12

2E

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCION Y APLICACIONES DEL MODELO TOPOLOGICO (X,T)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

MARIO DELGADILLO TORRES

FACULTAD DE CIENCIAS

UNAM

MEXICO, D. F. AGOSTO DE 1995

FALLA DE ORIGEN

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPN°MA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Construcción y aplicaciones del modelo topológico *(X,T)

realizado por Delgadillo Torres Mario

con número de cuenta 8522479-3 **, pasante de la carrera de** matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Mat. Ma. de Lourdes Guerrero Zarco
Director de Tesis
Propietario
Dr. Alberto Alonso y Coria
Propietario
M. en F.C. Ma. de la Asunción Preisser Rodríguez
Propietario
Mat. Luis Colavita Ferreira.
Suplente
Mat. Norma Elvira Peralta Márquez
Suplente

Consejo Departamental de Matemáticas
Dra. Isabel Puga Espinosa

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE
MATEMÁTICAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Desde los tiempos de Arquímedes, se tenía la noción matemática de infinitesimal, pero hasta 1670 el matemático alemán Wilhelm Gottfried Leibniz tomó esta idea de los infinitesimales, aplicándola cómo si de números se tratara en su teoría del Cálculo Diferencial, donde dichos números conservan las propiedades de los números reales. Las demostraciones se volvieron demasiado sencillas con el manejo de los infinitésimales, sin embargo las preguntas ¿Qué son incrementos infinitamente pequeños?, ¿Qué son cantidades finitas?, ¿Qué número positivo es más pequeño que cualquier real positivo?, ¿Existe?; Planteando un problema imposible de resolver en aquella época para Leibniz, y haciendo que su trabajo estuviera cerca de tres siglos en la sombra.

En el siglo actual, a principios de la década de los sesentas, Abraham Robinson, da una justificación rigurosa para el uso de los infinitesimales en el análisis, de hecho, Robinson muestra que el conjunto de los números reales se puede concebir como un subconjunto de un conjunto extendido de números llamado Conjunto de Números Hiperreales, el cual contiene a los infinitesimales y también conserva las operaciones y propiedades del campo de los números reales; incluso Robinson demostró que las estructuras sobre los reales pueden ser extendidas a estructuras similares sobre los hiperreales tal que todos los enunciados verdaderos en la estructura real, son verdaderos, con su correspondiente interpretación, en la estructura hiperreal. Ésta propiedad se conoce como el Principio de Transferencia (P.T.). Toda ésta teoría de modelos desarrollada por Robinson, es conocida como Análisis No-standard, por medio del cual se justifica el Método de los Infinitesimales.

El presente trabajo tiene por objetivo mostrar una construcción del modelo no-standard de un espacio topológico, dicha construcción se muestra lo más completa posible pasando desde conceptos fundamentales de lógica, hasta una construcción del modelo no-standard más accesible desarrollada con teoría de conjuntos.

En el Capítulo I, se hace una construcción sobre los resultados de teorías y lenguajes de primer orden, basándonos en la teoría de filtros y ultrapotencias, desde el punto de vista de Mendelson, teniendo así un modelo no-standard sobre teorías de primer orden, pero recordando que no todo se puede simbolizar en lenguajes de primer orden, se desarrolla una teoría sobre Lenguaje de Orden Superior, la cual se mapea a una imagen, donde los elementos de ésta imagen yacen sobre teorías de primer orden; De ésta manera construimos un modelo no-standard sobre alargamientos y c-modelos en teorías y lenguajes de orden superior desde el punto de vista de Robinson y los resultados quedan justificados con la teoría de Mendelson.

El Capítulo II se hizo pensando que el Capítulo I puede acarrear problemas para los lectores, dado el enfoque totalmente lógico que tiene, por esto en el Capítulo II se hace una construcción conjuntista; donde los elementos lógicos se manejan únicamente en las justificaciones más importantes, por lo tanto tenemos una construcción menos abstracta de un modelo no-standard para cualquier tipo de estructura. El punto de vista tomado en cuenta para dicha construcción es el de Davis-Loeb.

En el Capítulo III, se conjuntan los resultados de las construcciones de Mendelson, Robinson y Davis-Loeb; para denotar a los elementos y sus propiedades básicas de un modelo no-standard de números hiperreales para su posterior aplicación en el Capítulo IV.

Finalmente, el Capítulo IV, nos muestra el objetivo principal, una aplicación del Análisis No-standard, ésta aplicación se realiza en topología básica, la cual es una rama que se maneja de forma general por la mayoría de los matemáticos, de manera tal que no se contemplo aplicar el modelo no-standard en una rama más especializada, para no perder el sentido práctico de la aplicación. Las aplicaciones se hacen sobre Compacidad, Espacios Métricos, Espacios Vectoriales Normados y Espacios de Banach.

CAPITULO I

LENGUAJES Y TEORÍAS FORMALES

" LENGUAJES DE PRIMER ORDEN"

Iniciaremos con las nociones básicas como una breve introducción a la lógica predicativa y los resultados que nos ayudarán al desarrollo de la teoría correspondiente.

DEF 1.1 :
Un lenguaje formal es una pareja ordenada $LF = \langle S, \Phi \rangle$ donde S es un conjunto no vacío de símbolos, y Φ es un conjunto no vacío de reglas, llamadas reglas de formación.

DEF 1.2 :
Una expresión en el LF es cualquier cadena finita de elementos (símbolos), de S.

DEF 1.3 :
Se le llama fórmula bien formada (FBF) a la expresión que se construye aplicando las reglas de formación de Φ.

Ahora nos enfocaremos al lenguaje de primer orden con igualdad, el cual será objeto de nuestro estudio por el alcance de su simbolización en matemáticas y la teoría que a partir de esto se desarrolla.

DEF 1.4:
Un lenguaje de primer orden con igualdad es aquel $L_{=} = \langle S, \Phi \rangle$, donde S es el conjunto de símbolos formado por :

1.4.1. Símbolos Lógicos :

1.4.1.1. Conectivos

" $\rightarrow$ " Implicación
" $\rceil$ " Negación
" $\wedge$ " Conjunción
" $\vee$ " Disyunción
" $\leftrightarrow$ " Bicondicional o Equivalencia

1.4.1.2. Cuantificadores

" $\forall$ " Cuantificador Universal
" $\exists$ " Cuantificador Existencial

1.4.1.3. El símbolo de la igualdad " = "

1.4.2. Símbolos no lógicos ;

1.4.2.1. Un conjunto distinto del vacío numerable de símbolos de variable individual $\{ x_j / j \in J \}$.

1.4.2.2. Un conjunto posiblemente vacío de símbolos de constante individual $\{ c_h / h \in H \}$.

1.4.2.3. Un conjunto no vacío de letras de predicado $\{ P^{a(k)}_k / k \in K \}$ donde $a : K \rightarrow \mathbb{N}$, y $a(k)$ es la aridad de cada predicado.

1.4.2.4. Un conjunto posiblemente vacio de símbolos para función $\{f^{t(l)} \ / \ l \in L\}$ donde $t: L \rightarrow \mathbb{N}$. y $t(l)$ es la aridad de cada función.

1.4.3. Símbolos de puntuación :

"[", "]", "{", "}", "(", ")", ",", "."

DEF. 1.4.4:

Un término es:

a) Una variable individual $x_1, x_2, \ldots$.

b) Una constante individual $c_1, c_2, \ldots$.

c) Si $t_1, t_2, \ldots t_n$ son términos entonces $f^{n}_{j}(t_1, t_2, \ldots)$ es un término.

Por otro lado, Φ es el conjunto formado por reglas de formación para FBF donde:

a) Si $t_1, \ldots t_n$ son términos entonces $P^{n}_{i}(t_1, \ldots t_n)$ es FBF.

b) Si t_1, t_2 son términos, entonces $t_1 = t_2$ es FBF.

c) Si A y B son FBF y x_i es una variable individual, entonces:

c_1) $A \rightarrow B$

c_2) $\rceil A$

c_3) $A \vee B$

c_4) $A \wedge B$

c_5) $A \leftrightarrow B$

c_6) $\forall x_i A$

c_7) $\exists x_i A$

son FBF.

d) Únicamente lo definido en los incisos a,b,c son FBF.

Dadas las definiciones anteriores, obtenemos las siguientes equivalencias básicas:

- $A \wedge B$ es equivalente a $\rceil(A \rightarrow \rceil B)$.
- $A \vee B$ es equivalente a $\rceil A \rightarrow B$.
- $A \leftrightarrow B$ es equivalente a $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.
- $\exists x_i A$ es equivalente a $\rceil \forall x_i \rceil A$.
- $\forall x_i A$ es equivalente a $\rceil \exists x_i \rceil A$.

DEF. 1.5:

El alcance de los cuantificadores $\forall x_i$ y $\exists x_i$ en $\forall x_i A$ y $\exists x_i A$ respectivamente es A.

DEF 1.6:

En una FBF, un símbolo de variable individual puede aparecer varias veces. A cada una de ellas se le llama "Ocurrencia de Variable".

1.6.1. Una ocurrencia de la variable x_i es acotada $\Leftrightarrow$ o es la variable de algún cuantificador, o está bajo el alcance de algún cuantificador que la mencione.

1.6.2. Una ocurrencia de una variable es libre si no es acotada.

DEF 1.7:

Una FBF en L_* es un enunciado si ninguna variable ocurre libre.

DEF 1.8:

Una FBF en $L_=$ es abierta si no tiene cuantificadores.

En seguida se definen conceptos más generales para extender nuestro lenguaje $L_=$ a un lenguaje más completo.

DEF 1.9:

Un lenguaje de primer orden con igualdad generalizado esta formado de manera similar a $L_=$, pero con las siguientes condiciones:

a) El conjunto de constantes individuales tiene cardinalidad mayor a aleph cero ($\aleph_0$).

b) El conjunto de letras predicativas tiene cardinalidad mayor a $\aleph_0$.

c) El conjunto de letras funcionales tiene cardinalidad mayor a $\aleph_0$.

De aquí en adelante se denotará el lenguaje de primer orden con igualdad generalizado como: $\mathcal{L}$

DEF 1.10:

Sean $\mathcal{L}=\langle S,\Phi\rangle$ y $\mathcal{L}'=\langle S',\Phi'\rangle$. Entonces $\mathcal{L}'$ es una extensión de $\mathcal{L} \Leftrightarrow S \subseteq S'$ y $\Phi=\Phi'$.

Ahora se darán las definiciones de aquellos universos en los cuales se aplican los lenguajes de primer orden.

DEF. 1.11:

Una estructura @ de primer orden es un par ordenado $\langle A , I \rangle$ con A un conjunto no vacío de símbolos, llamado universo de @ , y la función Y de interpretación cuyo dominio son los conjuntos tales que:

1.11.1 I asigna a cada predicado n-ario P^n_j una relación n-aria $R^n \subseteq A^n$ tal que R^n es un conjunto de n-adas de elementos de A

1.11.2 I asigna a cada símbolo de función n-aria f^n, otra función n-aria F^n en A tal que $F^n : A^n \to A$.

1.11.3 I asigna a cada símbolo de constante C_j un elemento a_j del universo A.

DEF 1.12:

Dada una estructura @ con universo A, $\Sigma_@$ es el conjunto de todas las sucesiones s de elementos de A.

Para una interpretación dada una FBF $\mathcal{A}$ sin variables libres, es un enunciado que es verdadero o falso, así una FBF $\mathcal{A}$ con variables libres puede ser satisfecha para algunos valores en el dominio, y no serlo para otros.

DEF 1.13:

Una sucesión s satisface una FBF $\mathcal{A}$ con variables libres $x_{j1},\ldots,x_{jn}$ si la n-ada $\langle s_{j1},\ldots,s_{jn}\rangle$=s satisface $\mathcal{A}$ en su interpretación.

DEF 1.14:

Para una sucesión dada de $s \in \Sigma_{@}$ se define una función S^* que asigna a cada término t un elemento $S^*(t) \in A$ tal que :

1.14.1 Si t es una variable x_j, $S^*(t)$ es s_j, con $s_j \in s$.

1.14.2 Si t es una constante individual C_j, entonces $S^*(t)$ es la interpretación a_j de ésta constante, con a_j fijo en A.

1.14.3 Si f^n es una letra funcional, F^n la operación correspondiente en A y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos, entonces:

$$S^*(f^n(t_1, t_2, \ldots t_n)) = F^n(S^*(t_1), \ldots, S^*(t_n)) \in A.$$

DEF 1.15:

Una sucesión s satisface $\mathcal{A}$ una FBF si:

1.15.1 Si $\mathcal{A}$ es una FBF atómica $P^n{}_i(t_1, \ldots t_n)$ y R^n es la relación n-aria de interpretación, entonces la sucesión $s = <s_1, s_2, \ldots>$ satisface $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ $R^n\ (S^*(t_1), \ldots S^*(t_n))$, esto es si $<S^*(t_1), \ldots S^*(t_n)> \in R^n$.

1.15.2 s satisface $\mathcal{A}$ $\rceil B \Leftrightarrow$ s no satisface B.

1.15.3 s satisface $\mathcal{A}$ $B \rightarrow C \Leftrightarrow$ s no satisface B ó s satisface C.

1.15.4 s satisface $\mathcal{A}$ $\forall x_i B \Leftrightarrow$ para toda sucesión s' que difiere de s en a lo más el i-ésimo lugar se tiene que s' satisface B.

S satisface $\mathcal{A}$ en @ se escribe como $@ \models_s \mathcal{A}$

Ejemplo:

Sea $s=<1,3,5,\ldots>$ y sea $P^2{}_1(x,y)$:"x_1 es menor que x_2" donde $R^2\ (S^*(t_1), S^*(t_2)) = <S^*(t_1), S^*(t_2)> \in R^2$ significa $1<3$ es verdadero.

DEF 1.16:

Una FBF $\mathcal{A}$ es verdadera para la estructura @ , lo que se denota como $@ \models \mathcal{A}$, $\Leftrightarrow$ toda $s \in \Sigma_{@}$ satisface $\mathcal{A}$

Ejemplo:

La fórmula $\mathcal{A}$:$\forall x_1 \exists x_2\ P^2{}_2(f^2{}_1(x_1, x_2), 0)$ donde $P^2{}_2(x_1, x_2)$: " x_1 es igual a 0" y $f^2{}_1(x_1, x_2)$: "x_1 más x_2" es verdadera en la estructura $@=<(Z),(+,0)>$.

DEF 1.17:

Una FBF $\mathcal{A}$ es falsa para la estructura @ $\Leftrightarrow$ ninguna sucesión $s \in \Sigma_{@}$ satisface $\mathcal{A}$, esto se denota como $@ \rceil\models_s \mathcal{A}$.

DEF 1.18:

Una estructura @ es un MODELO M para un conjunto Γ de FBF $\Leftrightarrow$ toda FBF en Γ es verdadera para M, es decir que $\forall \gamma_i \in \Gamma$ sucede que $M \models \gamma_i$.

DEF 1.19:

Una FBF $\mathcal{B}$ es consecuencia lógica de una FBF $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ en toda estructura, para toda sucesión que satisface $\mathcal{A}$, también satisface $\mathcal{B}$.

DEF 1.20:

Para $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ FBF. $\mathscr{A}$ es logicamente equivalente a $\mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{B}$ es consecuencia lógica de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}$ es consecuencia lógica de $\mathscr{B}$.

DEF 1.21:

Una FBF $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}$ está en Forma Normal Prenex (FNP) si es de la forma $Q(x_1) \ldots Q(x_n)\alpha$ donde cada $Q_j(x_j)$ $j \in J$, es un cuantificador universal o un cuantificador existencial y α es una FBF abierta.

<u>TEO 1.1:</u>

Toda FBF $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}$ es lógicamente equivalente a uno en FNP que tiene exactamente las mismas variables libres.

<u>DEM:</u>

Sea $\mathscr{B}$ lógicamente equivalente a $Q\alpha$ donde Q es $Q_1(x_1) \ldots Q_n(x_n)$ y $\mathscr{B}'$ lógicamente equivalente a $Q'\alpha'$ donde Q' es $Q'_1(x'_1) \ldots Q'_n(x'_n)$ y α y α' son abiertos.

P.d. que $\forall \mathscr{A}$ FBF $\models \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{C}$ donde $\mathscr{C}$ es FBF en FNP.

CASO 1

Si $\mathscr{A}$ es atómica entonces $\mathscr{A}$ es una fórmula FNP.

CASO 2

$\mathscr{A}$ es $\neg\mathscr{B}$ entonces $\models \mathscr{A} \leftrightarrow \neg Q\alpha$ y Q_i'' es el cuantificador contrario a Q_i, entonces $\neg Q_1''(x_1), Q_2''(x_2) \ldots Q_n''(x_n) \neg\alpha$.

Por lo tanto $\models \neg Q\alpha \leftrightarrow Q'' \neg\alpha$

Por lo tanto $\models \mathscr{A} \leftrightarrow Q'' \neg\alpha$.

CASO 3

$\mathscr{A}$ es $\mathscr{B} \wedge \mathscr{B}'$

Nota:

1.- Si x_i no ocurre en ϑ y sea Ψ el resultado de reemplezar cada ocurrencia acotada de y_i por x_i, entonces $\models \vartheta \leftrightarrow \Psi$.

2.- Si x_i no es libre en ϑ, entonces $\models [\vartheta \wedge (\exists x_i\ \Psi)] \leftrightarrow \exists x_i\ [\vartheta \wedge \Psi]$ y $\models [\vartheta \wedge \forall(x_i)\ \Psi] \leftrightarrow \forall x_i\ [\vartheta \wedge \Psi]$.

Por (1) podemos suponer que x_i no ocurre en α' y x_j' no ocurre en α entonces por (2), $\models (\mathscr{B} \wedge \mathscr{B}') \leftrightarrow QQ'(\alpha \wedge \alpha')$,

por lo tanto $\models \mathscr{A} \leftrightarrow QQ'(\alpha \wedge \alpha')$

por lo tanto $\models \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{C}$ ∎

" MODELOS Y TEORÍAS DE PRIMER ORDEN"

Para esta sección, veremos una definición importante para las FBF.

DEF 1.22:

Una FBF $\mathscr{A}$ es universalmente válida $\Leftrightarrow \mathscr{A}$ es verdadera para toda interpretación.

Ejemplo:

$\mathscr{A}: \forall x P^1_1(x) \rightarrow \exists x P^1_1(x)$ es universalmente válida.

Dada una fórmula $\mathscr{A}$, el demostrar que es una fórmula universalmente válida se convierte en una tarea tediosa, al tenerse que checar que sea verdadera para toda interpretación las cuales pueden tener un universo universo tan grande como arbitrario. Observando este hecho el método axiomático es la herramienta clave en el estudio de las FBF que tienen cuantificadores, por lo tanto ahora entran en consideración las teorías de primer orden.

Los símbolos de una teoría K de primer orden son de hecho los mismos que se han definido al principio del capitulo; los conectivos, los cuantificadores, etc. En el lenguaje de una teoría K de primer orden se conservan los símbolos antes definidos. De esta forma los términos y las FBF son aquellos términos y FBF cuyos símbolos son símbolos de K.

DEF 1.23:

Una teoría de primer orden K es consistente $\Leftrightarrow$ no existe $\mathscr{A}$ FBF tal que $\mathscr{A}$ y $\neg\mathscr{A}$ son teoremas de K.

<u>TEO 1.2:</u>

Cualquier cálculo de predicados K de primer orden es consistente.

<u>DEM:</u>

Para cada FBF $\mathscr{A}$ de K, se define $h(\mathscr{A})$ como la expresión que se obtiene de $\mathscr{A}$, al quitarle todos los cuantificadores y términos. De esta forma $h(\mathscr{A})$ es una letra proposicional. Así los axiomas del 1 al 5, transformados bajo h son tautologías. Esto nos lleva a que si $h(\mathscr{A})$ y $h(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ son tautologías, entonces $h(\mathscr{B})$ también lo es. Si $\mathscr{A}$ es teorema de K entonces $h(\mathscr{A})$ es tautología.

Por R.A.A., sea K inconsistente, entonces existe una FBF $\mathscr{B}$ tal que $\vdash\mathscr{B}$ y $\vdash\neg\mathscr{B}$ en K entonces $h(\mathscr{B})$ y $\neg h(\mathscr{B})$ son tautologías, lo que es absurdo. Por lo tanto K es consistente■

<u>TEO 1.3:</u>

Todo teorema del cálculo de predicados de primer orden, es universalmente válido.

<u>DEM:</u>

Dados los axiomas del 1 al 5, (universalmente válidos), y las reglas de inferencia Modus Ponens,(M.P.) y Generalización preservan la validéz universal;

Por lo tanto todo teorema del cálculo de predicados es universalmente válido■

LEMA 1.1:

Sea $\mathscr{A}$ una FBF cerrada de K teoría de primer orden, tal que $\neg\vdash\neg\mathscr{A}$ en K, entonces la teoría $K'=K\cup\{\mathscr{A}\}$ es consistente.

DEM:

Por R.A.A. suponemos que K' es inconsistente. Entonces existe $\mathscr{B}$ FBF tal que $\vdash\mathscr{B}$ y $\vdash\neg\mathscr{B}$ en K', pero también $\vdash\mathscr{B}\to(\neg\mathscr{B}\to\neg\mathscr{A})$ en K' aplicando dos veces MP $\vdash\neg\mathscr{A}$ en K'. De esta forma, $\mathscr{A}\vdash\neg\mathscr{A}$ en K, como es cerrado se aplica el Teorema de la Deducción, así $\vdash\mathscr{A}\to\neg\mathscr{A}$ en K, usando otro teorema de K se tiene $\vdash(\mathscr{A}\to\neg\mathscr{A})\to\neg\mathscr{A}$ en K, entonces por M.P. se llega a $\vdash\neg\mathscr{A}$ en K lo que es una contradicción;
Por lo tanto K' es consistente■

DEF 1.24:

Una teoría K de primer orden es completa (sintácticamente), $\Leftrightarrow$ $\forall\ \mathscr{A}$ fórmula cerrada de K sucede que $\vdash\mathscr{A}$ ó $\vdash\neg\mathscr{A}$ en K.

DEF 1.25:

Una teoría K' se dice que es extensión de otra K $\Leftrightarrow$ todos los teoremas de K, también lo son de K' (K' es extensión de K $\Leftrightarrow$ $\forall\mathscr{A}$ FBF $\vdash\mathscr{A}$ en K $\Rightarrow\ \vdash\mathscr{A}$, en K').

LEMA 1.2: (" LEMA DE LINDENBAUM ")

Si K es una teoría de primer orden consistente sintácticamente, posee una extensión consistente y completa en el sentido sintáctico.

DEM:

Sea $\mathscr{B}_1 \ldots \mathscr{B}_n$ una enumeración de FBF cerradas de K y $J_0, J_1, \ldots$ teorías tal que $J_0=K$

$$J_{n+1}=\begin{cases} \text{Si} \quad \neg\vdash\neg\mathscr{B}_{n+1} \text{ en } J_n \Rightarrow J_{n+1}=J_n\cup\{\mathscr{B}_{n+1}\} \\ \text{Si} \quad \vdash\neg\mathscr{B}_{n+1}\Rightarrow J_{n+1}=J_n \end{cases}$$

Sea $J=\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$

a) J_{n+1} es una extensión de J_n

b) J es extensión de todas las J_i

P.D. J es consistente

DEM:

La demostración es por inducción sobre n, para probar que cada J_n es consistente y se aplica el Lema 1.1.

P.D. J es completa (sintácticamente).

DEM:

Sea $\mathscr{A}:\mathscr{B}_{i+1}$ para alguna $i\geq0$
Por una parte se tiene que $\vdash\mathscr{B}_{i+1}$ en J_i, o $\vdash\mathscr{B}_{i+1}$ en J_{i+1}, en J_{i+1}.
si sucede que $\vdash\neg\mathscr{B}_{i+1}$ en J_i, $\Rightarrow J_{i+1}=J_i\cup\{\mathscr{B}_{i+1}\}$
$\vdash\neg\mathscr{B}_{i+1}$ en J, ó $\vdash\mathscr{B}_{i+1}$ en J $\Rightarrow$ J es completa sintácticamente■

TEO 1.4:

Toda teoría K consistente tiene un modelo numerable.

DEM:

Sea K_0 la teoría que resulte de añadir al lenguaje de K un conjunto numerable de nuevas constantes individuales. Sea dicho conjunto $\{b_1, b_2, \ldots\}$.
$K_0=K\cup\{b_1, b_2, \ldots\}$
K_0 es una extensión consistente de K.

Sean $F_1(x_{i_1}), F_2(x_{i_2}), \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas que tengan a lo más una variable libre (x_{i_k}).

Sea S_k la fórmula $\neg(x_{i_k})F_k(x_{i_k}) \rightarrow \neg F_k(b_{j_k})$

Sea K_n la teoría que resulta de añadir a K_0, $S_1, \ldots, S_n$ como axiomas y K_∞ la teoría que resulta de añadir a K_0 todas las S_n como axiomas.

$K_1 = K_0 \cup \{S_1\}$

$K_2 = K_1 \cup \{S_2\}$

.

.

.

$K_n = K_{n-1} \cup \{S_n\} = K_0 \cup \{S_1, \ldots, S_n\}$

$K_\infty = K_0 \cup_{i=1}^{\infty} S_i$

Por inducción sobre n tenemos que K_∞ es consistente.

Por el Lema 1.2 K_∞ posee una extensión J consistente y completa sintácticamente.

Se construye un modelo M para J, donde M es modelo de K_0 y de K_∞.

M=< A,I > tal que A = {"Términos cerrados de K_0"}

P.D. M es modelo de J.

P.D. Para toda $\mathscr{A}$ FBF cerrada M $\models \mathscr{A} \Leftrightarrow\ \vdash \mathscr{A}$ en J.

DEM:

La prueba es por inducción sobre el número de conectivos y cuantificadores de $\mathscr{A}$.

Por lo tanto M es modelo numerable de J y por lo tanto de K ■

COR 1.1:

Toda FBF universalmente válida es un teorema de toda K, teoría de primer orden consistente.

DEM:

Por R.A.A. Sea $\mathscr{A}$ universalmente válida y $\neg\vdash \mathscr{A}$ en K entonces $K' = K \cup \{\neg\mathscr{A}\}$ es consistente.

Así por el Teo.1.4., K' posee modelo M' numerable. Entonces M' $\models \neg\mathscr{A}$ ya que $\neg\mathscr{A}$ es axioma de K' y como $\mathscr{A}$ es universalmente válida M' $\models \mathscr{A}$ que es una contradicción.

Por lo tanto $\mathscr{A}$ FBF, si es universalmente válida, es teorema de K, para K cualquier teoría de primer orden consistente ■

TEO 1.5 : (LÖWENHEIM - SKOLEM)

Si K posee un modelo de cardinalidad β con $\aleph_0 \leq \beta$, entonces posee un modelo M de cardinalidad $\aleph_0$ (numerable).

DEM:

Si K tiene modelo M, entonces K es consistente y por el Teo.1.4, K tiene modelo numerable, y este es de cardinalidad $\aleph_0$. ■

TEO 1.6: (UPWARD)

Si α y β son 2 cardinales cualesquiera con $\alpha \leq \beta$ y K posee modelo de cardinalidad α entonces posee modelo de cardinalidad β.

DEM:

Sea M modelo de K con cardinalidad α, esto es que A tiene α elementos. Sea A' un conjunto de cardinalidad β tal que $A \subset A'$. Extendemos un modelo M a la Interpretación M' tal que su dominio se A' y que cumpla lo siguiente.
Sea $c \in A$ fijo, entonces los elementos pertenecientes a A'-A se comportan como c. Entonces si R^n_j es la interpretación de M de la letra predicativa P^n_j, sea $(R^n_j)'$ la interpretación en M' de P^n_j tal que cualesquiera $d_1, \ldots, d_n$ en A', decimos que $(d_1,\ldots,d_n)\ (R^n_j)' \Leftrightarrow (u_1,\ldots,u_n)\ R^n_j$ donde :
$u_i = d_i$ si $d_i \in A$ y
$u_i = c$ si $d_i \in A'-A$
Las letras funcionales se interpretan de forma similar. Las constantes individuales tienen la misma interpretación que en M.
Finalmente por inducción sobre el número de conectivos y cuantificadores de $\mathscr{A}$ FBF se tiene que M' es modelo de K.
Por lo tanto K posee modelo de cardinalidad β■

COR 1.2:

Toda teoría K consistente tiene un modelo de cardinalidad α con $\alpha \geq \aleph_0$.

