00365
2
2EJ

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

COMPONENTES PREPROYECTIVAS EN EL CARCAJ DE AUSLANDER-REITEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

MARIA ELENA GALLARDO BALDERAS

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE ANTONIO STEPHAN DE LA PEÑA MENA

FALLA DE ORIGEN

Indice

Introducción

El objeto de este trabajo es presentar una versión autocontendida de los resultados más recientes acerca de la existencia y construcción de componentes postproyectivas en el carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra.

Consideramos k un campo algebraicamente cerrado y $A = kQ/I$ una k-álgebra de dimensión finita, donde Q es un carcaj conexo y finito e I es un ideal admisible del álgebra de caminos kQ. La naturaleza de nuestro problema nos permite asumir, sin pérdida de generalidad que Q no tiene ciclos orientados.

Trabajando con la categoría de A-módulos de dimensión finita mod_A, para cada módulo inescindible no proyectivo X el trasladado de Auslander-Reiten $\tau_A X$ es un módulo inescindible no inyectivo. El carcaj de Auslander-Reiten Γ_A tiene como vértices a los representantes de las clases de isomorfía de los módulos inescindibles de mod_A, hay tantas flechas de X a Y en Γ_A como $dim_k rad_A(X,Y)/rad_A^2(X,Y)$.

Una componente conexa $\mathcal{P}$ en Γ_A se dice que es *postproyectiva* si $\mathcal{P}$ no tiene ciclos orientados y cada módulo X en $\mathcal{P}$ tiene solamente una cantidad finita de predecesores dados por el orden de caminos en $\mathcal{P}$ (decimos que $X \preceq Y$ en $\mathcal{P}$ si existe $X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n = Y$ cadena de morfismos no cero en $\mathcal{P}$).

Se sabe que el carcaj de Auslander-Reiten asociado a algunas clases de álgebras poseen componentes postproyectivas (puede ser sólo una ó más), como son las álgebras hereditarias, álgebras que cumplen la condicióin de separación, álgebras tilteadas, etc.

El criterio que aquí se presenta, establece condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dichas componentes para álgebras en general, y algunos de los resultados anteriores acerca de la existencia de componentes postproyectivas resultan como corolarios del mismo.

Una vez establecida la existencia de una componente postproyectiva $\mathcal{P}$ en Γ_A los módulos dentro de ella son determinados utilizando la técnica conocida como *knitting procedure* que se basa en la aditividad de la función dimensión en las sucesiones de Auslander-Reiten, este procedimiento ha sido utilizado al menos desde 1977.

Cada una de las secciones del trabajo presenta una pequeña introducción sobre lo que se desarrolla en ellas, así como las referencias correspondientes.

En las primeras cuatro secciones encontramos los resultados necesarios para el desarrollo de los resultados principales los cuales se presentan en las secciones posteriores.

En la sección 8 se utiliza el criterio para la existencia de componentes post-proyectivas desarrollado para dar una nueva demostración de la existencia de componentes postproyectivas para álgebras tilteadas, que originalmente fue presentada en [11].

1. Algebras tilteadas

En esta sección presentamos una serie de resultados relacionados con los *módulos de tilteo* de un álgebra. Aunque originalmente fueron presentados en [9], estos resultados están tomados de [10] donde se pueden encontrar los detalles de las demostraciones.

Recordemos que la idea principal en la teoría de tilteo es la siguiente:

Dada un álgebra A, construir un módulo T, llamado *módulo de tilteo*, tal que si $B = End_A(T)$, entonces las categorías mod_A y mod_B están "bien relacionadas" una con la otra, esto en el sentido de que existen funtores que definen equivalencias entre subcategorías interesantes de módulos de las dos categorías, aunque en general no resulten equivalentes mod_A y mod_B.

1.1.– **Definición.**- Sea A un álgebra de dimensión finita. Un módulo ${}_AT$ es llamado *módulo de tilteo* si satisface las siguientes propiedades:

a) $pdim_A T \leq 1$

b) $Ext^1_A({}_AT, {}_AT) = 0$

c) El número de clases de isomorfía de los sumandos directos inescindibles de ${}_AT$ es igual al rango de $K_0(A)$ (el grupo de Grothendieck de A).

Esta última condición es equivalente a cualquiera de las siguientes:

c′) Existe una sucesión exacta $0 \longrightarrow A \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$ con $T', T'' \in \langle {}_AT \rangle$, donde $\langle {}_AT \rangle$ son los módulos generados por ${}_AT$.

c″) Para cualquier módulo proyectivo inescindible P_x existe una sucesión exacta $0 \longrightarrow P_x \longrightarrow T'_x \longrightarrow T''_x \longrightarrow 0$ con $T'_x, T''_x \in \langle {}_AT \rangle$.

Un ejemplo sencillo de módulo de tilteo es

$$T = \bigoplus_{x \in Q_0} P_x$$

Observación: si ${}_AT$ es un módulo de tilteo y $B = End({}_AT)$, entonces T_B es un módulo de tilteo y $A^{op} \cong End(T_B)$ [10, 4.1 (2)].

Un módulo T que satisface a) y b) se llama un *módulo parcial de tilteo.* De hecho, todo módulo parcial de tilteo es un sumando directo de un módulo de tilteo, como lo afirma el siguiente resultado.

1.2.– **Lema.-** Sea ${}_AT$ un módulo parcial de tilteo. Entonces, existe un módulo de tilteo ${}_AT \oplus_A T'$ tal que cualquier sumando directo inescindible T'' de T' es proyectivo o satisface que $Hom(T'', T) \neq 0$.

Dado un módulo de tilteo T y $B = End_A(T)$, tenemos que T define un par de torsión $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ en mod_A y otro $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ en mod_B de la siguiente forma:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(T) = \{X \in mod_A : Hom_A(T, X) = 0\} \tag{1}$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(T) = \{X \in mod_A : Ext^1_A(T, X) = 0\} \tag{2}$$

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(T) = \{N \in mod_B : Tor^1_B(T, N) = 0\} \tag{3}$$

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}(T) = \{N \in mod_B : T \otimes_B N = 0\} \tag{4}$$

Además, los funtores:

$$\sum := Hom_A(T, -) : \mathcal{G} \to \mathcal{Y}$$

y

$$\sum' := Ext^1_A(T, -) : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$$

Definen equivalencias entre las correspondientes categorías plenas de módulos.

Finalmente, dado un módulo de tilteo T con $B = End_A(T)$ hay un isomorfismo lineal entre los grupos de Grothendieck correspondientes, dado por:

$$\begin{aligned} \sigma: \ & K_0(A) \longrightarrow K_0(B) \\ & \mathbf{dim} X \longmapsto \mathbf{dim} \textstyle\sum X - \mathbf{dim} \sum' X \end{aligned}$$

En particular, tenemos que $\Phi_A = \sigma \Phi_B \sigma^{-1}$, donde Φ_A es la matriz de Coxeter de A y Φ_B la matriz correspondiente a B.

1.3.– **Definición.**- Un álgebra de la forma $B = End_A(T)$, con T un módulo de tilteo y A hereditaria, se dice que es un *álgebra tilteada*.

Para caracterizar las álgebras tilteadas, necesitamos el concepto de *rebanada*.

1.4.– **Definición.**- Sea A un álgebra y S una clase de módulos en mod_A. Entonces S se llamará una *rebanada* si las siguientes condiciones se satisfacen:

a) $\bigoplus_{X_i \in S} X_i$ es sincero.

b) S es cerrada bajo caminos (si $X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_n$ es una cadena de morfismos no nulos y no isomorfismos entre inescindibles con X_0, X_n en S, entonces también $X_1, \ldots, X_{n-1} \in S$)

c) Si M es inescindible y no proyectivo, entonces a lo más uno, M ó τM pertenece a S

d) Si M, X son inescindibles, $f : M \to X$ irreducible y $X \in S$, entonces ó bien $M \in S$, ó bien M no es inyectivo y $\tau^{-1} M \in S$.

Con lo anterior podemos enunciar la siguiente proposición que caracteriza las álgebras tilteadas en base a la relación entre los módulos de tilteo y las rebanadas.

1.5.– **Teorema.**- Sea A un álgebra hereditaria y $_AT$ un módulo de tilteo con $B = End_A(T)$, entonces

$$\{\sum I / \ I \text{ es inyectivo inescindible}\}$$

es una rebanada en mod_B. Inversamente, si B es una k-álgebra de dimensión finita y S es una rebanada en mod_B, entonces el módulo $_BT = \bigoplus_{X \in S} X$ es un módulo de tilteo, $A = End_B(T)$ es un álgebra hereditaria y similarmente $S = \{\sum I / \ I \text{ es inyectivo inescindible}\}$. En particular, gracias a la observación anterior, B es un álgebra tilteada.

En particular, nos interesan álgebras de la forma $End(_AT)$, donde $_AT$ es un módulo de tilteo sobre un álgebra A mansa hereditaria. En este caso se consideran 3 diferentes situaciones:

i) ${}_AT$ contiene un sumando directo postproyectivo y un sumando directo preinyectivo.

ii) ${}_AT$ contiene un sumando directo regular, pero no contiene sumandos directos preinyectivos.

iii) ${}_AT$ es postproyectivo (i.e todos sus sumandos directos son postproyectivos).

ii) y iii) tienen su dual, el cual omitiremos.

Sea $B = End_A(T)$, B es de tipo de representación finito precisamente en el caso i). Si todos los sumandos directos de ${}_AT$ son postproyectivos, entonces B es llamada un *álgebra oculta* (de tipo Q si $A = kQ$); como en nuestro caso A es mansa, B se llamará *mansa oculta*.

Notamos que en los casos ii) y iii) se obtienen álgebras de tipo de representación infinito, de hecho, en el caso ii), si ${}_AT = T_0 \oplus T_1$ es un módulo de tilteo con A un álgebra mansa hereditaria, T_0 postproyectivo y $0 \neq T_1$ regular, se tiene que $End(T_0)$ por si misma es de tipo de representación infinito.

2. Categorías de Espacios Vectoriales y Extensiones en un Punto

En esta sección, desarrollamos la teoría de categorías de espacios vectoriales y su relación con las extensiones en un punto de álgebras conocidas. Todo esto lo utilizamos en la parte de existencia de componentes postproyectivas, y los resultados principales que aquí desarrollamos, están tomados de [10] y [4].

2.1.– **Definición.**- Una *categoría de espacios vectoriales* $\mathcal{K}$ es una categoría de Krull-Schmidt, junto con un funtor fiel $|-|: \mathcal{K} \longrightarrow mod_k$.

Dada una categoría de espacios vectoriales $(\mathcal{K}, |-|)$ la *categoría de subespacios vectoriales* $\mathcal{U}(\mathcal{K}, |-|)$, que también denotaremos mediante $\mathcal{U}(\mathcal{K})$, está definida de la siguiente forma:

Sus objetos son ternas (V, X, φ), donde $X \in \mathcal{K}$, $V \in mod_k$, y $\varphi : V \rightarrow | X |$ es k-lineal; un morfismo de (V, X, φ) a (V', X', φ') es una pareja (f, g) tal que $f : V \rightarrow V'$ es k-lineal y $g : X \rightarrow X'$ es un $\mathcal{K}$-morfismo, además de que $| g | \varphi = \varphi' f$.

$\mathcal{U}(\mathcal{K})$ es una categoría aditiva.

Notemos que existen 2 maneras distintas de "incluir" $\mathcal{K}$ en $\mathcal{U}(\mathcal{K})$:

a) Si $X \in \mathcal{K}$, podemos mandarlo a $(0, X, 0)$, esta terna se denota comúnmente como X.

b) Otra forma, si $X \in \mathcal{K}$ se puede enviar a $(| X |, X, 1_{|X|})$ y esta terna la denotaremos por $\overline{X}$.

Es fácil ver que estas reglas nos definen funtores.

Dada una categoría de Krull-Schmidt $\mathcal{K}$, y un objeto X en $\mathcal{K}$, un morfismo fuente para X en $\mathcal{K}$ es un morfismo $f : X \rightarrow Y$ que satisface las siguientes propiedades:

a) f no es un monomorfismo que se escinde

b) Dado $f' : X \to Y'$ un monomorfismo que no se escinde, existe $g : Y \to Y'$ tal que $gf = f'$.

Se tiene el concepto dual de morfismo pozo.

Si $\mathcal{K}$ es una categoría de Krull-Schmidt y si $f : X \to Y$ es un morfismo fuente en $\mathcal{K}$, entonces $(1_{|X|}, f) : \overline{X} \to (| X |, Y, | f |)$ es un morfismo fuente en $\mathcal{U}(\mathcal{K}, | - |)$ y similarmente, si $g : Y \to Z$ es un morfismo pozo en $\mathcal{K}$, entonces $(0, g) : (ker \mid g \mid, Y, u) \to Z$ es un morfismo pozo en $\mathcal{U}(\mathcal{K}, | - |)$ donde u es la inclusión canónica.

Por definición, la categoría de espacios vectoriales $\mathcal{K} = Hom_A(M, mod_A)$, esta tiene los mismos objetos que mod_A, salvo que

$$Hom_{\mathcal{K}}(X, Y) = Hom_A(X, Y)/\sim$$

donde $f \sim g$ si y sólo si $Hom_A(M, f - g) = 0$.

Con lo anterior, tenemos que si $\mathcal{K} = mod_A$ y k es un espacio vectorial, sucesiones que casi se dividen en mod_A, pueden levantarse a sucesiones que casi se dividen en $\mathcal{U}(mod_A, Hom(M, -))$, esto es, si tenemos que

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

es una sucesión que casi se divide en mod_A, la correspondiente sucesión en $\mathcal{U}(mod_A, Hom(-,-))$ se ve de la siguiente manera:

$$0 \longrightarrow \overline{X} \xrightarrow{(1_{|X|}, f)} (| X |, Y, | f |) \xrightarrow{(0,g)} Z \longrightarrow 0$$

Antes de seguir adelante, recordemos lo que es una *extensión en un punto* de un álgebra, pues existe una relación importante entre la categoría de módulos sobre estas álgebras y su correspondiente categoría de subespacios vectoriales.

2.2.— **Definición.-** Sea A una k-álgebra de dimensión finita y M un A-módulo, la *extensión en un punto de A mediante M*, es el álgebra:

$$A[M] = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

con la multiplicación usual de matrices.

Notemos que el carcaj de $A[M]$ contiene al carcaj de A como un subcarcaj pleno y posee además un vértice adicional (una fuente) w, llamado el *vértice de extensión*. Claramente $radP_w = M$.

La categoría $mod_{A[M]}$ puede identificarse con la categoría cuyos objetos son las ternas $(V, X_0, \gamma : V \to Hom_A(M, X_0))$, donde $V \in mod_k$, $X_0 \in mod_A$ y γ es lineal, los morfismos dados de la manera obvia.

$$mod_{A[M]} \approx \mathcal{U}(mod_A, Hom(M, -))$$

Definimos $| X |$ justamente como el espacio vectorial $Hom_A(M, X)$.

La categoría de subespacios $\mathcal{U}(Hom_A(M, mod_A))$ es equivalente a la subcategoría plena de $mod_{A[M]}$ formada por los módulos (V, X, γ) sin sumandos directos de la forma $(k, 0, 0)$ y $(0, Y, 0)$ para todo $Y \in mod_A$ tal que $Hom_A(M, Y) = 0$.

Aplicaremos lo anterior al caso que nos interesa en particular:

Sea $A = kQ/I$ un álgebra de dimensión finita, tal que Q no tiene ciclos orientados. Sea a una fuente en Q y considere el cociente $B = A/Ae_a$.

Para el B-módulo $M = radP_a$ tenemos que $A = B[M]$.

Sea $\mathcal{P}$ una componente postproyectiva de Γ_B y supongamos que todos los sumandos directos inescindibles de M están en $\mathcal{P}$.

2.3.– **Definición.**- Decimos que un morfismo irreducible $h : X \to Y$ en $\mathcal{P}$ es $M-finito$ si $h \notin rad_A^\infty(X, Y)$.

Como veremos en la siguiente proposición esto quiere decir, que h no se factoriza a través de una cantidad infinita de módulos. Recordemos que para dos módulos X *y* Y, $rad_A^\infty(X, Y) = \bigcap_{m \geq 0} rad_A^m(X, Y)$.

2.4.– **Definición.**- Un B-módulo inescindible $X \in \mathcal{P}$ es $M - finito$ si hay un camino $M_i = X_0 \overset{\alpha_1}{-} X_1 \overset{\alpha_2}{-} \cdots \overset{\alpha_s}{-} X_s = X$ en $\mathcal{P}$, donde M_i es sumando directo de M, tal que α_i es M-finito $1 \leq i \leq s$.

Por supuesto, si un morfismo ó un módulo no es M-finito, decimos que es $M - infinito$.

Un módulo $X \in \mathcal{P}$ se dice que es de *M−representación infinito* si hay una cantidad infinita de A-módulos inescindibles no isomorfos 2 a 2 de la forma $(V, Y, \gamma : V \to Hom_B(M, Y))$ donde $V \in mod_k$, Y es un B-módulo con X como sumando directo y γ es lineal.

En la demostración de los siguientes resultados se utiliza el siguiente lema, el cual es muy útil cuando se trabaja considerando cadenas de morfismos.

2.5.– **Lema de Harada-Sai.**- Sean M_i, $1 \leq i \leq 2^b$, módulos inescindibles de dimensión $\leq b$, sean $f_i : M_i \to M_{i+1}$ morfismos no invertibles. Entonces la composición $f_{2^b-1} \cdot \ldots \cdot f_2 \cdot f_1$ es cero.

Demostración: Mostraremos por inducción sobre n, lo siguiente:

Dados módulos inescindibles M_i, $1 \leq i \leq 2^n$, de dimensión $\leq b$ y morfismos no invertibles $f_i : M_i \to M_{i+1}$, entonces ó la composición $f_{2^n-1} \cdot \ldots \cdot f_2 \cdot f_1$ es cero, o bien, la dimensión de su imagen es $\leq b - n$.

Si $n = 1$, tenemos $f_1 : M_1 \to M_2$ y la imagen de f_1 no puede tener dimensión igual a b, pues eso implica que f_1 es invertible.

Por lo tanto, $dim(Im\ f_1) \leq b - 1$

Supongamos que lo que deseamos es válido para n, esto es, que para toda sucesión $M_1, \ldots, M_{2^n}$ de módulos inescindibles y $f_i : M_i \to M_{i+1}$ se cumple que

$$f_{2^n-1} \cdots f_1 = 0 \text{ ó } dim(Im f_{2^n-1} \cdots f_1) \leq b - n$$

Veremos que vale para n+1.

Sean M_i para $1 \leq i \leq 2^{n+1}$ y $f_i : M_i \to M_{i+1}$. Queremos ver que la composición

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{2^n-1}} M_{2^n} \xrightarrow{f_{2^n}} M_{2^n+1} \to \cdots \xrightarrow{f_{2^{n+1}-1}} M_{2^{n+1}}$$

es cero ó que su imagen tiene dimensión $\leq b-(n+1)$.

Consideremos las composiciones $f = f_{2^n-1}\cdot\ldots f_2\cdot f_1$ y $h = f_{2^{n+1}-1}\cdot\ldots\cdot f_{2^n}$.

Por hipóteis de inducción f y h son cero ó tienen imagen de $dim \leq b-n$.

Si una de ellas cumple que es cero ó que su imagen tiene dimensión ¡ $b-n$, acabamos.

Podemos suponer entonces que las imágenes de ambas, f y h son de dimensión $b-n > 0$.

Sea $g = f_{2^n}$ y $h' = f_{2^{n+1}-1}\cdot\ldots\cdot f_{2^n}+1$. (Con esto tenemos que $h = h'g$).

Tenemos que mostrar que $Im\ h'gf = Im\ hf$ tiene dimensión $\leq b-n-1$. Si esto no ocurre, tendríamos que $dim(Im\ hf) = b-n$, y así,

$$Imf \cap ker(h'g) = 0,\ Im(gf) \cap kerh' = 0.$$

Si a lo anterior, le agregamos que $dim(Imf) = b-n$, y también que $dim(ker(h'g)) = dim(M_{2^n}) - b + n$, tenemos que M_{2^n} es la suma directa de Imf y $ker(h'g)$. Entonces, como $f \neq 0$ y M_{2^n} es inescindible, tenemos que $h'g$ es monomorfismo.

De manera similar, podemos suponer que $dim(Im\ (gf)) = b-n$ y que $dim(Im\ h') = b-n$. Entonces, de $dim(ker\ h') = dim(M_{2^n+1}) - b + n$, tenemos que M_{2^n+1} es la suma directa de $Im(gf)$ y $kerh'$, entonces gf es un epimorfismo.

En consecuencia, $g = f_{2^n}$ debe ser epimorfismo y monomorfismo, contrario a nuestra suposición de que los f_i no son invertibles.

Por lo tanto, el resultado es válido para $n+1$.

□

Con la siguiente proposición, tenemos una caracterización de los morfismos que pertenecen a rad_A^∞

2.6.— **Proposición.**- Sean X, Y dos A-módulos inescindibles, entonces, $0 \neq f \in rad_A^\infty(X, Y)$ si y sólo si existen infinitos módulos Z_n, $n \in \mathbf{N}$, (sin sumandos directos comunes), tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g_n"'] & & Y \\ & Z_n \arrow[ur, "h_n"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración:

$\Rightarrow$) Por inducción. Construyamos la sucesión Z_n. Sea $Z_1 = Y$, tenemos entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \\ & Z_1 \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

Supongamos que tenemos $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sin sumandos directos comunes tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g_i"'] & & Y \\ & Z_i \arrow[ur, "h_i"'] & \end{tikzcd}$$

Sea m = max $\{dimZ' : Z' \text{ es sumando directo inescindible de } Z_i,\ 1 \leq i \leq n\}$

Aplicando el lema de Harada-Sai, existe $N(m) \in \mathbf{N}$ tal que si se tiene

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{f_t} X_{t+1}$$

una cadena de morfismos entre inescindibles no isomorfos y si además los X_i

son tales que dim $X_i \leq$ m y $t \geq N(m)$ entonces $f_t \cdot f_{t-1} \cdot \ldots \cdot f_1 = 0$

Como $f \in rad^{\infty}(X,Y)$, en especial está en $rad^{N(m)}(X,Y)$, por lo que podemos expresar f como una combinación lineal de composiciones de morfismos irreducibles entre inescindibles:

$$f = \sum_i \lambda_i [X = X_1^{(i)} \xrightarrow{f_1^{(i)}} X_2^{(i)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_{N(m)}^{(i)} \xrightarrow{f_{N(m)}^{(i)}} X_{N(m)+1}^{(i)} = Y]$$

Entonces para todo índice i tal que $X_1^{(i)} \rightarrow \ldots \rightarrow X_{N(m)}^{(i)}$ no es cero, dim $X_{\sigma(i)}^{(i)} > m$ para alguna $\sigma(i)$. Obtenemos componiendo antes y después de $X_{\sigma(i)}^{(i)}$:

$$X \xrightarrow{g_{n+1}^{(i)}} X_{\sigma(i)}^{(i)} \xrightarrow{h_{n+1}^{(i)}} Y$$

de donde:

$$f = X \xrightarrow{g_{n+1}} \bigoplus_i X_{\sigma(i)}^{(i)} \xrightarrow{h_{n+1}} Y$$

donde $g_{n+1}(x) = \sum \lambda_i g_{n+1}^{(i)}(x)$, $h_{n+1}\{x_i\} = \sum \lambda_i h_{n+1}^{(i)}(x_i)$.

Y hacemos $Z_{n+1} := \bigoplus X_{\sigma(i)}^{(i)}$ que por la definición de m, no tiene sumandos directos comunes con los anteriores.

