto 1,000 y las de monto 3,000.

a. Calcule la reserva agregada.

b. Calcule la varianza de las pérdidas prospectivas sobre los periodos remanentes de coberturas de las pólizas, suponiendo que tales pérdidas son independientes. También, calcule el monto tal que, en base a una distribución normal, daría al asegurador una probabilidad de 0.95 de sufragar las obligaciones futuras para este conjunto de negocios.

c. Calcule la varianza de las pérdidas asociadas con seguros temporales a un año por la cantidad neta en riesgo bajo las pólizas y suplementos para la reserva agregada la cual, en base a una distribución normal, dando al asegurador, un 95% de confianza de sufragar las obligaciones para este conjunto de negocios para el primer año de obligaciones.

d. Donde (a) y (c) tiene cada una de las pólizas, un incremento de los siguientes 100 números.

Solución:

a) Sea Z la suma de las perdidas prospectivas en las 1,500 pólizas.

Use el resultado del Ejemplo 7.6, tendremos la reserva agregada

$$\begin{aligned} E[Z] &= [375(1) + 375(3)](1.64) + [250(1) + 250(3)](1.73) \\ &\quad +[125(1) + 125(3)](1.21) \\ &= 4795. \end{aligned}$$

b. Del Ejemplo 7.11, tenemos

$$\begin{aligned} Var[Z] &= [375(1)+375(9)](17,715.1) \\ &\quad +[250(1)+520(9)](13,096.2) \\ &\quad +[125(1)+125(9)](7270.0) \\ &= (1.0825962)\,10^8 \end{aligned}$$

y $\sigma_Z = 10,404.8$.

Entonces si

$$0.05 = Pr[Z > c] = Pr\left[\frac{Z - 4795.0}{10,404.8} > \frac{c - 4795.0}{10,404.8}\right],$$

la distribución normal es implicita

$$\frac{c - 4795.0}{10,404.8} = 1.645,$$

o

$$c = 21,911,$$

lo cúal es 4.6 veces de la reserva agregada, $E[Z]$.

c. Aquí tenemos el informe de los siguientes riesgos anuales. Para cada póliza, consideremos la variable igual a la perdida asociada a seguros temporales a un año por la cantidad neta en riesgo. Dejando Z_1 que la suma de los valores es 0, de aquí que $E[Z_1] = 0$.

De la tabla en la parte (b) del Ejemplo 7.11 podemos obtener la varianza de las perdidas en consideración al seguro temporal a un año y de aquí

$$\begin{aligned} Var[Z_1] &= [375(1)+375(9)](6140.8)+[250(1)+250(9)](6674.9) \\ &\quad +[125(1)+125(9)](7270.0) \\ &= (4.880275)\,10^7 \end{aligned}$$

y

$$\sigma_{Z_1} = 6985.9.$$

Si c_1 es el suplemento requerido de la reserva agregada, entonces

$$0.05 = Pr[Z_1 > c_1] = Pr\left[\frac{Z_1 - 0}{6985.9} > \frac{c_1 - 0}{6985.9}\right],$$

y determinamos

$$c_1 = (1.645)(6985.9) = 11,492,$$

lo cúal es 2.4 veces la reserva agregada, 4,795.

d. En este caso, $E[Z] = 479,500$ y $Var[Z] = (1.0825962)\,10^{10}$. La cantidad c requiere de proporcionar la probabilidad de 0.95 aquella obligación conveniente que queremos es

$$479,500 + 1.645\sqrt{1.0825962}\,10^5 = 650,659,$$

lo cúal es 1.36 veces la reserva agregada, $E[Z]$.

Tambien $Var[Z_1]$ es ahora $(4.880275)\,10^9$. La cantidad c_1 es el suplemento de la reserva agregada que requiere tener 0.95 de probabilidad para conveniencia, para las obligaciónes de la póliza de este seguro, es $1.645\sqrt{4.880275}\,10^{4.5} = 114,918$, o 24% para la reserva agregada del siguiente año.

∇

7.11 Ecuaciones Diferenciables para Reservas Totalmente Continuas

Los resultados de aquí son paralelos a los de la Sección 7.8 para el caso discreto, y serán desarrollados más brevemente. El seguro general para (x), esta ahora en una base continua con monto asegurado b_t pagadero si ocurre la muerte al tiempo t, y con una prima anual π_t al momento t, $t \geq 0$. La especificación anterior implica que las primas $\pi_t\,dt$ son pagaderas en un intervalo de tiempo $(t, t+dt)$. La reserva ${}_t\bar{V}$ al momento t esta dada por la fórmula

$${}_t\bar{V} = \int_0^\infty b_{t+s}\, v^s\, {}_sp_{x+t}\, \mu_{x+t+s}\, ds - \int_0^\infty \pi_{t+s}\, v^s\, {}_sp_{x+t}\, ds. \tag{7.71}$$

Para simplificar el cálculo, definimos $u = t + s$ y combinamos las dos integrales

$${}_t\bar{V} = \int_t^\infty (b_u\, \mu_{x+u} - \pi_u) e^{\delta(t-u)}\, {}_{u-t}p_{x+t}\, du. \tag{7.72}$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\,{}_{u-t}p_{x+t} = \frac{d}{dt}\exp\left[-\int_{x+t}^{x+u}\mu_y\,dy\right] = \mu_{x+t}\,{}_{u-t}p_{x+t},$$

la derivada de ${}_t\bar{V}$ es una combinación de tres términos

$$\frac{d\,{}_t\bar{V}}{dt} = -(b_t\,\mu_{x+t} - \pi_t) + \delta I + \mu_{x+t} I$$

donde I denota la integral en (7.72). Pero $I = {}_t\bar{V}$, de donde

$$\frac{d\,{}_t\bar{V}}{dt} = \pi_t + (\delta + \mu_{x+t})\,{}_t\bar{V} - b_t\,\mu_{x+t}. \tag{7.73}$$

Aquí la razón de cambio de la reserva está dada por tres componentes: La razón de prima, la razón de momentos de la reserva por interes y sobrevivientes, y la razón de beneficios en curso, $b_t + \mu_{x+t}$. La fórmula correspondiente a (7.46) es

$$\pi_t + {}_t\bar{V}\delta + {}_t\bar{V}\,\mu_{x+t} = b_t\,\mu_{x+t} + \frac{d\,{}_t\bar{V}}{dt}. \tag{7.74}$$

Esto balancea la razón de ingresos con tasa de beneficios en curso y la tasa de incremento a la reserva.

Si la reserva es tratada como un fondo de ahorro disponible para el conjunto de beneficios, tenemos

$$\pi + {}_t\bar{V}\delta = (b_t - {}_t\bar{V})\mu_{x+t} + \frac{d_t\,\bar{V}}{dt}. \tag{7.75}$$

Aquí la razón de ingreso esta dada por la prima y el interés de la reserva, un balance con los beneficios en curso $(b_t - {}_t\bar{V})\,\mu_{x+t}$, basada en la cantidad neta en riesgo y la tasa de incremento de la reserva.

7.12 Fórmulas de Reservas en Términos de Valores Conmutados

En la Sección previa, hemos expresado formulas prospectivas para la reserva en términos del valor presente actuarial de beneficios futuros a las futuras primas netas. La formula retrospectiva, ha sido derivada en términos del valor actuarial acumulado de primas pasadas y el costo acumulado de beneficios pasados. En los Capitulos 4 y 5, son dadas expresiones en términos de valores conmutados.

Consecuentemente, es facíl escribir fórmulas de reserva, en terminos de valores conmutados, especialmente si, por simplicidad, la prima es indicada por simbolos más apropiados a su expresión en valores conmutados. Esto esta dado por en la tabla 7.3 para reservas con una base semicontinua. Formulas análogas pueden ser escritas para el caso continuo y el caso discreto.

Tabla 7.3 Resrvas de Primas Netas Semicontinuas; Edad de Emisión x; Duración k; Monto Unitario

Tabla 7.3

		Numerador (Denominador es siempre D_{x+k})		
Plan	Notación de Reserva	Formula Prospectiva		Formula Retrospectiva
Segiro de Vida Entera	${}_tV(\bar{A}_x)$	$\bar{M}_{x+k} - P(\bar{A}_x) N_{x+k}$		$P(\bar{A}_x)(N_x - N_{x+k}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+k})$
Seguro a Plazos de n Años	${}_kV(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil})$	$\bar{M}_{x+k} - \bar{M}_{x+n} - P(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil})(N_{x+k} - N_{x+n})$		$P(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil})(N_x - N_{x+k}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+k})$
Seguro Dotal a n Años	${}_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})$	$\bar{M}_{x+k} - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n} - P(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})(N_{x+k} - N_{x+n})$		$P(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})(N_x - N_{x+k}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+k})$
Seguro de Vida Entera con h Años de Pago	${}^{h}_{k}V(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})$	$\bar{M}_{x+k} - {}_hP(\bar{A}_x)(N_{x+k} - N_{x+h})$,	$k < h$	${}_hP(\bar{A}_x)(N_x - N_{x+k}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+k})$ $k < h$
		$\bar{M}_{x+k}$	$k \geq h$	(utilice la formula prospectiva para $k \geq h$)
Seguro Dotal a n Años con h Años de Pago	${}^{h}_{k}V(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})$	$\bar{M}_{x+k} - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n} - {}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})(N_{x+k} - N_{x+h})$	$k < h$	${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil})(N_x - N_{x+k}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+k})$ $k < h$
		$\bar{M}_{x+k} - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}$	$h \leq k < n$	(utilice la formula prospectiva para $h \leq k < h$)
Dotación Pura a n Años	${}_kV_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}$	$D_{x+n} - \mathrm{P}_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}(N_{x+k} - N_{x+n})$		$\mathrm{P}_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}(N_x - N_{x+k})$

Ejemplo 7.13:

a. Un seguro decreciente temporal es emitido para una persona de edad 45, para el cúal el beneficio pagado en forma inmediata a la muerte es de 100,000 en el primer año, despues decrece por 5,000 por año hasta su expiración al final de 20 años. En base a la tabla de vida ilustrativa, con interes 6% calcule la prima neta anual nivelada pagadera a 20 años, y la reserva de primas al final del primero, segundo y tercer año.

b. Repita el ejercicio (a) , con primas pagables a 15 años.

Solución:

a. La prima neta nivelada esta dada por

$$
\begin{aligned}
\frac{100,000\,\bar{M}_{45} - 5,000(\bar{R}_{46} - \bar{R}_{66})}{N_{45} - N_{65}} &= 5,000\frac{i}{\delta}\frac{20M_{45} - (R_{46} - R_{66})}{N_{45} - N_{65}} \\
&= 391.577.
\end{aligned}
$$

Mediante la fórmula de acumulación de reservas, de Fackler (vea Ejercicio 7.19), la reserva al final del primer año es

$$391.577\frac{D_{45}}{D_{46}} - 100,000\frac{i}{\delta}\frac{C_{45}}{D_{46}} = 3.551;$$

al final del segundo año es

$$(3.551 + 391.577)\frac{D_{46}}{D_{47}} - 95,000\frac{i}{\delta}\frac{C_{46}}{D_{47}} = -3.199;$$

al final del tercer año es

$$(-3.199 + 391.577)\frac{D_{47}}{D_{48}} - 90,000\frac{i}{\delta}\frac{C_{47}}{D_{48}} = -20.473.$$

La reserva se hace negativa hasta el final del término del seguro.

b. La prima neta es ahora

$$5,000\frac{i}{\delta}\frac{20M_{45} - (R_{46} - R_{66})}{N_{45} - N_{60}} = 455.221$$

y la reserva encontrada como en (a), es ahora 71,289, 136,664 y 196,255, al final del primero, segundo y tercer año respectivamente. La reserva ahora permanece positiva hasta el termino del contrato.

∇

La reserva negativa de prima neta ocurre cuando el valor presente actuarial de beneficios futuros, es menor que el de las futuras primas netas. Tal situación podria inducir al asegurado a terminar el seguro y dejar al asegurador cargando el déficit. Como hemos visto, en el Ejemplo 7.13, la reserva negativa, puede ocurrir para un seguro decreciente a término con primas pagables para un plazo limitado. Acortando el periodo de pago de primas, la reserva puede ser incrementada a niveles no negativos. Y si se considera en el método retrospectivo, se puede ver que la reserva negativa ocurre cuando el valor actuarial acumulado de primas pasadas, es menor que el costo acumulado de beneficios pasados. Acortando el plazo de pago de primas, aumenta la prima neta, puede mantenerse la prima acumulada por encima del costo acumulado de beneficios.

7.13 Notas y Referencias

El concepto de pérdida y el principio equivalente usando el Capítulo 6 para definir la prima neta, ha sido seguido en este capítulo , por el concepto de pérdida prospectiva y la definición de reserva con el valor esperado de pérdida prospectiva. Consecuentemente, la teoría y fórmulas en las secciones anteriores de este capítulo, son exclusivamente relacionadas a los patrones establecidos para primas en la correspondiente sección del Capítulo 6. Una variedad de fórmulas de reserva, en particular, la fórmula retrospectiva, que involucra el concepto de valor acumulado de costo de beneficios pasados, ramifica la teoría. También las relaciones desarrolladas para reservas basadas en primas ciertas fraccionadas y primas prorrateadas, una referencia posterior a la existencia del documento de Scher (1974). Las fórmulas recursivas para reservas completamente discretas y ecuaciones diferenciables totalmente continuas de reservas, suministran la penetración basica del termino Longitud del Seguro y el proceso de anualidades. En particular, una de las formulas recursivas es aplicar el desarrollo del teorema de Hattendorf (1868) [por referencia vea a Steffensen (1929), Hickman (1964), Gerber (1976)]. Esta fórmula disriguye la varianza de la perdida separándola de la póliza anual. Otra aplicación es hacia la formulación del intervalo de duración de reservas fraccionadas, el cúal se discutira para el caso discreto.

7.14 Ejercicios

Sección 7.2

7.1. Para un seguro dotal a n años expedido para una base totalmente continua para una persona de edad (x) , defina ${}_tL$, la pérdida prospectiva despues del año t. Confirme que

$$Var[{}_tL] = \frac{{}^2\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{A}^2_{x+t:\overline{n-t|}}}{(\delta \bar{a}_{x:\overline{n|}})^2}.$$

7.2. La pérdida prospectiva, despues del año t, para una prima continua de una renta vitalicea de un temporal de vida de 1 peso anual por una persona de edad (x), esta dada por

$${}_tL = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{U|}} & 0 \leq U < n-t \\ \bar{a}_{\overline{n-t|}} & U \geq n-t. \end{cases}$$

Calcule $E[{}_tL]$ y $Var[{}_tL]$.

7.3. Escriba las fórmulas prospectivas para

a. ${}^{20}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{35:\overline{30|}})$

b. La reserva al final del año 5 para un seguro a 10 años para una persona de edad (45) con base en una prima única.

Sección 7.3

7.4. **Escriba 4 fórmulas para** $^{20}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{40})$.

7.5. **Escriba 7 fórmulas para** $_{10}\bar{V}(\bar{A}_{40:\overline{20}|})$.

7.6. **De la fórmula retrospectiva para** $^{30}_{20}\bar{V}({}_{30|}\bar{a}_{35})$.

7.7. **Demuestre que para** $0 < t \leq m$,

a. $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{m+n}|}) = \bar{P}(\bar{A}^{\;1}_{x:\overline{m}|}) + \bar{P}_{x:\overline{m}|}^{\;\;1}\,{}_m\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{m+n}|})$

b. $_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{m+n}|}) = {}_t\bar{V}(\bar{A}^{\;1}_{x:\overline{m}|}) + {}_t\bar{V}_{\underset{x:\overline{m}|}{1}}\,{}_m\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{m+n}|})$

y de una interpretación oral.

7.8 **El estado que se fórmula en la Sección 7.3 nos lleva a la ecuación que requerimos y de una interpretación oral**

$$^{20}_{10}\bar{V}(\bar{A}_{30}) = \bar{A}^{\;1}_{40:\overline{5}|} + {}_5E_{40}\,{}^{20}_{15}\bar{V}(\bar{A}_{30}) - {}_{20}\bar{P}(\bar{A}_{30})\,\bar{a}_{40:\overline{5}|}$$

Sección 7.4

7.9 Escriba 4 fórmulas para $^{20}_{10}V_{40}$.

7.10. Escriba 7 fórmulas para $_{10}V_{40:\overline{20}|}$.

7.11. Demuestre que para $0 < k \leq m$,

$$_kV_{x:\overline{m+n}|} = {}_kV^{\;1}_{x:\overline{m}|} + {}_kV_{x:\overline{m}|}^{\;\;1}\,{}_mV_{x:\overline{m+n}|}.$$

7.12. Si $k < n/2$, $_kV_{x:\overline{n}|} = 1/6$ y $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{x+2k:\overline{n-2k}|} = 2\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$, **calcule** $_kV_{x+k:\overline{n-k}|}$.

Sección 7.5

7.13. En base a la ilustración de la **Tabla de Vida con interés al 6% calcule los valores para la reserva** en la siguiente tabla. (vea el **Ejercicio 6.7**)

Totalmente Continuas	Semicontinuas	Totalmente Discreta
$_{10}\bar{V}(\bar{A}_{35:\overline{30}|})$	$_{10}V(\bar{A}_{35:\overline{30}|})$	$_{10}V_{35:\overline{30}|}$
$_{10}\bar{V}(\bar{A}_{35})$	$_{10}V(\bar{A}_{35})$	$_{10}V_{35}$
$_{10}\bar{V}(\bar{A}^{\;1}_{35:\overline{30}|})$	$_{10}V(\bar{A}^{\;1}_{35:\overline{30}|})$	$_{10}V^{\;1}_{35:\overline{30}|}$

7.14. **Bajo la suposición de la distribución uniforme de muertes en cada año de edad, ¿ Cuáles de los siguientes es correcto?**

a. ${}_kV(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}\,{}_kV_{x:\overline{n}|}$

b. ${}_kV(\bar{A}_x) = \frac{i}{\delta}\,{}_kV_x$

c. ${}_kV(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{i}{\delta}\,{}_kV^{\,1}_{x:\overline{n}|}$.

Sección 7.6

7.15. **Demuestre que bajo la suposición de una distribución uniforme de muerte en cada año de edad,**

$$\frac{{}_5V^{(4)}_{30:\overline{20}|} - {}_5V_{30:\overline{20}|}}{{}^{20}_{\ 5}V^{(4)}_{30} - {}^{20}_{\ 5}V_{30}} = \frac{A_{30:\overline{20}|}}{A_{30}}.$$

(La suposición es suficiente pero no necesaria.)

7.16. ¿ Cuál es el seguimiento correcto de las fórmulas para ${}_{15}V^{(m)}_{40}$?

a. $[P^{(m)}_{55} - P^{(m)}_{40}]\,\ddot{a}^{(m)}_{55}$

b. $\left[1 - \frac{P^{(m)}_{40}}{P^{(m)}_{55}}\right] A_{55}$

c. $P^{(m)}_{40}\,\ddot{s}^{(m)}_{40:\overline{15}|} - {}_{15}k_{40}$

d. $1 - \frac{\ddot{a}^{(m)}_{55}}{\ddot{a}^{(m)}_{40}}$.

Sección 7.7

7.17. ¿Cúal es el seguimiento correcto de las fórmulas para ${}_{15}V^{\{4\}}(\bar{A}_{40})$?

a. ${}_{15}\bar{V}(\bar{A}_{40})$

b. $[P^{\{4\}}(\bar{A}_{55}) - P^{\{4\}}(\bar{A}_{40})]\,\ddot{a}^{\{4\}}_{55}$

c. $[\bar{P}(\bar{A}_{55}) - \bar{P}(\bar{A}_{40})]\,\bar{a}_{55}$

d. $\left[1 - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{40})}{\bar{P}(\bar{A}_{55})}\right]\bar{A}_{55}$

e. $1 - \frac{\bar{a}_{55}}{\bar{a}_{40}}$

f. $\bar{P}(\bar{A}_{40})\bar{s}_{40:\overline{15}|} - {}_{15}\bar{k}_{40}$.

7.18. Demuestre que

a. $P^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}_nP^{\{m\}}(\bar{A}_x) + (1 - \bar{A}_{x+n})P^{\{m\}}_{\ x:\overline{n}|}{}^{\!\!1}$

b. ${}_kV^{\{m\}}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = {}^{n}_{k}V^{\{m\}}(\bar{A}_x) + (1 - \bar{A}_{x+n})\,{}_kV^{\{m\}}_{\ x:\overline{n}|}{}^{\!\!1}$.

Explique.

Sección 7.8

7.19. Demuestre que (7.44), con h remplazada por $h+1$, podemos reacomodar a

$$_{h+1}V = (_hV + \pi_h)\frac{1+i}{p_{x+h}} - b_{h+1}\frac{q_{x+h}}{p_{x+h}}.$$

Explique. (Esto es llamado *la reserva de Fackler*) fórmula acumulada, seguida de American Actuary, David Parks Fackler.)

7.20. Para un seguro de vida entera de 1 expedido a edad (x), prueba que,

a. $_kV_x = \sum_{h=0}^{k-1} \frac{P_x - v\, q_{x+h}}{_{k-h}E_{x+h}}$

b. $_kV_x = \sum_{h=0}^{k-1}[P_x - v\, q_{x+h}(1 - {_{h+1}V_x})](1+i)^{k-h}.$

De su interpretación oral de las fórmulas.

7.21. Si $b_{h+1} = {_{h+1}V}$, $_0V = 0$ y $\pi_h = \pi$, $h = 0, 1, \cdots, k-1$, pruebe que $_kV = \pi \ddot{s}_{\overline{k}|}$. [Hint: utilice (7.48).]

7.22. Demuestre que si π es la prima neta anual nivelada para n años, al final del seguro con $b_h = \ddot{a}_{\overline{n-h}|}$, $h = 1, 2, \cdots, n$, $_0V = {_nV} = 0$, entonces

a. $\pi = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

b. $_kV = \ddot{a}_{\overline{n-k}|} - \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} - \pi\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}.$

[Hint: Esto podemos demostrarlo directamente, o usando (7.45)]

Sección 7.9

7.23. Con lo emitido en (7.52), establecemos la ecuación

$$_sp_{x+k}\ {_{k+s}V} + v^{1-s}\ {_sq_{x+k}}\, b_{k+1} = (1+i)^s ({_kV} + \pi_k) \qquad 0 < s < 1.$$

7.24. Interprete las fórmulas,

a.

$$\begin{aligned} {_{k+(h/m)+r}V^{(m)}} &\cong \left(1 - \frac{h}{m} - r\right) {_kV^{(m)}} \\ &+ \left(\frac{h}{m} + r\right) {_{k+1}V^{(m)}} + \left(\frac{1}{m} - r\right) P^{(m)} \end{aligned}$$

b.

$$
{}_{k+(h/m)+r}V^{\{m\}} \cong \left(1 - \frac{h}{m} - r\right) {}_{k}V^{\{m\}}
$$

$$
+ \left(\frac{h}{m} + r\right) {}_{k+1}V^{\{m\}} + \left(\frac{1}{m} - r\right) P^{\{m\}}
$$

donde $0 < r < 1/m$.

7.25. Para cada una de las reservas siguientes, desarrollar similarmente las fórmulas (7.56), (7.59) y (7.60).

a. ${}_{20\frac{1}{2}}V(\bar{A}_{x:\overline{40}|})$ b. ${}_{20\frac{1}{2}}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{40}|})$
c. ${}_{20\frac{1}{2}}V^{(2)}(\bar{A}_{x:\overline{40}|})$ d. ${}_{20\frac{2}{3}}V^{(2)}(\bar{A}_{x:\overline{40}|})$
e. ${}_{20\frac{1}{2}}V^{\{2\}}(\bar{A}_{x:\overline{40}|})$ f. ${}_{20\frac{2}{3}}V^{\{2\}}(\bar{A}_{x:\overline{40}|})$

7.26. En base a la ilustración de la Tabla de Vida con un interés del 6%, aproxime

$$
{}_{10\frac{1}{6}}V^{\{4\}}(\bar{A}_{25}).
$$

7.27. Demuestre que en (7.55) podemos escribirla como

$$
{}_{k+s}V = \frac{1-s}{1-sq_{x+k}}({}_kV + \pi_k)(1+i)^s + \left(1 - \frac{1-s}{1-sq_{x+k}}\right) {}_{k+1}V\, v^{1-s}.
$$

Sección 7.10

7.28 Para un seguro de vida entera totalmente discreto de cantidad 1 emitido a edad (x) con primas pagables por vida, demuestre que

a. $Var[L] = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{\ddot{a}_{x+h+1}}{\ddot{a}_x}\right)^2 v^{2(h+1)}\, {}_hp_x\, p_{x+h}\, q_{x+h}$

b. $Var[{}_kL] = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{\ddot{a}_{x+k+h+1}}{\ddot{a}_x}\right)^2 v^{2(h+1)}\, {}_hp_{x+k}\, p_{x+k+h}\, q_{x+k+h}.$

7.29. Para un seguro de vida anual 1 , pagadero anualmente mientras que (x) sobrevive, Considere la pérdida de vida entera

$$
L = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_x \qquad K = 0, 1, 2, \cdots
$$

y la pérdida Λ_h valuada al momento h que es asignada a la anualidad en el año h, llamada como

$$\Lambda_h = \begin{cases} 0 & K \leq h-1 \\ -(\ddot{a}_{x+h} - 1) = -v p_{x+h}\, \ddot{a}_{x+h+1} & K = h \\ v\ddot{a}_{x+h+1} - (\ddot{a}_{x+h} - 1) = v q_{x+h}\, \ddot{a}_{x+h+1} & K \geq h+1. \end{cases}$$

a. Interprete las fórmulas para Λ_h

b. Demuestre que

$$(i) \qquad L = \sum_{h=0}^{\infty} v^h \Lambda_h$$

$$(ii) \qquad E[\Lambda_h] = 0$$

$$(iii) \qquad Var[\Lambda_h] = v^2 (\ddot{a}_{x+h+1})^2\, {}_hp_x\, p_{x+h}\, q_{x+h}.$$

7.30. a. Para el seguro del Ejemplo 7.10, establezca que

$$Var[L] = \sum_{h=0}^{n-1} v^{2(h+1)}\, {}_hp_x\, p_{x+h}\, q_{x+h}.$$

b. Si $\delta = 0.05$, $n = 20$ y $\mu_{x+t} = 0.01$, $t \geq 0$, calcule $Var[L]$ para el seguro en (a).

7.31. Una póliza de un seguro de vida pagadero a 20 años con monto unitario emitido en base completamente discreta de una persona de edad 25, tomando como base la Tabla de Vida con un interés del 6% . Calcule

a. ${}_{20}P_{25}$ b. ${}^{20}_{19}V_{25}$ c. ${}^{20}_{20}V_{25}$

d. $Var[{}_{20}L]$ e. $Var[{}_{18}L]$, Use el Teorema 7.1.

Sección 7.11

7.32. Interpreta las ecuaciones diferenciables:

a. $\frac{d}{dispdt}\, {}_t\bar{V} = \pi_t + (\delta + \mu_{x+t})\, {}_t\bar{V} - b_t\, \mu_{x+t}$

b. $\frac{d}{dt}\, {}_t\bar{V} = \pi_t + \delta\, {}_t\bar{V} - (b_t - {}_t\bar{V})\, \mu_{x+t}.$

7.33. Si $b_t = {}_t\bar{V}$, ${}_0\bar{V} = 0$, y $\pi_t = \pi$, $t \geq 0$, demuestre que ${}_t\bar{V} = \pi \bar{s}_{\overline{t}|}$.

7.34. Evalue $\frac{d}{dt}\{[1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)]\,{}_tp_x\}$.

Sección 7.12

7.35. Un seguro terminal decreciente a la edad 65 con pago inmediato de las reclamaciones de muerte expedido en (30) y con los siguientes beneficios.

Para Muertes Entre Edades:	30-50	50-55	55-60	60-65
Beneficio	100,000	90,000	80,000	60,000

Escriba las formulas, en términos de funciones de valores conmutados para

a. Adoptación de la prima neta anual pagable semestralmente

b. La reserva es emitida en 30 años, si la prima neta es como en la parte (a).

7.36. La prima única del seguro contratado, expedido (35) proporciona 100,000 en el caso que el asegurado sobreviva a la edad 65, y devuelva (al final del año de muerte) la prima neta única sin interés si el asegurado, llega antes de la edad 65. Si la prima neta única es denotada por S , escriba la expresión, en términos de función de valores conmutados para

a. S

b. La fórmula prospectiva para la reserva expedida k años

c. La fórmula retrospectiva para la reserva expedida k años

7.37. En terminos de $P = {}_{20}P^{(12)}(\bar{A}_{30:\overline{35}|})$ en función de valores conmutados, escriba la fórmula prospectiva y retrospectiva para lo siguiente:

a. ${}^{20}_{10}V^{(12)}(\bar{A}_{30:\overline{35}|})$

b. ${}^{20}_{25}V^{(12)}(\bar{A}_{30:\overline{35}|})$.

Miscelláneos

7.38. Calcule el valor de $P^{\;\,1}_{x:\overline{n}|}$ si ${}_nV_x = 0.080$, $P_x = 0.024$ y $P_{x:\overline{n}|}^{\;\;\;1} = 0.2$.

7.39. Si ${}_{10}V_{35} = 0.150$ y ${}_{20}V_{35} = 0.354$, calcule ${}_{10}V_{45}$.

7.40. Un seguro de vida entera expedido a (25) paga un único beneficio al final del año de muerte. Primas pagables anualmente a edad 65. La prima neta para los primeros 10 años es P_{25} seguida para un incremento de la prima anual nivelada para los proximos 30 años.

Exprese en función de valores conmutados lo siguiente:

a. La prima neta anual pagadera a edad 35 completo a 64.

b. La reserva al final del decimo-año.

c. La cantidad, B, bajo la siguiente opción: En el final del decimo año el poseedor de la póliza puede continuar con la prima neta única P_{25} a edad 65 en devolución para reducir el beneficio de muerte de B, para despues de muerto a edad 35.

d. La reserva al final de 20 años, si la opción en (c) es seleccionada.

7.41. Utilice (7.73) y escriba la expresión para

a. $\frac{d}{dt}({}_tp_x\,{}_t\bar{V})$ b. $\frac{d}{dt}(v^t\,{}_t\bar{V})$ c. $\frac{d}{dt}(v^t\,{}_tp_x\,{}_t\bar{V})$

e interprete los resultados.

7.42. Demuestre que la formula equivalente a (7.52) infiere del supuesto de Baducci para mortalidad entre los años de edad.

$$_{k+s}V = v^{1-s}[(1-s)({}_kV + \pi_k)(1+i) + s\,{}_{k+1}V].$$

7.43. Suponiendo $\delta = 0.05$, $q_x = 0.05$ y una distribución uniforme de muerte en los años de edad, calcule

a. $(\bar{I}\bar{A})^{\,1}_{x:\overline{1|}}$ b. $_{1/2}V(\bar{I}\bar{A})^{\,1}_{x:\overline{1|}}$.

7.44. * Usando el supuesto de la distribución uniforme de mortalidad en los años de edad, y el seguimiento del crecimiento de las reservas en caso verdadero de la prima semestral,

$$\left[{}_kV^{(2)} + \frac{\pi_k^{(2)}}{2}\right](1+i) + \frac{\pi_k^{(2)}}{2}\,{}_{1/2}p_{x+k}\,(1+i)^{1/2} = p_{x+k}\,{}_{k+1}V^{(2)} + q_{x+k}\,b_{k+1},$$

obtenga (7.58) de (7.57)

7.45. * Pruebe que

$$\int_o^\infty (v^t - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{t|}})^2\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = \int_o^\infty [1 - {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)]^2\,v^{2t}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

e interprete el resultado.

7.46. * Si

$$
{}_{k,m}L = \begin{cases} b_{k+J+1}\, v^{J+1} - {}_kV - \sum_{h=0}^{J} \pi_{k+h}\, v^h & 0 \le J \le m-1 \\ {}_{k,m}V\, v^m - {}_kV - \sum_{h=0}^{m-1} \pi_{k+h}\, v^h & J \ge m, \end{cases}
$$

y, para $h = 0, 1, \cdots, m-1$,

$$
\Lambda_{k+h} = \begin{cases} 0 & J \le h-1 \\ v\, b_{k+h+1} - ({}_{k+h}V + \pi_{k+h}) & J = h \\ v\, {}_{k+h+1}V - ({}_{k+h}V + \pi_{k+h}) & J \ge k+1, \end{cases}
$$

Demuestre que

a. ${}_{k,m}L = \sum_{h=0}^{m-1} v^h\, \Lambda_{k+h}$

b. $Var[{}_{k,m}L] = \sum_{h=0}^{m-1} v^{2h}\, Var[\Lambda_{k+h}]$.

7.47. Repita el Ejemplo 7.11 en términos del asegurado del Ejemplo 7.7 cuanto tiempo tiene que sobrevivir hasta el final del segundo año de la póliza.

7.48. Repita el Ejemplo 7.12 en términos del portafolio con 1,500 pólizas en el tipo descrito en el Ejemplo 7.7 y discutido en el Ejercicio 7.47.

7.49. En el Ejercicio 7.48 no hay incertidumbre en el monto o el tiempo de pago para los seguros de cuantos sobrevivientes tengamos en la 40^a póliza del año. Repitiendo el Ejercicio 7.48 para justificar la duración 2 y 3 de los asegurados.