DEM:

Como K es consistente por Teo.1.4. admite modelo numerable y por Teo.1.6. admite modelo de cardinalidad α con $\alpha \geq \aleph_0$.■

Definimos un nuevo concepto, modelo normal. Este nuevo concepto será muy importante para la teoría de filtros y productos reducidos que se desarrollara más adelante.

En cualquier modelo para una teoría K de primer orden con igualdad, la relación E en el modelo, corresponde a la otra letra predicativa igual =, donde E es relación de equivalencia. Si ésta relación E es la identidad en el dominio del modelo, entonces se dice que el modelo es normal.

Cualquier modelo para K puede ser compactado a un modelo normal M' para cualquier K si se toma en el dominio de A' de M' como el conjunto de las clases de equivalencia determinada para la relación E en el dominio A de M.

Por una letra predicativa P^n_j con interpretación $(P^n_j)^*$ en M se define la nueva interpretación $(P^n_j)'$ en M' de la siguiente manera:
Para toda clase de equivalencia $[b_1],\ldots,[bn]$en A' determinada por los elementos $b_1,\ldots,b_n$ en A: $(P^n_j)'$ se tiene para $([b_1],\ldots,[b_n])$ ssi $(P^n_j)^*$ se tiene para $(b_1,\ldots,b_n)$, donde esto no depende del representante.

Si $(f^n_j)^*$ es la interpretación de f^n_j en M, entonces se define la nueva interpretación de $(f^n_j)'$ en M' como sigue:
Para toda clase de equivalencia $[b_1],\ldots,[b_n]$ en A', $(f^n_j)'([b_1]),\ldots,[b_n]) = [(f^n_j)^*(b_1,\ldots,b_n)]$, donde también esto es independiente del representante.

Si c es la interpretación de M de una constante individual a_i, entonces la clase de equivalencia [c] es la interpretación de a_i en M'.

La relación E' correspondiente a = en el modelo M" es la relación identidad en A': $E'([b_1],[b_2]) \Leftrightarrow E(b_1,b_2)$, esto es $\Leftrightarrow [b_1]=[b_2]$.

LEMA 1.3:

Si $s=(b_1,b_2,...)$ es una sucesión numerable de elementos de A y $s'=([b_1],[b_2],...)$ es la sucesión correspondiente de clases de equivalencia, entonces s satisface $\mathscr{A}$ FBF en M $\Leftrightarrow$ s' satisface $\mathscr{A}$ FBF en M'.

<u>DEM:</u>

Por inducción sobre el numero de conectivos y cuantificadores de $\mathscr{A}$ ■

Del lema se sigue que para toda FBF $\mathscr{A}$ es verdadera para toda M $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ es verdadera para toda M'.

Del hecho que M es un modelo de K, M' es un modelo normal de K.

<u>TEO 1.7:</u>

Cualquier teoría K de primer orden con igualdad consistente , posee un modelo normal finito o numerable.

<u>DEM:</u>

Por Teo1.4 K tiene un modelo numerable. Se construye M' un modelo normal de K y la cardinalidad de M' es menor o igual que la de M ■

<u>TEO 1.8:</u>

Cualquier teoría de primer orden con igualdad que posee un modelo normal infinito M , tiene un modelo normal numerable.

<u>DEM:</u>

Se añade al lenguaje de K un conjunto numerable de constantes $b_1,b_2,...$; se le agrega a K el conjunto de fórmulas $\neg(b_i=b_j)$ para cada $i \neq j$, como axiomas. De esta forma k se tiene la teoría K'.

P.D. K' es consistente

DEM: Por R.A.A., suponemos que K' es inconsistente

entonces existe $\mathscr{A}$ FBF tal que $\vdash \mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{A}$ en K', pero la prueba sólo usa un número finito de los nuevos axiomas $\neg(b_{i1}=b_{j1}),....,\neg(b_{in}=b_{jn}) \vdash \mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{A}$ en K. se puede compactar M a un modelo normal M' donde se cumplan los axiomas $\neg(b_{i1}=b_{j1}),....,\neg(b_{in}=b_{jn})$ con interpretaciones adecuadas para $b_{i1},....b_{in},b_{j1},...b_{jn}$. Pero en M' son verdaderos los axiomas anteriores y los lógicos, por lo tanto M' $\vdash \mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{A}$. Lo que es una contradicción; por lo tanto K' es consistente y por el Teo. 1.7. tiene un modelo normal finito o numerable N.

Pero K' tiene una cantidad numerable de axiomas $\neg(b_i=b_j)$ con $i \neq j$, así como estos axiomas son verdaderos para N, no puede ser finito, por lo tanto N es numerable ■

"ISOMORFISMOS DE INTERPRETACIONES"

Una interpretación M de $\mathscr{A}$ FBF de alguna teoría K es isomorfo con una interpretación de M' de K $\Leftrightarrow$ existe un isomorfismo g del dominio A de M con el dominio A' de M tal que:

1. Para toda letra predicativa P^n_j de K y para toda $b_1,...,b_n$ en A, $M \models P^n_j[b_1,...,b_n] \Leftrightarrow M' \models P^n_j[g(b_1),...,g(b_n)]$.
2. Para toda letra funcional f^n_j de K y para toda $b_1,....,b_n$ en A, $g((f^n_j)^M(b_1,....,b_n)) = (f^n_j)^{M'}(g(b_1),....,g(b_n))$.
3. Para toda constante individual a_j de K, $g((a_j)^M)=(a_j)^{M'}$.

$M_1 \approx M_2$ indica que M_1 es isomorfo a M_2.

Si $M_1 \approx M_2$ sus dominios correspondientes pueden ser de la misma cardinalidad.

<u>TEO 1.9:</u>

Si g es un isimorfismo de M con M', entonces:

a) Para cualquier $\mathscr{A}$ FBFde K, cualquier sucesión $s=(b_1,b_2,...)$ de elementos de A, y la sucesión correspondiente $g(s)=(g(b_1),g(b_2),....)$, s satisface $\mathscr{A} \Leftrightarrow$ g(s) satisface $\mathscr{A}$.

b) $M \models \mathscr{A} \Leftrightarrow M' \models \mathscr{A}$

<u>DEM:</u>

a) La prueba es por inducción sobre el número de conectivos y cuantificadores en $\mathscr{A}$

b)

$\Rightarrow$) Como $M \models \mathscr{A}$, para toda $s \in \Sigma_M$, s satisface $\mathscr{A}$ por (a) para toda $g(s) \in \Sigma_{M'}$, g(s) satisface $\mathscr{A}$ entonces $M' \models \mathscr{A}$.

$\Leftarrow$) Análogo a la parte anterior ■

"EQUIVALENCIAS ELEMENTALES Y EXTENSIONES ELEMENTALES"

Dos interpretaciones M_1 y M_2 son elementalmente equivalentes ($M_1 \equiv M_2$) si las FBF de K veraderas para M_1 son las mismas FBF verdaderas para M_2. La relación es de equivalencia.

Dos modelos de una teoría completa K puede ser elementalmente equivalente, desde que las FBF verdaderas en ese modelo son precisamente las FBF demostrables en K.

Una observación importante es que los modelos isomorfos son elementalmente equivalentes, pero los elementalmente equivalentes no siempre son isomorfos.

Un modelo M_2 del cálculo de predicados K es extensión de un modelo M_1 de K ($M_1 \subseteq M_2$) si se cumplen las siguientes condiciones:

1. El dominio A_1 de M_1 es un subconjunto A_2 de M_2.
2. Para cualquier constante individual c de K, $c^{M1} = c^{M2}$, donde c^{M1} y c^{M2} son las interpretacione de c en M_1 y M_2 respectivamente.

3. Para cualquier letra funcional f^n_j de K, y cualquier $a_1,...a_n$ en A_1, $(f^n_j)^{M_2}(a_1,....a_n) = (f^n_j)^{M_2}(a_1,....a_n)$.
4. Para cualquier letra predicativa P^n_j de K y cualquier $a_1,....a_n$ en A_1 $M_1 \models P^n_j[a_1,....a_n] \Leftrightarrow M_2 \models P^n_j[a_1,....a_n]$.

Cuando $M_1 \subseteq M_2$ se dice que M_1 es una subestructura o submodelo de M_2.

Sean M_1 y M_2 modelos de algún cálculo de predicados K. M_2 es una extensión elemental de M_1 ($M_1 \leq eM_2$) si :
1. $M_1 \subseteq M_2$.
2. Para cualquier FBF $\mathscr{A}(y_1,...y_n)$ de K y para cualquier $a_1,...,a_n$ en el dominio A_1 de M_1, $M_1 \models \mathscr{A}[a_1,....a_n] \Leftrightarrow M_2 \models \mathscr{A}[a_1,....a_n]$.

En paritcular para cualquier FBF $\mathscr{A}$ de K, $\mathscr{A}$ es verdadera para $M_1 \Leftrightarrow$ es verdadera para M_2.

Si $M_1 \leq eM_2$ entonces M_1 es una subestructura elemental o submodelo elemental de M_2.

Si $M_1 \leq eM_2$ entonces $M_1 \subseteq M_2$ y $M_1 \equiv M_2$ pero si $M_1 \subseteq M_2$ y $M_1 \equiv M_2$ no siempre $M_1 \leq eM_2$.

TEO 1.10:

Sea $M_1 \subseteq M_2$ y para toda FBF $\mathscr{B}(x_1,...x_n)$ de la forma $\exists(y).\mathscr{A}(x_1,...x_n,y)$ y para toda $a_1,....a_n$ en el dominio A_1 de M_1, si $M_2 \models \mathscr{B}[a_1,....a_n]$ entonces existe algún b en A_1 tal que $M_2 \models \mathscr{A}[a_1,....a_n,b]$. Entonces $M_1 \leq eM_2$.

DEM:

P.D. $M_1 \models \mathscr{C}(a_1,...a_n) \Leftrightarrow M_2 \models \mathscr{C}(a_1,...a_n)$ para cualquier FBF $\mathscr{C}(x_1,....x_n)$ y cualquier $a_1 ....a_n$ en A_1.

DEM:

La demostración es por inducción sobre el número de conectivos y cuantificadores de $\mathscr{C}$, donde la base m=0 de la inducción es el inciso (4) de $M_1 \subseteq M_2$. ■

" FILTROS Y ULTRAFILTROS "

En esta sección se mostrarán los elementos principales para la construcción de un modelo no-standard, derivado de los resultados anteriores.

DEF 1.26:

Si A es cualquier conjunto no vacío, entonces $\mathscr{F} \subseteq P(A)$ es llamado un filtro en A si:

1.26.1 $A \in \mathscr{F}$.
1.26.2 $B_1, B_2 \in \mathscr{F}$ implica $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{F}$.
1.26.3 $B \in \mathscr{F}$ y $B \subseteq C$ implica $C \in \mathscr{F}$

El filtro $\mathscr{F} = P(A)$ en A es un filtro impropio, cualquier otro filtro en A es propio.

PROP 1.1:

Sea $B \subseteq A$. el conjunto $\mathscr{F}_B = \{ C / B \subseteq C \subseteq A \}$ es un filtro en A.Los filtros de ésta forma se llaman filtros principales.

DEM:

1) Sea $\mathscr{F}_B = \{ C / B \subseteq C \subseteq A \}$, en particular $B \subseteq A \subseteq A$, entonces $A \in \mathscr{F}_B$.
2) Sean $C_1, C_2 \in \mathscr{F}_B$, entonces $B \subseteq C_1 \cap C_2 \subseteq A$, entonces $C_1 \cap C_2 \in \mathscr{F}_B$.
3) Sea $C_1 \in \mathscr{F}_B$ y $C_1 \subseteq C_2 \subseteq A$ por hipótesis, entonces $B \subseteq C_1 \subseteq C_2$ entonces $C_2 \in \mathscr{F}_B$ ■

DEF 1.27:

$\mathscr{F}$ es un ultrafiltro en A si:
a) $\mathscr{F}$ es un filtro propio en A y,
b) Si $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_1$ es un filtro propio en A, entonces $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1$.

PROP 1.2:

Un filtro $\mathscr{F}$ en A es propio $\Leftrightarrow \phi \notin \mathscr{F}$.

DEM:

$\Rightarrow$]

Suponemos que $\mathscr{F}$ es propio y $\phi \in \mathscr{F}$; como $\mathscr{F}$ es filtro, en particular si $\phi \in \mathscr{F}$ y $\phi \subset B$ entonces $B \in \mathscr{F}$, donde B es un subconjunto arbitrario de A, por lo tanto a $\mathscr{F}$ solamente le queda ser P(A), entonces $\mathscr{F} =$ P(A) es impropio, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\phi \notin \mathscr{F}$.

$\Leftarrow$]

Si $\phi \notin \mathscr{F}$ y $\mathscr{F}$ impropio, entonces $\mathscr{F} =$ P(A), entonces $\phi \in \mathscr{F}$. lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathscr{F}$ es propio ■

PROP 1.3:

Sea X una cadena de filtros propios en A; probar que la unión $\cup(X) = \{a / (\exists B)(B \in X \wedge a \in B)\}$ es un filtro propio en A y $B \subseteq \cup(X)$ para todo B en X.

DEM:

P.D. que $\cup(X)$ es filtro.
1) Si X es una cadena de filtros propios en A, entonces $A \in \mathscr{F}'$ para todo filtro propio, entonces $A \in X$, por lo tanto $A \in \cup(X)$.
2) Si $A_1, A_2 \in \cup(X)$ entonces $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ y $A_1 \cap A_2 \subset A_2$ entonces $A_1 \cap A_2$ pertenece a alguna cadena X, entonces $A_1 \cap A_2 \in \cup(X)$.
3) Sea $A_1 \in \cup(X)$ y $A_1 \subset A_2$, entonces $A_1 \in X$ y como $A_1 \subset A_2$, $A_2 \in X$; por lo tanto $A_2 \in \cup(X)$. Por lo tanto $\cup(X)$ es un filtro.
Finalmente por la forma como esta definido $\cup(X)$ entonces $\phi \notin \cup(X)$, por Prop.1.2. $\cup(X)$ es propio. Si $B \in X$ entonces $B \in \cup(X)$ ■

TEO 1.11:

Si $\mathscr{F}_0$ es un filtro propio en A, entonces existe un ultrafiltro $\mathscr{F}$ en A, tal que $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}$.

DEM:

Se considera el conjunto B de todos los filtros $\mathscr{F}'$ propios tal que $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}'$. B es parcialmente ordenado, entonces se puede extraer una cadena de B que por Prop.1.3. esta acotado por $\cup(X)$ superiormente. Entonces por el Lema de Zorn existe un elemento maximal $\mathscr{F}$ en B, el cual es el ultrafiltro que buscamos, esto es, $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}$ y para todo $\mathscr{F}'$ tal que $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}'$ entonces $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$, por ser maximal ■

TEO 1.12:

Si $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro en A y B $\subseteq$ A, entonces B $\in \mathscr{F}$ ó A-B $\in \mathscr{F}$ pero no ambos.

DEM:

Por RAA.

Caso 1:

Suponemos que B $\in \mathscr{F}$ y A-B $\in \mathscr{F}$ entonces por DEF 1.26.2. $B \cap (A-B) = \phi \in \mathscr{F}$ contradicción. Porqué $\mathscr{F}$ es ultrafiltro.

Caso 2:

Suponemos que B $\notin \mathscr{F}$ y A-B $\notin \mathscr{F}$

Sea $G = \{C \subseteq A \,/\, B \cup C \in \mathscr{F}\}$

P.D. $\mathscr{F} \subseteq G$

DEM:

Sea C $\in \mathscr{F}$. Como $C \subseteq B \cup C$ por DEF 1.26.2 $B \cup C \in \mathscr{F}$, así C $\in$ G. Por lo tanto $\mathscr{F} \subseteq G$.

P.D. G es filtro en A.

DEM:

1) $B \cup A = A \in \mathscr{F}$ y como $\mathscr{F} \subseteq G$, entonces A $\in$ G.

2) Sean C_1, $C_2 \in G$, entonces $B \cup C_1$, $B \cup C_2$, $\in \mathscr{F}$ entonces $(B \cup C_1) \cap (B \cup C_2) = B \cup (C_1 \cap C_2)$, por lo tanto $C_1 \cap C_2 \in G$.

3) Sea $C_1 \in G$ y $C_1 \subseteq C_2$, entonces $B \cup C_1 \subseteq B \cup C_2$, como $B \cup C_1 \in \mathscr{F}$, entonces $B \cup C_2 \in \mathscr{F}$. Por lo tanto $C_2 \in G$.

De las demostraciones anteriores y como $\mathscr{F}$ es ultrafiltro $G = \mathscr{F}$.

De aquí tenemos que si $B \cup (A-B) = A \in \mathscr{F}$ entonces A-B $\in$ G. Por lo tanto A-B $\in \mathscr{F}$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto B ó A-B $\in \mathscr{F}$, pero no ambos ■

DEF 1.28:

Sea un ultrafiltro $\mathscr{F}$ en A. Entonces se define

$$\mu_{\mathscr{F}}(B) = \begin{cases} 1 \text{ si } B \in \mathscr{F}, \\ 0 \text{ si } B \notin \mathscr{F} \end{cases}$$

TEO 1.13:

$\mu(\phi) = 0$, $\mu(A) = 1$.

DEM:

Sabemos que para un ultrafiltro $\mathscr{F}$, $\phi \notin \mathscr{F}$. Por lo tanto $\mu(\phi) = 0$

Para un ultrafiltro $\mathscr{F}$ en A, A $\in \mathscr{F}$. Por lo tanto $\mu(A) = 1$ ■

TEO 1.14:

Si $\mu(B_i) = 0$ con $1 \le i \le n$, entonces $\mu(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = 0$.

DEM:

Por hipótesis $B_i \notin \mathscr{F}$, entonces $A - B_i \in \mathscr{F}$ para $1 \le i \le n$, con $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. De aquí $\cap_{i \in I}(A - B_i) \in \mathscr{F}$, por Morgan se tiene $\cap_{i \in I}(A - B_i) = A - \cup_{i \in I} B_i$.

Entonces $\cup_{i \in I} B_i \notin \mathscr{F}$. Por lo tanto $\mu(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = 0$ ■

Ahora construiremos el modelo no-standard en base a los modelos normales, los ultrafiltros y productos directos reducidos que a continuación se definirán.

Sea K cualquier cálculo de predicados con igualdad, sea J un conjunto no vacío y para cada $j \in J$, sea M_j algún modelo normal de K.

DEF 1.29:

Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro en J. Para cada $j \in J$, D_j se define como el dominio del modelo M_j. Se construye el producto cartesiano $\Pi_{j\in J}$ Dj el cual es el conjunto de todas las funciones f con dominio en J tal que $f(j) \in D_j$ para todo $j \in J$. Si $f \in \Pi_{j\in J}$ Dj f(j) se define como la j-ésima componente de f.

DEF 1.30:

La relación binaria $=_{\mathscr{F}}$ en $\Pi_{j\in J}$ Dj significa: $f =_{\mathscr{F}} g \Leftrightarrow \{ j\in J \,/\, f(j)=g(j) \} \in \mathscr{F}$.
$F=_{\mathscr{F}}g$ se puede interepretar también como f(j)=g(j) casi dondequiera (c.d).
Es claro que la relación $=_{\mathscr{F}}$ es de equivalencia sobre $\Pi_{j\in J}$ Dj.
Dadas las anteriores definiciones la relación $=_{\mathscr{F}}$ divide a $\Pi_{j\in J}$ Dj en clases de equivalencia:
Para cualquier f en $\Pi_{j\in J}$ Dj se define la clase de equivalencia $f_{\mathscr{F}} = \{ g \,/\, f =_{\mathscr{F}} g \}$
Al conjunto de todas las clases de equivalencia se le denota como $\Pi_{\mathscr{F}}$ Dj, por lo tanto: $\Pi_{\mathscr{F}}Dj = \{ f_{\mathscr{F}} \,/\, f \in \Pi_{j\in J} D_j \}$

DEF 1.31:

Un modelo M de K, con dominio $\Pi_{\mathscr{F}}$ Dj cumple las siguientes condiciones:

1.31.1 Sea c cualquier constante individual de K y sea c_j la interpretación de c en M_j. Entonces la interpretación de c en M estara dada por $f_{\mathscr{F}}$ donde f es la función tal que $f(j)=c_j$ para todo j en J. f se denotará como $\{c_j\}_{j\in J}$.

1.31.2 Sea $f^n{}_k$ cualquier letra funcional de K y sea $P^n{}_k$ cualquier letra predicativa de K. Las interpretaciones $(f^n{}_k)^M$ y $(P^n{}_k)^M$ se definen de la siguiente manera:
Sean $(g_1)_{\mathscr{F}},\ldots,(g_n)_{\mathscr{F}}$ elementos cualquiera de $\Pi_{\mathscr{F}}$ Dj
a) $(f^n{}_k)^M((g_1)_{\mathscr{F}},\ldots,(g_n)_{\mathscr{F}})=h_{\mathscr{F}}$, donde $h(j)=(f^n{}_k)^{M_j}(g_1(j),\ldots,g_n(j))$ para todo j en J.
b) $(P^n{}_k)^M((g_1)_{\mathscr{F}},\ldots,(g_n)_{\mathscr{F}})$ se tiene $\Leftrightarrow \{j \,/\, M_j \models P^n{}_k(g_1(j),\ldots,g_n(j))\} \in \mathscr{F}$,
donde en ambos incisos no se depende del representante.
A este modelo M se le denotara como $M = \Pi_{\mathscr{F}} M_j$ y se le llama producto directo reducido. Si $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro, entonces M es llamado, ultraproducto. Si $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro y todos los M_j son el mismo modelo N, entonces $M=N^J{}_F$ se llama ultrapotencia.

<u>TEO 1.15:</u> (" LØS ")

Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro en un conjunto J y sea $M= \Pi_{\mathscr{F}}M_j$ un ultra producto:

a) Sea $s =((g_1)_{\mathscr{F}},(g_2)_{\mathscr{F}},\ldots)$ una sucesión numerable de elementos de $\Pi_{\mathscr{F}}D_j$.Para cada $j\in J$, sea s_j la sucesión numerable $s_j =(g_1(j),g_2(j),\ldots)$ en D_j. Entonces para toda $\mathscr{A}$ FBF de K, s satisface $\mathscr{A} \Leftrightarrow \{ j \,/\, s_j$ satisface $\mathscr{A}$ en $M_j \} \in \mathscr{F}$

b) Para cualquier $\mathscr{A}$ FBF de K, $\mathscr{A}$ es verdadera en $\Pi_{\mathscr{F}}M_j \Leftrightarrow \{j \,/\, M_j \models \mathscr{A}\} \in \mathscr{F}$

DEM:

a) La demostración será por inducción sobre el número de conectivos y cuantificadores de $\mathscr{A}$

Para la base de inducción m=0 se consideran los 3 casos de una FBF atómica. Caso 1, la FBF es cualquier letra predicativa n-aria: caso 2, la FBF es el predicado igualdad con un término expresado como función: caso 3, la FBF es el predicado igualdad con un término expresado como constante.

Base de inducción m=0:

Caso 1:

s satisface $\mathscr{A}$ $P^n_k(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow M \models P^n_k((g_{i1})_J,\ldots,(g_{in})_J)$ lo que es equivalente a tener: $\{ j / M_j \models P^n_k((g_{i1}),\ldots,(g_{in}))\} \in \mathscr{F}$.

Y que significa : $\{ j / S_j$ satisface $P^n_k(x_{i1},\ldots,x_{in})$ en $M_j\} \in \mathscr{F}$

Caso 2:

s satisface $\mathscr{A}$ $x_i = f^n_k(x_{i1},\ldots,x_{in}) \Leftrightarrow M \models (g_{ii}) = f^n_k((g_{i1})_J,\ldots,(g_{in})_J)$ lo que por definición se tiene $\Leftrightarrow \{ j / M_j \models g_i(j) = f^n_k[g_{i1}(j)\ldots g_{in}(j)]\} \in \mathscr{F}$ Lo cual significa $\{ j / s_j$ satisface $x_i = f^n_k(x_{i1},\ldots x_{in})$ en $M_j\} \in \mathscr{F}$

Caso 3:

Es un caso análogo a las dos anteriores.

Ahora suponemos que vale para las FBF que tienen m conectivos y m cuantificadores, lo que será nuestra hipótesis de inducción.

P.D. que vale para $\mathscr{A}$ con n conectivos y n cuantificadores, dado n >m.

Caso 1: $\mathscr{A}$ $\neg\mathscr{B}$:

Por hipótesis inductiva, s satisface $\mathscr{B}$ en M $\Leftrightarrow \{ j / s_j$ satisface $\mathscr{B}$ en $M_j\} \in \mathscr{F}$, s satisface $\neg\mathscr{B}$ en M $\Leftrightarrow \{ j / s_j$ satisface $\mathscr{B}$ en $M_j\} \notin \mathscr{F}$. Por el Teo 1.12 se tiene que $\{ j / s_j$ satisface $\neg\mathscr{B}$ en $M_j\} \in \mathscr{F}$

Caso 2: $\mathscr{A}$ $\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}$

Por hipotesis de inducción s satisface $\mathscr{B}$ en M $\Leftrightarrow \{ j / s_j$ satisface $\mathscr{B}$ en $M_j\} \in \mathscr{F}$; s satisface $\mathscr{C}$ en $\Leftrightarrow \{ j / s_j$ satisface $\mathscr{C}$ en $M_j \} \in \mathscr{F}$ Por lo tanto s satisface $\mathscr{B} \wedge \mathscr{C} \Leftrightarrow \{ j / s_j$ satisface $\mathscr{B}$ en $M_j\} \in \mathscr{F}$ y $\{ j / s_j$ satisface $\mathscr{C}$ en $M_j \} \in \mathscr{F}$, así la intersección de estos conjuntos pertenece a $\mathscr{F}$. Por lo tanto $\{ j / s_j$ satisface $\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}$ en $M_j \} \in \mathscr{F}$.

Caso 3: $\mathscr{A}$ $\exists x_i \mathscr{B}$

$\Rightarrow$]

Suponemos que s satisface $\exists x_i \mathscr{B}$. Entonces existe h en $\Pi_{j \in J} D_j$ tal que s' satisface $\mathscr{B}$ en M, donde s' es igual a s, exceptuando la i-ésima componente de s' que es h_J. Por hipótesis de inducción, s' satisface $\mathscr{B}$ en M $\Leftrightarrow \{ j / s'_j$ satisface $\mathscr{B}$ en $M_j \} \in \mathscr{F}$. Por lo tanto $\{ j / s_j$ satisface $\exists x_i \mathscr{B}$ en $M_j \} \in \mathscr{F}$. ya que si s'_j satisface $\mathscr{B}$ en M_j, entonces s_j satisface $\exists x_i \mathscr{B}$ en M_j.

$\Leftarrow$]

Suponemos que W= $\{ j / s_j$ satisface $\exists x_i \mathscr{B}$ en $M_j \} \in \mathscr{F}$. Para cada j en W, elegimos s'_j tal que s'_i es igual a s_i excepto en a lo más el i-ésimo lugar y s'_i satisface $\mathscr{B}$. Ahora definimos $h \in \Pi_{j \in J} D_j$ de la siguiente manera: para j en W, sea h(j) la i-ésima componente de s'_j y para $j \notin W$.

Elegimos $h(j)$ como un elemento arbitrario de D_j.
Sea s" igual a s excepto en la i-ésima componente, lo cual es h_F.
Entonces $W \subseteq \{ j / s"$, satisface $\mathscr{B}$ en $M_j \} \in \mathscr{F}$. Entonces por hipótesis de inducción, s" satisface $\mathscr{B}$ en M. Por lo tanto, s satisface $\exists x_i \mathscr{B}$ en M.
b) Del inciso a) cualquier $\mathscr{A}$ FBF es verdadera en $\Pi_{\mathscr{F}} M_j \Leftrightarrow$ alguna sucesión satisface $\mathscr{A}$ en M_j. $\Leftrightarrow \{ j / M_j \models \mathscr{A} \} \in \mathscr{F}$ ■

COR 1.3:
Si M es un modelo y $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro en J. Y si $^*M = M^J{}_{\mathscr{F}}$. Entonces $^*M \equiv M$.