$\Leftarrow$) Tenemos que existen infinitos módulos Z_n (sin sumandos directos comunes) y morfismos g_n, h_n tales que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g_n"'] & & Y \\ & Z_n \arrow[ur, "h_n"'] & \end{tikzcd}$$

conmuntan para $n \in$ N. Veremos que $f \in rad_A^{\infty}(X,Y)$

Supongamos que Y no es proyectivo. Tenemos entonces la siguiente situación, donde el renglón inferior es la sucesión de Auslander-Reiten de Y:

$$\begin{tikzcd} & & & X \arrow[dl, dashed, "h=(h_j)"'] \arrow[d, "f"] & \\ 0 \arrow[r] & \tau Y \arrow[r] & E \arrow[r, "p"'] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & Y \arrow[r] & 0 \\ & & \bigoplus E_j & & \end{tikzcd}$$

Por propiedades de la sucesión de Auslander-Reiten f se levanta a h de tal forma que $f = ph$.

$h \in rad(X, E)$, entonces $f \in rad^2(X, Y)$. Como existe una cantidad infinita de módulos tal que f se factoriza a través de ellos, existe $0 \neq E_j$ tal que $ph_j \neq 0$.

Tomamos ahora la sucesión de Auslander-Reiten que termina en E_j

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[dr, "p'"'] & & & X \arrow[lll, dashed, "h'"'] \arrow[dll, "h_j"'] \arrow[dl, "h"] \arrow[d, "f"] \\ & E_j \arrow[r] \arrow[dr] & E \arrow[r] & Y \\ & & 0 & \end{tikzcd}$$

$h_j \in rad(X, E_j)$, y similarmente, por propiedades de la sucesión de Auslander-Reiten para E_j, h_j se levanta a $h' : X \to E'$ y $h_j = p'h'$. Como además, $h' \in rad(X, E')$, $h_j \in rad^2(X, E_j)$ y entonces $f \in rad^3(X, Y)$.

Continuando de la misma manera, ahora para E', obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & X \arrow[llll, dashed, "h'_k"'] \arrow[lll, "h'"'] \arrow[ll, dashed, "h_j"'] \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "f"] \\
E'_k \arrow[r] & E' \arrow[r] & E_j \arrow[r] & E \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

por lo que procediendo así, obtenemos que $f \in rad^{\infty}(X, Y)$.

El caso para cuando $Y = P$ es proyectivo es completamente similar, empezando ahora con la sucesión:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}\, Y \arrow[r, hook] & Y
\end{tikzcd}$$

$\square$

2.7.– **Lema.-** Sea $h : X \to Y$ un morfismo irreducible en $\mathcal{P}$. Entonces h es M-infinito si y sólo si las siguientes condiciones valen:

i) X es M-representación infinito

ii) Existe un morfismo $0 \neq g \in Hom_B(M, X)$ con $hg = 0$

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $h \in rad_A^{\infty}(X, Y)$.

Por el resultado de la proposición anterior, tenemos que hay una cantidad infinita de módulos $L_n = (V_n, Z_n, \gamma_n : V_n \to Hom_B(M, Z_n))$, con $n \in \mathbf{N}$, sin sumandos directos comunes y morfismos $f_n : X \to L_n$, $g_n : L_n \to Y$ tal que $h = g_n f_n$, para cada n.

Fijemos entonces $n \in \mathbb{N}$ y sea $Z_n = X^a \bigoplus Y^b \bigoplus Z'_n$ tal que X, Y no son sumandos directos de Z'_n. Los siguientes diagramas conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\begin{pmatrix}\lambda_i \\ h'_j \\ *\end{pmatrix} = f_n"'] & & Y \\
& Z_n = X^a \oplus Y^b \oplus Z'_n \arrow[ur, "g_n = (h''_i, \mu_j, *)"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V_n \arrow[r, "\gamma_n"] \arrow[d] & Hom_B(M, Z_n) \arrow[d, "Hom(M, g_n)"] \\
0 \arrow[r] & Hom_B(M, Y)
\end{tikzcd}
$$

con $\lambda_i \in k$, $h'_j \in Hom_B(X,Y)$, para todo $1 \leq j \leq b$; $h''_i \in Hom_B(X,Y)$ y $\mu_j \in k$ para todo $1 \leq i \leq a$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $V_n \neq 0$ y que tanto $(0, X, 0)$ como $(0, Y, 0)$ no son sumandos directos de L_n.

Queremos ver que X es sumando directo de Z_n, por lo que veremos primero que $\mu_j = 0$ $(1 \leq j \leq b)$.

Si no, hay algún $0 \neq v \in V_n$ tal que $\gamma_n(v) = (v'_i, v''_j, *)$ con $v''_{j_0} \neq 0$ y $Hom(M, \mu_j)(v''_j) \neq 0$ para algún j_0 (notemos que $v''_j \in Hom_B(M, Y^b)$), pero esto contradice la conmutatividad del segundo diagrama.

Como además h es irreducible como B-morfismo y $\mu_j = 0$, a no puede ser cero, por tanto, $a > 0$, $\lambda_{i_0} \neq 0$, $1 \leq i_0 \leq a$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\begin{pmatrix} \lambda_i \\ h'_j \\ * \end{pmatrix} = f_n"'] & & Y \\
& Z_n = X^a \oplus Y^b \oplus Z'_n \arrow[ur, "g_n = (h''_i, 0, *)"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces h''_{i_0} es un múltiplo de h para algún $1 \neq i_0 \neq a$, con esto mostramos el inciso i).

Notemos además que hay algún $w \neq 0$, $w \in V_n$ tal que $\gamma_n(w) = (w'_i, w''_j, *)$ (recordemos la conmutatividad del diagrama 2), con $w''_j \in Hom(M, Y^b)$, y $w'_i \in Hom(M, X^a)$ y con esto, existe i_0, $1 \leq i_0 \leq a$ tal que $w'_{i_0} \neq 0$, con $w'_{i_0} \in Hom_B(M, X)$, sin embargo $w'_{i_0} h''_{i_0} = Hom(M, h''_{i_0})(w'_{i_0}) = 0$
y por tanto el inciso ii) vale.

$\Leftarrow$) Consideremos una familia infinita $L_n = (V_n, Z_n, \gamma_n)$ de A-módulos inescindibles no isomorfos 2 a 2, tal que X es un sumando directo de Z_n. Sea $Z_n = X \bigoplus Z'_n$ y $\sigma_n : X \to Z_n$ la inclusión canónica.

1) Supongamos que $dim_k \mid X \mid = 1$ (esto es, $dim_k Hom(M, X) = 1$). Entonces, para el A-morfismo $g_n = (0, h\pi_n) : L_n \to Y$, donde π_n es la proyección canónica, obtenemos $g_n \sigma_n = h$. Es decir, h se factoriza a través de infinitos módulos y esto pasa solamente si $h \in rad_A^\infty(X, Y)$.

2) Supongamos ahora que $dim_k \mid X \mid \geq 2$. Tomemos $a, b \in Hom(M, X)$ linealmente independientes.

Podemos escoger $Z_n = X \bigoplus X$, $V_n = k$ y γ_n de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \gamma_n : \ & k \longrightarrow Hom(M, X)^2 \\ & 1 \longmapsto (\lambda_n a, b) \end{aligned}$$

para algún $\lambda_n \neq 0$.

Nuevamente, si tomamos $g_n = (0, h\pi_n)$ con $\pi_n : X \bigoplus X \longrightarrow X$ la primera proyección canónica, obtenemos $g_n \pi_n = h$, con lo que tenemos lo que buscamos.

$\square$

3. Módulos dirigidos

Los módulos dirigidos y sus propiedades juegan un papel importante dentro de los los resultados de existencia y construcción de las componentes postproyectivas por lo que creemos necesario desarrollar con detalle algunos resultados que los caracterizan, los cuales están tomados de [8] básicamente.

Sea $A = kQ/I$ una k-álgebra de dimensión finita tal que Q no tiene ciclos orientados. Dado $x \in Q_0$, denotaremos por A^x a la subcategoría plena de A cuyos vértices son aquéllos $y \in Q_0$ con $y \not\preceq x$ (esto es, no hay un camino de y a x en Q). Notemos que Q^x, el carcaj de A^x, es un subcarcaj convexo (cerrado por trayectorias) de Q. El A-módulo proyectivo $P_x = Ae_x$ tiene radical $radP_x$, el cual es un A^x-módulo, denotaremos por R_i^x a los sumandos directos inescindibles de $radP_x$.

Un camino en mod_A es una sucesión $(X_0, X_1, \ldots, X_s)$ de clases de isomorfía de A-módulos X_i, $0 \leq i \leq s$ tal que hay un morfismo $0 \neq f_i \in Hom_A(X_i, X_{i+1})$ tal que f_i no es invertible $0 \leq i \leq s-1$. En este caso escribimos $X_0 \preceq X_s$ y decimos que X_0 es un *predecesor* de X_s. Si $s > 1$ y $X_0 = X_s$, el camino $(X_0, \cdots, X_s)$ es un *ciclo*.

Lo más sencillo, es dar la definición de módulo dirigido para un módulo inescindible y luego generalizarla.

3.1.– **Definición.**- Decimos que un A-módulo inescindible X es *dirigido* si no ocurre en un ciclo.

Como un ejemplo sencillo, tenemos que los módulos proyectivos inescindibles en componentes postproyectivas son dirigidos.

Para generalizar la definición de módulo dirigido, necesitaremos los siguientes resultados:

3.2.– **Lema.**- Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ morfismos tales que $gf = 0$ y asuma que no hay sumandos directos Y' de Y con $Imf \subseteq Y' \subseteq kerg$. Entonces existe un módulo inescindible no proyectivo W tal que $Hom(X, \tau W) \neq 0$ y

$Hom(W, Z) \neq 0$.

Demostración:

Mostraremos primero que podemos asumir que ambos morfismos f y g son distintos de cero y que g es minimal derecho, esto es que $kerg$ no contiene sumandos directos de Y distintos de cero.

Para esto, sea Y_1 un sumando directo maximal de Y contenido en $kerg$ y sea $X_1 = f^{-1}(Y_1)$.

En caso de que $X_1 = X$, tendríamos que $\mathrm{Im}\, f \subseteq Y_1 \subseteq kerg$, con Y_1 sumando directo de Y lo que contradice nuestra suposición. Entonces $X_1 \subset X$. Sea $Y = Y_1 \bigoplus Y_2$ y $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$, y $g = [g_1, g_2]$, donde $f_i : X \to Y_i$, $g_i : Y_i \to Z$. Notemos que por la definición, ambas f_2 y g_2 son distintas de cero, g_2 es minimal derecha y $g_2 \cdot f_2 = 0$.

Podemos entonces reemplazar f, g, y Y por f_2, g_2, y Y_2 (es decir, podemos reducir al caso deseado). Podemos suponer también que g es suprayectiva.

Sean $K = kerg$ y $u : K \to Y$ la inclusión, como $Imf \subset K$ y $f \neq 0$, hay un sumando directo inescindible K_1 de K tal que $Hom(X, K_1) \neq 0$.

Como g es minimal derecha, K_1 no es sumando directo de Y y en particular, K_1 no es inyectivo.

Sea $0 \to K_1 \xrightarrow{h} E \xrightarrow{e} W \to 0$ la sucesión que casi se divide para K_1 (W es no proyectivo), y sea $m_1 : K_1 \to K$ la inclusión.

Tenemos entonces la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m_1"'] & E \arrow[r, "e"] \arrow[d, dashed, "v"] & W \arrow[r] \arrow[d, dashed, "v'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

v y v' existen pues um_1 es un monomorfismo que no se divide y el diagrama es conmutativo.

Afirmamos que $v' \neq 0$, pues en caso contrario $gv = 0$ implica que existe $v'' : E \to K$ tal que $v = uv''$, pero con esto $uv''h = vh = um_1$ y entonces $v''h = m_1$, pues u es monomorfismo, lo que nos dice que h es un monomorfismo que se divide. (Contradicción).

Por lo tanto: $Hom(W, Z) \neq 0$ y $Hom(X, \tau W) = Hom(X, K_1) \neq 0$.

$\square$

3.3.– Corolario.- Un módulo inescindible X es dirigido si y sólo si no existe un módulo inescindible no proyectivo W tal que $X \preceq \tau W$ y $W \preceq X$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que existe un módulo inescindible no proyectivo W tal que $X \preceq \tau W$ y $W \preceq X$ entonces tenemos un ciclo que contiene a X

$$X \preceq \tau W \preceq W \preceq X$$

y por tanto X no es dirigido.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe un ciclo $(X_0, \cdots, X_s)$ con $X_0 = X = X_s$ y sean $f_i : X_{i-1} \to X_i$ los morfismos distintos de cero que aparecen en el mismo, podemos escribir entonces, $f_i = f_j$ si $j \equiv i \pmod s$. Con lo anterior, tenemos que hay algún $t \geq 1$ tal que $f_t \cdots f_1 \neq 0$ pero que $f_{t+1} \cdots f_1 = 0$.

Aplicamos el lema anterior para $f = f_t \cdots f_1$, y $g = f_{t+1}$ y obtenemos que existe un módulo inescindible no proyectivo W tal que $X = X_0 \preceq \tau W$ y

$W \preceq X_{t+1}$ y como $X_{t+1} \preceq X$ terminamos.

□

Con la caracterización anterior, podemos generalizar la noción de módulo dirigido:

3.4.– Definición.- Un A-módulo M (no necesariamente inescindible) se llamará *dirigido* si no existen sumandos directos inescindibles M_1 y M_2 de M y un módulo inescindible no proyectivo W tal que $M_1 \preceq \tau W$ y $W \preceq M_2$.

Notemos que esta definición es equivalente a la definición 3.1 para el caso en que el módulo M sea inescindible.

Con esto estamos en condición de probar el siguiente teorema:

3.5.—Teorema.- Sea P un A-módulo proyectivo inescindible, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) P es dirigido en mod_A

b) $radP$ es dirigido en mod_A

c) Cada sumando directo de $radP$ es dirigido en mod_A.

Demostración.- b) $\Rightarrow$ c): es trivial.

c) $\Rightarrow$ a): Supongamos que $(X_0, \cdots, X_s)$ es un ciclo con $P = X_0 = X_s$; podemos factorizar cualquier morfismo no invertible $f_s : X_{s-1} \to X_s = P$ a través del radical:

$$\begin{tikzcd} X_{s-1} \arrow[rr, "f_s"] \arrow[dr, dashed] & & P \\ & rad\, P \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

($radP$ es submódulo maximal de P por lo que $Imf_s \subseteq radP$).

Entonces podemos "refinar" el camino de manera que contenga algún sumando directo inescindible de $radP$; denotamos como M_1 dicho sumando, entonces M_1 no es dirigido (contradicción).

Para la última implicación, veamos un lema adicional:

Lema.- Sean $f : radP \to Y$, $g : Y \to Z$ morfismos distintos de cero tales que $gf = 0$. Asuma que Z es inescindible y que g es minimal derecha. Entonces $P \preceq Z$.

Demostración:

Que g sea minimal derecho significa que $kerg$ no contiene ningún sumando directo de Y distinto de cero, por lo que la restricción de g a cualquier sumando de Y es no cero.

1) Si $Hom(P,Y) \neq 0$, tenemos que para algún sumando directo inescindible Y_1 de Y tal que $Hom(P, Y_1) \neq 0$, obtenemos

$$P \preceq Y_1 \preceq Z$$

2) Supongamos entonces que $Hom(P,Y) \ = \ 0$

Sea $S = P/radP$. Tenemos que $f : radP \to Y$ induce una sucesión exacta "canónica", que se obtiene tomando el pushout:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{rad}\,P \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "m"'] & E \arrow[r, "p"'] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & S \arrow[r] & 0 \\
& & E' \oplus C & &
\end{tikzcd}$$

Sea E' sumando directo inescindible de E tal que $Hom(P, E')$ sea distinto de cero, además de que la restricción de $p : E \to S$ a E' sea distinta de cero, pero la restricción de p a C sea 0.

Tenemos entonces la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{rad} P \arrow[r, "i"] \arrow[d] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\cong"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\cong"] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \oplus C \arrow[r] & E' \oplus C \arrow[r] & S \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "m'"] \arrow[u, "v"] & E' \arrow[r, "pu"] \arrow[u, "u"] & S \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

donde los cuadrados son conmutativos y $m' : Y' \to E'$ es el núcleo de pu (i.e. la restricción de p a E'), Y' es distinto de cero, pues de lo contrario, la sucesión $0 \to Y \to E \to S \to 0$ se escinde.

Por otra parte, el morfismo $g : Y \to Z$ induce una nueva sucesión (el tercer renglón en el siguiente diagrama, donde existe $g'' = 0$)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{rad} P \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, dashed, "g''"'] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "m"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "g'"] & S \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & F \arrow[r] & S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y por definición de pushout, existe $g' : E \to Z$ tal que $g = g'm$.

Lo que nos interesa ver es que $Hom(E', Z) \neq 0$:

Tenemos que $g'um' = g'mv = gv \neq 0$ pues g es minimal derecho, entonces $g'u \neq 0$ (m' es monomorfismo).

Por lo tanto, $Hom(E', Z) \neq 0$ y entonces

$$P \preceq E' \preceq Z$$

. □

Finalmente a) $\Rightarrow$ b) del teorema 3.5: supongamos que *$radP$ no es dirigido*, i.e. hay sumandos directos inescindibles M_1 y M_2 de $radP$ y un módulo inescindible no proyectivo W tal que $M_1 \preceq \tau W$ y $W \preceq M_2$.

Veremos que P tampoco es dirigido.

Sea $(X_0, \ldots, X_s)$ un camino con $X_0 = M_1$ y $X_s = \tau W$, tomamos morfismos $0 \neq f_i : X_{i-1} \to X_i$ para $1 \leq i \leq s$.

Si $f_s \cdot \ldots \cdot f_1 = 0$, escogemos t máxima tal que $f_t \cdot \ldots \cdot f_1 \neq 0$ y $g = f_{t+1}$. Aplicando el lema anterior, obtenemos $P \preceq X_{t+1}$ y con esto,

$$P \preceq X_{t+1} \preceq \tau W \preceq W \preceq M_2 \preceq P$$

Si $f_s \cdot \ldots \cdot f_1 \neq 0$, hacemos $m : \tau W \to V$ el morfismo fuente para τW y $g : V \to W$ su cokernel. En este caso aplicamos el lema a $f = f_s \cdot \ldots \cdot f_1 \cdot m$ y g, volviendo a obtener que $P \preceq W$.

Por lo tanto P no es dirigido.

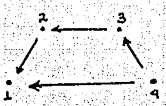
□

En realidad es importante señalar sobre qué álgebra estamos considerando la propiedad de ser dirigido, pues podemos tener módulos que sobre un álgebra sean dirigidos pero dejen de serlo al variar el álgebra.

Veamos el siguiente ejemplo, con el que ilustramos lo anterior:

Sea $A = kQ/I$, donde

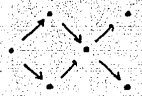
Q:



y donde I es el ideal generado por todos los caminos de longitud 2.

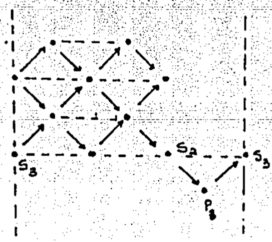
Sea $B = A/Ae_3A$, tenemos que el carcaj de Auslander-Reiten asociado a B es de la forma:

$\Gamma_B =$



vemos que $S_2 = radP_3$ es un B-módulo *dirigido.*

Pero si consideramos s_2 como módulo sobre A, vemos que aparece dentro de un ciclo, para esto, esquematizamos una parte del carcaj de Auslander-Reiten asociado a A, donde estamos identificando a lo largo de las lineas punteadas verticales:



Algunas otras propiedades de los módulos dirigidos se enuncian en las siguientes proposiciones.

3.6.– **Proposición.**- Sea M un A-módulo dirigido. Sea B el álgebra soporte de M. Entonces $End_A(M)$ es hereditaria, $Ext^1_A(M,M) = 0$ y como B-módulo M es un módulo de tilteo.

Demostración: Sean M_1 y M_2 sumandos directos inescindibles de M, entonces $Ext^1_A(M_1, M_2) = 0$, pues de lo contrario $Hom_A(M_2, \tau_A M_1) \neq 0$ [10, 2.4 (5)] que contradice que M sea dirigido, por tanto, $Ext^1_A(M,M) = 0$.

Notemos que M es dirigido como B-módulo. (Por tanto, también vale que $Ext^1_B(M,M) = 0$).

Para que M sea un B-módulo de tilteo, faltaría ver que $pdim_B M_i \leq 1$ para todo sumando directo M_i de M.

Supongamos que no, entonces $Hom_B(I, \tau_B M_i) \neq 0$ [10, 2.4 (1)], con I un B-módulo inyectivo. Como B es el álgebra soporte de M, existe M_j sumando directo de M tal que $Hom_B(M_j, I) \neq 0$, entonces $M_j \preceq I \preceq \tau_B M_i \preceq M_i$ contradiciendo que M sea dirigido en mod_B.

Por tanto, M es un B-módulo de tilteo. Como además M es sincero sobre B, M es un *módulo rebanada* por lo que $End_A(M)$ es hereditaria.

3.7.– **Proposición.**- Sea $(X_0, \cdots, X_s)$ un camino y supongamos que no existe un módulo inescindible no proyectivo W con $X_0 \preceq \tau W$ y $W \preceq X_s$. Sea $X = \bigoplus_{i=1}^{s} X_i$ entonces:

a) El módulo X es dirigido

b) El número s está acotado por el número de clases de isomorfía de los A-módulos simples.

Demostración:

a) Supongamos que existe un A-módulo no proyectivo inescindible tal que $X_i \preceq \tau W$ y $W \preceq X_j$ para algunos X_i, X_j. Entonces tenemos $X_0 \preceq \tau W$ y

$W \preceq X_j \preceq X_s$ contradiciendo lo que habíamos supuesto, por tanto, X es dirigido.

b) Como X es un A-módulo dirigido, aplicando la proposición 3.6, X es un B-módulo parcial de tilteo (siendo B el álgebra soporte de X). Como todo módulo parcial de tilteo es sumando directo de un módulo de tilteo, y a su vez, el número de sumandos directos no isomorfos de un módulo de tilteo está acotado por el rango de $K_0(A)$ (el grupo de Grothendieck del álgebra correspondiente), tenemos que el número de sumandos no isomorfos de X está acotada por el número de simples (ver 1.1 c)).

□

Finalmente, tenemos el siguiente resultado:

3.8.– **Lema.-** Sea x una fuente en Q, y $radP_x = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i^x$ un A^x-módulo dirigido. Si X es un A^x-módulo dirigido con $X' \to X$ su morfismo pozo en mod_A, y suponemos que, para alguna i, $X \preceq R_i^x$ entonces X' es un A^x-módulo.

Demostración: Tenemos dos posibilidades:

a) Si X es proyectivo, entonces $X' = radX$ es un submódulo de X y por tanto un A^x-módulo.

b) Si X no es proyectivo como A^x-módulo, tampoco lo es como A-módulo. Afirmamos que $\tau_A X = \tau_{A^x} X$. De otra forma, $Hom(radP_x, \tau_{A^x} X) \neq 0$ que implica que existe R_j^x tal que $Hom(R_j^x, \tau_{A^x} X) \neq 0$ y por tanto

$$R_j^x \preceq \tau_{A^x} X \preceq X \preceq R_i^x$$

que contradice que $radP_x$ sea dirigido como A^x-módulo. Por lo tanto $\tau_A X$ es un A^x-módulo y entonces X' también.

□

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente importante teorema:

3.9.— **Teorema.-** Sea x una fuente en Q. Entonces P_x es un A-módulo dirigido si y sólo si $radP_x$ es dirigido como A^x-módulo.

Demostración:

$\Rightarrow$) Si P_x es dirigido como A-módulo, $radP_x$ es dirigido como A-módulo por 3.5. Por tanto, es dirigido como A^x-módulo.

$\Leftarrow$) Sea $radP_x$ dirigido como A^x-módulo. Supongamos que P_x no es dirigido, entonces aparece en un ciclo $(P_x = X_0, \cdots, X_{s+1} = P_x)$, podemos suponer $X_s = R_i^x$ y entonces $s \geq 2$.