7.50. ¿ Que cambios se emplean para formar la quinta línea de la Tabla 7.3, si el seguro es

a. en base totalmente continua

b. en base totalmente discreta

7.51. Escriba la fórmula, en términos de simbolos de las primas y reservas terminales, por la prima neta de reserva en la mitad del evento de la póliza anual para 10,000 de un seguro ordinario de vida con aportación de la prima neta pagadera anualmente emitida a (30).

7.52. Una póliza dotal a 3 años, para la face de un monto de 3 años, es de beneficio de pago por murte al final del año de muerte y la prima neta, determina el principio de equivalencia, de 0.94 pagadero anualmente. Usando una tasa de interés del 20%, para la siguiente generación de reservas:

Fin del Año	Reserva
1	0.66
2	1.56
3	3.00

Calcule

a. q_x b. q_{x+1}

c. la varianza de la expedición de las pérdidas de la póliza, ${}_0L$

d. la varianza de la pérdida al final del primer año, ${}_1L$.

Capítulo 8

FUNCIONES DE VIDA MULTIPLES

8.1 Introducción

En los Capítulos 3 al 7 desarrollamos una teoría para el análisis de las indemnizaciones financieras dependientes del tiempo de fallecimiento para una sóla vida. Podemos extender esta teoría a las indemnizaciones que involucran varias vidas. Una aplicación de esta extensión, comúnmente encontrada en los planes de pensión, es la opción de anualidad de sobrevivencia conjunta. Un participante puede elegir cambiar esta indemnización desde una cantidad específica pagadera en tanto esté vivo a una cantidad menor pagadera mientras el participante o su beneficiario estén vivos.

Las aplicaciones de los cálculos actuariales para múltiples vidas son comunes. En los impuestos sobre herencias y donativos, por ejemplo, el ingreso por inversión de un fideicomiso puede pagarse a un grupo de herederos durante el tiempo que al menos uno del grupo sobreviva. A la muerte del último miembro del grupo, el principal del fideicomiso se donará a una universidad. La cantidad de la deducción por caridad que se permite para propósitos de impuestos sobre la herencia se determinará mediante un cálculo actuarial. Hay pólizas familiares en las que las indemnizaciones difieren debido al orden de los fallecimientos del asegurado y de la esposa, y hay pólizas de seguros emitidos sobre una base conjunta de vida que proporciona efectivo para la planeación de la herencia.

En este Capítulo restringiremos nuestra discusión a situaciones que involucren dos vidas. No discutiremos las primas anuales, reservas o el problema de selección inherente a las combinaciones de dos vidas. Esto se discutirá en el Capítulo 17 de este libro. Aquí nos concentraremos en las indemnizaciones básicas y la aplicación de conceptos y técnicas desarrolladas en los Capítulos 3 al 5.

Una abstracción útil en la teoría de las contingencias de vida, especialmente como es aplicada a varias vidas, es la del *estatus* para el que existen definiciones de sobrevivencia e interrupción. Una sóla vida de edad x define un estatus que sobrevive mientras (x) vive. Por tanto, la variable aleatoria $T(x)$, utilizada en el Capítulo 3 para representar el tiempo de vida futuro de (x), puede interpretarse como el periodo de sobrevivencias del estatus y también como el tiempo que transcurre hasta que se interrumpe el estatus. Un plazo determinado, $\overline{n|}$, define un estatus de sobrevivencia para exactamente n años y después se interrumpe. Se pueden definir estatus más complejos en términos de varias vidas en diferentes formas. Sobrevivencia puede significar que todos los miembros sobrevivan o, alternativamente, que al menos un miembro sobreviva. Pueden definirse estatus aún más complicados con respecto a dos hombres y dos mujeres considerando que el estatus sobrevive sólo durante el tiempo que al menos un hombre y al menos una mujer sobrevivan.

Después de que se hayan definido el estatus y su sobrevivencia, podemos aplicar la definición para desarrollar modelos para anualidades y seguros. Una anualidad es pagadera durane el tiempo que el estatus permanezca, mientras que un seguro es pagadero a la interrupción del estatus. Los seguros también pueden estar restringidos de tal forma que sean pagaderos sólo si los individuos mueren en un orden específico.

8.2 El Estatus de Vida Conjunta

Un estatus que existe en tanto que todos los miembros sobrevivan y se interrumpe a la primera muerte es conocido como el *estatus de vida conjunta*. Se representa por $(x_1, x_2, \cdots x_m)$ en donde x_i representa la edad del miembro i del grupo y m representa el número de miembros. La notación que se introdujo en los Capítulos 3, 4 y 5 se utilizará aquí con el subíndice indicando varias edades en lugar de una sóla. Por ejemplo, A_{xy} y ${}_tp_{xy}$ tendrán el mismo significado para el estatus de vida conjunta (xy) como A_x y ${}_tp_x$ tienen para la vida única (x).

Consideraremos ahora la distribución de la variable aleatoria T, el tiempo transcurrido antes de la interrupción del estatus. Para el estatus de vida conjunta, $T = \min[T(x_1), T(x_2), \cdots T(x_m)]$ en donde $T(x_i)$ es el tiempo del fallecimiento de un individuo i. Para el tiempo de vida futuro de un estatus, los conceptos y relaciones establecidas en las Secciones 3.2.2 a 3.5 (excluyendo el ejemplo de la tabla de vida de la Sección 3.3.2) se aplican a la distribución de T. Estos conceptos se utilizarán aquí sin nuevas demostraciones.

En las aplicaciones, no se especifican directamente una ley de mortalidad o tabla de vida para el tiempo de vida futuro del estatus de vida conjunta. Cuando queremos expresar probabilidades de sobrevivencia o de interrumpción del estatus de vida conjunta lo haremos en términos de probabilidades para las vidas individuales del grupo. En forma realista, los individuos cubiertos por un seguro de vida conjunta o un contrato de anualidad tienen alguna asociación, lo que implica que las variables aleatorias del tiempo de vida hasta que sobreviene la muerte no son independientes. Sin embargo, la dependencia de estas variables aleatorias es muy difícil de cuantificar, y no se realizará algún esfuerzo por hacerlo. Consecuentemente, siempre que expresemos funciones de la tabla de vida para el estatus de vida conjunta en términos de los de las vidas individuales, estaremos utilizando el supuesto de independencia.

Empezamos definiendo la función de distribución de T para $t > 0$ y restringimos nuestra atención al caso de dos vidas con $x_1 = x$ y $x_2 = y$, así que $T = T(xy)$, por tanto,

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= Pr(T \leq t) \\
&= Pr[\min[T(x), T(y)] \leq t] \\
&= 1 - Pr[T(x) > t \ \text{ y } \ T(y) > t].
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

Luego, por la independencia,

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= 1 - Pr[T(x) > t]\, Pr[T(y) > t] \\
&= 1 - {}_tp_x\, {}_tp_y.
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

Por tanto, la independencia implica que la probabilidad de un estatus de vida conjunta (xy) que sobrevive al tiempo t, ${}_tp_{xy}$ es

$$
{}_tp_{xy} = {}_tp_x\, {}_tp_y. \tag{8.3}
$$

La *f.d.p.* **para T** se obtiene diferenciando $F_T(t)$ **con respecto a t y, para tiempos de vida futuros independientes, es**

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x\, {}_tp_y) \\
&= -\,{}_tp_x\left(-\,{}_tp_y\, \mu_{y+t}\right) - {}_tp_y\left(-\,{}_tp_x\, \mu_{x+t}\right) \\
&= {}_tp_x\, {}_tp_y\left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t}\right).
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

La distribución de $T = T(xy)$ puede también especificarse **por la fuerza de mortalidad de las vidas** asociadas. Para hacerlo así, consideramos primero **una notación para la fuerza de interrupción de un** estatus en el tiempo t. Una notación común para esta **fuerza es $\mu_{x+t:y+t}$ (en analogía con μ_{x+t}) pero,** preparándonos para una discusión **más general de estatus, emplearemos la notación $\mu_{xy}(t)$. Por analogía** con la primera fórmula de (3.12) **en la cual reemplazamos $f(x)$ y $F(x)$ por $f_{T(xy)}(t)$ y $F_{T(xy)}(t)$, tenemos**

$$
\mu_{xy}(t) = \frac{f_{T(xy)}(t)}{1 - F_{T(xy)}(t)}. \tag{8.5}
$$

Para $T(x)$, $T(y)$ **independientes, tenemos entonces, de (8.2) y (8.4),**

$$
\mu_{xy}(t) = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}. \tag{8.6}
$$

En palabras, la fuerza de interrupción del estatus de vida conjunta es la suma de las fuerzas de mortalidad para los individuos si sus tiempos de vida futuros son independientes. Como en el Capítulo 3 del caso de vida única, podemos caracterizar la distribución de $T(xy)$ mediante la *f.d.p.*, la *f.d.* o la fuerza de mortalidad.

La probabilidad de que el estatus de la vida conjunta se interrumpa durante el tiempo k a $k+1$ se determina utilizando la función de distribución por

$$\begin{aligned} Pr(k < T \leq k+1) &= Pr(T \leq k+1) - Pr(T \leq k) \\ &= {}_kp_{xy} - {}_{k+1}p_{xy} \\ &= {}_kp_{xy}\, q_{x+k:y+k}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Nótese que la probabilidad del estatus de vida conjunta $(x+k : y+k)$ que se interrumpe dentro del siguiente año puede escribirse en términos de las probabilidades de interrupción independiente de las vida individuales como sigue:

$$\begin{aligned} q_{x+k:y+k} &= 1 - p_{x+k:y+k} \\ &= 1 - p_{x+k}\, p_{y+k} \\ &= 1 - (1 - q_{x+k})(1 - q_{y+k}) \\ &= q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k}\, q_{y+k}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

De la discusión en la Sección 3.2.3 del tiempo de vida futuro truncado de (x), observamos que (8.7) también proporciona la *f.p.* de la variable aleatoria K, el número de años completado antes de la interrumpción del estatus, es decir, para $k = 0, 1, 2, \cdots$,

$$\begin{aligned} Pr(K = k) &= Pr(k \leq T < k+1) \\ &= Pr(k < T \leq k+1) \\ &= {}_kp_{xy}\, q_{x+k:y+k} \\ &= {}_{k|}q_{xy}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

8.3 El Estatus del Ultimo Sobreviviente

Además de las indemnizaciones definidas en términos del tiempo de la primera defunción, existen aquellas definidas en términos del tiempo de la última defunción. En esta sección examinaremos situaciones en las que la variable aleatoria es el tiempo de la última defunción.

Un estatus que existe durante el tiempo en que al menos un miembro del grupo está vivo y se interrumpe hasta la última muerte se denomina *estatus del último sobreviviente.* Se denota mediante $(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m})$ en donde x_i representa la edad del miembro i y m representa el número de miembros.

Consideramos la distribución de la variable aleatoria T, el tiempo que transcurre hasta que se interrumpe el estatus. En el estatus del último sobreviviente, $T = \max[T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_m)]$ en donde $T(x_i)$ es el tiempo que transcurre antes que sobrevenga la muerte del individuo i. Como en el desarrollo del estatus de vida conjunta, cuando queremos expresar funciones y características de la distribución de las T's en términos de las correspondientes a las vidas individuales, suponemos que $T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_m)$ son mutuamente independientes. Para dos vidas, tenemos

$$\begin{aligned} F_T(t) &= Pr(T \leq t) \\ &= Pr[\max[T(x), T(y)] \leq t] \\ &= Pr[T(x) \leq t \ \text{ y } \ T(y) \leq t]. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Luego, por la independencia,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= Pr[T(x) \leq t] Pr[T(y) \leq t] \\ &= (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y) \\ &= 1 - {}_tp_x - {}_tp_y + {}_tp_x\, {}_tp_y. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Por lo tanto,

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x\, {}_tp_y. \tag{8.12}$$

(Veáse el Ejercicio 8.39 para una derivación directa.)

Podemos diferenciar (8.11) con respecto a t para expresar la *f.d.p.* de $T = T(\overline{xy})$ en términos de las funciones de vida para las vidas individuales bajo el supuesto de independencia:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt}[(1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y)] \\ &= (1 - {}_tp_x)\, {}_tp_y\, \mu_{y+t} + (1 - {}_tp_y)\, {}_tp_x\, \mu_{x+t} \end{aligned} \tag{8.13}$$

$$= {}_tp_x\,\mu_{x+t} + {}_tp_y\,\mu_{y+t} - {}_tp_x\,{}_tp_y\,(\mu_{x+t} + \mu_{y+t}). \tag{8.14}$$

Existe una relación más general entre $T(xy)$, $T(\overline{xy})$, $T(x)$ y $T(y)$. Aun si $T(x)$ y $T(y)$ no son independientes, $T(\overline{xy})$ es igual ya sea a $T(x)$ o a $T(y)$ y $T(xy)$ es igual a la otra para cada resultado, así que tenemos las siguientes ecuaciones:

$$T(xy) + T(\overline{xy}) = T(x) + T(y) \tag{8.15}$$

$$F_{T(xy)}(t) + F_{T(\overline{xy})}(t) = F_{T(x)}(t) + F_{T(y)}(t) \tag{8.16}$$

$$f_{T(xy)}(t) + f_{T(\overline{xy})}(t) = f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t). \tag{8.17}$$

De (8.16) se sigue que

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy} \tag{8.18}$$

y de (8.17) y (8.15) que

$$f_{T(\overline{xy})}(t) = {}_tp_x\,\mu_{x+t} + {}_tp_y\,\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\,\mu_{xy}\,(t). \tag{8.19}$$

Notamos que (8.14) y (8.19) difieren sólo en el tercer término. **La ecuación (8.19) puede escribirse** como (8.14) si $T(x)$ y $T(y)$ son independientes.

Por analogía con la primera fórmula de (3.13), **en donde $f(x)$ y $F(x)$ las reemplazamos por $f_{T(\overline{xy})}(t)$** y $F_{T(\overline{xy})}(t)$, tenemos

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{f_{T(\overline{xy})}(t)}{1 - F_{T(\overline{xy})}(t)}.$$

Se sigue de (8.18) y (8.19) que

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{{}_tp_x\,\mu_{x+t} + {}_tp_y\,\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\,\mu_{xy}\,(t)}{{}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}}. \tag{8.20}$$

La *f.p.* de la variable aleatoria K, el número de años completados antes de la interrupción del estatus, o para el estatus del último sobreviviente, el número de años completados antes de la última

muerte, puede ahora determinarse mediante la confrontación de los elementos del par $[K(xy), K(\overline{xy})]$ con aquellos del par $[K(x), K(y)]$. Para $k = 0, 1, 2, \cdots$ tenemos

$$Pr[K(\overline{xy}) = k] + Pr[K(xy) = k] = Pr[K(x) = k] + Pr[K(y) = k],$$

por tanto

$$Pr[K(\overline{xy}) = k] = {}_kp_x\, q_{x+k} + {}_kp_y\, q_{y+k} - {}_kp_{xy}\, q_{x+k:y+k}. \tag{8.21}$$

Para vidas independientes, (8.3) y (8.7) nos permiten escribir (8.21) como

$$\begin{aligned} Pr[K(\overline{xy}) = k] &= {}_kp_x\, q_{x+k} + {}_kp_y\, q_{y+k} \\ &\quad - {}_kp_x\, {}_kp_y\, (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k}\, q_{y+k}) \\ &= (1 - {}_kp_x)\, {}_kp_x\, q_{x+k} + (1 - {}_kp_x)\, {}_kp_y\, q_{y+k} \\ &\quad + {}_kp_x\, {}_kp_y\, q_{x+k}\, q_{y+k}. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Los dos primeros términos son la probabilidad de que sólo la segunda muerte ocurra entre el tiempo k y $k+1$. El tercero es la probabilidad de que ambas muertes ocurran durante ese año. Esta expresión para $Pr[K(\overline{xy}) = k]$ es análoga a (8.13) para la *f.d.p.* de $T(\overline{xy})$ en donde, ya que probabilidad de que dos defunciones ocurran en el mismo instante es 0, sólo existen dos términos.

8.4 Probabilidades y Esperanzas

En las Secciones 2 y 3 expresamos las *f.d.p.* y las *f.d.* de los tiempos de vida futuros, del estatus de vida conjunta y del último sobrevivientes en términos de funciones vidas únicas e independientes. En esta sección utilizaremos estas expresiones para resolver problemas de probabilidad y para obtener esperanzas, varianzas y la covarianza de los tiempos de vida futuros de sobrevivencia conjunta y del último sobreviviente.

Ejemplo 8.1

Suponiendo que los tiempos de vida futuros de (80) y (85) son independientes, obtenga una expresión para la probabilidad de que

a. la primera muerte ocurra después de 5 y antes de 10 años a partir de este momento

b. la última muerte ocurra después de 5 y antes de 10 años a partir de este momento.

Solución:

a. Con $T = T(80:85)$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
Pr(5 < T \le 10) &= Pr(T > 5) - Pr(T > 10) \\
&= {}_5p_{80:85} - {}_{10}p_{80:85} \\
&= {}_5p_{80}\,{}_5p_{85} - {}_{10}p_{80}\,{}_{10}p_{85}.
\end{aligned}
$$

Nótese que el supuesto de independencia se utiliza sólo en el último paso.

b. Con $T = T(\overline{80:85})$ utilizamos (8.18) para obtener

$$
\begin{aligned}
Pr(5 < T \le 10) &= Pr(T > 5) - Pr(T > 10) \\
&= {}_5p_{\overline{80:85}} - {}_{10}p_{\overline{80:85}} \\
&= {}_5p_{80} - {}_{10}p_{80} + {}_5p_{85} - {}_{10}p_{85} - ({}_5p_{80:85} - {}_{10}p_{80:85}).
\end{aligned}
$$

Utilizando el supuesto de independencia, podemos sustituir ${}_5p_{80}\,{}_5p_{85}$ por ${}_5p_{80:85}$ y ${}_{10}p_{80}\,{}_{10}p_{85}$ por ${}_{10}p_{80:85}$.

∇

Los resultados de la Sección 3.5 respecto a los valores esperados de la distribución de T, el tiempo transcurrido antes de la muerte de (x), son también válidos si $T = T(u)$ es el tiempo transcurrido antes de la interrupción de un estatus general (u).

Por Ejemplo, de (3.31) tenemos que $\mathring{e}_u = E[T(u)]$, el que para un estatus general (u) puede obtenerse de la fórmula

$$\mathring{e}_u = \int_o^\infty {}_tp_u\, dt. \tag{8.23}$$

Si (u) es el estatus de vida conjunta (xy), entonces

$$\mathring{e}_{xy} = \int_o^\infty {}_tp_{xy}\, dt, \tag{8.24}$$

y para el estatus del último sobreviviente $(\overline{xy})$, tenemos

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \int_o^\infty {}_tp_{\overline{xy}}\, dt. \tag{8.25}$$

Al sustituir (8.18) en el último resultado, vemos que

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy} \,. \tag{8.26}$$

De (3.34), el valor esperado de $K = K(u)$ es

$$e_u = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_u$$

para un estatus general, (u). Los casos especiales incluyen

$$e_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_{xy}$$

y

$$e_{\overline{xy}} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_{\overline{xy}}.$$

De estos casos especiales y de (8.18) se sigue que

$$e_{\overline{xy}} = e_x + e_y - e_{xy}.$$

Las fórmulas de varianza derivadas en la Sección 3.5 pueden utilizarse para calcular la varianza del tiempo de vida futuro, o el tiempo de vida futuro truncado, de cualquier estatus, (u). Por tanto,

$$Var[T(xy)] = 2\int_0^{\infty} t\, {}_tp_{xy}\, dt - (\mathring{e}_{xy})^2$$

y

$$Var[T(\overline{xy})] = 2\int_0^{\infty} t\, {}_tp_{\overline{xy}}\, dt - (\mathring{e}_{\overline{xy}})^2.$$

Para expresar la covarianza de $T(xy)$ y $T(\overline{xy})$ en términos de las funciones de la tabla de vida para las vidas individuales, empezamos con

$$Cov[T(xy), T(\overline{xy})] = E[T(xy)\, T(\overline{xy})] - E[T(xy)]\, E[T(\overline{xy})].$$

Sobre la misma base que para (8.15)

$$T(xy)\,T(\overline{xy}) = T(x)\,T(y),$$

por tanto

$$E[T(xy)\,T(\overline{xy})] = E[T(x)\,T(y)].$$

Si $T(x)$ y $T(y)$ son independientes, entonces

$$E[T(x)\,T(y)] = E[T(x)]\,E[T(y)].$$

Por tanto

$$Cov[T(xy),\,T(\overline{xy})] = \mathring{e}_x\,\mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy}\,\mathring{e}_{\overline{xy}}\,. \tag{8.27}$$

Sustituyendo (8.26) en (8.27) y reacomodando los términos tenemos

$$Cov[T(xy),\,T(\overline{xy})] = (\mathring{e}_x - \mathring{e}_{xy})(\mathring{e}_y - \mathring{e}_{xy}). \tag{8.28}$$

Como ambos factores de (8.28) deben ser no-negativos, podemos observar que $T(xy)$ y $T(\overline{xy})$ están correlacionados positivamente excepto en casos triviales donde $\mathring{e}_x$ o $\mathring{e}_y$ son iguales a $\mathring{e}_{xy}$.

8.5 Indemnizaciones de Seguros y de Anualidades

Los seguros y anualidades, previamente discutidas para una vida individual, pueden definirse para el estatus general, (u). Reemplazando el estatus de una sola vida (x) por el general, (u), los modelos y fórmulas de los Capítulos 4 y 5 son aplicables aquí . Inmediatamente quedan disponibles expresiones para los valores presentes actuariales y las varianzas, en términos de la distribución del tiempo de vida futuro de (u). Las relaciones de la Sección 8.3 pueden entonces utilizarse para poner estas expresiones en términos de funciones para las vidas individuales del estatus general.

Para un seguro unitario pagadero al final del año en el que el estatus general se interrumpe, se aplica el modelo y las fórmulas de la Sección 4.3. Por lo tanto si K representa el tiempo de vida futuro truncado de (u), entonces el

- tiempo de pago es $K+1$,
- el valor presente a la expedición del pago es $Z = v^{K+1}$,

- la prima neta única, A_u, es

$$E[Z]=\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} Pr(K=k), \tag{8.29}$$

- $$Var[Z]={}^2A_u-(A_u)^2. \tag{8.30}$$

Como ejemplo, considere una suma asegurada de 1 pagadera al final del año en el que el último sobreviviente de (x) y (y) muere. De (8.21) y (8.29) tenemos

$$A_{\overline{xy}}=\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}({}_kp_x\, q_{x+k}+{}_kp_y\, q_{y+k}-{}_kp_{xy}\, q_{x+k:y+k}),$$

que puede usarse en las fuerzas de interés δ y 2δ para obtener la varianza mediante (8.30).

Las numerosas fórmulas para las anualidades discretas de la Sección 5.4 son válidas cuando los pagos de la anualidad son dependientes de la sobrevivencia de un estatus general. Por ejemplo, si reemplazamos x con u para enfatizar que K es el tiempo de vida futuro truncado del estatus general, (u), podemos reestablecer las siguientes fórmulas para una anualidad vitalicia temporal a n años con respecto a (u):

$$Y=\begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1|}} & 0\le K<n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}} & K\ge n \end{cases} \qquad \text{(5.39) reformulada}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{u:\overline{n|}} &= E[Y]=\sum_{k=0}^{n-1}\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\,{}_{k|}q_u+\ddot{a}_{\overline{n|}}\,{}_np_u \\
\ddot{a}_{u:\overline{n|}} &= \sum_{k=0}^{n-1}{}_kE_u=\sum_{k=0}^{n-1}v^k\,{}_kp_u && \text{(5.38) reformulada} \\
\ddot{a}_{u:\overline{n|}} &= \frac{1}{d}(1-A_{u:\overline{n|}}) && \text{(5.40) reformulada} \\
Var[Y] &= \frac{1}{d^2}[{}^2A_{u:\overline{n|}}-(A_{u:\overline{n|}})^2]. && \text{(5.42) reformulada}
\end{aligned}$$

Para ejemplificar, considere una anualidad de 1, pagadera al principio de cada año en el que ambos (x) y (y) sobrevivan durante los siguientes n años. Esta es una anualidad del estatus de vida conjunta (xy). Sustituyendo ${}_tp_{xy}$, o ${}_tp_x\,{}_tp_y$ si los tiempos de vida son independientes, por ${}_tp_u$ en las fórmulas precedentes, puede obtenerse el valor presente actuarial de la anualidad. Para la varianza de (5.42), se puede utilizar

$$A_{xy:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$$

y

$$^2A_{xy:\overline{n}|} = 1 - (2d - d^2)\,^2\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$$

o pueden calcularse directamente las primas netas únicas.

Podemos establecer relaciones entre los modelos para las anualidades y seguros sobre el estatus del último sobreviviente y de la vida conjunta. Igual que el argumento utilizado para (8.15), tenemos que, para cada resultado, $K(\overline{xy})$ es igual ya sea a $K(x)$ o $K(y)$ y $K(xy)$ es igual al otro. Por lo tanto

$$v^{K(\overline{xy})+1} + v^{K(xy)+1} = v^{K(x)+1} + v^{K(y)+1} \tag{8.31}$$

$$\ddot{a}_{\overline{K(\overline{xy})+1}|} + \ddot{a}_{\overline{K(xy)+1}|} = \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|} + \ddot{a}_{\overline{K(y)+1}|} \tag{8.32}$$

$$v^{K(xy)+1} + v^{K(\overline{xy})+1} = v^{K(x)+1} + v^{K(y)+1}. \tag{8.33}$$

Al tomar las esperanzas de ambos lados de (8.31) y (8.32), tenemos

$$A_{\overline{xy}} + A_{xy} = A_x + A_y$$

y

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} + \ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y.$$

Estas fórmulas nos permiten expresar los valores presentes actuariales de anualidades y seguros del último sobreviviente en términos de aquellos para las vidas individuales y para el estatus de vida conjunta.

Consideraremos ahora anualidades y seguros continuos. Si T, la variable aleatoria del tiempo de vida futura de las Secciones 4.2 y 5.3, se reinterpreta como $T(u)$, el tiempo transcurrido hasta la interrupción del estatus general, (u), las fórmulas de esas secciones para valores presentes, los valores presentes actuariales y varianzas son valídas para seguros y anualidades con respecto al estatus (u).

Para un seguro que paga una cantidad unitaria al momento de la interrupción de (u), el valor presente a la expedición de la póliza, la prima neta única y la varianza están dados por

$$\begin{aligned} Z &= v^T \\ \bar{A}u &= \int_0^\infty v^t\, {}_tp_u\, \mu_{u+t}\, dt \qquad \text{(4.6) reformulada} \\ Var[Z] &= {}^2\bar{A}_u - \bar{A}_u^2. \end{aligned}$$

Como ilustración, la (4.6) reformulada para el último sobreviviente de (x) y (y) sería

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_{\overline{xy}}\, \mu_{\overline{xy}}(t)\, dt.$$

Por (8.20) este es

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t \left[{}_tp_x\, \mu_{x+t} + {}_tp_y\, \mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\, \mu_{xy}(t) \right] dt.$$

Para una anualidad pagadera continuamente a la tasa de 1 por año hasta T, el tiempo de interrumpción de (u), tenemos

$$\begin{aligned} Y &= \bar{a}_{\overline{T}|} \\ \bar{a}_u &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T}|}\, {}_tp_u\, \mu_{u+t}\, dt \qquad \text{(5.5) reformulada} \\ &= \int_0^\infty v^t\, {}_tp_u\, dt \qquad \text{(5.6) reformulada} \\ Var[Y] &= \frac{{}^2\bar{A}_u - \bar{A}_u^2}{\delta^2}. \qquad \text{(5.12) reformulada} \end{aligned}$$

La identidad del interés,

$$\delta\, \bar{a}_{\overline{T}|} + v^T = 1, \qquad \text{(5.13) reformulada}$$

está también disponible para $T = T(u)$ y proporciona la conexión entre los modelos para seguros y anualidades.

Como una aplicación, considere una anualidad pagadera continuamente a la tasa de 1 por año durante el tiempo en el que al menos sobreviva (x) o (y). Esta es una anualidad con respecto a $(\overline{xy})$, así tenemos que de las fórmulas anteriores con $T = T(\overline{xy})$

$$
\begin{aligned}
Y &= \bar{a}_{\overline{T}|} \\
\bar{a}_{\overline{xy}} &= \int_o^{\infty} \bar{a}_{\overline{T}|}[{}_tp_u\,\mu_{u+t} + {}_tp_y\,\mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\,\mu_{xy}(t)]dt \\
&= \int_o^{\infty} v^t\,{}_tp_{\overline{xy}}\,dt \\
Var[Y] &= \frac{{}^2\bar{A}_{\overline{xy}} - \bar{A}^2_{\overline{xy}}}{\delta^2}.
\end{aligned}
$$

Las fórmulas (8.31)-(8.33) mantiene su validez si se reemplaza el tiempo de vida futuro truncado, K, por el tiempo de vida futuro, T, por tanto,

$$
\begin{aligned}
v^{T(\overline{xy})} + v^{T(xy)} &= v^{T(x)} + v^{T(y)} && (8.34) \\
\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} + \bar{a}_{\overline{T(xy)}|} &= \bar{a}_{\overline{T(x)}|} + \bar{a}_{\overline{T(y)}|} && (8.35) \\
v^{T(\overline{xy})}\,v^{T(xy)} &= v^{T(x)}\,v^{T(y)}.
\end{aligned}
$$

Estas identidades pueden utilizarse para obtener las relaciones entre las primas netas únicas, los valores presentes actuariales, las varianzas y covarianzas de los seguros y anualidades para varios estatus. Por ejemplo, tomando las esperanzas en ambos lados de (8.34) y (8.35), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{\overline{xy}} + \bar{A}_{xy} &= \bar{A}_x + \bar{A}_y && (8.36) \\
\bar{a}_{\overline{xy}} + \bar{a}_{xy} &= \bar{a}_x + \bar{a}_y. && (8.37)
\end{aligned}
$$

De la misma manera que la $Cov[T(\overline{xy}), T(xy)]$ fue expresada en términos de los tiempos de vida futuros esperados para $T(x)$ y $T(y)$ independientes, podemos demostrar que

$$
Cov[v^{T(\overline{xy})}, v^{T(xy)}] = (\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy}) \quad (8.38)
$$

es verdadera para tiempos de vida independientes. Ambos factores de (8.38) son no-positivos, así que esta covarianza es no-negativa. Será 0 sólo en el caso trivial en el que $\bar{A}_x$ o $\bar{A}_y$ sea igual a $\bar{A}_{xy}$.

Ejemplo 8.2:

Calcule la prima neta única para un seguro a plazo de n años que paga una indemnización por fallecimiento de 1 al momento en que fallece el último de entre (x) y (y) si la defunción ocurre antes del tiempo n. Si al menos un individuo sobrevive al tiempo n, no se realiza pago alguno.

Solución:

Mediante la reformulación de (4.3), y utilizando (8.20), tenemos

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t\, {}_tp_{\overline{xy}}\, \mu_{\overline{xy}}(t)\, dt \\
&= \int_0^n v^t \left[{}_tp_x\, \mu_{x+t} + {}_tp_y\, \mu_{y+t} - {}_tp_{xy}\, \mu_{xy}(t) \right] dt \\
&= \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}^{\,1}_{y:\overline{n}|} - \bar{A}_{\overset{1}{xy}:\overline{n}|}
\end{aligned}$$

El símbolo $\bar{A}_{\overset{1}{xy}:\overline{n}|}$ representa la prima neta única para un seguro a plazo de n años **pagadero al** momento de la interrupción del estatus de vida conjunta.

∇

Ejemplo 8.3:

Una anualidad es pagadera a la tasa de

- 1 al año mientras ambos (x) y (y) están vivos,
- 2/3 al año mientras uno de (x) o (y) está vivo **y el otro ha muerto.**

Suponiendo que $T(x)$ y $T(y)$ son independientes, **derive expresiones para**

a. la variable aleatoria del valor presente de las **anualidad.**

b. el valor presente actuarial de la anualidad.

c. la varianza de la variable aleatoria en (a).