DEM:
Sea $\mathscr{A}$ cualquier enunciado; entonces por Teo 1.15.b) $\mathscr{A}$ es verdadera en $^*M \Leftrightarrow$ $\{j/\mathscr{A}$ es verdadera en M$\} \in \mathscr{F}$. Si $\mathscr{A}$ es verdadera en M, $\{ j / \mathscr{A}$ es verdadera en M$\} = J$ $\in \mathscr{F}$. Si $\mathscr{A}$ es falsa en M, $\{ j / \mathscr{A}$ es verdadera en M $\} = \phi \notin \mathscr{F}$ ■

Proponemos el siguiente mapeo. Para c en D dominio de M, sea c^* la función constante tal que $c^*(j)=c$ para todo $j \in J$. Definimos la función Ψ tal que para cada $c \in D$, $\Psi(c)=(c^*)_{\mathscr{F}} \in D^J{}_{\mathscr{F}}$ y el rango de se denota por M^*. Es obvio que M^* contiene las interpretaciones en $^*M$ de las constantes individuales. Además, M^* es cerrado bajo las operaciones $(f^n{}_k)^{*M}$; esto es para $(f^n{}_k)^{*M}((c^*)_{\mathscr{F}},....(c^*)_{\mathscr{F}})=h_{\mathscr{F}}$ donde $h(j)= (f^n{}_k)^M(c_1,...c_n)$para todo $j \in J$, y $(f^n{}_k)^M(c_1,....c_n)$ es un elemento fijo de b en D. También $h_{\mathscr{F}}=(b^*)_{\mathscr{F}}$. Así M^* es una subestructura de $^*M$.

COR 1.4:
Ψ es un isomorfismo de M con M^*, y $M^* \leq e^*M$.

DEM:
1. P.d. Ψ es supreyectiva.
Por construcción.
2. P.d. Ψ es inyectiva.
Para cualquier c,d en D $\Psi(c)=\Psi(d) \Leftrightarrow (c^*)_{\mathscr{F}}=(d^*)_{\mathscr{F}} \Leftrightarrow c^* =_{\mathscr{F}} d^* \Leftrightarrow \{ j / c^*(j)=d^*(j)\} \in \mathscr{F}$, esto es $\{ j / c=d\} \in \mathscr{F}$.
3. P.d. Ψ es morfismo.
Para cualesquiera $c_1 .....c_n$ en D, $(f^n{}_k)^{*M}(\Psi(c_1),....\Psi(c_n))=(f^n{}_k)^{*M}((c^*{}_1),....(c^*{}_n))=h_{\mathscr{F}}$, donde $h(j)=(f^n{}_k)^M(c^*{}_1(j),....c^*{}_n(j))=(f^n{}_k)(c_1,....c_n)$. Así $h_{\mathscr{F}}=((f^n{}_k)^M(c,....c))^*{}_{\mathscr{F}}=$ $\Psi((f^n{}_k)^M(c_1,....c_n))$.
4. P.d. Para cualquier letra predicativa $P^n{}_j$ de K y cualquier $c_1 .....c_n$ en D
$^*M \models P^n{}_k[\Psi(c_1),....\Psi(c_n)] \Leftrightarrow M \models P^n{}_k(c_1,....c_n)$.
$^*M \models P^n{}_k[\Psi(c_1),....\Psi(c_n)] \Leftrightarrow \{j/M \models P^n{}_k(c^*{}_1(j),....c^*{}_n(j))\} \Leftrightarrow \{j/M \models P^n{}_k(c_1,....c_n)\}$ esto es $M \models P^n{}_k[c_1,....c_n]$
como ya se tiene que: $M^* \subseteq {}^*M$.
P.d. $M^* \leq e^*M$
Sea $\mathscr{A}$ una FBF y $(c^*{}_1)_{\mathscr{F}},....(c^*{}_n)_{\mathscr{F}} \in M^*$. Entonces por Teo.1.15(a), $^*M \models \mathscr{A}$ $[(c^*{}_1)_{\mathscr{F}},....(c^*{}_n)_{\mathscr{F}}] \Leftrightarrow \{ j / M \models \mathscr{A}[c^*{}_1(j),....c^*{}_n(j)]\} \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \{ j / M \models \mathscr{A} [c_1,....c_n]\} \in \mathscr{F} \Leftrightarrow M \models \mathscr{A}$ $(c_1,....c_n)$ esto es $M^* \models \mathscr{A}[(c^*{}_1)_{\mathscr{F}},....(c^*{}_n)_{\mathscr{F}}]$ por ser isomorfismo de M en M^* ■

De aquí M^* le llamamos nuestro modelo standar y a $^*M$ se le llamará el modelo no-standard.

Por último para ver que la consistencia se tiene en la teoría de primer orden K, con modelo $^*M$, se prueban los siguientes teoremas.

DEF 1.32:

Sea B un subconjunto de P(A). El filtro generado por B es la intersección $\mathscr{F}$ de todos los filtros sobre A, los cuales incluyen B.

$\mathscr{F} = \cap \{\mathscr{F}_A / B \subset \mathscr{F}_A$ y $\mathscr{F}$ es un filtro sobre A$\}$.

Se dice que B tiene la propiedad de intersección finita $\Leftrightarrow$ la intersección de cualquier número finito de elementos de B es no vacía.

<u>TEO 1.16:</u>("COMPACIDAD")

Sea K un conjunto de enunciados, sea $J= C_F(K)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de K, y para cada $j \in J$, sea M_j un modelo de j. Entonces existe un ultrafiltro $\mathscr{F}$ en J, tal que el ultraproducto $\Pi_{\mathscr{F}} M_j$ es un modelo de K.

<u>DEM:</u>

Para cada $\alpha \in K$, sea C_α el conjunto de todas las $j \in J$, tal que $\alpha \in j$. El conjunto $C=\{C_\alpha / \alpha \in K\}$ tiene la propiedad de intersección finita ya que $\{\alpha_1,...,\alpha_n\} \in C_{\alpha 1} \cap C_{\alpha 2} \cap ... \cap C_{\alpha n}$

Por los Teoremas 1.11 y 1.12, para C se puede extender un ultrafiltro $\mathscr{F}$ en J, tal que $C \subsetneq \mathscr{F}$. Si $j \in C_\alpha$ entonces $\alpha \in j$. Por lo que $M_j \models \alpha$

Así para cada $\alpha \in K$, $C_\alpha \subseteq \{ j / M_j \models \alpha\}$ y $C_\alpha \in \mathscr{F}$

Por lo tanto $\{ j \in J / M_j \models \alpha \} \in \mathscr{F}$;

por el Teo 1.15, $\Pi_{\mathscr{F}} M_j \models \alpha$ para todo $\alpha \in K$.

Por lo tanto $\Pi_{\mathscr{F}} M_j$ es un modelo de K∎

" PRINCIPIO DE FINITUD "

DEF 1.33:

Un conjunto de enunciados K, es consistente $\Leftrightarrow$ M un modelo tal que $M \models K$.

<u>TEO 1.17:</u>

Sea K un conjunto de enunciados, tal que todo subconjunto finito de K es consistente. Entonces K es consistente.

<u>DEM:</u>

Sea j cualquier subconjunto finito de K. Por hipótesis j es consistente. Por Teo 1.4 j tiene un modelo numerable y por el corolario 1.2, el modelo puede ser de cardinalidad mayor a $\aleph_0$.

En general se puede decir que j tiene modelo.

Por Teo 1.16, sea M_j un modelo de $j \in J$, con $J= \{ j / j$ es subconjunto finito de K $\}$.

Entonces existe un ultrafiltro $\mathscr{F}$ en J, tal que el ultraproducto $\Pi_{\mathscr{F}} M_j$ es un modelo de K.

Por definición, como existe un modelo de $\Pi_{\mathscr{F}} M_j$ tal que $\Pi_{\mathscr{F}} M_j \models \alpha$, $\forall \alpha \in K$, entonces K es consistente∎

De todo lo anterior se puede concluir que el modelo no-standard, $^*M$ está construido sobre teorías consistentes.

" LENGUAJES DE ORDEN SUPERIOR "

Hasta ahora se han escrito todos los resultados sobre lenguajes de primer orden y sus estructuras asociadas. Pero veamos que estamos un poco limitados si nos quedamos con estos lenguajes. Tomemos el modelo de los reales $\mathbb{R}$, del cual nos fijamos en uno de sus subconjuntos, los naturales $\mathbb{N}$, el cual cumple el axioma del buen orden que dice: Para todo subconjunto B contenido en $\mathbb{N}$ y distinto del vacio, existe un elemento x tal que x es menor o igual a todo elemento del subconjunto B. Simbolizando tenemos: $\forall B(B \subset \mathbb{N}$ y $B \neq \phi \Rightarrow \exists x(x \in B$ tal que $x \leq y$ $\forall y \in B)$. Pero en un lenguaje de primer orden no se puede cuantificar a la vez sobre individuos y sobre conjuntos de individuos, por esta razón se hace uso de los lenguajes de orden superior que nos permiten simbolizar este tipo de enunciados que tienen cuantificaciones sobre individuos y conjuntos de individuos, conjuntos de conjuntos, etc.

En términos más formales, puede existir α una FBF cerrada, de un lenguaje de primer orden tal que $M \models \alpha$ con M una estructura asociada a un lenguaje de primer orden. Cuando α no existe, se dice que la propiedad o enunciado que se quiere representar no es de primer orden. Estas propiedades se expresan con un lenguaje de orden superior.

Es ahora cuando se toma el concepto de lenguajes de orden superior y sus estructuras asociadas. Donde el objetivo principal es que se construirá un procedimiento para sumergir un lenguaje de orden superior en uno de primer orden.

Sea C un conjunto de individuos, en donde se tendrán en cuenta las siguientes relaciones; entre elementos de C, entre elementos de C y relaciones en C, excepto las relaciones donde se consideren subconjuntos de distinto nivel.

DEF 1.34:

A los elementos de un conjunto C se les llama individuos.

DEF 1.35:

El conjunto T de tipos, es el mínimo conjunto que satisface:

a) $0 \in T$.

b) Si $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$ entonces la sucesión finita $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T$.

Donde $\#T = \aleph_0$ (Aleph cero).

Todo individuo de C tiene tipo 0.

C_τ con $\tau \in T$ denota al conjunto de relaciones de tipo τ. Con esto se tiene que los individuos son relaciones de tipo 0, así $C_0 = C$.

Toda relación $R \subset C_{\tau_1} \times \ldots \times C_{\tau_n}$ se le asigna el tipo $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$

DEF 1.36:

Sea A cualquier conjunto y h una función tal que $h: I \rightarrow A$, con I un conjunto de índices; si h no es inyectiva entonces $\{ h(i) \,/\, i \in I\}$ es un subconjunto de A con repeticiones.

DEF 1.37:

Una estructura M asociada a un lenguaje de orden superior es cualquier conjunto $\{B_\tau\}_{\tau\in T}$ tal que para algún conjunto de individuos C, todo B_τ es subconjunto de C_τ con repeticiones y $B_0=C_0=C$.

DEF 1.38:

Una estructura $M=\{B_\tau\}_{\tau\in T}$ es completa $\Leftrightarrow$ en la función $h_1: T \rightarrow \{B_\tau\}_{\tau\in T}$, para cualquier $\tau\in T$, B_τ contiene todas las relaciones de C_τ.

DEF 1.39:

Una estructura $M=\{B_\tau\}_{\tau\in T}$ es normal $\Leftrightarrow$ $h_1 : T \rightarrow \{B_\tau\}_{\tau\in T}$ y para cada $\tau\in T$, B_τ no contiene ninguna relación de C_τ repetida.

DEF 1.40:

Una estructura es completa y normal $\Leftrightarrow$ $B_\tau = C_\tau \ \forall\ \tau\in T$.

Se definirá un lenguaje $\mathcal{L}^s$ donde el conjunto de predicados esta dado por $\{P_\tau\}_{\tau\in T-\{0\}}$, tal que si $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, la aridad de P_τ es $n+1$.

Si $P_\tau = P_\tau(x,y_1,\ldots,y_n)$ y $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ entonces τ_{i-1} es el tipo del i-ésimo lugar en P_τ.

DEF 1.41:

Una FBF α de $\mathcal{L}^s$ es estratificada $\Leftrightarrow$ toda constante y variable individual que aparece en α, aparece solamente en los lugares del mismo tipo.

DEF 1.42:

Sea K un conjunto de enunciados de $\mathcal{L}^s$ tal que:

a) Toda $\alpha\in K$ es estratificada.

b) Para toda constante individual que aparece en cualquier $\alpha\in K$, el tipo de los lugares en los cuales aparece, es el mismo en toda $\alpha\in K$.

Entonces se dirá que K es un conjunto de enunciados estratificados de $\mathcal{L}^s$.

DEF 1.43:

Sea g un mapeo tal que g : {"Constantes individuales de $\mathcal{L}^s$"} $\rightarrow \{B_\tau\}_{\tau\in T}$ con $\{B_\tau\}_{\tau\in T}$ estructura asociada a un lenguaje de orden superior y g inyectivo.

DEF 1.44:

Un enunciado estratificado α de $\mathcal{L}^s$ es admisible en M bajo g $\Leftrightarrow$ toda constante individual c_j que aparece en α pertenece al conjunto {"Constantes individuales de $\mathcal{L}^s$"} y $g(c_j)\in\{B_\tau\}_{\tau\in T}$ tal que el tipo de $g(c_j)$ es el tipo de los lugares en los cuales c_j aparece en α.

DEF 1.45:

Un enunciado α de $\mathcal{L}$ estratificado y admisible en M bajo g es verdadero en M ($M\models_g\alpha$) $\Leftrightarrow$

a) α: $P_\tau(a,b_1,\ldots,b_n)$. $M\models_g\alpha \Leftrightarrow (g(b_1),\ldots,g(b_n))$ satisface la relación $g(a)$ en M.

b) α: $\neg\beta$. $M\models_g\alpha \Leftrightarrow M\neg\models_g\beta$.

α: $\beta\vee\gamma$. $M\models_g\alpha \Leftrightarrow M\models_g\beta$ o $M\models_g\gamma$.

α: $\beta\wedge\gamma$. $M\models_g\alpha \Leftrightarrow M\models_g\beta$ y $M\models_g\gamma$.

α: $\beta\rightarrow\gamma$. $M \models_g \alpha \Leftrightarrow M \urcorner\models_g \beta$ o $M \models_g \gamma$.

α: $\beta\leftrightarrow\gamma$. $M \models_g \alpha \Leftrightarrow M \models_g \beta\rightarrow\gamma$ y $M \models_g \gamma\rightarrow\beta$.

c) α: $\forall x\beta(x)$. $M \models_g \forall x\beta(x) \Leftrightarrow M \models_g \beta(c_i)$ para toda $c_i \in$("Constantes individuales de $\mathcal{L}^s$") tal que $g(c_i) \in \{B\tau\}$ $\tau\in T$ y su tipo es el tipo de los lugares en los cuales x aparece en α.

d) α: $\exists x\beta(x)$. $M \models_g \exists x\beta(x) \Leftrightarrow$ existe $c_i \in$ {"Constantes individuales de $\mathcal{L}^s$" } donde $M \models_g \beta(c_i)$ tal que $g(c_i) \in \{B\tau\}$ $\tau\in T$ y su tipo es el tipo de los lugares en los cuales x aparece en α.

DEF 1.46:

Si α es un enunciado admisible en M bajo g, tal que no es verdadero en M, entonces es falso en M ($M \urcorner\models_g \alpha$).

DEF 1.47:

Si K es un conjunto de enunciados estratificados y admisibles en M bajo g. $M \models_g K \Leftrightarrow M \models_g \alpha$ $\forall\alpha\in K$.

Se hace una extensión de $\mathcal{L}^s$ a un lenguaje que denotamos $\mathcal{L}'$, de donde $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^s \cup \{O\tau / O\tau$ son predicados de aridad uno $\forall\tau\in T\}$.

Los predicados $O\tau$ se llamarán símbolos de tipo de primer orden.

Se define un mapeo g_1 tal que g_1 : {" FBF estratificadas de $\mathcal{L}^s$ " } $\rightarrow$ {"FBF de $\mathcal{L}'$ " }.

1. Si α es FBF atómica entonces $g_1(\alpha)=\alpha$.
2. Si α:$\urcorner\beta$ entonces $g_1(\alpha)=\urcorner g_1(\beta)$.
   Si α:$\beta\vee\gamma$ entonces $g_1(\alpha)=g_1(\beta)\vee g_1(\gamma)$.
   Si α:$\beta\wedge\gamma$ entonces $g_1(\alpha)=g_1(\beta)\wedge g_1(\gamma)$.
   Si α:$\beta\rightarrow\gamma$ entonces $g_1(\alpha)=g_1(\beta)\rightarrow g_1(\gamma)$.
   Si α:$\beta\leftrightarrow\gamma$ entonces $g_1(\alpha)=g_1(\beta)\leftrightarrow g_1(\gamma)$.
3. Si α:$\exists x\beta$, entonces $g_1(\alpha)=(\exists x O\tau(x) \wedge g_1(\beta))$ donde τ es el tipo de los lugares en los cuales x aparece en β. Si x no aparece en β, entonces τ será del tipo 0.
4. Si α:$\forall x\beta$, entonces $g_1(\alpha)=(\forall x O\tau(x)\rightarrow g_1(\beta))$ donde τ es el tipo de los lugares en los cuales x ocurre en β y si x no aparece en β es del tipo 0.

DEF 1.48:

$g_1(\alpha)=\alpha_{g1}$ es el tipo transformado de α.

A una estructura M asociada a un lenguaje de orden superior, se le asocia una estructura Mg_1 asociada a un lenguaje de primer orden, en la cual el conjunto de individuos es $\{B\tau\}\tau\in T$ y el conjunto de relaciones será $\{R\tau\}\tau\in T$ junto con $\{Q\tau$ con $\tau\in T-\{0\}\}$ donde las $R\tau$ son relaciones de aridad uno y $Q\tau$ son relaciones de la misma aridad de $P\tau$.

DEF 1.49:

Sea $B\in\{B\tau\}\tau\in T$, esto es B es un individuo de Mg_1 entonces $R\tau(B)$ esta en $Mg_1 \Leftrightarrow \tau$ es el tipo de B en M.

DEF 1.50:

Si $Q\tau$ es de aridad n+1 y $\tau=(\tau_1,...,\tau_n)$ y $B, B_1,...,B_n$ son individuos de Mg',
$Mg_1 \models Q\tau(B,B_1,...,B_n) \Leftrightarrow$ B es de tipo τ en M, B_i es de tipo τ_i en M para cada i=1,...,n y la sucesión $(B_1,...,B_n)$ satisface B en M.

A partir del mapeo g definido anteriormente, definimos otro mapeo, al cual le llamamos g´ y g´: {"C.I. y predicados de $\mathcal{L}$'"} $\rightarrow$ $(B\tau)_{\tau\in T} \cup (R\tau)_{\tau\in T} \cup (Q\tau)_{\tau\in T-\{0\}}$ tal que $g'(c_j) \in (B\tau)_{\tau\in T}$ si $c_j \in$ {"C.I. de $\mathcal{L}$'"}, $g'(O\tau) \in (R\tau)_{\tau\in T}$ y $g'(P\tau) \in (Q\tau)_{\tau\in T-\{0\}}$.

TEO 1.18:

Sea α un enunciado estratificado y admisible en M bajo g. $M \models_g \alpha \Leftrightarrow Mg_1 \models_{g'} \alpha_{g1}$.

DEM:

Por inducción sobre el número de cuantificadores de α.

$\Rightarrow$] Base de inducción.

Sea α un enunciado atómico, $\alpha: P\tau(a,b_1,...,b_n)$ con $\tau=(\tau_1,...,\tau_n)$ y $\{g(a),g(b_1),...,g(b_n)\} \subset (B\tau)_{\tau\in T}$.
Tenemos que $M \models_g \alpha \Leftrightarrow (g(b_1),...,(g(b_n))$ satisface $g(a)$ en M y $Mg_1 \models_{g'} \alpha \Leftrightarrow$ $Q\tau(g'(a),g'(b_1),...,g(b_n))$ es una relación en Mg_1, además $g(a)=g'(a)$ y $g(b_i)=g'(b_i)$ con i=1,...,n donde $\{g'(a),g'(b_1),...,g'(b_n)\}$ esta contenida en $(B\tau)_{\tau\in T}$ y como $\alpha=\alpha_{g1}$, entonces $M \models_g \alpha \Leftrightarrow Mg_1 \models_{g'} \alpha_{g1}$.

Suponemos que vale para aquellos enunciados estratificados con n cuantificadores.
Sea $\alpha: \exists x\beta(x)$.
Tenemos que $M \models_g \exists x\beta(x) \Leftrightarrow$ existe $c_j \in$ {"C.I. de $\mathcal{L}^s$"} tal que $M \models_g \beta(c_j)$ con $\beta(c_j)$ estratificada y admisible en M, por hipótesis de inducción $M \models_g \beta(c_j) \Leftrightarrow$ $Mg_1 \models_{g'} g_1(\beta(c_j))$. $g_1(\beta(c_j))$ se puede obtener sustituyendo x por c en $g_1(\beta(x))$, y como $\beta(c_j)$ estratificado $Mg_1 \models_{g'} O\tau(c_j)$ con τ el tipo de los lugares en los cuales c_j ocurre en $\beta(c_j)$, entonces $Mg_1 \models_{g'} O\tau(c_j) \wedge g_1(\beta(c)) \Leftrightarrow Mg_1 \models_{g'} [\exists x(O\tau(x) \wedge g_1(\beta(x)))] \Rightarrow$ $Mg_1 \models_{g'} \alpha_{g1}$.

$\Leftarrow$] Sea $Mg_1 \models_{g'} \alpha_{g1}$ entonces $Mg_1 \models_{g'} O\tau(c_j) \wedge g_1(\beta(c_j))$ para alguna $c_j \in$ {"C.I. de $\mathcal{L}$'"} entonces $Mg_1 \models_{g'} O\tau(c_j)$ y $Mg_1 \models_{g'} g_1(\beta(c_j))$ entonces $\beta(c_j)$ es un enunciado estratificado y admisible en M. Si $\beta(c_j)$ fuera falso entonces $M \urcorner\models_g \beta(c_j) \Rightarrow$ por hipótesis de inducción $Mg_1 \models_{g'} g_1(\beta(c_j))$, lo que es una contradicción.
Por lo tanto $M \models_g \beta(c_j) \Rightarrow M \models_g \exists x\beta(x) \Rightarrow M \models_g \alpha$ ■

" PRINCIPIO DE FINITUD EN ORDEN SUPERIOR "

DEF 1.51:

Un conjunto K de enunciados de $\mathcal{L}^s$ es consistente $\Leftrightarrow$ K es estratificado, admisible y verdadero en M estructura asociada de orden superior.

TEO 1.19:

Sea K un conjunto de enunciados de un lenguaje $\mathcal{L}^s$, si todo subconjunto finito de K es consistente, entonces K es consistente.

DEM:

Sea $\mathcal{L}'$ la extensión de $\mathcal{L}^s$ y $Kg_1 = \{\alpha_{g_1}\}$ para todo $\alpha \in K$.

P.d. Kg_1 es consistente en primer orden.

DEM:

Sea H cualquier subconjunto finito de Kg_1 entonces existe $K' \subset K$ finito tal que $\alpha'_{g_1} \in H$ para toda $\alpha' \in K'$.

Por hipótesis todo K'es consistente, entonces existe M' estructura asociada a un lenguaje de orden superior tal que K' es estratificado, admisible y verdadero en M'. Pero a M' se le puede asociar una estructura $M'g_1$ asociada a un lenguaje de primer orden, entonces por el Teo.1.18. $M' \models K' \Leftrightarrow M'g_1 \models H$ entonces H es consistente. Como H es consistente y es cualquier subconjunto de Kg_1 en su forma de primer orden, por el principio de finitud de primer orden Kg_1 es consistente, esto es $Mg_1 \models Kg_1$ y por el Teo.1.19. $Mg_1 \models Kg_1 \Leftrightarrow M \models K$, entonces K es consistente∎

Ahora se tendrán un considerable número de definiciones para proponer nuestro modelo no-standard respecto a lenguajes de orden superior y sus estructuras asociadas.

DEF 1.52:

Sea K un conjunto de enunciados de un lenguaje de primer orden y α un enunciado. Se dice que α esta definido en K si toda constante individual a todo predicado que ocurre en α también ocurre en K, esto es, ocurre para algún $\alpha' \in K$.

DEF 1.53:

K es contradictoria o inconsistente $\Leftrightarrow$ no es consistente.

DEF 1.54:

α es deducible de K si $K \cup \{\neg\alpha\}$ es contradictoria, lo cual se denota como $K \vdash \alpha$.

DEF 1.55:

Si α es un enunciado estratificado y K un conjunto de enunciados estratificados de un lenguaje de orden superior, entonces, α esta definida en K si todas las constantes individuales que ocurren en α también ocurren en K.

DEF 1.56:

Es admisible en K $\Leftrightarrow K \cup \{\alpha\}$ es estratificado.

DEF 1.57:

α es deducible en K $\Leftrightarrow K \cup \{\neg\alpha\}$ es estratificado y contradictorio.

DEF 1.58:

Sea K un conjunto estratificado de enunciados de un lenguaje $\mathcal{L}^s$ y sea S={"C.I. que ocurren en K" }. El tipo de cada $c \in S$, es el tipo de los lugares en los cuales c ocurre en los enunciados de K.

DEF 1.59:

Si el tipo de una $c \in S$ es $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ entonces c denota una relación binaria.

$\Delta c = \{d \in S / K \vdash (\exists x)(P\tau(c,d,x))\}$.

DEF 1.60:

$c \in S$ es concurrente $\Leftrightarrow$ para todo conjunto finito $\{d_1,...,d_n\} \subset \Delta c$ sucede $K \vdash (\exists x)(P_\tau(c,d_1,x) \wedge ... \wedge P_\tau(c,d_n,x))$.

DEF 1.61:

Sea S_1 el conjunto de todas las C.I. en S tal que son concurrentes. Para toda $c \in S_1$ seleccionamos una C.I. $c' \neq c$ tal que $c' \notin S$, definimos S^c como el conjunto de todas las c' antes definidas.

DEF 1.62:

Para toda $c \in S_1$, sea Kc el conjunto de enunciados α_{cd}:$P_\tau(c,d,c')$ para toda $d \in \Delta c$.

$Ku = \cup Kc(c \in S_1)$.

DEF 1.63:

El conjunto $A = K \cup Ku$ se define como el alargamiento de K.

Sea H un conjunto de enunciados en un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden, y sea $S' = \{$"C.I. que ocurren en H" $\}$, tenemos un mapeo $h: S' \rightarrow S''$ con S'' conjunto de constantes individuales en $\mathcal{L}$. Sea H_1 el conjunto de enunciados que se obtienen de H, sustituyendo cada $c \in S'$ por su imágen $h(c) \in S''$.

<u>TEO 1.20:</u>

Si H_1 es consistente, entonces H es consistente.

<u>DEM:</u>

Por R.A.A. suponemos que H no es consistente y sea β el enunciado que resulta de α por sustituir cada $c \in S'$ por $h(c) \in S''$.

Caso 1:

H no es estratificado.

Entonces existe una c C.I. que aparece en $\alpha \in H$ donde el tipo de los lugares en los que aparece en α, es distinto en alguna ocurrencia, así h(c) que aparece en $\beta \in H_1$, es distinto al tipo de los lugares en los que aparece en alguna ocurrencia, lo que es una contradicción por ser H_1 consistente.

Caso 2:

H no es admisible.

Así existe una constante c en α tal que en el mapeo g: $\{$"C.I. de $\mathcal{L}^s$"$\} \rightarrow (B_\tau)_{\tau \in T}$, g(c) no es del tipo de los lugares en los cuales c aparece en α, de aquí g(h(c)) no es del tipo de los lugares en los cuales h(c) aparece en β, lo que es una contradicción ya que H_1 es consistente.

Caso 3:

H no es verdadero.

Esto es que existe $\alpha \in H$ tal que $\neg \models_{\mathfrak{g}} \alpha$ entonces $H_1 \neg \models_{\mathfrak{g}} \beta$, lo que es una contradicción por ser H_1 consistente.

Por lo tanto H es consistente∎

<u>TEO 1.21:</u>

Sea K un conjunto estratificado de enunciados de un lenguaje $\mathcal{L}^s$. Si K es consistente, entonces A su alargamiento también es consistente.

DEM:

Es suficiente probar que $A_1 = K \cup Ku'$ con Ku' subconjunto finito de Ku es consistente.

Sea $Ku' = \{P_{\tau_1}(c_1, d_{11}, c_1'), \ldots, P_{\tau_1}(c_1, d_{1k_1}, c_1'),$

$P_{\tau_2}(c_2, d_{21}, c_2'), \ldots, P_{\tau_2}(c_2, d_{2k_2}, c_2'),$

$\ldots$

$P_{\tau_n}(c_n, d_{n1}, c_n'), \ldots, P_{\tau_n}(c_n, d_{nk_n}, c_n')\}$

con $c_i \neq c_j$ con $i \neq j$ para $i,j = 1, \ldots, n$.