Notemos que si $Hom_A(P_x, X_j) \neq 0$ para algún $2 \leq j \leq s$ podemos borrar los módulos intermedios y tener caminos de longitud menor, por lo que podemos asumir que $Hom_A(P_x, X_j) = 0$ $\forall j$, $2 \leq j \leq s$. (i.e. X_j es un A^x-módulo).

Veremos que la longitud de tales caminos está acotada.

$$P_x \to X_1 \to \underbrace{X_2 \to \cdots \to R_i^x}_{en\ A^x-mod} \to P_x$$

Sea $f : X_1 \to X_2$ un morfismo distinto de cero, f no se anula si nos restringimos a X_1 como A^x-módulo. Entonces, existe un A^x-módulo Y_1, sumando directo de $X_1 |_{A^x}$ tal que $Y_1 \overset{u}{\hookrightarrow} X_1 \xrightarrow{f} X_2$ es distinto de cero.

Entonces existe R_j^x sumando directo de $radP_x$ tal que $Hom(R_j^x, Y_1) \neq 0$ con lo que tendríamos

$$R_j^x \to Y_1 \to X_2 \to \cdots \to R_i^x$$

camino de longitud s en mod_{A^x} que empieza y termina en sumandos directos de $radP_x$ que es dirigido, aplicando la proposición 3.7 esta longitud está acotada.

Construiremos un camino de longitud $s+1$ con las mismas propiedades y con esto, tendremos una contradicción.

Supongamos que tenemos un camino de longitud s:

$$\begin{tikzcd}
P_x = X_0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & X_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_s = P_x \\
& Y_2' \arrow[r, hook] & Y_2 \arrow[u, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Sea $g : Y_2 \to X_2$ morfismo pozo para X_2 en mod_A, entonces $f : X_1 \to X_2$ se factoriza a través de Y_2. Entonces existe Y_2' sumando directo de Y_2 tal que $Hom(X_1, Y_2') \neq 0$ y $Hom(Y_2', X_2) \neq 0$, aunado esto a que Y_2 es un A^x-módulo (lema 3.8), tenemos que Y_2' y X_1 no son isomorfos, tenemos entonces un camino:

$$P_x = X_0 \to X_1 \to Y_2' \to X_2 \to \cdots \to X_s = P_x$$

que tiene longitud $s+1$ (contradicción).

Por lo tanto, $radP_x$ debe ser dirigido.

$\square$

3.10.– Rebanadas:

Con el siguiente lema [7, p.375] se caracterizará a las álgebras tilteadas en base a la existencia de ciertos módulos dentro de la categoría de módulos del álgebra correspondiente

Primeramente definimos ciertas clases de módulos que intervienen en el lema:

Dado un módulo inescindible M, definimos $S'(\to M)$ como la clase de A-módulos inescindibles X con $X \preceq M$ y tal que no existe un A-módulo inescindible no proyectivo Z que satisfaga que $X \preceq \tau Z$ y $Z \preceq M$. Dualmente, sea $S'(M \to)$ la clase de módulos dada por todos los A-módulos inescindibles Y con $M \preceq Y$ y tal que no existe un A-módulo inescindible no proyectivo Z que satisfaga $M \preceq \tau Z$ y $Z \preceq Y$.

3.11.— **Lema.**- Sea M un A-módulo dirigido y sincero, entonces $S'(\to M)$ y $S'(M \to)$ son rebanadas. Más generalmente, si X es inescindible y está en $S'(\to M)$, entonces $S'(X \to)$ es una rebanada; si Y es inescindible y está en $S'(M \to)$, entonces $S'(\to Y)$ es una rebanada.

Demostración:

Que $S'(M \to)$ y $S'(\to M)$ sean rebanadas es inmediato, si notamos que el módulo dirigido M siempre está en ambas, las demás condiciones se cumplen de manera obvia.

Sea ahora, X un inescindible en $S'(\to M)$. Las condiciones a), b) y c) de la definición de rebanada (1.4), se cumplen de manera inmediata, de hecho, se cumple una condición más fuerte aún que b):

b′) Si N, S son inescindibles, $X \preceq N \preceq S$ y $S \in S'(X \to)$, entonces también $N \in S'(X \to)$.

(De lo contrario, tendríamos un módulo inescindible no proyectivo Y, tal que $X \preceq \tau Y$, $Y \preceq N$, pero entonces se tendría $X \preceq \tau Y$, $Y \preceq S$ (contradicción).

Falta demostrar la condición d) para $S'(X \to)$. Sea $S \in S'(X \to)$ y N inescindible tal que $N \to S$ es un morfismo irreducible.

Suponga que $N \notin S'(X \to)$, por b′) sabemos que $X \not\preceq N$. En particular, N no puede ser inyectivo, pues de lo contrario, como M es sincero, tendríamos $X \preceq M \preceq N$.

Supongamos entonces que $\tau^{-1}N \notin S'(X \to)$. Como $X \preceq S \preceq \tau^{-1}N$, deberá existir entonces un módulo inescindible no proyectivo Z que cumpla: $X \preceq \tau Z$ y $Z \preceq \tau^{-1}N$. Como se cumple la segunda, fijemos un camino $(Z_0, Z_1, \cdots, Z_t)$ con $Z = Z_0$ y $Z_t = \tau^{-1}N$.

Notemos que $Hom(Z_i, P) = 0$ para cualquier $0 \leq i \leq t$ y cualquier módulo proyectivo inescindible P, pues de lo contrario, tendríamos que $X \preceq \tau Z$ y que $Z \preceq Z_i \preceq P \preceq M$ de acuerdo al hecho de que M es sincero, lo que nos llevaría a tener que $X \notin S'(\to M)$.

Con esto tenemos $\tau Z_i \neq 0 \ \forall \ 0 \leq i \leq t$ y que además $Hom(Z_{i-1}, Z_i) = \underline{Hom}(Z_{i-1}, Z_i)$ para $1 \leq i \leq t$ y por lo tanto, también tendremos que $\overline{Hom}(\tau Z_{i-1}, \tau Z_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq t$ [7, 2.4.5].

Con lo anterior, $(\tau Z_0, \tau Z_1, \cdots, \tau Z_t)$ es un camino de τZ a $\tau Z_t = N$, entonces tenemos $X \preceq \tau Z \preceq N$ (contradicción).

Por lo tanto $\tau^{-1} N \in S'(X \rightarrow)$ y entonces $S'(X \rightarrow)$ es una rebanada.

La otra afirmación es completamente análoga.

□

Con lo anterior, tenemos una manera de "construir" rebanadas a partir de módulos dirigidos sinceros, lo cual a su vez nos permite construir módulos de tilteo. De 1.5 obtenemos:

3.11.– **Corolario.-** Sea A un álgebra de dimensión finita con un módulo dirigido y sincero. Entonces A es un álgebra tilteada.

□

4. Número de Crecimiento en Componentes Postproyectivas

En esta parte definimos lo que es una sección, una sección completa y vemos la relación que existe entre éstas y las rebanadas, mismas que ya definimos en la sección 1.

Desarrollamos también un resultado que caracteriza a las secciones que dan origen a álgebras mansas.

Todo esto está tomado básicamente de [2], [3], y [5].

4.1.– Número de crecimiento

Sea A un álgebra de dimensión finita y X un A–módulo inescindible.

Definición.- El número de crecimiento izquierdo de X es

$$\rho_l(X) = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{dim_k\, \tau^m X}$$

Similarmente, el número de crecimiento derecho es

$$\rho_r(X) = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{dim_k\, \tau^{-m} X}$$

Si $\mathcal{C}$ es una componente del carcaj de Auslander-Reiten Γ_A, definimos el número de crecimiento de $\mathcal{C}$ como:

$$\rho_l(\mathcal{C}) = sup\{\rho_l(X) : X \in \mathcal{C}\}.$$

Análogamente definimos el número de crecimiento derecho de $\mathcal{C}$.

En algunos casos, el número $\rho_l(X)$ es independiente de la elección del módulo X en una componente $\mathcal{C}$. Por ejemplo, si $\mathcal{C}$ es estable hacia la izquierda, esto es, $\tau^m(X)$ está bien definido para todo $X \in \mathcal{C}$ y $m \geq 0$, entonces $\rho_l(X) = \rho_l(Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$.

4.2.– Secciones

Sea $\mathcal{C}$ una componente en Γ_A y S un subcarcaj pleno de $\mathcal{C}$.

Definición.- Decimos que S es una *sección* si:

a) S es cerrado bajo caminos en $\mathcal{C}$

b) Si $X \in S$, entonces $\tau_A X \notin S$

c) Cada $X \in S$ está dirigido.

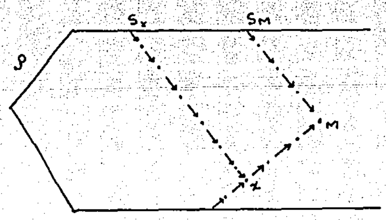
También decimos que una sección S es *completa*, cuando $X \to Y$ es una flecha en Γ_A, $X \in S$ y $Y \notin S$, entonces Y no es proyectivo y $\tau Y \in S$.

Ejemplos:

a) En la sección 1 de este trabajo dimos la definición de rebanada, ahora ilustramos con un ejemplo este concepto, mismo que está muy relacionado con el de sección y sección completa.

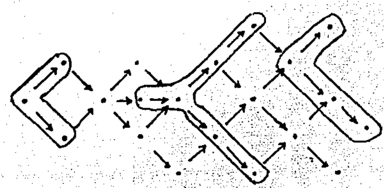
Sea M un A-módulo inescindible, dirigido y sincero, sea S_M la clase de A-módulos inescindibles X con $X \preceq M$ tal que no existe un A-módulo inescindible no proyectivo Z que satisfaga que $X \preceq \tau Z$ y $Z \preceq M$. S es una rebanada, además, si X es un inescindible en S_M, S_X también es una rebanada.

Trataremos de hacer un diagrama de lo anterior, para M un A-módulo dentro de una componente postproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten de A:



b) Sea Γ_A el siguiente carcaj, en el cual hemos encerrado las distintas secciones que podemos encontrar dentro del mismo, pueden existir más, pero nosotros sólo tratamos de ilustrar la definición.

Γ_A:



Definición.- S es una *m-sección completa* (m $\in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) si:

a) S es una sección completa.

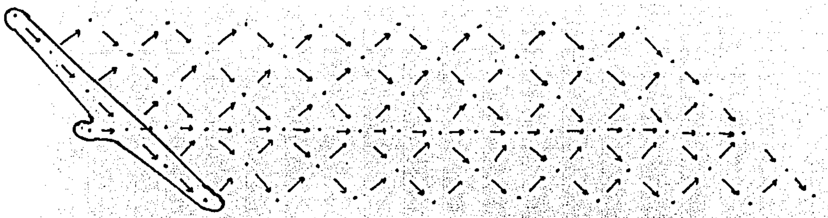
b) S admite un número finito de predecesores en Γ_A, todos dirigidos.

c) Si $X \in S$, $0 \leq l \leq m$ y $Y \preceq \tau_A^{-l}(X)$ tal que $Y = I_j$ ó Y es un sumando directo de $radP_j$, entonces Y es un predecesor propio de S.

Notemos que el último inciso de la definición lo que nos indica es el número de veces que podemos "repetir" S aplicando τ^- a los elementos de la misma.

Ejemplos:

a) Sea Γ_A el siguiente carcaj de Auslander-Reiten, S es una 8-sección completa.



b) Sea $\mathcal{P}$ una componente postproyectiva infinita de Γ_A. Consideremos los módulos $\tau_A^{-s_i}(P_i)$ tal que $P_i \in \mathcal{P}$, $\tau_A^{-s}(P_i)$ no es inyectivo para todo $s \geq 0$ y s_i es el mínimo tal que $\tau_A^{-s_i}(P_i)$ no es predecesor en $\mathcal{P}$ de un módulo inyectivo ó proyectivo. Entonces, el subcarcaj pleno S de $\mathcal{P}$ formado por todos los módulos $\tau_A^{-s_i}(P_i)$ es una ∞-sección completa maximal en $\mathcal{P}$.

Veremos que S cumple las condiciones de la definición:

a) S es una sección por la manera de definirla (Notemos que si $X = \tau_A^{-s_i} P_i$ está en S, entonces $\tau_A X$ no pertenece a S pues $s_i - 1 < s_i$).

Sea $X \longrightarrow Y$ una flecha en Γ_A, $X \in S$, entonces Y no es proyectivo, por lo que τY está bien definido, $\tau Y \preceq X$ y $\tau Y = \tau^{-m} P_j$ para alguna m y algún P_j, supongamos que $m - 1 = s_j$ (es decir, que $\tau Y \notin S$), como $\tau^{-(m-1)} P_j \preceq \tau X$ entonces X no está en S (contradicción). b) S sólo admite un número finito de predecesores, todos dirigidos por estar en $\mathcal{P}$.

c) este se cumple por la definición de S.

En este trabajo nos interesan secciones que se *estabilizan* dentro de Γ_A, es decir, aquéllas secciones que podemos *repetir* (aplicando τ^- a los elementos de S) indefinidamente.

Distinguiremos las secciones de acuerdo al carcaj subyacente, estos tipos son: secciones Dynkin, secciones Euclidianas y secciones Salvajes.

Damos a continuación algunas características de estas secciones.

Secciones Dynkin

En este caso, tenemos que $A = kQ$ (con Q el carcaj asociado a la sección) es de tipo de representación finito.

Si en una componente de Γ_A aparece una sección de este tipo, ésta no se estabiliza, es decir, "se acaba" después de cierto número M de traslaciones, dependiendo de si es un $\mathbf{A}_n, \mathbf{D}_n, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7$ ó $\mathbf{E}_8$.

Este número, en este caso, está acotado de la siguiente manera:

Como tenemos que Q es Dynkin, la forma de Tits de A, q_A es débilmente positiva y hay una correspondencia 1-1 entre el conjunto de raíces de q_A y las clases de isomorfía de los A-módulos inescindibles, por lo que M estaría dado por:

$$M = \frac{numero\ de\ raices\ de\ q_A}{\mid Q_0 \mid}$$

y tenemos entonces que si:

$Q = \mathbf{A}_n$ ó $\mathbf{D}_n : M = n - 1$.

$Q = \mathbf{E}_6 : M = 6$.

$Q = \mathbf{E}_7 : M = 9$.

$Q = \mathbf{E}_8 : M = 15$.

Notemos que esto equivale a que en una componente de Γ_A, si tenemos que S es una sección de tipo Dynkin y $S_n = \{\tau^{-n}X : X \in S\}$, entonces $Hom(S, S_n) = 0$ para un número n adecuado, dependiendo del caso en que nos encontremos.

Otra característica particular, es que si $\mathcal{P}$ es una componente postproyectiva de A,

$$\rho(\mathcal{P}) = 0 = sup_{X \in \mathcal{P}}\{\lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{dim \tau^{-m} X}\}$$

Secciones Euclidianas

El carcaj asociado a este tipo de secciones son los llamados Dynkin extendidos, $\tilde{\mathbf{A}}_n$, $\tilde{\mathbf{D}}_n$, $\tilde{\mathbf{E}}_6$, $\tilde{\mathbf{E}}_7$, $\tilde{\mathbf{E}}_8$. En este caso, $A = kQ$, con Q de algún tipo de los anteriores, resulta ser un álgebra de tipo de representación infinito.

Para este tipo de álgebras, se tiene que

$$\rho(\mathcal{P}) = sup_{X \in \mathcal{P}}\{\lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{dim \tau^{-m} X}\} = 1$$

Secciones Salvajes

Contienen una subgráfica plena propia del tipo Dynkin extendido, o bien, una del tipo $\bullet \rightrightarrows \bullet$ con más de 3 flechas. Dan origen a álgebras salvajes.

En particular, $\rho(\mathcal{P}) > 1$, pues sabemos que para álgebras salvajes

$$\lim \sqrt[m]{dim \tau^{-m} X} = \rho_A > 1$$

para X no preinyectivo y donde ρ_A es el radio espectral de la matriz de Coxeter asociada a A [6].

Hasta ahora, hemos definido lo que es una sección, una sección completa y una rebanada, notando que estos conceptos se ligan entre si, a continuación hacemos notar las relaciones entre ellos:

4.3.– **Proposición.-** Sea $A = kQ/I$ un álgebra de dimensión finita, S una sección en una componente de Γ_A y $suppS = \{i \in Q_0 : X(i) \neq 0$ para alguna $X \in S\}$. Entonces:

a) S es completa $\Leftrightarrow$ S es sección maximal

b) $suppS$ es convexo en kQ/I

c) S es una rebanada en la subálgebra plena de A definida en los vértices de $suppS$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$) Sea S una sección completa.

Supongamos que no es maximal, es decir, que existe S' sección tal que $S \subset S'$.

Sea $X \in S'$ pero tal que $X \notin S$. Como S' es sección y todo elemento de S está en S', podemos suponer que existe $Y \in S$ tal que $Y \longrightarrow X$ es una flecha en Γ_A (o bien, $X \longrightarrow Y$ en Γ_A, los casos son análogos).

Como S es completa y $X \notin S$, entonces $\tau_A X \in S$. Pero entonces $\tau_A X \in S'$, contradiciendo que S' es sección (pues $S \subset S'$).

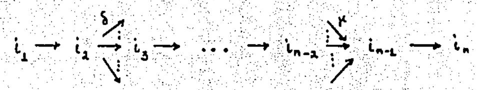
Por lo tanto S es maximal.

$\Leftarrow$) Es inmediata.

b) Veremos que si S es una sección, entonces $suppS$ es convexo en A.

Sea $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_n$ un camino en Q, tal que i_1, i_n están en el soporte de S. Supongamos que $i_j \notin suppS$ con $2 \leq j \leq n-1$ y $n > 3$.

Sean $J = \langle \alpha\delta, \gamma\beta : \delta : i_2 \to *, \gamma : * \to i_{n-1} \rangle$ y $B = A/J$.



Con esto, tenemos que si $X \in S$, entonces $X \in mod_B$ (i.e $JX = 0$).

Ahora bien, como $i_1 \in suppS$ entonces existe $X_1 \in S$ tal que $X_1(i_1) \neq 0$ y como $i_n \in suppS$, existe $X_2 \in S$ tal que $X_2(i_n) \neq 0$.

Consideremos $P^B_{i_1}$ el B-módulo proyectivo en el vértice i_1, en este caso tenemos $P^B_{i_1} \longrightarrow X_1$ y análogamente $X_2 \longrightarrow I^B_{i_n}$.

Ahora bien, de $I^B_{i_n}$ hay un morfismo irreducible hacia el cociente $I^B_{i_n}/socI^B_{i_n}$, pero por la manera de definir J, tenemos que de $I^B_{i_n}$ sale un morfismo irreducible al simple en i_{n-1} (al menos) podemos construir el siguiente camino en Γ_A:

$$\mathcal{X}_2 \dashrightarrow I^B_{i_n} \longrightarrow S_{i_{n-1}} \hookrightarrow \begin{matrix} K_{i_{n-2}} \\ \downarrow \\ K_{i_{n-1}} \end{matrix}$$

donde el último término es la representación de un módulo que tiene el campo en el vértice i_{n-2} al igual que en el vértice i_{n-1} y cero en los demás vértices, haciendo el cociente con $S_{i_{n-1}}$ y proyectando obtenemos:

$$\mathcal{X}_2 \longrightarrow I^B_{i_n} \longrightarrow S_{i_{n-1}} \hookrightarrow \begin{matrix} K_{i_{n-2}} \\ \downarrow \\ K_{i_{n-1}} \end{matrix} \longrightarrow S_{i_{n-2}}$$

Procediendo análogamente, podemos continuar hasta construir el siguiente camino:

$$\mathcal{X}_2 \longrightarrow I^B_{i_n} \longrightarrow S_{i_{n-1}} \hookrightarrow \begin{matrix} K_{i_{n-2}} \\ \downarrow \\ K_{i_{n-1}} \end{matrix} \longrightarrow S_{i_{n-2}} \hookrightarrow \begin{matrix} K_{i_{n-3}} \\ \downarrow \\ K_{i_{n-2}} \end{matrix} \longrightarrow S_{i_{n-3}} \hookrightarrow \cdots \longrightarrow S_{i_2}$$

Notemos además que S_{i_2} es un sumando directo del radical de P_{i_1}, entonces, podemos completar el camino hasta X_1:

$$\mathcal{X}_2 \longrightarrow I^B_{i_n} \longrightarrow S_{i_{n-1}} \hookrightarrow \begin{matrix} K_{i_{n-2}} \\ \downarrow \\ K_{i_{n-1}} \end{matrix} \longrightarrow S_{i_{n-2}} \hookrightarrow \cdots \longrightarrow S_{i_2} \longrightarrow P_{i_1} \longrightarrow \mathcal{X}_1$$

Pero S es sección y por tanto, cerrada bajo caminos dirigidos, y $X_1, X_2, \in S$ implica que $S_{i_2} \in S$ y entonces $i_2 \in suppS$ (contradicción).

Por lo tanto, $suppS$ es convexo.

c) Veremos que S cumple con los requisitos para ser una rebanada en B.

Tenemos que $\bigoplus_{X \in S} X$ es sincero por la manera de definir B.

Las condiciones restantes las hereda del hecho de ser sección.

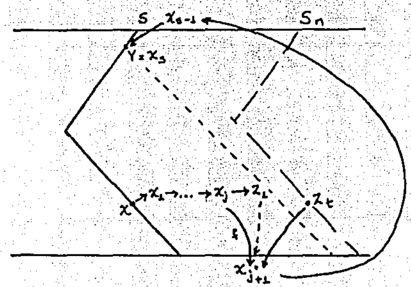
$\square$

Notemos que en la definición de sección se hace énfasis en que S debe ser cerrada bajo caminos *en la componente dentro de la cual se encuentra*, veremos que en el caso en que la sección S es $\infty-$ *completa*, esto implica que S es cerrada bajo caminos *en* mod_A.

4.4.– **Lema.-** Sea S una sección ∞-completa, entonces S es cerrada bajo caminos en mod_A.

Demostración.- Tenemos la siguiente situación. Sean $Y, X \in S$

6



Y sea $X \to X_1 \to X_2 \to \cdots X_j \xrightarrow{f} X_{j+1} \to \cdots \to X_{s-1} \to X_s = Y$ un camino en mod_A de X a Y, veremos que todo el camino pertenece a la sección.

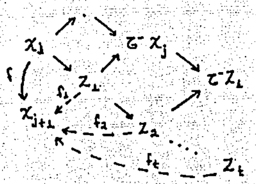
Si toda $X_i \in C$, entonces el camino está en S.

Supongamos que X_{j+1} es el primer módulo que ya no pertenece a la componente C donde S es sección ∞-completa.

Primeramente, $f : X_j \to X_{j+1} \in rad^{\infty}(X_j, X_{j+1})$ pues de lo contrario, tendríamos que X_{j+1} está en la componente, entonces f se factoriza a través de una cantidad infinita de módulos.

S es una sección ∞-completa. Sea $S_n = \{\tau^{-n}X / X \in S\}$ que es no vacio para todo n. Como $Y \in S$, en algún momento, Y es predecesor de todos los elementos de S_n para n adecuada. (ver dibujo)

Ahora bien, como $f \in rad^{\infty}(X_j, X_{j+1})$ y $\tau^{-t}X_j$ está definido para todo t (por ser S sección ∞-completa), tenemos:



Con Z_1 en la componente C y $f_1 \in rad^{\infty}(Z_1, X_{j+1})$ procediendo de igual forma, tenemos Z_2 y f_2, entonces de esta manera encontramos Z_t (para alguna t) tal que es un sucesor de Y, esto es $Y \preceq Z_t$.

Pero entonces tenemos

$$Y \preceq Z_t \preceq X_{j+1} \preceq X_{s-1} \preceq Y$$

un ciclo que pasa por Y, pero Y *es dirigido* por estar en S.

Por lo tanto, X_{j+1} no puede estar fuera de la componente C.

□

El siguiente resultado establece el tipo de secciones que dan origen a álgebras mansas.

Sea $A = kQ/I$ un álgebra de tipo de representación infinito, Q sin ciclos.