Solución:

a. La anualidad es una combinación de una que es pagadera a la tasa de 2/3 al año mientras que al menos uno de (x) y (y) este vivo [hasta el tiempo $T(\overline{xy})$] y una que es pagadera a la tasa de 1/3 al año mientras que ambos individuos esten vivos [hasta el tiempo $T(xy)$]. El valor presente de los pagos es

$$Z = \frac{2}{3}\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} + \frac{1}{3}\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}.$$

b. El valor presente actuarial es

$$E[Z] = \frac{2}{3}\bar{a}_{\overline{xy}} + \frac{1}{3}\bar{a}_{xy}.$$

Utilizando (8.37) para sustituir por $\bar{a}_{\overline{xy}}$, tenemos

$$E[Z] = \frac{2}{3}\bar{a}_x + \frac{2}{3}\bar{a}_y - \frac{1}{3}\bar{a}_{xy}$$

Alternativamente, de (5.6) reformulada, tenemos

$$E[Z] = \frac{2}{3}\int_o^\infty v^t\,{}_tp_{\overline{xy}}\,dt + \frac{1}{3}\int_o^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,dt.$$

Luego, considerando los tres casos mutuamente excluyentes respecto a cuál de las vidas han sobrevivido cuando $(\overline{xy})$ han sobrevivido en el tiempo t, y suponiendo que $T(x)$ y $T(y)$ son independientes, podemos escribir

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_{xy} + {}_tp_x\,(1 - {}_tp_y) + {}_tp_y\,(1 - {}_tp_x).$$

Sustituyendo esta expresión en la primera integral da

$$\begin{aligned} E[Z] \;&=\; \int_o^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,dt + \frac{2}{3}\int_o^\infty v^t\,{}_tp_x\,(1 - {}_tp_y)\,dt \\ &+\frac{2}{3}\int_o^\infty v^t\,{}_tp_y\,(1 - {}_tp_x)\,dt. \end{aligned}$$

Esta expresión para $E[Z]$ puede obtenerse directamente al considerar los tres casos. El primer término es el valor presente de los pagos a la tasa de 1 por año mientras que ambas (x) y (y) sobrevivan. El segundo término es el valor presente de los pagos a la tasa de 2/3 por año en los tiempos t cuando (x) esta vivo [con probabilidad ${}_tp_x$] y (y) está muerto [con probabilidad $(1 - {}_tp_y)$]. El tercero tiene una interpretación similar.

c.

$$
\begin{aligned}
Var[Z] &= Var\left[\frac{2}{3}\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} + \frac{1}{3}\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}\right] \\
&= \frac{4}{9}Var[\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}] + \frac{1}{9}Var[\bar{a}_{\overline{T(xy)}|}] + \frac{4}{9}Cov[\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}, \bar{a}_{\overline{T(xy)}|}]
\end{aligned}
$$

Pero, por (8.38),

$$
\begin{aligned}
Cov[\bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}, \bar{a}_{\overline{T(xy)}|}] &= \frac{Cov[v^{T(\overline{xy})}, v^{T(xy)}]}{\delta^2} \\
&= \frac{(\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy})}{\delta^2}.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
Var[Z] = \frac{(4/9)({}^2\bar{A}_{\overline{xy}} - A^2_{\overline{xy}}) + (1/9)({}^2\bar{A}_{xy} - \bar{A}^2_{xy}) + (4/9)(\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy})}{\delta^2}.
$$

∇

Ejemplo 8.4:

Calcule el valor presente actuarial de una anualidad pagadera continuamente a la tasa de

1. 1 por año con certeza hasta el tiempo n,
2. 1 por año después del tiempo n si ambos (x) y (y) están vivos,
3. 3/4 por año después del tiempo n si (x) está vivo y (y) está muerto, y
4. 1/2 por año después del tiempo n si (y) está vivo y (x) está muerto.

Solución:

En este ejemplo, la variable aleatoria valor presente es difícil de calcular. Pero, si sólo se desea el valor presente actuarial, puede obtenerse fácilmente mediante el uso de la técnica de pago corriente. De este modo, obtenemos una expresión para la esperanza de Y, el valor presente de los pagos de la anualidad, cubiertas en cada caso mediante la anualidad.

$$\textit{Caso 1}: \qquad \int_0^n v^t\,dt = \bar{a}_{\overline{n}|}$$

$$\textit{Caso 2}: \qquad \int_n^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,dt = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,dt - \int_0^n v^t\,{}_tp_{xy}\,dt$$

$$= \bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|}$$

$$\textit{Caso 3}: \qquad \tfrac{3}{4}\int_n^\infty v^t\,{}_tp_x\,(1 - {}_tp_y)\,dt$$

$$= \tfrac{3}{4}(\bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}) - \tfrac{3}{4}(\bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|})$$

$$\textit{Caso 4}: \qquad \tfrac{1}{2}\int_n^\infty v^t\,(1 - {}_tp_x)\,{}_tp_y\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}(\bar{a}_y - \bar{a}_{y:\overline{n}|}) - \tfrac{1}{2}(\bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|})$$

Sumando, obtenemos el valor presente requerido,

$$\bar{a}_{\overline{n}|} + \frac{3}{4}\bar{a}_x + \frac{1}{2}\bar{a}_y - \frac{1}{4}\bar{a}_{xy} - \frac{3}{4}\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}\bar{a}_{y:\overline{n}|} + \frac{1}{4}\bar{a}_{xy:\overline{n}|}.$$

∇

En esta sección hemos examinado una variedad de indemnizaciones que involucran expresiones integrales. En las siguientes dos estudiaremos varios supuestos acerca de la *f.d.p.* de T que simplificarán la evaluación de las integrales que involucran múltiples vidas.

8.6 Leyes Especiales de Mortalidad - Evaluación

Aquí examinaremos el supuesto de que la mortalidad sigue la ley de Makeham, o su importante caso especial, la ley de Gompertz, y las implicaciones para la computación de las primas netas únicas y los valores presentes actuariales con respecto a los estatus de múltiples vidas.

Empezaremos con el supuesto de que la mortalidad para cada vida sigue la ley de Gompertz, $\mu_x = Bc^x$. Buscamos sustituir un estatus de vida única (w) para el de vida conjunta (xy), y consideramos

$$\mu_{xy}(s) = \mu_{w+s} \qquad s \geq 0. \tag{8.39}$$

Esto es,

$$Bc^{x+s} + Bc^{y+s} = Bc^{w+s},$$

o

$$c^x + c^y = c^w, \tag{8.40}$$

que define la w deseada. Se sigue que para $t > 0$,

$$\begin{aligned} {}_tp_w &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{w+s}\, ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{xy}(s)\, ds\right) \\ &= {}_tp_{xy}. \end{aligned} \tag{8.41}$$

Por tanto para w definida en (8.40), todas la probabilidades, valores esperados y varianzas para el estatus de vida conjunta (xy) son iguales a aquellos para la vida única (w). Para valores tabulados, la necesidad de un arreglo bidimensional ha sido reemplazda por la necesidad de uno unidimensional, pero típicamente w será no-entero y por lo tanto la determinación de sus valores requerirá de interpolar en el arreglo simple.

El supuesto de que la mortalidad para cada vida sigue la ley de Makeham (veáse la Tabla 3.6) hace que el procedimiento sea más complejo. La fuerza de mortalidad para el estatus de vida conjunta es

$$\mu_{xy}(s) = \mu_{x+s} + \mu_{y+s} = 2A + Bc^s(c^x + c^y). \tag{8.42}$$

No podemos sustituir una vida única por las dos vidas debido a la $2A$. En cambio, reemplazamos (xy) con otro estatus de vida conjunta (ww). Luego

$$\mu_{ww}(s) = 2\mu_{w+s} = 2(A + Bc^s c^w), \tag{8.43}$$

y seleccionamos w tal que

$$2c^w = c^x + c^y. \tag{8.44}$$

A diferencia del caso Gompertz en el que el arreglo unidimensional está basado en funciones de una tabla de vida única, este arreglo se basa en las funciones para un estatus de vida conjunta (ww) que involucran vidas de la misma edad.

Ejemplo 8.5:

Utilice (3.43) y los valores de $\ddot{a}_{xx}$ basados en la Tabla de Vida Ilustrativa con interés al 6% para calcular el valor de $\ddot{a}_{60:70}$. Compare su resultados con los valores de $\ddot{a}_{60:70}$ en la tabla de $\ddot{a}_{x:x+10}$.

Solución:

De $c = 10^{0.04}$ y $c^{60} + c^{70} = 2c^{w}$, obtenemos $w = 66.11276$. Luego $\ddot{a}_{60:70} = 0.88724\,\ddot{a}_{66:66} + 0.11276\,\ddot{a}_{67:67} = 7.55637$. El valor por la tabla $\ddot{a}_{x:x+10}$ es 7.55633.

∇

8.7 Distribución Uniforme de los Fallecimientos - Evaluación

Consideraremos ahora el supuesto de la distribución uniforme de los fallecimientos para cada año de edad para cada individuo en el estatus de vida conjunta. Con este supuesto adicional, podemos evaluar las primas neta únicas de las indemnizaciones de seguros pagaderas al momento de la muerte y el valor presente actuarial de anualidades pagaderas con mayor frecuencia que una vez al año.

Recordemos de la Tabla 3.5 que, bajo el supuesto de la distribución uniforme de los fallecimientos para cada año de edad, ${}_tp_x = 1 - tq_x$ y

$$ {}_tp_x\, \mu_{x+t} = \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = q_x. \tag{8.45}$$

Cuando aplicamos este supuesto a un estatus de vida conjunta (xy), con $T(x)$ y $T(y)$ independientes, obtenemos, para $0 \le t \le 1$,

$$\begin{aligned} {}_tp_{xy}\, \mu_{xy}(t) &= {}_tp_x\, {}_tp_y\, (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \\ &= {}_tp_y\, (\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}) + {}_tp_x\, (\, {}_tp_y\, \mu_{y+t}) \\ &= (1 - tq_y)\, q_x + (1 - tq_x)\, q_y \\ &= q_x + q_y - q_xq_y + (1 - 2t)q_xq_y \\ &= q_{xy} + (1 - 2t)q_xq_y. \end{aligned} \tag{8.46}$$

Con base en (4.24), la prima neta única para una indemnización por seguro con respecto a un estatus general, (u), puede expresarse como

$$\bar{A}_u = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_u \int_o^1 (1+i)^{1-s} \frac{{}_{k+s}p_u}{{}_kp_u} \mu_u(k+s)\, ds.$$

Usando (8.46), podemos reescribir esta para el estatus de vida conjunta, (xy), como

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_{xy} \left[q_{x+k:y+k} \int_o^1 (1+i)^{1-s}\, ds \right. \\
&\quad \left. + q_{x+k} q_{y+k} \int_o^1 (1+i)^{1-s} (1-2s)\, ds \right] \\
&= \frac{i}{\delta} A_{xy} + \frac{i}{\delta}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right) \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_{xy}\, q_{x+k}\, q_{y+k}.
\end{aligned} \tag{8.47}$$

Para interpretar el lado derecho de (8.47), observamos de (4.25) que el primer término es igual a $\bar{A}_{xy}$ si $T(xy)$, el tiempo transcurrido hasta la interrupción de (xy), está uniformemente distribuido para cada año del tiempo de vida futuro. Ese no es el caso para $T(xy) = [\min(T(x), T(y))]$ cuando $T(x)$ y $T(y)$ están distribuidas independiente y uniformemente en tales años. Bajo este último supuesto, la distribución condicional de $T(xy)$, dado que $T(x)$ y $T(y)$ tienen diferentes intervalos anuales, también es uniforme en cada año del tiempo de vida futuro. Sin embargo, dado que $T(x)$ y $T(y)$ están dentro del mismo intervalo, la distribución de sus mínimos se moverá hacia el principio del intervalo (veáse el Ejercicio 8.28) y una prima neta única para un seguro pagadera si ambos individuos mueren en el mismo año futuro, es muy pequeña. Generalmente, aproximamos $\bar{A}_{xy}$ ignorando el pequeño término de corrección, simplificando de esa forma (8.47) a

$$\bar{A}_{xy} \cong \frac{i}{\delta} A_{xy}, \tag{8.48}$$

que es exacto, como se indicó previamente, si $T(xy)$ está distribuido uniformemente en cada año del tiempo de vida futuro.

Para evaluar $\bar{a}_{xy}$ tenemos de (5.10), con estatus (x) reemplazado por (xy),

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\delta}(1 - \bar{A}_{xy}),$$

y, al sustituir de (8.47), obtenemos

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\delta}\left\{1 - \frac{i}{\delta}\left[A_{xy} + \left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right) \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_{xy}\, q_{x+k}\, q_{y+k}\right]\right\}.$$

Ahora, con base en (5.36) para el estatus (xy), sustituimos $1 - d\ddot{a}_{xy}$ por A_{xy} y usamos (5.90), (5.91) para escribir

$$\bar{a}_{xy} = \alpha(\infty)\ddot{a}_{xy} - \beta(\infty) - \frac{i}{\delta^2}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\,q_{x+k}\,q_{y+k}. \tag{8.49}$$

La fórmula (8.49) se sigue del supuesto de que $T(x)$ y $T(y)$ están distribuidos independiente y uniformemente en los años futuros. Si suponemos que $T(xy)$ en si misma es uniformemente distribuida para cada año futuro, entonces por el caso continuo, $m = \infty$, de (5.71), tendríamos inmediatamente

$$\bar{a}_{xy} = \alpha(\infty)\,\ddot{a}_{xy} - \beta(\infty). \tag{8.50}$$

La fórmula (8.50) difiere de (8.49) por una pequeña cantidad, que se aproxima al producto de $i/(6\delta)$ y la prima neta única para una seguro pagadero si ambos individuos mueren en el mismo año futuro.

Para utlizar el mismo enfoque para evaluar el valor presente actuarial de una anualidad vencida pagadera m veces, necesitamos una expresión para $A_{xy}^{(m)}$ bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos para cada uno de los individuos en cada año de edad. En analogía con el caso continuo, empezamos con

$$A_{xy}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\,{}_kp_{xy}\sum_{j=1}^{m} v^{j/m}\left({}_{(j-1)/m}p_{x+k:y+k} - {}_{j/m}p_{x+k:y+k}\right). \tag{8.51}$$

En el Ejercicio 8.29 esta expresión, bajo el supuesto de que $T(x)$ y $T(y)$ están independiente y uniformemente distribuidas en cada año de edad, se reduce a

$$A_{xy}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}A_{xy} + \frac{i}{i^{(m)}}\left(1 + \frac{1}{m} - \frac{2}{d^{(m)}} + \frac{2}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\,q_{x+k}\,q_{y+k}. \tag{8.52}$$

A medida que $m \to \infty$, las expresiones de (8.52) se aproximan a sus contrapartes de (8.47). Para interpretar el lado derecho de (8.52), observamos por analogía con (8.48) que el primer término es la aproximación usual para $A_{xy}^{(m)}$ y es exacta si $T(xy)$ esta distribuida uniformemente en cada año. Luego

$$\frac{i}{i^{(m)}}\left(1 + \frac{1}{m} - \frac{2}{d^{(m)}} + \frac{2}{i}\right) \cong \frac{m^2 - 1}{6m^2}i,$$

que es menos que $i/6$.

Mediante la sustitución de (8.52) en (5.64) reformulada para (xy), y reeemplazando A_{xy} por $1 - d\,\ddot{a}_{xy}$ obtenemos la fórmula para $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$ que es la análoga de (8.49). Si se ignora el segundo término de (8.52), la fórmula para $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$ se reduce a

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{xy} - \beta(m) \tag{8.53}$$

Otra vez por (5.71), esta es exacta bajo el supuesto de que la distribución de $T(xy)$ es uniforme en cada año del tiempo de vida futuro.

8.8 Funciones Contingentes Simples

En esta sección estudiaremos seguros que, además de depender del tiempo de interrupción del estatus, dependen del orden de los fallecimientos de los individuos que integran el grupo.

Empezaremos con la evaluación de la probabilidad de que (x) muera antes de (y) y antes de n años a partir de ahora. Esta probabilidad se representa por ${}_nq_{\overset{1}{x}y}$, en donde 1 sobre x indica que la probabilidad es para un evento en el que (x) muere antes de (y), y la n indica que el evento ocurre dentro de los n años. Luego ${}_nq_{\overset{1}{x}y}$ es igual a la doble integral de la *f.d.p* conjunta de $T(x)$ y $T(y)$ sobre el conjunto de resultados tales que $T(x) \leq T(y)$ y $T(x) \leq n$. Con el supuesto de que $T(x)$ y $T(y)$ son independientes, el integrando es el producto de la *f.d.p.* de una sola vida y tenemos

$${}_nq_{\overset{1}{x}y} = \int_o^n \int_t^\infty {}_sp_y\,\mu_{y+s}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,ds\,dt. \tag{8.54}$$

Moviendo ${}_tp_x\,\mu_{x+t}$ hacia afuera de la segunda integral observamos que este es ${}_tp_y$, por tanto (8.54) puede escribirse

$${}_nq_{\overset{1}{x}y} = \int_o^n {}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,dt. \tag{8.55}$$

La interpretación de esta expresión contiene tres elementos. Primero, debido a que t es el tiempo del fallecimiento de (x), la probabilidad ${}_tp_{xy}$ indica que ambos (x) y (y) sobreviven en el tiempo t. Segundo, $\mu_{x+t}\,dt$ es la probabilidad de que (x), ahora de edad $x+t$, morirá en el intervalo dt, y finalmente las probabilidades se suman para todos los tiempos t entre 0 y n.

También podemos evaluar la probabilidad de que (y) muera despues de (x) y antes de n años a partir de ahora. Esta probabilidad esta representada por ${}_nq_{x\overset{2}{y}}$, el 2 arriba de la y indica que (y) muere en segundo término, la n requiere que esto ocurra dentro de los n años. Para evaluar ${}_nq_{x\overset{2}{y}}$. integramos la *f.d.p.* conjunta de $T(x)$ y $T(y)$ sobre el evento $[0 \leq T(x) \leq T(y) \leq n]$ usando $T(y)$ como la variable de la integral externa,

$${}_nq_{x\overset{2}{y}} = \int_o^n \int_o^t {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,{}_tp_y\,\mu_{y+t}\,ds\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_o^n (1 - {}_tp_x)\, {}_tp_y\, \mu_{y+t}\, dt && (8.56) \\
&= {}_nq_y - {}_nq_{x\overset{1}{y}}.
\end{aligned}
$$

En la segunda expresión el integrando es el producto

$$Pr[(x) \text{ muera antes que } (y)|(y) \text{ muere en } t]Pr[\,(y) \text{ muera en } t].$$

Se pueden escribir integrales similares para las primas netas únicas para seguros contingentes. También podemos usar $T(x)$ como la variable para la primera integral. Esto da

$$
\begin{aligned}
{}_nq_{x\overset{2}{y}} &= \int_o^n \int_s^n {}_sp_x\, \mu_{x+s}\, {}_tp_y\, \mu_{y+t}\, dt\, ds \\
&= \int_o^n (\,{}_sp_y - {}_np_x)\, {}_sp_y\, \mu_{x+s}\, ds && (8.57) \\
&= {}_nq^1_{xy} - {}_np_y\, {}_nq_x.
\end{aligned}
$$

La segunda expresión se interpreta como que (x) muere en el tiempo s con $0 < s < n$, y que (y) sobrevive al tiempo s pero no al tiempo n. Más aún, ahora tenemos que

$${}_nq^1_{xy} = {}_nq_{x\overset{2}{y}} + {}_np_y\, {}_nq_x.$$

Esto implica

$${}_nq^1_{xy} \geq {}_nq_{x\overset{2}{y}}.$$

Se pueden escribir integrales similares para las primas netas únicas para seguros contingentes, pero el análogo de la doble integral de (8.57) no se simplifica en la misma medida. Los siguientes ejemplos ilustran primas netas únicas para seguros contingentes.

Ejemplo 8.6:

Derive la prima neta única para un seguro de 1 pagadero al tiempo de la muerte de (x) tomando en cuenta que (y) aún vive.

Solución:

La prima neta única, representada por $\bar{A}^1_{xy}$ es $E[Z]$ donde

$$Z = \begin{cases} v^{T(x)} & T(x) \le T(y) \\ 0 & T(x) > T(y). \end{cases}$$

Como Z es una función de $T(x)$ y $T(y)$, podemos escribir una integral para la esperanza de Z usando la distribución conjunta de $T(x)$ y $T(y)$,

$$\begin{aligned} \bar{A}^{1}_{xy} &= \int_o^{\infty} \int_t^{\infty} v^t \, {}_sp_y \, \mu_{y+s} \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, ds \, dt \\ &= \int_o^{\infty} v^t \, {}_tp_{xy} \, \mu_{x+t} \, dt. \end{aligned}$$

La expresión final puede interpretarse en la siguiente forma: si (x) muere en cualquier tiempo futuro t y (y) aún sobrevive, entonces se hará un pago de 1 con valor presente v^t.

∇

Ejemplo 8.7:

Derive la prima neta única para un seguro de 1 pagadero al momento de la muerte de (y) si muere antes que (x).

Solución:

La prima neta única, representada por $\bar{A}_{x\overset{2}{y}}$ es $E[Z]$ donde

$$Z = \begin{cases} v^{T(y)} & T(x) \le T(y) \\ 0 & T(x) > T(y). \end{cases}$$

Otra vez, Z es un función de $T(x)$ y $T(y)$ así que podemos utilizar su *f.d.p.* conjunta para obtener $E[Z]$,

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x\overset{2}{y}} &= \int_o^{\infty} \int_o^{t} v^t \, {}_sp_x \, \mu_{x+s} \, {}_tp_y \, \mu_{y+t} \, ds \, dt \\ &= \int_o^{\infty} v^t \, (1 - {}_tp_x) \, {}_tp_y \, \mu_{yt} \, dt \\ &= \bar{A}_y - \bar{A}_{x\overset{1}{y}}. \end{aligned}$$

Notemos aquí que podemos expresar la prima neta única para un seguro contingente simple, pagadera a la muerte de otro diferente de la primera muerte, en términos de primas netas únicas para seguros pagaderos a la primera muerte. Este es el paso inicial en la evaluación numérica de los seguros contingentes simples.

Puede obtenerse otra expresión al revertir el orden de la integración en la doble integral, es decir, proceda como en (8.57). Tenemos

$$\bar{A}_{\overset{2}{x}y^{1}} = \int_0^\infty \int_s^\infty v^t\, {}_tp_y\, \mu_{y+t}\, {}_sp_x\, \mu_{x+s}\, dt\, ds.$$

Ahora reemplacemos t por $r+s$ en la segunda integral, reescriba la expresión y evalúela.

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{\overset{2}{x}y^{1}} &= \int_0^\infty \int_0^\infty v^{r+s}\, {}_{r+s}p_y\, \mu_{y+r+s}\, {}_sp_x\, \mu_{x+s}\, dr\, ds \\
&= \int_0^\infty v^s\, {}_sp_y\, {}_sp_x\, \mu_{x+s} \left(\int_0^\infty v^r\, {}_rp_{y+s}\, \mu_{y+s+r}\, dr \right) ds \\
&= \int_0^\infty v^s\, \bar{A}_{y+s}\, {}_sp_y\, {}_sp_x\, \mu_{x+s}\, ds.
\end{aligned}$$

Esta última integral es una aplicación del resultado general dado en (2.11), $E[W] = E[E[W|V]]$. Aquí $V = T(x)$, $W = Z$ y observamos que la esperanza condicional de Z dado $T(x) = s$, es la prima neta única, $v^s\, {}_sp_y\, \bar{A}_{y+s}$, para una dotación pura por una cantidad de $\bar{A}_{y+s}$ suficiente para hacer un fondo de una unidad de seguro sobre $(y+s)$.

∇

En esta sección hemos discutido sólo los seguros contingentes. Las anualidades contingentes, llamadas *anualidades reversibles*, se estudiarán en el Capítulo 17. Estas inician los pagos a la interrupción de un estatus dado si existe un segundo estatus, y continua pagando hasta la interrupción del segundo estatus. (Veánse los Ejemplos 8.3 y 8.4 como ilustraciones preliminares.)

8.9 Funciones Contingentes Simples - Evaluación

Nos dedicaremos ahora a la evaluación de probabilidades contingentes simples y primas netas únicas, señalando los efectos de suponer la ley de Gompertz, la de Makeham y una distribución uniforme de los fallecimientos.

Ejemplo 8.8:

Asumiendo la ley de Gompertz para las fuerzas de mortalidad, calcule

a. la prima neta única para un seguro contingentes a plazo de n años que paga una unidad al momento de la muerte de (x) sólo si (x) muere antes de (y)

b. la probabilidad de que (x) muera dentro de los n años y fallezca antes que (y).

Solución:

a.

$$\bar{A}^{\,1}_{x\,y:\overline{n|}} = \int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}\, \mu_{x+t}\, dt$$

Según la ley de Gompertz,

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{\,1}_{x\,y:\overline{n|}} &= \int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}\, Bc^x c^t\, dt \\
&= \frac{c^x}{c^x + c^y} \int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}\, B(c^x + c^y)c^t\, dt \\
&= \frac{c^x}{c^x + c^y} \int_0^n v^t\, {}_tp_{xy}\, \mu_{x+t:y+t}\, dt \\
&= \frac{c^x}{c^x + c^y} \bar{A}^{\;\;1}_{\overline{xy}:\overline{n|}}\,.
\end{aligned} \tag{8.58}$$

Más aún, si (8.40) es válida, entonces

$$\bar{A}^{\;\;1}_{\overline{xy}:\overline{n|}} = \bar{A}^{\;1}_{w:\overline{n|}},$$

y

$$\bar{A}^{\,1}_{x\,y:\overline{n|}} = \frac{c^x}{c^w} \bar{A}^{\;1}_{w:\overline{n|}}. \tag{8.59}$$

b. Con referencia a (8.55) observamos que ${}_nq^{\,1}_{xy}$ es $\bar{A}^{\,1}_{x\,y:\overline{n|}}$ con $v = 1$. Por tanto, se sigue de (8.59) que, según la ley de Gompertz,

$${}_nq^{\,1}_{xy} = \frac{c^x}{c^w}\, {}_nq_w \tag{8.60}$$

en donde $c^w = c^x + c^y$. ∇

Ejemplo 8.9:

Asumiendo la lay de Makeham para las fuerzas de mortalidad, repita el Ejemplo 8.8.

Solución:

a.

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{\;1}_{x\,y:\overline{n}|} &= \int_o^n v^t\,{}_tp_{xy}(A+Bc^x x^t)\,dt \\
&= A\int_o^n v^t\,{}_tp_{xy}\,dt + \frac{c^x}{c^x+c^y}\int_o^n v^t\,{}_tp_{xy}\,B(c^x+c^y)c^t\,dt \\
&= A\left(1-\frac{2c^x}{c^x+c^y}\right)\int_o^n v^t\,{}_tp_{xy}\,dt \\
&\quad + \frac{c^x}{c^x+c^y}\int_o^n v^t\,{}_tp_{xy}\,[2A+B(c^x+c^y)c^t]\,dt \\
&= A\left(1-\frac{2c^x}{c^x+c^y}\right)\bar{a}_{xy:\overline{n}|} + \frac{c^x}{c^x+c^y}\bar{A}^{\;\;1}_{\overline{xy}:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

después utilizando (8.44) Obtenemos

$$\bar{A}^{\;1}_{x\,y:\overline{n}|} = A\left(1-\frac{c^x}{c^w}\right)\bar{a}_{ww:\overline{n}|} + \frac{c^x}{2c^w}\,\bar{A}^{\;\;1}_{\overline{xy}:\overline{n}|}\,. \tag{8.61}$$

b. Establecemos otra vez $v = 1$ en el resultado de la parte (a) para tener

$${}_nq^1_{xy} = A\left(1-\frac{c^x}{c^w}\right)\mathring{e}_{ww:\overline{n}|} + \frac{c^x}{2c^w}\,{}_nq_{ww}. \tag{8.62}$$

∇

La prima neta única para un seguro contingente pagando al final del año de la muerte es

$$A^1_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{xy}\,q_{\overset{1}{x+k}:y+k}\,. \tag{8.63}$$

Con el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos para cada individuo, tenemos

$$
\begin{aligned}
q_{\overset{1}{x+k}:y+k} &= \int_0^1 {}_s p_{x+k:y+k}\, \mu_{x+k+s}\, ds \\
&= \int_0^1 q_{x+k}\,(1 - s\, q_{y+k})\, ds \\
&= q_{x+k}\left(1 - \frac{1}{2} q_{y+k}\right).
\end{aligned}
\tag{8.64}
$$

Podemos ahora reescribir ${}_s p_{x+k:y+k}\, \mu_{x+k+s}$ en términos de $q_{\overset{1}{x+k}:y+k}$,

$$
\begin{aligned}
{}_s p_{x+k:y+k}\, \mu_{x+k+s} &= q_{x+k}(1 - s\, q_{y+k}) \\
&= q_{x+k}\left(1 - \frac{1}{2} q_{y+k}\right) + \left(\frac{1}{2} - s\right) q_{x+k}\, q_{y+k} \\
&= q_{\overset{1}{x+k}:y+k} + \left(\frac{1}{2} - s\right) q_{x+k}\, q_{y+k}.
\end{aligned}
\tag{8.65}
$$

Para el pago inmediato de las reclamaciones, la prima neta única es

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^1_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_k p_{xy} \int_0^1 v^s\, {}_s p_{x+k:y+k}\, \mu_{x+k+s}\, ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_k p_{xy} \left[q_{\overset{1}{x+k}:y+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s}\, ds \right. \\
&\quad \left. + q_{x+k}\, q_{y+k} \int_0^1 (1+i)^{1-s} \left(\frac{1}{2} - s\right) ds \right] \\
&= \frac{i}{\delta} A^1_{xy} + \frac{1}{2}\frac{i}{\delta}\left(1 - \frac{2}{\delta} + \frac{2}{i}\right) \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_k p_{xy}\, q_{x+k}\, q_{y+k}.
\end{aligned}
\tag{8.66}
$$

El segundo termino en (8.66) es **muy pequeño relativo al total de la prima . Esto es, 1/2 en el** segundo termino de (8.47).

8.10 Notas y Referencias

El concepto de la variable aleatoria para el tiempo de vida futuro, desarrollado para una sóla vida en capítulos anteriores, ha sido extendido a un estatus general, en base al cual se definieron casos particulares como el de varias vidas. Mediante la adaptación de la teoría de una sola vida se obtuvieron

distribuciones de probabilidad, valores presentes actuariales, primas netas únicas, varianzas y covarianzas basadas en estas nuevas variables aleatorias para estatus definidos para dos vidas. Estos conceptos se desarrollarán para más de dos vidas en el Capítulo 17.

Se podrán encontrar discusiones sobre las ideas expuestas en este capítulo sin la utilización de variables aleatorias en los Capítulos 9-13 de Jordan (1967) y en el 7-8 de Neill (1977). Un análisis general de las leyes de mortalidad, que simplifica las fórmulas para las funciones actuariales basadas en más de una vida, podrá encontrarse en Greville (1956).

8.11 Ejercicios

A menos que se indique lo contrario, todas las vidas se sujetan a la misma tabla de tasa de mortalidad y sus tiempos de vida transcurridos hasta la muerte son variables aleatorias independientes.

Sección 8.2

8.1 En términos de probabilidades para una sola vida ${}_np_x$ y ${}_np_y$ expresar

a. la probabilidad de que (xy) sobrevivan n años

b. la probabilidad de que exactamente una de las vidas (x) y (y) sobrevivan n años

c. la probabilidad de que al menos una de las vidas (x) y (y) sobreviva n años

d. la probabilidad de que (xy) se interrumpa dentro de los n años

e. la probabilidad de que al menos una de las vidas muera dentro de n años

f. la probabilidad de que ambas vidas mueran dentro de n años.

8.2 Demuestre que la probabilidad de que (x) sobreviva n años y (y) sobreviva $n-1$ años puede expresarse ya sea como

$$\frac{{}_np_{x:y-1}}{p_{y-1}}$$

o como

$$p_x\ {}_{n-1}p_{x+1:y}.$$

8.3 Evalúe

$$\int_0^n {}_tp_{xx}\,\mu_{xx}(t)\,dt.$$

Sección 8.3

8.4 **Demuestre**

$$ {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_{xy} + {}_tp_x(1 - {}_tp_y) + {}_tp_y(1 - {}_tp_x) $$

algebráicamente y por razonamiento general.

8.5 Encuentre la probabilidad de que al menos una de dos vidas (x) y (y) muera en el año $(n+1)$. ¿ Es lo mismo que ${}_{n|}q_{\overline{xy}}$? Explique.

Sección 8.4

8.6 Dado que ${}_{25}p_{25:50} = 0.2$ y ${}_{15}p_{25} = 0.9$, calcule la probabilidad de que una persona de 40 años de edad sobreviva a la edad de 75.

8.7 Si $\mu_x = 1/(100 - x)$ para $0 \le x < 100$, calcule

a. ${}_{10}p_{40:50}$	e. $Var[T(40:50)]$
b. ${}_{10}p_{\overline{40:50}}$	f. $Var[T(\overline{40:50})]$
c. $\mathring{e}_{40:50}$	g. $Cov[T(40:50), T(\overline{40:50})]$
d. $\mathring{e}_{\overline{40:50}}$	h. la correlación entre T(40:50) y $T(\overline{40:50})$.

8.8 Evalúe $\dfrac{d\,\mathring{e}_{xx}}{dx}$.

8.9 Demuestre que la probabilidad de dos vidas (30) y (40) que mueren en el mismo año puede expresarse como

$$ 1 + e_{30:40} - p_{30}(1 + e_{31:40}) - p_{40}(1 + e_{30:41}) + p_{30:40}(1 + e_{31:41}). $$

8.10 Demuestre que la probabilidad de dos vidas (30) y (40) que mueren a la misma edad en el último aniversario puede expresarse como

$$ {}_{10}p_{30}\,(1 + e_{40:40}) - 2\,{}_{11}p_{30}\,(1 + e_{40:41}) + p_{40}\,{}_{11}p_{30}\,(1 + e_{41:41}). $$

8.11 **Suponga que las fuerzas de mortalidad que se aplican a los individuos I y II son**

$$\mu_x^I = \log\frac{10}{9}, \text{ para toda } x$$

y

$$\mu_x^{II} = (10-x)^{-1}, \text{ para } 0 \le x < 10.$$

Evalúe la probabilidad que, si ambos individuos son de un año exacto de edad, la primera muerte ocurra entre las edades exactas 3 y 5.

Sección 8.5

8.12 Demuestre que

$$a_{\overline{\overline{xy}:\overline{n}|}} = a_{\overline{n}|} + {}_{n|}a_{\overline{xy}}.$$

Describa la indemnización implícita.