Como K es consistente, entonces existe M, estructura de orden superior tal que $M \models K$, entonces:

$K \vdash (\exists x)(P_{\tau_1}(c_1, d_{11}, x) \wedge \ldots \wedge P_{\tau_1}(c_1, d_{1k_1}, x) \wedge$

$P_{\tau_2}(c_2, d_{21}, x) \wedge \ldots \wedge P_{\tau_2}(c_2, d_{2k_2}, x) \wedge$

$\ldots$

$P_{\tau_n}(c_n, d_{n1}, x) \wedge \ldots \wedge P_{\tau_n}(c_n, d_{nk_n}, x))$

Esto nos implica la existencia de C.I. $c_1'', \ldots, c_n''$ en $\mathscr{L}^S$ tal que bajo un mapeo g, $g(c_i'') \in \{B_\tau\}_{\tau \in T}$ para $i = 1, \ldots, n$.

Por lo tanto $Ku'' = \{P_{\tau_1}(c_1, d_{11}, c_1''), \ldots, P_{\tau_1}(c_1, d_{1k_1}, c_1''),$

$P_{\tau_2}(c_2, d_{21}, c_2''), \ldots, P_{\tau_2}(c_2, d_{2k_2}, c_2''),$

$\ldots$

$P_{\tau_n}(c_n, d_{n1}, c_n''), \ldots, P_{\tau_n}(c_n, d_{nk_n}, c_n'')\}$

es verdadero en M. Sea $A_2 = K \cup Ku''$. Por Teo.1.20 $S' = \{$"C.I. que ocurren en A_1"$\}$ y $S'' = S' \cup \{c_1'', \ldots, c_n''\}$ donde $h(c_i) = c_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $h(c_i') = c_i''$ para $i = 1, \ldots, n$; y como K y Ku'' son verdaderas en M entonces A_2 es verdadero en M. Lo que nos implica que A_2 es consistente y de aquí A_1 es consistente.

Por el principio de finitud A es consistente ∎

Sobre estos alargamientos de K se construirá un modelo no-standard.

DEF 1.64:

Sea $\Gamma \subset S_1$ y $K_\Gamma = \cup_{c \in \Gamma} Kc$ entonces $K_\Gamma \subset Ku$. Al conjunto $A_\Gamma = K \cup K_\Gamma$ es el alargamiento concurrente de K, el cual denotaremos como el alargamiento Γ de K.

Se tiene que $A_\Gamma \subset A$ y que A_Γ es consistente si K es un conjunto estratificado de enunciados, consistente por el Teo.1.21. Así se tiene $A_{S_1} = A$.

DEF 1.65:

Sea M una estructura tal que $M \models K$, a M le llamaremos el modelo Γ de K si $\forall a \in \Gamma$, existe una C.I. c tal que cada uno de los enunciados $\alpha_{ad}: P_\tau(a, d, c)$ $\forall d \in \Delta a$ es verdadero en M.

Por definición se tiene que un modelo de A_Γ será un modelo Γ de K.

En seguida se construirá el modelo no-standard de A.

Sea N un conjunto numerable de individuos y sean T_1 y T_2 relaciones ternarias sobre A de tipo (0,0,0), estas relaciones tienen el mismo comportamiento de la adición y el producto. Para la igualdad se tomará la relación de identidad sobre N de tipo (0,0), denotada por e.

Sea $M=\{B\tau\}_{\tau\in T}$ normal y compacta. sea g un mapeo tal que:
g: {"C.I. de $\mathcal{L}^s$" } $\rightarrow$ $\{B\tau\}_{\tau\in T}$; y g inyectivo. Sea K el conjunto de todos los enunciados verdaderos en M que solamente involucren condiciones iniciales.

Se considera la relación binaria sobre N que tiene la expresión $x<y$ incluida en los $B_{(0,0)}$, denotaremos a la relación como m en el lenguaje $\mathcal{L}^s$. entonces $P_{(0,0)}(m\ x,y)$ significa $x<y$.

El dominio de m en el primer argumento es N. Sean $d_1,\ldots,d_n$ elementos de N. entonces el enunciado
α:$(\exists y)(P_{(0,0)}(m,d_1,y)\wedge\ldots\wedge P_{(0,0)}(m,d_n,y)$
es verdadero en M. con esto tenemos que es cierto que existe un número natural que es más grande que los números naturales denotados por $d_1,\ldots,d_n$ en el lenguaje $\mathcal{L}^s$. entonces $\alpha\in K$. por lo tanto $K\models\alpha$. de aqui se tiene que m es concurrente para K. Sea $\Gamma=\{q\}$. cualquier modelo Γ de K lo llamaremos un modelo no-standard de orden superior de la aritmética.

DEF 1.66:

Sea $M=\{B\tau\}_{\tau\in T}$ una estructura de orden superior completa y normal. dado g: {"C.I. de $\mathcal{L}^s$" } $\rightarrow$ $\{B\tau\}_{\tau\in T}$ inyectivo. sea K el conjunto estratificado de enunciados admisibles y verdaderos en M. se tiene que $\Gamma=S_1$ es el conjunto de todas las C.I. concurrentes para K. Se dice que toda estructura de oredn superior que sea un modelo Γ de K es un alargamiento de M.

Sea $^*M$ un alargamiento de M tal que tenga como conjunto de individuos a $^*N$, donde $^*N$ es extensión de N y $^*M$ una extensión de M con las siguientes caracteristicas:
Sea $M=\{B\tau\}_{\tau\in T}$ y $^*M=\{^*B\tau\}_{\tau\in T}$. para cualquier $P\in B\tau$ y sea r la C.I. de $\mathcal{L}^s$ tal que $g(r)=P$ y sea $^*R=g(r)$ con $^*R\in\{^*B\tau\}_{\tau\in T}$. $^*R$ debe ser del mismo tipo que R. entonces $^*R\in{}^*B\tau$. por lo tanto la función $f_P: R\rightarrow{}^*R$ es un mapeo inyectivo de $\{B\tau\}_{\tau\in T}\rightarrow\{^*B\tau\}_{\tau\in T}$.

Ahora se trabajará la concurrencia con relaciones de M.

DEF 1.67:

Una relación binaria de R de tipo $\tau=(\tau_1\ \tau_2)$ es concurrente $\Leftrightarrow$ la constante que denota a R es concurrente con respecto a K. esto es R es concurrente $\Leftrightarrow$ para cualquier conjunto finito $\{R_1,\ldots,R_r\}$ de relaciones de tipo τ_1 tal que para algún conjunto $\{R_1',\ldots,R_n'\}$ de relaciones de tipo τ_2. los pares $(P_1,R_1'),\ldots,(R_n,R_n')$ satisfacen R. entonces existe una relación $R\tau$ de tipo τ_2 tal que los pares $(R_1,R\tau),\ldots(R_n,R\tau)$ satisface R.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto de índices I y sea $P=\{(N\ B)/\ B\subseteq A\subseteq I$ y $B\in\mathcal{F}\}$. el dominio del primer argumento de esta relación es $\mathcal{F}$. Si $N_1,\ldots,N_n\in\mathcal{F}$ se tiene que $B=N_1\cap\ldots\cap N_n$ y como $B\in\mathcal{F}$. $B\subseteq N_i\ \forall i=1,\ldots,n$. entonces R es concurrente.

Sea $M=\{B\tau\}_{\tau\in T}$ una estructura de orden superior completa y normal donde $^*M=\{^*B\tau\}_{\tau\in T}$ es un alargamiento de M normal con $B_0=N$ y $^*B_0={}^*N$. en general no sucede que $^*M$ sea completa dado que $^*B\tau$ puede ser un subconjunto propio de $^*N\tau$.

DEF 1.68:

Las relaciones que pertenecen a $^*B\tau$ se les llamará internas y las que pertenecen a $^*N\tau - ^*B\tau$ se les llamará externa.

DEF 1.69:

Cualquier relación interna que pertenezca a $\{B\tau\}_{\tau\in T}$ será llamada una relación standard o sea. una relación es standard si es denotada por una C.I. de K.

TEO 1.22: (" COMPACTIFICACIÓN ")

Sea B un conjunto de conjuntos en M de tipo $\tau'=((\tau))(B\subset B\tau')$. Sea c la C.I. en K la cual denota a B en M y sea $^*B$ el conjunto standard el cual es denotado por c en $^*M$.

Suponemos que la intersección finita de elementos de B es distinta del vacio. Entonces existe una relación interna F de tipo τ en $^*M$ (en $^*B\tau$) tal que todo conjunto standard $^*G\subset{}^*B$, contiene a F.

DEM:

Cualquier conjunto standard $^*G$. denotado por g en K. es un subconjunto de $^*B$ $\Leftrightarrow$ el conjunto G en M. el cual también es denotado por g. está contenido en B. Sea R la relación de M de tipo $\mu=((\tau).\tau)$ tal que es denotada por r en K. el par $(G.G_1)$ satisface R $\Leftrightarrow$ G es de tipo (τ) y $G\subset B$. con G_1 de tipo τ y $G_1\subset G$. Por hipótesis se tiene que la intersección finita de elementos de G es no vacía. entonces R es una relación concurrente. por lo que existe una relación F en $^*M$ tal que el enunciado $P\mu(r,g,f)$ es verdadero en $^*M$ para todo g la cual denota un conjunto standard $^*G\subset{}^*B$ y para la C.I. f la cual denota a F. Por lo tanto F esta contenida en todos los conjuntos standard $^*G$ los cuales estan contenidos en $^*B$■

Sea R en M de tipo $\tau\neq 0$. indicaremos a la relación en $^*M$ como $^*R$ que es denotada por la misma C.I. en K.

Sea M un conjunto en M que se denota por u en K. para todo $U\in M$ en M. $^*U$ es un elemento de $^*M$ en $^*M$. pero si u denota a U en K entonces $M\models P\tau(\mu.u)$ $\forall\tau\in T$ entonces $^*M\models P\tau(\mu.u)$ $\forall\tau\in T$.

TEO 1.23:

El conjunto $^*M$ contiene una relación interna no standard $\Leftrightarrow$ M es infinito.

DEM:

$\Rightarrow)$ Si $M=\phi$ entonces $^*M=\phi$.

Supongamos que M contiene exactamente n elementos y sean $U_1,\ldots,U_n$ dichos elementos tales que son denotados por $u_1,\ldots,u_n$ en K. Supongamos que el tipo de cada U_i con $i=1,\ldots,n$ es ω. entonces el tipo de M es (ω). Sea $\tau=((\omega).\omega)$. entonces el enunciado

$\forall x(P\omega(\mu.x)\rightarrow(P\tau(e_\omega,u_1,x)\vee P\tau(e_\omega,u_2,x)\vee\ldots\vee P\tau(e_\omega,u_n,x)))$ donde e_ω denota la relación de identidad en $N\omega$, es verdadero en M. entonces pertenece a K. Por lo tanto también es verdadero en $^*M$ donde e_ω denota también una relación de identidad en $^*M$. entonces $^*M$ no puede tener otros elementos que no sean $^*U_1\ldots{}^*U_n$ los cuales están denotados por $u_1\ldots u_n$ en K. Por lo tanto para que $^*M$ contenga una relación interna la cual no sea standard M tiene que ser infinito.

$\Leftarrow$] Supongamos que M contiene un número infinito de elementos. Sea R_B la relación binaria en M tal que el par (U,U') satisface $R_B \Leftrightarrow U \in M$, $U' \in M$ y $U \neq U'$. R_B es una relación concurrente, ya que M es infinito, entonces existe una relación F en $^*M$ tal que $(^*U, F)$ satisface R_B para toda relación standard $^*U \in {}^*M$. Por lo tanto F es una relación interna la cual pertenece a $^*M$ y es diferente de todos los elementos standard de $^*M$.

Por lo tanto es no-standard ∎

CAPITULO II

CONSTRUCCIÓN CONJUNTISTA DE UN MODELO NO-STANDARD

" INDIVIDUOS Y SUPERESTRUCTURAS "

El objetivo de este capítulo es dar una construcción no lógica pero no por eso menos formal de un modelo no standard. Esta construcción es más directa y se utiliza teoría de conjuntos para llevarla a efecto.

DEF 2.1:

Un conjunto de individuos esta formado por elementos que no son conjuntos.

DEF 2.2:

Sea S un conjunto de individuos tal que:

$S_0=S$

$S_1=S_0\cup P(S_0)$

...

$S_{i+1}=S_i\cup P(S_i)$.

DEF 2.3:

Sea $S^\wedge=\cup_{i\in N}S_i$, es llamada la superestructura con individuos de S.

A todo $s\in S$ se le llama individuo de $S^\wedge$.

A cada elemento de $S^\wedge-S$ se le llama un conjunto de $S^\wedge$.

DEF 2.4:

Sea $A\subseteq S^\wedge$. A es transitiva en $S^\wedge$ si para todo $x\in A$, $x\in S$ o $x\subseteq A$.

Nota: $\emptyset\subseteq S \Rightarrow \emptyset\in S_1$.

<u>TEO 2.1:</u>

Cada S_i es transitiva en $S^\wedge$.

<u>DEM:</u>

Por inducción sobre la complejidad de los conjuntos S_i.
Base de inducción $i=0$.
S_0 es transitiva ya que $x\in S_0$ es lo mismo que $x\in S$.
Por H.I. suponemos que S_i es transitiva.
P.d. que S_{i+1} es transitiva.
DEM:

Sea $x\in S_{i+1}-S$, entonces $x\in S_i-S$ o $x\in P(S_i)$.
En el primer caso $x\subseteq S_i$ por H.I.
En el segundo caso $x\subseteq S_i$ por definición del conjunto potencia.
Pero si $S_i\subseteq S_{i+1}$, entonces $x\subseteq S_{i+1}$.
Por lo tanto S_{i+1} es transitiva ■

LEMA 2.1:

Si $x\in y$ y $y\in S_i-S$, entonces $x\in S_{i-1}$.

<u>DEM:</u>

Como $y\notin S$, $i>0$. Por definición de S_i, se tiene que $y\in S_{i-1}$ o $y\subseteq S_{i-1}$.
En el primer caso se tiene inmediatamente que $x\in S_{i-1}$.
En el segundo caso como $x\in y$ y a la vez $y\subseteq S_{i-1}$, entonces $x\in S_{i-1}$ ■

TEO 2.2:

$S^\wedge$ es transitiva en $S^\wedge$.

DEM:

Si $x \in S^\wedge - S$, entonces $x \in S_i - S$ para algún i, o $x \in P(S_i)$, y por Teo.2.1., $x \subseteq S^\wedge$ ■

" UNIVERSOS "

DEF 2.5:

Sea S un subconjunto de individuos. Un subconjunto U de $S^\wedge$ es un universo con individuos S si:

a) $\varnothing \in U$.

b) $S \subseteq U$.

c) Si $x, y \in U$ entonces $\{x, y\} \in U$

d) U es transitivo en $S^\wedge$.

Nota: $S^\wedge$ es un universo con individuos S.

A la superestructura $S^\wedge$ se le denomina el universo standard con individuos S. A continuación se hace la construcción de otro universo, llamado el universo no-standard, cuyos individuos incluyen los elementos de S y sus propiedades están relacionadas con las propiedades de $S^\wedge$.

DEF 2.6:

Sea I un conjunto no vacío de índices, sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro en I, y sea μ la medida inducida por $\mathscr{F}$. Se dice que una propiedad de elementos de I se tiene casi dondequiera (c.d), si el conjunto de elementos de I para los cuales la propiedad se tiene, tiene medida 1. Donde la propiedad falla tiene medida 0.

La medida quedará definida como:

$\mu_{\mathscr{F}}: P(I) \to \{0, 1\}$

DEF 2.7:

Sea f una función tal que $f: I \to S^\wedge$, donde $f_i = f(i)\ \forall i \in I$.

DEF 2.8:

Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea $Z = \{f / f: I \to S^\wedge$ con $f_i \in S_n$ c.d$\}$ y $Z = \cup_{n \in N} Z_n$.

DEF 2.9:

Sean $f, g \in Z_0$. $f \sim g$ si $f_i = g_i$ c.d.

TEO 2.3:

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia en Z_0.

DEM:

Es claro que $f \sim f$ y que $f \sim g$ implica $g \sim f$.

P.d. que $\sim$ es transitiva.

DEM:

Supongamos que $f\sim g$ y $g\sim h$, entonces las ecuaciones $f_i=g_i$ y $g_i=h_i$ se tienen c.d.

La ecuación $f_i=h_i$ se tiene siempre y cuando se tengan las 2 anteriores: en consecuencia falla a lo más en la unión de conjuntos cuando cada ecuación falla, esto es en la unión de 2 conjuntos de medida 0. Por lo tanto $f_i=h_i$, así $f\sim h$.

Por lo tanto $\sim$ es una relación de equivalencia$\blacksquare$

DEF 2.10:

Para cada $f\in Z$, sea $\bar{f}=\{g\in Z_0/g\sim f\}$.

Nota: Z_0 queda dividido en clases de equivalencia ajenas $\bar{f}$ donde $W=\{\bar{f}/f\in Z_0\}$.

De la Def.2.10 y la nota se tiene que para $x,y\in S$, si $x\neq y$, entonces $\bar{x}\neq\bar{y}$.

Además $S\subseteq W$ y $\forall x\in S$ se tiene $\bar{x}=x$.

Se definirá ahora un universo $\bar{W}$ con individuos W, al cual se le llama el universo no-standard correspondiente a $S^\wedge$.

Se tiene la superestructura $W^\wedge=\cup_{i\in N}W_i$ donde $W_0=W$, $W_1=W_0\cup P(W_0)$, $W_{i+1}=W_i\cup P(W_i)$. $\bar{W}$ entonces consta de W junto con ciertos conjuntos de $W^\wedge$.

DEF 2.11:

Cada elemento $f\in Z_n$ tiene un correspondiente $\bar{f}\in W_n$ y estos $\bar{f}$ constituyen $\bar{W}$.

DEF 2.12:

A cada $f\in Z_i$ se le asocia una $\bar{f}\in W_i$ $\forall i\in\mathbf{N}$.

DEF 2.13:

Para $f\in Z_{i+1}-Z_i$ se define $\bar{f}=\{\bar{g}/g\in Z_i$ y $g_i\in f_i$ c.d.$\}$, se tiene que para cada $\bar{g}\in\bar{f}$ se tiene que $\bar{g}\in W_i$, por lo tanto $\bar{f}\subseteq W_i$ y $\bar{f}\in W_{i+1}$.

DEF 2.14:

$\bar{W}=\{\bar{f}/f\in Z\}$ con $\bar{W}$ el universo no-standard correspondiente a $S^\wedge$.

Dado que $S^\wedge\subseteq Z$, $\forall s\in S^\wedge$ existe un correspondiente $\bar{s}\in\bar{W}$. Todos los $\bar{s}$ para los cuales $s\in S^\wedge$ son llamados los elementos standard de $\bar{W}$. Los elementos restantes de $\bar{W}$ son llamados los elementos no-standard. En particular los individuos standard son todos los elementos de S; los individuos no-standard son los pertenecientes a $W-S$.

DEF 2.15:

Sean $r,s\in S^\wedge$. Si existe uno y solamente un $t\in S^\wedge$ tal que $<s,t>\in r$ el cual se escribe $r\uparrow s=t$.

La operación $\uparrow$ tiene las siguientes propiedades:
1. Si r es una función y $s\in dom(r)$, entonces $r\uparrow s=r(s)$.
2. $r\uparrow s\in S^\wedge$ para todo $r,s\in S^\wedge$.

LEMA 2.2:

Para $f,g\in Z$ tenemos que $\bar{g}\in \bar{f} \Leftrightarrow g_i\in f_i$ c.d.

<u>DEM:</u>

$\Rightarrow]$ Si $\bar{g}\in \bar{f}$ entonces por definición $g_i\in f_i$ c.d.

$\Leftarrow]$ Sea $f\in Z_n$, y sea $g_i\in f_i$ c.d. Como f_i es un conjunto $\forall i\in I$ no sucede que $f_i\in S$ c.d. Entonces $f_i\in S_n\text{-}S$ c.d., por el lema 2.1 y teo.1.14 $g\in S_{n-1}$ c.d. Así $g\in Z_{n-1}$ y por definición $\bar{g}\in \bar{f}$ ■

LEMA 2.3:

Si $f_i=g_i$ c.d. y $f\in Z_n$, entonces $g\in Z_n$.

<u>DEM:</u>

Por Teo.1.14 $f_i\in S_n$ c.d. y $f_i=g_i$ c.d., juntos implican que $g_i\in S_n$ c.d. ■

LEMA 2.4:

Si $f,g\in Z$ y $f_i=g_i$ c.d. entonces $\bar{f}=\bar{g}$.

<u>DEM:</u>

Por el lema 2.3, sea $f,g\in Z_n$.
Si $n=0$ el resultado se sigue de la definición.
Supongamos que $f,g\in Z_n\text{-}Z_0$, $n>0$.
Como $f_i=g_i$ c.d. se tiene que para cualquier $k\in Z$
$k_i\in f_i \Leftrightarrow \bar{f}=\bar{g} \Leftrightarrow k_i\in g_i$ c.d.
Por el lema 2.2 $\bar{k}\in \bar{f} \Leftrightarrow k_i\in f_i$ c.d. $\Leftrightarrow k_i\in g_i$ c.d. $\Leftrightarrow$ $\bar{k}\in \bar{g}$.
Por lo tanto $\bar{f}=\bar{g}$ ■

LEMA 2.5:

Si $f,g\in Z$ y $\bar{f}\subseteq \bar{g}$, entonces $f_i\subseteq g_i$ c.d.

<u>DEM:</u>

Como $\bar{f}$, $\bar{g}$ son conjuntos, $f,g\notin Z_0$.
Sea $A=\{i\in I/f_i\subseteq g_i\}$.
P.d. $\mu(A)=1$
DEM:

Por R.A.A. suponemos que $\mu(A)=0$.
Para $i\in A$, el conjunto $k_i=\varnothing$. Para $i\in I\text{-}A$, sea k_i tal que $k_i\in f_i$ pero $k_i\notin g_i$. Como para algún n, $f_i\in S_n$ c.d. se tiene por el lema 2.1 y teo 1.14 $k_i\in S_{n-1}$ c.d. Así $k\in Z$, como $k_i\in f_i$ c.d. por el lema 2.2 $\bar{k}\in \bar{f}$. Por hipótesis $\bar{k}\in \bar{g}$ esto es $k_i\in g_i$ c.d. Pero $k_i\notin g_i$ $\forall i\in I\text{-}A$ un conjunto de medida 1; lo que es una contradicción.

Por lo tanto $f_i\subseteq g_i$ c.d. ■

<u>TEO 2.4:</u>

Para $f,g\in Z$ tenemos:

1. $\bar{f}\in \bar{g} \Leftrightarrow f_i\in g_i$ c.d.
2. $\bar{f}=\bar{g} \Leftrightarrow f_i=g_i$.

DEM:

Ambos incisos quedan demostrados con los lemas anteriores, excepto la suficiencia del inciso (2) la cual se probará a continuación:

DEM:

Si $\bar{f}=\bar{g}$ entonces $\bar{f}\subseteq\bar{g}$ y $\bar{g}\subseteq\bar{f}$. Por el Lema 2.4, $f_i\subseteq g_i$ c.d. y $g_i\subseteq f_i$ c.d. Así $f_i=g_i$ c.d. ∎

LEMA 2.6:

Sea $f,g\in Z$. Sea $k_i=\{f_i,g_i\}$ para cada $i\in I$. Entonces $k\in Z$ y $\bar{k}=\{\bar{f},\bar{g}\}$.

DEM:

Sea $f_i\in S_n$ c.d., $g_i\in S_n$ c.d., entonces $k_i\in S_{n+1}$ c.d. Así $k\in Z$. Como $f_i\in k_i$ y $g_i\in k_i$ $\forall i\in I$, de aquí se sigue que $\bar{f},\bar{g}\in\bar{k}$.

Sea $\bar{h}$ cualquier elemento de $\bar{k}$. Entonces $h_i\in k_i$ c.d. Como $h_i\in k_i$ implica que $h_i=f_i$ o $h_i=g_i$ de aquí se sigue que $h_i=f_i$ c.d. o $h_i=g_i$ c.d. Esto es $\bar{h}=\bar{f}$ o $\bar{h}=\bar{g}$.

Por lo tanto $\bar{k}=\{\bar{f},\bar{g}\}$ ∎

LEMA 2.7:

$\bar{W}$ es transitiva en $W^\wedge$.

DEM:

Sea $\bar{f}\in\bar{W}$, $\bar{f}\notin W$. Entonces por definición de $\bar{f}$, consiste de elementos $\bar{g}$ de $\bar{W}$, esto es $\bar{f}\subseteq\bar{W}$ ∎

TEO 2.5:

$\bar{W}$ es un universo con individuos W.

DEM:

El resultado esta contenido en los lemas 2.6 y 2.7. Lo que resta es mostrar que $\emptyset\in\bar{W}$.

Por definición $\emptyset\in S_1\subseteq Z_1$, entonces $\bar{\emptyset}=\{\bar{g}/g_i\in\emptyset$ c.d.$\}=\emptyset$, entonces $\emptyset\in\bar{W}$ ∎

LEMA 2.8:

Sea $f,g,h\in Z$. Entonces $\bar{h}=\{\bar{f},\bar{g}\}\Leftrightarrow h_i=\{f_i,g_i\}$ c.d.

DEM:

Sea $k_i=\{f_i,g_i\}$ $\forall i$. Así por lema 2.6 $\bar{k}=\{\bar{f},\bar{g}\}$. Entonces por Teo.2.4 $\bar{h}=\{\bar{f},\bar{g}\}\Leftrightarrow h_i=k_i$ c.d. con lo que queda demostrado ∎

LEMA 2.9:

Sea $f,g,h\in Z$. Entonces $\bar{h}=<\bar{f},\bar{g}>\Leftrightarrow h_i=<f_i,g_i>$ c.d.

DEM:

Sea $u_i=\{f_i\}$, $v_i=\{f_i,g_i\}$, $k_i=\{u_i,v_i\}$ $\forall i\in I$. Entonces $k_i=<f_i,g_i>$ $\forall i\in I$. Por el lema 2.6 $\bar{u}=\{\bar{f}\}$, $\bar{v}=\{\bar{f},\bar{g}\}$ y $\bar{k}=\{\bar{u},\bar{v}\}=<\bar{f},\bar{g}>$. Por teo.2.4 $\bar{h}=<\bar{f},\bar{g}>\Leftrightarrow h_i=k_i$ c.d. con l.q.q.d. ∎

LEMA 2.10:

Sea $f,g\in Z$. Sea $k_i=f_i\uparrow g_i$ para cada $i\in I$. Entonces $k\in Z$ y $\bar{k}=\bar{f}\uparrow\bar{g}$.

DEM:

Sea $f_i \in S_n$ c.d. para cada $i \in I$.

Caso 1: k_i es la única m tal que $<g_i, m> \in f_i$ c.d.

Entonces $<g_i, k_i> \in f_i$ c.d., por el lema 2.9 $< \bar{g}, \bar{k}> \in \bar{f}$. Suponemos que $< \bar{g}, \bar{h}> \in \bar{f}$, por el lema 2.9 $<g_i, h_i> \in f_i$ c.d. Entonces $h_i = k_i$ c.d. y $\bar{h} = \bar{k}$.

Por lo tanto $\bar{k} = \bar{f} \uparrow \bar{g}$.

Caso 2: $k_i = \emptyset$ y existen l, m tal que $l \neq m$ y $<g_i, l> \in f_i$, $<g_i, m> \in f_i$ c.d.

Entonces en un conjunto de $i \in I$, de medida 1 se puede definir $t_i = u_i$ tal que $t_i \neq u_i$ y $<g_i, t_i> \in f_i$ y $<g_i, u_i> \in f_i$.

En el conjunto de medida 0 donde este caso falla, se tiene un conjunto de medida 0, donde se define $t_i = u_i = \emptyset$. Entonces $t_i, u_i \in S_n$ c.d., esto es que $t, u \in Z$. Por el lema 2.9 $< \bar{g}, \bar{t}> \in \bar{f}$, $< \bar{g}, \bar{u}> \in \bar{f}$ y por teo.2.4 $\bar{t} \neq \bar{u}$. Entonces $\bar{f} \uparrow \bar{g} = \emptyset$. Pero $k_i = \emptyset$ c.d., así $\bar{k} = \emptyset$.

Caso 3: $k_i = \emptyset$ y no existe m tal que $<g_i, m> \in f_i$ c.d.

Suponemos que $< \bar{g}, \bar{h}> \in \bar{f}$ p.a. $h \in Z$. Entonces $<g_i, h_i> \in f_i$ c.d. lo que es una contradicción.