4.5.– **Proposición.-** Sea $\mathcal{P}$ una componente postproyectiva de Γ_A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) El álgebra $\Lambda_P = End(P)$ es mansa, donde

$$P = \bigoplus_{P_i \in \mathcal{P}} P_i$$

ii) $\forall i \in Q_0$, $\exists c > 0$ tal que $dim_k \tau^{-s} P_i \leq cs$.

iii) $\Lambda'_P = End(P')$ es mansa, donde

$$P' = \bigoplus_{j \in suppS} P_j$$

para toda sección S que se estabiliza dentro de la componente $\mathcal{P}$.

iv) S es trivial o Euclidiana para toda sección S que se estabiliza.

Demostración:

i) $\Rightarrow$) ii) Como $\mathcal{P}$ es una componente postproyectiva de Λ_P, podemos considerar que $A = \Lambda_P$.

Asumamos que Λ_P es mansa, entonces la forma de Tits q_A es débilmente no negativa [2, IV,1.2], mostraremos que para todo $i \in Q_0$ y para todo $X \in \mathcal{P}$, tenemos:

$$| \, dim_k \tau^{-1} X(i) - dim_k X(i) \, | \leq 2$$

Probaremos algo equivalente: dado X un A-módulo inescindible no proyectivo, con $X \in \mathcal{P}$, entonces para cada $i \in Q_0$:

$$| \, dim_k \tau X(i) - dim_k X(i) \, | \leq 2$$

Considerando la sucesión de Auslander-Reiten:

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} Y_i \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

donde Y_i es inescindible $i = 1, 2, \cdots, s$. Sabemos (ver [10]) que el soporte del vector dimensión de al menos uno de los módulos $\tau X, Y_i, X$ contiene al soporte de los otros, por lo que podemos asumir que $Y = (\bigoplus Y_i) \bigoplus X \bigoplus \tau X$ es sincero en mod_A

Notemos que X satisface:

a) $pdim_A X \leq 1$, en otro caso, existiría un morfismo $0 \neq f \in Hom_A(I_j, \tau X)$ para alguna $j \in Q_0$. Como Y es sincero, existe i tal que $Hom(Y_i, I_j) \neq 0$ y entonces tendremos $I_j \preceq \tau X \preceq Y_i \preceq I_j$ un ciclo en el que τX aparece (contradicción).

b) $Hom_k(X, A) = 0$, de lo contrario, tendríamos $Hom(X, P_i) \neq 0$ para algún módulo proyectivo P_i, y como Y es sincero tenemos también que existe j tal que $Hom(P_i, Y_j) \neq 0$, pero entonces se forma un ciclo $Y_j \preceq X \preceq P_i \preceq Y_j$ en el que X aparece.

Bajo estas condiciones, tenemos que $\mathbf{dim}\, \tau X = \Phi_A(\mathbf{dim} X)$, donde Φ_A es la matriz de Coxeter del carcaj de A. Sea $v = \mathbf{dim} X$ y $p_i = \mathbf{dim} P_i$, $i \in Q_0$.

Entonces:

$$\begin{array}{rcl} q_A(v, p_i) & = & q_A(v + p_i) - q_A(v) - q_A(p_i) \\ 0 \leq q_A(v, p_i) & = & 2 + v(i) - dim_k Ext^1_A(X, P_i) \\ & = & 2 + v(i) - dim_k Hom_k(P_i, \tau X) \\ & = & 2 + v(i) - dim_k \tau X(i) \end{array}$$

Por lo tanto $-2 \leq dim_k X(i) - dim_k \tau X(i)$. De manera similar, se obtiene la otra desigualdad.

$$Sea\ m = max\ \{dim_k P_i : i \in Q_0\}$$

entonces, $dim \tau^{-s} P_i \leq 2ns + m \quad \forall i \in Q_0$ (pues $X = \tau^{-m} P_j$ para algún $j \in Q_0$).

ii) $\Rightarrow$ iii) Supongamos que $\Lambda'_P = End(P')$ es *salvaje*.

Notemos que Λ'_P es un álgebra tilteada con $\mathcal{P}'$ una componente postproyectiva en $\Gamma_{\Lambda'}$ en la que S aparece como una rebanada.

Sea

$$B = End_{\Lambda'_P}(\bigoplus_{X_i \in S} X_i)$$

B es un álgebra hereditaria pero salvaje. Tenemos la isometría:

$$\sigma : K_0(\Lambda'_P) \longrightarrow K_0(B)$$

y también $\Phi_{\Lambda'} = \sigma \Phi_B \sigma^{-1}$ (ver sección 1).

Tomamos $X \in \mathcal{P}$ un módulo tal que existe un camino orientado de algún $X_i \in S$ a X. Entonces $\mathbf{dim}\tau^{-m}X = \Phi_\Lambda^{-m}(\mathbf{dim}X)$.

Sea $Y = \sigma X = \sum X = Hom_{\Lambda'}(S, X)$, Y es proyectivo como B-módulo.

Afirmación:

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{dim_k \tau_{\Lambda'}^{-m} X} \text{ existe} \Longleftrightarrow \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{dim_k \tau_B^{-m} Y} \text{ existe}$$

y en tal caso, son iguales.

Efectivamente: sean $\sigma = (a_{ij})$ y $\sigma^{-1} = (b_{ij})$ matrices $n \times n$.
Sea $a = \max\{| a_{ij} |, | b_{ij} | : 1 \leq i, j \leq n\}$.

1) $| \Phi_B^{-m}(\mathbf{dim}Y) |=| \sigma\Phi_{\Lambda'}^{-m}(\mathbf{dim}X) |\leq na | \Phi_{\Lambda'}^{-m}(\mathbf{dim}X) |$

2) $| \Phi_{\Lambda'}^{-m}(\mathbf{dim}X) |=| \sigma^{-1}\Phi_B^{-m}(\mathbf{dim}Y) |\leq na | \Phi_B^{-m}(\mathbf{dim}Y) |$

$$dim_k \tau_B^{-m} Y =| \mathbf{dim}\tau_B^{-m} Y |=| \mathbf{dim}\tau_{\Lambda'}^{-m} X |= \sum_{i=1}^{n} (\tau_{\Lambda'}^{-m} X)(i) = dim_k \tau_{\Lambda'}^{-m} X$$

Con esto probamos la afirmación.

Por otra parte, como B es un álgebra salvaje:

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{dim_k \tau_B^{-m} Y}$$

existe y es igual a $\rho > 1$, donde ρ es el radio espectral de Φ_B [6].

Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{dim_k\ \tau_{\Lambda'}^{-m} X} > 1$$

Pero como X es postproyectivo, $X = \tau^{-t} P_j$ para alguna t y algún P_j proyectivo, $j \in Q_0$.

Por lo tanto, $\tau^{-m} X = \tau^{-m-t} P_j$ y entonces:

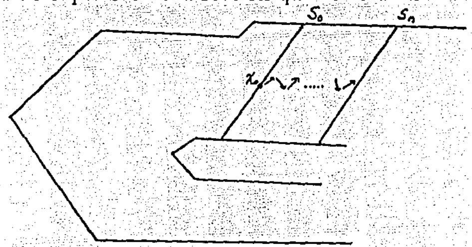
$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{dim_k \tau_{\Lambda'}^{-m} X} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{dim_k \tau^{-m-t} P_j} \leq \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{c(m+t)} = 1$$

(Contradicción)

P_j no cumple la hipótesis.

iii) $\Rightarrow$ iv) Supongamos que S no es Euclidiana. Entonces S es Dynkin ó salvaje.

Recordemos que S es una sección que se estabiliza.



Sea $S = S_0$, una sección en $\mathcal{P}$, S_0 Dynkin y $X_0 \in S_0$ un módulo postproyectivo, entonces, se tiene la sucesión de Auslander-Reiten:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \bigoplus_{i=1}^{n} Y_i \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\phi"] & \tau^{-} X_0 \arrow[r] & 0 \\
& I(X_0) & & &
\end{tikzcd}$$

X_0 no es inyectivo, por lo que no es isomorfo a $I(X_0)$ su cápsula inyectiva,

ϕ existe por propiedades de la sucesión de Auslander-Reiten, es decir, que existe $\phi_i : Y_i \longrightarrow I(X_0)$ no isomorfismo para algún i.

Sin pérdida de generalidad, sea $i = 1$, tenemos análogamente, la sucesión que casi se divide para Y_1:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "\ncong"'] & \bigoplus_{j=1}^{n} Y_j' \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\phi'"] & \tau^{-1} Y_1 \arrow[r] & 0 \\
& I(X_0) & & &
\end{tikzcd}$$

Procediendo de manera similar, en forma sucesiva, tenemos que el morfismo $\gamma : X \rightarrow I(X_0)$ se factoriza a través de una serie de módulos inescindibles $Y_1, Y_1', \ldots$ pero como S es Dynkin en algún paso determinado, toco S_1 ya que no todos los módulos a través de los cuales γ se factoriza pueden estar en S y por un procedimiento similar, llegamos hasta S_n.

Pero esto quiere decir que existe $0 \neq f \in Hom(S_0, S_n)$ lo cual no es posible para cualquier n. (ver 4.2)

Si S es salvaje:

El álgebra

$$B = End(\bigoplus_{X_i \in S} X_i)$$

es salvaje. Sabemos también que

$$\Lambda_P' = End(\bigoplus_{j \in suppS} P_j)$$

es un álgebra tilteada con una componente postproyectiva tal que S aparece en ella como una rebanada.

Procediendo completamente igual que en i) $\Rightarrow$ ii), obtenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{dim_k \tau_B^{-m} Y} = \rho > 1$$

Por lo que $\Lambda'_{\mathcal{P}}$ no es mansa. (pues las álgebras tilteadas mansas tienen ese límite igual a 1).

iv) $\Rightarrow$ i): Por el inciso anterior, sabemos que

$$End_A(\bigoplus_{j\in suppS} P_j)$$

es mansa cuando S es Euclidiana. Sean

$$\Lambda = End(\bigoplus_{j\in suppS} P_j) \qquad \text{y} \qquad \Lambda' = End(\bigoplus_{P_j\in\mathcal{P}} P_j)$$

Entonces Λ es mansa, veremos que Λ' también.

Sea $X \in mod_{\Lambda'}\backslash mod_{\Lambda}$, $X \in \Gamma_A$, pero X no recibe morfismos de S, esto es, $Hom(S,X) = 0$ (de lo contrario, $Hom(\oplus_{j\in suppS}P_j, X) \neq 0$ y $X \in mod_{\Lambda}$).

Esto implica que X debe ser un predecesor de S en la componente $\mathcal{P}$ en Γ_A, pero al ser $\mathcal{P}$ una componente postproyectiva solamente hay un número finito de predecesores para cada elemento en $\mathcal{P}$.

Por lo tanto, $mod_{\Lambda'}$ y mod_{Λ} sólo difieren en una cantidad finita de elementos. Con esto, lo que tenemos, es que al ser Λ un álgebra mansa, para cada dimensión d, podemos caracterizar los Λ-módulos (salvo un número finito), y gracias a esta caracterización, Λ' también resultará mansa.

Veremos ahora, que X es también un Λ-módulo. Supongamos que no, como X es postproyectivo, tenemos la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[r, squiggly] \arrow[rr, dashed, bend right, "\gamma"'] & X \arrow[r, hook, "\Phi"] & I(X) \end{tikzcd}$$

donde $I(X)$ es la cápsula inyectiva de X, Φ no es isomorfismo pues X no es inyectivo.

Queremos ver que $\forall\ j$ tal que $P_j \in \mathcal{P}\ j \in suppS$.

$$I(X) = \bigoplus_{P_j \in \mathcal{P}} I_j^{s(j)}$$

Supongamos que para todo j tal que $P_j \in \mathcal{P}$, $s(j) = 0$, entonces $I_i \notin \mathcal{P}$ de lo contrario, por hipótesis $s(i) = 0$.

Pero entonces $\gamma : P_i \to I_i$ se factoriza a través de S, por lo tanto $i \in suppS$.

Por tanto, X es un Λ-módulo.

Por tanto, Λ' es mansa también.

□

5. Dimensión de los Módulos en Componentes Postproyectivas

En esta parte tratamaos un resultado interesante acerca del crecimiento de las dimensiones de los módulos dentro de componentes de Γ_A. En especial veremos el caso cuando los módulos pertenecen a una componente conexa en una m-sección completa. La importancia de este resultado radica en que nos dá una caractrización de las secciones ∞-completas en función de ciertas dimensiones de módulos. Esto a su vez nos permitirá decidir cuándo un álgebra tendrá componente postproyectiva y, en caso afirmativo, si ésta última es finita o infinita.

Comenzamos con algunos resultados preliminares acerca del crecimiento de $dim_k Hom_B(\tau_B^{-t}X, Y)$ cuando B es un álgebra hereditaria, mismos que se pueden encontrar en [5].

Distinguiremos los casos en que $B = kQ$ es un álgebra mansa de tipo de representación infinito (Q es un carcaj Euclidiano) y cuando B sea de tipo salvaje.

5.1.– **Proposición.-** Sea $B = kQ$ un álgebra conexa y de tipo de representación infinito y $Q_0 = \{1, 2, \ldots, d\}$. Sean X, Y B-módulos inescindibles. Suponga que X es postproyectivo y que Y es preinyectivo (resp. preinyectivo ó regular) si B es mansa (resp. si B es salvaje). Entonces:

$$dim_k Hom_B(\tau_B^{-t}X, Y) > [t/d^2] \quad para\ t \geq 3d$$

Demostración:

a) Consideremos primero el caso en que B es mansa (esto es, Q es de tipo Euclidiano).

Mostraremos que para cualesquiera 2 vértices i, $j \in Q_0$,

$$dim_k \tau_B^{-t} P_i(j) \geq 4(t/d^2) \quad para\ t \geq d \qquad (1)$$

Sean $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_s$ las componentes tubulares no homogeneas de Γ_B. Sean $X_1^{(i)}, \ldots, X_{n_i}^{(i)}$ los módulos en la boca del tubo $\mathcal{T}_i$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{s}(n_i - 1) = d - 2 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n_i} \dim X_j^{(i)} = z \; (1 \leq i \leq s)$$

donde z es un vector sincero que genera el espacio

$$\{v \in Q^n : \langle \dim X_j^{(i)}, v \rangle_B = 0, \; 0 \leq i \leq s, \; i \leq j \leq n_i\}$$

Sea m el mínimo común múltiplo de $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \dim X_j^{(i)}, \dim \tau_B^{-m} P_i \rangle_B &= \langle \dim \tau_B^{m} X_j^{(i)}, \dim P_i \rangle_B \\ &= \langle \dim X_j^{(i)}, \dim P_i \rangle_B \end{aligned}$$

entonces tenemos:

$$\langle \dim X_j^{(i)}, \dim \tau_B^{-m} P_i \rangle_B - \langle \dim X_j^{(i)}, \dim P_i \rangle_B = 0$$

Por lo que $\dim \tau_B^{-m} P_i = \dim P_i + az$, para algún $a \in \mathbf{Z}$.

Podemos entonces, para cualquier $t \in \mathrm{N}$, escribir $t = mc + e$ con $c \geq 0$ y $0 \leq e \leq m$, y obtenemos:

$$a \leq \dim \tau_B^{-t} P_i = (\dim P_i)\Phi_B^{-t} = \dim P_i + acz + \dim \tau_B^{-e} P_i \geq acz$$

Por lo que $a > 0$ y aunado esto a las siguientes cotas para m:

1) Q de tipo $\tilde{\mathbf{A}}_{d-1}$: $m \leq [1/2(d-1)^2] < 1/4d^2$
2) Q de tipo $\tilde{\mathbf{D}}_{d-1}$: $m \leq 2(d-3)$
3) Q de tipo $\tilde{\mathbf{E}}_6$: $m = 3$
4) Q de tipo $\tilde{\mathbf{E}}_7$: $m = 4$
5) Q de tipo $\tilde{\mathbf{D}}_8$: $m = 6$

Obtenemos finalmente $dim \tau_B^{-t} P_i(j) \geq [t/m] \geq 4[t/d^2]$

b) Consideremos ahora el caso en que Q es de la forma $a \underset{\vdots}{\rightrightarrows} b$ con $s \geq 3$ flechas.

En este caso, la matriz de Cartan y su inversa, tienen la siguiente forma:

$$C_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos que la inversa de la matriz de Coxeter asociada a B es:

$$\Phi_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -s \\ s & s^2-1 \end{pmatrix}$$

Si denotamos con $(a_0, b_0) = \mathbf{dim} P_b$ y de manera similar escribimos $(a_t, b_t) = \mathbf{dim}\tau_B^{-t} P_b$, obtenemos que:

$$\mathbf{dim}\tau^{-1} P_b = (a_0, b_0)\Phi_B^{-1} = (s, s^2-1)$$

con lo que tenemos que $b_1 > a_1$.

$$\mathbf{dim}\tau^{-2} P_b = (s, s^2-1)\Phi_B^{-1} = (s(s^2-2), (s^2-1)^2 - s^2)$$

y entonces $b_2 > a_2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{dim}\tau^{-3} P_b &= (s(s^2-2), (s^2-1)^2 - s^2)\Phi_B^{-1} = \\ &= (s(-2(s^2-1) + (s^2-1)^2), -s^2(s^2-2) + (s^2-1)^3 - (s^2-1)s^2) \end{aligned}$$

y de nuevo $b_3 > a_3$.

Veremos inductivamente que en general, $b_t \geq a_t$, $b_t \geq s^{t+1}$ y $a_t \geq (s-1)s^t$ para $t > 1$.

Comenzamos con $t = 2$: de acuerdo a los cálculos anteriores tenemos que $a_2 = s(s^2-2)$, $b_2 = (s^2-1)^2 - s^2$, donde podemos observar que se cumple que $a_2 \geq (s-1)s^2$ y también $b_2 \geq s^3$.

Supongamos que vale para $t = k$; $a_k \geq (s-1)s^k$, $b_k \geq s^{k+1}$.

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = (a_k, b_k)\Phi_B^{-1}$$

con lo que tenemos que:

$-a_k + sb_k = a_{k+1}$, y por hipótesis de inducción:

$sb_k - b_k \leq a_{k+1}$, de donde $a_{k+1} \geq (s-1)s^{k+1}$.

$-sa_k + (s^2-1)b_k = b_{k+1}$

$(s^2-1)b_k - sb_k \leq b_{k+1}$ y por hipótesis de inducción, $(s^2-1-s)(s^{k+1}) \leq b_{k+1}$, entonces

$b_{k+1} \geq (s^{k+1})(s(s-1)-1) = s^{k+2}(s-1) - s^{k-1}$ con lo que tenemos que $b_{k+1} \geq s^{k+2}$.

Análogamente, si $(c_0, d_0) = \mathbf{dim}P_a$, escribimos $(c_t, d_t) = \mathbf{dim}\tau_B^{-t}P_a$, obtenemos que $d_t \geq c_t$, $d_t \geq s^t$ y $c_t \geq (s-1)s^{t-1}$ para $t \geq 1$.

Como además $s^{t-2} \geq [t/2]$ para $t \geq 2$, obtenemos que

$$c_t \geq s(s-1)[t/2] \geq t = 4[t/d^2]$$

ya que $d = 2$, con lo que obtenemos que se cumple lo que deseamos.

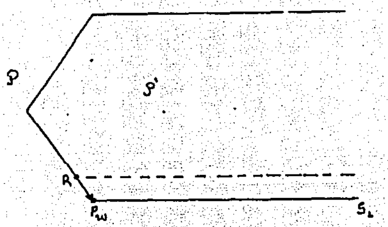
c) En el caso general, podemos asumir que $B = B'[R]$ es una extensión en un punto del álgebra hereditaria de tipo de representación infinito B'. Aplicando inducción sobre el número de vértices, obtenemos, por hipótesis que $dim_k\tau_{B'}^{-t}P_i(j) \geq 4[t/(d-1)^2]$ para cualesquiera 2 vértices del carcaj Q' en B y para $t \geq d-1$.

Sea w el vértice de extensión de B, es decir, $radP_w = R$. Consideremos la componente postproyectiva $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) de B (resp. B'), en esta situación $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) es una componente estandar de la forma $\mathbf{N}\mathbf{Q}^{op}$ (resp. $\mathbf{N}\mathbf{Q}'^{op}$).

Para cualquier conjunto S de vértices de $\mathcal{P}$, denotaremos mediante la misma Sa al ideal de la categoría de malla $k(\mathcal{P})$ generado por todos los caminos que se factorizan a través de algún vértice en S. $k(\mathcal{P})/S$ denota la categoría cociente correspondiente.

Sean i, j dos vértices cualesquiera en Q'_0.

Si denotamos por $S_1 = \{\tau_B^{-t} P_w : t \geq 0\}$, notemos que $k(\mathcal{P})/S_1 = k(\mathcal{P}')$



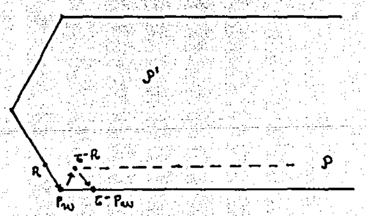
Por lo que:

$$dim_k \tau_B^{-t} P_i(j) = dim_k Hom_B(P_j, \tau_B^{-t} P_i) \geq dim_k Hom_{B'}(P_j, \tau_{B'}^{-t} P_i)$$

de donde:

$$dim_k \tau_B^{-t} P_i(j) \geq 4[t/(d-1)^2] \geq 4[t/d^2] \qquad \text{para } t \geq d, \quad i, j \in Q'_0$$

Sea ahora $S_2 = \{\tau_B^{-t} P_w : t \geq 1\}$. Entonces $(k(\mathcal{P})/S_2)(X, Y) = k(\mathcal{P}')(X, Y)$ para $X, Y \in \mathcal{P}'$, y $(k(\mathcal{P})/S_2)(P_w, Y) = k(\mathcal{P}')(\tau_{B'}^{-1} R, Y)$ para $Y \in \mathcal{P}'$.



<u>Sea i $\in Q'_0$</u>, entonces:

$$dim_k \tau_B^{-t} P_i(w) \geq dim_k Hom_{B'}(\tau_B^{-1} R, \tau_{B'}^{-t} P_i) = dim_k Hom_{B'}(R, \tau_{B'}^{-(t-1)} P_i)$$

$$\geq 4[t - 1/(d-1)^2] \ \geq \ 4[t/d^2] \qquad \text{para } t \geq d$$

De manera similar, para $\underline{i \in Q_0}$, obtenemos que

$$dim_k \tau_B^{-t} P_{w}(i) \geq 4[t/d^2]$$

Con esto, hemos probado lo que deseábamos.

Consideremos ahora, X un B-módulo postproyectivo y Y un B-módulo preinyectivo. Sea $t \geq d$ y supongamos que $\underline{X = \tau_B^{-m} P_i \text{ y } Y = \tau_B^{q} I_j}$. Entonces:

$$\begin{aligned} dim_k Hom_B(\tau_B^{-t} X, Y) &= dim_k Hom_B(\tau_B^{-(t+m)} P_i, \tau_B^{q} I_j) = \\ &= dim_k Hom_B(\tau_B^{-(t+m+q)} P_i, I_j) \ \geq \ 4[t + m + q/d^2] \\ &\geq 4[t/d^2] \end{aligned}$$

La última desigualdad se obtiene aplicando (1).

b) Consideremos ahora el caso en que B es salvaje.

Aquí utilizamos una propiedad de los B-módulos regulares:

Afirmación: Sea Y un B-módulo regular inescindible. Entonces existe un entero $1 \leq s \leq 2d$ y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow \tau_B^{-s} Y \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

de B-módulos, donde Y' (resp. C) es una suma directa de B-módulos regulares (resp. preinyectivos).

Con este hecho es inmediato probar lo que deseamos (para la demostración ver [5]):

Sea X un B-módulo postproyectivo y Y un B-módulo regular, por la afirmación anterior, podemos construir una sucesión

$$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow \tau_B^{s} Y \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

con las características dadas.