8.13 Para una prima neta única representada como $\bar{A}_{\overline{x:\overline{n}|}}$ **describa la indemnización. Demuestre que**

$$\bar{A}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \bar{A}_x - \bar{A}_{x:\overline{n}|} + v^n.$$

8.14 Para tiempos de vida independientes $T(x)$ y $T(y)$, **demuestre que**

$$Cov[v^{T(\overline{xy})}, v^{T(xy)}] = (\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{xy}).$$

8.15 Exprese, en términos de valores **de anualidad de vida única y conjuntas, el valor presente actuarial** de una anualidad pagadera **continuamente a una tasa de 1 por año bajo la consideración que uno** de los dos, (25) o (30), **sobreviva y esté por debajo de los 50 años de edad.**

8.16 Exprese, en términos de **valores de anualidad de vida única y conjunta, el valor presente actuarial** de una anualidad **diferida de 1 pagadera al final de cualquier año durante el tiempo en el que este** viviendo alguno de **ambos, (25) o (30) y tenga más de 50 años de edad.**

8.17 Calcule el valor **presente actuarial de una anualidad vencida temporal a n años, pagadera con respecto a $(\overline{xy})$ proporcionando pagos anuales de 1 mientras ambas vidas sobrevivan, reduciéndose a 1/2 a la muerte de (x) y a 1/3 a la muerte de (y).**

8.18 Una anualidad inmediata de 1 es pagadera a (x) durante el tiempo que viva conjuntamente con (y) y por n años después de la muerte de (y), excepto que en ningún caso los pagos se harán después de m años a partir del tiempo presente, $m < n$. Demuestre que el valor presente actuarial es

$$a_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x\, a_{x+n:y:\overline{m-n}|}.$$

8.19 Obtenga una expresión para el valor presente actuarial de una anualidad continua de 1 por año pagadera mientras al menos una de las dos vidas (40) y (55) esté viva y tenga más de 60 años, pero no si (40) está viva y tiene menos de 55 años.

8.20 Una anualidad de sobrevivencia conjunta de (x) y (y) es pagadera a una tasa inicial por año mientras (x) vive, y si (y) sobrevive a (x), se continua a la fracción $p, 1/2 \leq p \leq 1$, de la tasa inicial por año durante el tiempo de vida de (y) después de la muerte de (x).

a. Exprese el valor presente actuarial de tal anualidad vencida con una tasa inicial de 1 por año, pagadera en plazos mensuales, en términos de los valores presentes actuariales de anualidades de una sóla vida y vida conjunta.

b. Se dice que una anualidad conjunta y de sobrevivencia de (x) y (y) y una anualidad vitalicia de (x) son actuarialmente equivalentes sobre la base de los supuestos establecidos si tienen valores presentes actuariales iguales. Derive una expresión para la relación del pago inicial de la anualidad conjunta y de sobrevivencia y la tasa de pago de la anualidad vitalicia actuarialmente equivalente.

Sección 8.6

8.21 Cuando, de acuerdo a la ley de Makeham, el estatus (xy) se reemplaza por el (ww), demuestre que

$$w - y = \frac{\log(c^{\Delta} + 1) - \log 2}{\log c}$$

donde $\Delta = x - y \geq 0$. (Esto indica que w puede obtenerse de la edad más joven de y mediante la suma de una cantidad que es una función de $\Delta = x - y$. A tal propiedad se le conoce como ley de prioridad uniforme.) (También podría traducirse como *ley de antiguedad uniforme*)

8.22 Con base en la Tabla de Vida Ilustrativa con interés de 6%, calcule $\ddot{a}_{50:60:\overline{10}|}$. En su solución utilice

a. valores interpolados en la tabla $\ddot{a}_{xx}$

b. valores de la tabla $\ddot{a}_{x:x+10}$.

8.23 Dada una tabla de mortalidad que sigue la ley de Makeham y edades x y y para las que (ww) es el estatus de igual edad equivalente, demuestre que

a. ${}_tp_w$ es la media geométrica de ${}_tp_x$ y ${}_tp_y$.

b. ${}_tp_x + {}_tp_y > 2\,{}_tp_w$ para $x \neq y$

c. $a_{\overline{xy}} > a_{\overline{ww}}$ para $x \neq y$.

8.24 Dada una tabla de mortalidad que siga la ley de Makeham, demuestre que $\bar{a}_{xy}$ es igual al valor presente actuarial de una anualidad con una sola vida (w) donde $c^w = c^x + c^y$ y la fuerza de interés $\delta' = \delta + A$. Además, demuestre que

$$\bar{A}_{xy} = \bar{A}'_w + A\bar{a}'_w$$

en donde las funciones primas son evaluadas a la fuerza de interés δ'.

8.25 Considere dos tablas de mortalidad, una para hombres, **M**, y una para mujeres, **F**, con

$$\mu_z^M = 3a + \frac{3bz}{2} \text{ y } \mu_z^F = a + bz.$$

Deseamos usar una tabla de valores presentes actuariales para dos vidas, una para hombres y la otra para mujeres, cada uno de edad w, para evaluar el valor presente actuarial de una anualidad de vida conjunta para un hombre de edad x y una mujer de edad y. Exprese w en términos de x y y.

Sección 8.7

8.26 Encuentre $\mathring{e}_{xy}$ si $q_x = q_y = 1$ y los fallecimientos están distribuidos uniformememnte en el año de edad para cada (x) y (y).

8.27 Sean $T(x)$ y $T(y)$ independientes y uniformemente distribuidos en el siguiente año de edad. Dado que ambos (x) y (y) mueren dentro del siguiente año, demuestre que el tiempo de la interrupción de (xy) no esta distribuida uniformemente en el año. [Sugerencia: demuestre que $Pr[T(xy) \leq t|\{(T(x) \leq 1) \cap (T(y) \leq 1)\}] = 2t - t^2$.]

8.28 Demuestre

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta} &= \frac{1}{i[1-(i/2-i^2/3+i^3/4-i^4/5+\cdots)]}\\ &= \frac{1}{i}\left(1+\frac{i}{2}-\frac{i^2}{12}+\frac{i^3}{24}-\frac{19i^4}{720}+\cdots\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, demuestre

$$\frac{i}{\delta}\left(1-\frac{2}{\delta}+\frac{2}{i}\right) \cong \frac{i}{6}-\frac{i^3}{360}+\cdots.$$

8.29 Demuestre que si los fallecimientos están distribuidos uniformemente para cada año de edad, entonces

$$_{(j-1)/m}p_{xy} - {}_{j/m}p_{xy} = \frac{1}{m}q_{xy} + \frac{m+1-2j}{m^2}q_x\, q_y$$

para cualquier x y y, y $j = 1, 2, 3, \cdots, m$. Por tanto, verifique la expresión (8.52).

Sección 8.8

8.30 Demuestre mediante un razonamiento general que

$$_nq^1_{xy} = {}_nq_{\overset{2}{x}y} + {}_nq_x\, {}_np_y.$$

¿ Cuando $n \to \infty$, en qué se transforma esa ecuación ?

8.31 Demuestre que la prima neta única para un seguro de 1 pagadera al final del año de la muerte de (x), con tal de que (y) sobreviva al tiempo de pago, puede expresarse como $v\, p_y\, \ddot{a}_{x:y+1} - a_{xy}$.

8.32 Demuestre que $A_{\overset{1}{x}y} - A_{x\overset{2}{y}} = A_{xy} - A_y$.

8.33 Exprese, en términos de primas netas únicas **para una sola vida y seguros contingentes de la** primera muerte, la prima neta única **para un seguro de 1 pagadero al momento de la muerte de** (50), con tal de que (20), en ese tiempo, haya muerto o **alcanzado la edad de 40.**

8.34 Exprese, en términos de primas netas únicas **para dotación pura y seguros contingentes a la** primera muerte, la prima neta única para **un seguro de 1 pagadero al tiempo de la muerte de (x)** después de (y), con tal de que (y) muera durante **los n años anteriores a la muerte de (x).**

8.35 Si $\mu_x = 1/(100 - x)$ para $0 \le x < 100$, calcule $_{25}q_{25:\overset{2}{50}}$.

Sección 8.9

8.36 En una tabla de mortalidad **que se sabe que sigue la ley de Makeham, se proporciona el dato de** que $A = 0.003$ y $c^{10} = 3$.

a. Si $\mathring{e}_{40:50} = 17$, calcule $_\infty q^1_{40:50}$.

b. Exprese $\bar{A}_{\overset{1}{40}:50}$ en términos de $\bar{A}_{40:50}$ y $\bar{a}_{40:50}$.

8.37 Dado que la mortalidad sigue la ley de Gompertz con $\mu_x = 10^{-4}\, 2^{x/8}$ para $x > 35$ y de que por (8.59)

$$\bar{A}^{\,1}_{40:48:\overline{10}|} = f\bar{A}^{\,1}_{w:\overline{10}|},$$

calcule f y w.

Misceláneos

8.38 El estatus $(\overline{n}|)$ es uno que existe para exactamente n años. Ha sido utilizado conjuntamente con estatus de vida, por ejemplo, en $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$, $\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}$, $\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, $A_{xy:\overline{n}|}$. Simplifique e interprete lo siguiente:

a. $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$

b. $\bar{A}_{\underset{x:\overset{2}{\overline{n}|}}{}}$.

8.39 Use la regla de probabilidad $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$ para obtener (8.18).

8.40 Evalúe $\frac{\partial}{\partial x}\, \mathring{e}_{xy}$.

Capítulo 9

MODELOS DE DECREMENTO MULTIPLE

9.1 Introducción

En el Capítulo 8 extendimos para el caso de múltiples vidas, la teoría para una vida individual sujeta a una contingencia única de fallecimiento; explicada desde el Capítulo 3 hasta el 7. Ahora regresaremos al caso de una sola vida, pero sujeta aquí a múltiples contingencias. Como una aplicación de esta extensión observamos que el número de trabajadores de un patrón se reducirán cuando un empleado sale, se incapacita, muere o se retira. En la planeación de la fuerza de trabajo, podría ser necesario estimar sólo el número de aquellos actualmente empleados que permanecerán activos durante varios años en el futuro. Para esta tarea, el modelo de sobrevivencia desarrollado en el Capítulo 3 sería adecuado si interpretamos la variable aleatoria básica como el tiempo que transcurre hasta que se presenta la terminación del empleo en lugar del tiempo que transcurre hasta el fallecimiento. Sin embargo, los actuarios requieren modelos para los planes de indemnización de los empleados en los que las indemnizaciones pagadas a la terminación del empleo puedan depender de la causa de la terminación. Por ejemplo, las indemnizaciones al retiro frecuentemente diferirán de aquellas pagaderas por fallecimiento o incapacidad. Por lo tanto, los modelos de sobrevivencia para los sistemas de indemnización de los empleados incluirán variables aleatorias tanto para el tiempo de terminación como para la causa de la terminación. También la estructura de la indemnización depende frecuentemente de las ganancias, las cuales obedecen a otro tipo diferente de incertidumbre que se discutirá en el Capítulo 10.

En otra aplicación, la mayoría de los seguros de vida individual estipulan el pago de una indemnización sin pérdida de derechos, si se interrumpe el pago de las primas antes del final del plazo especificado para el pago de las primas. Un modelo completo para tales seguros incorporará como variables aleatorias el tiempo que transcurre hasta que tiene lugar la terminación, asi como la causa de dicha terminación.

El seguro de ingresos por incapacidad estipula pagos periódicos a los asegurados que satisfacen la definición de incapacidad contenida en la póliza. En algunos casos, la cantidad de los pagos periódicos pueden depender de si la incapacidad fue causada por enfermedad o accidente. Una persona puede dejar de ser un asegurado activo por morir, salirse, incapacitarse o por alcanzar el final del periodo de cobertura. Un modelo completo del seguro de incapacidad incorporará una variable aleatoria para el tiempo que transcurre hasta que tiene lugar la terminación, cuando el asegurado cesa de ser miembro de los asegurados activos así como una variable aleatoria para la causa de la terminación.

En la planeación de la salud pública, existe interés en el análisis de la mortalidad y la sobrevivencia en términos de la causa de la muerte. Las metas de salud pública pueden establecerse mediante un estudio de la distribución conjunta del tiempo transcurrido hasta que tiene lugar la defunción y la causa de la misma. Las prioridades de investigación cardiovascular y sobre el cáncer se establecieron mediante este tipo de análisis.

El principal propósito de este capítulo es construir una teoría para estudiar la distribución de dos variables aleatorias con respecto a una sola vida: el tiempo transcurrido hasta que tiene lugar la terminación de un estatus dado y la causa de la terminación. El modelo resultante se utiliza en cada una de las aplicaciones descritas en esta sección. Dentro de la ciencia actuarial, la terminación de un estatus determinado se denomina ***decremento*** y la materia de este capítulo se llama ***teoría de decremento múltiple***. Dentro de la bioestadística se le conoce como la ***teoría de la competencia entre riesgos.***

También es posible desarrollar la teoría de decremento múltiple en términos de tasas determinísticas y funciones de tasas. Habrá alguna recapitulación de la teoría desde este punto de vista en la Sección 9.4.

9.2 Dos Variables Aleatorias

El Capítulo 3 se dedicó en parte a los métodos para especificar y usar la distribución de las variable aleatoria continua $T(x)$, el tiempo transcurrido hasta que sobreviene la muerte de (x). Los mismos métodos pueden utilizarse para estudiar el tiempo transcurrido hasta que tiene lugar la terminación de un estatus, tal como el empleo con un determinado empleador, con sólo pequeños cambios de vocabulario. De hecho, utilizaremos la misma notación $T(x)$, o más brevemente T, para representar la variable aleaatoria tiempo en este nuevo escenario.

En esta sección, ampliaremos el modelo básico al introducir una segunda variable aleatoria, causa del decremento, que se representará mediante $J(x) = J$. Supondremos que J es una variable aleatoria discreta.

Las aplicaciones de la Sección 9.1 proporcionan ejemplos de estas variables aleatorias. Para las aplicaciones de planes de indemnizaciones para empleados, se pueden asignar a la variable aleatoria J los valores 1, 2, 3 o 4 dependiendo de si la terminación se debe a salida, incapacidad, muerte o retiro , respectivamente. En la aplicación del seguro de vida, se puede asignar a J los valores 1 o 2, dependiendo de si el asegurado muere o escoge terminar el pago de las primas. Para la aplicación del seguro de incapacidad, el asegurado muere, sale, se incapacita o alcanza el final del periodo de cobertura. Finalmente, en la aplicacón a la salud pública, existen muchas posibles causas de decremento. Por ejemplo, en un estudio determinado, se le pueden asignar a J los valores 1, 2, 3 y 4 dependiendo de si la muerte fue causada por enfermedad cardiovascular, cáncer, accidente o todas las demás causas.

Nuestro propósito ahora es describir la distribución conjunta de T y J y las distribuciones condicionales y marginales relacionadas. Representaremos la *f.d.p.* conjunta de T y J mediante $f(t,j)$, la *f.p.* marginal de J con $h(j)$, y la *f.d.p.* marginal de T con $g(t)$. La Figura 9.1 ilustra estas distribuciones. Al principio pueden parecer extrañas porque J es una variable aleatoria discreta y T es continua.

La *f.d.p.* conjunta de T y J, $f(t,j)$ puede dibujarse como si cayera en m hojas paralelas, como se muestra en la Figura 9.1 para 3 causas de decremento ($m = 3$). Hay una hoja para cada una de estas m causas de decremento reconocibles en el modelo. En la Figura 9.1 son válidas las siguientes relaciones

$$\sum_{j=1}^{3} h(j) = 1$$

y

$$\int_{o}^{\infty} g(t)\,dt = 1.$$

La *f.d.p.* $F(t,j)$ puede utilizarse en la forma acostumbrada para calcular las probabilidades de los eventos definidos por T y J. Por ejemplo,

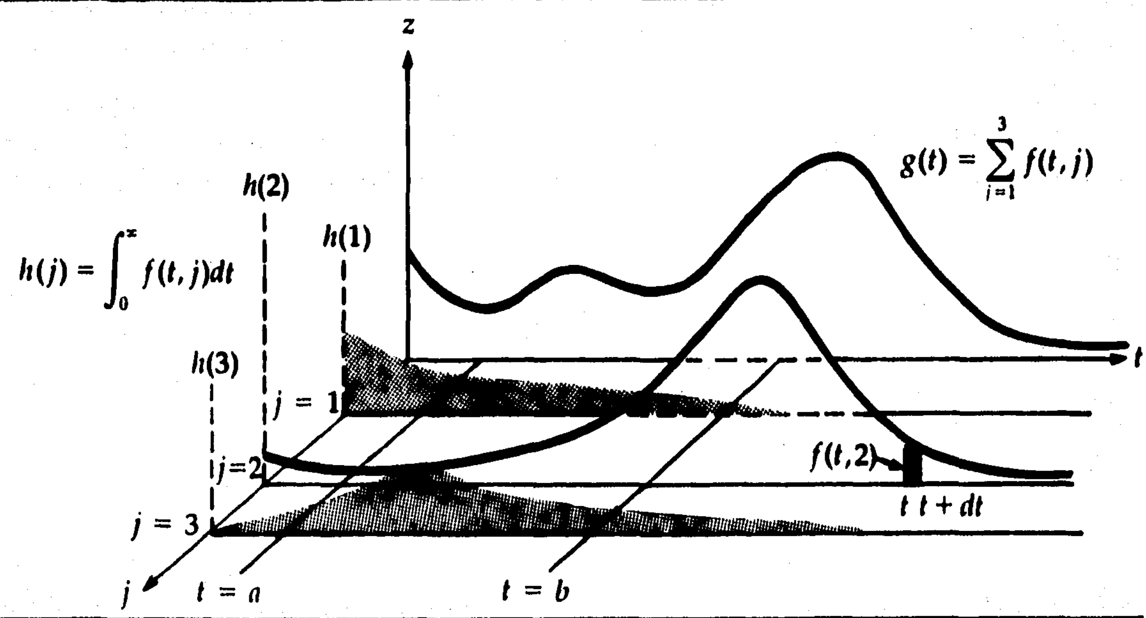
$$f(t,j)\,dt = Pr[t < T \leq t + dt,\ J = j]. \tag{9.1}$$

$$Pr(a < T \leq b) = \sum_{j=1}^{m} \int_{a}^{b} f(t,j)\,dt,$$

y

$$Pr(0 < T \leq t,\ J = j) = \int_{o}^{t} f(s,j)\,ds. \tag{9.2}$$

Figura 9.1: Gráfica de $f(t,j)$



La probabilidad de decremento antes del tiempo t debido a la causa j dada en (9.2) tiene el símbolo especial

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t f(s,j)\, ds \qquad t \geq 0,\ j = 1, 2, \cdots, m, \tag{9.3}$$

que es ilustrativo del uso del índice para representar la causa del decremento en la teoría del decremento múltiple.

Por la definición de la distribución marginal de j, que aparece como $h(J)$ en el plano (j,z) de la Figura 9.1, tenemos

$$h(j) = \int_0^\infty f(s,j)\, ds = {}_\infty q_x^{(j)} \qquad j = 1, 2, \cdots, m. \tag{9.4}$$

Esto es nuevo y no tiene contraparte en el Capítulo 3, a diferencia de la *f.d.p* marginal de T, $g(t)$ en el plano (t,z) de la Figura 9.1. Para $g(t)$, y la *f.d.*, $G(t)$, tenemos para $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \sum_{j=1}^{m} f(t,j) \\
\text{y} \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (9.5) \\
G(t) &= \int_{o}^{t} g(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Las notaciones introducidas en el Capítulo 3 pueden extenderse para acomodar la variable aleatoria T. Utilizando el índice (τ) para indicar que una función se refiere a todas las causas, o fuerza total, del decremento, obtenemos

$$
{}_tq_x^{(\tau)} = Pr(T \leq t) = G(t) = \int_{o}^{t} g(s)\, ds, \tag{9.6}
$$

$$
{}_tp_x^{(\tau)} = Pr(T > t) = 1 - {}_tq_x^{(\tau)}, \tag{9.7}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\mu_{x+t}^{(\tau)} &= \frac{g(t)}{1 - G(t)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt}\, {}_tq_x^{(\tau)} \\
&= -\frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt}\, {}_tp_x^{(\tau)} \qquad (9.8) \\
&= -\frac{d}{dt} \log\, {}_tp_x^{(\tau)}.
\end{aligned}
$$

Matemáticamente, estas funciones para la variable aleatoria T de este capítulo son idénticas a aquellas para T del Capítulo 3; la diferencia está en la interpretación que se les da en las aplicaciones.

Al igual que con las aplicaciones en los capítulos precedentes, la proposición en (9.1) puede analizarse condicionando la sobrevivencia en el estatus dado al tiempo t. De esta forma, tenemos

$$
f(t,j)\, dt = Pr[T > t]\, Pr[\{(t < T \leq t + dt) \cap (J = j)\} | T > t]. \tag{9.9}
$$

Por analogía con (3.12) esto sugiere la definición de la fuerza de decremento debido a la causa j como

$$
\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{f(t,j)}{1 - G(t)} = \frac{f(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}}. \tag{9.10}
$$

La fuerza del decremento a la edad $x+t$ debido a la causa j tiene una interpretación de probabilidad condicional. Es el valor de la *f.d.p* condicional conjunta de T y J a $x+t$, dado la sobrevivencia a $x+t$. Entonces (9.9) puede reexpresarse como

$$f(t,j)\,dt = {}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_{x+t}^{(j)}\,dt \qquad j=1,2,\cdots,m,\ \ t\geq 0. \qquad \text{(9.9) reformulada}$$

En palabras,

(la probabilidad conjunta de decremento entre t y $t+dt$ debido a la causa j)

= (la probabilidad, ${}_tp_x^{(\tau)}$, de que (x) permanezca en el estatus dado hasta el tiempo t)

× (la probabilidad condicional, $\mu_{x+t}^{(j)}$, de que el decremento X ocurra entre t y $t+dt$ debido a la causa j, dado que el decremento no ha ocurrido antes del tiempo t).

Se sigue, al diferenciar (9.3) y usando (9.10), que

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(j)}. \tag{9.11}$$

Ahora, de (9.6), (9.5) y (9.3)

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(\tau)} &= \int_o^t g(s)\,ds = \int_o^t \sum_{j=1}^{m} f(s,j)\,ds \\ &= \sum_{j=1}^{m}\int_o^t f(s,j)\,ds = \sum_{j=1}^{m}{}_tq_x^{(j)}. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Es interpretable de inmediato que el primero y último miembros de (9.12) son iguales. Combinando (9.8), (9.12) y (9.11), tenemos

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m}\mu_{x+t}^{(j)}, \tag{9.13}$$

es decir, la fuerza total de decremento es la suma de las fuerzas de decremento debido a las m causas.

Podemos resumir las definiciones presentadas hasta aquí expresando las *f.d.p.*, conjuntas marginales y condicionales en notación actuarial y repitiendo el número de la ecuación definida:

$$
\begin{aligned}
f(t,j) &= {}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_{x+t}^{(j)} && \textbf{(9.10) reformulada}\\
h(j) &= {}_\infty q_x^{(j)} && \textbf{(9.4) reformulada}\\
g(t) &= {}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_{x+t}^{(\tau)}. && \textbf{(9.8) reformulada}
\end{aligned}
$$

La *f.p.* condicional de J, dado el decremento al tiempo t, es

$$
\begin{aligned}
h(j|T=t) &= \frac{f(t,j)}{g(t)} = \frac{{}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_{x+t}^{(j)}}{{}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_{x+t}^{(\tau)}}\\
&= \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}}. \qquad \textbf{(9.14)}
\end{aligned}
$$

Finalmente, se nota que la probabilidad de (9.3) puede reexpresarse como

$$
{}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_sp_x^{(\tau)}\,\mu_{x+s}^{(j)}\,ds. \qquad \text{(9.3) reformulada}
$$

Ejemplo 9.1:

Considere un modelo de decremento múltiple con 2 causas de decremento, **las fuerzas de decremento** están dadas por

$$
\begin{aligned}
\mu_{x+t}^{(1)} &= \frac{t}{100} \qquad t \geq 0\\
\mu_{x+t}^{(2)} &= \frac{1}{100} \qquad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Para este modelo, calcule la *f.p.* (o ***f.d.p.***) **para las distribuciones conjunta, marginal y condicional.**

Solución:

Como

$$
\mu_{x+s}^{(\tau)} = \mu_{x+s}^{(1)} + \mu_{x+s}^{(2)} = \frac{s+1}{100},
$$

la probabilidad de sobrevivencia ${}_tp_x^{(\tau)}$ es

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)} &= \exp\left[-\int_o^t [(s+1)/100]\,ds\right] \\ &= \exp[-(t^2+2t)/200] \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

y la *f.d.p.* conjunta de T y J es

$$f(t,j) = \begin{cases} \frac{t}{100}\exp[-(t^2+2t)/200] & t \geq 0,\ j=1 \\ \frac{1}{100}\exp[-(t^2+2t)/200] & t \geq 0,\ j=2. \end{cases}$$

La *f.d.p.* marginal de T is

$$g(t) = \sum_{j=1}^{2} f(t,j) = \frac{t+1}{100}\exp[-(t^2+2t)/200] \qquad t \geq 0$$

y la *f.p.* marginal de J es

$$h(j) = \begin{cases} \int_o^\infty f(t,1)\,dt & j=1 \\ \int_o^\infty f(t,2)\,dt & j=2. \end{cases}$$

Es bastante fácil evaluar $h(2)$. En el siguiente desarrollo, $\Phi(x)$ es la *f.d.* para la distribución normal estándar $N(0,1)$. Completando el cuadrado tenemos

$$\begin{aligned} h(2) &= \frac{1}{100}e^{0.005}\int_o^\infty \exp[-(t+1)^2/200]\,dt \\ &= \frac{1}{100}e^{0.005}\sqrt{2\pi}\,10\int_o^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,10}\exp[-(t+1)^2/200]\,dt. \end{aligned}$$

Hacemos ahora el cambio de variable $z=(t+1)/10$ y obtenemos

$$
\begin{aligned}
h(2) &= \frac{1}{10}e^{0.005}\sqrt{2\pi}\int_{0.1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2)\,dz \\
&= \frac{1}{10}e^{0.005}\sqrt{2\pi}[1-\Phi(0.1)] \\
&= 0.1159.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $h(1) = 0.8841$. Finalmente la *f.p.* condicional de J, dado el decremento en t, se deriva de (9.14) como

$$
h(1|t) = \frac{t}{t+1}
$$

y

$$
h(2|t) = \frac{1}{t+1}.
$$

∇

Ejemplo 9.2:

Para la distribución conjunta de T y J especificada en el Ejemplo 9.1, calcule $E[T]$ y $E[T|J=2]$.

Solución:

Usando la *f.d.p.* marginal $g(t)$, tenemos

$$
E[T] = \int_{o}^{\infty} t\left\{\frac{t+1}{100}\exp[-(t^2+2t)/200]\right\}dt.
$$

La integración por partes, como en el Teorema 3.1, produce

$$
\begin{aligned}
E[T] &= -t\exp[-(t^2+2t)/200]|_{o}^{\infty} \\
&\quad + \int_{o}^{\infty}\exp[-(t^2+2t)/200]\,dt \\
&= 0 + 100h(2),
\end{aligned}
$$

por tanto

$$E[T] = 11.59.$$

Utilizando la *f.d.p.* condicional $f(t,2)/h(2)$, tenemos

$$E[T|J=2] = \int_0^\infty t\{100^{-1}\exp[-(t^2-2t)/200]\}(0.1159)^{-1}\,dt.$$

Esta integral puede evaluarse como sigue:

$$\begin{aligned}
E[T|J=2] &= E[(T+1)-1|J=2] \\
&= (0.1159)^{-1}\int_0^\infty \frac{t+1}{100}\exp[-(t^2+2t)/200]\,dt - 1 \\
&= -(0.1159)^{-1}\exp[-(t^2+2t)/200]|_0^\infty - 1 \\
&= 7.63.
\end{aligned}$$

El punto de los Ejemplos 9.1 y 9.2 es que una vez que la distribución conjunta de T y J se especifica, las distribuciones marginales y condicionales pueden derivarse y los momentos de estas distribuciones determinadas.

∇

En algunos casos, una aplicación particular puede requerir una modificación del modelo anterior. Una distribución conjunta para el tiempo transcurrido hasta la terminación, T, es inadecuado en aplicaciones donde hay un tiempo en el que no hay una probabilidad positiva de decremento.

Un ejemplo de ello es el plan de pensión con una edad de retiro obligatoria, edad a la que todos los empleados activos restantes deben retirarse. Un segundo ejemplo es el seguro de vida a plazo en el que típicamente no hay pago de indemnización al salirse. Por tanto, después de que se paga una prima, ninguno de los asegurados restantes se retirará hasta que la siguiente fecha de vencimiento de la prima. No intentaremos aquí extender la notacción para cubrir situaciones de ese tipo. Sin embargo, en la Sección 9.7 describiremos los modelos ampleados para cada uno de estos ejemplos.

La variable aleatoria K, los años futuros truncados antes del decremento de (x) se define, como en el Capítulo 3, como el entero más grande menor que T. La *f.p.* conjunta de K y J esta dada por

$$Pr[K=k,\ J=j] \ = \ Pr[k < T \leq k+1,\ J=j]$$

$$= \int_k^{k+1} {}_tp_x^{(\tau)}\, \mu_{x+t}^{(j)}\, dt$$

$$= {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\, \mu_{x+k+s}^{(j)}\, ds$$

$$= {}_kp_x^{(\tau)}\, q_{x+k}^{(j)} \tag{9.15}$$

donde

$$q_{x+k}^{(j)} = \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\, \mu_{x+k+s}^{(j)}\, ds \tag{9.16}$$

(compare con (9.3) reformulada). La probabilidad de decremento de todas las causas entre las edades $x+k$ y $x+k+1$, dada la sobrevivencia a la edad $x+k$, se representa con $q_{x+k}^{(\tau)}$, y se sigue que

$$q_{x+k}^{(\tau)} = \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\, \mu_{x+k+s}^{(\tau)}\, ds$$

$$= \int_0^1 {}_sp_{x+k}^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+k+s}^{(j)}\, ds$$

$$= \sum_{j=1}^{m} q_{x+k}^{(j)}. \tag{9.17}$$

Un examen de (9.16) y (9.17) revela por qué a la teoría del decremento múltiple se le denomina también como la teoría de competencia entre riesgos. La probabilidad de decremento entre las edades $x+k$ y $x+k+1$ debido a la causa j depende de ${}_sp_{x+k}^{(\tau)}$, $0 \le s \le 1$, y por lo tanto en todas las fuerzas componentes. Cuando se incrementan las fuerzas para otros decrementos, ${}_sp_{x+k}^{(\tau)}$ se reduce, y entonces $q_{x+k}^{(j)}$ también se disminuye.

9.3 Grupo Aleatorio de Sobrevivencia

Consideremos un grupo de $l_a^{(\tau)}$ vidas de edades a. Cada vida se supone que tiene una distribución del tiempo hasta que tiene lugar el decremento y causa del decremento especificado por la *f.d.p.*

$$f(t,j) = {}_tp_a^{(\tau)}\,\mu_{a+t}^{(j)} \qquad t \geq 0,\, j = 1, 2, \cdots, m.$$

Representaremos con ${}_n\mathcal{D}_x^{(j)}$ a la variable aleatoria igual al número de vidas que dejarán el grupo entre las edades x y $x+n$, $x \geq a$, de la causa j. Representaremos $E[{}_n\mathcal{D}_x^{(j)}]$ con ${}_nd_x^{(j)}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} {}_nd_x^{(j)} &= E[{}_n\mathcal{D}_x^{(j)}] \\ &= l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)}\,\mu_{a+t}^{(j)}\,dt. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Como se acostumbra, si $n = 1$, suprimimos los prefijos en ${}_n\mathcal{D}_x^{(j)}$ y ${}_nd_x^{(j)}$. Notamos que

$${}_n\mathcal{D}_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_n\mathcal{D}_x^{(j)}$$

y definimos

$${}_nd_x^{(\tau)} = E[{}_n\mathcal{D}_x^{(\tau)}] = \sum_{j=1}^{m} {}_nd_x^{(j)}. \tag{9.19}$$

Luego, utilizando (9.18), tenemos

$$\begin{aligned} {}_nd_x^{(\tau)} &= l_a^{(\tau)} \sum_{j=1}^{m} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)}\,\mu_{a+t}^{(j)}\,dt \\ &= l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x+n-a} {}_tp_a^{(\tau)}\,\mu_{a+t}^{(\tau)}\,dt. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Si $\mathcal{L}^{(\tau)}(x)$ está definida como la variable aleatoria igual al número de sobrevivientes a la edad x fuera de la $l_a^{(\tau)}$ vidas del grupo original a la edad a, luego por analogía con (3.21) podemos escribir

$$\begin{aligned} l_x^{(\tau)} &= E[\mathcal{L}^{(\tau)}(x)] \\ &= l_a^{(\tau)}\,{}_{x-a}p_a^{(\tau)}. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Podemos reexpresar (9.18 ,9.19) para el caso $n = 1$ y con $s = t - (x - a)$ como

$$d_x^{(j)} = l_a^{(\tau)} \int_0^1 {}_{s+x-a}p_a^{(\tau)}\, \mu_{x+s}^{(j)}\, ds.$$

Luego, mediante el uso de (9.21) y (9.16),

$$\begin{aligned} d_x^{(j)} &= l_a^{(\tau)}\, {}_{x-a}p_a^{(\tau)} \int_0^1 {}_sp_x^{(\tau)}\, \mu_{x+s}^{(j)}\, ds \\ &= l_x^{(\tau)}\, q_x^{(j)}. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Este resultado nos permite desplegar una tabla de los valores de $p_x^{(\tau)}$ y $q_x^{(j)}$ en una tabla correspondiente de valores de $l_x^{(\tau)}$ y $d_x^{(j)}$. Cualquiera de ellas se denomina ***tabla de decremento múltiple.***

Ejemplo 9.3:

Construya una tabla de valores de $l_x^{(\tau)}$ y $d_x^{(j)}$ correspondiente a las probabilidades de decremento que se dan abajo.