Por lo tanto $\bar{f} \uparrow \bar{g} = \emptyset = \bar{k}$.

Por lo tanto $k \in Z$ y $\bar{k} = \bar{f} \uparrow \bar{g}$ ■

LEMA 2.11:

Sea $f, g, h \in Z$. Entonces $\bar{h} = \bar{f} \uparrow \bar{g} \Leftrightarrow h_i = f_i \uparrow g_i$ c.d.

DEM:

Sea $k_i = f_i \uparrow g_i$ $\forall i$. Por el lema 2.10, $\bar{k} = \bar{f} \uparrow \bar{g}$ y por teo.2.4 se tiene el resultado ■

TEO 2.6:

Sea $f, g, h \in Z$ entonces

1. $\bar{h} = < \bar{f}, \bar{g}> \Leftrightarrow h_i = <f_i = g_i>$ c.d.
2. $\bar{h} = \bar{f} \uparrow \bar{g} \Leftrightarrow h_i = f_i \uparrow g_i$ c.d.

DEM:

El Teorema se prueba aplicando los lemas 2.8 y 2.10. ■

" LENGUAJES "

Para cada universo U, se construye un lenguaje correspondiente $\mathcal{L}_U$, con el cual hablaremos sobre U.

DEF 2.16:

El lenguaje $\mathcal{L}_U$ es la pareja ordenada $\mathcal{L}_U = <S_U, \Phi_U>$ con S_U un conjunto no vacio de simbolos construído de la siguiente manera.

a) Los simbolos: $=, \in, \rceil, \wedge, \exists, (\ ), <\ >, \uparrow, ,$

b) Un conjunto infinito numerable de variables $(x_i)_{i \in I}$

c) Un conjunto infinito numerable de constantes $(c_i)_{i \in I}$, donde c_i es el nombre para $c_i \in U$ en $\mathcal{L}_U$.

Nota: Una expresión es una sucesión finita de elementos de $\mathcal{L}_U$.

DEF 2.17:

Una expresión t es llamada un término de $\mathcal{L}_U$ si existe una sucesión finita de expresiones $t_1,\ldots,t_n=t$ tal que para cad y con $i=1,\ldots,n$.

a) t_i es una variable de $\mathcal{L}_U$

b) t_i es una constante de $\mathcal{L}_U$

c) $t_i=<t_j,t_k>$ donde $j,k<i$

d) $t_i=(t_j \uparrow t_k)$ donde $j,k<i$

Nota: Un término que no contiene variables es un término cerrado.

DEF 2.18:

El conjunto Φ_U es un conjunto no vacío de reglas de formación. Una expresión α es una fórmula bien formada (FBF) de $\mathcal{L}_U$ si existe una sucesión finita de expresiones $\alpha_1,\ldots,\alpha_n=\alpha$ tal que para cada α_i, con $i=1,\ldots,n$.

1. $\alpha_i=(t=u)$ donde t y u son términos de $\mathcal{L}_U$.
2. $\alpha_i=(t\in u)$ donde t y u son términos de $\mathcal{L}_U$.
3. $\alpha_i=\rceil\alpha_j$ donde $j<i$.
4. $\alpha_i=(\alpha_j\wedge\alpha_k)$ donde $j,k<i$.
5. $\alpha_i=(\exists x_j\in t)\alpha_k$ donde $k<i$ y t es un término de $\mathcal{L}_U$ en el cual x_j no ocurre.

Un símbolo puede ocurrir más de una vez en una expresión.

Una ocurrencia de una variable, en la fórmula α es llamada acotada si existe una fórmula β que es parte de α en la cual ocurre x_i donde β es de la forma $(\exists x_i\in t)\gamma$. Una ocurrencia de una variable es libre si no es acotada.

Una FBF es un enunciado si ninguna variable ocurre libre.

Sea t un término de $\mathcal{L}_U$ y sea $\{x_{i1},\ldots,x_{in}\}$ el conjunto de todas las variables que ocurren en t, lo que escribimos como $t=t(x_{i1},\ldots,x_{in})$, entonces $t(c_1,\ldots,c_n)$ es el término cerrado obtenido de reemplazar cada x_{ij} por c_j para $j=1,\ldots,n$.

" SEMÁNTICA ".

Cada término cerrado de $\mathcal{L}_U$ representa un elemento definido de U y cada enunciado de $\mathcal{L}_U$ expresa algo verdadero o falso acerca de U. Para hacer esto más preciso se darán las siguientes definiciones.

DEF 2.19:

Sea t un término cerrado de $\mathcal{L}_U$, se define el valor $|t|_U$ como sigue:

1. $|c|_U=c$ para toda $c\in U$.
2. $|<t,v>|_U=(|t|_U,|v|_U)$.
3. $|(t\uparrow v)|_U=(|t|_U)\uparrow(|v|_U)$.

En seguida se definirá cuando un enunciado de α es verdadero en U lo que se denotará por $U\models\alpha$.

1. $U \models (t=v) \Leftrightarrow |t|_U=|v|_U$
2. $U \models (t\in v) \Leftrightarrow (|t|_U) \in (|v|_U)$
3. $U \models \neg\alpha \Leftrightarrow$ no es el caso en que $U \models \alpha$, que se escribe como $U \neg\models \alpha$ y que significa, α es falso en U.
4. $U \models (\alpha\wedge\beta) \Leftrightarrow U \models \alpha$ y $U \models \beta$.
5. $U \models (\exists x_i \in t)\alpha(x_i) \Leftrightarrow U \models \alpha(c)$ para alguna c.

Ahora se darán las siguientes equivalencias.
1. $(\alpha\vee\beta)=\neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$
2. $(\alpha\rightarrow\beta)=\neg(\alpha\wedge\neg\beta)$
3. $(\alpha\leftrightarrow\beta)=((\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha))$
4. $(\forall x_i \in t)\alpha=\neg(\exists x_i \in t)\neg\alpha$

En seguida definiremos cuando estas FBF son verdaderas.
1. $U \models (\alpha\vee\beta) \Leftrightarrow U \models \alpha$ o $U \models \beta$ o ambos.
2. $U \models (\alpha\rightarrow\beta) \Leftrightarrow$ cualquiera de los dos $U \neg\models \alpha$ o $U \models \beta$.
3. $U \models (\alpha\leftrightarrow\beta) \Leftrightarrow$ cualquiera de los dos ($U \models \alpha$ y $U \models \beta$) o ($U \neg\models \alpha$ y $U \neg\models \beta$).
4. $U \models (\forall x_i \in t)\alpha(x_i) \Leftrightarrow U \models \alpha(c)$ para toda $c \in |t|_U$.

DEF 2.20:

Sea $A \subseteq U$. Entonces A es definible si existe una FBF $\alpha=\alpha(x_i)$ de $\mathcal{L}_U$ tal que
$A=\{c\in U / U \models \alpha(c)\}$
En este caso la FBF α es una definición de A en $\mathcal{L}_U$.

" TEOREMA DE LØS "

Se construyo un lenguaje $\mathcal{L}_U$ para cada universo U. Pero se han construído en especial dos universos: el universo standard S^ y el universo no-standard $\tilde{W}$. La notación para los lenguajes de S^ y W es $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{S^\wedge}$ y ${}^*\mathcal{L}_W$.

Si t es un término cerrado de $\mathcal{L}$ se escribe $|t|=|t|_{\mathcal{L}}$ y si t es un término cerrado de ${}^*\mathcal{L}$ se escribe como $|t|^*=|t|_{{}^*\mathcal{L}}$.

Si α es un enunciado de $\mathcal{L}$ escribimos $\models \alpha$ para $S^\wedge \models \alpha$ y si α es un enunciado de ${}^*\mathcal{L}$ escribimos ${}^*\models \alpha$ para $\tilde{W} \models \alpha$.

DEF 2.21:

Sea λ un término o una FBF de $\mathcal{L}$. Sea ${}^*\lambda$ el término o FBF de ${}^*\mathcal{L}$ obtenida de λ por reemplazamiento de cada constante c en λ por su correspondiente constante $\bar{c}$.

Se hace uso del hecho que para cada $b\in S^\wedge$, $\bar{b}$ es un elemento standard de $\tilde{W}$. Si, en particular $b\in S$ para cada b en λ, entonces ${}^*\lambda=\lambda$. En este caso, λ es simultáneamente un término o FBF de $\mathcal{L}$ y ${}^*\mathcal{L}$.

<u>TEO 2.7:</u>

Sea $t=t(x_1,\ldots,x_n)$ un término de $\mathcal{L}$, sean $g^1,\ldots,g^n\in Z$, y sea $\bar{g}=|{}^*t(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)|^*$ entonces $g_i=|t(g^1_i,\ldots,g^n_i)|$ c.d.

DEM:

La prueba es por inducción en k el número de ocurrencias de "(" y "<" en t.
Base de inducción k=0
Entonces t es una variable o una constante.
Si t es una variable se puede escribir
$t=x_{ij}$ para algún j, $1\leq j\leq n$.
Entonces $\bar{g}=|\bar{g}_j|^*=\bar{g}_j$. Por el Teo.2.4 $g_i=g^j_i$ c.d.
Pero para cada $i\in I$, $g^j_i=|t(g^1_i,\dots,g^n_i)|$.
Si t es una constante, t=C, $C\in S^\wedge$, entonces $^*t=^*\bar{b}$ y $\bar{g}=|\bar{b}|^*=\bar{b}$.
Así por el Teo.2.4 $g_i=b$ c.d.
Pero para todo i, $b=|b|=|t(g^1_i,\dots,g^n_i)|$ c.d.
Lo que nos de la base de inducción.
Suponemos que vale para k.
P.d. que vale para n>k.
Caso 1:

$t=<\nu,\eta>$ donde son ν,η términos con k ocurrencias de "(" y "<".
Sea $\bar{h}=|^*\nu(\bar{g}^1,\dots,\bar{g}^n)|^*$
$\bar{k}=|^*\eta(\bar{g}^1,\dots,\bar{g}^n)|^*$
Por hipótesis de inducción
$h_i=|\nu(g^1_i,\dots,g^n_i)|$ c.d.
$k_i=|\eta(g^1_i,\dots,g^n_i)|$ c.d.
Por definición de $|t|^*$. $\bar{g}=<\bar{h},\bar{k}>$.
Así por el Teo.2.6 y la definición de $|t|$.
$g_i=<h_i,k_i>$ c.d.
$=<|\nu(g^1_i,\dots,g^n_i)|,|\eta(g^1_i,\dots,g^n_i)|>$ c.d.
$=|t(g^1_i,\dots,g^n_i)|$ c.d.

Caso 2:

$t\uparrow=(\nu\uparrow\eta)$ donde son términos que tienen k ocurrencias de " (" y de "<".
donde la prueba es similar a la del caso 1 ■

COR 2.1:

Sea $t=t(x_{i1},\dots,x_{in})$ un término de $\mathcal{L}$, y sean $g^1,\dots,g^n\in Z$. Para cada $i\in I$ sea $h_i=|t(g^1_i,\dots,g^n_i)|$ c.d. entonces $h\in Z$ y $\bar{h}=|^*t(\bar{g}^1,\dots,\bar{g}^n)|^*$.

DEM:

Suponemos que $h\in Z$, sea $g=|^*t(\bar{g}^1,\dots,\bar{g}^n)|^*$
Por el Teo.2.7 $g_i=h_i$ c.d. y por el teo.2.4 $\bar{g}=\bar{h}$.
Ahora se demostrará por inducción semejante a la del Teo 2.7 que $h\in Z$.
Si t es una constante t=C, entonces $h_i=C$ para toda $i\in I$ y $h\in Z$.
Si $t=x_{ij}$ entonces $h=g^j\in Z$.
Por inducción se tiene $t=<\nu,\eta>$ y sea
$k_i=\nu(g^1_i,\dots,g^n_i)$
$l_i=\eta(g^1_i,\dots,g^n_i)$
para todo $i\in I$. Por H.I. suponemos que $k_i,l_i\in S_m$ para algún m y casi todo i.
Entonces $h_i\in S_{m+2}$ para casi todo i.
Finalmente si $t=(\nu\uparrow\eta)$, el argumento es casi el mismo salvo que $h_i\in S_m$ ■

TEO 2.8: ("LØS")

Sea $\alpha=\alpha(x_{i1},\dots,x_{in})$ una FBF de $\mathcal{L}$ y sean $g^1,\dots,g^n\in Z$. Entonces $^*\models{}^*\alpha(\bar{g}^1,\dots,\bar{g}^n)\Leftrightarrow$ $\models\alpha(g^1_i,\dots,g^n_i)$ c.d.

DEM:

Por inducción sobre k, el número de ocurrencias en α de los conectivos $\neg,\wedge,\exists$.

Para la base k=0

$\alpha=(t=v)$ o $\alpha=(t\in v)$.

Si $\alpha=(t=v)$ se tiene $^*\alpha=(^*t=^*v)$. Por el Teo.2.7 y de que si $f,g\in Z$ entonces $\bar{f}=\bar{g} \Leftrightarrow f_i=g_i$ c.d. se tiene $^*\models^*\alpha(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$

$\Leftrightarrow |^*t(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)|^* = |^*v(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)|^*$

$\Leftrightarrow |t(g^1_i,\ldots,g^n_i)|=|v(g^1_i,\ldots,g^n_i)|$ c.d.

$\Leftrightarrow \models\alpha(g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d.

Para $\alpha=(t\in v)$ se sigue un procedimiento análogo, al reemplazar "=" por "$\in$".

Suponemos que el Teorema vale para k conectivos.

P.d. que vale para n>k.

Caso 1:

$\alpha=\neg\beta$

Por hipótesis de inducción

$^*\models^*\alpha(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$

$\Leftrightarrow {}^*\neg\models^*\beta(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$

$\Leftrightarrow$no es el caso que

$\models\beta(g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d.

$\Leftrightarrow \neg\models\beta(g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d.

$\Leftrightarrow \models\alpha(g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d.

Caso 2:

$\alpha=(\beta\wedge\gamma)$

Por hipótesis de inducción

$^*\models^*\alpha(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$

$\Leftrightarrow {}^*\models^*\beta(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$ y $^*\models^*\gamma(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$

$\Leftrightarrow \models\beta(g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d. y $\models\gamma(g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d.

$\Leftrightarrow \models\alpha(g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d.

Caso 3:

$\alpha=\alpha(x_{i1},\ldots,x_{in})=(\exists x_k\in t)\beta(x_k,x_{i1},\ldots,x_{in})$ donde $t=t(x_{i1},\ldots,x_{in})$ es un término de $\mathcal{L}$.

$\Rightarrow]$ Supongamos que $^*\models^*\alpha(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$ y sea $\bar{h}=|^*t(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)|^*$. Entonces por la semántica de $^*\mathcal{L}$, existe una $\bar{g}\in\bar{W}$ tal que $\bar{g}\in\bar{h}$ y $^*\models^*\beta(\bar{g},\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$.
Pero si $f,g\in Z$ entonces $\bar{f}\in\bar{g} \Leftrightarrow f_i\in g_i$ c.d. y por la H.I. $g_i\in h_i$ c.d. y $\models\beta(g_i,g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d.. Por el Teo.2.7 $h_i=|t(g^1_i,\ldots,g^n_i)|$ c.d. Así para casi toda $i\in I$ tenemos $\models\alpha(g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d.

$\Leftarrow]$ Supongamos que $\models\alpha(g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d. Esta condición vale $\forall i\in A$ donde $\mu(A)=1$. Sea $h_i=|t(g^1_i,\ldots,g^n_i)|$ $\forall i\in I$. Por el cor.2.1 $h\in Z$ y $h_i\in S_m$ c.d. Entonces para cada $i\in A$, existe un $v=v(i)$ tal que $v\in h_i$ y $\models\beta(v,g^1_i,\ldots,g^n_i)$.
Sea $g: I\to S^A$ un mapeo tal que $g_i=v(i)$ para $i\in A$, $g_i=\emptyset$ para $i\notin A$. Entonces por la transitividad de S_m, $g_i\in S_m$ para cada $i\in A$ para la cual $h_i\in S_m$; de aquí $g_i\in S_m$ c.d. de modo que $g\in Z$ y para casi toda i $g_i\in h_i$ y $\models\beta(g_i,g^1_i,\ldots,g^n_i)$.
Como tenemos que si $f,g\in Z$ entonces $\bar{f}\in\bar{g} \Leftrightarrow f_i\in g_i$ c.d. y por la H.I. $\bar{g}\in\bar{h}$ y $^*\models^*\beta(\bar{g},\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$.
Por el cor.2.1 $\bar{h}=|^*t(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)|^*$.
Por lo tanto $^*\models^*\alpha(\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$ ■

" PRINCIPIO DE TRANSFERENCIA "

El Teorema de LØS en su caso n=0 es el Principio de Transferencia.

PRINCIPIO DE TRANSFERENCIA:

Sea α un enunciado de $\mathcal{L}$. Entonces $^*\models^*\alpha \Leftrightarrow \models \alpha$.

El Principio de Transferencia (PT) nos suministra de una herramienta básica para el análisis no-standard. Un teorema matemático que es equivalente a $\models \alpha$ para algún α de $\mathcal{L}$ puede ser probado si demostramos $^*\models^*\alpha$.

<u>TEO 2.9:</u>

Sea $\alpha=\alpha(x_i)$, $\beta=\beta(x_i)$ FBF de $\mathcal{L}$ donde $\{c\in S^\wedge / \models \alpha(c)\}=\{c\in S^\wedge / \models \beta(c)\}$ entonces $\{\bar{g}\in W/^*\models^*\alpha(\bar{g})\}=\{\bar{g}\in W/^*\models^*\beta(\bar{g})\}$.

<u>DEM:</u>

Por el Teorema de LØS

$^*\models^*\alpha(\bar{g}) \Leftrightarrow \models \alpha(g_i)$ c.d.

$\Leftrightarrow \models \beta(g_i)$ c.d.

$\Leftrightarrow {}^*\models^*\beta(\bar{g})$ ■

DEF 2.22:

Sea $A=\{c\in S^\wedge / \models \alpha(c)\}$ donde α es FBF de $\mathcal{L}$. Entonces $^*A=\{c\in \bar{W}/^*\models^*\alpha(c)\}$.

COR 2.2:

Sea r un conjunto de $S^\wedge$. Entonces r es un subconjunto definible de $S^\wedge$ y $^*r = \bar{r}$.

<u>DEM:</u>

Se tiene que $r=\{b\in S^\wedge / (b\in r)\}$, por la definición

$^*r=\{\bar{g}\in \bar{W}/^*\models \bar{g}\in \bar{r}\}=\{\bar{g}\in \bar{W}/ \bar{g}\in \bar{r}\}=\bar{r}$ ■

OBSERVACIÓN:

$S^\wedge$ es un subconjunto definible en sí mismo, usando por ejemplo la FBF $\alpha(x_i)=(x_i=x_i)$

$S^\wedge=\{c\in S^\wedge / \models(c=c)\}$ con lo que tenemos $^*S^\wedge=\{c\in \bar{W}/^*\models(c=c)\}=\bar{W}$

Se definirá $S^\wedge=U$ como el universo standard y $\bar{W}={}^*U$ como el universo no-standard.

Además $U-S_i=S^\wedge-S_i\in S^\wedge$ $\forall i\geq 0$. $U-S_i$ es definible usando la FBF $\neg(x_i\in S_i)$:

$U-S_i=\{c\in U/\models\neg(c\in S_i)\}$.

Entonces $^*(U-S_i)=\{c\in{}^*U/^*\models\neg(x_i\in \bar{S}_i)\}={}^*U-\bar{S}_i={}^*U-{}^*S_i$ por el cor.2.2.

Para i=0 tenemos $^*(U-S)={}^*U-\bar{S}={}^*U-{}^*S={}^*U=W$ donde $\bar{S}={}^*S=W$ dado que $\bar{f}\in \bar{S} \Leftrightarrow$ $f_i\in S$ c.d. esto es $\Leftrightarrow f\in Z_0$ y por la definición de W, $\bar{f}\in W \Leftrightarrow f\in Z_0$.

<u>TEO 2.10:</u>

Si $A\subseteq S$, entonces $A\subseteq{}^*A$ y $^*A\cap S=A$.

<u>DEM:</u>

Sea $a\in A$. Entonces $\models(a\in A)$. Por PT $^*\models(a\in{}^*A)$ ya que $^*a=\bar{a}=a$. Por lo tanto $a\in{}^*A$.

Esto muestra que $A\subseteq{}^*A$. Por lo tanto $A\subseteq{}^*A\cap S$.

Ahora sea $a\in{}^*A\cap S$. Como $a\in S$, $^*a=a$. Entonces $^*\models(^*a\in{}^*A)$ de modo que por el PT $\models a\in A$ esto es $a\in A$ ■

TEO 2.11:

Sean $x,y \in U$. Entonces:

1. $x=y \Leftrightarrow {}^*x={}^*y$
2. $x\in y \Leftrightarrow {}^*x\in {}^*y$
3. ${}^*\langle x,y\rangle=\langle {}^*x,{}^*y\rangle$
4. ${}^*(x\uparrow y)=({}^*x\uparrow {}^*y)$

DEM:

Los 4 incisos se demuestran con el cor.2.2: si $f,g\in Z$ entonces $\bar{f}\in \bar{g}$ y $\bar{f}=\bar{g} \Leftrightarrow f_i\in g_i$ c.d. y $f_i=g_i$ c.d., y por el Teo.2.6. ■

TEO 2.12:

Sean A,B subconjuntos definibles de U. Entonces

1. ${}^*(A\cup B)={}^*A\cup {}^*B$
2. ${}^*(A\cap B)={}^*A\cap {}^*B$
3. ${}^*(A-B)={}^*A-{}^*B$

DEM:

Sea $A=\{c\in U/\models\alpha(c)\}$, $B=\{c\in U/\models\beta(c)\}$ entonces

$A\cup B=\{c\in U/\models\alpha(c)\vee\beta(c)\}$

Por lo tanto ${}^*(A\cup B)=\{c\in {}^*U/{}^*\models({}^*\alpha(c)\vee {}^*\beta(c)\}$

$=\{c\in {}^*U/{}^*\models {}^*\alpha(c)\}\cup\{c\in {}^*U/{}^*\models {}^*\beta(c)\}$

$={}^*A\cup {}^*B.$

Los otros 2 casos se demuestran de forma similar ■

COR 2.3:

${}^*\varnothing=\varnothing$, ${}^*\{a_1,\ldots,a_k\}=\{{}^*a_1,\ldots,{}^*a_k\}$.

DEM:

Por el Teo.2.12.

${}^*\varnothing={}^*(U-U)={}^*U-{}^*U=\varnothing$

Para el conjunto se hará la prueba por inducción.

Base para k=1

$d=\{a\}=\{c\in U/\models(c=a)\}$ entonces ${}^*d=\{c\in U/{}^*\models(c={}^*a)\}=\{{}^*a\}$.

P.d. que vale para k+1.

DEM:

Supongamos que vale para k

${}^*\{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}\}={}^*(\{a_1,\ldots,a_k\}\cup\{a_{k+1}\})$

$={}^*\{a_1,\ldots,a_k\}\cup {}^*\{a_{k+1}\}$

$=\{{}^*a_1,\ldots,{}^*a_k\}\cup\{{}^*a_{k+1}\}$

$=\{{}^*a_1,\ldots,{}^*a_k,{}^*a_{k+1}\}$ ■

TEO 2.13:

${}^*U=\cup^{\infty}_{i=0}{}^*(S_i)$.

DEM:

Para cada $S_i\in U$, tenemos ${}^*S_i\in {}^*U$ y como ${}^*U$ es transitiva ${}^*S_i\subseteq {}^*U$. Por lo tanto $\cup^{\infty}_{i=0}{}^*(S_i)\subseteq U$.

Ahora sea $\bar{f}\in {}^*U=\bar{W}$, entonces $f\in Z_i$ para alguna $i\in N$. Como $f_i\in S_i$ c.d. entonces $\bar{f}\in \bar{g} \Leftrightarrow f_i\in g_i$ c.d. tenemos $\bar{f}\in \bar{S}_i={}^*S_i$.

Por lo tanto ${}^*U=\cup^{\infty}_{i=0}{}^*(S_i)$ ■

TEO 2.14:

Sea $B\in U$, $A\in {}^*U$ y sea $A\subseteq {}^*B$. Entonces $A\in {}^*P(B)$.

DEM:

Por Teo.2.13 $A\in {}^*S_i$ para algún $i\in\mathbb{N}$. De aquí

$\models(\forall X\in S_i)(X\subseteq B\rightarrow X\in P(B))$

Por P.T.

${}^*\models(\forall X\in {}^*S_i)(X\subseteq {}^*B\rightarrow X\in {}^*P(B))$

Por lo tanto $A\in {}^*P(B)$ ■

TEO 2.15:

Sea $f\in U$ una función y sea $C\subseteq dom(f)$ entonces ${}^*(f[C])={}^*f[{}^*C]$.

DEM:

$f[C]=\{c\in U/\models(\exists b\in C)(c=f\uparrow b)\}$

Por lo tanto ${}^*(f[C])=\{c\in {}^*U/{}^*\models(\exists b\in {}^*C)(c={}^*f\uparrow b)\}={}^*f[{}^*C]$ ■

" CONCURRENCIA E INTERNALIDAD "

DEF 2.27:

Una relación r es llamada concurrente en U si $r\in U$ y si siempre que $a_1,\ldots,a_n\in dom(r)$, existe un elemento c tal que $\langle a_i,c\rangle\in r$ para $i=1,\ldots,n$.

Para probar el Teorema de Concurrencia se necesita información sobre el conjunto I de índices y el ultrafiltro $\mathcal{F}$ usado en la construcción de $\bar{W}$.

DEF 2.24:

Sea I el conjunto de todas las funciones f tal que:

1. f esta definida en el conjunto de relaciones concurrentes $r\in U$ el cual se definirá como $R=\{r\in U/r$ es concurrente en $U\}$.
2. Para todo $r\in R$, $f(r)$ es un subconjunto finito del $dom(r)$.

DEF 2.25:

Para $f,g\in I$, $f<g \Leftrightarrow f(r)\subseteq g(r)\ \forall r\in R$.

DEF 2.26:

Para $f,g\in I$, $h=f\vee g \Leftrightarrow h\in I$ esta definida como $h(r)=f(r)\cup g(r)\ \forall r\in R$.

DEF 2.27:

Para todo $f\in I$, se define $\Gamma_f=\{g\in I/f<g\}$.

LEMA 2.12:

$\Gamma_f\cap\Gamma_g=\Gamma_{f,g}$.

DEM:

$h\in\Gamma_f\cap\Gamma_g \Leftrightarrow f<h,\ g<h$

$\Leftrightarrow \forall r,\ f(r)\subseteq h(r),\ g(r)\subseteq h(r)$

$\Leftrightarrow \forall r, f(r)\cup g(r)\subseteq h(r)$

$\Leftrightarrow f\vee g<h$

$\Leftrightarrow h\in\Gamma_{f,g}$ ■

LEMA 2.13:

Sea $G=\{\Gamma_f / f\in I\}$. Entonces G es un filtro principal en I.

<u>DEM:</u>

1. Como $f\in\Gamma_f$ tenemos que $\forall f\in I,\ \Gamma_f\neq\emptyset$. Por lo tanto $\emptyset\notin G$.
2. Si $\Gamma_f,\Gamma_g\in G$, entonces por el lema 2.12 $\Gamma_f\cap\Gamma_g=\Gamma_{f.g}\in G$.
3. Si $f_0(r)=\emptyset\ \forall r\in R$, se tiene $f_0\in I$ de modo que $\Gamma_{f_0}\in G$. Por lo tanto $G\neq\emptyset$ ■

Por el Teo.1.11 $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en I tal que $G\subseteq\mathcal{F}$.

LEMA 2.14:

$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en I tal que $\Gamma_f\in\mathcal{F}\ \forall f\in I$.

<u>DEM:</u>

Por el lema 2.13 y Teorema 1.11. ■

DEF 2.28:

Sea $r\in R$, tal que $r\in S_k$. Sea $m: I\rightarrow U$ un mapeo tal que para cada $f\in I$, $\langle a,m_f\rangle\in r$ $\forall a\in f(r)$. Como $r\in R$ y $f(r)$ es un subconjunto finito de dom(r) el mapeo existe.

Se definirá $c=\overline{f}$, de modo que $c\in{}^*U$.

LEMA 2.15:

Para cada $a\in \mathrm{dom}(r)$, $\langle a,m_f\rangle\in r$ c.d.