Sea $t \geq 3d$. Para $t' = t - s \geq d$, obtenemos una sucesión exacta:

$0 \to Hom_B(\tau_B^{-t'}X, Y') \to Hom_B(\tau_B^{-t'}X, \tau_B^s Y) \to Hom(\tau_B^{-t}X', C) \to$
$\to Ext_B(\tau^{-t'}X, Y') = 0$

Podemos entonces aplicar el resultado (2) y obtenemos

$$\begin{aligned} dim_k Hom_B(\tau_B^{-t'}X, Y) &= dim_k Hom_B(\tau_B^{-t+s}X, \tau_B^s Y) \\ &\geq 4[t - s/d^2] \geq 4[t/d^2 - 2] > t/d^2 \end{aligned}$$

Que completa la demostración de la proposición.

□

Ahora si, estamos en condiciones de probar el teorema siguiente:

5.2.– **Teorema.**- Sea $A = kQ/I$ un álgebra de dimensión finita, Q sin ciclos y $Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea S una componente conexa de una m-sección completa en una componente $\mathcal{C}$ de Γ_A. Suponga que S no es de tipo Dynkin. Entonces para todo $3n \leq t \leq m + 1$ y $X \in S$, tenemos que

$$t/n^2 \leq dim_k \tau_A^{-t} X$$

Demostración:

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $Q_0 = suppS$. Entonces, tenemos que A es un álgebra tilteada, ya que $\bigoplus_{X \in S} X$ es un módulo de tilteo.

Sea entonces $\underline{B = kQ}$ un álgebra hereditaria y ${}_BT$ un módulo de tilteo tal que $A = End_B(T)$.

Como vimos antes (en la sección 1), los funtores $\sum$ y $\sum'$ inducen equivalencias entre las subcategorías $\mathcal{G}(T)$ y $\mathcal{Y}(T)$ y $\mathcal{F}(T)$ y $\mathcal{X}(T)$ respectivamente. Podemos, además, elegir ${}_BT$ de tal forma que S esté formado por los módulos $\sum I_x$, $x \in Q_0$ y donde I_x es el inyectivo inescindible asociado al vértice x en Q.

También observamos que $\tau_A^{-1}\sum I_x = \sum' P_x$ y que $\tau_A^{-t}\sum I_x = \sum' \tau_B^{-t+1} P_x$ para $1 \leq t \leq m$ y P_x el proyectivo asociado al vértice x [7, 4.1 (7)].

Como S tiene sólo una cantidad finita de predecesores en Γ_A (pues S aparece de hecho, en la componente postproyectiva de Γ_A), hay al menos un sumando directo preinyectivo T_j de T. Entonces $N = \tau_B T_j \in \mathcal{F}(T)$ e $I_j = \sum' N$ es un A-módulo inyectivo inescindible.

Tomando $X = \sum I_j$ en S y $3n \leq t \leq m+1$, obtenemos, usando el resultado de la proposición anterior que $dim_k \tau_A^{-t} X \geq dim_k Hom_A(\tau_A^{-t} X, I_j) = dim_k Hom_B(\tau_B^{-t+1} P_x, N) > [t - 1/n^2]$
de donde se sigue el resultado.

□

De este teorema se deriva un corolario muy útil en la caracterización de las secciones ∞-completas.

5.3.– **Corolario.**- Sea S una componente conexa de una m-sección completa en una componente C de Γ_A y supongamos que S no es de tipo Dynkin. Sea M el máximo de todas las dimensiones $dim_k Y$, donde $Y = I_j$ ó Y es un sumando directo de $radP_j$ para algún $j \in Q_0$. Supongamos $m+1 \geq \mathrm{M}n^2$. Entonces S es una sección ∞-completa.

Demostración:

Sea $X \in S$, como S es una sección m-completa, $\tau_A^{-m} X$ no es inyectivo y por tanto $\tau_A^{(-m+1)} X$ está bien definido y $dim_k \tau_A^{(-m+1)} X \geq [m + 1/n^2] \geq \mathrm{M}$, con esto tenemos que $\tau_A^{-(m+1)} X$ no es isomorfo a I_j o a un sumando directo de $radP_j$ para algún $j \in Q_0$. Entonces S es una $(m+1)$-sección completa.

Como $[m + 2/n^2] \geq \mathrm{M}$, podemos continuar inductivamente y obtener que S es una sección ∞-completa.

□

6. Existencia de Componentes Postproyectivas en Γ_A

En la parte preliminar de este trabajo describimos lo que es una componente postroyectiva $\mathcal{P}$ en Γ_A, el carcaj de Auslander-Reiten asociado al álgebra A, así como algunos tipos de álgebras que las poseen.

Hasta ahora se tenían resultados parciales acerca de la existencia de componentes postroyectivas en un álgebra dada, recientemente se estableció un criterio general, que dá condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dichas componentes [4].

En esta parte, se desarrolla este resultado así como algunas aplicaciones del mismo.

La notación es la misma que hemos utilizado anteriormente en la sección 3.

El resultado principal es el siguiente:

6.1.– **Teorema.**- Sea $A = kQ/I$ un álgebra de dimensión finita tal que Q no tiene ciclos orientados. Entonces Γ_A tiene una componente postproyectiva si y sólo si para cada vértice $x \in Q_0$, una de las siguientes condiciones se satisface:

$(1x)$: Hay una componente postproyectiva $\mathcal{P}$ de Γ_{A^x} tal que $R_i^x \notin \mathcal{P}$, para todo $1 \leq i \leq n_x$;

$(2x)$: Para cada $1 \leq i \leq n_x$, el conjunto de predecesores $\{Y \in \Gamma_{A^x} : Y \preceq R_i^x\}$ de R_i^x en mod_{A^x} es finito y formado por módulos dirigidos. Además, si x es una fuente, entonces $rad\ P_x$ es dirigido en mod_{A^x}.

Antes de probarlo, veamos que la condición $(2x)$ por sí sola nos dá información acerca de la existencia de una componente postproyectiva:

6.2.– **Lema.**- Suponga que $\forall x \in Q_0$, la condición $(2x)$ se satisface, entonces Γ_A tiene una componente postproyectiva.

Demostración: Afirmamos que $\forall x \in Q_0$, se cumple la siguiente condición:

$(3x)$: Para cada $1 \leq i \leq n_x$, el conjunto de predecesores de R_i^x en mod_A $\{X \in \Gamma_A : X \preceq R_i^x\}$ es finito y formado por módulos dirigidos.

Efectivamente, sea X un predecesor de R_i^x en Γ_A y suponga que X no es un A^x-módulo, podemos asumir que x es minimal con esta propiedad en el orden de caminos de Q. Entonces, existe un vértice $y \preceq x$ en Q tal que $X(y) \neq 0$, por lo que en mod_A obtenemos

$$P_y \preceq X \preceq R_i^x \preceq P_x \preceq P_y$$

Como $(2y)$ se satisface, y no es una fuente (por 3.9), sea z un predecesor propio de y en Q, entonces P_y es un predecesor no dirigido de algún R_j^z, por $(2z)$, P_y no es un A^x-módulo contradiciendo la minimalidad de x.

Con lo anterior, estamos en posibilidad de repetir el argumento dado en [1, teorema 2.5] para probar la existencia de una componente postproyectiva:

Construimos inductivamente, subcarcajes plenos C_n de Γ_A que satisfagan:

i) C_n es finito, conexo, sin ciclos orientados y cerrado bajo predecesores.

ii) $\tau_A^{-1} C_n \cup C_n \subset C_{n+1}$.

Entonces $\bigcup_n C_n$ forma la componente postproyectiva deseada.

Sea $C_0 = \{S\}$ donde S es un A-módulo proyectivo simple. Asumamos que C_n está definido y sean $M_1, \cdots, M_s$ los módulos en C_n con $\tau_A^{-1} M_i \notin C_n$. Podemos suponer que $M_i \preceq M_j$ implica $i \leq j$

Si $s = 0$, hacemos $C_{n+1} = C_n$.

En otro caso, definimos subcarcajes plenos D_i de Γ_A $(0 \leq i \leq s)$ que satisfagan:

$$D_0 = C_n, \quad D_i \cup \tau_A^{-1} M_{i+1} \subset D_{i+1}$$

y la condición i) impuesta en D_i. Entonces, $C_{n+1} = D_s$ cumplirá las condiciones i) y ii).

Asumamos que D_i está bien definido. Tomamos la sucesión que casi se divide:

$$0 \to M_{i+1} \to X \to \tau_A^{-1} M_{i+1} \to 0$$

y definimos D_{i+1} como el subcarcaj de Γ_A con vértices en D_i y todos los predecesores de $\tau_A^{-1} M_{i+1}$. Basta probar que para cada sumando directo inescindible Y de X, el conjunto de predecesores $\{Z \in \Gamma_A : Z \preceq Y\}$ es finito y formado por módulos dirigidos.

Si Y no es proyectivo, tenemos la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
\tau_A Y \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & Y \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dotted] & & \\
0 \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau_A^{-1} M_{i+1} \arrow[r] & 0 \\
& & Y_n \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$\tau_A Y \in C_n$ pues es un predecesor de M_{i+1}, por lo tanto, $Y \in D_i$.

Si $Y = P_y$ es proyectivo, entonces $(3y)$ se satisface, entonces $rad\ P_y$ es dirigido y por tanto P_y es dirigido, que es lo que buscamos.

□

Demostración del teorema 6.1:

$\Rightarrow$) Sea $\mathcal{P}$ una componente postproyectiva de Γ_A. Sea $x \in Q_0$, si el módulo proyectivo P_x pertenece a $\mathcal{P}$, entonces $(2x)$ se satisface, (en caso de que x sea una fuente, aplicando 3.9, $radP_x$ es dirigido como A^x-módulo). Suponga que $P_x \notin \mathcal{P}$, mostraremos que $\mathcal{P}$ está formada por A^x-módulos.

Sea $X \in \mathcal{P}$ y suponga que $X(y) \neq 0$ para algún $y \preceq x$ en Q. Tenemos entonces, $P_x \preceq P_y \preceq X$ en mod_A, lo que implica que $P_x \in \mathcal{P}$ (contradicción).

En consecuencia, $\mathcal{P}$ es una componente postproyectiva en Γ_{A^x} y $R_i^x \notin \mathcal{P}$ para $1 \leq i \leq n_x$, esto es, $(1x)$ se satisface.

$\Leftarrow$) Inversamente, asuma que para cada $x \in Q_0$, una de las condiciones $(1x)$ ó $(2x)$ se satisface. Si para todo $x \in Q_0$ se satisface $(2x)$, entonces 6.2 implica el resultado.

Asuma ahora, que para algún $x \in Q_0$, $(2x)$ no se satisface. Escogemos x de tal forma que sea minimal en el orden de caminos en Q, (es decir, dentro del conjunto de vértices x para los cuales $(2x)$ no vale, escogemos la mínima). Por hipótesis $(1x)$ se satisface, esto es, hay una componente postproyectiva $\mathcal{P}$ de Γ_{A^x} tal que $R_i^x \notin \mathcal{P}$ para todo $1 \leq i \leq n_x$.

Mostraremos que $\mathcal{P}$ es una componente postproyectiva de Γ_A, para esto, basta ver que x es una fuente en Q, pues si $Hom(P_x, X) \neq 0$ para algún X en $\mathcal{P}$ se formaría un ciclo, ya que se cumple $(1x)$ y con esto, los sumandos de $radP_x$ quedan fuera de $\mathcal{P}$.

Asuma que $y \preceq x$ es una fuente en Q, y que $y \neq x$. La minimalidad de x implica que $(2y)$ se satisface, veremos que entonces $(2x)$ se satisface también lo cual es una contradicción. Sea X un predecesor de R_i^x en mod_A. Entonces $X \preceq R_i^x \preceq P_x \preceq P_y$, implica que X es un predecesor de R_j^y para algún $1 \leq j \leq n_y$. Además, como P_y es dirigido en mod_A, entonces X es un A^y-módulo. Entonces, $\{X \in \Gamma_A : X \preceq R_i^x\}$ es finito y formado por módulos dirigidos.

□

6.3.– **Corolario.**- Sea $A = kQ/I$ un álgebra de dimensión finita, Q sin ciclos orientados. Entonces todos los módulos proyectivos inescindibles pertenecen a una componente postproyectiva si y sólo si para todo $x \in Q_0$, la condición $(2x)$ se satisface.

□

El siguiente, es un resultado ya establecido anteriormente para la existencia de componentes postproyectivas, y en este caso resulta ser un corolario a nuestro teorema. Primeramente, definimos una condición que necesitamos.

Sea $A = kQ/I$ un álgebra de dimensión finita, Q sin ciclos orientados. Sea $x \in Q_0$ y consideremos las componentes conexas $Q_1^x, \ldots, Q_{s_x}^x$ del carcaj Q^x asociado al álgebra A^x. Decimos que el vértice x *está separado* si para cada $1 \leq j \leq s_x$, el carcaj Q_j^x contiene el soporte de *a lo más un* R_i^x $(1 \leq i \leq n_x)$. El álgebra A satisface la *condición de separación* si todo $x \in Q_0$ es separado.

6.4.– **Corolario.-** Si A es un álgebra que satisface la condición de separación, entonces Γ_A tiene una componente postproyectiva.

Demostración:

Sea $x \in Q_0$, podemos en general considerar $A^x = A_1^x \amalg A_2^x \amalg \cdots \amalg A_{n_x}^x$, donde A_j^x es la subálgebra convexa, plena de A con carcaj conexo Q_j^x.

Como A_j^x también satisface la condición de separación, podemos por inducción, suponer que A_j^x tiene una componente postproyectiva en $\Gamma_{A_j^x}$, llamemos $\mathcal{P}_j$ a dicha componente. Para cada $1 \leq i \leq n_x$ podemos asumir que R_i^x es un A_i^x-módulo.

Si $R_i^x \notin \mathcal{P}_i$ para alguna i, entonces $R_j^x \notin \mathcal{P}_i$ para todo $1 \leq j \leq n_x$ (pues Q_i^x contiene a lo más el soporte de uno de los R_i^x, y si no contiene a R_i^x que es un A_i^x-módulo, no contiene a los demás). En este caso $(1x)$ se cumple.

En otro caso, $R_i^x \in \mathcal{P}_i$ para todo $1 \leq i \leq n_x$, entonces $(2x)$ se satisface y por tanto Γ_A tiene una componente postproyectiva.

□

Con lo anterior, es inmediato la obtención del siguiente resultado:

6.5.– **Corolario.-** Sea $A = kQ/I$ un álgebra tal que Q es un árbol, entonces Γ_A tiene componente postproyectiva.

□

Sea $A = kQ/I$ un álgebra de dimensión finita, tal que Q no tiene ciclos orientados. Sea a una fuente en Q y considere el cociente $B = A/Ae_a$.

Para el B-módulo $M = rad\ P_a$ tenemos que $A = B[M]$. Sea $\mathcal{P}$ una componente postproyectiva de Γ_B y supongamos que todos los sumandos directos inescindibles de M están en $\mathcal{P}$. Bajo estas condiciones, ¿Cuándo P_a pertenece a una componente postproyectiva de Γ_A?.

Una primera observación sobre la existencia de componentes postproyectivas en Γ_A si $A = B[M]$ es la siguiente:

6.6.– **Lema.**- Supongamos que $A = B[M]$ tal que $M = radP_a$. Supongamos que $\mathcal{P}$ es una componente postproyectiva en Γ_B y que $(1a)$ se satisface para $\mathcal{P}$. Entonces $\mathcal{P}$ es componente postproyectiva de Γ_A.

Demostración: Ver demostración del teorema 6.1.

□

El siguiente teorema nos responde la pregunta formulada anteriormente, recordemos que en 2.3 definimos lo que es un morfismo M-finito.

6.7.– **Teorema.**- Sea $A = B[M]$ un álgebra, con $M = rad\ P_a$ para una fuente a en Q. Suponga que todos los sumandos directos inescindibles de M pertenecen a una componente postproyectiva $\mathcal{P}$ de Γ_B. Si P_a pertenece a una componente postproyectiva de Γ_A, entonces las siguientes condiciones valen:

i) M es dirigido

ii) $\forall h : X \to Y$ morfismo irreducible en $\mathcal{P}$ tal que Y es M-finito, entonces h es M-finito.

iii) Para todo módulo proyectivo inescindible $P_y \in \mathcal{P}$, el cual sea M-finito, el conjunto de predecesores de P_y en Γ_A es finito y formado por módulos dirigidos.

Inversamente, si i) y iii) valen, entonces P_a pertenece a una componente postproyectiva de Γ_A.

Demostración: (Para alguna duda en definiciones, consultar la sección 2).

i) Sea $\mathcal{P}'$ la componente postproyectiva de Γ_A tal que $P_a \in \mathcal{P}'$, entonces M es dirigido pues $M \preceq P_a$ en $\mathcal{P}'$.

ii) Sea $h : X \to Y$ un morfismo irreducible en $\mathcal{P}$ y supongamos que Y es M-finito. Afirmamos que $Y \in \mathcal{P}'$:

Efectivamente, consideremos una cadena de morfismos irreducibles:

$$M \overset{\alpha_1}{\text{---}} X_1 \overset{\alpha_2}{\text{---}} X_2 \text{---} \cdots \text{---} X_{s-1} \overset{\alpha_s}{\text{---}} X_s = Y \text{ con } \alpha_i\ M - finito\ \forall i$$

Por inducción podemos considerar $X_{s-1} \in \mathcal{P}'$. Si tenemos $X_s \xrightarrow{\alpha_s} X_{s-1}$ es inmediato que $X_s = Y \in \mathcal{P}'$; en caso contrario, es decir, si tenemos $X_{s-1} \xrightarrow{\alpha_s} X_s$ y supongamos que $X_s \notin \mathcal{P}'$, entonces $\alpha_s \in rad_A^{\infty}(X_{s-1}, X_s)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $X_s \in \mathcal{P}'$.

Con lo cual tenemos que $Y \in \mathcal{P}'$ y, al ser X un predecesor de Y, también $X \in \mathcal{P}'$. Como $\mathcal{P}'$ es postproyectiva $h \notin rad_A^{\infty}(X, Y)$.

iii) Sean $P_y \in \mathcal{P}$ y supongamos que P_y es M-finito. Entonces $P_y \in \mathcal{P}'$ y por tanto, P_y tiene una cantidad finita de predecesores, todos ellos dirigidos en Γ_A.

Inversamente, supongamos i) y iii). Construiremos de manera similar a la ya utilizada en el teorema anterior, la componente postproyectiva en la que vive P_a.

Esto es, se definen subcarcajes plenos C_n de Γ_A que satisfagan:

i) C_n es finito, conexo, no contiene ciclos orientados y es cerrado bajo predecesores.

ii) $\tau_A^{-1} C_n \cup C_n \subset C_{n+l}$.

Definimos $C_0 = \{S\}$ donde S es un módulo proyectivo simple en $\mathcal{P}$. Supongamos que tenemos C_n bien definidos y sean $X_1, \cdots, X_t$ los módulos en C_n tales que $\tau^{-1} X_i \notin C_n$, numerados de tal forma que si $i \leq j$ entonces $X_i \preceq X_j$.

Definimos $D_0 = C_n$ y D_{i+1} como el subcarcaj pleno de Γ_A que consiste de D_i y los predecesores de $\tau_A^{-1}X_{i+1}$ (por ejemplo: $D_1 = D_0 \cup \{Y : Y \preceq \tau_A^{-1}X_1\}$), hacemos esto para $1 \leq i \leq t$ y definimos $C_{n+1} = D_t$. Entonces, será suficiente con probar inductivamente que D_i satisface la condición *i)* anterior.

Consideremos la sucesión de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow X_{i+1} \longrightarrow X \longrightarrow \tau_A^{-1}X_{i+1} \longrightarrow 0$$

Supongamos que D_i satisface *i)*. Nos gustaría probar entonces que cada sumando directo inescindible Y de X tiene solamente un número finito de predecesores, todos dirigidos (i.e. D_{i+1} cumple *i)*).

Antes de probar lo anterior, mostraremos un resultado que nos facilita el trabajo.

Como los módulos que nos interesan son $A = B[M]$-módulos, utilizaremos la equivalencia que hay entre mod_A y la categoría de espacios vectoriales (ver 2.2).

Lo que estamos interesados en probar primeramente, es lo siguiente:

Sea $(V, N, \gamma : V \to Hom(M, N))$ un módulo inescindible en D_i, entonces cualquier sumando directo inescindible N' de N pertenece a $\mathcal{P}$ (recordemos que N, y por tanto N' son B-módulos) y es M-finito.

Por lo cual, haremos inducción sobre el orden de caminos en D_i. Nuestra base de inducción es el proyectivo simple S, pues $C_0 = \{S\} \subset D_i$ y cumple lo que deseamos al estar en $\mathcal{P}$.

Supongamos que para todo predecesor de los elementos de D_i se cumple, veremos que para todos los elementos de D_i también:

Primer caso:

Supongamos que $V = 0$ (entonces tenemos que $(0, N, 0)$ el módulo tomado es el trivial) y supongamos además que $N = P_y$ es proyectivo. Por hipótesis de inducción, cualquier sumando directo de $rad\ P_y$, al ser predecesor de P_y, pertenece a $\mathcal{P}$, esto es, $R_i^y \in \mathcal{P}$ y es M-finito, y con esto, $N = P_y$ pertenece a $\mathcal{P}$. Además, como la inclusión canónica $R_i^y \hookrightarrow N \notin rad^{\infty}(R_i^y, N)$, N es M-finito.

Segundo caso:

$V = 0$, N no proyectivo. Consideremos la sucesión de Auslander-Reiten $0 \longrightarrow \tau_B N \xrightarrow{\alpha} E \longrightarrow N \longrightarrow 0$ en mod_B y la correspondiente sucesión $0 \longrightarrow \overline{\tau_B N} \xrightarrow{\alpha} \overline{E} \longrightarrow N \longrightarrow 0$ en mod_A (vía la categoría de espacios vectoriales), donde $\overline{E} = (|\ \tau_B N\ |, E, |\ \sigma\ |)$. Como los sumandos directos inescindibles de $\overline{E}$ pertenecen a D_i (son predecesores de N), por hipótesis de inducción, tenemos que los sumandos directos de E pertencen a $\mathcal{P}$ y son M-finitos, por lo que $N \in \mathcal{P}$.

Además como $N \in D_i$, tiene un número finito de predecesores, por lo que cualquier morfismo irreducible $E_i \to N$ en $\mathcal{P}$ es M-finito.

Tercer caso:

$V \neq 0$. Sea N' sumando directo de N, entonces $Hom_B(M, N') \neq 0$.

Supongamos que $N' \notin \mathcal{P}$, entonces $rad^{\infty}(M, N') \neq 0$ y N' tendría una cantidad infinita de predecesores, lo cual nos indica que lo mismo ocurre con el módulo $(V, N, \gamma : V \to Hom(M, N))$ pues se tiene la siguiente inclusión $(0, N', 0) \hookrightarrow (V, N, \gamma)$ (contradicción). Con esto, tenemos que $N' \in \mathcal{P}$ y de la misma forma, N' es M-finito.

Ahora, volviendo a la prueba original, seguimos con la construcción de $\mathcal{P}'$: Sea Y un sumando directo inescindible de X. Si Y *no es proyectivo*, podemos "echarlo hacia atrás" mediante τ y tendríamos que sería un predecesor de $X_{i+1} \in D_i$, por tanto, $Y \in D_i$.

Supongamos que Y *es proyectivo*. Primero consideremos $Y = P_a$ (el proyectivo correspondiente al vértice de extensión), por el inciso i), tenemos que P_a es dirigido y por tanto los predecesores de P_a son predecesores de algún sumando directo M_i de $M = rad\ P_a$. Como todo $M_i \in \mathcal{P}$, $Y = P_a$ tiene solamente una cantidad finita de predecesores, todos dirigidos.