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
65	0.02	0.05
66	0.03	0.06
67	0.04	0.07
68	0.05	0.08
69	0.06	0.09
70	0.00	1.00

A pesar de que esta está diseñada para facilidad de cómputo, podría sugerir aproximadamente una situación de doble decremento con la causa 1 relacionada con la muerte y la 2 con el retiro. Parece ser que, en este caso, 70 es la edad obligatoria de retiro.

Solución:

Suponemos el valor arbitrario de $l_{65}^{(\tau)} = 1{,}000$ y usamos (9.22) como se indica abajo.

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)} = l_{x-1}^{(\tau)}\, p_{x-1}^{(\tau)}$	$d_x^{(1)} = l_x^{(\tau)}\, q_x^{(1)}$	$d_x^{(2)} = l_x^{(\tau)}\, q_x^{(2)}$
65	0.02	0.05	0.07	0.93	1,000.00	20.00	50.00
66	0.03	0.06	0.09	0.91	930.00	27.90	55.80
67	0.04	0.07	0.11	0.89	846.30	33.85	59.24
68	0.05	0.08	0.13	0.87	753.21	37.66	60.26
69	0.06	0.09	0.15	0.85	655.29	39.32	58.98
70	0.00	1.00	1.00	0.00	557.00	0.00	557.00

Nótese, como verificación de los cálculos, que $l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)}$, excepto por errores de redondeo. Continuamos este ejemplo con la evaluación, de los primeros principios, de varias probabilidades:

$$\begin{aligned}
{}_2p_{65}^{(\tau)} &= p_{65}^{(\tau)}\, p_{66}^{(\tau)} = (0.93)(0.91) = 0.8463 \\
{}_{2|}q_{66}^{(1)} &= p_{66}^{(\tau)}\, p_{67}^{(\tau)}\, q_{68}^{(1)} = (0.91)(0.89)(0.05) = 0.0405 \\
{}_2q_{67}^{(2)} &= q_{67}^{(2)} + p_{67}^{(\tau)}\, q_{68}^{(2)} = 0.07 + (0.89)(0.08) = 0.1412.
\end{aligned}$$

Las últimas tres columnas de la tabla anterior pueden usarse para obtener las mismas probabilidades. Las respuestas concuerdan a cuatro décimales:

$$\begin{aligned}
{}_2p_{65}^{(\tau)} &= \frac{l_{67}^{(\tau)}}{l_{65}^{(\tau)}} = \frac{846.30}{1,000.00} = 0.8463 \\
{}_{2|}q_{66}^{(1)} &= \frac{d_{68}^{(1)}}{l_{66}^{(\tau)}} = \frac{37.66}{930.00} = 0.0405 \\
{}_2q_{67}^{(2)} &= \frac{d_{67}^{(2)} + d_{68}^{(2)}}{l_{67}^{(\tau)}} = \frac{59.24 + 60.26}{846.30} = 0.1412.
\end{aligned}$$

∇

9.4 Grupo Determinístico de Sobrevivencia

La fuerza total de decremento puede también verse como una tasa total de decremento (anual nominal) en lugar de como una probabilidad de densidad condicional. Con este enfoque, donde suponemos un modelo continuo, un grupo de $l_a^{(\tau)}$ vidas avanza hacia la edad sujeta a fuerzas determinísticas de decremento $\mu_y^{(\tau)}$, $y \geq a$. El número de sobrevivientes a la edad x del grupo original de $l_a^{(\tau)}$ vidas a la edad a está dado por

$$l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)} \exp\left[-\int_a^x \mu_y^{(\tau)}\, dy\right], \tag{9.23}$$

y el decremento total entre las edades x y $x+1$ es

$$
\begin{aligned}
d_x^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} \\
&= l_x^{(\tau)}\left[1 - \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}\right] \\
&= l_x^{(\tau)}\left\{1 - \exp\left[-\int_x^{x+1} \mu_y^{(\tau)}\, dy\right]\right\} \\
&= l_x^{(\tau)}[1 - p_x^{(\tau)}] \\
&= l_x^{(\tau)}\, q_x^{(\tau)}.
\end{aligned} \tag{9.24}
$$

Más aún, por definición o de la diferenciación de (9.23), tenemos

$$\mu_x^{(\tau)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{dl_x^{(\tau)}}{dx}. \tag{9.25}$$

Estas fórmulas son análogas a aquéllas para las tablas de vida de la Sección 3.4. Aquí $q_x^{(\tau)}$ es la tasa efectiva anual total de decremento para el año de la edad x a $x+1$ equivalente a las fuerzas $\mu_y^{(\tau)}$, $x \leq y \leq x+1$.

Considérense ahora m causas de decremento y suponga que los $l_x^{(\tau)}$ sobrevivientes a la edad x, en edades futuras estarán totalmente vacíos por estas m formas de decremento. Entonces los $l_x^{(\tau)}$ sobrevivientes pueden verse como si cayesen dentro de subgrupos distintos $l_x^{(j)}$, $j = 1, 2, \cdots, m$; donde $l_x^{(j)}$ representa el número de los $l_x^{(\tau)}$ sobrevivientes que terminarán a edades futuras debido a la causa j, así que

$$l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)}. \tag{9.26}$$

Podemos ahora definir la fuerza de decremento a la edad x debido a la causa j mediante

$$\mu_x^{(j)} = \lim_{h \to 0} \frac{l_x^{(j)} - l_{x+h}^{(j)}}{h\, l_x^{(\tau)}}$$

donde $l_x^{(\tau)}$, no $l_x^{(j)}$, aparece en el denominador. Esto produce

$$\mu_x^{(j)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}}\frac{dl_x^{(j)}}{dx}. \tag{9.27}$$

De (9.25)-(9.27) se sigue que

$$\mu_x^{(\tau)} = -\frac{1}{l_x^{(\tau)}} \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_x^{(j)}. \tag{9.28}$$

La fórmula (9.27), con un cambio de variable, puede escribirse como

$$-dl_y^{(j)} = l_y^{(\tau)} \mu_y^{(j)}\, dy$$

e integrando de $y = x$ á $y = x + 1$ da

$$l_x^{(j)} - l_{x+1}^{(j)} = d_x^{(j)} = \int_x^{x+1} l_y^{(\tau)} \mu_y^{(j)}\, dy. \tag{9.29}$$

La suma sobre $j = 1, 2, \cdots, m$, produce

$$l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} = d_x^{(\tau)} = \int_x^{x+1} l_y^{(\tau)} \mu_y^{(\tau)}\, dy. \tag{9.30}$$

Además, al dividir la fórmula (9.29) por $l_x^{(\tau)}$, se tiene

$$\frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \int_x^{x+1} {}_{y-x}p_x^{(\tau)} \mu_y^{(j)}\, dy = q_x^{(j)} \tag{9.31}$$

donde $q_x^{(j)}$ es la proporción de los $l_x^{(\tau)}$ sobrevivientes a la edad x que terminan debido a la causa j antes de la edad $x + 1$ cuando todas las m causas de decremento están operando.

Como fue el caso para las tablas de vida el modelo determinístico proporciona un lenguaje alternativo y marco de referencia conceptual para la teoría de decremento múltiple.

9.5 Tablas Asociadas de Decremento Simple

Para cada una de las causas de decremento reconocidas en un modelo de decremento múltiple, es posible definir un modelo de decremento simple que dependa sólo de la causa particular de decremento. Definimos las funciones asociadas del modelo de decremento simple como sigue:

$${}_tp_x'^{(\tau)} \;=\; \exp\left[-\int_0^t \mu_{x+s}^{(j)}\, ds\right],$$

$$ {}_tq'^{(j)}_x = 1 - {}_tp'^{(j)}_x. \tag{9.32} $$

Las cantidades tales como ${}_tq'^{(j)}_x$ se denominan ***probabilidades netas de decremento*** en bioestadística ya que son netas de otras causas de decremento. Sin embargo, se le han dado muchas otros nombres a la misma cantidad. Uno de ellos es *tasa independiente de decremento*, escogida porque la causa j no compite con otras causas al determinar ${}_tq'^{(j)}_x$. El término que emplearemos para ${}_tq'^{(j)}_x$ es ***tasa absoluta de decremento***. El uso de la palabra tasa al describir ${}_tq'^{(j)}_x$ surge de un deseo de evitar la palabra probabilidad. El símbolo ${}_tq^{(j)}_x$ representa una probabilidad de decremento por la causa j entre las edades x y $x+1$ y demostraremos que difiere de ${}_tq'^{(j)}_x$. Además, ${}_tp'^{(j)}_x$, a diferencia de ${}_tp'^{(\tau)}_x$, no es necesariamente una función de sobrevivencia por que no se requiere que el $\lim_{t\to\infty} {}_tp'^{(j)}_x = 0$.

Mientras que

$$ \int_0^\infty \mu^{(\tau)}_{x+t}\, dt = \infty, $$

podemos concluir de (9.13) sólo que

$$ \int_0^\infty \mu^{(j)}_{x+t}\, dt = \infty $$

para al menos una j. Pueden existir causas de decremento para las que esta integral sea finita.

Pocas veces tiene uno la oportunidad de observar la operación de un sistema de sobrevivencia aleatorio en el que opera una causa simple de decremento. En un plan de indemnizaciones de empleados, el retiro, incapacidad y terminación voluntaria hace imposible observar directamente la operación de un modelo de decremento simple para la mortalidad durante el servicio activo. En las aplicaciones de bioestadística las salidas aleatorias de observación y terminación arbitraria el periodo de estudio puede impedirnos la observación individualizada de la mortalidad operando sobre un grupo de vidas.

Como veremos en la Sección 9.6, un primer paso acostumbrado al construir un modelo de decremento múltiple es seleccionar tasas absolutas de decremento y hacer supuestos concernientes a la incidencia de los decrementos dentro de cualquier año simple de edad para obtener probabilidades $q^{(j)}_x$. El problema opuesto de obtener tasas absolutas de las probabilidades es difícil. Involucra supuestos acerca de la incidencia de los decrementos. Estos supuestos están ímplicitos en el problema estadístico de estimar tasas absolutas.

En las siguientes cuatro subsecciones examinaremos un número de relaciones entre una tabla de decremento múltiple y sus tablas asociadas de decremento simple. Después veremos un número de supuestos especiales acerca de la incidencia del decremento sobre el año de edad y destacaremos algunas relaciones implícitas.

9.5.1 Relaciones Básicas

Primero, notamos que ya que

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \exp\left\{-\int_0^t [\mu_{x+s}^{(1)} + \mu_{x+s}^{(2)} + \cdots + \mu_{x+s}^{(m)}]\, ds\right\}, $$

tenemos

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{i=1}^{m} {}_tp'^{(i)}_x. \tag{9.33} $$

Este resultado no involucra alguna aproximación y requeriremos que sea válido para cualquier método utilizado para construir una tabla de decremento múltiple de un conjunto de tasas absolutas de decremento.

Comparemos ahora el tamaño de las tasas absolutas y de las probabilidades. De (9.33) observamos, que si alguna causa diferente de j está operando, que

$$ {}_tp'^{(j)}_x \geq {}_tp_x^{(\tau)}. $$

Ello implica que

$$ {}_tp'^{(j)}_x\, \mu_{x+t}^{(j)} \geq {}_tp_x^{(\tau)}\, \mu_{x+t}^{(j)}, $$

y si estas funciones se integran con respecto a t sobre el intervalo (0,1), obtenemos

$$ q'^{(j)}_x = \int_0^1 {}_tp'^{(j)}_x\, \mu_{x+t}^{(j)}\, dt \geq \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\, \mu_{x+t}^{(j)}\, dt = q_x^{(j)}. \tag{9.34} $$

La magnitud de las otras fuerzas de decremento pueden causar que ${}_tp'^{(j)}_x$ sea considerablemente mayor que ${}_tp_x^{(\tau)}$ y por tanto pueden existir las correspondientes diferencias para un modelo de decremento simple asociado.

9.5.2 Tasas Centrales Multiples de Decremento

Para introducir esta función retornamos a la tabla de mortalidad y recordamos que la tasa central de mortalidad, o tasa central de fallecimiento a la edad x, representada por m_x, y definida en la fórmula (3.38) por

$$m_x = \frac{\int_0^1 {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt}{\int_0^1 {}_tp_x\, dt} = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt}{\int_0^1 l_{x+t}\, dt} = \frac{d_x}{L_x}. \tag{9.35}$$

entonces, m_x es una tasa promedio ponderada de la fuerza de mortalidad entre las edades x y $x+1$ y esto justifica la tasa central

Dichas tasa centrales pueden definirse en un contexto de decremento múltiple. La *tasa central de decremento de todas las causas* se define mediante

$$m_x^{(\tau)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\, \mu_{x+t}^{(\tau)}\, dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\, dt} \tag{9.36}$$

y es un promedio ponderado de $\mu_{x+t}^{(\tau)}$, $0 \le t < 1$. En forma similar, la *tasa central de decremento de la causa j* es

$$m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\, \mu_{x+t}^{(j)}\, dt}{\int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\, dt} \tag{9.37}$$

y es un promedio ponderado de $\mu_{x+t}^{(j)}$, $0 \le t < 1$. Claramente

$$m_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} m_x^{(j)}.$$

La tasa central correpondiente para la tabla de decremento simple asociado esta dada por

$$m_x'^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}\, \mu_{x+t}^{(j)}\, dt}{\int_0^1 {}_tp_x'^{(j)}\, dt}. \tag{9.38}$$

Esta es también un promedio ponderado de $\mu_{x+t}^{(j)}$ sobre el mismo rango de edad, siendo ahora las ponderaciones ${}_tp_x'^{(j)}$ en lugar de ${}_tp_x^{(\tau)}$. Si la fuerza $\mu_{x+t}^{(j)}$ es constante para $0 \le t < 1$, tenemos $m_x^{(j)} = m_x'^{(j)} = \mu_x^{(j)}$. Si $\mu_{x+t}^{(j)}$ es una función creciente de t, entonces ${}_tp_x'^{(j)}$ da mayor ponderación a valores más altos que los que hace ${}_tp_x^{(\tau)}$, y $m_x'^{(j)} > m_x^{(j)}$. Si $\mu_{x+t}^{(j)}$ es una función decreciente de t, entonces $m_x'^{(j)} < m_x^{(j)}$. Veáse el Ejercicio 9.31 para una tratamiento más formal de estas proposiciones.

Las tasas centrales proporcionan un medio conveniente pero aproximado de proceder de $q_x'^{(j)}$ a la $q_x^{(j)}$, $j = 1, 2, \cdots, m$, y viceversa. Ello se ilustra en el Ejercicio 9.17.

9.5.3 Supuesto de la Fuerza Constante

Examinemos los supuestos específicos respecto a la incidencia de los decrementos. Primero, usemos un supuesto de fuerza constante para cada decremento sobre cada año de edad. Ello implica

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$$

y

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \mu_x^{(\tau)} \qquad 0 \leq t < 1.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} q_x^{(j)} &= \int_o^1 {}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_x^{(j)}\,dt \\ &= \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}\int_o^1 {}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_x^{(\tau)}\,dt = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}q_x^{(\tau)}. \end{aligned} \tag{9.39}$$

Pero también, bajo el supuesto de la fuerza constante,

$$\mu_x^{(\tau)} = -\log p_x^{(\tau)}$$

y

$$\mu_x^{(j)} = -\log p_x'^{(\tau)},$$

así que de (9.39)

$$q_x^{(j)} = \frac{\log p_x'^{(j)}}{\log p_x^{(\tau)}}q_x^{(\tau)}. \tag{9.40}$$

Esta fórmula, junto con (9.33), puede utilizarse para calcular $q_x^{(j)}$ de los valores dados de $q'^{(j)}_x =$ $1, 2, \cdots, m$.

La ecuación (9.40) puede resolverse para $q'^{(j)}_x$ para dar

$$q'^{(j)}_x = 1 - [1 - q_x^{(\tau)}]^{(q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)})}. \tag{9.41}$$

Este resultado es útil para obtener tasas absolutas para un conjunto dado de probabilidades de decremento. Nótese que para (9.40) y (9.41) se requiere un tratamiento especial si $p'^{(j)}_x$ o $p_x^{(\tau)}$ son igual a 0.

9.5.4 Supuesto de Distribución Uniforme para Decrementos Múltiples

La fórmula (9.41) es válida bajo un supuesto alternativo, es decir, que cada uno de los decrementos en un contexto de decrementos múltiples tiene una distribución uniforme en cada año de edad. Por lo tanto suponemos que

$${}_tq_x^{(j)} = tq_x^{(j)} \qquad j = 1, 2, \cdots, m, \; 0 \leq t \leq 1$$

y sumando

$${}_tq_x^{(\tau)} = 1 - {}_tp_x^{(\tau)} = tq_x^{(\tau)}.$$

También, bajo el supuesto dado, observamos de (9.11)

$${}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_{x+t}^{(j)} = q_x^{(j)} \tag{9.42}$$

y

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{q_x^{(j)}}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \frac{q_x^{(j)}}{1 - tq_x^{(\tau)}}.$$

Luego

$$q'^{(j)}_x = 1 - \exp\left[-\int_o^1 \mu_{x+t}^{(j)}\,dt\right]$$

$$= 1 - \exp\left[-\int_0^1 \frac{q_x^{(j)}}{1 - tq_x^{(\tau)}}\, dt\right]$$

$$= 1 - \exp\left[\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} \log(1 - q_x^{(\tau)})\right],$$

que otra vez es la fórmula (9.41). Ahora, al resolver para $q_x^{(j)}$ sigue la fórmula (9.40). El Ejercicio 9.21 proporciona conocimientos adicionales sobre la vinculación entre los desarrollos de las Secciones 9.5.3 y 9.5.4.

Ejemplo 9.4:

Continúe el Ejemplo 9.3 evaluando $q'^{(1)}_x$ y $q'^{(2)}_x$ mediante (9.41).

Solución:

Mediante (9.41), se obtienen los siguientes resultados

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$
65	0.02	0.05	0.02052	0.05052
66	0.03	0.06	0.03095	0.06094
67	0.04	0.07	0.04149	0.07147
68	0.05	0.08	0.05215	0.08213
69	0.06	0.09	0.06294	0.09291
70	0.00	1.00	-----	-----

A la edad de 70, las tasas dependen del retiro obligatorio y no existe ninguna necesidad especial para $q'^{(1)}_{70}$, $q'^{(2)}_{70}$ a pesar de que podrían identificarse, respectivamente, usando $q_{70}^{(1)}$ y $q_{70}^{(2)}$.

∇

9.6 Construcción de una Tabla de Decremento Múltiple

Al construir un modelo de decremento múltiple es mejor que los datos, incluyendo los de la edad y causa del decremento para la población bajo estudio, puedan utilizarse para estimar directamente las probabilidades $q_x^{(j)}$, Los planes de beneficios, grandes y bien establecidos, para empleados pueden contener tal tipo de datos. Por lo que se refiere a otros planes, esos datos, con frecuencia, no están disponibles. La alternativa es construir el modelo a partir de las tasas de decremento simple asociado que se supongan apropiadas para la población bajo estudio. La adecuación del modelo tendría entonces que probarse mediante la revisión de los datos a medida que ellos estén disponibles.

Una vez que se hayan selecccionado tablas asociadas de decremento simple, pueden utilizarse los resultados de la Sección 9.5 para completar la construcción de la tabla de decremento múltiple. La disponibilidad de un conjunto de $p'^{(j)}_x$, para $j = 1, 2, \cdots, m$ y para todos los valores de x, permitirá el cómputo de $p^{(\tau)}_x$ mediante (9.33) y de $q^{(\tau)}_x$ mediante $q^{(\tau)}_x = 1 - p^{(\tau)}_x$.

El paso restante es partir $q^{(\tau)}_x$ en sus componentes $q^{(j)}_x$ para $j = 1, 2, \cdots, m$. Ya sea que se adopte para el modelo el supuesto de la fuerza constante o el de la distribución uniforme, puede usarse (9.40) para el cálculo de las $q^{(j)}_x$.

Ejemplo 9.5:

Utilice (9.33) y (9.40) para obtener la tabla de decremento múltiple correspondiente a las tasas absolutas de decremento que se dan abajo. Se supone que el actuario ha examinado las características del grupo participante y ha decidido que las tablas asociadas de decremento simple que dan como resultado estas tasas son apropiadas para el grupo bajo estudio. También se supone que la causa 3 es el retiro que puede ocurrir entre las edades de 65 y 70 y que este es obligatorio a los 70.

x	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q'^{(3)}_x$
65	0.020	0.02	0.04
66	0.025	0.02	0.06
67	0.030	0.02	0.08
68	0.035	0.02	0.10
69	0.040	0.02	0.12

Solución:

La siguiente tabla contiene los resultados del cálculo de las probabilidades de decremento. La fórmula (9.33) puede reescribirse como

$$q^{(\tau)}_x = 1 - \prod_{j=1}^{3} (1 - q'^{(j)}_x),$$

mientras que (9.40), y la condición de retiro obligatorio, proporcionan las probabilidades. La tabla de decremento múltiple se construye como en el Ejemplo 9.3

x	$q^{(\tau)}_x$	$q^{(1)}_x$	$q^{(2)}_x$	$q^{(3)}_x$	$l^{(\tau)}_x$	$d^{(1)}_x$	$d^{(2)}_x$	$d^{(3)}_x$
65	0.07802	0.01940	0.01940	0.03921	1,000.00	19.40	19.40	39.21
66	0.10183	0.02401	0.01916	0.05867	921.99	22.14	17.67	54.09
67	0.12545	0.02851	0.01891	0.07803	828.09	23.61	15.66	64.62
68	0.14887	0.03290	0.01866	0.09731	724.20	23.83	13.51	70.47
69	0.17210	0.03720	0.01841	0.11649	616.39	22.93	11.35	71.80
70	1.00000	0.00000	0.00000	1.00000	510.31	0.00	0.00	510.31

∇

Ya se indicó que (9.40) y (9.41) no se utilizarían si $p'^{(j)}_x$ o $p^{(\tau)}_x = 0$. Será necesario emplear un recurso alternativo. Un método, que maneja esta indeterminación y por símismo conduce a ajustes especiales, se basa en distribuciones de decremento asumidas en las tablas asociadas de decremento simple más que en supuestos acerca de probabilidades de decremento múltiple como las de la Sección 9.5.4. Primero examinaremos un supuesto de distribución uniforme del decremento (en cada año de edad) para cada una de estas tablas. Restringiremos nuestra atención a situaciones con 3 decrementos, pero el método y las fórmulas pueden extenderse fácilmente para $m > 3$. Bajo el supuesto establecido,

$$ {}_tp'^{(j)}_x = 1 - tq'^{(j)}_x \qquad j = 1,2,3;\ 0 \le t \le 1 \tag{9.43} $$

y

$$ {}_tp'^{(j)}_x\, \mu^{(j)}_{x+t} = \frac{d}{dt}(-{}_tp'^{(j)}_x) = q'^{(j)}_x. \tag{9.44} $$

Se sigue que

$$ \begin{aligned} q^{(1)}_x &= \int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x\, \mu^{(1)}_{x+t}\, dt \\ &= \int_0^1 {}_tp'^{(1)}_x\, \mu^{(1)}_{x+t}\, {}_tp'^{(2)}_x\, {}_tp'^{(3)}_x\, dt \\ &= q'^{(1)}_x \int_0^1 (1 - tq'^{(2)}_x)(1 - tq'^{(3)}_x)\, dt \\ &= q'^{(1)}_x \left[1 - \frac{1}{2}[q'^{(2)}_x + q'^{(3)}_x] + \frac{1}{3} q'^{(2)}_x\, q'^{(3)}_x\right]. \end{aligned} \tag{9.45} $$

Fórmulas similares son válidas para $q^{(2)}_x$, $q^{(3)}_x$ y puede verificarse que

$$ \begin{aligned} q^{(1)}_x + q^{(2)}_x + q^{(3)}_x &= q'^{(1)}_x + q'^{(2)}_x + q'^{(3)}_x \\ &\quad -[q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x + q'^{(1)}_x q'^{(3)}_x + q'^{(2)}_x q'^{(3)}_x] \\ &\quad + q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x q'^{(3)}_x \\ &= 1 - [1 - q'^{(1)}_x][1 - q'^{(2)}_x][1 - q'^{(3)}_x] = q^{(\tau)}_x. \end{aligned} \tag{9.46} $$

Ejemplo 9.6:

Obtenga las probabilidades de decremento para las edades 65-69 a partir de los datos del Ejemplo 9.5, bajo el supuesto de una distribución uniforme del decremento en cada año de edad para cada una de las tablas asociadas de decremento simple.

Solución:

Esta es una aplicación de (9.45).

x	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q'^{(3)}_x$	$q^{(1)}_x$	$q^{(2)}_x$	$q^{(3)}_x$
65	0.020	0.02	0.04	0.01941	0.01941	0.03921
66	0.025	0.02	0.06	0.02401	0.01916	0.05866
67	0.030	0.02	0.08	0.02852	0.01892	0.07802
68	0.035	0.02	0.10	0.03292	0.01867	0.09727
69	0.040	0.02	0.12	0.03723	0.01843	0.11643

Estas probabilidades son muy parecidas a las que se obtuvieron mediante (9.40), y que se muestran en el Ejemplo 9.5.

∇

Concluimos esta sección con otro ejemplo que ilustra el uso de una distribución especial para uno de los decrementos. En ocasiones se requiere de distribuciones especiales debido a las características de la situación que se representa en el modelo.

Ejemplo 9.7:

Considere una situación con 3 causas de decremento: mortalidad, incapacidad y salida. Suponga que la mortalidad y la incapacidad están distribuidas uniformemente para cada año de edad en las tablas asociadas de decremento simple con tasas absolutas de $q'^{(1)}_x$ y $q'^{(2)}_x$, respectivamente. Aún más, suponga que las salidas ocurren sólo al final del año con una tasa absoluta de $q'^{(3)}_x$.

a. Proporcione fórmulas para las probabilidades de decremento para la edad x a $x+1$ para las 3 causas.

b. Reformule las probabilidades bajo los supuestos

- de que en el modelo de decremento simple asociado, las salidas ocurren sólo a la mitad o al final del año de edad.
- en proporciones iguales, esto es $(1/2)q'^{(3)}_x$, de los que empiezan el año salen a la mitad y al final del año.

Advertencia:

Hasta ahora nuestro modelo de decremento múltiple ha sido totalmente continuo, excepto posiblemente para reconocer una edad obligatoria de retiro. Más aún, nuestra teoría empezó con un modelo de decremento múltiple y después de definir las fuerzas $\mu_{x+t}^{(j)}$, $j = 1, 2, \cdots, m$, se procedió a construir tablas asociadas de decremento simple. En este ejemplo estamos iniciando con las tablas de decremento simple, y en una de estas tablas el decremento se da en forma discreta al final de los intervalos establecidos. No debemos intentar definir una fuerza de decremento para este caso discreto, sino que procederemos mediante métodos directos a construir, a partir de las tablas de decremento simple, un modelo de decremento múltiple que posee las relaciones (9.17) y (9.33) establecidas en nuestra teoría anterior.

Solución:

a. En la Figura 9.2A se exhiben los factores de sobrevivencia para las tablas de decremento simple dadas y para una tabla de decremento múltiple en donde

$$_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x'^{(1)}\,{}_tp_x'^{(2)}\,{}_tp_x'^{(3)}$$

para $t \geq 0$ no enteros. Para $t = 1$, $_tp_x'^{(3)}$ y $_tp_x^{(\tau)}$ son discontinuos, así que consideramos

$$\lim_{t \to 1-} {}_tp_x^{(\tau)} = p_x'^{(1)}\,p_x'^{(2)}\,1$$

y

$$p_x^{(\tau)} = p_x'^{(1)}\,p_x'^{(2)}\,(1 - q_x'^{(3)}).$$

También requeriremos, para nuestra tabla de decremento múltiple, Establecer

$$q_x^{(\tau)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)} + q_x^{(3)} = 1 - p_x^{(\tau)} = 1 - p_x'^{(1)}\,p_x'^{(2)}[1 - q_x'^{(3)}].$$

Establecer

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\,\mu_{x+t}^{(1)}\,dt \\ &= \int_0^1 {}_tp_x'^{(1)}\,{}_tp_x'^{(2)}\,(1)\,\mu_{x+t}^{(1)}\,dt \\ &= q_x'^{(1)} \int_0^1 [1 - t q_x'^{(2)}]\,dt \end{aligned}$$

$$= q'^{(1)}_x \left[1 - \frac{1}{2} q'^{(2)}_x\right].$$

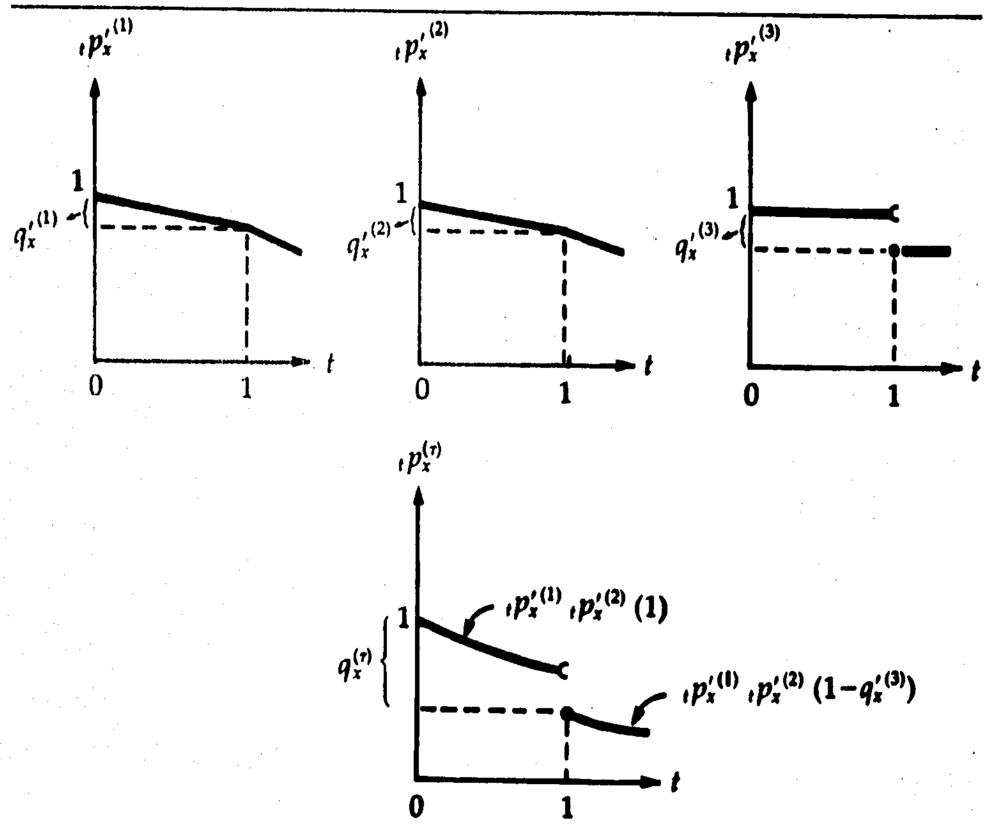
Igualmente, establecemos que

$$q^{(2)}_x = q'^{(2)}_x \left[1 - \frac{1}{2} q'^{(1)}_x\right].$$

Luego

$$\begin{aligned} q^{(3)}_x &= q^{(\tau)}_x - [q^{(1)}_x + q^{(2)}_x] \\ &= 1 - p'^{(1)}_x p'^{(2)}_x [1 - q'^{(3)}_x] - q'^{(1)}_x - q'^{(2)}_x + q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x, \end{aligned}$$

Figura 9.2A Factores de Sobrevivencia $_tp'^{(j)}_x$, $j = 1, 2, 3$ y $_tp^{(\tau)}_x$



y, como

$$\begin{aligned}1 - q'^{(1)}_x - q'^{(2)}_x + q'^{(1)}_x q'^{(2)}_x &= p'^{(1)}_x p'^{(2)}_x,\\ q^{(3)}_x &= p'^{(1)}_x p'^{(2)}_x q'^{(3)}_x.\end{aligned}$$

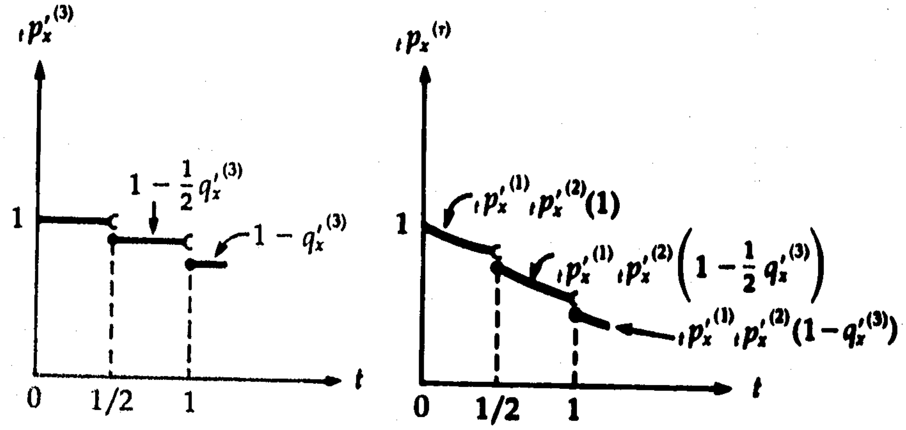
Nótese que

$$\lim_{t\to 1-} {}_tp^{(\tau)}_x - \lim_{t\to 1+} {}_tp^{(\tau)}_x = p'^{(1)}_x p'^{(2)}_x q'^{(3)}_x = q^{(3)}_x;$$

es decir, la discontinuidad en $t = 1$ es igual a $q^{(3)}_x$.

b. Aquí ${}_tp'^{(1)}_x$ y ${}_tp'^{(2)}_x$ son iguales a la Figura 9.2A, pero ${}_tp'^{(3)}_x$ y ${}_tp^{(\tau)}_x$ tienen ahora discontinuidades en $t = 1/2$ y $t = 1$, como se muestra en la Figura 9.2B

Figura 9.2B Factores de Sobrevivencia ${}_tp'^{(3)}_x$ y ${}_tp^{(\tau)}_x$



Procediendo como en (a), pero tomando en cuenta los intervalos $[0, 1/2)$ y $[1/2, 1)$, establecemos

$$q^{(1)}_x = q'^{(x)}_x \int_o^{1/2} [1 - tq'^{(2)}_x]\,dt + q'^{(1)}_x \left[1 - \frac{1}{2}q'^{(3)}_x\right] \int_{1/2}^{1} [1 - tq'^{(2)}_x]\,dt$$

$$= q'^{(1)}_x \left[1 - \frac{1}{2}q'^{(2)}_x - \frac{1}{4}q'^{(3)}_x + \frac{3}{16}q'^{(2)}_x\, q'^{(3)}_x\right].$$

Igualmente, establecemos

$$q^{(2)}_x = q'^{(2)}_x \left(1 - \frac{1}{2}q'^{(1)}_x - \frac{1}{4}q'^{(3)}_x + \frac{3}{16}q'^{(1)}_x\, q'^{(3)}_x\right).$$

Luego

$$\begin{aligned} q^{(3)}_x &= 1 - p^{(\tau)}_x - q^{(1)}_x - q^{(2)}_x \\ &= 1 - p'^{(1)}_x\, p'^{(2)}_x [1 - q'^{(3)}_x] - q^{(1)}_x - q'^{(2)}_x, \end{aligned}$$

que se reduce a

$$q^{(3)}_x = q'^{(3)}_x \left[1 - \frac{3}{4}q'^{(1)}_x - \frac{3}{4}q'^{(2)}_x + \frac{5}{8}q'^{(1)}_x\, q'^{(2)}_x\right].$$

∇

Los Ejemplos 9.5-9.7 ilustran cómo puede el actuario construir a la medida un modelo de decremento múltiple a partir de tablas asociadas de decremento simple para ajustarlos a los propósitos que está manejando.