<u>DEM:</u>

Sea a un elemento fijo del dom(r) y sea $T_a=\{f\in I/\langle a,m_f\rangle\in r\}$
Se probará que $\mu_{\mathcal{F}}(T_a)=1$, esto es que $T_a\in\mathcal{F}$.
Se define $g\in I$ como:

$$g(X)=\begin{cases}\{a\} & \text{si } X=r\\ \emptyset & \text{si } X\neq r\end{cases}$$

Por el lema 2.13 $\Gamma_g\in\mathcal{F}$
Basta con demostrar que $\Gamma_g\subseteq T_a$

$$\begin{aligned}\text{Si } f\in\Gamma_g &\Rightarrow g<f\\ &\Rightarrow g(r)\subseteq f(r)\\ &\Rightarrow a\in f(r)\\ &\Rightarrow \langle a,m_f\rangle\in r\\ &\Rightarrow f\in T_a\ ■\end{aligned}$$

<u>TEO 2.16:</u>(" CONCURRENCIA ")

Sea r una relación concurrente en U. Entonces existe un elemento $c\in{}^*U$ tal que $\langle{}^*a,c\rangle\in{}^*r\ \forall a\in \mathrm{dom}(r)$.

<u>DEM:</u>

Sea $c=\overline{m}$ y sea $h_f=\langle a,m_f\rangle\ \forall f\in I$. Como se tiene que si $f,g\in Z$ entonces $\overline{h}=\langle\overline{f},\overline{g}\rangle\Leftrightarrow h_f=\langle f_f,g_f\rangle$ c.d., entonces $\overline{h}=\langle\overline{a},\overline{m}\rangle=\langle{}^*a,c\rangle$. Por lema 2.15, $h_f\in r$ c.d. y además si $f,g\in Z$ entonces $\overline{f}\in\overline{g}\Leftrightarrow f_f\in g_f$ c.d. entonces $\overline{h}\in\overline{r}={}^*r$.
Por lo tanto $\langle{}^*a,c\rangle\in{}^*r$ ■

Se asume que $\mathbf{N}\subseteq S$, esto es, el conjunto de los naturales están incluidos en el universo no-standard. Entonces $\mathbf{N}\in S_1$, de modo que $\mathbf{N}\in S^\wedge$, $P(\mathbf{N})\in S^\wedge$ y así sucesivamente. Por el Teo.2.10 $\mathbf{N}\subseteq {}^*\mathbf{N}$.

Sea la relación $L=\{<x,y>/\ x\in\mathbf{N},\ y\in\mathbf{N},\ x<y\}$. Es claro que L es concurrente y como $dom(L)=\mathbf{N}$ y si $a_1,\ldots,a_n\in\mathbf{N}$ y c es el alargado de $a_1,\ldots,a_n$ entonces $a_1Lb,\ldots,a_nLb$. Por el Teo.2.16 existe un elemento $b\in{}^*U$ tal que $<a,b>\in{}^*L\ \forall a\in\mathbf{N}$. Como $L\subseteq\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ se tiene que ${}^*L\subseteq{}^*\mathbf{N}\times{}^*\mathbf{N}$. Por lo tanto $c\in{}^*\mathbf{N}$. Si $c\in\mathbf{N}$, entonces b es un número natural alargado y como esto no es cierto se concluye que $c\in{}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$. Por lo tanto ${}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}\neq\emptyset$. Como $c\in{}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ por Teo.2.10 $c\notin S$, esto significa que b es un individuo no-standard.

<u>TEO 2.17:</u>

Si $v\in{}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ y $n\in\mathbf{N}$ entonces $n<v$.

<u>DEM:</u>

Por R.A.A.

Suponemos que $v\leq n$ para algún $n\in\mathbf{N}$. Sea n el entero más pequeño que lo cumple.

Tenemos que $\vdash(\forall x\in\mathbf{N})(x\leq 0\rightarrow x=0)$

Por P.T.

${}^*\vdash(\forall x\in{}^*\mathbf{N})(x\leq 0\rightarrow x=0)$

Por la semántica de ${}^*\mathcal{L}$, $v\leq 0$. Por lo tanto $n\neq 0$. De esta manera haciendo $n=m+1$ tenemos que $m\in\mathbf{N}$ y $m<v\leq m+1$. Pero $v\neq m+1$ porque $m+1$ es standard, por lo tanto $m<v<m+1$, pero $\vdash(\forall x\in\mathbf{N})\rceil(m<x<m+1)$. Como $v\in{}^*\mathbf{N}$, por el PT $\vdash\rceil(m<v<m+1)$ lo que es una contradicción.

Por lo tanto $n<v$ ■

DEF 2.29:

Para $v\in{}^*\mathbf{N}$, se llama finito si $v\in\mathbf{N}$ e infinito si $v\in{}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$.

<u>TEO 2.18:</u>

Sea $A\subseteq{}^*\mathbf{N}$ tal que $A\in{}^*U$, $A\neq\emptyset$. Entonces A tiene un elemento mínimo.

<u>DEM:</u>

Sea $P(\mathbf{N})$. Por Teo.2.14 $A\in{}^*P(\mathbf{N})$. Como todo subconjunto no vacío de $\mathbf{N}$ tiene un elemento mínimo

$\vdash(\forall X\in P(\mathbf{N}))(X=\emptyset\vee(\exists m\in X)(\forall x\in X)(m\leq x))$

Por P.T.

${}^*\vdash(\forall X\in{}^*P(\mathbf{N}))(X=\emptyset\vee(\exists m\in X)(\forall x\in X)(m\leq x))$

Como $A\in{}^*P(\mathbf{N})$ y $A\neq\emptyset$, por la semántica de ${}^*\mathcal{L}$ existe un elemento $m\in A$ tal que $m\leq x$ para cualquier $x\in A$.

Por lo tanto m es el elemento mínimo ■

COR 2.4:

${}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}\notin{}^*U$.

<u>DEM:</u>

Si ${}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}\in{}^*U$ tendría primer elemento, lo cual es una contradicción ■

DEF 2.30:

Los conjuntos de $W^\wedge$ que pertenecen a $^*U$ son llamados conjuntos internos.

DEF 2.31:

Los conjuntos de $W^\wedge$ que no son internos son conjuntos externos.

TEO 2.19: (" INTERNALIDAD ")

Sea A un conjunto interno y sea B un subconjunto definible de $^*U$. Entonces $A \cap B$ es interno.

DEM:

Sea $B=\{c\in{}^*U/{}^*\models\alpha(c)\}$ para alguna FBF $\alpha=\alpha(x)$ de $^*\mathcal{L}$. Sean $\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n$ todas las constantes que ocurren en α. Sean $y_1,\ldots,y_n$ n variables que no ocurren en α, y sea $\gamma=\gamma(x,y_1,\ldots,y_n)$ la FBF que se obtiene de α con el reemplazamiento de cada $\bar{g}^i$ por la variable correspondiente y_i en todas sus ocurrencias. De este modo γ es una FBF de $\mathcal{L}$ tal que $^*\gamma=\gamma$ y $\alpha(x)=\gamma(x,\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)$

Por el Teo.2.8

$B=\{\bar{h}\in{}^*U/{}^*\models\gamma(\bar{h},\bar{g}^1,\ldots,\bar{g}^n)\}$

$=\{\bar{h}\in{}^*U/\models\gamma(h_i,g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d.$\}$

Como A es interno, $A=\bar{g}$ para algún $g\in Z$ y tenemos que $g\in Z_n$.

Se define k por $k_i=\{c\in g_i//\models\gamma(b,g^1_i,\ldots,g^n_i)\}$ para todo $i\in I$.

Como $g_i\in S_n$ c.d. y $\forall i\in I$, $k_i\subseteq g_i$, tenemos que $k_i\in S_{n+1}$ c.d.

Por lo tanto $k\in Z$.

Finalmente basta con demostrar que $\bar{k}=A\cap B$

Tenemos que $\bar{h}\in A \Leftrightarrow \bar{h}\in\bar{g} \Leftrightarrow h_i\in g_i$ c.d.

Por lo tanto $A\cap B=\{\bar{h}\in{}^*U/h_i\in g_i$ c.d. y $\models\gamma(h_i,g^1_i,\ldots,g^n_i)$ c.d.$\}$

$=\{\bar{h}\in{}^*U/h_i\in k_i$ c.d.$\}$

$=\{\bar{h}\in{}^*U/\bar{h}\in\bar{k}\}=\bar{k}$ ∎

TEO 2.20:

Si A y B son internos, AxB también lo es.

DEM:

Usando el Teo.2.13.

Sean $A,B\in{}^*S_i$

Así $\models(\forall X\in S_i)(\forall Y\in S_i)(\exists Z\in S_{i+3})(Z=X\times Y)$

Por P.T.

$\models(\forall X\in{}^*S_i)(\forall Y\in{}^*S_i)(\exists Z\in{}^*S_{i+3})(Z=X\times Y)$

Por la semántica de $^*\mathcal{L}$ tenemos $C\in{}^*S_{i+3}$ tal que $C=A\times B$ y por Teo.2.13 C es interno ∎

TEO 2.21: ("FUNCIÓN INTERNA")

Sea $f: A\rightarrow B$ donde A,B son subconjuntos internos de $^*U$. Sea $v=v(x)$ un término de $^*\mathcal{L}$ tal que $f(a)=|v(a)|^*$ para cada $a\in A$. Entonces f es interno.

DEM:

Tenemos que $f=\{c\in{}^*U/{}^*\models(\exists x\in A)(\exists y\in B)(c=\langle x,y\rangle\wedge y=v(x))\}$

Por lo tanto f es un subconjunto definible de $^*U$. También $f\subseteq A\times B$ y por Teo.2.20 AxB es interno.

Por lo tanto f es interno ∎

" ELEMENTOS Y PROPIEDADES NO-STANDARD "

En el este capítulo se dará una construcción de los elementos no-standard basándose en los 3 tipos de construcción para modelos no-standard mencionados en los capítulos anteriores.

A continuación se hará la construcción del modelo que es elementalmente equivalente pero que no es isomorfo al campo ordenado de los reales. Esta construcción se basa en el concepto de ultrapotencias (Mendelson).

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Sea K un cálculo de predicados de primer orden generalizado con igualdad que tiene los siguientes símbolos:

1. Para cada número real r, existe una constante individual a_r.
2. Para toda operación n-aria φ en $\mathbb{R}$ existe una letra funcional f_φ.
3. Para toda relación n-aria Φ en $\mathbb{R}$ existe una letra predicativa A_Φ.

Proponemos a $\mathbb{R}$ como el dominio de un modelo $\mathscr{R}$ de K donde $(a_r)^{\mathscr{R}}=r$, $(f_\varphi)^{\mathscr{R}}=\varphi$ y $(A_\Phi)^{\mathscr{R}}=\Phi$.

Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro no principal en el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales. De donde se construye la ultrapotencia $^*\mathscr{R}=\mathscr{R}^{\mathbb{N}}{}_{\mathscr{F}}$, en la cual su dominio es $^*\mathbb{R}=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}{}_{\mathscr{F}}$. Por el cor.1.3 $^*\mathscr{R}\equiv\mathscr{R}$ y por lo tanto $^*\mathscr{R}$ tiene todas las propiedades en K que $\mathscr{R}$ tiene. Por el cor.3.1, $^*\mathscr{R}$ tiene un submodelo elemental $\mathscr{R}^\#$, el cual es isomorfo a la imagen de $\mathscr{R}$. El dominio $\mathbb{R}^\#$ de $\mathscr{R}^\#$ consiste de todos los elementos $(c^\#)_{\mathscr{F}}$ correspondientes a la función constante $c^\#(i)=c$ para todo $i\in\mathbb{N}$. De aquí los miembros de $\mathbb{R}^\#$ serán los números reales y los elementos de $^*\mathbb{R}-\mathbb{R}^\#$ se llaman los reales no-standard.

En seguida se mostrará que el conjunto de los reales no-standard es distinto del vacío.

Sea $n(j)=j$ para todo $j\in\mathbb{N}$. Entonces $n_{\mathscr{F}}\in{}^*\mathbb{R}$. Se tiene que, $(c^\#)_{\mathscr{F}}<n_{\mathscr{F}}$ para todo $c\in\mathbb{R}$, en virtud del Teo.1.15 y del hecho que $\{j/c^\#(j)<n(j)\}=\{j/c<j\}$, por ahora el conjunto de todos los números naturales más grandes que un número real fijo es el complemento de un conjunto finito, en el ultrafiltro $\mathscr{F}$. $n_{\mathscr{F}}$ es un real no-standard infinitamente grande, donde la relación < usada en la afirmación $(c^\#)_{\mathscr{F}}<n_{\mathscr{F}}$ es la relación en la ultrapotencia $^*\mathscr{R}$ correspondiente a la letra predicativa < de K.

Como $^*\mathscr{R}$ conserva todas las propiedades de $\mathscr{R}$ que se cumplen en K, $^*\mathscr{R}$ es un campo ordenado que tiene al campo de los números reales $\mathscr{R}^\#$ como un subcampo propio, donde $^*\mathscr{R}$ es no Arquimediano ya que el elemento $n_{\mathscr{F}}$ es más grande que todos los números naturales $(n^\#)_{\mathscr{F}}$ de $^*\mathscr{R}$.

Sea R, el conjunto de elementos finitos de $^*\mathbb{R}$, el cual contiene a los elementos z; tal que $|z|<v$ para algún v en $\mathbb{R}^\#$. Sea R_0 el conjunto de infinitesimales de $^*\mathbb{R}$, que contiene a los elementos z tal que $|z|<v$ para todo número real positivo v en $\mathbb{R}^\#$. El reciproco $1/n_{\mathscr{F}}$ es un infinitesimal.

CAPITULO III

ELEMENTOS Y PROPIEDADES NO-STANDARD

Sea $x\in R$. Sea $A=\{v \ / \ v\in{}^*\mathbb{R} \wedge v<x\}$ y $B=\{ v \ / v\in{}^*\mathbb{R} \wedge v\geq x\}$. Entonces (A,B) es una cortadura y por lo tanto determina un único número real r tal que:

1. $\forall x\ (x\in A\rightarrow x\leq r)$.
2. $\forall x\ (x\in B\rightarrow x\geq r)$.

PROP. 3.1:

La diferencia x-r es infinitesimal.

DEM:

Suponemos que x-r no es infinitesimal.

Entonces, $|x-r|>r_1$ para un número real positivo r_1.

Caso 1: $x>r$

Entonces $x-r > r_1$ de donde $x > r + r_1 > r$, pero $r+r_1 \in A$ lo que contradice (1).

Caso 2: $x<r$

Entonces $r - x > r_1$ de donde $r > r - r_1 > x$, de aquí $r - r_1 \in B$, lo que contradice (2) ■

El número real r tal que x-r es un infinitesimal, se llama la parte standard de x, y se define st(x). Si $x\in\mathbb{R}$, entonces st(x)=x. $x\approx y$ significa que st(x)=st(y). $x\approx y$ se interpretan como x y y son cercanos.

El conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales es un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. En la teoría K existe una letra predicativa N que correspopnde a la propiedad $x\in\mathbb{N}$. Así, en ${}^*\mathbb{R}$ existe un conjunto ${}^*\mathbb{N}$ de elementos que satisfacen la FBF N(x). Un elemento $f_{\mathcal{F}}$ de ${}^*\mathbb{R}$ satisface $N(x) \Leftrightarrow \{ j \ / \ f(j)\in\mathbb{N} \}\in\mathcal{F}$. Los elementos $m^*_{\mathcal{F}}$ para $m\in\mathbb{N}$, son los elementos standard de ${}^*\mathbb{N}$, mientras $n_{\mathcal{F}}$ es un natural no-standard en ${}^*\mathbb{R}$.

Ahora consideremos la construcción por lenguajes de orden superior (Robinson), y por superestructuras (Davis).

Consideremos al modelo ${}^*\mathcal{N} = \langle {}^*\mathbb{N}, \{{}^*+, {}^*\cdot, {}^*\leq, {}^*0, {}^*|\ |\ \} \rangle$ donde es ${}^*\mathcal{N}$ es un alargamiento para $\mathcal{N}$. Si α es un enunciado en $\mathcal{L}^s$ tal que α:$(\forall x\in\mathbb{N})(0\leq x)$ entonces $\mathcal{N}\models(\forall x\in\mathbb{N})(0\leq x) \Leftrightarrow {}^*\mathcal{N}\models(\forall x\in{}^*\mathbb{N})(0\leq x)$.

Ahora suponemos $\mathcal{N}\subseteq S$, entonces $\mathbb{N}\in S$, lo que implica que $\mathbb{N}\in S^\wedge$ y $P(\mathbb{N})\in S^\wedge$.

Si $A\subseteq S$ entonces $A\subseteq{}^*A$ y ${}^*A\cap S=A$ tenemos que $\mathbb{N}\subseteq{}^*\mathbb{N}$. Ahora se da la relación $M=\{(x,y)/x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N}, x<y\}$. Afirmación: M es concurrente: en efecto ya que dom(M)=$\mathbb{N}$ y $\forall a_1,\dots,a_n\in\mathbb{N}$, si b es más grande que todas las a_i para $i=1,\dots,n$ entonces $(a_1,c)\in M,\dots,(a_n,c)\in M$, lo que demuestra la afirmación. Aplicando el Teo.2.16, se afirma que existe un elemento b en ${}^*\mathbb{N}$ tal que $(a,b)\in{}^*M$ $\forall a\in\mathbb{N}$ donde ${}^*a=a$. Supongamos que $b\in\mathbb{N}$, entonces ${}^*c=c$ y ${}^*\models({}^*a,{}^*c)\in{}^*M(\forall a\in\mathbb{N})$, aplicando el PT $\models(a,c)\in M$, se tiene que $a<c$ $\forall a\in\mathbb{N}$, lo que implica que se tiene un natural que es más grande que todos, lo que es una contradicción. Por lo tanto $c\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$;

Por lo tanto ${}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}\neq\emptyset$.

De $^*\mathbf{N}-\mathbf{N}\neq\emptyset$ se puede afirmar lo siguiente:

1. $\mathbf{N}\subset{}^*\mathbf{N}$.
2. $\mathbf{N}$ es un segmento inicial de $^*\mathbf{N}$.
3. Si S es un conjunto interno de relaciones en $^*\mathcal{N}$, entonces todos los elementos de S son internos.
4. No existe $m\in{}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ tal que sea el más pequeño de todos los elementos de $^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$.

<u>TEO 3.1:</u>

El conjunto de naturales que pertenecen a $^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ es externo en $^*\mathcal{N}$.

<u>DEM:</u>

Sea $E(\mathcal{N})$ el conjunto estratificado de enunciados admisibles y verdaderos en $\mathcal{N}$. Además el enunciado " Todo subconjunto no vacío de elementos de $\mathbf{N}$ tiene un elemento mínimo" es verdadero en $\mathcal{N}$ que se expresa con el enunciado $\alpha:\forall x((\exists y\phi_{(0)}(x,y))\rightarrow[\exists y\phi_{(0)}(x,y)\wedge(\forall z\phi_{(0)}(x,z)\rightarrow(\phi_{(0,0)}(e,y,z)\vee\phi_{(0,0)}(q,y,z))])$, por lo tanto α también es verdadero en $^*\mathcal{N}$, entonces todo conjunto interno no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo y como $^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ no tiene ese elemento, entonces $^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ no es interno. Por lo tanto $^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ es externo en $^*\mathcal{N}$ ∎

<u>TEO 3.2:</u>

$\mathbf{N}$ es externo en $^*\mathcal{N}$.

<u>DEM:</u>

Sea $\alpha:\forall x\exists y\forall z\,(\neg\phi_{(0)}(x,z)\leftrightarrow\phi_{(0)}(y,z))$ un enunciado verdadero en $\mathcal{N}$, entonces $\alpha\in E(\mathcal{N})$, entonces $^*\mathcal{N}\models\alpha$. α establece que para todo conjunto de tipo (0), existe otro conjunto, el cual es su complemento, pero en $^*\mathcal{N}$ "conjunto" se interpreta como conjunto interno, entonces si $\mathbf{N}$ fuera un conjunto interno entonces $^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ también sería interno, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathbf{N}$ es externo en $^*\mathcal{N}$ ∎

Ahora vamos a definir el modelo no-standard para $\mathfrak{R}=\langle\mathbf{R},(+,\bullet,\leq,0,1,|\ |)\rangle$. Se define $E(\mathfrak{R})$, el conjunto estratificado de enunciados admisibles y verdaderos en $\mathfrak{R}$. Sea r un individuo tal que r y sea $G=\{e(r,b_i)\ /\ b_i\}$ donde e es la igualdad.

Afirmación: $E(\mathfrak{R})G$ no es contradictorio.

En efecto: Por R.A.A. Supongamos que es contradictorio, entonces $\exists G'\subset G$ y $G'\neq\phi$ tal que $E(\mathfrak{R})\cup G'$ es contradictorio, sea $G'=\{\neg e(r,b_1),\ldots,\neg e(r,b_n)\}$ entonces $E(\mathfrak{R})\cup\{\neg e(r,b_1),\ldots,\neg(r,b_n)\}$ es contradictorio, entonces $E(\mathfrak{R})\vdash e(r,b_1)\wedge\ldots\wedge e(r,b_n)$ así $E(\mathfrak{R})\vdash\exists x[e(r,b_1)\wedge\ldots\wedge e(r,b_n)]$ y por la inconsistencia se tiene $E(\mathfrak{R})\vdash\forall x\ [e(x,b_1)\vee\ldots\vee e(x,b_n)]$, de aquí, si interpretamos en $\mathfrak{R}$, implica que todo $x\in\mathfrak{R}$ es alguno de los b_i $i=1,\ldots,n$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $E(\mathfrak{R})\cup G$ es consistente, por lo tanto tiene un modelo $^*\mathfrak{R}$ donde $^*\mathfrak{R}=\langle{}^*\mathbf{R},(^*+,{}^*\bullet,{}^*,0,1,{}^*|\ |)\rangle$ y $\mathbf{R}{}^*\mathbf{R}$ dado que $^*\mathbf{R}$ contiene elementos distintos a $\mathbf{R}$ en $^*\mathfrak{R}$, entonces $^*\mathfrak{R}$ es un modelo no-standard ∎

$^*\mathfrak{R}$ tiene las siguientes propiedades:

1. $^*\mathbf{N}\subset{}^*\mathbf{R}$.
2. $^*\mathfrak{R}$ es campo ordenado ya que el enunciado "$\mathfrak{R}$ es campo ordenado pertenece a $E(\mathfrak{R})$".
3. $^*\mathfrak{R}$ no es arquimediano, ya que existen $a\in{}^*\mathbf{R}-\mathbf{R}$ tales que $r<a$ $\forall r\in\mathbf{R}$.

DEF 3.1:

El conjunto de los finitos está dado por $F = \{a \in {}^*\mathbb{R} \ / \ |a| < r$ para algún $r \in \mathbb{R}\}$.

DEF 3.2:

El conjunto de los infinitesimales está dado por $P = \{a \in {}^*\mathbb{R} \ / \ |a| < r \ \forall r \in \mathbb{R}\}$.

DEF 3.3:

${}^*\mathbb{R} - F = I$, que es el conjunto de los infinitos.

Afirmaciones:

$\mathbb{R} \subset F$, $P \subset F$, $\mathbb{R} \cap P = \{0\}$, ${}^*\mathbb{N} \cap F = \mathbb{N}$

Los elementos $\mathbb{R}$ de serán los hiperreales standard y los elementos de ${}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$ serán los hipereales no-standard; en general ${}^*\mathbb{R}$ representa al conjunto de todos los hiperreales.

Afirmaciones:

1. El 0 es el único hiperreal standard que es infinitesimal.
2. Un $r \in {}^*\mathbb{R}$ con $r \neq 0$ es infinitesimal $r^{-1} = 1/r \in {}^*\mathbb{R} - F$.
3. F es subanillo de ${}^*\mathbb{R}$.
4. P es subanillo de F.
5. P es ideal de F, esto es que si $f \in F$ y $p \in P$ entonces $fp \in P$.
6. P es ideal maximal de F.
7. El anillo cociente F/P es un campo.

DEF 3. 5:

Sean $a, b \in {}^*\mathbb{R}$; si $|a-b|$ es infinitesimal, entonces se dice que a es cercano a b, esto es $a \approx b$.

<u>TEO 3.3:</u>

El anillo cociente F/P es isomorfo al campo de los números reales $\mathbb{R}$; (Tomando en cuenta el orden).

<u>DEM:</u>

Tenemos que si C es una clase de equivalencia en F, módulo P, entonces C no tiene hiperreales standard r_1, r_2 tales que $r_1 \neq r_2$ y $|r_1 - r_2| \approx 0$. Esto nos muestra que $\mathbb{R}$ es subcampo de F/P. Afirmación: A todo hiperreal $f \in F$ le corresponde un único hiperreal standard r tal que $|f-r| \approx 0$. En efecto: si $f \in F$ entonces los conjuntos $A = \{r / r \in \mathbb{R}$ y $r \leq f\}$, y $B = \mathbb{R} - A$, definen la cortadura (A,B) en $\mathbb{R}$. Sea $r \in \mathbb{R}$ el real tal que $r = (A,B)$, entonces $f \approx r$. Suponemos que $f \not\approx r$, entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que si $f > r$, entonces $|f - r| \geq \varepsilon$, entonces $r + \varepsilon/2 < f$ lo que contradice el hecho de que f y r determinan la misma cortadura; de manera análoga para el caso de $f < r$; Por lo tanto $f \approx r$, entonces la biyección $f \rightarrow r$ nos asigna el isomorfismo entre F/P y $\mathbb{R}$ ■

DEF 3.6:

Para todo $f \in F$, llamamos al único real standard r, el cual cumple $f \approx r$, la parte standard de f y se denota $st(f) = r$.

DEF 3.7:

Para todo $r\in\mathbb{R}$, sea $m(r)=(f\in F/|r-f|\in P)$ es la clase de equivalencia de f en $^*\mathbb{R}$ módulo P, llamada la mónada de r.

<u>TEO 3.4:</u>

$\mathbb{R}$ es un conjunto externo en $^*\mathfrak{R}$.

<u>DEM:</u>

Supongamos que $\mathbb{R}$ es interno en $^*\mathfrak{R}$, entonces $\mathbb{R}\cap\mathbb{N}^*=\mathbb{N}$ es interno en $^*\mathfrak{R}$ y también en $^*\mathcal{N}$, lo que contradice el Teo.3.2.

Por lo tanto $\mathbb{R}$ no es interno en $^*\mathfrak{R}$.

Por lo tanto $\mathbb{R}$ es externo en $^*\mathfrak{R}$ ■

CAPITULO IV

TEORÍA NO-STANDARD DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

" NOCIONES BÁSICAS "

Para terminar con este trabajo, se hacen las aplicaciones de modelos no-standard en espacios topológicos, proponiendo el modelo topológico $^*(X,T)$ construído sobre (X,T) espacio topológico, donde los Teoremas propuestos para (X,T) se demostrarán utilizando técnicas no-standard aplicadas a su extensión elemental, $^*(X,T)$, donde $^*(X,T)$ es un espacio topológico no-standard.

Un espacio topológico es un par (X,T) donde X es el conjunto y T es una familia de subconjuntod de X que cumplen con las condiciones de la siguiente definición.

DEF 4.1:

Una familia T de subconjuntos de X, donde a los elementos de T se les llama conjuntos abiertos: es una topología para X si:

4.1 $\varnothing, X \in T$.

4.2 $U_1,...U_n \in T \Rightarrow U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n \in T$.

4.3 $U_j \in T$ para cada $j \in J$, $\Rightarrow \cup_{j\in J} \in T$.

Los conjuntos cerrados son los complementos de los conjuntos abiertos.

DEF 4.2 :

Sea (X,T) un espacio topológico. Un conjunto V es una vecindad de un $x \in X$ si V contiene un conjuto abierto U el cual contiene a x. Un sistema de vecindades Sx de X es el conjunto de todas las vecindades de x. El sistema de vecindades abiertas de $x \in X$ será denotado por Tx. Una colección $B \subseteq T$ es una base para T si cada conjunto en T es una unión de conjuntos en B, esto es, si para cada $x \in X$ y cada $V \in Tx$ existe un $U \in Tx \cap B$ con $U \subseteq V$. Una colección B es una subbase para T si la colección de intersecciones finitas de miembros de B es base para T. Lo mismo sucede con $Bx \subseteq Sx$.

DEF 4.3 :

Los conjuntos en $^*T$ son llamados * conjuntos abiertos de $^*X$ ó $^*U \in {}^*X$. La mónada de $x \in X$ es el subconjunto $m(x) = \cap {}^*U (U \in Tx)$ de $^*X$. Un punto $y \in {}^*X$ es cercano a $x \in X$, $y \approx x$ y, x es la parte standard de y, si $y \in m(x)$, $st(y)=x$. El conjunto de puntos standard cercanos es el conjunto $sc(^*x) = \cup\, m(x)$, $x \in X$. Un punto $y \in {}^*X$ es remoto si no es standard cercano.