Finalmente consideremos $Y = P_y$ para algún $y \neq a$. Sea R_i^y un sumando directo de $rad\ P_y$ que pertenece a D_i. Por lo que probamos antes, $R_i^y \in \mathcal{P}$ y R_i^y es M-finito. Por tanto, P_y pertenece a $\mathcal{P}$ y también es M-finito. Por el inciso iii) $Y = P_y$ tiene sólo una cantidad finita de predecesores, todos dirigidos en Γ_A.

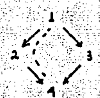
Por lo tanto $\mathcal{P}' = \bigcup_n C_n$ es una componente postproyectiva de Γ_A donde P_a vive.

□

Ahora, daremos algunos ejemplos donde se ilustran algunas aplicaciones de los resultados tratados hasta ahora.

1.- Sea $A = kQ/I$ el álgebra de caminos del siguiente carcaj:

Q :



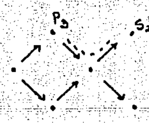
Aplicando el criterio, veremos que Γ_A no tiene componente postproyectiva.

Sea $x = 1$ (el vértice 1 del carcaj). Entonces $A^x = kQ^x$ donde Q^x es el siguiente carcaj:

$$2 \longrightarrow 4 \longleftarrow 3$$

x es una fuente en Q, $rad_A P_1 = S_2 \oplus P_3$

Γ_{A^x} :



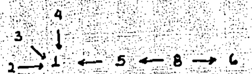
Podemos ver que no se cumple $(1x)$ pues Γ_{A^x} tiene una única componente postproyectiva, en la que aparecen los sumandos directos de $radP_1$.

Tampoco se cumple $(2x)$ pues, aunque el número de predecesores de los sumandos directos de $radP_1$ es finito, el $radP_1$ no es dirigido, pues tenemos que hay un camino de P_3 a S_2 que se factoriza a través de una sucesión de Auslander-Reiten (de hecho, es una sucesión de Auslander-Reiten).

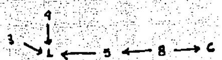
2.- Sea $A = kQ/I$, donde $Q =$ 

Este ejemplo es interesante, pues nos ilustra un caso en el que cualquier subgráfica plena de A tiene una componente postproyectiva, sin embargo A no tiene componente postproyectiva.

Sea $B = A/Ae_7 = kQ'$ donde Q' es el siguiente carcaj:



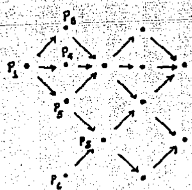
Veremos que B tiene componente postproyectiva aplicando el criterio. Sea $y = 2$, B^y resulta ser un álgebra hereditaria cuyo carcaj es un árbol:



y este tipo de álgebras siempre tienen componente postproyectiva (6.5)

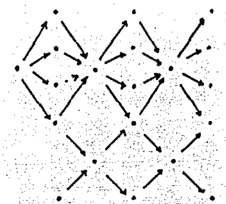
Como $B = B^y[radP_2] = B^y[P_1]$, veremos que se satisfacen $i)$ y $iii)$ del teorema 6.7 y con esto tendremos que Γ_B tiene componente postproyectiva:

i) es inmediato, pues P_1 pertenece a una componente postproyectiva de Γ_{B^y} como podemos ver en el siguiente diagrama:



Como podemos observar, todos los B^y-módulos proyectivos inescindibles son M-finitos ($M = P_1$), pues los morfismos P_1 a los demás proyectivos son inclusiones en el radical, y notemos que en Γ_B estos módulos tienen solamente un número finito de predecesores, todos ellos dirigidos.

Por tanto, B tiene componente postproyectiva. Veamos una parte de dicha componente en Γ_B:



De manera similar, podemos checar que cualquier otra subgráfica plena de A tiene una componente postproyectiva.

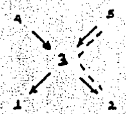
Veamos ahora, que como dijimos al principio, A no tiene componente postproyectiva.

Para esto es suficiente con observar que para el vértice 7, que es una fuente en Q, no se cumple ninguno de los 2 incisos del teorema 6.1, pues $radP_7 = M \oplus P_6$, y en el diagrama de Γ_B podemos ver que P_6 es un proyectivo simple que pertenece a la única componente postproyectiva de Γ_B, con lo que ($1x$) no se satisface.

Para ver que ($2x$) tampoco se satisface, veremos que $radP_7$ no es dirigido, esto es porque M es un A-módulo regular.

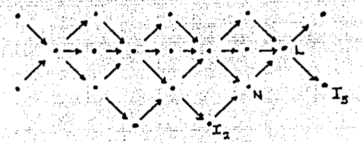
3.- En este ejemplo veremos un álgebra A que tiene componente postproyetiva, pero si hacemos $B = A[M]$, una extensión en un punto, obtenemos un álgebra que no tiene componente postproyectiva y si a su vez, hacemos $C = B[M']$ obtenemos un álgebra que tiene componente postproyectiva:

Sea $A = kQ/I$ con Q el siguiente carcaj:



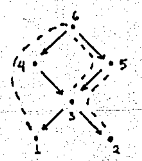
A es de tipo finito (de hecho es un árbol y todos los árboles dan origen a álgebras que poseen componente postproyectiva).

Γ_A :



Sea ahora $B = A[I_2 \oplus I_5]$

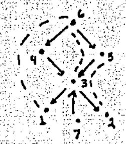
$B = kQ'/I'$ con Q' :



Observamos que el A-módulo $radP_6 = I_2 \oplus I_5$ no es dirigido ya que el camino $I_2 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow I_5$ se factoriza a través de una sucesión de Auslander-Reiten en Γ_A, por lo que $(2x)$ no se satisface si $x = 6$. También tenemos que los A-módulos I_2, I_5 pertenecen a una componente postproyectiva de Γ_A por lo que tampoco $(1x)$ se cumple.

Por lo tanto, no se cumple el criterio, con lo que tenemos que B no tiene componente postproyectiva.

Ahora extendamos a $C = B[M']$, con $M' = radP_7$, donde denotamos con el número 7 al nuevo vértice de extensión.

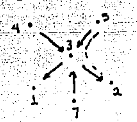
$C = kQ''/I''$ donde $Q'' =$ 

Para ver que C tiene componente postproyectiva, notemos que si omitimos el vértice 6 de Q'' (es decir, si hacemos C/Ce_6), obtenemos un álgebra cuyo carcaj es un árbol, y por tanto, posee una componente postproyectiva $\mathcal{P}_0$.

Entonces, para ver que Γ_C tiene una componente postproyectiva, es suficiente con mostrar que para el vértice $x = 6$, $(1x)$ se satisface (ver 6.6).

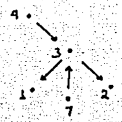
Para esto, veremos que los sumandos directos de $radP_6$ están fuera de la componente postproyectiva $\mathcal{P}_0$.

Tenemos que C/Ce_6 es el álgebra asociada al carcaj:



$radP_6 = M \oplus I_5$, notemos que I_5 es un módulo inyectivo sobre esta álgebra, que al ser de tipo de representación infinito, posee una infinidad de módulos X, tales que $X(5) = Hom(X, I_5) \neq 0$, por lo que I_5 tiene una cantidad infinita de predecesores, con lo que no puede pertenecer a $\mathcal{P}_0$.

Fijémonos ahora en el carcaj



notamos que es un árbol y como tal, el álgebra asociada a el tiene una componente postproyectiva, además de que M lo podemos considerar como un módulo sobre esta álgebra y también notemos que:

$$\mathbf{dim}M = \mathbf{dim}I_2 - \mathbf{dim}I_7$$

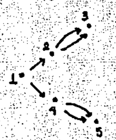
de donde tenemos que $\langle z_0, \mathbf{dim}M\rangle = 1 - 1 = 0$, por lo que M es regular.

Por lo anterior, M no es dirigido y así $M \notin \mathcal{P}_0$.

Por lo tanto, $\mathcal{P}_0$ es una componente postproyectiva de C.

4.- En este ejemplo vemos un caso en el que aparece más de una componente postproyectiva dentro del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra.

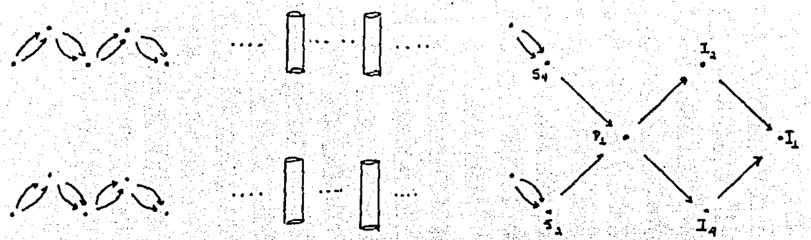
Sea $A = kQ/I$, donde Q es el siguiente carcaj:



y donde I es el ideal generado por los caminos de longitud 2.

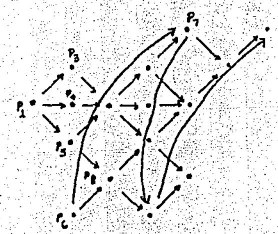
Aquí, si aplicamos el criterio para el vértice 1, obtenemos dos subgráficas que poseen componente postproyectiva cada una, donde para el vértice elegido $x = 1$ se cumple $(1x)$.

Podemos esquematizar Γ_A:



Observación: Sea B un álgebra con componente postproyectiva $\mathcal{P}$. Sea $A = B[M]$ con $M = radP_x$ de forma que $(2x)$ se satisface. En general, **no se puede concluir que Γ_A tenga componente postproyectiva.**

En el ejemplo 2, consideremos $C = A/Ae_2$ que tiene una componente postproyectiva $\mathcal{P}$ como sigue:



Observemos que $radP_2 = P_1$ es inescindible y pertenece a esta componente y por tanto se satisface $(2x)$ para $x = 2$. Sin embargo, Γ_A no tiene componente postproyectiva.

7. Construcción de las Componentes Postproyectivas en Γ_A

En la sección anterior, obtuvimos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de componentes postproyectivas en el carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra dada.

Ahora, se establecen condiciones para que un A-módulo X $(A = kQ/I)$ pertenezca a una componente postproyectiva dada. Esto se hace a través de 2 funcionales que se definen de manera explícita, par lo cual necesitamos algunos resultados previos que se tomaron de [5]

Sea $A = kQ/I$ un álgebra de dimensión finita y $\mathcal{P}$ una componente postproyectiva *infinita* de Γ_A.

Consideremos una sección S en $\mathcal{P}$, tal que sea una ∞-sección completa y por tanto maximal. Sean $S_1, \cdots, S_r$ las componentes conexas de S. Sea B la subcategoría plena de A definida por los vértices de $suppS$.

7.1.– **Lema.-** El álgebra $B = \coprod_{i=1}^{r} B_i$ es el coproducto de álgebras tilteadas $B_1, \cdots, B_r$ tales que para $1 \leq i \leq r$, S_i es una rebanada en una componente postproyectiva $\mathcal{P}_i$ de Γ_{B_i}. Además $B = kQ_i/J_i$ para subcarcajes Q_i de Q, cerrados bajo caminos $1 \leq i \leq r$.

Demostración: Para cada $i, 1 \leq i \leq r$ sea

$$s(i) = suppS_i = \bigcup_{X \in S_i} suppX.$$

Observemos que

$$B_i = End_A(\bigoplus_{j \in s(i)} P_j)^{op}$$

es un álgebra tilteada que tiene a S_i como una rebanada en una componente postproyectiva. De la misma manera, el álgebra

$$B_{ij} = End_A(\bigoplus_{t \in s(i) \cup s(j)} P_t)^{op}$$

es también un álgebra tilteada donde $S_i \coprod S_j$ es una rebanada $1 \leq i, j \leq r$ y $i \neq j$. Sea $H = kQ$ un álgebra hereditaria con un módulo de tilteo ${}_H T$, tal que $B_{ij} = End_A(T)$, entonces, $Q^{op} = S_i \coprod S_j$ y $H = H_1 \coprod H_2$ donde $H_i = kQ_i$ es un álgebra hereditaria conexa tal que $Q_i^{op} = S_i$, $i = 1, 2$.

Por lo anterior, tenemos que $B_{ij} = B_i \coprod B_j$ y $B = \coprod_{i=1}^r B_i$.

Que los Q_i son subcarcajes convexos se sigue de que $Q_i^{op} = S_i$ y S_i es una sección (ver 4.2 y 4.3).

□

Sean $T_1^{(i)}, \cdots, T_{m_i}^{(i)}$ los vértices de S_i y

$$T^{(i)} = \bigoplus_{j=1}^{m_i} T_j^{(i)}.$$

Entonces $H_i = End_A(T^{(i)})$ es un álgebra hereditaria, conexa y de tipo de representación infinito; escribimos $H_i = kQ_i$ donde $Q_i = S_i^{op}$ es un carcaj que no es Dynkin. Consideremos la isometría:

$$\sigma_i : K_0(B_i) \longrightarrow K_0(H_i)$$

$$\mathbf{dim}X \longmapsto (dim_k Hom_{B_i}(T_j^{(i)}, X) - dim_k Ext^1_{B_i}(T_j^{(i)}, X))_j$$

Además, si $\rho_i \geq 1$ es el radio espectral de la matriz de Coxeter Φ_{B_i}, tenemos que existe un vector y_i^- con coordenadas positivas (pueden incluso, no ser racionales), tal que $y_i^- \Phi_{B_i} = \rho_i^{-1} y_i^-$ [12].

El siguiente resultado es una variación del presentado en [12] que dice: (sólo transcribimos el inciso a))

Sea B un álgebra salvaje, sea X un B-módulo inescindible, entonces:

a) X es postproyectivo si y sólo si $\langle y^-, \mathbf{dim}X \rangle < 0$. Además, si X no es postproyectivo, entonces $\langle y^-, \mathbf{dim}X \rangle > 0$.

7.2.- **Lema** .- Sea X un B_i-módulo inescindible. Entonces X pertenece a $\mathcal{P}_i$ si y sólo si $\langle y_i^-, \sigma_i \mathbf{dim}X \rangle_{H_i} < 0$.

Demostración: Como sabemos, el módulo de tilteo $\mathcal{T}^{(i)}$ define una teoría de torsión $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ en mod_{B_i}. Observemos que los módulos libres de torsión (i.e. en $\mathcal{F}$) pertenecen a la componente postproyectiva $\mathcal{P}_i$ de Γ_{B_i}. Además, los módulos de la forma $Hom_{B_i}(\mathcal{T}^{(i)},X)$ con $X \in \mathcal{G}\cap\mathcal{P}_i$ son los vértices de la componente postproyectiva $\mathcal{C}_i$ de Γ_{H_i}.

$\Rightarrow$) Si $X \in \mathcal{P}_i$, distinguiremos 2 posibilidades:

-) <u>$Si\ X \in \mathcal{G}$</u> :

$$\sigma_i(\mathbf{dim}X) = \mathbf{dim}Hom_{B_i}(\mathcal{T}^{(i)},X)$$

y $Hom_{B_i}(\mathcal{T}^{(i)},X) \in \mathcal{C}_i$ (i.e. es postproyectivo), lo que, aplicando el resultado que enunciamos antes del lema, implica que $\langle y_i^-,\sigma_i(\mathbf{dim}X)\rangle_{H_i} < 0$

-) <u>$Si\ X \in \mathcal{F}$</u> :

$$\sigma_i(\mathbf{dim}X) = -\mathbf{dim}Ext^1_{B_i}(\mathcal{T}^{(i)},X)$$

y $Ext^1_{B_i}(\mathcal{T}^{(i)},X) \notin \mathcal{C}_i$ y en este caso,

$$\langle y_i^-,\sigma_i(\mathbf{dim}X)\rangle_{H_i} = -\langle y_i^-,\mathbf{dim}Ext^1_{B_i}(\mathcal{T}^{(i)},X)\rangle_{H_i} < 0.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\langle y_i^-,\sigma_i(\mathbf{dim}X)\rangle_{H_i} < 0$

-) Si $X \in \mathcal{F}$, es inmediato que $X \in \mathcal{P}_i$ (por a)).

-) Si $X \in \mathcal{G}$, $Hom_{B_i}(\mathcal{T}^{(i)},X) \in \mathcal{C}_i$ aplicando el mismo resultado que en la demostración de "ida", por lo tanto, $X \in \mathcal{P}_i$.

□

Con esto estamos en condición de enunciar y probar la existencia de las funcionales que mencionamos al principio y que nos responden la pregunta acerca de cuándo pertenece un módulo a una componente postproyectiva dada.

7.3.– **Proposición.-** Hay funcionales $f,g : K_0(A) \longrightarrow \mathbf{R}$ tales que un módulo inescindible X pertenece a $\mathcal{P}$ si y sólo si una de las siguientes condiciones valen:

i) $f(\mathbf{dim}X) > 0$

ii) $f(\mathbf{dim}X) = 0$ y $g(\mathbf{dim}X) < 0$.

Demostración:

Primero, daremos la definición explícita de f y g. Sea J la suma directa de todos los módulos inyectivos $I_i \in \mathcal{P}$, entonces

$$f : K_0(A) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

$$\mathbf{dim}X \longmapsto \langle \mathbf{dim}X, \mathbf{dim}J\rangle_A$$

Ahora, considerando $B_1, \cdots, B_r$ como en un principio y $\varepsilon_i : K_0(B_i) \to K_0(A)$ la inclusión canónica $i = 1, 2, \cdots, r$, definimos

$$g : K_0(A) \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\mathbf{dim}X \longmapsto \sum_{i=1}^{r} \langle \varepsilon_i \sigma_i^{-1}(y_i^-), \mathbf{dim}X\rangle_A$$

Veamos que, efectivamente, f y g cumplen lo que deseamos:

$\Rightarrow$) Supongamos que X es un módulo inescindible en $\mathcal{P}$. Si $X(j) \neq 0$ para algún $I_j \in \mathcal{P}$, entonces

$$f(\mathbf{dim}X) = \sum_{I_i \in \mathcal{P}} dim_k Hom_A(X, I_i) \geq dim_k Hom_A(X, I_j) > 0$$

En otro caso, $f(\mathbf{dim}X) = 0$ y X es un B-módulo. Podemos suponer que X es un B_i–módulo, entonces X está en la componente postproyectiva $\mathcal{P}_i$ de Γ_{B_i}, por lo que tenemos que $\langle \sigma_i^{-1}(y_i^-), \mathbf{dim}X\rangle_{B_i} < 0$ (aplicando el lema 7.2), pero notemos que, por la manera de definir B_i y por 7.2,

$$\langle \sigma_i^{-1}(y_i^-), \mathbf{dim}X\rangle_{B_i} = \langle \varepsilon_i \sigma_i^{-1}(y_i^-), \mathbf{dim}X\rangle_A \text{ y } \forall j \neq i \ \langle \sigma_j^{-1}(y_j^-), \mathbf{dim}X\rangle_{B_j} = 0$$

entonces $g(\mathbf{dim}X) < 0$.

$\Leftarrow$) Si $f(\dim X) > 0$, X es un predecesor de algún $I_j \in \mathcal{P}$ y por tanto $X \in \mathcal{P}$.

Si $f(\dim X) = 0$ y $g(\dim X) < 0$, entonces X es un B-módulo y podemos aplicar el lema 7.2.

$\square$

Sea $A = kQ/I$ un álgebra de dimensión finita y $Q_0 = \{1, 2, \cdots, n\}$ el conjunto de vértices de Q.

El siguiente desarrollo, es un proceso inductivo para construir una componente postproyectiva, comenzando por respondernos si un A-módulo proyectivo simple P_x (esto es, x es un pozo en Q), pertenece o no, a alguna componente postproyectiva.

De hecho, empezamos con $\mathbf{P}_0 = \{\dim P_x\}$ y a partir de el, definimos inductivamente un procedimiento para construir un nuevo conjunto $\mathbf{P}_{s+1} \subset K_0(A)$ a partir de $\mathbf{P}_s \subset K_0(A)$. El procedimiento puede fallar, lo que significará que $\mathbf{P}_{s+1}$ no está definido, en este caso, el procedimiento para e indica que P_x no pertenece a una componente postproyectiva. En otro caso, el proceso continua. Para explicar el desarrollo de este proceso, necesitamos fijar alguna notación que no hemos utilizado hasta ahora:

Consideremos $A = kQ/I$ como al principio. Para cada vértice $i \in Q_0$, sea

$$radP_i = \bigoplus_{j=1}^{t_i} R_j^{(i)}$$

Sea $\sim$ la relación de equivalencia mínima sobre $\{1, 2, \cdots, t_i\}$ tal que $j \sim j'$ si

$$suc(suppR_j^{(i)}) \cap suc(suppR_{j'}^{(i)}) \neq \emptyset$$

donde $suc(L)$ denota al conjunto de vértices $x \in Q_0$ tal que existe un camino orientado de algún $l \in L$ a x.

Supongamos que $1, 2, \cdots, s_i$ $(\leq t_i)$ son representantes de las clases de equivalencia $\{1, 2, \cdots, t_i\}/\sim$.

Fijamos $\mathbf{M} := \max\{dim_k I_i, dim_k R_j^{(i)} : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq t_i\}$

Ahora si, desarrollemos más precisamente el proceso para construir los $\mathbf{P}_s$:

Comenzamos con $\mathbf{P}_0 = \{\mathbf{dim} P_x\}$, $x \in Q_0$ un pozo.

Asumamos que $\mathbf{P}_s \subset K_0(A)$ es un conjunto finito, bien definido que satisface:

a) para cada $y \in \mathbf{P}_s$ hay un *único* inescindible $\hat{y}$ con $\mathbf{dim}\hat{y} = y$;
b) el conjunto $\{\hat{y} : y \in \mathbf{P}_s\}$ es cerrado bajo predecesores en Γ_A y $\mathbf{P}_{s-1} \subset \mathbf{P}_s$;
c) cada módulo $\hat{y}$ (para $y \in \mathbf{P}_s$) es dirigido.

Bajo estas condiciones, sea $\mathbf{S}^{(s)}$ el subcarcaj pleno de Γ_A formado por aquellos $\hat{y}$ con $y \in \mathbf{P}_s$ tal que $\hat{y}$ no es inyectivo y $\mathbf{dim}\tau_A^{-1}\hat{y} \notin \mathbf{P}_s$. Observamos que $\mathbf{S}^{(s)}$ es una sección.

Consideramos ahora, el subcarcaj pleno de Γ_A,

$$\mathbf{S}_1^{(s)} = \{\tau_A^{-1}\hat{y} :\ \hat{y} \in \mathbf{S}^{(s)}\}$$

Pueden ocurrir varios casos:

1) Si *ninguno* de los módulos $Y \in \mathbf{S}_1^{(s)}$ tiene $\mathbf{dim}Y = \mathbf{dim}X$ para X un sumando directo de $radP_i$, $i \in Q_0$, en este caso, definimos

$$\mathbf{P}_{s+1} = \mathbf{P}_s \cup \{\mathbf{dim}Y :\ Y \in \mathbf{S}_1^{(s)}\}.$$

2) Supongamos que $Y \in \mathbf{S}_1^{(s)}$ tiene $\mathbf{dim}Y = \mathbf{dim}R_j^{(i)}$ para algún $i \in Q_0$, $1 \leq j \leq t_i$.

En este caso, consideremos el álgebra A^i como ya la hemos definido al principio de la sección 3. Todos los $R_l^{(i)}$ son A^i-módulos. Sea $\mathbf{S}^{(i)}$ el siguiente conjunto:

$$\mathbf{S}^{(i)} = \{y \in \bigcup_{l=1}^{s_i} suc(suppR_l^{(i)}) :\ P_y \text{ es proyectivo simple}\}$$

$y \in \mathbf{S}^{(i)}$ quiere decir que y es un pozo del carcaj Q^i correspondiente al álgebra A^i. Como Q^i tiene menos de n vértices (a lo más tiene $n-1$), nuestro algoritmo puede decidir cuándo, ó cuándo no, P_x con $x \in \mathbf{S}^{(i)}$ vive en una componente postproyectiva de Γ_{A^i}; aquí podemos encontrar las siguientes situaciones:

2.i) Hay un P_y, $y \in \mathbf{S}^{(s)}$ que no vive en una componente postproyectiva de Γ_{A^i}. Entonces decimos que el procedimiento *falla* y $\mathbf{P}_{s+1}$ no está definido.