9.7 Primas Netas Unicas y su Evaluación Numérica

Las aplicaciones actuariales de los modelos de decremento múltiple surgen cuando el monto del pago de la indemnización depende del modo de la salida del grupo de los asegurados activos. Represente $B^{(j)}_{x+t}$ el valor de la indemnización a la edad $x + t$ para un decremento en esa edad por la causa j. Luego una prima neta única, representada en general mediante $\bar{A}$, se definirá como

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty B^{(j)}_{x+t}\, v^t\, {}_tp^{(\tau)}_x\, \mu^{(j)}_{x+t}\, dt. \tag{9.47}$$

Si $m = 1$ y $B^{(j)}_{x+t} = 1$, $\bar{A}$ se reduce a $\bar{A}_x$, la prima neta única para el seguro de vida entera con pago inmediato de las reclamaciones. Para este capítulo es más apropiado el ejemplo de una *estipulación* *de doble indemnización* que prevee que la indemnización por fallecimiento se duplicará cuando éste se debe a causas accidentales. Sea $j = 1$ para el fallecimiento por causas accidentales y $j = 2$ para el fallecimiento debido a otras causas, y tome $B^{(1)}_{x+t} = 2$, $B^{(2)}_{x+t} = 1$. La prima neta única para un seguro a n años está dada por

$$\bar{A} = 2\int_0^n v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\,\mu^{(1)}_{x+t}\,dt + \int_0^n v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\,\mu^{(2)}_{x+t}\,dt. \tag{9.48}$$

El hecho de escribir la prima neta única en forma de integral no completa la tarea de la evaluación numérica. El primer paso es partir la expresión en integrales separadas para cada uno de los años involucrados. Restringiéndonos a la primera integral, obtenemos

$$\int_0^n v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\,\mu^{(1)}_{x+t}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,{}_kp_x^{(\tau)}\int_0^1 v^s\,{}_sp_{x+k}^{(\tau)}\,\mu^{(1)}_{x+k+s}\,ds.$$

Si ahora suponemos, como para (9.42), que cada decremento en el contexto del decremento múltiple tiene una distribución uniforme para cada año de edad, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^n v^t\,{}_tp_x^{(\tau)}\,\mu^{(1)}_{x+t}\,dt &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_kp_x^{(\tau)}\,q^{(1)}_{x+k}\int_0^1 (1+i)^{1-s}\,ds \\ &= \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_kp_x^{(\tau)}\,q^{(1)}_{x+k}.\end{aligned}$$

Aplicando un argumento similar a la segunda integral y combinándola, obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \frac{i}{\delta}\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_kp_x^{(\tau)}\left(2q^{(1)}_{x+k} + q^{(2)}_{x+k}\right)\right] \\ &= \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_kp_x^{(\tau)}\,q^{(1)}_{x+k} + \frac{i}{\delta}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,{}_kp_x^{(\tau)}\,q^{(\tau)}_{x+k} \\ &= \bar{A}^{1\,(1)}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\end{aligned} \tag{9.49}$$

donde $\bar{A}^{1\,(1)}_{x:\overline{n}|}$ es la prima neta única para un seguro a plazo por la cantidad de 1 que ampara la muerte por causas accidentales y $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ es la prima neta única para un seguro a plazo por la cantidad de 1 que ampara la muerte por todas las demás causas. Aquí ${}_kp_x^{(\tau)}$ podría tomarse como la función de sobrevivencia de una tabla de mortalidad, y si los valores de $q_{x+k}^{(1)}$ estuviesen disponibles, sería inecesario desarrollar la tabla completa de doble decremento para poder calcular (9.49).

Este ejemplo es particularmente simple porque el monto de la indemnización no cambia en función de la edad al decremento y, en especial, no cambia en el año de edad. Para estudiar esta situación más compleja, examinemos un modelo de decremento múltiple con 2 decrementos. Para simplificar, tomamos $B_{x+t}^{(1)} = t$ y $B_{x+t}^{(2)} = 0$ para $t > 0$. En este caso,

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \int_0^\infty t\, v^t\, {}_tp_x^{(\tau)}\, \mu_{x+t}^{(1)}\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x^{(\tau)} \int_0^1 (k+s)\, v^s\, {}_sp_{x+k}^{(\tau)}\, \mu_{x+k+s}^{(1)}\, ds.\end{aligned}$$

Otra vez hacemos el supuesto de que cada decremento en el contexto del decremento múltiple tiene una distribución uniforme para cada año de edad, y obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x^{(\tau)}\, q_{x+k}^{(1)} \int_0^1 (k+s)(1+i)^{1-s}\, ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x^{(\tau)}\, q_{x+k}^{(1)} \frac{i}{\delta}\left(k + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right). \qquad (9.50)\end{aligned}$$

La cantidad

$$k + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{i} \cong k + \frac{1}{2}$$

puede verse como la cantidad de indemnización efectiva promedio para el año $k+1$, mientras que el término familiar i/δ puede verse como la corrección necesaria para proporcionar el pago inmediato de las reclamaciones. El valor de (9.50) se logra aproximar bastante bien mediante

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1/2}\, {}_kp_x^{(\tau)}\, q_{x+k}^{(1)} \left(k + \frac{1}{2}\right), \qquad (9.51)$$

el que puede obtenerse usando la regla del punto medio para evaluar

$$\int_0^1 (k+s)(1+i)^{1-s}\, ds.$$

En la práctica, las fórmulas como (9.51) son utilizadas ampliamente en casos donde $B_{x+t}^{(j)}$ es una función complicada, que posiblemente requiera algún grado de aproximación. Por ejemplo, si aplicamos el supuesto de distribución uniforme a la j-ésima integral de (9.47) obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x^{(\tau)}\, q_{x+k}^{(j)} \int_0^1 B_{x+k+s}^{(j)} (1+i)^{1-s}\, ds.$$

Luego, el uso de la regla del punto medio produce

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1/2}\, {}_kp_x^{(\tau)}\, q_{x+k}^{(j)}\, B_{x+k+1/2}^{(j)} \tag{9.52}$$

como una fórmula práctica para la evaluación de la integral.

En la Sección 9.6 hemos discutido situaciones en las que el supuesto de la distribución uniforme del decremento no era apropiada. Para tales situaciones, debieron realizarse ajustes especiales a las primas netas únicas. Reexaminaremos el Ejemplo 9.7 en el que en el modelo de decremento simple asociado para las salidas, en proporciones iguales, es decir $(1/2)\,q_x'^{(3)}$, de los que empiezan el año salen a la mitad y al final del año. La prima neta única para una indemnización por salida de monto $B_{x+t}^{(3)}$ pagadera para la salida a la edad $x+t$, $t>0$, está dada por

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x^{(\tau)} \left\{ \frac{1}{2} q'^{(3)}_{x+k}\, v^{1/2}\, B_{x+k+1/2}^{(3)} \left[1-\frac{1}{2}q'^{(1)}_{x+k}\right]\left[1-\frac{1}{2}q'^{(2)}_{x+k}\right]\right. \\ &\left. + \frac{1}{2} q'^{(3)}_{x+k}\, v\, B_{x+k+1}^{(3)} [1-q'^{(1)(1)}_{x+k}][1-q'^{(2)}_{x+k}] \right\}.\end{aligned}$$

Aquí estamos tratando con la distribución del decremento en el contexto de las tablas asociadas de decremento simple, más que en el contexto de decremento múltiple. Aquí una posible aproximación sería tomar un valor promedio del factor de interés, tal como $v^{3/4}$, y un valor promedio de la indemnización por salida, tal como

$$\hat{B}_{x+k} = \frac{1}{2}[B_{x+k+1/2}^{(3)} + B_{x+k+1}^{(3)}].$$

Si reemplazamos los términos del interés y del monto de la indemnización por sus promedios aritmético y geométrico, respectivamente, y después los factorizamos, la expresión para $q_{x+k}^{(3)}$ que se obtuvo en el Ejemplo 9.7 permanece dentro del paréntesis. Por tanto,

$$\bar{A} \cong \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+3/4} \, {}_kp_x^{(\tau)} \, q_{x+k}^{(3)} \, \hat{B}_{x+k}$$

$$= (1+i)^{1/4} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x^{(\tau)} \, q_{x+k}^{(3)} \, \hat{B}_{x+k}.$$

La última expresión puede interpretarse como que proporciona una indemnización por salida de $\hat{B}_{x+k}$ al final del año y después ajustando por $(1+i)^{1/4}$ para reconocer que, en el promedio las indemnizaciones por salida se pagan con 1/4 de año de anticipación.

Hasta aquí sólo hemos señalado brevemente algunas de las aplicaciones actuariales de los modelos de decremento múltiple. Ejemplos adicionales, más detallados y prácticos, conforman el tema del siguiente capítulo.

Advertencia:

En este capítulo no utilizamos el formato empleado en el Capítulo 6 para establecer los problemas de determinación de las primas. Lo hicimos por brevedad. Los problemas de las primas de esta sección podrían haberse enfocado formulando una función de pérdida e invocando el principio de equivalencia.

Por ejemplo, suponga que la prima neta única $\bar{A}$ se requiere para un seguro de (x) pagando $2\,B$ sobre la muerte accidental y B sobre la muerte debida a todas las demás causas, si el fallecimiento ocurre antes de la edad r. Si ocurre la muerte, por cualquier causa, después de la edad r, se paga la cantidad B. Se reconocen dos causas de decremento, $j = 1$, la causa accidental, y $j = 2$ la causa no accidental. La función de pérdida es

$$L = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} 2Bv^T - \bar{A} & J = 1 \\ Bv^T - \bar{A} & J = 2 \end{array}\right\} & 0 < T \leq r - x \\ \begin{array}{ll} Bv^T - \bar{A} & J = 1,2 \end{array} & T > r - x. \end{cases}$$

El principio de equivalencia produce $E[L] = 0$, o

$$\bar{A} = B \int_0^{r-x} v^t \, {}_tp_x^{(\tau)} \, \mu_{x+t}^{(1)} \, dt + B \int_0^{\infty} v^t \, {}_tp_x^{(\tau)} \, \mu_{x+t}^{(\tau)} \, dt.$$

Una medida de la dispersión debida a la naturaleza aleatoria del tiempo y la causa del fallecimiento se proporciona mediante $Var[L] = E[L^2]$. Puede verificarse que, para este caso,

$$Var[L] = B^2 \left[3 \int_0^{r-x} v^{2t} \, {}_tp_x^{(\tau)} \, \mu_{x+t}^{(1)} \, dt + \int_0^{\infty} v^{2t} \, {}_tp_x^{(\tau)} \, \mu_{x+t}^{(\tau)} \, dt \right] - \bar{A}^2.$$

Para el caso general, con prima neta única dada por (9.47), tenemos

$$Var[L] = E[L^2] = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty [B_{x+t}^{(j)} v^t - \bar{A}]^2 \, {}_tp_x^{(\tau)} \, \mu_{x+t}^{(j)} \, dt,$$

que puede reducirse a

$$Var[L] = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty [B_{x+t}^{(j)} v^t]^2 \, {}_tp_x^{(\tau)} \, \mu_{x+t}^{(j)} \, dt - \bar{A}^2. \tag{9.53}$$

9.8 Notas y Referencias

Seal (1977) hizo una revisión de la historia de la teoría del decremento múltiple. Chiang (1968) desarrolló la teoría usando el lenguaje de los riesgos en competencia. La estructuración de la teoría actuarial para los modelos de decremento múltiple fue establecida por Makeham (1874). Menge (1932) y Nesbitt y Van Eenam (1948) proporcionaron conocimientos acerca de la interpretación determinística de las fuerzas del decremento y del incremento. Bicknell y Nesbitt (1956) desarrollaron una teoría muy general para seguros individuales utilizando un modelo determinístico de decremento múltiple. Hickman (1964) redesarrolló esta teoría usando el lenguaje del modelo estocástico y éste proporcionó las bases para la mayor parte del presente capítulo. El análisis de las tablas de vida por causa de fallecimiento es el tema de las ponencias de Greville (1948) y Preston, Keyfiz y Schoen (1973).

9.9 Ejercicios

Sección 9.2

9.1 Sea $\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$, $j = 1, 2, \cdots, m$, $t \geq 0$. Obtenga expresiones para

a. $f(t, j)$ b. $h(j)$ c. $g(t)$.

Las funciones necesarias para (a) y (c) son *f.d.p.* y la función de (b) es *f.p.* Demuestre que aquí T y J son variables aleatorias independientes.

9.2 Un modelo de decremento múltiple con 2 causas de decremento tiene fuerzas de decremento dadas por

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{1}{100 - (x+t)}$$

y

$$\mu_{x+t}^{(2)} = \frac{2}{100 - (x + t)} \qquad t < 100 - x.$$

Si $x = 50$, obtenga expresiones para

a. $f(t, j)$ **b.** $g(t)$ **c.** $h(j)$ **d.** $h(j|t)$.

Sección 9.3

9.3 Usando las probabilidades de decremento múltiple dadas en el Ejemplo 9.3, evalúe lo siguiente:

a. ${}_3p_{65}^{(\tau)}$ **b.** ${}_{3|}q_{65}^{(1)}$ **c.** ${}_3q_{65}^{(2)}$.

9.4 Las siguientes probabilidades de decremento múltiple se aplican a estudiantes que entran al cuarto año de preparatoria.

Duración Truncada al Inicio del Año Académico	Probabilidad de		
	Fracaso académico $j = 1$	Salida por todas las demás razones, $j = 2$	Sobrevivencia durante el año académico
0	0.15	0.25	0.60
1	0.10	0.20	0.70
2	0.05	0.15	0.80
3	0.00	0.10	0.90

La generación que entra tiene 1,000 miembros.

a. ¿ Cuál es la esperanza del número de graduados? **¿Cuál la varianza?**

b. ¿Cuál es el número esperado de los que **fracasarán en algún momento durante el programa del** cuarto año? ¿Cuál es la varianza del **número de alumnos que fracasarán?**

9.5 Construya una tabla de decremento **múltiple sobre la base de los datos del Ejercicio 9.4 y úsela** para mostrar

a. La distribución marginal de **la variable aleatoria** j **(modo de salida), que toma diferentes valores** para: el fracaso académico, **salida y graduación**

b. la distribución **condicional del modo de terminación dado que un estudiante ha terminado en** el tercer año

Sección 9.4

9.6 Dado que $\mu_x^{(1)} = 1/(a-x)$, $0 \le x < a$, y $\mu_x^{(2)} = 1$, derive expresiones para

a. $l_x^{(\tau)}$ b. $d_x^{(1)}$ c. $d_x^{(2)}$.

Suponga que $l_0^{(\tau)} = a$.

9.7 Dado $\mu_x^{(1)} = 2x/(a-x^2)$, $0 \le x < \sqrt{a}$, y $\mu_x^{(2)} = c$, $c > 0$, y $l_0^{(\tau)} = 1{,}000$, derive una expresión para $l_x^{(\tau)}$.

9.8 Derive expresiones para las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\,{}_tq_x^{(\tau)}$ b. $\frac{d}{dx}\,{}_tq_x^{(j)}$ c. $\frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(\tau)}$.

Sección 9.5

9.9 Utilizando los datos del Ejercicio 9.4, y suponiendo una distribución uniforme de decrementos en el modelo de decremento múltiple, calcule una tabla de $q'^{(j)}_k$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, 3$ (en donde k es la duración truncada).

9.10 Si $\mu_{x+t}^{(1)}$ es una constante c para $0 \le t \le 1$, derive expresiones en términos de c y ${}_tp_x^{(\tau)}$ para

a. $q'^{(1)}_x$ b. $m_x^{(1)}$ c. $q_x^{(1)}$.

9.11 Demuestre que bajo supuestos apropiados de una distribución uniforme de los decrementos

a. $m_x^{(\tau)} = \dfrac{q_x^{(\tau)}}{1-(1/2)q_x^{(\tau)}}$ b. $m_x^{(j)} = \dfrac{q_x^{(j)}}{1-(1/2)q_x^{(\tau)}}$

c. $m'^{(j)}_x = \dfrac{q'^{(j)}_x}{1-(1/2)q'^{(j)}_x}$

y, reciprocamente,

d. $q_x^{(\tau)} = \dfrac{m_x^{(\tau)}}{1+(1/2)m_x^{(\tau)}}$ e. $q_x^{(j)} = \dfrac{m_x^{(j)}}{1-(1/2)m_x^{(\tau)}}$

f. $q'^{(j)}_x = \dfrac{m'^{(j)}_x}{1-(1/2)m'^{(j)}_x}$.

9.12 Ordene en términos de magnitud. Enuncie sus razones.

$$q'^{(j)}_x,\ q_x^{(j)},\ m'^{(j)}_x$$

9.13 Dado que, para una tabla de doble decremento, $q'^{(1)}_{40} = 0.02$ y $q'^{(2)}_{40} = 0.4$. Calcule $q^{(\tau)}_{40}$ hasta cuatro decimales.

9.14 Para una tabla de doble decremento, dado que $m^{(\tau)}_{40} = 0.2$ y $q'^{(1)}_{40} = 0.1$. Calcule $q'^{(2)}_{40}$ hasta cuatro decimales suponiendo

a. una distribución uniforme de los decrementos en el modelo de decremento múltiple

b. una distribución uniforme de los decrementos en las tablas asociadas de decremento simple.

9.15 Usando los datos del Ejercicio 9.4 y suponiendo una distribución uniforme de los decrementos en el modelo de decremento múltiple, construya una tabla de $m^{(j)}_k$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, 3$ (en donde k es la duración truncada). Calcule cada resultado hasta cinco decimales.

9.16 Dado que el decremento puede deberse a muerte, 1, incapacidad, 2, o retiro, 3, use (9.40) para construir una tabla de decremento múltiple con base en las siguientes tasas absolutas:

Edad x	$q'^{(1)}_x$	$q'^{(2)}_x$	$q'^{(3)}_x$
62	0.020	0.030	0.200
63	0.022	0.034	0.100
64	0.028	0.040	0.120

9.17 Recalcule la tabla de decremento múltiple a partir de las tasas absolutas de decremento del ejercicio anterior mediante el *puente de la tasa central.* [Sugerencia: para usar el puente de la tasa central calcule primero $m'^{(j)}_x$ mediante la fórmula

$$m'^{(j)}_x \cong \frac{q'^{(j)}_x}{1 - (1/2)q'^{(j)}_x} \qquad j = 1, 2, 3,$$

que es válida si existe una distribución uniforme del decremento en las tablas asociadas de decremento simple. En seguida, suponga $m^{(j)}_x \cong m'^{(j)}_x$, $j = 1, 2, 3$, y proceda hacia $q^{(j)}_x$ mediante

$$q^{(j)}_x = \frac{d^{(j)}_x}{l^{(\tau)}_x} = \frac{d^{(j)}_x}{l^{(\tau)}_x - (1/2)d^{(\tau)}_x + (1/2)d^{(\tau)}_x} = \frac{m^{(j)}_x}{1 + (1/2)m^{(\tau)}_x}.$$

Esta segunda relación es válida si existe una distribución uniforme del decremento total en la tabla de decremento múltiple. Pero entonces

$$\begin{aligned} {}_tp^{(\tau)}_x = 1 - tq^{(\tau)}_x \quad &\neq \quad {}_tp'^{(1)}_x \, {}_tp'^{(2)}_x \, {}_tp'^{(3)}_x \\ &= \quad [1 - tq'^{(1)}_x][1 - tq'^{(2)}_x][1 - tq'^{(3)}_x] \end{aligned}$$

Bajo la condición de una distribución uniforme de las tablas de decremento simple. Notamos la inconsistencia de los estados de condición, para calcular la ocurrencia que tenemos en proposito]

9.18 Señale argumentos para las siguientes relaciones:

a. $m'^{(j)}_x \cong m^{(j)}_x$

b. $\dfrac{q'^{(j)}_x}{1-(1/2)q'^{(j)}_x} \cong \dfrac{q^{(j)}_x}{1-(1/2)q'^{(\tau)}_x}$.

Demuestre que estas conducen a

c. $q^{(j)}_x \cong \dfrac{q'^{(j)}_x[1-(1/2)q^{(\tau)}_x]}{1-(1/2)q'^{(j)}_x}$

d. $q'^{(j)}_x \cong \dfrac{q^{(j)}_x}{1-(1/2)(q^{(\tau)}_x - q^{(j)}_x)}$.

Compare (c) y (d) con (9.40) y (9.41).

9.19 Utilice los valores de $q^{(j)}_x$, $q'^{(j)}_x$ del Ejemplo 9.4 para calcular valores de $m^{(j)}_x$, $m'^{(j)}_x$, $j = 1,2$, $x = 65,\cdots,69$, bajo supuestos apropiados de distribución uniforme de los decrementos (veáse el Ejercicio 9.11).

9.20 ¿Cuál de las siguientes proposiciones aceptaría usted? Revise cuando sea necesario.

a. $q^{(j)}_x \cong \dfrac{m^{(j)}_x}{1+(1/2)m^{(j)}_x}$

b. $\displaystyle\int_0^1 l^{(\tau)}_{x+t}\,dt \cong \frac{l^{(\tau)}_x}{1+(1/2)m^{(\tau)}_x}$

c. $q^{(1)}_x = q'^{(1)}_x(1-(1/2)q'^{(2)}_x)$ en una tabla de decremento doble en donde existe una distribución uniforme del decremento para la edad x a $x+1$ para cada una de las tablas asociadas de decremento simple.

9.21 a. Para una cierta edad, la causa particular del decremento j y K_j constante, demuestre que las siguientes condiciones son equivalente.

(i) ${}_tq^{(j)}_x = K_j\, {}_tq^{(\tau)}_x \qquad 0 \le t \le 1$

(ii) $\mu^{(j)}_{x+t} = K_j\, \mu^{(j)}_{x+t} \qquad 0 \le t \le 1$

(iii) $1 - {}_tq'^{(j)}_x = [1 - {}_tq^{(\tau)}_x]^{K_j} \qquad 0 \le t \le 1$

[Sugerencia: Demuestre $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.]

b. Verifique que, en una tabla de decremento múltiple, en donde, ya sea

- $\mu^{(j)}_{x+t} = \mu^{(j)}_x \qquad 0 \le t \le 1,\ j = 1,2,\cdots,m$

(el supuesto de la fuerza constante para cada causa de decremento) o

- ${}_tq_x^{(j)} = t\,q_x^{(j)} \qquad 0 \le t \le 1,\ j = 1, 2, \cdots, m$

(la distribución uniforme para cada causa de decremento), entonces

$$ {}_tq_x^{(j)} = K_j\,{}_tq_x^{(\tau)} \qquad 0 \le t \le 1,\ j = 1, 2, \cdots, m. $$

Sección 9.6

9.22 Vuelva a realizar el Ejercicio 9.9 mediante el uso de la fórmula para $q'^{(j)}_x$ del Ejercicio 9.18.

9.23 Demuestre que $\mu^{(j)}_{x+1/2} = m^{(j)}_x$, bajo el supuesto de una distribución uniforme de cada decremento para cada año de edad en un contexto de decremento múltiple.

9.24 ¿Cómo procedería para construir una tabla de decremento múltiple si las tasas dadas fuesen

a. $q'^{(1)}_x$, $q'^{(2)}_x$, $q^{(3)}_x$

b. $q'^{(1)}_x$, $q^{(2)}_x$, $q^{(3)}_x$?

9.25 En el Ejemplo 9.6 suponga que el decremento 3 a la edad 69 no está distribuido uniformemente sino que sigue el patrón

$$ {}_tp'^{(3)}_{69} = \begin{cases} 1 - 0.12t & 0 < t < 1 \\ 0 & t = 1. \end{cases} $$

En palabras, la tasa absoluta de la causa 3 es 0.12 durante el año. Después, justo antes de la edad 70, todos los sobrevivientes restantes terminan debido a la causa 3. Esto es consistente con el supuesto de que $q'^{(3)}_{69} = 1$. ¿Entonces cuál es el valor de $q^{(3)}_{69}$?

9.26 En una tabla de doble decremento en la que la causa 1 es la muerte y la 2 es la salida, se supone que los

- fallecimientos en el año de la edad h a la $h+1$ están distribuidos uniformemente,
- las salidas en el año de la edad h a la $h+1$ ocurren inmediatamente después de alcanzar la edad h.

En esta tabla se nota que a la edad 50, $l^{(\tau)}_{50} = 1{,}000$, $q^{(2)}_{50} = 0.2$ y $d^{(1)}_{50} = 0.06\,d^{(2)}_{50}$. Determine $q'^{(1)}_{50}$.

Sección 9.7

9.27 Unos empleados toman un plan de indemnización a la edad de 20 años. Si un empleado permanece en servicio hasta la edad de retiro obligatorio, 70 años, el miembro recibe una pensión anual equivalentes a 300 veces los años de servicio. Si el empleado muere en servicio antes del retiro

obligatorio, se le paga al beneficiario 20,000 inmediatamente. Si el empleado se sale antes del retiro obligatorio por cualquier razón excepto por fallecimiento, el miembro recibe una anualidad vitalicia diferida, que empieza a la edad de 70 años, con un ingreso anual equivalente a 300 veces los años de servicio. Establezca una expresión, en términos de integrales y anualidades continuas, para el valor presente actuarial de estas indemnizaciones para un empleado de 30 años de edad.

Misceláneos

9.28 Con base en una tabla de decremento triple, ¿ Cuál es la probabilidad de que (20) no termine antes de los 65 años de edad debido a la causa 2?

9.29 a. Se le proporcionan $q'^{(1)}_x$, $q'^{(2)}_x$, $m^{(3)}_x$, $m^{(4)}_x$. ¿ Cómo procedería usted a construir una tabla de decremento múltiple en la que el servicio activo de un grupo de empleados está sujeto a decremento por muerte, 1, por salida, 2, incapacidad, 3, y retiro, 4?

b. Con base en la tabla de (a), proporcione una expresión para la probabilidad de que, en el futuro, un miembro activo de edad y no se retirará sino que terminará sus servicios por cualquier otra causa.

9.30 Pruebe e interprete la relación

$$q^{(j)}_x = q'^{(j)}_x - \sum_{k \neq j} \int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x \, \mu^{(k)}_{x+t} \, {}_{1-t}q'^{(j)}_{x+t} \, dt.$$

9.31 Sea

$$w^{(\tau)}(t) = \frac{{}_tp^{(\tau)}_x}{\int_0^1 {}_tp^{(\tau)}_x \, dt}$$

y

$$w^{(j)}(t) = \frac{{}_tp'^{(j)}_x}{\int_0^1 {}_tp'^{(j)}_x \, dt} \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Suponga que j y al menos **alguna otra causa tienen fuerzas positivas de decremento sobre el** intervalo $0 \leq t \leq 1$.

a. Demuestre que

(*i*) $w^{(\tau)}(0) > w^{(j)}(0)$

(*ii*) $w^{(\tau)}(1) < w^{(j)}(1)$

(*iii*) **existe un número único r, $0 < r < 1$, tal que $w^{(\tau)}(r) < w^{(j)}(r)$.**

b. Sea

$$-I = \int_o^r [w^{(j)}(t) - w^{(\tau)}(t)]\, dt.$$

Demuestre que

$$I = \int_r^1 [w^{(j)}(t) - w^{(\tau)}(t)]\, dt.$$

c. Suponga que $\mu_{x+t}^{(j)}$ es una función creciente en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Utilice el teorema del valor medio para integrales para establecer las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
m_x'^{(j)} - m_x^{(j)} &= \int_o^1 [w^{(j)}(t) - w^{(\tau)}(t)]\, \mu_{x+t}^{(j)}\, dt \\
&= \int_o^r [w^{(j)}(t) - w^{(\tau)}(t)]\, \mu_{x+t}^{(j)}\, dt \\
&\quad + \int_r^1 [w^{(j)}(t) - w^{(\tau)}(t)]\, \mu_{x+t}^{(j)}\, dt \\
&= -\mu_{x+t_o}^{(j)}\, I + \mu_{x+t_1}^{(j)}\, I \qquad 0 < t_o < r < t_1 < 1 \\
&= I(\mu_{x+t_1}^{(j)} - \mu_{x+t_o}^{(j)}) > 0.
\end{aligned}$$

9.32 La distribución conjunta de T y J se especifica mediante

$$\left.\begin{aligned}
\mu_{x+t}^{(1)} &= \frac{\theta t^{\alpha-1}\, e^{-\beta t}}{\displaystyle\int_t^\infty s^{\alpha-1}\, e^{-\beta s}\, ds} \\
\mu_{x+t}^{(2)} &= \frac{(1-\theta) t^{\alpha-1}\, e^{-\beta t}}{\displaystyle\int_t^\infty s^{\alpha-1}\, e^{-\beta s}\, ds}
\end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{c} 0 < \theta < 1 \\ \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ t \geq 0. \end{array}$$

a. Obtenga expresiones para $f(t,j)$, $h(j)$ y $g(t)$, la *f.d.p.* conjunta de T y J, la *f.p.* de J y la *f.d.p.* de T.

b. Exprese $E[T]$ y $Var[T]$ en términos de α y β.

c. El seguro de (x) estipula una indemnización de 1 si el decremento es debido a la causa 1 y una indemnización de 0 si el decremento es debido a la causa 2. La fuerza de interés es δ.

(i) Muestre la función de pérdida asociada con este seguro si es que el fondo se hace mediante una prima única representada por $\bar{A}$.

(ii) Utilice el principio de equivalencia y obtenga una expresión para $\bar{A}$.

(iii) Obtenga una fórmula para la varianza de la función de pérdida de (i).

Capítulo 10

TEORIA DE VALUACION PARA PLANES DE PENSION

10.1 Introducción

Dentro del trabajo actuarial el uso de los modelos de decremento múltiple en los planes de pensión es una de sus importantes aplicaciones. En este capítulo consideraremos los métodos básicos utilizados para calcular los valores presentes actuariales de los beneficios del participante en un plan de pensión así como de sus contribuciones al mismo. Los participantes en el plan citado pueden ser los empleados de un sólo patrón, o de un grupo de patrones con actividades similares. Un plan de retiro, proporciona típicamente pensiones por edad y servicio o por incapacidad. Para el caso en que hay separación del empleo puede haber ya sea, un reembolso de las contribuciones acumuladas por el empleado o bien, una pensión diferida. Cuando el fallecimiento ocurre antes de las otras contingencias, puede pagarse al beneficiario un ingreso o suma global única. A los pagos que se realizan para cubrir los costos de los beneficios se les denomina contribuciones, no primas como en el seguro, y son pagaderas en diversas proporciones por los participantes y el patrocinador del plan.