PROP 4.1:

Si Bx es una subbase local para x, entonces $m(x) = \cap {}^*U$ $(U \in Bx)$.

<u>DEM:</u>

$\cap {}^*U(U \in Bx) \supseteq \cap {}^*U$ $(U \in Sx)$. Además para cada $U \in Sx$ existen $V_j \in Bx$ $(1 \le j \le n)$ tal que $\cap V_j$ $(1 \le j \le n) \subseteq U$, por hipótesis y por transferencia $\cap {}^*V_j$ $(1 \le j \le n) \subseteq {}^*U$, por lo tanto $\cap {}^*V$ $(V \in Bx) \subseteq \cap {}^*U$ $(U \in Sx)$, por lo tanto $\cap {}^*U(U \in Sx) = m(x) = \cup {}^*V$ $(V \in Bx)$ ■

PROP 4.2 :

Para cada $x \in X$ existe un * abierto $U \in {}^*Tx$, tal que $U \subseteq m(x)$.

<u>DEM:</u>

Sea la relación $r \in Tx$ X Tx, donde $r < V,U >$ si $U \subseteq V$ es concurrente, esto es de que si $V_1,....V_n \in Tx$, entonces $U = V_1 \cap ... \cap V_n$ satisface $r < V_j, U >$, $1 \le j \le n$, entonces por el

Teorema de concurrencia se tiene la existencia de un elemento $U\in{}^*T_x$ tal que $U\subseteq{}^*V$ para todo $V\in T_x$;

Por lo tanto $U\subseteq m(x)$■

PROP 4.3 :

Sea C un subconjunto de X. Entonces:

4.3.1 C es abiero $\Leftrightarrow m(x)\subseteq{}^*C$ para cada $x\in C$.

4.3.2 C es cerrado $\Leftrightarrow m(x)\cap{}^*C=\varnothing$, para cada $x\in C^c$.

DEM:

4.3.1

⇒]

Suponemos que C es abierto y sea $x\in C$. Por definición existe un conjunto abierto $U\in T_x$ tal que $U\subseteq C$. Por el principio de transferencia $m(x)=\cap{}^*U(U\in T_x)\subseteq{}^*U\subseteq{}^*C$.

⇐]

Suponemos que $m(x)\subseteq{}^*C$ para $x\in C$; por la prop. 4.2. existe un $U\in{}^*T_x$ con $U\subseteq m(x)\subseteq{}^*C$. Así existe un enunciado interno ${}^*(\exists U\in{}^*T_x)\ (U\subseteq C)$, por el principio de transferencia existe $U\in T_x$ con $U\subseteq C$. Por lo tanto C es abierto ya que $C=\cup U_x(x\in C)$■

4.3.2

⇒]

Como C es cerrado, C^c es abierto entonces por 4.3.1. $m(x)\subseteq{}^*C^c$ para cada $x\in C^c$, de donde ${}^*C\cap{}^*C^c=\varnothing$ entonces $m(x)\cap{}^*C=\varnothing$ para cada $x\in C^c$.

⇐]

Como $m(x)\cap{}^*C=\varnothing$ entonces $m(x)\subseteq{}^*C^c$. Así C^c es abierto. Por lo tanto C es cerrado■

DEF 4.4:

Un punto x es de acumulación en el conjunto $C\subseteq X$ si toda vecindad abierta de x contiene puntos de C distintos de X. Sea $C^\wedge$ el conjunto de puntos de acumulación de C. El conjunto $\bar{C}=C\cup C^\wedge$ es la cerradura de C. C es denso en B si $\bar{C}=B$.

PROP 4.4:

Un punto $x\in C$ es de acumulación $\Leftrightarrow m(x)$ contiene un punto $y\in{}^*C$ distinto de x.

DEM:

⇒]

Si x es un punto de acumulación en C, entonces se tiene que $((U)\in T_x)(\exists y\in U\cap C)(y\neq x)$, por el principio de transferencia ${}^*((U)\in{}^*T_x)(\exists y\in U\cap{}^*C)(y\neq x)$. De la prop.4.2. $U\subseteq m(x)$ y así existe $y\in m(x)\cap{}^*C$ tal que $y\neq x$.

⇐]

Si m(x) contiene un punto $y\neq x$ con $x\in{}^*C$, entonces para una vecindad fija $U\in T_x$, ${}^*U$ contiene un punto $y\neq x$ con $x\in{}^*C$. Así se tiene ${}^*(\exists y\in{}^*(U\cap C))(y\neq x)$ y por principio de transferencia existe $y\in U\cap C$ con $y\neq x$. Por lo tanto x es un punto de acumulación■

PROP 4.5:

La cerradura $\bar{A}$ de $A\subseteq X$ consiste de los $x\in X$ tal que $m(x)\cap{}^*A\neq\varnothing$. La cerradura de A es el conjunto más pequeño que contiene a A. Por lo tanto $A=\bar{A}$ si A es cerrado.

DEM:

Si $\bar{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A y A es cerrado entonces $\bar{A}\subseteq A$. Como $A\cup A^{\wedge}=\bar{A}$ entonces $A\subseteq\bar{A}$. Por lo tanto $A=\bar{A}$ ■

DEF 4.5:

El espacio (X,T) es

4.5.1 T_0 si, para cada par x,y de puntos distintos en X, existe una vecindad abierta de uno que no contiene al otro.

4.5.2 T_1 si {x} es cerrado para cada $x\in X$.

4.5.3 T_2 (Hausdorff) si siempre que $x\neq y$ en X, existen vecindades abiertas de x y y que son ajenas.

PROP 4.6:

El espacio toplógico (X,T) es

4.6.1 $T_0 \Leftrightarrow$ siempre que $x,y\in X$ y $x\in m(y)$ y $y\in m(x)$ entonces $x=y$.

4.6.2 $T_1 \Leftrightarrow$ siempre que $x,y\in X$ y $x\in m(y)$ entonces $x=y$.

4.6.3 Hausdorff $\Leftrightarrow$ las mónadas de puntos de x son ajenas.

DEM:

4.6.1

$\Rightarrow$]

Si es T_0 entonces $(x\neq y)\to[(\exists U\in Tx)(x\in U\wedge y\notin U)\vee(\exists V\in Ty)(y\in V\wedge x\notin V)]$, por PT $^*(x\neq y)\to[(\exists U\in{}^*Tx)(x\in U\wedge y\notin U)\vee(\exists V\in{}^*Ty)(y\in V\wedge x\notin V)]$ por contrapositiva $^*(\forall U\in{}^*Tx)\neg(x\in U\wedge y\notin U)\wedge(V\in{}^*Ty)\neg(y\in V\wedge x\notin V)]\to(x=y)$ esto es que $y\in\cap{}^*U(U\in Tx)=m(x)$ y $x\in\cap{}^*V(V\in Ty)=m(y)$ implica que $x=y$.

$\Leftarrow$]

Si $y\in m(x)=\cap{}^*U(U\in Tx)$ y $x\in m(y)=\cap{}^*V(V\in Ty)$ implica que $x=y$ entonces se tiene que $^*[(\forall U\in{}^*Tx)(x\in U\to y\in U)\wedge(\forall V\in{}^*Ty)(y\in V\to x\in V)]\to(x=y)$ esto es $^*(x\neq y)\to[(\exists U\in{}^*Tx)(x\in U\wedge y\notin U)\vee(\exists V\in{}^*Ty)(y\in V\wedge x\notin V)]$ por PT si $x\neq y$ entonces existe una vecindad abierta de uno que no contiene al otro;

Por lo tanto es T_0 ■

4.6.2

$\Rightarrow$]

T_1, si {x} es cerrado para cada $x\in X$, entonces $\{x\}^c$ es abierto por proposición 4.3 $m(y)\cap{}^*\{x\}=\varnothing$, para toda $y\in\{x\}^c$ donde si $m(y)\cap{}^*\{x\}\neq\varnothing$ entonces $m(y)\cap{}^*\{x\}=\{x\}$, así $x\in m(y)$ con la existencia de $y\notin\{x\}^c$, entonces $y\in\{x\}$. Por lo tanto $y=x$.

$\Leftarrow$]

Si $x,y\in X$ y $x\in m(y)$ entonces $x=y$, esto quiere decir que si $x\neq y$ entonces $x\notin m(y)$, entonces $m(y)\subseteq C$, tal que $C\cap\{x\}=\varnothing$ entonces $C=\{x\}^c$ y C es abierto. Por lo tanto {x} es cerrado;

Por lo tanto es T_1 ■

4.6.3

$\Rightarrow$]

Suponemos que (X,T) es Hausdorff y $x,y\in X$ son distintos, entonces existe $U\in Tx$, $V\in Ty$ tal que $U\cap V=\varnothing$. Por lo tanto $^*U\cap{}^*V=\varnothing$ y como $m(x)\subseteq{}^*U$ y $m(y)\subseteq{}^*V$ entonces $m(x)\cap m(y)=\varnothing$.

$\Leftarrow$]

Si $m(x)\cap m(y)=\varnothing$. Entonces de la prop.4.2 existe $U\in{}^*Tx$, $V\in{}^*Ty$ con $U\cap V=\varnothing$. Por PT existe $U\in Tx$, $V\in Ty$ tal que $U\cap V=\varnothing$ ■

Sean (X,T) y (Y,T^Y) espacios topológicos con mónadas $m(x)$, $(x\in X)$, y $\bar{m}(y)$, $(y\in Y)$, respectivamente.

DEF 4.6:

El mapeo $f: X\to Y$ es continuo en $x\in X$, si para cada $V\in T^Y_{f(x)}$ le corresponde $U\in T_x$ con $f(U)\subseteq V$. f es continua en X si es continua para toda $x\in X$. Un mapeo inyectivo f de X en Y, es un homeomorfismo si f y f^{-1} son continuos.

PROP 4.7:

El mapeo $f:X\to Y$ es continua en $x\in X$ $^*f(y)\approx f(x)$ para cada $y\approx x$; esto es $^*f[m(x)]\subseteq \bar{m}(f(x))$.

<u>DEM:</u>

$\Rightarrow]$

Suponemos que f es continua en $x\in X$, y sea V una vecindad abierta de $f(x)$, hallamos un correspondiente $U\in T_x$ tal que la definición $f[U]\subseteq V$. Si $y\approx x$, entonces por la proposición 4.3.(1) $y\in {}^*U$, entonces $^*f(y)\in {}^*V$, esto es de $^*f[^*U]\in {}^*V$, que a su vez se tiene por transferencia. Por lo tanto $^*f(y)\in {}^*V$ para cada $V\in T^Y_{f(x)}$ i.e.$^*f(y)\approx f(x)$.

$\Leftarrow]$

$^*f(y)\approx f(x)$ para cada $y\approx x$. Esto es $^*f[m(x)]\subseteq \bar{m}[f(x)]$. Por la prop 4.2 existe un $V\in {}^*T^Y_{f(x)}$ tal que $V\subseteq \bar{m}[f(x)]$, en particular $V=\bar{m}[f(x)]$ y también $U\in {}^*T_x$ tal que $U\subseteq m(x)$, entonces $^*f(U)\subseteq V$, por principio de transferencia $f(U)\subseteq V$ con $U\in T_x$ y $V\in T^Y_{f(x)}$; por lo tanto $f:X\to Y$ es continua ■

<u>TEO 4.1:</u>

El mapeo $f:X\to Y$ es continuo en $X \Leftrightarrow f^{-1}(V)\in T$ para cada $V\in T^Y$.

<u>DEM:</u>

$\Rightarrow]$

Sea $x\in X$ fijo pero arbitrario, suponemos que f es continua y sea $V\in T^Y_{f(x)}$, por la prop. 4.7, se tiene $^*f[m(x)]\subseteq \bar{m}(f(x))\subseteq {}^*V$, donde la última contención se tiene porque V es abierto. Entonces $m(x)\subseteq {}^*f^{-1}[^*V]$:

Afirmación: $^*f^{-1}[V]={}^*(f^{-1}[V])$

DEM: $x\in {}^*f^{-1}(^*V) \Leftrightarrow x={}^*f^{-1}(y)$ para algún $y\in V^* \Leftrightarrow x={}^*(f^{-1}(y))$ para algún $y\in V$.

Por lo tanto $x\in {}^*(f^{-1}[V])$

por lo tanto $m(x)\subseteq {}^*[f^{-1}[V]]$; así por Prop 3.3(1) se tiene que $f^{-1}[V]$ es abierto.

$\Leftarrow]$

Sea $f(V)\in T$ para cada $V\in T^Y_{f(x)}$ entonces por Prop 4.3(1) $m(x)\subseteq {}^*(f[V]) = {}^*f[^*V]$ y $\bar{m}(f(x))\subseteq {}^*V$, pero por Prop 4.2 hacemos $^*V\subseteq \bar{m}(f(x))$ de donde $\bar{m}(f(x))={}^*V$.

Por lo tanto $^*f[m(x)]\subseteq {}^*f(^*f^{-1}[^*V])\subseteq {}^*V=\bar{m}(f(x))$;

Por lo tanto de Prop 4.7 f es continua ■

DEF 4.7:

La topológia débil T en X, denotada por la familia$(\Phi_i\ /\ i\in I)$, donde $\Phi_y: X\to X_i$ donde (X_i, T^i)es una familia de espacios topológicos, es la topología generada de la subbase T^Y que consiste de todas las imágenes inversas de la forma $\Phi^{-1}_i(U)$, $U\in T^i$ i.e. T consiste de todos los conjuntos obtenidos de la uniones arbitrarias de intersecciones finitas de conjuntos en T^Y.

PROP 4.8:

Si $m(x)$ ($x\in X$) es una mónada de la topología débil.

Entonces $m(x) = \{y \in {}^*X \,/\, {}^*\Phi_i(y) \in m_i(\Phi_i(x))$ para todo $i\in I\}$

DEM:

Denotemos a $\{y \in {}^*X\} = K(x)$

$\subseteq$]

Si $x \in X$, entonces para $i\in I$, los conjuntos $\Phi^{-1}_i[U]$, $U\in T^i_{\Phi i(x)}$ son vecindades abiertas de X, de aqui que:

$m(x) \subseteq \cap\{y \in {}^*X \,/\, y \in \cap^*(\Phi^{-1}_i[U]),\ U\in T^i_{\Phi i(x)}\}\ (i\in I)$

$=\{y\in {}^*X \,/\, y \in {}^*\Phi^{-1}_i[\cap^*U\ (U\in T^i_{\Phi i(x)})]\}(i\in I)$

$=K(x)$

Por lo tanto $m(x) \subseteq K(x)$.

$\supseteq$]

Si $V \in Tx$ es una vecindad en la base de T generada por la subbase T^γ entonces V es una intersección finita de conjuntos de la forma $\Phi^{-1}_i[U_i]$, $U_i\in T^i_{\Phi i(x)}$. Entonces $K(x)\subseteq {}^*\Phi^{-1}_i[U_i]$, para cada $U_i\in T^i_{\Phi i(x)}$, y por lo tanto $K(x){}^*V$, donde ${}^*V$ es la intersección finita de conjuntos de la forma $\Phi^{-1}_i[U_i]$, por lo tanto ${}^*v=m(x)$, por lo tanto $K(x) \subseteq m(x)$;

Por lo tanto $m(x)=K(x)$∎

DEF 4.8:(LA TOPOLOGÍA PRODUCTO)

Sea (X_i,T^i) ($i\in I$) una familia de espacios topológicos. Entonces el producto $X=\Pi X_i$ ($i\in I$)es definido como el conjunto de todos los mapeos x en I con $x(i)\in X_i$, para $i\in I$. La topología producto T para X es la topología débil generada por los mapeos $\Phi_i:X\to X_i$ definidos por $\Phi_i(x)=x(i)$.

Como cada $x\in X$ es de la forma $X:I\to U\ x_i$ ($i\in I$) con $x(i)\in X_i$. El transformado de la colección $\{X_i/i\in I\}$ incluye nuevos conjuntos X_i para cada $i\in {}^*I\text{-}I$. Por P.T. cada $x\in {}^*X$ es de la forma $X:{}^*I\to {}^*[UX_i(i\in I)]$ con $x({}^*i)\in {}^*X_i$ si $i\in I$, donde si i es no-standard, entonces $x(i)\in X_i$, pero X_i no es la extensión de un conjunto standar.

Si $x\in X$, y $m(x)$ son las mónadas en T, entonces por Prop 4.8: $m(x)=\{y\in {}^*X/y(i)\in m_i(x(i))$ para todo standar $i\in {}^*I\}$

Las mónadas están determinadas por los índices standar

TEO 4.2:

El producto topológico de espacios de Hausdorff es Hausdorff.

DEM:

Sea $X=\Pi X_i$, donde (X_i,T_i) es Hausdorff con mónadas $m_i(x)$. Sea T el producto topológico con mónada $m(x)$. Si $x, y \in X$, con $m(x)\cap m(y) \neq \emptyset$. Sea $z\in m(x)\cap m(y)$. Entonces $z(i)\in \cap m_i({}^*x_i(i)) \cap m_i({}^*y(i))$ para cada $i \in I$ y así $x(i)=y(i)$ para cada $i \in I$, de (X_i,T_i) es Hausdorff se tiene que $x=y$;

Por lo tanto el producto es Hausdorff∎

DEF 4.9:

Una colección $\mathcal{A} = \{A_i \,/\, i \in I\}$ de conjuntos (o cubiertas)es una cubierta de $A \subseteq X$ si $A \subseteq A_i$ ($i \in I$). Una subcubierta de $\mathcal{A}$ es una subcolección de $\mathcal{A}$, la cual también es una subcubierta para A. A es un subconjunto compacto de un espacio topológico (X,T), si cada cubierta de A constituida con conjuntos abiertos U_i, contiene una subcubierta finita.

TEO 4.3:

Sea (X,T) un espacio topológico. Entonces $A \subseteq X$ es compacto $\Leftrightarrow$ toda $y \in {}^*A$ es cercano a un punto standard $x \in A$.

DEM:

$\Rightarrow$)

Suponemos que A es compacto, y existe un punto y, el cual no está contenido en la mónada de cualquier $x \in A$. Entonces cada $x \in A$ tiene una vecindad abierta U_x tal que $y \notin U_x$. La cubierta $\{ U_x \,/\, x \in A \}$ de A, tiene una subcubierta finita $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es decir $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n \supseteq A$. Por el P.T. ${}^*U_1 \cup {}^*U_2 \cup \ldots \cup {}^*U_n \supseteq {}^*A$. Entonces si suponemos que $y \in {}^*A$, entonces $y \in {}^*U_1 \cup {}^*U_2 \cup \ldots \cup {}^*U_n$, pero $y \notin {}^*U_1 \cup {}^*U_2 \cup \ldots \cup {}^*U_n$:
Por lo tanto $y \in m(x)$ para alguna $x \in A$.

$\Leftarrow$)

Por contrapositiva.
Suponemos que A no es compacto. Entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{A} = \{U_i \,/ i \in I\}$ de A, la cual notiene subcubiertas finitas. La relación binaria $r \in A x A$ definido como $\langle U,X \rangle \in r \Leftrightarrow x \notin U$ es concurrente. Por P.T. existe un punto $y \in {}^*A$ con $y \notin {}^*U$ para todo $U \in \mathcal{A}$. Si $x \in A$ entonces $x \in U$ para algún $U \in \mathcal{A}$, tal que $y \notin {}^*U$:
Por lo tanto $y \notin m(x)$■

TEO 4.4:

Si X es compacto en la topologia T y $A \subseteq X$ es cerrado, entonces A es compacto (por Prop. 4.3.2).

DEM:

Sea $y \in {}^*A$. Como X es compacto existe un $x \in X$, con $y \in m(x)$, de donde $x \in A$, así $x \approx y$, entonces A es compacto■

TEO 4.5:

Si (X,T) es Hausdorff y $A \subseteq X$ es compacto, entonces A es cerrado.

DEM:

Sea $x \in A^c$ y supongamos $y \in m(x)$, $y \in {}^*A$. Como A es compacto, $y \in m(\sim x)$, para algún $\sim x \in A$, pero entonces $m(x) \cap m(\sim x) \neq \emptyset$, esto contradice que (X ,T) es Hausdorff. (Por Prop. 4.3.2)■

TEO 4.6:

Si (X,T) y (Y,T') son espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ es continua, entonces f(K) es compacto paracada compacto $K \subseteq X$.

DEM:

Sea $K \subseteq X$, fijo pero arbitrario y compacto, $y \approx x$ con $y \in {}^*K$ y $x \in K$ entonces $y \in m(x)$, por continuidad ${}^*f[m(x)] \subseteq \overline{m}(f(x))$, entonces ${}^*f(y) \in \overline{m}$ con $f(x) \in f(k)$ y ${}^*f(y) \in {}^*(f[K])$;

Por lo tanto $f(K)$ es compacto■

TEO 4.7:

Si (X,T) es compacto, (Y,T^Y) es Hausdorff, y $f:X \rightarrow Y$ es continuo:

1. F es cerrado.
2. Si f es inyectivo, entonces f es un homeomorfismo.

DEM:

1]

De Teo 4.6, $f[x] \subseteq Y$ es compacto, por Teo 4.5 (Y,T^Y) es Hausdorff y $f[x] \subseteq Y$ es compacto, entonces $f[x]$ es cerrado.

2]

Suponemos que $f[x]=Y$;

P.D. f es abierto

Si U es abierto en X, entonces U^c es cerrado. Como f es inyectiva $f[U]=Y-f[U^c]$, que por el inciso 1 es abierto;

Por lo tanto f es un homeomorfismo■

TEO 4.8:

Si (X_i, T^i) $(i \in I)$, son espacios compactos, y $X = \Pi X_i$ $(i \in I)$, entonces X es compacto en la topología producto T.

DEM:

Sea $y \in {}^*X$; Entonces $y(i) \in {}^*X_i$ para los standard $i \in I$, y también se tiene que $y(i) \approx x(i) \in X_i$ para cada $i \in I$. Entonces $y(i) \in m(i)$ donde $m_i(x_i)$ es la mónada de x_i en (X_i, T^i). Entonces de la def 4.8 $y \in m(x)$, donde $m(x)$ es la mónada en T de el punto $x \in X$ definido por $x(i)=x_i$;

Por lo tanto $y \approx x$;

Por lo tanto X es compacto en T■

TEO 4.9:

Si T^Y es subbase para la topológia de (X,T) y toda cubierta de X por elementos de T^Y tiene una subcubierta finita, entonces X es compacto.

DEM:

Suponemos que X no es compacto. Por Teo 4.3 existe $y \in {}^*X$ tal que no es cercano a un standard y para cada $x \in X$ existe un conjunto abierto U_x tal que $x \in U_x$ y $y \notin {}^*U_x$. Como cada U_x es una intersección finita de elementos $V_i \in T^Y$, entonces $y \notin {}^*V_i$, para algún ${}^*V_i$ donde $U_x \in T^Y$ para cada X. Por lo tanto la cubierta $\{U_x / x \in X\}$ no tiene una subcubierta finita $U_1, \ldots, U_n$, pero en este caso ${}^*X = {}^*U_1 \cup {}^*U_2 \cup \ldots \cup {}^*U_n$ y $y \in {}^*U_i$ para algún y, y esto es una contradicción, ya que toda cubierta de X por elementos $U_x \in T^Y$ tiene una subcubierta finita;

Por lo tanto X es compacto■

DEF 4.10:

Un espacio métrico es un par (X,d), donde X es un conjunto y d es un mapeo de $X \times X$ en los $\Re \cup \{0\}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y,\ x,y \in X$.
b) $d(x,y) = d(y,x)\ x,y \in X$.
c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\ x,y,z \in X$

DEF 4.11:

Sea (X,d) un espacio métrico. Dos puntos x y y en $^*X$ son cercanos si $^*d(x,y) \approx 0$, esto es $x \approx y$. La mónada de $x \in {}^*X$ es el conjunto $m(x)=\{\, y \in {}^*X \ / \ y \approx x \,\}$. Dos puntos x,y en $^*X$ están en la misma galaxia si $^*d(x,y)$ es finito; La galaxia principal de $^*X$ es la única que contiene a los puntos standard y es definido como $f(^*x)$. Los puntos en $fin(^*X)$ se llaman finitos.

DEF 4.12:

Sean (X,d) y $(Y, \bar{d})$ espacios métricos y $A \subseteq X$.

1. Un mapeo $f:A \rightarrow Y$ es uniformemente continuo en A si, dada $\varepsilon > 0$ en , existe $\delta > 0$ en tal que $\bar{d}(f(x),f(y)) < \varepsilon$ para todos los $x,y \in A$ para los cuales:
2. Una sucesión de mapeos $f_n:A \rightarrow Y$, $n \in \mathbf{N}$, converge uniformemente en A a $f:A \rightarrow Y$, si dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $\bar{d}(f_n(x),f(x)) < \varepsilon$ para toda $n \geq k$ en y toda $x \in A$.

PROP. 4.9:

El mapeo $f:A \rightarrow Y$ es uniformemente continuo en $A \Leftrightarrow {}^*f(x) \approx {}^*f(y)$ siempre que $x,y \in {}^*A$, y $x \approx y$.

DEM:

$\Rightarrow$]

Sea f uniformemente continua en A. Hallamos $\delta > 0$ para un $\varepsilon > 0$ dado. Por P.T. $^*\ \bar{d}(^*f(x),{}^*f(y)) < \varepsilon$ para todo $x,y \in {}^*A$ para los cuales $^*d(x,y) < \delta$. Entonces se tiene que $^*\ \bar{d}(^*f(x),{}^*f(y)) < \varepsilon$ para todo $x,y \in {}^*A$ para los cuales $x \approx y$. Como esto es verdadero para cualquier $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \Re$, entonces $^*f(x) \approx {}^*f(y)$ para $x,y \in {}^*A$ tal que $x \approx y$.

$\Leftarrow$]

Suponemos que $^*f_n(x) \approx {}^*f(y)$ siempre que $x,y \in {}^*A$ y $x \approx y$. Sea $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon \in \Re$ dado. Entonces se tiene:

$^*\vdash (\exists \delta \in {}^*\Re)[\delta > 0 \wedge (\forall x,y \in {}^*A)(^*d(x,y) < \delta \rightarrow {}^*\ \bar{d}(^*f(x),{}^*f(y)) < \varepsilon\,]$

Por principio de Transferencia:

$\vdash (\exists \delta \in \Re)[\delta > 0 \wedge (\forall x,y \in A)(d(x,y) < \delta \rightarrow \bar{d}(f(x),f(y)) < \varepsilon\,]$

que cumple con la definición 4.12.1:

Por lo tanto f es uniformemente continua ■

PROP. 4.10:

La sucesión $f_n:A \rightarrow Y$ converge uniformemente en A a $f:A \rightarrow Y \Leftrightarrow {}^*f_n(x) \approx {}^*f(x)$ para todo $n \in {}^*\mathbf{N}\text{-}\mathbf{N}$ y todo $x \in {}^*A$.

DEM:

$\Rightarrow$]

Sea $f_n:A \rightarrow Y$ una sucesión que converge uniformemente a $f:A \rightarrow Y$ esto nos lleva a que hallamos $k \in \mathbf{N}$ para un $\varepsilon > 0$ dado. Por P.T. se tiene que $^*\ \bar{d}(^*f_n(x),{}^*f(x)) < \varepsilon$

para todo $n\geq k$ con $n\in{}^*\mathbf{N}$ y todo $x\in{}^*A$. Como esto es verdadero para cualquier $\varepsilon>0$, $\varepsilon\in\Re$ y en particular para todo $n\in{}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$, $n>k$ con $k\in\mathbf{N}$. Entonces ${}^*f_n(x)\approx{}^*f(x)$ para todo $n\in{}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ y todo $x\in{}^*A$.

$\Leftarrow$]

Supongamos que ${}^*f_n(x)\approx{}^*f(x)$ para todo $n\in{}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ y todo $x\in{}^*A$. Sea >0, con $\varepsilon\in$.

${}^*\models(\exists k\in{}^*\mathbf{N})[(\forall n\in{}^*\mathbf{N})(\forall x\in{}^*A)(n\geq k\rightarrow{}^*\ \bar{d}({}^*f_n(x),{}^*f(x))<\varepsilon)]$

Por principio de transferencia

$\models(\exists k\in\mathbf{N})[(\forall n\in\mathbf{N})(\forall x\in A)(n\geq k\rightarrow\ \bar{d}(f_n(x),f(x))<\varepsilon)]$

que cumple con la definición 4.12.2;

Por lo tanto f_n converge uniformemente a f■

TEO 4.10:

Si f: A→ Y es continua y A es compacto, entonces f es uniformemente continua en A.