En otro caso, todo P_y, $y \in \mathbf{S}^{(i)}$ está en una de las componentes postproyectivas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_s$ de Γ_{A^i}. Usando en este caso las funcionales f y g definidas al inicio, podemos decidir cuándo $R_l^{(i)}$, $1 \leq i \leq t_i$ está en alguna $\mathcal{C}_t$.

2.ii) Existe algún $R_l^{(i)}$ que no vive en $\bigcup_{l=1}^{s} \mathcal{C}_t$, entonces el procedimiento *falla*.

En otro caso, todos los $R_l^{(i)}$, $1 \leq i \leq t_i$, viven en $\bigcup_{l=1}^{s} \mathcal{C}_t$. Entonces:

2.iii) Si

$$\bigoplus_{l=1}^{t_i} R_l^{(i)} = radP_i$$

no está dirigido, el procedimiento *falla*.

2.iv) Supongamos que $radP_i$ está dirigido en mod_{A^i}, entonces podemos construir un conjunto $\mathbf{P}_{s+1}^{(i)} \subset K_0(A^i)$ que satisfaga **a), b), c)** anteriores y tal que $\mathbf{dim}R_l^{(i)} \in \mathbf{P}_{s+1}^{(i)}$ $1 \leq l \leq t_i$. Sea

$$R^{(s)} = \{i \in Q_0 : \exists Y \in \mathbf{S}_1^{(s)} \text{ con } \mathbf{dim}Y = \mathbf{dim}R_j^{(i)} \text{ para algun } j\}$$

y suponga que tenemos construidos los $\mathbf{P}_{s+1}^{(i)}$ $\forall\, i \in R^{(s)}$, entonces:

$$\mathbf{P}_{s+1} = \mathbf{P}_s \cup \Big(\bigcup_{i \in R^{(s)}} \mathbf{P}_{s+1}^{(i)}\Big) \cup \{\mathbf{dim}P_i \;:\; i \in R^{(s)}\}$$

Si $\mathbf{P}_{s+1}$ está definido decimos que el procedimiento es exitoso en el paso s.

Y si esto pasa, es fácil ver, teniendo en cuenta la definición de A' y de módulo dirigido, que $\mathbf{P}_{s+1}$ (por la manera de construirlo) cumple con **a)**, **b)**, **c)** como se requiere.

El siguiente teorema es importante ya que establece cotas en el número de pasos a realizar para saber si el algoritmo tiene éxito ó bien, va a fallar, y en caso de ser exitoso, establece una descripción de los $\mathbf{P}_s$. Esto es muy bueno en el caso en que tengamos un álgebra con una componente postproyectiva infinita, pues con un número *finito* de pasos tendremos una descripción de la misma [5].

7.4.– **Teorema.-** El módulo proyectivo simple P_x pertenece a una componente postproyectiva de Γ_A si y sólo si el procedimiento es exitoso para todo $s \geq 0$. Además:

a) Si el procedimiento falla, entonces $\mathbf{P}_s$ no está definido para algún s con $s < s_0 := 2n \cdot max\{Mn^2, 16\}$

b) Si el procedimiento ha sido exitoso para todo $s \leq s_0$, entonces para cualquier $s \geq s_0$, tenemos

$$\mathbf{P}_s = \mathbf{P}_{s_0} \cup \{\mathbf{dim}\tau_A^{-l} X : X \in \mathbf{S}^{(s_0)}, 0 \leq l \leq s - s_0\}$$

donde $\mathbf{S}^{(s_0)}$ es la sección definida en el proceso.

Demostración:

$\Rightarrow$) Si P_x pertenece a una componente postproyectiva $\mathcal{P}$, entonces claramente $\mathbf{P}_s \subset \{\mathbf{dim}X : X \in \mathcal{P}\}$ está bien definido para todo $s \geq 0$.

$\Leftarrow$) Si todo $\mathbf{P}_s$ está bien definido, entonces el conjunto de módulos

$$\mathbf{P} = \{\hat{y} : y \in \cup_{s \geq 0} \mathbf{P}_s\}$$

forma una componente conexa de Γ_A, esta componente es dirigida y cada módulo tiene únicamente una cantidad finita de predecesores, por lo que es postproyectiva.

Antes de probar los incisos restantes, veamos una afirmación que nos facilita su demostración.

Supongamos que $\mathbf{P}_s$ está definida y consideremos la sección $\mathbf{S}^{(s)}$, esto es,

$$\mathbf{S}^{(s)} = \{\hat{y}/ \ y \in \mathbf{P}_s \text{ y tal que } \hat{y} \text{ no es inyectivo, } \dim \tau_A^{-1}\hat{y} \notin \mathbf{P}_s\}$$

Afirmación:

$$\text{Si } \mathbf{P}_{s+t} = \mathbf{P}_s \cup \{\dim \tau_A^{-l}X/ \ X \in \mathbf{S}^{(s)}, \ 0 \leq l \leq t\}$$

para $0 \leq t \leq \max\{Mn^2, 16\}$, entonces

$$\mathbf{P}_{s+t} = \mathbf{P}_s \cup \{\dim \tau_A^{-l}X/ \ X \in \mathbf{S}^{(s)}, \ 0 \leq l \leq t\}$$

$\forall \ t \geq 0$ y P_x pertenece a una componente postproyectiva.

Efectivamente, bajo esta hipótesis, la sección $\mathbf{S}^{(s)}$ es una m-sección completa (ver 5.3), con $m = \max\{Mn^2, 16\}$.

Sean $S_1, S_2, \cdots, S_t$ las componentes conexas de $\mathbf{S}^{(s)}$. Ninguna de estas S_i es de tipo Dynkin, pues en caso contrario, el subcarcaj pleno determinado por $\{\tau_A^{-l}X/ \ X \in S_i, \ 0 \leq l \leq m\}$ está contenido en $\mathbf{N}S_i$ (el carcaj trasladado, con vértices (x, r) para $x \in S_i$, $r \in \mathbf{N}$, flechas $(x,r) \to (y,r) \to (x, r+1)$ para cada flecha $x \to y$ en S_i y traslación $\tau(x,r) = (x, r-1)$.

Sean $X_1, X_2 \in S_i$ y $Y = \tau_A^{-l}X_2$, $0 \leq l \leq m$, tenemos entonces:

$$dim_k Hom_A(X_1, Y) = dim_k Hom_A(X_1, \tau_A^{-l}X_2)$$

pero sabemos que es cero si

$$l = \begin{cases} n-1 & si \ S_i = \mathbf{A}_n \ o \ \mathbf{D}_n \\ 15 & si \ S_i = \mathbf{E}_6, \ \mathbf{E}_7, \ \mathbf{E}_8 \end{cases}$$

por lo que para cualquier $X \in S_i$, $\tau_A^{-l}X$ es inyectivo para algún $l < m$. Entonces S_i no es de tipo Dynkin.

Lo anterior, aunado a que $m+1 > Mn^2$ implica (por 5.3) que S_i es una ∞-sección completa y con esto,

$$\mathbf{P}_{s+t} = \mathbf{P}_s \cup \{\dim \tau_A^{-l}X/ \ X \in \mathbf{S}^{(s)}, \ 0 \leq l \leq t\} \ \forall \ t \geq 0.$$

Entonces el conjunto de módulos $\{\hat{y}/\ y \in \bigcup_{t\geq 0} \mathbf{P}_t\}$ forma una componente postproyectiva de Γ_A. Esto prueba la afirmación.

Ahora, para mostrar el inciso a), supongamos que $\mathbf{P}_s$ está definida para $0 \leq s \leq b$ y que no existe a, $0 \leq a \leq b$ tal que

$$\mathbf{P}_{a+t} = \mathbf{P}_a \cup \{\mathbf{dim}\tau_A^{-l}X/\ X \in S^{(a)},\ 0 \leq l \leq t\}$$

para $0 \leq t \leq \max\{Mn^2, 16\}$. Esto es, el procedimiento falla de acuerdo a la afirmación.

Esto significa que existen números $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_r < a_{r+1} = b$ tal que $a_{i+1} - a_i < \max\{Mn^2, 16\}$ y $\mathbf{S}^{(a_i)}$ y $\mathbf{S}^{(a_{i+1})}$ no son isomorfas $i = 0, 1, \cdots, r$.

Podemos asumir que $\mathbf{S}^{(a_{i+1})}$ *coincide con* $\mathbf{S}^{(a_i+1)}$ $o \leq i \leq r$. Entonces existe un módulo $Y \in \mathbf{S}^{(a_i)}$ tal que es *inyectivo*, o bien, es un *sumando directo del radical de un módulo proyectivo*, es decir, ó $I_j \in \mathbf{S}^{(a_i)}$ ó $P_j \in \mathbf{S}^{(a_i+1)}$ para algún $j \in Q_0$. (esto quiere decir que, o bien $\mathbf{S}^{(a_i)}$ se "cierra" si Y es inyectivo ó bien, se "abre" si $Y = R_l^{(j)}$).

Pero como esto sólo puede ocurrir $2n$ veces (n es el número de vértices de Q), obtenemos que $r \leq 2n$.

Por lo tanto, $b < 2n \cdot \max\{Mn^2, 16\}$. Esto demuestra el inciso a).

El inciso b) es inmediato de la afirmación y el inciso a).

□

8. Existencia de Componentes Postproyectivas para Algebras Tilteadas

Aquí se presenta una nueva demostración de la existencia de componentes postproyectivas para álgebras tilteadas, la cual utiliza el criterio que hemos desarrollado en secciones anteriores. La demostración original se puede encontrar en [11].

Sea $A = kQ/I$ un álgebra tilteada, Q un carcaj sin ciclos orientados. Definimos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A) = \{X \in ind_A : \forall Y \preceq X,\ pdim_A Y \leq 1\}$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(A) = \{Y \in ind_A : \forall Z \preceq Y,\ idim_A Z \leq 1\}$$

8.1.– **Proposición.-** Si A es un álgebra tilteada, entonces $\mathcal{R} \vee \mathcal{L} = ind_A$.

Demostración:

$A = End_H(T)$, donde T es un H-módulo de tilteo, H un álgebra hereditaria. T define un par de torsión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ en mod_A y $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ en mod_H.

Por [10, 4.2] tenemos que $ind_A = \mathcal{X}(T) \vee \mathcal{Y}(T)$, además tenemos que $\mathcal{Y}(T)$ es cerrado bajo predecesores y $\mathcal{X}(T)$ es cerrado bajo sucesores.

Sea $X \in \mathcal{Y}(T)$ y $Y \preceq X$ entonces $Y \in \mathcal{Y}(T)$, de donde tenemos que $Y = Hom(T, M) = \sum M$, con $M \in \mathcal{G}(T)$ (por la equivalencia dada en la sección 1).

Con lo anterior, tenemos que $pdim_A Y = pdim_A \sum M \leq pdim_H M \leq 1$ [10, 4.1.(6)].

Por lo tanto, $X \in \mathcal{L}$.

(Análogamente, obtenemos que si $Y \in \mathcal{X}(T)$ entonces $Y \in \mathcal{R}$).

□

8.2.– **Proposición.-** Si A es un álgebra tilteada, entonces $P_x \in \mathcal{L}$, $\forall\, x \in Q_0$. Dualmente, $I_x \in \mathcal{R}$, $\forall\, x \in Q_0$.

Demostración:

Manteniendo la notación de la demostración de 8.1, tenemos

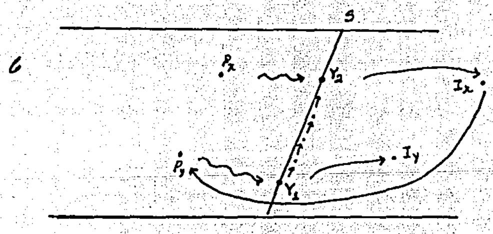
$T = \bigoplus T_x$, donde $T_x \in \mathcal{G}(T)$, entonces, como $P_x = \sum T_x$, tenemos que $P_x \in \mathcal{L}$. La otra afirmación es dual.

□

8.3.– **Proposición.-** Sea A un álgebra tilteada, entonces todo camino que empieza en un módulo inescindible inyectivo I_x y termina en un proyectivo inescindible P_y, tiene "un refinamiento" a un camino seccional formado por morfismos irreducibles $I_x \to X_1 \to \cdots \to P_y$.

Demostración:

Sea $\mathcal{C}$ la componente de conexión de Γ_A, esto es, una componente dirigida tal que existe $S = \sum D(H_H)$ sección completa en $\mathcal{C}$. (Esta sección existe, ya que A es un álgebra tilteada de hereditaria).



S es tal que $\forall\, i \in Q_0$, el camino $P_i \rightsquigarrow I_i$ se factoriza a través de S.

Con lo anterior, y como existe un camino de I_x a P_y existen Y_1 y $Y_2 \in S$ tal que hay caminos de P_y a Y_1 y de Y_2 a I_x, tendríamos por tanto, $Y_2 \preceq I_x \preceq P_y \preceq Y_1$ con $Y_1, Y_2 \in S$, que al ser cerrada bajo caminos, implica que todo el camino pertenece a S, esto es, I_x y P_y pertenecen a S y por tanto, existe un camino seccional $I_x \to \cdots \to P_y$.

□

8.4.– **Proposición.**- Sea A un álgebra tilteada y sea $(X_0, \ldots, X_t)$ un camino en $\mathcal{R}(A)$, entonces existe $Y \in \mathcal{R}$ tal que $Hom(X_0, Y) \neq 0 \neq Hom(Y, X_t)$.

Demostración: Sea

$$X_0 \xrightarrow{g_1} X_1 \to \ldots \xrightarrow{g_{t-1}} X_{t-1} \xrightarrow{g_t} X_t \text{ en } \mathcal{R}(A)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $X_0 \in \mathcal{X}(T)$.

Tenemos que $\sum' : \mathcal{F}(T) \longrightarrow \mathcal{X}(T)$ es una equivalencia, entonces puesto que $\mathcal{X}(T)$ es cerrado bajo sucesores, existen $M_0, M_1, \ldots, M_t$ en $\mathcal{F}(T)$ y morfismos $f_i : M_i \to M_{i+}$ en $\mathcal{F}(T)$ tales que:

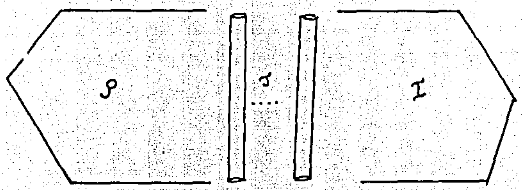
$$\begin{array}{ccccccc}
\sum' M_0 & \xrightarrow{\sum' f_1} & \sum' M_1 & \longrightarrow \ldots & \xrightarrow{\sum' f_t} & \sum' M_t \\
\wr\!\wr & & \wr\!\wr & & & \wr\!\wr \\
X_0 & \xrightarrow{g_1} & X_1 & \longrightarrow \ldots & \xrightarrow{g_t} & X_t
\end{array}$$

Entonces tenemos que $M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \to \cdots \xrightarrow{f_t} M_t$ es un camino en mod_H (en $\mathcal{F}(T)$ más precisamente).

Con lo anterior basta probar la proposición para el caso en que A es hereditaria.

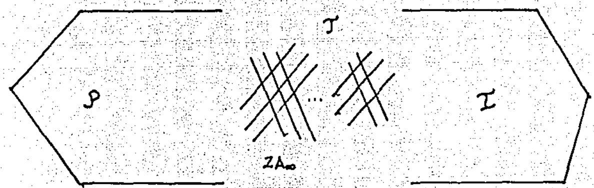
Para esto, veremos los posibles casos, analizando la estructura conocida de los carcajes de Auslander-Reiten de H correspondientes:

a) Si H es mansa, Γ_H tiene la forma:

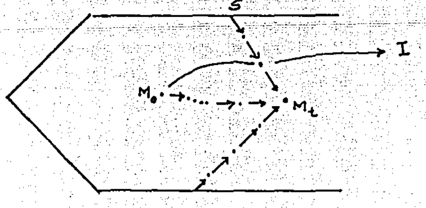


donde $\mathcal{P}$ es la componente postproyectiva, $\mathcal{T}$ denota la componente regular, en este caso formada por componentes tubulares y donde $\mathcal{I}$ es la componente preinyectiva.

b) Si H es salvaje, Γ_H tiene la forma:



Primer caso: $M_0, M_t \in \mathcal{P}$ (Notemos que aquí se contempla el caso finito).



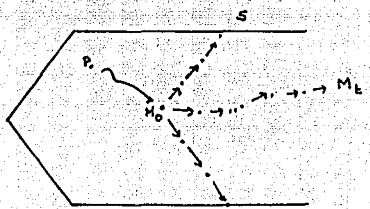
Sea $S = S(\rightarrow M_t)$, una sección (de hecho probamos que es una rebanada).

Sea $M_0 \hookrightarrow I$ la inclusión de M_0 en su cápsula inyectiva. Como S contiene un módulo sincero (posiblemente no inescindible), $Hom(S, I) \neq 0$ para todo módulo inyectivo, entonces, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_0 \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & I \\ & S \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

esto es, existe $Y_1 \in S$ tal que $0 \neq M_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow M_t$, con lo que también $M_0 \rightarrow Y_1$ es distinto de cero.

Segundo caso: $M_0 \in \mathcal{P}$, $M_t \notin \mathcal{P}$



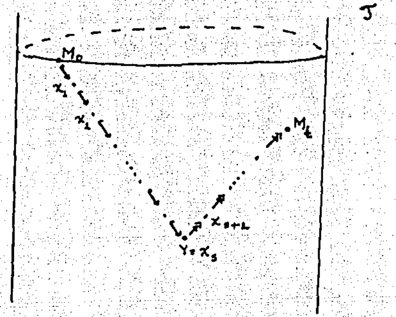
Sea $S = S(M_0 \rightarrow)$. Tenemos que existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $Hom(P, M_t) \neq 0$, por lo que, análogamente al caso anterior

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr] \arrow[dr] & & M_t \\ & S \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

y entonces existe $Y \in S$ tal que $M_0 \rightarrow Y \rightarrow M_t$, con $M_0 \rightarrow Y$ un morfismo en S por lo que es seccional y por tanto, distinto de cero y además, $Y \rightarrow M_t \neq 0$.

Tercer caso: $M_0, M_t \in \mathcal{T}$, donde T es la componente regular.

a) *Si H es mansa,* M_0, M_t están en el mismo tubo (ya que estos son ortogonales). Tendríamos entonces la siguiente situación:



Como $M_0 \in \mathcal{F}(T) \cong \mathcal{X}(T)$ que es cerrado bajo sucesores, tenemos que los módulos $X_1, \ldots, X_t = Y$ que "bajan" a partir de M_0 en el tubo, todos están en $\mathcal{X}(T)$ y por tanto en $\mathcal{R}(A)$, tomamos $Y = X_s$ de tal forma que Y está en la sección del tubo en la que aparece M_t como se observa en el diagrama, entonces podemos "subir" hasta M_t, con lo que tenemos

$$M_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow X_{s+1} \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow M_t$$

(en un tubo los morfismos que "bajan" son inyectivos y los que "suben" son suprayectivos).

Por tanto, $M_0 \to Y \neq 0 \neq Y \to M_t$.

b) *Si H es salvaje:* $M_0, M_t \in \mathcal{T}$. En este caso las componentes de $\mathcal{T}$ son de la forma $\mathbf{ZA}_\infty$.

Sabemos además [12], que

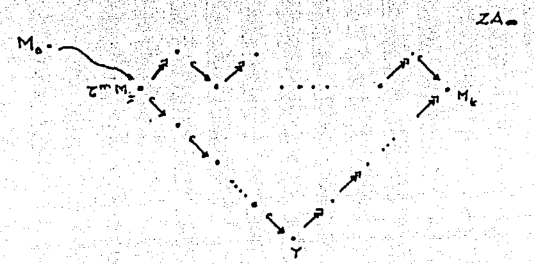
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{dim}\tau_H^n M_t}{\rho^n} = \lambda y^+$$

donde $\lambda > 0$, $y^+ \gg 0$ y ρ es el radio espectral de la matriz de Coxeter asociada a H.

Con esto tenemos que

$$0 < \lambda\langle \mathbf{dim} M_0, y^+\rangle = \langle \mathbf{dim} M_0, \lambda y^+\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\rho^n}\langle \mathbf{dim} M_0, \mathbf{dim}\tau^n M_t\rangle$$

entonces existe $m > 0$ tal que $Hom(M_0, \tau^m M_t) \neq 0$. Podemos ilustrar la situación en el siguiente diagrama:



De manera completamente análoga al caso anterior, podemos encontrar Y, tal que tenemos el siguiente camino $M_0 \to \tau^m M_t \hookrightarrow Y \to M_t$, donde todos los morfismos son distintos de cero, por lo que tenemos entonces morfismos $M_0 \hookrightarrow Y \neq 0 \neq Y \to M_t$.

□

8.5.– **Proposición.**- Sea B un álgebra tilteada, $M = M_1 \oplus M_2$, tal que $A = B[M]$ es tilteada también, entonces todo sumando directo inescindible de M_1 está en $\mathcal{R}(B)$ ó M_2 es proyectivo.

Demostración: Supongamos que existe $M_1' \notin \mathcal{R}(B)$, M_1' sumando directo de M_1.

Como $M_1' \notin \mathcal{R}(B)$, existe un sucesor de M_1', Y, tal que $idim_B Y > 1$, tenemos entonces la siguiente situación para algún vértice x de B:

$$\begin{tikzcd}
M'_1 \arrow[dr] & & & & & \\
& P_w \arrow[r, squiggly, "\gamma"] & Y \arrow[dr] & & \tau^{-}_B Y \arrow[r, "\neq 0"] & P^B_x \\
& & & \cdot \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Recordemos que w denota el vértice de extensión de A. P^B_x es proyectivo en B y por tanto, también en A, ya que $x \neq w$.

Ahora, en mod_A: $\tau_A(\tau_B^{-1}Y) = \overline{\tau_B(\tau_B^{-1}Y)} = \overline{Y} = (|\, Y\,|, Y, 1_{|Y|})$

por lo que obtenemos:

$$\tau_A^{-1}(\overline{Y}) = \tau_B^{-1}Y$$

por lo que también tenemos $\tau_A^{-1}(\overline{Y}) \xrightarrow{\neq 0} P^B_x = P^A_x$ y entonces $idim_A\overline{Y} > 1$.

Sea $Z = (k, M'_1, \pi_1 : k \to Hom(M, M'_1) \to Hom(M'_1, M'_1))$ que es inescindible. Tenemos un camino de Z a $\overline{Y}$, según se puede ver en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Z: & k \arrow[r] \arrow[d, dashed] & Hom(M, M_1) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^*"] & Hom(M'_1, M'_1) \arrow[dl, "\gamma^*"] \\
\overline{Y}: & Hom(M, Y) \arrow[r, equal] & Hom(M, Y) &
\end{tikzcd}$$

Como $\overline{Y} \notin \mathcal{R}(A)$ entonces $\overline{Y} \in \mathcal{L}(A)$ y entonces $pdim_A Z \leq 1$. Con lo anterior, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to M_1'' \to P_w \to Z \to 0$$

con M_1'' proyectivo

$$\begin{tikzcd}
M_1'' : & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(M, M_1'') \arrow[d] \\
P_w : & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(M, M) \arrow[d, "\pi"] \\
Z : & k \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M, M_1')
\end{tikzcd}$$

Pero entonces, $M_1'' \oplus M_1' = M$, con lo que M_2 es un sumando directo de M_1'' y por lo tanto M_2 es proyectivo.

$\square$

Con las proposiciones anteriores estamos en condición de dar nuestra prueba de la existencia de componentes postproyectivas para álgebras tilteadas.

8.6.– **Teorema.-** Sea $A = kQ/I$ un álgebra tilteada. Entonces Γ_A tiene una componente postproyectiva.

Demostración:

Sea $A = End_H(T)$ con H un álgebra hereditaria y T un H-módulo de tilteo.