Un plan de pensión puede ser visto como un sistema para comprar anualidades vitalicias diferidas (pagaderas durante el retiro) y ciertos beneficios subsidiarios mediante alguna forma de anualidad temporal de contribuciones durante el servicio activo. El balance entre los valores presentes actuariales de los beneficios y los de las contribuciones puede hacerse sobre una base individual, pero con más frecuencia se realiza sobre alguna base agregada para todo el grupo de participantes. Los métodos para lograr este balance constituyen el contenido de la teoría de los fondos de pensión. Con respecto a un participante típico, en este apartado estaremos preocupados sólo con la *valuación* por separado de los valores presentes actuariales de los beneficios y de las contribuciones del plan de pensión. Los valores agregados podrán obtenerse posteriormente mediante la suma sobre el total de participantes. También se presentarán aquí las herramientas básicas para la valuación de los beneficios de un plan de pensión y de las contribuciones al mismo, pero su aplicación a los posibles métodos de suministro de fondos para un plan será diferida hasta el capítulo 19.

10.2 Funciones Básicas

Un punto de partida es una tabla de decremento múltiple (servicio) construida para representar a un grupo sobreviviente de participantes sujetos, durante los años de servicio activo, a probabilidades dadas de

- separación del servicio,
- muerte durante el servicio,
- retiro por incapacidad,
- retiro por años de servicio.

Las notaciones para estas probabilidades para el año de edad x a $x+1$ son $q_x^{(w)}$, $q_x^{(d)}$, $q_x^{(i)}$ y $q_x^{(r)}$, respectivamente. Estas son consistentes con las notaciones desarrolladas en el Capítulo 9. También emplearemos la función de sobrevivencia $l_x^{(\tau)}$ del Capítulo 9. Si a es la edad inicial y se le asigna a $l_a^{(\tau)}$ un valor arbitrario, tenemos

$$l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)}[1 - (q_x^{(w)} + q_x^{(d)} + q_x^{(i)} + q_x^{(r)})] = l_x^{(\tau)}\, p_x^{(\tau)}.$$

Esta función puede utilizarse para evaluar expresiones tales como ${}_kp_x^{(\tau)}$, por tanto

$${}_kp_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+k}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}.$$

Puede también procederse mediante un metodo recursivo directo, es decir,

$${}_kp_x^{(\tau)} = {}_{k-1}p_x^{(\tau)}\, p_{x+k-1}^{(\tau)}.$$

Las fuerzas de decremento relacionadas con un tabla de servicio serán continuas para la mayoría de las edades. Se representarán mediante $\mu_x^{(w)}$, $\mu_x^{(d)}$, $\mu_x^{(i)}$ y $\mu_x^{(r)}$. En algunas edades pueden ocurrir discontinuidades, principalmente para la edad α, la primera edad elegible para el retiro, o en la edad límite ω después de la que ya no hay miembros activos. Generalmente supondremos que $l_\omega^{(\tau)} = 0$, pero en la que ω representa una edad de retiro obligatoria, sería apropiado suponer que $l_\omega^{(\tau)} \neq 0$ y que todos los retiros de los miembros que alcanzan la edad ω ocurren en esa edad. De lo contrario, generalmente supondremos que los decrementos están dispersos durante cada año de edad.

Durante los primeros años de servicio, las tasas de separación tienden a ser altas y la indemnización por ese concepto puede reducirse a las contribuciones acumuladas del participante, si es que existen, considerando un interés. Después de un tiempo, por ejemplo, 5 años, las tasas de separación serán algo más bajas y el participante que se separa puede ser elegible para una pensión diferida. Si estas condiciones son válidas, podría ser necesario utilizar tasas selectas de separación para un número apropiado de años. Las condiciones para el retiro por incapacidad pueden también indicar la necesidad de una base selecta. Las modificaciones matemáticas para una base selecta son relativamente fáciles de hacer, y la teoría es más adaptable si se utilizan funciones selectas. En este capítulo representaremos la edad de ingreso mediante x, pero no indicaremos en las restantes consideraciones si se aplica una tabla agregada, una selecta, o una selecta y extrema.

La Tabla de Servicio Ilustrativa del Anexo 2B ejemplifica una tabla de servicio para una edad de ingreso 30, la edad mínima para el retiro $\alpha = 60$, y la edad límite para servicio activo $\omega = 71$. Aquí $l_{71}^{(\tau)} = 0$.

Como se indicó anteriormente, los principales beneficios de un plan de pensión son las anualidades para los beneficiarios elegibles. Para la valuación de dicha indemnización anual, es necesario adoptar tablas de mortalidad apropiadas que diferirán si el retiro es por incapacidad o por años de servicio. Los valores de la anualidad correspondientes se indicarán por índices fijos, $\bar{a}_{x+t}^{i}$ si el retiro es por incapacidad y $\bar{a}_{x+t}^{r}$ si el retiro es debido a los años de servicio. El valor de la anualidad continua se utiliza como un medio de aproximación conveniente a la forma real del pago de pensión que normalmente será mensual, pero que puede tener condiciones particulares como pagos iniciales y finales.

Algunos planes de pensión, especialmente aquellos diseñados para los trabajadores por hora, definen las indemnizaciones como cantidades netas de ingreso por año de servicio. Otros planes definen a los beneficios como porcentajes de un salario final medio. Dichas fórmulas son utilizadas frecuentemente en los planes que involucran empleados asalariados. En estos casos, es preciso proyectar los salarios futuros para poder evaluar las indemnizaciones. Las contribuciones de patrocinador se expresan con frecuencia como un porcentaje del salario, por lo que aquí también es importante la proyección de los salarios futuros. Para dicha proyección, definimos las siguientes funciones de salario:

$(AS)_{x+h}$ es la tasa real de salario anual en la edad $x+h$, para un participante que ingresó en la edad x y ha alcanzado ahora la edad $x+h$;

$(ES)_{x+h+t}$ es la tasa proyectada del salario anual para la edad $x+h+t$.

Adicionalmente, supondremos que tenemos una función de escala de salarios, S_y para usarla con estas proyecciones, tal que

$$(ES)_{x+h+t} = (AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}. \tag{10.1}$$

Aquí la función del salario S_y no sólo refleja los incrementos al salario debido a méritos y antigüedad, sino también los incrementos causados por la inflación. Por ejemplo, en la Tabla de Servicio Ilustrativa, $S_y = s_y(1.06)^{y-30}$ en donde el factor S_y representa la progresión del salario debido a méritos individuales e incrementos en la experiencia, y el factor de acumulación de 6% es para considerar los efectos de largo plazo de la inflación y los incrementos en la productividad de todos los miembros del plan. Al igual que sucedió en el caso de la función $l_x^{(\tau)}$ puede seleccionarse arbitrariamente uno de los valores de S_y , por ejemplo, en la tabla de servicio ilustrativa, S_{30} se toma como unidad. Se supone generalmente que la función S_y es una función por etapas, con nivel constante durante cualquier año de edad dado.

Un modelo de decremento múltiple, una escala de salarios, un supuesto respecto al reembolso de la inversión, y un valor anual apropiado para los retiros por incapacidad y por años de servicio son los factores esenciales requeridos para determinar los valores presentes actuariales de las indemnizaciones de los planes de pensión y de las contribuciones requeridas para respaldarlas. En las siguientes secciones, discutiremos las fórmulas básicas para la valuación de las contribuciones de los planes de pensión y diversos tipos de indemnizaciones. A esto seguirá una reformulación en términos de funciones conmutativas de pensión.

10.3 Contribuciones

Existen dos patrones simples de contribuciones: una tasa neta por participante y un porcentaje neto del salario por participante. Para cada uno de éstos patrones evaluaremos el valor presente actuarial de las contribuciones futuras con respecto a un participante que ha alcanzado la edad $x+h$.

El valor presente actuarial de las contribuciones futuras pagadas continuamente a una tasa de c por año puede expresarse como

$$c\int_0^{\omega-x-h} v^t\,{}_tp_{x+h}^{(\tau)}\,dt = c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\int_0^1 v^s\,{}_sp_{x+h+k}^{(\tau)}\,ds. \tag{10.2}$$

El lado derecho de (10.2) resulta de reemplazar t por $k+s$ en donde k es un entero y $0\le s\le 1$. Si aproximamos cada integral del lado derecho mediante la fórmula del punto central, obtenemos el valor aproximado

$$c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\,v^{1/2}\,{}_{1/2}p_{x+h+k}^{(\tau)} = c\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\,{}_{k+1/2}p_{x+h}^{(\tau)}. \tag{10.3}$$

Nótese que (10.3) puede obtenerse directamente al suponer que los pagos tienen lugar a la mitad de los años de edad.

Si las contribuciones se expresan como una fracción c del salario, entonces el valor presente actuarial de las contribuciones futuras con respecto a un participante que está siendo pagado corrientemente a una tasa anual de $(AS)_{x+h}$ se puede expresar como

$$c(AS)_{x+h}\int_0^{\omega-x-h} v^t\,{}_tp_{x+h}^{(\tau)}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}\,dt$$

$$= \frac{c(AS)_{x+h}}{S_{x+h}} \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^k \, {}_kp_{x+h}^{(\tau)} \int_0^1 v^s \, {}_sp_{x+h+k}^{(\tau)} \, S_{x+h+k+s} \, ds. \qquad (10.4)$$

Si se supone que la función S_y es constante para cualquier año de edad, entonces también puede eliminarse de las integrales. En adición, si aproximamos cada una de las integrales mediante la fórmula del punto central, obtenemos como el valor presente actuarial

$$\frac{c(AS)_{x+h}}{S_{x+h}} \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2} \, {}_{k+1/2}p_{x+h}^{(\tau)} \, S_{x+h+k}. \qquad (10.5)$$

Las fórmulas (10.4) y (10.5) para el valor presente actuarial de las contribuciones puede adaptarse a variaciones de estos patrones simples como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 10.1:

Con base en la Tabla de Servicio Ilustrativa y con un interés a una tasa anual efectiva de 6%, proporcione fórmulas para el valor presente actuarial de las contribuciones futuras a un plan de pensión con respecto a un participante que actualmente tiene 50 años si la tasa de contribución

a. es nivelada a 1,200 por año

b. se supone que se incrementa en 100 por año a partir de un nivel inicial de 1,200

c.se supone que se incrementa anualmente a una tasa compuesta de 4% a partir de un nivel inicial de 1,200.

Solución:

En la Tabla de Servicio Ilustrativa $\omega = 71$, lo que determina el rango en las siguientes sumatorias.

a. $1,200 \sum_{k=0}^{20} v^{k+1/2} \, {}_{k+1/2}p_{50}^{(\tau)}$

b. $100 \sum_{k=0}^{20} (12 + k) \, v^{k+1/2} \, {}_{k+1/2}p_{50}^{(\tau)}$

c. $1,200 \sum_{k=0}^{20} (1.04)^k \, v^{k+1/2} \, {}_{k+1/2}p_{50}^{(\tau)}$

La última expresión puede reacomodarse como

$$1,200(1.04)^{-1/2} \sum_{k=0}^{20} (v')^{k+1/2} \, {}_{k+1/2}p_{50}^{(\tau)}$$

en donde $v' = 1.04/1.06$ se basa en la tasa de interés

$$i' = \frac{1.06}{1.04} - 1 = \frac{0.02}{1.04} = 0.019.$$

∇

Ejemplo 10.2:

En un *plan de tipo en exceso*, las indemnizaciones y contribuciones son pagaderas con respecto a los salarios en exceso de una secuencia de niveles de ingresos, es decir, $H_0, H_1, \cdots, H_k, \cdots$ en donde H_k se aplica en el año futuro $k+1$. Con base en la Tabla de Servicio Ilustrativo, porporcione una fórmula para el valor presente actuarial de las contribuciones de 5% de los salarios futuros en exceso con respecto a un empleado que en la actualidad tiene 50 años de edad y un salario de 30,000. Suponga que $30,000 > H_0$ y que los salarios futuros permanecerán por encima del nivel de ingresos H_k, $k = 1, 2, \cdots$.

Solución:

El valor presente actuarial requerido es

$$0.05 \sum_{k=0}^{20} \left[30,000 \frac{S_{50+k}}{S_{50}} - H_k \right] v^{k+1/2} {}_{k+1/2}p_{50}^{(\tau)}.$$

∇

10.4 Indemnizaciones de Retiro por Años de Servicio

La principal indemnización de una plan de pensión es normalmente la anualidad diferida de retiro por años de servicio. En los *planes de contribución definida*, el valor presente actuarial es simplemente la acumulación con interés de las contribuciones hechas por el participante, y la indemnización es una anualidad que puede comprarse con dicha acumulación. En dichos planes, la determinación del valor presente actuarial se logra mediante un proceso de acumulación. En otros planes, el ingreso de retiro está definido por una fórmula, y es para tales *planes de beneficio definido* para los que buscamos expresar los valores presentes actuariales. Para lo cual lo haremos primero para un caso general y después se hará específicamente para algunos de los patrones más usuales de indemnizaciones definidas.

Con este propósito, introducimos la función $R(x, h, t)$ para representar la tasa de ingreso de indemnización (anual) para un empleado de edad $x + h$ que ingreso a la edad x y quien en t años a partir de ahora a la edad $x + h + t$ es candidato para recibir indemnizaciones de ingreso inmediato o diferido. Suponemos que el ingreso permanece igual, y que en caso de retiro, por ejemplo, expresamos su valor presente actuarial al tiempo del retiro mediante $R(x, h, t)\, \bar{a}^{r}_{x+h+t}$. Debe notarse que en la Sección 9.7 las indemnizaciones eran sumas globales B_{x+h+t}, y la cantidad correspondiente aquí es el valor de la anualidad, $R(x,h,t)\,\bar{a}^{r}_{x+h+t}$ cuyo cálculo es un paso preliminar en el proceso de valuación. Podemos entonces escribir una expresión integral para el valor presente actuarial de la indemnización de retiro por años de servicio para un empleado actualmente activo en el estatus $x+h<\alpha$,

$$APV = \int_{\alpha-x-h}^{\omega-x-h} v^t\,{}_tp^{(\tau)}_{x+h}\,\mu^{(r)}_{x+h+t}\,R(x,h,t)\,\bar{a}^{r}_{x+h+t}\,dt. \tag{10.6}$$

Al igual que en la Sección 9.7, aproximamos la integral para cálculos prácticos del valor presente actuarial. Para hacerlo, escribimos

$$APV = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^k\,{}_kp^{(\tau)}_{x+h} \int_0^1 v^s\,{}_sp^{(\tau)}_{x+h+k}\,\mu^{(r)}_{x+h+k+s}\,R(x,h,k+s)\,\bar{a}^{(r)}_{x+h+k+s}\,ds.$$

Suponiendo una distribución uniforme de los retiros para cada año de edad, podemos reescribir esto como

$$APV = \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^k\,{}_kp^{(\tau)}_{x+h}\,q^{(r)}_{x+h+k} \int_0^1 v^s\,R(x,h,k+s)\,\bar{a}^{r}_{x+h+k+s}\,ds.$$

Utilizando la aproximación del punto central para las integrales restantes no da

$$APV \cong \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\,{}_kp^{(\tau)}_{x+h}\,q^{(r)}_{x+h+k}\,R(x,h,k+1/2)\,\bar{a}^{r}_{x+h+k+1/2}. \tag{10.7}$$

La fórmula (10.7) es la forma general mediante la cual calcularemos los valores presentes actueriales de las indemnizaciones de retiro por años de servicio.

Procederemos a considerar diversos tipos comunes de funciones de tasas de ingreso por indemnización $R(x,h,t)$. Estas se dividen en tres grupos. Primero, se tienen las funciones que no dependen de los niveles de salarios. Segundo, aquellas que dependen ya sea de la tasa final de salario o de la tasa de salario medio de los últimos años anteriores al retiro. Y por último, las funciones que dependen del salario medio percibido durante toda la carrera de servicios con el patrocinador del plan.

10.4.1 Funciones $R(x,h,t)$ Independientes del Salario

Consideremos un ingreso por indemnización de b veces el número total de años de servicio, incluyendo cualquier fracción final. En este caso $R(x,h,t) = b(h+t)$. Si sólo cuentan los años completos de servicio, entonces $R(x,h,t) = b(h+k)$ en donde k es el entero más grande en t. Otra variante sería el aplicar una tasa menor por el servicio excedente a un número de años, por ejemplo, 30 años. En este caso, la tasa de ingresos por indemnización sería

$$R(x,h,t) = \begin{cases} b_1\,(h+t) & h+t \leq 30 \\ 30\,b_1 + b_2\,(h+t-30) & h+t > 30. \end{cases}$$

Ejemplo 10.3:

Un plan de pensión estipula una indemnización básica de 15 al mes por cada año de servicios más una indemnización suplementaria, pagadera a la edad de 65, por 10 al mes por cada año de servicios. Proporcione una fórmula para el valor presente actuarial de estas indemnizaciones para un participante de 40 años que ingreso al servicio a los 30, suponiendo que se aplique la Tabla de Servicio Ilustrativa.

Solución:

De (10.7), el valor presente actuarial de la indemnización básica es

$$180 \sum_{k=20}^{30} v^{k+1/2}\, {}_kp_{40}^{(\tau)}\, q_{40+k}^{(r)} \left(10+k+\frac{1}{2}\right) \bar{a}^r_{40+k+1/2}$$

y de la suplementaria es

$$120 \sum_{k=20}^{24} v^{k+1/2}\, {}_kp_{40}^{(\tau)}\, q_{40+k}^{(r)} \left(10+k+\frac{1}{2}\right) \bar{a}^r_{40+k+1/2:\overline{25-k-1/2}|}$$

▽

Ejemplo 10.4:

Si en el Ejemplo 10.3, no pueden contar más de 35 años de servicio para la indemnización, ¿ Cómo se modificarían las fórmulas ?

Solución:

Para la indemnización básica, la tasa de ingresos por indemnización sería

$$R\left(30,10,k+\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 180\left(10+k+\frac{1}{2}\right) & k < 25 \\ 6,300 & 25 \leq k \leq 30. \end{cases}$$

La fórmula de la indemnización suplementaria permanecería sin cambio.

▽

10.4.2 Funciones $R(x, h, t)$ Dependientes del Salario Final

Primero consideraremos el caso en el que la tasa de ingresos por indemnización es una fracción fija g de la tasa final del salario, por tanto

$$\begin{aligned} R(x,h,t) &= g(ES)_{x+h+t} \\ &= g(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}. \end{aligned}$$

Más frecuentemente, la tasa de ingresos por indemnización se basa en la tasa del salario promedio de los últimos m años, por ejemplo, de los últimos 5 años. En este caso, si $t > m$,

$$\begin{aligned} R(x,h,t) &= g\frac{1}{m}\int_{t-m}^{t}(ES)_{x+h+s}\,ds \\ &= g\frac{(AS)_{x+h}}{m}\int_{t-m}^{t}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}\,ds. \end{aligned} \qquad (10.8)$$

Si $t < m$, la expresión exacta de $R(x,h,t)$ involucra algunos salarios conocidos y está dada por

$$g\frac{1}{m}\left[\int_{t-m}^{o}(AS)_{x+h+s}\,ds + \int_{o}^{t}(AS)_{x+h}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}\,ds\right].$$

Esta segunda formulación requiere de un manejo especial.

Para la evaluación numérica de (10.8), utilizamos intervalos anuales para t; cuando $k \leq t < k+1$, utilizamos el valor a la mitad del año. Por tanto

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = g\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\frac{1}{m}\int_{k+1/2-m}^{k+1/2} S_{x+h+s}\,ds.$$

Bajo el supuesto acostumbrado de que S_y es una función escalonada, constante para cada año de edad, tenemos

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right) = g\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}S_{x+h+k-m} + S_{x+h+k-m+1}\right.$$

$$+\cdots+S_{x+h+k-1}+\frac{1}{2}S_{x+h+k}\Big).$$

Introduciendo la notación

$$_mZ_y=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}S_{y-m}+S_{y-m+1}+\cdots+S_{y-1}+\frac{1}{2}S_y\right), \tag{10.9}$$

podemos reescribir la fórmula como

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right)=g(AS)_{x+h}\frac{_mZ_{x+h+k}}{S_{x+h}}. \tag{10.10}$$

Una forma más común de la indemnización de salario final es basar la tasa de ingreso por indemnización en el producto del salario promedio final y el número de años de servicios al retiro. Una fórmula típica sería

$$R(x,h,t)=f(h+t)(AS)_{x+h}\left[\frac{1}{m}\int_{t-m}^{t}\frac{S_{x+h+s}}{S_{x+h}}ds\right]$$

en donde f es una fracción dada como, por ejemplo, 0.02. Para la aproximación númerica, podría procederse como en (10.10) para escribir

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right)=f\left(h+k+\frac{1}{2}\right)(AS)_{x+h}\frac{_mZ_{x+h+k}}{S_{x+h}}. \tag{10.11}$$

En algunos casos, sólo cuentan los años completos de servicio, y en ése caso

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right)=f(h+k)(AS)_{x+h}\frac{_mZ_{x+h+k}}{S_{x+h}}. \tag{10.12}$$

En los siguientes ejemplos se indican algunas variantes.

Ejemplo 10.5:

En un *plan de tasa escalonadas,*

(la tasa de ingresos por indemnización para el retiro en el año $k+1$)

=(al número de años de servicios)

$\times$ [(1 $\frac{1}{4}$ % del primer H_k del salario promedio final de los últimos tres años)

+ (1 $\frac{3}{4}$ % del salario promedio final de los últimos tres años que exceden a H_k)].

Para un participante que está ingresando actualmente a la edad de 30 años con un salario de 20,000, proporcione una fórmula para la tasa de ingreso por indemnización a la mitad del año en caso de retiro entre las edades 63 y 64. Suponga que el salario promedio final de los últimos tres años excederá a H_{33}.

Solución:

$$
\begin{aligned}
R(30,0,33\tfrac{1}{2}) &= 33.5\left[0.0125\, H_{33} + 0.0175\left(20{,}000\frac{{}_3Z_{63}}{S_{30}} - H_{33}\right)\right] \\
&= 33.5\left[350\frac{{}_3Z_{63}}{S_{30}} - 0.005\, H_{33}\right]
\end{aligned}
$$

∇

Ejemplo 10.6:

En un ***plan de compensación***, la tasa de ingresos por indemnización se calcula primero como el 2% del salario promedio final de los últimos tres años multiplicado por el número de años de servicios, y depués se resta una compensación que se basa en la indemnización del seguro social del participante. La compensación es igual al 50% del ingreso por retiro inicial del seguro social del participante. Para un participante de 40 años de edad, que ingresó al servicio a la edad de 30 y que actualmente gana un salario de 30,000, la tasa estimada de ingresos por indemnización del seguro social para el retiro a la edad de 65 es P. Proporcione una fórmula para la tasa de ingresos por indemnización para el plan de compensación si el retiro ocurre a la edad exacta de 65.

Solución:

$$
\begin{aligned}
R(30,10,25) &= 35\left[0.02(30{,}000)\frac{{}_3\bar{Z}_{65}}{S_{40}}\right] - 0.5\,P \\
&= 21{,}000\frac{{}_3\bar{Z}_{65}}{S_{40}} - 0.5\,P
\end{aligned}
$$

en donde

$$
{}_3\bar{Z}_{65} = \frac{S_{62} + S_{63} + S_{64}}{3}.
$$

∇

Ejemplo 10.7

Un plan agregado estipula una tasa básica de ingresos por indemnización de $1\frac{1}{2}\%$ de la compensación promedio de los 5 últimos años por cada año de servicio más un suplemento pagadero a la edad de 65 de 1/2% de la compensación promedio de los 5 últimos años por cada año de servicio en caso de que un participante se retire antes de los 65 años de edad. Para un participante de 40 años, que ingresó al servicio a la edad de 30 y tiene un salario de 30,000, porporcione una fórmula para el valor presente actuarial de la indemnización del participante si la edad mínima de retiro es de 60 años, si el retiro es obligatorio a los 70 años, y si algunos participantes permanecen en servicio hasta alcanzar la edad de 70 años.

Solución:

Aquí $q_{40+k}^{(r)} = 0$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 19$ y ${}_{30}p_{40}^{(\tau)} \neq 0$. El valor presente actuarial es

$$\sum_{k=20}^{29} v^{k+1/2}\, {}_kp_{40}^{(\tau)}\, q_{40+k}^{(r)} \left(10 + k + \frac{1}{2}\right) \frac{{}_5Z_{40+k}}{S_{40}}\, 450\, \bar{a}_{40+k+1/2}^{r}$$

$$+ v^{30}\, {}_{30}p_{40}^{(\tau)} \frac{{}_5\bar{Z}_{70}}{S_{40}}\, 18,000\, \bar{a}_{70}^{r}$$

$$+ \sum_{k=20}^{24} v^{k+1/2}\, {}_kp_{40}^{(\tau)}\, q_{40+k}^{(r)} \left(10 + k + \frac{1}{2}\right) \frac{{}_5Z_{40+k}}{S_{40}}\, 150\, \bar{a}_{40+k+1/2:\overline{25-k-1/2}|}^{r}$$

en donde

$${}_5\bar{Z}_{70} = \frac{S_{65} + S_{66} + S_{67} + S_{68} + S_{69}}{5}.$$

∇

Ejemplo 10.8:

¿ Cómo cambia la fórmula del valor presente actuarial de la indemnización para el participante del Ejemplo 10.7 si el servicio que se acreditará en la tasa de ingresos por indemnización se limita a 30 años?

Solución:

Para este participante en particular, que para la edad de 60 años habrá completado 30 años de servicio, la fórmula del valor presente actuarial se simplifica a

$$13.500\left\{\sum_{k=20}^{29} v^{k+1/2}\,{}_kp_{40}^{(\tau)}\,q_{40+k}^{(r)}\,\frac{{}_5Z_{40+k}}{S_{40}}\,\bar{a}^r_{40+k+1/2} + v^{30}\,{}_{30}p_{40}^{(\tau)}\,\frac{{}_5\bar{Z}_{70}}{S_{40}}\,\bar{a}^r_{70}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\sum_{k=20}^{24} v^{k+1/2}\,{}_kp_{40}^{(\tau)}\,q_{40+k}^{(r)}\,\frac{{}_5Z_{40+k}}{S_{40}}\,\bar{a}^r_{40+k+1/2:\overline{25-k-1/2|}}\right\}.$$

∇

Ejemplo 10.9

Proporcione una fórmula del valor presente actuarial de la indemnización por retiro asociada con el servicio entre las edades 30 y 40 del participante del Ejemplo 10.7.

Solución:

El participante tiene 10 años de servicio entre las edades 30 y 40 y el valor presente actuarial de la indemnización asociada es de 1/3 del valor presente actuarial del Ejemplo 10.8, el cual se baso en la acreditación de 30 años de servicios. El único cambio requerido es reemplazar 13,500 por 4,500.

∇

10.4.3 Función $R(x, h, t)$ Determinada por el Salario Promedio de la Carrera de Servicios

Otro tipo de tasa de ingresos por indemnización es una fracción f de los ingresos percibidos durante toda la carrera del retirado. Esta tasa de ingresos por indemnización puede verse como f veces el producto del número de años de servicio y el salario promedio durante toda la carrera. Por esta razón, a dicha indemnización se le denomina *indemnización promedio de la carrera.*

El cálculo de los valores presentes actuariales de la indemnización promedio de la carrera por retiro se divide en forma natural en dos partes, una por el servicio pasado para el que la información salarial es conocida y una para el servicio futuro en la que los salarios deberán estimarse. Aquí , los salarios pasados entran en la valuación de las indemnizaciones de todos los participantes y no sólo para los participantes que están cercanos al retiro. Por lo tanto, a diferencia de la situación mencionada en conexión con (10.8), es usual aquí utilizar los salarios pasados reales. Si el total de los salarios pasados para un participante en el estatus $x+h$ se representa mediante $(TPS)_{x+h}$, la tasa de indemnización por los servicios del pasado es $f(TPS)_{x+h}$ y el valor presente actuarial de la indemnización por los servicios del pasado es

$$f(TPS)_{x+h} \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+k}^{(r)}\,\bar{a}^r_{x+h+k+1/2}. \tag{10.13}$$

La tasa de ingresos por indemnización basada en los servicios futuros está dada por

$$f\int_o^t (ES)_{x+h+s}\,ds = f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\int_o^t S_{x+h+s}\,ds.$$

Para la evaluación numérica, si S_{x+h+s} es una función escalonada con etapas anuales tenemos

$$f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{x+h+j} + \frac{1}{2}S_{x+h+k}\right) \tag{10.14}$$

en donde k es el entero más grande en t. El valor presente actuarial de la indemnización por servicios futuros es por tanto

$$f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left[\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+k}^{(r)}\,\bar{a}_{x+h+k+1/2}^{r}\left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{x+h+j} + \frac{1}{2}S_{x+h+k}\right)\right]. \tag{10.15}$$

Como $q_{x+h+k}^{(r)} = 0$ para $k < \alpha - x - h$, (10.15) puede reescribirse como

$$f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left[\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+k}^{(r)}\,\bar{a}_{x+h+k+1/2}^{r}\left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{x+h+j} + \frac{1}{2}S_{x+h+k}\right)\right]. \tag{10.16}$$

La figura 10.1 muestra esas combinaciones de los valores de j y k sobre los que se hace la sumatoria. Los puntos de la red en donde el término tiene un coeficiente multiplicativo de $1/2$ están marcados ○.

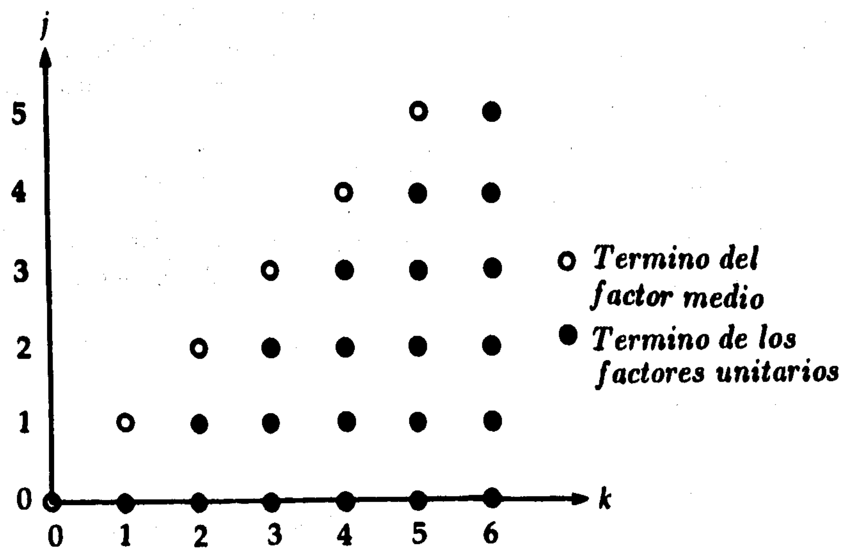
Cambiando el orden de la sumatoria, (10.16) se transforma en

$$f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\left[\sum_{j=0}^{\omega-x-h-1} S_{x+h+j}\left(\frac{1}{2}v^{j+1/2}\,{}_jp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+j}^{(r)}\,\bar{a}_{x+h+j+1/2}^{r}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=j+1}^{\omega-x-h-1} v^{k+1/2}\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+k}^{(r)}\,\bar{a}_{x+h+k+1/2}^{r}\right)\right]. \tag{10.17}$$

Nótese que la suma interior es 0 cuando $j = \omega - x - h - 1$.

Figura 10.1 Puntos de las sumatorias para las fórmulas (10.16) y (10.17)



La expresión (10.17) puede interpretarse considerando que el servicios en el año $j+1$ proporciona una unidad completa de indemnización,

$$f\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}S_{x+h+j},$$

si el retiro ocurre después del año $j+1$ y un promedio de $1/2$ unidad de indemnización si el retiro ocurre en el mismo año $j+1$.

En lugar de valuar la indemnización total por los servicios futuros, podría uno interesarse en determinar el valor presente actuarial de la indemnización acreditada por el servicio en los años que se extienden desde la edad $x+h$ hasta la edad $x+h+1$. Esto es simplemente el primer sumando de la expresión (10.17), la cual, después de cancelar S_{x+h}, es

$$f(AS)_{x+h}\left[\frac{1}{2}v^{1/2}q_{x+h}^{(r)}\bar{a}_{x+h+1/2}^{r}+\sum_{k=1}^{\omega-x-h-1}v^{k+1/2}{}_{k}p_{x+h}^{(\tau)}q_{x+h+k}^{(r)}\bar{a}_{x+h+k+1/2}^{r}\right]. \qquad (10.18)$$

Esta valor presente actuarial puede interpretarse como el costo asignado al servicio actual bajo el plan promedio de carrera para el participante de edad $x+h$.

Ejemplo 10.10:

a. Un plan promedio de carrera estipula un ingreso por retiro de 2% del salario agregado durante los años de servicio de un participante. Para un participante de 40 años de edad que ingreso a la edad de 30, tiene 200,000 de salarios totales pasados, y un salario actual de 25,000, escriba una expresión para la tasa de ingreso total por indemnización del participante en caso de retiro entre las edades 67 y 68.

b. Proporciones fórmulas alternativas del valor presente actuarial de la indemnización por servicios futuros del participante, suponiendo que se utiliza la Tabla de Servicio Ilustrativa.

c. Exprese el valor presente actuarial de la indemnización acreditada para los servicios de este participante de la edad 40 a la 41, suponiendo otra vez que se usa la Tabla de Servicio Ilustrativa.

Solución:

a. La tasa de ingresos total de mitad del año es

$$
\begin{aligned}
R(30, 10, 27\frac{1}{2}) &= 0.02 \left[200,000 + 25,000 \frac{\sum_{j=0}^{26} S_{40+j} + (1/2) S_{67}}{S_{40}} \right] \\
&= 4,000 + 500 \frac{\sum_{j=0}^{26} S_{40+j} + (1/2) S_{67}}{S_{40}}.
\end{aligned}
$$

b. Por (10.15), el valor presente actuarial es

$$
\frac{500}{S_{40}} \sum_{k=20}^{30} v^{k+1/2} \, {}_kp_{40}^{(\tau)} \, q_{40+k}^{(r)} \left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{40+j} + \frac{1}{2} S_{40+k} \right) \bar{a}^r_{40+k+1/2}.
$$

Alternativamente, la expresión por (10.17) es

$$
\begin{aligned}
\frac{500}{S_{40}} \Bigg[\sum_{j=0}^{30} S_{40+j} \Bigg(& \frac{1}{2} v^{j+1/2} \, {}_jp_{40}^{(\tau)} \, q_{40+j}^{(r)} \, \bar{a}^r_{40+j+1/2} \\
&+ \sum_{k=j+1}^{30} v^{k+1/2} \, {}_kp_{40}^{(\tau)} \, q_{40+k}^{(r)} \, \bar{a}^r_{40+k+1/2} \Bigg) \Bigg].
\end{aligned}
$$

Como $q_{40+k}^{(r)} = 0$ para $k < 20$, un número de sumandos será 0.

c. Después de que los términos valuados 0 se abandonan, el resultado requerido de (10.18) es

$$500 \sum_{k=20}^{30} v^{k+1/2} {}_kp_{40}^{(\tau)} q_{40+k}^{(r)} \bar{a}^r_{40+k+1/2}.$$

∇

10.5 Indemnizaciones por Incapacidad

Se puede seguir un proceso similar al que se utilizó en la sección precedente para la valuación de las pensiones por incapacidad. Tales pensiones generalmente se basan sobre el salario que se devenga en la fecha de la incapacidad, podrían representar una indemnización mínima y podrían ser pagaderas sólo hasta alguna edad como, por ejemplo, 65, y en ese momento se cambiaría la pensión a una pensión por años de servicio. Ejemplificaremos el proceso mediante una pensión por incapacidad pagadera a la tasa de f veces el salario del año en que ocurre el retiro por incapacidad multiplicado por el número de años de servicios acreditados incluyendo cualquier crédito fraccionario. Se supone que el participante debe haber prestado sus servicios al menos durante 5 años y ser menor de 65 años para ser elegible para el retiro por incapacidad, pero si el retiro por incapacidad ocurre durante este periodo, la indemnización será al menos 10 f veces el salario anual correspondiente a la fecha de la incapacidad. La función de la tasa de ingresos por indemnización para un integrante nuevo de edad x está dada por

$$R(x,0,t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 5 \text{ o } t \ge 65 - x \\ 10f(ES)_{x+t} = 10f(AS)_x \frac{S_{x+t}}{S_x} & 5 \le t < 10 \\ tf(ES)_{x+t} = tf(AS)_x \frac{S_{x+t}}{S_x} & 10 \le t < 65 - x. \end{cases} \tag{10.19}$$

El valor presente actuarial para estas indemnizaciones por incapacidad (que aquí se suponen pagaderas de por vida) están dadas por

$$\int_S^{65-x} v^t \, {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(i)} R(x,0,t) \bar{a}^i_{x+t} \, dt, \tag{10.20}$$

y se aproxima mediante

$$\sum_{k=5}^{64-x} v^{k+1/2} {}_kp_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(i)} R\left(x,0,k+\frac{1}{2}\right) \bar{a}^i_{x+k+1/2}. \tag{10.21}$$

Las diferencias entre estas expresiones y (10.6) y (10.7) son el uso de la fuerza del decremento de la incapacidad y la probabilidad del retiro por incapacidad, los límites de la integración y de la sumatoria, y el uso de valores de la anualidad por incapacidad.

Ejemplo 10.11:

Un plan de pensión estipula una indemnización de ingreso por incapacidad del 50% del salario final, pero no más del 70% del salario final menos la cantidad inicial del ingreso por incapacidad pagadero por el sistema de seguro social. Para que un participante califique para la indemnización, debe haber prestado sus servicios al menos 3 años y haberse retirado por incapacidad antes de los 65 años de edad. Para un participante que ingresó a la edad de 30 con un salario de 15,000, y con un ingreso por incapacidad inicial estimado del seguro social de I_y por retiro de incapacidad en el año de la edad y a $y+1$, $30 \leq y < 65$, exprese la tasa de ingreso de indemnización por incapacidad pagadera a través del plan de pensión.

Solución:

Si $k = 0, 1, 2$, $R(30, 0, k+1/2) = 0$. Si $3 \leq k \leq 34$,

$$R\left(30, 0, k+\frac{1}{2}\right) = el\, minimo\, de \begin{cases} 7,500\frac{S_{30+k}}{S_{30}} \\ 10,500\frac{S_{30+k}}{S_{30}} - I_{30+k} \end{cases}$$

siempre que esta cantidad sea positiva, de lo contrario $R(30, 0, k+1/2) = 0$.

∇

10.6 Indemnización por Seperación

En general, existen dos tipos de indeminizaciones por separación. Después de un número de años, por ejemplo, 10 años el participante saliente puede ser candidato a una anualidad diferida. Como ejemplo, consideramos una indemnización por separación de una anualidad diferida que se inicia a la edad de 60 años. La tasa de ingreso es f veces el número de años de servicio hasta el momento de la separación multiplicado por la tasa de salario pagadera en el año de la separación. En este caso tenemos

$$R(x, h, t) = \begin{cases} 0 & h+t < 10 \\ f(h+t)(ES)_{x+h+t} & 10 \leq h+t < 60-x. \end{cases}$$

El valor presente actuarial de esta indemnización se aproxima mediante

$$\sum_{k=l}^{59-x-h} v^{k+1/2}\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+k}^{(w)}\,R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right)\,{}_{60-x-h-k-1/2|}\bar{a}_{x+h+k+1/2}^{r} \tag{10.22}$$

en donde l es el mayor de $10-h$ o 0. El uso de $\bar{a}^r$ en (10.22) es bajo el supuesto de que la tabla de mortalidad de la vida de los retirados es adecuada para cálcular los retiros diferidos.

El otro tipo de indemnización por separación se aplica a planes que incluyen contribuciones de los participantes. Estos planes, que generalmente involucran a empleados públicos, usualmente estipulan un reembolso de las contribuciones de los participantes, acumulados con interés, como una suma global si el participante sale antes de ser candidato a una pensión de indemnización. Generalmente, se paga una indemnización similar a la muerte del participante si éste se encontraba en servicio activo, pero en este caso puede existir también una aportación para un ingreso por indemnización al sobreviviente. Aquí nos restringiremos a considerar las indemnizaciones reembolsables pagaderas a la salida. También, únicamente consideraremos reembolsos con respecto a las contribuciones previas y a la contribución del año corriente; las cuales se basan en salarios conocidos. Podríamos considerar las fórmulas del promedio de la carrera de servicios para la valuación de los reembolsos de las contribuciones futuras, pero son complejas y, en la práctica, pueden eliminarse.

Para valuar el reembolso de la indemnización de contribuciones pasadas, representamos a éstas últimas como $(ATPC)_{x+h}$ acumuladas con interés hasta la fecha, con respecto a un participante con edad actual de $x+h$. Con el supuesto de que las contribuciones de los participantes se acumularán en el futuro a la tasa efectiva anual j, el tamaño de la suma global de indemnización pagadera a la edad de salida $x+h+t$ está dada por

$$B(x,h,t)=(ATPC)_{x+h}\,(1+j)^t.$$

La suma aproximada de los valores presente actuariales del indemnización por reembolso con respecto a las contribuciones pasadas es entonces

$$(ATPC)_{x+h}\sum_{k=0}^{\beta-x-h-1} v^{k+1/2}\,{}_kp_{x+h}^{(\tau)}\,q_{x+h+k}^{(w)}\,(1+j)^{k+1/2} \tag{10.23}$$

en donde β es la edad a la que se establece la elegibilidad para la pensión (diferida o inmediata) y $x+h<\beta$. Aquí se supone que no se hacen reembolsos después de que se alcanza la edad β.

El reembolso con respecto a una contribución corriente del participante de $c\%$ del salario se aproximará mediante $(1/2)(0.01c)(AS)_{x+h}$ para la separación en el año corriente, y mediante $(0.01c)(AS)_{x+h}(1+j)^k$ para la salida en el año $k+1$. Luego el valor presente actuarial de la indemnización por reembolso respecto a la contribución corriente del participante es

$$0.01\, c(AS)_{x+h} \left\{ \frac{1}{2} v^{1/2} q^{(w)}_{x+h} + \sum_{k=0}^{\beta-x-h-1} v^{k+1/2}\, {}_kp^{(\tau)}_{x+h}\, q^{(w)}_{x+h+k} (1+j)^k \right\} \qquad (10.24)$$

en donde $x + h < \beta$.

Ejemplo 10.12:

Para $j = i$, simplifique (10.23) y (10.24).

Solución:

Cuando $j = i$, (10.23) se transforma en

$$\begin{aligned} &(ATPC)_{x+h} \sum_{k=0}^{\beta-x-h-1} {}_kp^{(\tau)}_{x+h}\, q^{(w)}_{x+h+k} \\ = \;& (ATPC)_{x+h}\, Pr[(x+h) \text{ saldrá antes de su elegibilidad a la pensión}] \\ = \;& (ATPC)_{x+h} \frac{l^{(w)}_{x+h} - l^{(w)}_{\beta}}{l^{(\tau)}_{x+h}} \end{aligned}$$

en donde $l^{(w)}_y$ es el número de $l^{(\tau)}_y$ activos a la edad y que se espera saldrán en el futuro.

Ahora la fórmula (10.24) es

$$\begin{aligned} &(0.01c)(AS)_{x+h}\, v^{1/2} \left[\frac{1}{2} q^{(w)}_{x+h} + \sum_{k=1}^{\beta-x-h-1} {}_kp^{(\tau)}_{x+h}\, q^{(w)}_{x+h+k} \right] \\ = \;& (0.01c)(AS)_{x+h}\, v^{1/2} \frac{(1/2)(l^{(w)}_{x+h} - l^{(w)}_{x+h+1}) + l^{(w)}_{x+h+1} - l^{(w)}_{\beta}}{l^{(\tau)}_{x+h}} \\ = \;& (0.01c)(AS)_{x+h}\, v^{1/2} \frac{(1/2)(l^{(w)}_{x+h} + l^{(w)}_{x+h+1}) - l^{(w)}_{\beta}}{l^{(\tau)}_{x+h}}. \end{aligned}$$

∇

10.7 Funciones Conmutativas

Las funciones conmutativas especiales estipulan una notación tradicional y un método de almacenamiento para la evaluación numérica de los valores presentes actuariales para los planes de pensión. Estas funciones pueden ser de utilidad si se tiene que realizar un gran número de valuaciones utilizando el mismo conjunto de supuestos actuariales. Las funciones conmutativas para los cálculos de pensión no están incluidas en la Notación Actuarial Internacional; sin embargo, en la práctica diversas formas han sido ampliamente utilizadas. En esta sección definiremos e indicaremos la aplicación de varias de ésas funciones.

Iniciamos con la definición

$$D_x^{(\tau)} = v^x\, l_x^{(\tau)}. \tag{10.25}$$

Esta es similar a la función D_x utilizada en los Capítulos 4 y 5. El índice (τ) indica que se construye utilizando la función $l_x^{(\tau)}$ de una tabla de decremento múltiple. Nuestras fórmulas de evaluación numérica frecuentemente involucran factores como $v^{k+1/2}\,{}_{k+1/2}p_x^{(\tau)}$. y escribimos

$$v^{k+1/2}\,{}_{k+1/2}p_x^{(\tau)} = \frac{\bar{D}_{x+k}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}}$$

en donde

$$\bar{D}_y^{(\tau)} = D_{y+1/2}^{(\tau)}. \tag{10.26}$$

Las funciones adicionales para la valuación de contribuciones son

$${}^{S}\bar{D}_y^{(\tau)} = S_y\, \bar{D}_y^{(\tau)} \tag{10.27}$$

y

$$\begin{aligned} \bar{N}_x^{(\tau)} &= \sum_{y=x}^{\omega-1} \bar{D}_y^{(\tau)} \\ {}^{S}\bar{N}_x^{(\tau)} &= \sum_{y=x}^{\omega-1} {}^{S}\bar{D}_y^{(\tau)}. \end{aligned} \tag{10.28}$$

La función básica para la valuación de las indemnizaciones es

$$\bar{C}_y^h = D_y^{(\tau)}\, v^{1/2}\, q_y^{(h)}, \tag{10.29}$$

la que, como en el Capítulo 4, incluye una función D y la probabilidad de un decremento, $q_y^{(h)}$. El decremento involucrado, h, se indica mediante un exponente fijado a la derecha. La barra sobre la C indica que los pagos se hacen al momento del decremento y, consistente con nuestras aproximaciones, requiere del factor $v^{1/2}$. Otras funciones para la valuación de las indemnizaciones son

$$^{a}\bar{C}_y^h = \bar{C}_y^h\, \bar{a}_{y+1/2}^h \tag{10.30}$$

$$^{Sa}\bar{C}_y^h = S_y\, {}^{a}\bar{C}_y^h \tag{10.31}$$

$$^{Za}\bar{C}_y^h = {}_mZ_y\, {}^{a}\bar{C}_y^h. \tag{10.32}$$

Se pueden usar las funciones correspondiente $\bar{M}$ y $\bar{R}$, por ejemplo

$$^{Za}\bar{M}_x^h = \sum_{y=x}^{\omega-1} {}^{Za}\bar{C}_y^h \tag{10.33}$$

$$^{Za}\bar{R}_x^h = \sum_{y=x}^{\omega-1} {}^{Za}\bar{M}_y^h \tag{10.34}$$

Si, en estas funciones, el valor de la anualidad es para otra anualidad distinta de la de vida entera, indicaremos esta variación mediante un signo en el índice a. Nótese también que $^{Za}\bar{C}_y^r = 0$ y $^{Za}\bar{M}_y^r = {}^{Za}\bar{M}_\alpha^r$ para $y < \alpha$, en donde α es la primera edad para el retiro.

Ahora desarrollaremos fórmulas en términos de funciones conmutativas de pensión para los valores presente actuariales correspondientes a diversas fórmulas de las secciones precedentes. Para el valor presente actuarial de las contribuciones futuras pagaderas continuamente a una tasa de c por año, empezamos con (10.3) reacomodada como

$$c \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} \frac{v^{x+h+k+1/2}\, l_{x+h+k+1/2}^{(\tau)}}{v^{x+h}\, l_{x+h}^{(\tau)}}$$

y terminamos con

$$c\,\frac{\bar{N}_{x+h}^{(\tau)}}{D_{x+h}^{(\tau)}}. \tag{10.35}$$

Si la contribución expresa la fracción del salario, comenzamos por reformular (10.5) por

$$c(AS)_{x+h}\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1}\frac{v^{x+h+k+1/2}\,l^{(\tau)}_{x+h+k+1/2}\,S_{x+h+k}}{v^{x+h}\,l^{(\tau)}_{x+h}\,S_{x+h}}=c(AS)_{x+h}\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1}\frac{{}^{S}\bar{D}^{(\tau)}_{x+h+k}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}}$$

y por ultimo

$$c\frac{(AS)_{x+h}\,{}^{S}\bar{N}^{(\tau)}_{x+h}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}}. \tag{10.36}$$

Por (10.29) y (10.30), la expresión $v^{k+1/2}\,{}_kp^{(\tau)}_{x+h}\,q^{(r)}_{x+h+k}\,\bar{a}^{r}_{x+h+k+1/2}$ puede reescribirse como ${}^{a}\bar{C}^{r}_{x+h+k}/D^{(\tau)}_{x+h}$. Luego la fórmula general (10.7) para el valor presente actuarial de la indemnización de retiro por años de servicio, en términos de funciones conmutativas, es, para $x+h\leq\alpha$,

$$\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1}\frac{R(x,h,k+1/2)\,{}^{a}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{D^{(\tau)}_{x+h}}. \tag{10.37}$$

En particular, cuando $R(x,h,k+1/2)$ está dado por (10.10), obtenemos

$$\begin{aligned}
&g(AS)_{x+h}\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1}\frac{{}_mZ_{x+h+k}}{S_{x+h}}\frac{{}^{a}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{D^{(\tau)}_{x+h}}\\
=\;&g(AS)_{x+h}\sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1}\frac{{}^{Za}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}}\\
=\;&g(AS)_{x+h}\frac{{}^{Za}\bar{M}^{r}_{\alpha}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}}.
\end{aligned} \tag{10.38}$$

Como $0=q^{(r)}_y=\bar{C}^r_y={}^{Za}\bar{C}^r_y$ para $y<\alpha$, podemos expresar el valor presente actuarial como

$$g(AS)_{x+h}\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1}\frac{{}^{Za}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}}=g(AS)_{x+h}\frac{{}^{Za}\bar{M}^{r}_{x+h}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}}. \tag{10.39}$$

Esta fórmula alternativa es válida si $x+h\leq\alpha$ o si $x+h>\alpha$. Volveremos a ver esta ventaja de la reformulación de la suma cuando $R(x,h,k+1/2)$ depende de los años de servicio.

Un ejemplo de esta se da en (10.11) en donde

$$R\left(x,h,k+\frac{1}{2}\right)=f\left(h+k+\frac{1}{2}\right)(AS)_{x+h}\,\frac{{}_{m}Z_{x+h+k}}{S_{x+h}}.$$

Entonces el valor presente actuarial de la indemnización por retiro puede expresarse mediante una sumatoria, que empieza en $k=0$, como

$$\begin{aligned} &f(AS)_{x+h}\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1}\frac{(h+k+1/2)\,{}^{Za}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}} \\ &= f(AS)_{x+h}\frac{(h+1/2)\,{}^{Za}\bar{M}^{r}_{x+h}+{}^{Za}\bar{R}^{r}_{x+h+1}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}}. \end{aligned} \qquad (10.40)$$

Esto es válido para cualquier $x+h$, mientras que una sumatoria que empieza con $k=\alpha-x-h$ produciría la fórmula

$$f(AS)_{x+h}\frac{(\alpha-x+1/2)\,{}^{Za}\bar{M}_{\alpha}+{}^{Za}\bar{R}^{r}_{\alpha+1}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}},$$

que tendría que complementarse con (10.40) para $x+h>\alpha$.

Si solo cuentan los años completos de servicio, como en (10.12), el valor presente actuarial es

$$f(AS)_{x+h}\frac{h\,{}^{Za}\bar{M}^{r}_{x+h}+{}^{Za}\bar{R}^{r}_{x+h+1}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}}, \qquad (10.41)$$

que se sigue de (10.40) dejando la fracción promedio 1/2 para cualquier año de servicio incompleto.

El valor presente actuarial (10.13) para la indemnización por servicios pasados en el caso del salario promedio de la carrera se puede expresar como

$$f(TPS)_{x+h}\left(\frac{{}^{a}\bar{M}^{r}_{x+h}}{D^{(\tau)}_{x+h}}\right). \qquad (10.42)$$

Una fórmula que corresponde directamente a (10.15) para la indemnización por servicios futuros es

$$f(AS)_{x+h} \sum_{k=\alpha-x-h}^{\omega-x-h-1} \frac{\left(\sum_{j=0}^{k-1} S_{x+h+j} + (1/2)\, S_{x+h+k}\right) {}^{a}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}}. \tag{10.43}$$

para obtener una expresión, en las funciones conmutativas de pensión, correspondiente a la fórmula alternativa (10.17), la escribimos como

$$\begin{aligned} & f(AS)_{x+h} \frac{(1/2) \sum_{j=0}^{\omega-x-h-1} {}^{Sa}\bar{C}^{r}_{x+h+j} + \sum_{j=0}^{\omega-x-h-1} S_{x+h+j} \sum_{k=j+1}^{\omega-x-h-1} {}^{a}\bar{C}^{r}_{x+h+k}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}} \\ = \ & f(AS)_{x+h} \frac{(1/2)\, {}^{Sa}\bar{M}^{r}_{x+h} + \sum_{j=0}^{\omega-x-h-1} S_{x+h+j}\, {}^{a}\bar{M}^{r}_{x+h+j+1}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}}. \end{aligned}$$

Definimos ahora

$$ {}^{S'a}\bar{M}^{r}_{y} = S_{y-1}\, {}^{a}\bar{M}^{r}_{y}. \tag{10.44}$$

Lo que nos permite expresar el valor presente actuarial como

$$f(AS)_{x+h} \frac{(1/2)\, {}^{Sa}\bar{M}^{r}_{x+h} + {}^{S'a}\bar{R}^{r}_{x+h+1}}{{}^{S}D^{r}_{x+h}}. \tag{10.45}$$

Pasos similares a los indicados para las indemnizaciones por retiro se aplican a las indemnizaciones anuales disponibles por incapacidad o la separación. Por tanto (10.21), para el valor presente actuarial de una indemnización por incapacidad, puede escribirse en términos de funciones conmutativas como

$$\sum_{k=5}^{64-x} \frac{R(x,0,k+1/2)\, {}^{a}\bar{C}^{i}_{x+h}}{D^{(\tau)}_{x}} \tag{10.46}$$

en donde ${}^{a}\bar{C}^{i}_{y} = v^{1/2}\, D^{(\tau)}_{y}\, q^{(i)}_{y}\, \bar{a}^{i}_{y+1/2}$. Igualmente, (10.22) puede escribirse en términos de funciones conmutativas como

$$f(AS)_{x+h} \sum_{k=l}^{59-x-h} \frac{(h+k+1/2)\, {}^{Sa'}\bar{C}^{w}_{x+h+k}}{{}^{S}D^{(\tau)}_{x+h}} \tag{10.47}$$

en donde ${}^{Sa'}\bar{C}^w_y = S_y\, \bar{C}^w_y\, {}_{60-y-1/2|}\bar{a}^r_{y+1/2}$. Si así se desease, podría uno expresar este valor presente actuarial en términos de ${}^{Sa'}\bar{M}^w_y$ y ${}^{Sa'}\bar{R}^w_y$.

Introduciendo la notación ${}^j\bar{C}^w_y = (1+j)^y\, \bar{C}^w_y$, podemos reescribir (10.24) como

$$
\begin{aligned}
&0.01\, c\,(AS)_{x+h} \frac{(1/2)\, {}^j\bar{C}^w_{x+h} + \sum_{k=1}^{\beta-x-h-1} {}^j\bar{C}^w_{x+h+k}}{(1+j)^{x+h}\, D^{(\tau)}_{x+h}} \\
= \;& 0.01\, c\,(AS)_{x+h} \frac{(1/2)\, {}^j\bar{C}^w_{x+h} + {}^j\bar{M}^w_{x+h+1} - {}^j\bar{M}^w_{\beta}}{(1+j)^{x+h}\, D^{(\tau)}_{x+h}}.
\end{aligned}
\tag{10.48}
$$

En los Ejercicios 10.12 - 10.18 se encontrarán más ilustraciones del método de las funciones conmutativas.

10.8 Notas y Referencias

No obstante de que existen muchas ponencias y un buen número de textos que tratan las matemáticas de los fondos de pensión, parece útil para los propósitos de este tratamiento introductorio referirse únicamente a otros textos actuariales con capítulos similares a los aquí tratados. Hooker y Longley-Cook (1957), Jordan (1967) y Neill (1977), son tres referencias de ése tipo. Estos textos enfatizan la formulación de los valores presentes actuariales en términos de las funciones conmutativas de pensión y el uso de tablas de dichas funciones para llevar a cabo la computación.

En contraste, la mayor parte de nuestra presentación se hizo en términos de integrales y aproximación mediante sumas, expresando los integrandos o sumandos en términos de funciones básicas. Estas aproximación mediante sumas pueden computarse por medio de varios procesos que pueden o no hacer uso de las funciones conmutativas. Para las indemnizaciones por pensión determinadas por condiciones de ingreso o eligibilidad complejas, podría ser más flexible y eficiente calcularlas mediante procesos que no requieran formulaciones extensas mediante funciones conmutativas. Chamberlain (1982) ofrece un enfoque opuesto, señalando la potencia de las funciones conmutativas para expresar los valores presentes actuariales y el control de su computación.

En este capítulo no hemos definido las pérdidas del asegurador y estudiado sus varianzas. La Fórmula (9.53) proporciona el medio para hacerlo si se consideran las indemnizaciones totales para todas las causas del decremento. Si se considera una indemnización única, como la indemnización por retiro, existe más de una forma para definir las pérdidas. El concepto acostumbrado es que las primas y reservas, para una indemnización con respecto a una causa particular de decremento, se aplica sólo a ese decremento. Por tanto si ocurre un decremento debido a una segunda causa, entonces, con respecto a la primera causa, hay 0 indemnización y surge una ganancias. La pérdida de un asegurador basada en este concepto conduciría a (10.7). Sin embargo, las pérdidas que se definen en esta forma pueden tener covarianzas diferentes a cero, por lo que la varianza de la pérdida para todas las indemnizaciones no es la suma de las varianzas de las pérdidas para las indemnizaciones individuales.

Alternativamente, se puede considerar que cuando ocurre una causa particular de decremento las reservas acumuladas para las indemnizaciones con respecto a todas las demás causas se liberan para compensar la indemnización desembolsada por la causa dada. En este caso, las pérdidas definidas para las indemnizaciones para cada causa de decremento tienen covarianzas valuadas en 0, y la varianza de la pérdida para todas las indemnizaciones es la suma de las varianzas de la pérdida para las indemnizaciones individuales. Sin embargo, las primas y reservas para las indemnizaciones individuales son más difíciles de computar sobre esta segunda base, e individualmente difieren significativamente de aquéllas calculadas sobre la base acostumbrada. Para conocimientos sobre estas materias, véase Hickman (1964).

10.9 Ejercicios

Secciones 10.2 y 10.3

10.1 Se supone que, para un nuevo participante que ingresa a la edad de 30, habrá incrementos anuales de salario a una tasa de 5% por año para tomar en cuenta los efectos de la inflación e incrementos en la productividad. Además, se supone que habrá incrementos por promoción de 10% del salario existente, en las edades de 40, 50 y 60.

a. Construya una función de escala salarial, S_{30+k}, para expresar estos supuestos.

b. Escriba una expresión para el valor presente actuarial de las contribuciones de 10% del salario futuro para un nuevo participante que ingresa a los 30 años con un salario inicial de 12,000, y con incrementos salariales similares a la escala que se construyó para la parte (a).

10.2 Cada año, el patrocinador del plan contribuye con el 10% de la porción del salario de cada participante que excede de cierta cantidad. Esa cantidad es de 10,000 para este año y se incrementará 5% anualmente. Exprese el valor presente actuarial de la contribución del patrocinador para un participante que ingresa ahora a la edad de 35 años con un salario de 25,000.

Sección 10.4

10.3 En el Ejemplo 10.3, suponga que todos los retiros se realizan exactamente a la edad 63 (en lugar de seguir la Tabla de Servicio Ilustrativa). ¿ A qué se reducen los valores presentes actuariales ?

10.4 Un nuevo participante de 25 años tiene un salario corriente de 12,000. Para este participante, exprese la función de la tasa de ingresos por indemnización para un plan de tasas escalonadas que estipula, para el caso del retiro en el año $k+1$,

(un ingreso)

=(al número de años completos de servicio)

× [(0.01 del salario promedio de los últimos tres años hasta 15,000 $(1.04)^k$)

+ (0.015 del excedente, si existe, del salario promedio de los últimos tres años superior a 15,000 $(1.04)^k$)].

10.5 Para un plan de compensación, la compensación se determina como el número de años de servicio multiplicado por 2% del ingreso por el seguro social, pero en ningún caso más del 50% del ingreso del seguro social. La tasa de ingreso por indemnización del plan, antes de que se aplique la compensación, es igual al número de años de servicio multiplicado por 2% del salario promedio final de los últimos 3 años. Proporcione fórmulas para la tasa de ingreso por indemnización después de que se aplique la compensación, para un nuevo participante de 40 años con un salario de 30,000, si el retiro es

a. a la edad exacta de 65 con un ingreso por el seguro social estimado de I_{65}

b. entre las edades 68 y 69 con un ingreso por seguro social estimado de $I_{68\frac{1}{2}}$.

10.6 Un plan estipula una tasa de ingreso por indemnización de 2% del salario promedio de los 3 últimos años por cada año de servicio, pagadero a la edad de 65. De ahí en adelante la tasa de ingreso por indemnización es $1\frac{1}{3}\%$ del salario promedio de los últimos 3 años por cada año de servicio. Exprese el valor presente actuarial de la indemnización del participante, para un participante de 50 años, que ingresó al servicio a la edad de 30 y tiene un salario de 36,000, si la edad mínima de retiro es de 55 años y todos los retiros se dan en la edad 68.

10.7 En el Ejercicio 10.6, suponga que 35 es el máximo de años que se acreditan. ¿ Cómo se transforma la fórmula del valor presente actuarial de la indemnización ?

10.8 Escriba una fórmula del valor presente actuarial del ingreso por indemnización asociado con el servicio entre las edades 30 y 50 del participante del Ejercicio 10.6.

10.9 Un plan de promedio de la carrera estipula un ingreso por retiro de 2% del salario agregado devengado durante los años de servicio del participante. La edad mínima de retiro es 58 y todos los retiros se completan a la edad de 68. Para un participante de 50 años, que ingresó al servicio a la edad de 30, y tiene un total de salarios pasados de 400,000 con un salario corriente de 36,000, escriba expresiones para

a. la tasa de ingreso total por indemnización del participante en caso de retiro a la edad exacta de 65

b. la tasa de ingreso total por indemnización del participante a la mitad del año en caso de retiro entre las edades 65 y 66

c. el valor presente actuarial de la indemnización por retiro por los servicios previos de este participante

d. el valor presente actuarial de la indemnización por retiro por los servicios futuros de este participante.

Sección 10.5

10.10 Para la indemnización por incapacidad del Ejemplo 10.11, con respecto a un participante que tiene actualmente 50 años con 20 de servicio y un salario de 25,000, ¿ Cuál sería el valor presente actuarial incurrido hasta el tiempo de la incapacidad para la indemnización si el participante se incapacita a la mitad del año corriente y $I_{50} = 8,000$?

Sección 10.6

10.11 Un participante de 35 años ha acumulado un total de 5,000 de sus contribuciones pasadas. Este participante tendrá derecho a la posesión completa de su anualidad diferida al alcanzar la edad de 40. Escriba una expresión del valor presente actuarial del reemblso de las contribuciones pasadas totales acumuladas de este participante en caso de salida antes ésa edad , suponiendo que las contribuciones se acumulan a una tasa efectiva de 6% al año.

10.12 a. En el desarrollo de (10.24), reescriba el término para la salida en el año corriente,

$$0.01\, c\,(AS)_{x+h}\, \frac{1}{2}\, v^{1/2}\, q_{x+h}^{(w)},$$

como una doble integral con una variable para el tiempo en que se gana un incremento de salario y la otra como el tiempo de separacion. Acredite un interés a la tasa j para el tiempo en que se gana un incremento de salario hasta el tiempo de la separación.

b. Bajo el supuesto de una distribución uniforme de separaciones en el contexto del decremento múltiple, evalúe la integral de la parte (a).

c. Usando $i = 0.06$ y $j = 0.04$, evalúe el término como se dió en (10.24) y en la integral de la parte (b). Compare los resultados.

Sección 10.7

10.13 Exprese, en términos de funciones conmutativas, las fórmulas del valor presente actuarial en los siguientes ejercicios:

a. 10.1(b)	b. 10.2	c. 10.3
d. 10.7	e. 0.9(c)	f. 10.9(d).

10.14 Para un participante con un salario de 12,000, que ingresa a un plan de pensión a la edad $x < \alpha$, exprese, en términos de las funciones conmutativas para la pensión, el valor presente actuarial de

a. una anualidad por retiro de 1% del salario promedio de los últimos tres años para cada año completo de servicios

b. una anualidad por retiro de 1% del salario promedio de los tres últimos años para cada año de servicios incluyendo cualquier fracción.

10.15 Si, en el Ejercicio 10.14(b), existe una condición adicional de que, para poder calificar para el retiro, el participante debe haber servido por lo menos durante 10 años, ¿ Cómo se transforma la fórmula ?

10.16 Si las contribuciones de un porcentaje c nivelado de los salarios futuros deben ser equivalente a la indemnización por retiro del Ejercicio 10.14(b), obtenga una fórmula para c en términos de funciones conmutativas para pensión.

10.17 Exprese las fórmulas que se dieron en el Ejemplo 10.1 en términos de funciones conmutativas para pensión.

10.18 Exprese la fórmula del Ejemplo 10.2 en términos de funciones conmutativas para pensión.

10.19 Reescriba las fórmulas que se dieron en

a. Ejemplo 10.7

b. Ejemplo 10.9

en términos de funciones conmutativas para pensión.

Misceláneos

10.20 Exprese el valor presente actuarial de la indemnización acreditada en el año de la edad 62 a la 63 para un participante de 62 años que esta cubierto por el plan del Ejemplo 10.10 y tiene un salario de 30,000.

10.21 Suponiendo una escala salaral creciente, ¿ Cuál de los siguientes dos valores presentes actuariales, con respecto a un nuevo participante de 25 años de edad con un salario de 20,000, es el más grande ?

A. $400 \dfrac{(1/2)\ {}^{Za}\bar{M}^{r}_{25} + {}^{Za}\bar{R}^{r}_{26}}{{}^{s}D^{(\tau)}_{25}}$

en donde $m = 5$ para ${}_{m}Z_{y}$.

B. $400 \dfrac{(1/2)\ {}^{Sa}\bar{M}^{r}_{25} + {}^{S'a}\bar{R}^{r}_{26}}{{}^{s}D^{(\tau)}_{25}}$.