Hacemos la demostración por inducción en el número de vértices de Q.

-) Si n = 1, no hay nada que probar.

Supongamos que para todas las álgebras tilteadas con menos de n vértices en su carcaj asociado, se cumple la existencia de componentes postproyectivas.

-) Ahora, sea A un álgebra tilteada con n módulos simples hasta isomorfismo (i.e. Q tiene n vértices). Sea $a \in Q_0$ un vértice de Q. Si a no es una fuente, existe $w \preceq a$ una fuente en Q. Sea $B = A/Ae_w$, y sea $M = radP_w$.

Podemos considerar $A = B[M]$. Ahora bien, B puede ser tilteada o no:

1) Si B *es tilteada*, por hipótesis de inducción, Γ_B tiene una componente postproyectiva.

Sea $M = M_1 \oplus M_2$, donde M_1 es suma directa de todos los sumandos directos inescindibles que están en alguna componente postproyectiva $\mathcal{P}_j$ de Γ_B.

Si $\mathcal{P}_j$ es una componente postproyectiva de Γ_B, podemos suponer que $\mathcal{P}_j$ contiene un sumando de M_1, de lo contrario, $\mathcal{P}_j$ es componente postproyectiva de Γ_A, (pues se cumpliría $(1w)$) y acabamos (gracias a 6.6).

Entonces supongamos que $M_1 \neq 0$ y que w no satisface la condición $(2w)$ y llegaremos a una contradicción.

Dividiremos en varios pasos esta demostración:

a) Si $M_2 \neq 0$, entonces para cualquier $1 \leq j \leq t$, $Hom_B(\mathcal{P}_j, \tau_B M_2) = 0$, ó bien $\mathcal{P}_j$ no contiene módulos inyectivos.

Efectivamente, supongamos que $Hom_B(\mathcal{P}_j, \tau_B M_2') \neq 0$ para algún sumando directo inescindible no proyectivo M_2' de M_2 y que I es un B-módulo inyectivo inescindible en $\mathcal{P}_j$.

Podemos elegir I de tal forma que haya un camino de I a $Z \in \mathcal{P}_j$ y $Hom(Z, \tau_B M_2') \neq 0$.

Como $I \in \mathcal{R}(B)$ y $\mathcal{R}(B)$ es cerrado bajo sucesores, el camino $I \rightsquigarrow Z \rightsquigarrow \tau M_2'$ tiene un refinamiento de tal forma que existe Z' tal que $Hom(I, Z') \neq 0$ y $Hom(Z', \tau_B M_2') \neq 0$. Podemos asumir de hecho, que $Z' = Z$ y tenemos entonces:

$$I \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} \tau M_2'$$

con f y g morfismos distintos de cero.

Como $\tau M_2' \notin \mathcal{P}_j$, podemos factorizar g a través de una cantidad infinita de módulos y para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos una cadena de morfismos irreducibles

$$Z = Z_0 \xrightarrow{g_1} Z_1 \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_s} Z_s$$

y morfismos $0 \neq h_s : Z_s \to \tau M_2'$ tales que $g_s g_{s-1} \cdots g_1 f \neq 0$.

Podemos suponer también que $\tau_B Z_{s'+2} = Z_{s'}$ para alguna $s' \leq s$, esto es, tenemos la siguiente situación, si $s' = s - 2$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] & Z_0 \arrow[r, "g_1"] & Z_1 \arrow[r, "g_2"] & Z_2 \arrow[r] & \dots \arrow[r, "g_{s'}"] & Z_{s'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z_{s'+1} \arrow[r] & Z_{s'+2} \\ & & & & & \tau_B Z_{s'+2} & & \end{tikzcd}$$

y con esto, también tenemos que

$$0 \neq Ext^1_B(M_2', Z_{s'+2}) \cong D\overline{Hom}(Z_{s'+2}, \tau_B M_2') = DHom(Z_{s'+2}, \tau_B M_2')$$

donde la última igualdad vale, ya que de otra manera $pdim_B M_2' > 1$, contradiciendo esto que $P_w \in \mathcal{L}(A)$.

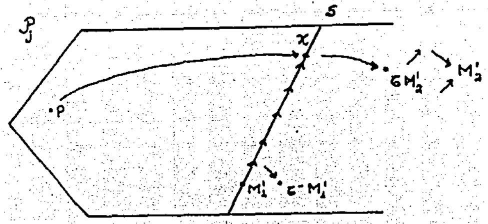
Por lo tanto, $idim_A Z_{s'+2} > 1$, con lo que se debe tener que $pdim_A Z_{s'+2} \leq 1$, pero $Hom_B(I, Z_s) \neq 0$ implica que $pdim_B Z_{s'+2} > 1$ (contradicción).

b) Veremos que M_2 *es proyectivo*:

Supongamos que no, entonces existe M_2' un sumando directo inescindible no proyectivo de M_2.

Sea B_1 el álgebra soporte de M_2'. Primero, supongamos que **todos** los B_1-módulos proyectivos inescindibles están en componentes postproyectivas de Γ_{B_1}.

Con lo anterior, podemos encontrar un B_1-módulo proyectivo inescindible P tal que $Hom_{B_1}(P, \tau_{B_1} M_2') \neq 0$ y que P esté contenido en una componente postproyectiva $\mathcal{P}_j$.



Por hipótesis, $\mathcal{P}_j$ también contiene un sumando directo inescindible M_1' de M_1.

Como $Hom_{B_1}(P, \tau_{B_1} M_2') \neq 0$ y $M_2' \notin \mathcal{P}_j$, entonces $\mathcal{P}_j$ no contiene módulos inyectivos, por lo que podemos encontrar $X \in \mathcal{P}_j$ con $M_1' \preceq X$ y $Hom_B(X, \tau_{B_1} M_2') \neq 0$.

Particularmente, obtenemos un camino $M_1' \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tau_{B_1} M_2'$. Por la proposición 8.4, tenemos que existe un B_1-módulo inescindible Y, y morfismos f, g, tales que $0 \neq f : M_1 \longrightarrow Y$ y $0 \neq g : Y \longrightarrow \tau_{B_1} M_2'$.

Consideremos el módulo $Z = (k, Y, \gamma : k \rightarrow Hom(M, Y))$, donde $\gamma = fp_1$ con $p_1 : M \rightarrow M_1'$ una proyección.

Z es inescindible y además tenemos que $pdim_A Z = 2 = idim_A Z$ (esto debido a que M_2' es sumando directo de $ker\gamma$ y $Ext^1_{B_1}(M, Y) \neq 0$ pues $Hom(Y, \tau M) \neq 0$), esto contradice que $ind_A = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$.

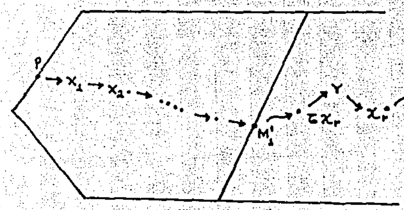
Con lo anterior tenemos que como B_1 es conexa, existe P' proyectivo inescindible en mod_{B_1} tal que $Hom_{B_1}(P, P') \neq 0$ y $P' \notin \mathcal{P}_j$ en Γ_{B_1}. Como M_2 no es proyectivo, por la proposición 8.5, $M_1' \in \mathcal{R}(B)$.

Sea $0 \neq f' \in Hom_{B_1}(P, P')$, $f' \in rad^\infty(P, P')$ por la manera de elegir P y P'. Entonces, para cada $r \geq 1$, existe una cadena de morfismos irreducibles

(recordemos que f' se factoriza a través de una cantidad infinita de módulos)

$$P = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_r} X_r \xrightarrow{g_r} P'$$

con g_r un morfismo distinto de cero, tal que $g_r f_r f_{r-1} \cdots f_1 \neq 0$.



Elegimos r de tal forma que $M_1' \preceq \tau X_r$.

Como $Hom(X_r, P') \neq 0$, $idim_{B_1}\tau X_r > 2$; pero $M_1' \in \mathcal{R}(B)$ por lo que también $\tau X_r \in \mathcal{R}(B)$ (contradicción).

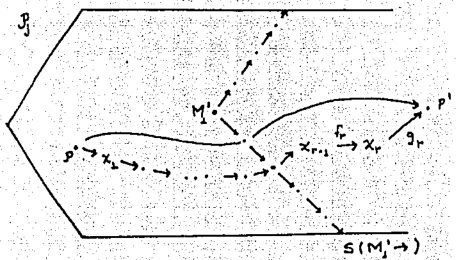
Por lo tanto, M_2 es proyectivo.

c) Supongamos ahora que $M_2 \neq 0$. Veremos que en este caso, existe un B-módulo inescindible X con $idim_A X = 2$ y $Hom_A(M_1, X) \neq 0$.

Sea M_2' un sumando directo inescindible de M_2, por b), M_2' es proyectivo y definimos B_1 como antes. Por a) podemos escoger una componente post-proyectiva $\mathcal{P}_j$ que no contenga módulos inyectivos.

Sea M_1' un sumando directo inescindible de M_1 en $\mathcal{P}_j$.

Consideremos $S(M_1' \to)$ una sección de $\mathcal{P}_j$ en Γ_{B_1}.



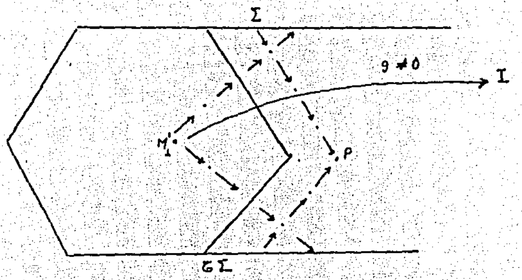
Supongamos primeramente que no hay sucesores propios proyectivos de $S(M_1' \to)$. Procediendo de manera similar que en la parte anterior, encontramos $X \in S(M_1' \to)$ tal que $idim_A X = 2$.

Efectivamente, como B_1 es conexa, existen P y P' B_1-módulos proyectivos inescindibles tales que $0 \neq Hom_{B_1}(P, P')$, con $P \in \mathcal{P}_j$ y $P' \notin \mathcal{P}_j$. Entonces $f \in rad^{\infty}(P, P')$ y obtenemos, para cada $r \in \mathbb{N}$, cadenas de morfismos irreducibles

$$P = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_r} X_r$$

y $0 \neq g_r : X_s \longrightarrow P'$ tal que $g_r f_s \dots f_1 \neq 0$ y podemos elegir r de tal forma que $\tau X_r \in S(M_1' \to)$. Notemos que $idim \tau X_r = 2$.

Supongamos ahora que si hay algún sucesor propio de $S(M_1' \to)$ que es proyectivo. Consideremos ahora, $\Sigma = S(\rightarrow P)$



Notemos 2 cosas:

-) Si $X \in \tau\Sigma$, $idimX = 2$ y hay algún camino de M_1' a $\tau\Sigma$

-) Si $f \in X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{P}_1$, con $X \preceq \tau\Sigma$ y $Y \not\preceq \tau\Sigma$, entonces f se factoriza a través de $\tau\Sigma$.

Sea $0 \neq g : M_1' \rightarrow I$ con I la cápsula inyectiva de M_1'. Por la proposición 8.3, cualquier camino de un inyectivo a un proyectivo es seccional (o se puede refinar a uno seccional), tenemos que I no es un predecesor de $\tau\Sigma$. Entonces hay un morfismo no cero de M_1' a un inescindible en $\tau\Sigma$.

Observe que cualquier $Y \in \tau\Sigma$ tiene $idim_B Y = 2$.

Con lo que tenemos probado lo que afirmamos.

d) Enseguida, veremos que $Hom_B(M_2, Y) = 0$ para todo $Y \in ind_B$ con $pdim_B Y = 2$

Supongamos que no, esto es, existe Y con $pdimY = 2$ y $Hom_B(M_2, Y) \neq 0$.

Por la afirmación anterior, tenemos que existen morfismos $f : M_1 \rightarrow X$ y $g : M_2 \rightarrow Y$ con $idimX = 2$.

Consideremos el A-módulo $Z = (k, X \oplus Y, \gamma)$, donde $\gamma = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$.

Z es inescindible y $pdimZ = idimZ = 2$ (contradicción).

Entonces, *cada submódulo de* M_2 debe ser *proyectivo*, de lo contrario, el correspondiente módulo factor tiene dimensión proyectiva 2.

e) Ahora mostraremos que M_2 es dirigido y que cada sumando directo inescindible de M_2 tiene solamente una cantidad finita de predecesores, todos ellos dirigidos. En particular, no hay caminos de sumandos directos de M_1 a sumandos directos de M_2.

Efectivamente, sea X un B-módulo inescindible tal que $0 \neq f \in Hom(X, M_2')$ donde M_2' es un sumando directo de M_2.

Sea $f = hg$ la factorización de f a través de su imagen:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & M_1' \\ & Im f \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Como Imf es un submódulo de M_2', por d) Imf es proyectivo, y por tanto, X es proyectivo. Si M_2' tiene un predecesor no proyectivo, podemos encontrar una cadena de morfismos irreducibles

$$X_s \xrightarrow{f_s} X_{s-1} \xrightarrow{f_{s-1}} \ldots \to X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 = M_2'$$

tal que $f_{s-1} \cdots f_1 \neq 0$ (y por tanto $X_1, \ldots, X_{s-1}$ son proyectivos) y X_s es no proyectivo.

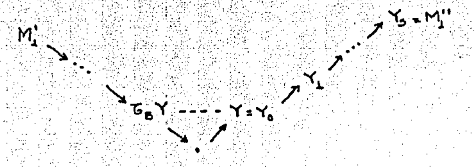
Por tanto X_{s-1} es un submódulo de M_2' y $Hom_b(X_{s-1}/X_s, M_2') \neq 0$. Entonces, por d), X_{s-1}/X_s es un módulo proyectivo y por tanto, $X_s = 0$.

f) Finalmente, veremos que M es un B-módulo dirigido.

Efectivamente, por e) bastará probar que M_1 es dirigido.

Supongamos que para M_1' y M_1'' sumandos directos de M_1, existe un camino que se factoriza a través de una sucesión de Auslander-Reiten, esto es, hay un camino no seccional de M_1' a M_1''.

Considere un camino como en la figura:



Donde el camino $Y_o \to Y_1 \cdots \to Y_s$ es seccional. Supongamos que ninguno de los $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ es proyectivo, entonces encontramos un camino $M_1' \to \cdots \to \tau_B Y_0 \to \tau_B Y_1 \to \cdots \to \tau_B M_1''$, por 8.4, hay un camino $M_1' \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} \tau_B M_1''$ con f y g distintas de cero.

Consideremos el A-módulo inescindible $X = (k, Z, \gamma : 1 \mapsto f p_1)$, donde $p_1 : M \to M_1'$ es una proyección. Con lo anterior, tenemos que $pdim_A X = 2 = idim_A X$ (contradicción).

Por lo tanto, existe algún $1 \leq j \leq s$ tal que $P = Y_j$ es proyectivo. Distinguiremos dos situaciones:

Si M_1'' *es no proyectivo*, $M_1' \in \mathcal{R}(B)$. Por otra parte, $Hom_B(Y, P) \neq 0$ implica que $idim_B \tau_B Y = 2$ (contradicción).

Si M_1'' *es proyectivo*, tenemos un camino de M_1' a M_1'' de longitud 2:

$$M_1' \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} M_1''$$

En este caso, veremos que existe W no proyectivo tal que $M_1' \preceq \tau W \preceq M_1''$ y llegaremos a una contradicción.

Si $gf = 0$ el resultado se sigue de 3.2.

Supongamos que $gf \neq 0$ y consideremos $\Sigma = S(\to M_1'')$, por hipótesis M_1' es un predecesor de $\tau\Sigma$, con lo que gf se factoriza a través de $\tau\Sigma$, en particular, existe un módulo no proyectivo W, tal que

$$Hom_B(M_1', \tau W) \neq 0 \neq Hom_B(W, M_1'')$$

Como M_1'' es proyectivo, tenemos que $idim\ \tau W = 2$.

Construyamos el A-módulo $X = \left(k,\ \tau W \oplus Y,\ \begin{pmatrix} \hat{\alpha} & 0 \\ 0 & \hat{\delta} \end{pmatrix} \right)$

donde $0 \neq \alpha : M_1' \to \tau W$, $0 \neq \beta : W \to M_1''$, notemos que β no es suprayectivo (W no es proyectivo), $Y = coker\beta$, de donde $pdimY = 2$ y $0 \neq \delta : M_1'' \to Y$.

Con lo anterior $pdimX = 2 = idimX$ (contradicción).

Entonces M_1 es dirigido. Con lo cual M resulta dirigido.

Con esto, tenemos que w (el vértice de extensión) cumple la condición $(2w)$ y por tanto, $A = B[M]$ tiene una componente postproyectiva en Γ_A.

2) Si B no es tilteada, podemos construir directamente una componente postproyectiva, como veremos en la demostración del siguiente resultado:

8.7.– **Proposición.**- Sea $A = B[M]$, $M = radP_w$. A un álgebra tilteada, $A = End_H(T)$, con T un módulo de tilteo sobre H un álgebra hereditaria.

1) Si T no tiene sumandos directos inyectivos, entonces B es tilteada.

Demostración: (w es fuente en Q, $H = kQ$).

Sea $T = \bigoplus_{x \in Q_0} T_x$. Sabemos que $P_x = \sum T_x$, siendo P_x proyectivo en A.

Sea $P_w = \sum T_w$, T_w cumple:
i) $idim_H T_w = 1$ (por ser T de tilteo y H hereditaria)
ii) $End(T_w) = k$ (por ser w fuente)
iii) $Ext_H^1(T_w, T_w) = 0$ (por ser T de tilteo)

iv) T_w no es inyectivo (T no tiene sumandos inyectivos)

Definimos

$$^{\perp}T_w = \{X : Hom(X,T_w) = 0 = Ext^1(X,T_w)\}$$

la categoría perpendicular izquierda a T_w.

Bajo las condiciones i) - iv) que cumple T_w, tenemos que

$$^{\perp}T_w \cong mod_{H'}$$

donde H' es una nueva álgebra tal que:

a) $gldimH' \leq gldimH = 1$ (i.e. H' es hereditaria)

b) El número de vértices en el carcaj de H' es igual al número de vértices del carcaj de H menos uno.

Notemos que $T_x \in {}^{\perp}T_w \; \forall x \neq w \in Q_0$.

Sea

$$T' = \bigoplus_{x \neq w} T_x \in mod_{H'}$$

T' es un módulo de tilteo sobre H', tal que

$$End_{H'}(T') = End_H(T') = A/Ae_w = B$$

por lo tanto, B es tilteada.

□

2) Sea ahora, $T = T_0 \oplus T_1$, tal que T_0 no tiene sumandos directos inyectivos y T_1 inyectivo tal que no tenga sumandos proyectivos.

$$A = End_H(T) = \begin{bmatrix} End_H(T_0) & Hom_H(T_0,T_1) \\ Hom_H(T_1,T_0) & End_H(T_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & {}_{A_0}M_{A_1} \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

$A_1 = End_H(T_1)$ es hereditaria, pues los módulos inyectivos inescindibles de H viven en una sola sección S y $End(\oplus_{S \in S} S)$ es hereditaria.

Sea $T_1 = T_{x_1} \oplus T_{x_2} \oplus \ldots \oplus T_{x_s}$ y $T_{1_i} = T_{x_1} \oplus \ldots \oplus \widehat{T_{x_i}} \oplus \ldots \oplus T_{x_s}$.

Podemos suponer que tenemos los vértices $x_1, x_2, \ldots, x_s$ ordenados de tal forma que x_1 es pozo en Q, x_2 es pozo en $Q - \{x_1\}, \ldots$

Como los T_{x_i} son sumandos de T, tenemos que se cumple:
i) $pdimT_{x_1} \leq 1$
ii) $End(T_{x_1}) = k$
iii) $Ext^1(T_{x_1}, T_{x_1}) = 0$
T_{x_1} no es proyectivo

Con esto, podemos definir, de manera análoga al caso anterior:

$$T_{x_1}^{\perp} = \{Y \mathbin{/} Hom(T_{x_1}, Y) = 0 = Ext^1(T_{x_1}, Y)\}$$

Y también, $T_{x_1}^{\perp} \cong mod_{H_1}$ con H_1 cumpliendo a) y b).

Como x_1 es un pozo y T un módulo de tilteo:

$$Hom(T_{x_1}, T_0 \oplus T_{1_1}) = 0 = Ext^1(T_{x_1}, T_0 \oplus T_{1_1})$$

Por lo tanto, $T_0 \oplus T_{1_1} \in T_{x_1}^{\perp}$ y $T_0 \oplus T_{1_1}$ es un módulo de tilteo en mod_{H_1}. Entonces $B_1 = End_{H_1}(T_0 \oplus T_{1_1})$ es tilteada.

Tenemos entonces que $A = [N_1]B_1$, esto es, A resulta ser una coextensión de un álgebra tilteada.

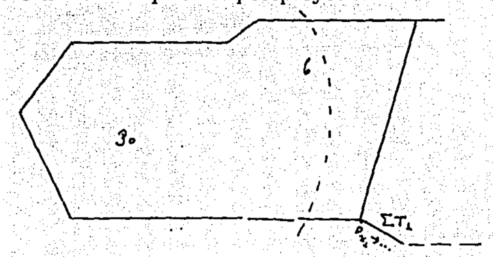
Repitiendo este proceso con x_2 que es un pozo en $Q - \{x_1\}$, obtenemos que $B_1 = [N_2]B_2$, y análogamente, $B_2 = [N_3]B_3, \ldots, B_s = [N_s]A_0$.

Entonces A_0 es un álgebra tilteada, y como además $A_0 = End_H(T_0)$ tiene menos vértices que A, podemos aplicar la hipótesis de inducción y obtenemos que A_0 tiene una componente postproyectiva $\mathcal{P}_0$.

Sabemos que como A es tilteada, existe una componente de conexión C en Γ_A, esta componente es dirigida y conexa. Pueden ocurrir 2 cosas:

a) Que C sea componente postproyectiva en Γ_A y terminamos.

b) Que C no sea componente postproyectiva:



$\mathcal{P}_0$ es una componente postproyectiva de Γ_{A_0}. Como los sumandos de T_1 son inyectivos en H y por tanto en una misma sección, (por tanto, $\sum T_1$ es una sección también), como además, no hay morfismos de $\sum T_1$ hacia $\mathcal{P}_0$, tenemos que $\mathcal{P}_0$ es una componente postproyectiva en Γ_A.

□

Bibliografía

[1] **Bongartz, K.:** A Criterion for Finite Representation Type.
Math. Ann. 269, 1-12 (1984).

[2] **de la Peña, J.A.:** Quadratic forms and the representation type of an algebra.
Erganzungsreihe 90-003, Universitat Bielefeld.

[3] **de la Peña, J.A.:** Notas de conferencias (ELAM).

[4] **de la Peña, J.A., y Draxler, P.:** On the existence of postprojective components in the Auslander-Reiten quiver of an algebra.
(por publicarse)

[5] **de la Peña, J.A., y Kasjan, S.:** Constructing the postprojective component of an algebra.
(por publicarse)

[6] **Dlab, V., y Ringel, C.M.:** Eigenvalues of Coxeter transformations and the Gelfand-Kirillov dimension of the preprojective algebras.
Procedings of the Amer. Math. Soc. 83, num. 2 (1981).

[7] **Happel, D., y Coello, F.:** Quasitilted algebras admit a preprojective component.
(por publicarse)

[8] **Happel, D., y Ringel, C.M.:** Projective Directing Modules.
Archiv. Math. 60 (1993) 243-247

[9] **Happel, D., y Ringel, C.M.:** Tilted algebras.

Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), 399-443.

[10] **Ringel, C. M.:** Tame algebras and integral quadratic forms.
Springer Lecture Notes 1099 (1984)

[11] **Strauss, H.:** The perpendicular category of a partial tilting module.
J. Algebra 144 (1991) 43-66

[12] **Takane, M.:** Spectral properties of Coxeter transformations and applications.
Arch. Math. Vol. 55, (1990) 120-134