DEM:

Sea x, y $\in{}^*A$ con $x\approx y$, Entonces x y y son cercanos a un punto standar $z\in A$, ya que A es compacto, y ${}^*f(x)\approx f(z)\approx f^*(y)$ por ser f continua en z, finalmente, aplicando la Prop 4.9 se tiene que f es uniformemente continua en A■

TEO 4.11:

Si f_n:A→Y es una sucesión de funciones continuas las cuales convergen uniformemente en A a f:A→Y, entonces f es continua.

DEM:

Sea $x\in A$, $y\in{}^*A$ con $y\approx x$, como cada f_n es continua, entonces se tiene que ${}^*f_n(y)\approx f_n(x)\approx{}^*f_n(x)$, y por hipótesis la sucesión converge uniformemente en A a f:A→Y, entonces ${}^*f_n(x)\approx{}^*f(x)$ para toda $n\in\mathbf{N}$ y $x\in A\subset{}^*A$, en particular ${}^*f_n(y)\approx{}^*f(x)$ con $y\in{}^*A$, y como ${}^*f(y)\approx{}^*f_n(y)\approx f_n(x)\approx{}^*f_n(x)\approx{}^*f(x)$, entonces ${}^*f(y)\approx{}^*f(x)=f(x)$;

Por lo tanto f es continua■

DEF 4.13:

Sea (X,d) un espacio métrico y sea < Sn / n $\in\mathbf{N}$ > una sucesión de puntos en X; Entonces:

1. <Sn> converge a S, si dada $\varepsilon>0$ en $\Re$ existe $k\in\mathbf{N}$, tal que $d(Sn,S)<\varepsilon$ si $n\geq k$.
2. <Sn> es una sucesión de Cauchy si dada $\varepsilon>0$ en existe $k\in\mathbf{N}$ tal que $d(Sn,Sm)<\varepsilon$ si $n,m\geq k$.
3. S es un punto límite de <Sn> si para cada $\varepsilon>0$ en $\Re$ y cada $k\in\mathbf{N}$, existe un $n>k$ tal que $d(Sn,S)<\varepsilon$.

PROP 4.11:

1. <Sn> converge a S $\Leftrightarrow$ ${}^*Sn\approx S$ para todo $n\in{}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$.
2. <Sn> es una sucesión de Cauchy $\Leftrightarrow$ ${}^*Sn\approx{}^*Sm$ para todo $n,m\in{}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$.
3. S es un punto límite de <Sn> $\Leftrightarrow$ ${}^*Sn\approx S$ para algún $n\in{}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$.

DEM:

1]

⇒]

<Sn> converge a S. Encontramos $k \in \mathbf{N}$ para algún $\varepsilon>0$ dado. Por P.T. ${}^*d({}^*Sn,{}^*S)<\varepsilon$ para todo $n \geq k$ con $n \in {}^*\mathbf{N}$. en particular si $n \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$, entonces $n>k$ $\forall k \in \mathbf{N}$. Entonces ${}^*d({}^*Sn,{}^*S)<\varepsilon$ para cualquier $\varepsilon \in \Re$;
Por lo tanto ${}^*Sn \approx {}^*S=S$;
Por lo tanto ${}^*Sn \approx S$ $\forall n \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$

⇐]

Suponemos que ${}^*Sn \approx S$ para todo $n \in {}^*\mathbf{N}$. Sea $\varepsilon>0$ con $\varepsilon \in \Re$.
${}^*\models(\exists K \in {}^*\mathbf{N})[(\forall n \in {}^*\mathbf{N})[n \geq k \rightarrow {}^*d({}^*Sn,S)<\varepsilon]]$
Por principio de transferencia:
$\models(\exists K \in \mathbf{N})[(\forall n \in \mathbf{N})[n \geq k \rightarrow d(Sn,S)<\varepsilon]]$
Por lo tanto <Sn> converge a S■

2.]

⇒]

Como <Sn> es una sucesión de Cauchy, hallamos k para un $\varepsilon>0$ dado. Por P.T. ${}^*d({}^*Sn,{}^*Sm)<\varepsilon$ para todo $n,m \geq k$ con $n,m \in {}^*\mathbf{N}$. Como ${}^*d({}^*Sn,{}^*Sm)<\varepsilon$ para cualquier $\varepsilon>0$, $\varepsilon \in \Re$ y en particular $n,m \geq k$ si $n,m \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$. Entonces ${}^*Sn \approx {}^*Sm$ si $n,m \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$.

⇐]

Suponemos que ${}^*Sn \approx {}^*Sm$ para todo $n,m \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$. Sea $\varepsilon>0$ con $\varepsilon \in \Re$.
${}^*\models(\exists k \in {}^*\mathbf{N})(\forall n,m \in {}^*\mathbf{N}\ [(n \geq k\ n,m \geq k) \rightarrow {}^*d({}^*Sn,{}^*Sm) <\varepsilon]]$
Por principio de transferencia
$\models(\exists k \in \mathbf{N})(\forall n,m \in \mathbf{N}\ [(n \geq k\ n,\ m \geq k) \rightarrow d(Sn,Sm) <\varepsilon]]$
Por lo tanto <Sn> es una sucesión de Cauchy■

3]

⇒]

S es un punto limite de <Sn>, hallamos un $n>k$ para un $k \in \mathbf{N}$ dado y un $\varepsilon>0$ dado. Por P.T. ${}^*d({}^*Sn,{}^*S)<\varepsilon$ para $n>k$, con $n \in {}^*\mathbf{N}$ para cada $k \in \mathbf{N}$, en particular si $n \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ entonces $n>k$ $\forall k \in \mathbf{N}$ y ${}^*d({}^*Sn,{}^*S)<\varepsilon$ para cualquier $\varepsilon>0$, $\varepsilon \in \Re$. Entonces ${}^*Sn \approx {}^*S=S$ para algún $n \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$.

⇐]

Si ${}^*Sn \approx S$ para algún $n \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$. Sea $\varepsilon>0$ con $\varepsilon \in \Re$.
${}^*\models(\forall k \in {}^*\mathbf{N})[\exists n \in {}^*\mathbf{N}\ [(n>k \wedge {}^*d({}^*Sn,{}^*S) <\varepsilon]$
Por principio de transferencia:
$\models(\forall k \in \mathbf{N})[\exists n \in {}^*\mathbf{N})(n>k \wedge d(Sn,Sm) <\varepsilon]$
Por lo tanto S es un punto limite de <Sn>■

DEF 4.14 :

(X,d) es completo si cada sucesión de Cauchy en X converge a un punto en X.

DEF 4.15 :

Sea (X,d) un espacio métrico. Un punto $y \in {}^*X$ es un punto pre-cercano-standard si para todo standard $\varepsilon>0$, existe un standard $x \in X$ con ${}^*d(x,y)<\varepsilon$.

PROP 4.12:

Un espacio métrico (X,d) es completo $\Leftrightarrow$ todo punto pre-cercano-standard $y \in {}^*X$ es cercano standard.

DEM:

$\Rightarrow]$

Suponemos que (X,d) es completo. Si y es pre-cercano-standard, hallamos una sucesión $S_n \in X$ tal que ${}^*d(S_n,y)<1/n$. Entonces $<S_n>$ es una sucesión de Cauchy con límite S y $y \approx {}^*S_n S$ si $n \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$;

Por lo tanto y es cercano standard.

$\Leftarrow]$

Suponemos que todo punto pre-cercano-standard es cercano standard y sea $<S_n>$ una sucesión de Cauchy. Dado $\varepsilon>0$, hallamos $k \in \mathbf{N}$ tal que cumpla con la definición 4.13.2. Entonces $d({}^*S_n,S_k)<\varepsilon$ si $n \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ y cada ${}^*S_n$ es cercano standard a $s \in X$. Entonces la sucesión $<S_n>$ converge a S ∎

COR. 4.1:

Un subconjunto cerrado (A,d) de un espacio métrico completo (X,d), es completo.

DEM:

Sea y un punto pre-cercano-standard en ${}^*A$. Entonces $y \approx x$ para algún $x \in X$ porque (X,d) es completo. Pero $x \in A$, por la Prop. 4.5 y por la hipótesis que A es cerrado ∎

DEF 4.16:

Sea (X,d) un espacio métrico. Un espacio métrico $(X^\wedge,d^\wedge)$ es un completamiento de (X,d) si $(X^\wedge,d^\wedge)$ es completo y existe un acoplamiento isométrico $\Phi:X \to X^\wedge$ (i.e. $d(x,y)=d^\wedge(\Phi(x),\Phi(y))$ para todo $x,y \in X$, donde Φ es inyectivo) y $\Phi[x]$ es denso en $X^\wedge$.

TEO 4.12:

Cualquier espacio métrico (X,d) tiene un completamiento $(X^\wedge,d^\wedge)$.

DEM:

Sea X' el conjunto de los puntos pre-cercanos-standard en ${}^*X$, y $X^\wedge$ la clase de equivalencia de X' bajo la relación $\approx$: así los elementos de $X^\wedge$ son mónadas $m(x')$ de puntos pre-cercanos-standard $x' \in {}^*X$. También se tienen que $d^\wedge(m(x'),m(y'))=st({}^*d(x',y'))$ donde ${}^*d(x',y')$es finito para puntos pre-cercano-standard x',y'. La métrica está bien definida, $x' \approx x_1'$, $y' \approx y_1'$, entonces ${}^*d(x',y') \approx {}^*d(x_1',y_1')$. El mapeo definido $\Phi:X \to X^\wedge$ definido por $\Phi(x)=m(x)$ es un acoplamiento isométrico. También $\Phi[x]$ es denso en $x^\wedge$. Para $m(x') \in X^\wedge$,donde x' es pre-cercano-standard, entonces dada $\varepsilon>0$, existe un $x \in X$ tal que ${}^*d(x',x)<\varepsilon$ y entonces $d^\wedge(m(x'),m(x))=st({}^*d(x',x)) \leq \varepsilon$. Finalmente, para ver que es completo, sea $<m(x'_n) \ / \ n \in \mathbf{N}>$ una sucesión de Cauchy en $(X^\wedge,d^\wedge)$, con $x'_n \in X'$. Para $x'_n \in X'$ hay elementos $x_n \in X$ con ${}^*d(x_n,x'_n)< 1/n$ para cada $n \in \mathbf{N}$, dada $\varepsilon>0$ en $\Re$, existe un $k \in \mathbf{N}$, tal que $d^\wedge(m(x'_n),m(x'_m))<\varepsilon$ y de aquí ${}^*d(x'_n,x'_m)<\varepsilon$ si $n,m \geq k$. Entonces $d(x_n,x_m)={}^*d(x_n,x_m) \leq 2/n+\varepsilon$ si $m \geq n \geq k$ en $\mathbf{N}$: Por P.T. ${}^*d({}^*x_n,{}^*x_m)$ $2/n+\varepsilon$ si $m \geq n \geq k$ en ${}^*\mathbf{N}$. En particular si $w \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$, ${}^*d({}^*x_n,{}^*x_w) \leq 2/n+\varepsilon$ si $n \geq k$ y de ésta manera ${}^*x_w$ es un pre-cercano-standard.

Por lo tanto ${}^*d(x'_n,x_w) \leq {}^*d(x'_n,x_n)+{}^*d(x_n,{}^*x_w) \leq 3/n+\varepsilon$ si $n \geq k$, entonces $d^\wedge(m(x'_n),m({}^*x_w)) \leq 3/n+\varepsilon$ si $n>k$.

Por lo tanto $<m(x'_n)>$ converge a $m(^*x_w)$;
Por lo tanto $(X^\wedge,d^\wedge)$ es completo■

DEF 4.17:
Un espacio métrico (X,d) es totalmente acotado si, para cada $\varepsilon>0$ en $\Re$, corresponde una cubierta finita $\{B_\varepsilon(x_i) \ / \ 1\le i\le n\}$ para ε-bolas abiertas, donde $B_\varepsilon(x)=\{y\in X/d(x,y)<\varepsilon\}$.

PROP 4.13:
Un espacio métrico (X,d) es totalmente acotado $\Leftrightarrow$ todo punto de $^*X$ es pre-cercano-standard.

DEM:
$\Rightarrow]$
Suponemos que (X,d) es totalmente acotado. Sea $\varepsilon>0$ dado y hallamos el punto correspondiente x_i, $1\le i\le n$ tal que $X=\cup B_\varepsilon(x_i)(1\le i\le n)$. Por P.T. $^*X=\cup{}^*B_\varepsilon(x_i)(1\le i\le n)$ y así se tiene que todo punto de $^*X$ es pre-cercano-standard.
$\Leftarrow]$
Si todo punto $^*X$ es pre-cercano-standard entonces, para cada $x_i\in{}^*X$ si para todo $\varepsilon>0$ en $\Re$, existe un standard $x\in X$ tal que $^*d(x_i,x)<\varepsilon$, entonces se da una bola $^*B_\varepsilon(x_i)=\{y\in{}^*X/{}^*d(x_i,y)<\varepsilon\}$ de esta manera se construye $^*X=\cup{}^*B_\varepsilon(x_i)(1\le i\le n)$ con $n\in\mathbb{N}$. por P.T. se tiene que $X=\cup B_\varepsilon(x_i)(1\le i\le n)$;
Por lo tanto (X,d) es totalmente acotado■

TEO 4.13:
Un espacio métrico (X,d) es compacto $\Leftrightarrow$ es completo y totalmente acotado.

DEM:
$\Rightarrow]$
Supongamos que (X,d) es compacto. Entonces todo punto $y\in{}^*X$ es cercano a un punto en X, así (X,d) es completo por la Prop. 4.12 y totalmente acotado por la Prop. 4.13.
$\Leftarrow]$
Supongamos que (X,d) es completo y totalmente acotado. Si $y\in{}^*X$ entonces es pre-cercano-standard por Prop. 4.13 y es cercano por Prop 4.12;
Por lo tanto Teo. 4.3 (X,d) es compacto■

DEF 4.18:
Un conjunto A es un espacio métrico (X,d) es acotado si existe un punto $x_0\in X$ y un número M tal que $d(x,x_0)\le M$ para todo $x\in A$.

DEF 4.19:
Un espacio topológico X es secuencialmente compacto si de cada sucesión $<X_n>$ en X es posible encontrar una subsucesión la cual convergea un punto $x\in X$.

TEO 4.14:
Un espacio métrico (X,d) es compacto $\Leftrightarrow$ es secuencialmente compacto.

DEM:

$\Rightarrow$]

Suponemos que (X,d) es compacto y sea $<x_n>$ una sucesión en X; Por Teo 4.13 y Def 4.14 existe un punto x_0 el cual es punto límite de $<x_n>$. Se tiene la bola abierta $B_1(x_0)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<1\}$. Como x_0 es punto límite de $<x_n>$, existe un $x_{n1}\in B_1(x_0)$. Siguiendo un procedimiento análogo existe un x_{n2} en $B_{1/2}(x_0)=\{x\in X/d(x,x_0)< ½\}$ con $n2>n$. Continuando el procedimiento se obtiene una subsucesión $<x_{nk}>$ con $x_{nk} \in B_{1/k}$ tal que $B_{1/k}=\{x\in X/ d(x,x_0) < 1/k\}$. Por lo tanto $<x_{nk}>$ converge a x_0.

$\Leftarrow$]

Suponemos que (X,d) es secuencialmente compacto. Por la demostración de la Prop. 4.12 (X,d) es completo. Ahora supongamos que no es compacto. Entonces no es totalmente acotado. Así existe algún $\varepsilon>0$ tal que la colección no finita $(B_\varepsilon(y_i)/1\leq i\leq n)$ cubre X. Sea $x_1\in X$ un punto dado, entnces existe un x_2 tal que $d(x_1,x_2)\geq\varepsilon$. Así se tiene x_3 con $d(x_1,x_3)\geq\varepsilon$. Continuando el procedimiento constituimos una sucesión $<x_n>$ con $d(x_n,x_m)\geq\varepsilon$ para cualquier $n,m \in \mathbb{N}$, entonces $<x_n>$ tiene una subsucesión no convergente, lo que contradice la definición 4.14; Por lo tanto (X,d) es compacto ■

" ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS Y ESPACIOS DE BANACH "

DEF 4.20:

Un espacio vectorial (real) es un conjunto. X en el cual se definen dos operaciones (+) adición vectorial, y (•) multiplicación escalar. Las operaciones satisfacen las siguientes condiciones:

1. $x + y = y + x$, $\forall x,y \in X$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x,y,z \in X$.
3. Existe un vector $\bar{0}\in X$ tal que $x + \bar{0} = x$ $\forall x\in X$.
4. $a(x+y)=ax +ay$, si $a\in\Re$ y $x,y \in X$.
5. $(a+b)x = ax + bx$ si $a,b\in\Re$, $x \in X$.
6. $a(b)x = (ab)x$ si $a,b\in\Re$, y $x \in X$.
7. $0\cdot x = \bar{0}$; $1\cdot x = x$; $\forall x \in X$.

El conjunto $Y\subseteq X$ es un subespacio de X si $x,y\in Y$ y $a,b\in\Re$ implican que $ax+by\in Y$.

DEF 4.21:

Una norma en un espacio vectorial X es una función $\| \|:X\rightarrow \Re^+\cup\{0\}$ que cumple:

1. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$.
2. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.
3. $\| ax \| = |a| \| x \|$.

Un espacio vectorial normado (X, $\| \|$) es un espacio métrico si se define la métrica d como $d(x,y) = \| x - y \|$.

Si el espacio vectorial normado es completo en su métrica, se le llama Espacio de Banach.

Un subespacio $Y\subseteq X$ es cerrado en la topología definida por su norma.

Sea (X, $\| \ \|$) un espacio normado. El transformado de $\| \ \|$ en $^*X$ se denotará por $^*\| \ \|$, la mónada de $x \in {}^*X$ es el conjunto $m(x)=\{y \in {}^*X \ / \ \| y-x \| \approx 0\} = \{y \in {}^*X / y=x+z, \ z \in m(\bar{0})\}$. Los puntos finitos en $^*X$ son aquellos $x \in {}^*X$ tales que $\| x \|$ es finito.

DEF 4.22:

Sean X,Y espacios vectoriales. Un mapeo $T:X \rightarrow Y$ es llamado un operador lineal si $T(ax+by) = aTx + bTy$ para todo $a,b \in \Re$ y $x,y \in X$. El conjunto de operadores lineales se denota como $L(X,Y)$.

Sean X y Y espacios vectoriales normados. Un operador lineal $T:X \rightarrow Y$ es acotado si el número $\| T \| = \sup \{ \| Tx \| \ / \ \| x \| \leq 1 \}$ es finito. Este número es la norma de T. Se tiene que $\| Tx \| \leq \| T \| \| x \|$ para todo $x \in X$. El conjunto de los operadores lineales acotados $T:X \rightarrow Y$ se denota por $B(X,Y)$. Si $Y=\Re$, entonces un operador lineal T es llamado una funcional lineal.

Finalmente $^*X$ y $^*T(x)$ son las extensiones no-standard de X y T(x).

<u>TEO 4.15:</u>

Sea $T \in L(X,Y)$ donde X y Y espacios vectoriales normados. Entonces los siguientes incisos son equivalentes:

1. T es acotado.
2. $^*T:{}^*X \rightarrow X^\wedge$ manda puntos finitos en puntos finitos.
3. $^*T$ manda $m(\bar{0})$ en $m(\bar{0})$.
4. $^*T$ manda puntos cercanos en puntos cercanos. Si $z \in {}^*X$, $z \approx x$ con $x \in X$, entonces $^*Tz \approx Tx$.

<u>DEM:</u>

$1) \Rightarrow 2)$

Supongamos que $\| Tx \| \leq M \| x \|$ para todo $x \in X$. Por transferencia $\| {}^*Tx \| \leq M \| x \|$ para todo $x \in {}^*X$.

$2) \Rightarrow 3)$

Por R.A.A. suponemos que $x \in m(\bar{0})$ y $\| {}^*Tx \| \not\approx 0$. Entonces el elemento $z=x/\|x\| \in {}^*X$ y $\| z \| = 1$, pero por P.T. $^*Tz = (1/\| x \|){}^*Tx$ no es finito si $\| x \| \approx 0$ entonces $\| {}^*Tx \| = c$ con $c \in {}^*\Re - \Re$, y esto es una contradicción;

Por lo tanto se cumple en el inciso (3).

$3) \Rightarrow 4)$

Sea $x \in X$ y $z \in m(x)$, así $x-z \in m(\bar{0})$. Entonces $^*T(x-z)=Tx-{}^*Tz \ m(\bar{0})$, entonces $^*Tz \approx Tx$.

$4) \Rightarrow 1)$

Por R.A.A. si T no es acotado, entonces existe una sucesión $< x_n \in X \ / \ n \in \mathbf{N} >$ tal que $\| x_n \| = 1$ pero $\| Tx_n \| > n$ para $n \in \mathbf{N}$. Entonces $\| {}^*Tx_w \|$ es infinito para algún $w \in {}^*\mathbf{N}-\mathbf{N}$ y por P.T. si $z = x_w / (\| {}^*Tx_w \|)^{1/2}$, es cercano a $\bar{0}$, pero $\| {}^*Tz \| = (\| {}^*Tw \|)^{1/2}$ no es finito, y esto es una contradicción;

Por lo tanto se cumple el inciso (1)$\blacksquare$

Dando por hecho un resultado standard que dice que un operador lineal es continuo si y solo si es continuo en $\bar{0}$ se tiene el siguiente corolario:

COR. 4.2:

$T \in L(X,Y)$ es acotado $\Leftrightarrow$ es continuo.

DEM:

$\Rightarrow$]

Por Teo 4.15.3, si T es acotado, entonces $Tx \in m(\bar{0})$ si $x \in m(\bar{0})$ y por Prop. 4.7 se tiene que T es continuo.

$\Leftarrow$]

Como T es continuo, entonces es continuo en $\bar{0}$, aplicando la Prop. 4.7 se tiene que $Tx \in m(\bar{0})$ si $x \in m(\bar{0})$, entonces, por Teo 4.6.1 T es acotado■

TEO 4.16: (ACOTACIÓN UNIFORME)

Sea X un espacio de Banach, Y un espacio vectorial normado, y $F \subset L(X,Y)$ una familia de operadores lineales acotados. Suponemos que para cada $x \in X$ existe una constante M_x tal que $\| Tx \| \leq M_x$ para todo $T \in F$. Entonces existe una constante M tal que $\| T \| \leq M$ para todo $T \in F$. Los operadores en F son uniformemente acotados.

DEM:

Suponemos que $T \in L(X,Y)$, si $\| Tx \| \leq M$ para todo x en la bola cerrada $\bar{B}_\varepsilon(x_0)=\{x \in X \,/\, \| x-x_0 \| < \varepsilon\}$ entonces T es acotado y $\| T \| \leq 2m/\varepsilon$.
Por R.A.A. Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon_0 > 0$ dados. Entonces existe un $x_1 \in B_{\varepsilon_0}(x_0)$ y $T_1 \in F$ tal que $\|T_1 x_1\| > 1$. Para otro caso $\| Tx \| \leq 1$ para todo $x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(x_0)$ y todo $T \in F$. Y entonces $\|T\| \leq 2/\varepsilon_0$ para todo $T \in F$. Por continuidad hallamos ε_1 con $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ y $B_{\varepsilon_0}(x_0) \supsetneq B_{\varepsilon_1}(x_1)$ tal que $\|T_1 x\| > 1$ para todo $x \in \bar{B}_{\varepsilon_1}(x_1)$. Se construye inductivamente una sucesión $\langle B_{\varepsilon_n}(x_n) / n \in \mathbb{N} \rangle$ con $B_{\varepsilon_n}(x_n) \supsetneq B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})$ y $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ y una sucesión de operadores $T_n \in F$ tal que $\|T_n x\| \geq n$ para todo $x \in \bar{B}_{\varepsilon_n}(x_n)$. Ahora $\langle x_n \rangle$ es una sucesión de Cauchy ya que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Sea $x \in X$ el límite de $\langle x_n \rangle$. Entonces $x \in \bar{B}_{\varepsilon_n}(x_n)$ con $\|T_n x\| > n$ para todo n. Contradicción; Por lo tanto $\| T \| \leq M$ para todo $T \in F$■

TEO 4.17:

Sea X un espacio de Banach y Y un espacio vectorial normado y suponemos que $\langle T_n / n \in \mathbb{N} \rangle$ es una sucesión en $B(X,Y)$ tal que para cada $x \in X$ existe un elemento y_x con $\lim_{n\to\infty} T_n x = y_x$. Entonces el mapeo T dado por $Tx = y_x$ está en $B(X,Y)$.

DEM:

Se tiene que $T: X \to Y$ es lineal, como $\| \; \|$ es una función continua, $\lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \|Tx\|$, y así para cada x existe un M_x tal que $\| Tx \| \leq M_x$ para todo n, por Teo. 4.16 existe un $M \in \mathbb{N}$ con $\| T_n \| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de aquí $\| Tx \| = \|T_n x\| \leq M \| x \|$;
Por lo tanto T es acotado■

DEF 4.23:

Sean X y Y espacios vectoriales normados; un operador $T \in L(X,Y)$ es compacto si $\bar{T}(B)$ es compacto para todo conjunto con norma acotada $B \subset X$.

TEO 4.18:

$T \in L(X,Y)$ es compacto $\Leftrightarrow$ ${}^*T$ manda puntos finitos a puntos cercanos standard.

DEM:

$\Rightarrow]$

Suponemos que T es compacto y sea $x \in {}^*X$ finito, $\| x \| < M$ para $M>0$. La bola $B=\{x \in X \,/\, \| x \| \leq M\}$ es acotado, entonces $\bar{T}(B)$ es compacto. Así todo punto de ${}^*(\bar{T}(B))={}^*T({}^*B)$ es cercano standard por Teo 4.3; como $x \in {}^*B$ entonces ${}^*Tx$ es cercano standard.

$\Leftarrow]$

Suponemos que ${}^*T$ mapea puntos finitos en cercanos standard; y sea B un conjunto acotado; por Teo 4.4 basta con mostrar que $T(B) \subseteq K$ para algún conjunto compacto K. Sea $K=\{ y \in Y \,/\, y \approx y' \}$ para algún y' en ${}^*(T(B))=st({}^*T({}^*B))$. Entonces $T(B) \subseteq K$ ∎

TEO 4.19:

Sea X un espacio vectorial normado y Y un espacio de Banach. Entonces el espacio vectorial normado B(X,Y) es completo y en consecuencia un espacio de Banach. El conjunto de operadores compactos en B(X,Y) forman un subespacio lineal cerrado.

DEM:

Sea $< T_n \in B(X,Y) \,/\, \in \mathbb{N} >$ una sucesión de Cauchy. Entonces, para cada $x \in X$, $<T_n x>$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto converge a un elemento y, por que Y es completo. Nosotros definimos T como $Tx=\lim_{n \to \infty} T_n x$. Entonces T es lineal y acotada ya que $\lim_{n \to \infty} \| T_n \| = \| T \|$. Dada $\varepsilon>0$ existe un N tal que $\|T_n x - T_m x \| \leq \|T_n - T_m \| < \varepsilon \| x \|$ si $n,m \geq N$. Por lo tanto $\| T_n x - Tx \| \leq \varepsilon \| x \|$ si $n \geq N$ y así $\| T_n - T \| \leq \varepsilon$ para $n \geq N$;

Por lo tanto B(X,Y) es completo.

Es claro que el conjunto de operadores compactos es un subespacio lineal de B(X,Y). Sea $<T_n>$ una sucesión de operadores compactos convergentes a un operador $T \in B(X,Y)$. Si $y \in {}^*X$ es finito entonces pertenece a ${}^*B$, donde $B=\{x \in X / \|x\| \leq M\}$. Sabemos que $T_n X$ converge a Tx uniformemente en B, esto es, para cualquier $\varepsilon>0$ existe un $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\| T_n x - Tx \| < \varepsilon$ para todo $n \geq n(\varepsilon)$ y todo $x \in B$. Así $\| {}^*T_{n_0} X - {}^*Tx \| < \varepsilon/2$

para $n_0 \geq m(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in {}^*B$. Como T_{n_0} es compacto, ${}^*T_{n_0} y \approx z Y$, y $\| {}^*Ty - z \| < \varepsilon$.

Como ε es arbitrario, ${}^*Ty$ es pre-cercano-standard. Como Y es completo por Prop 4.12 ${}^*Ty$ es cercano standard;

Por lo tanto, el conjunto de operadores compactos en B(X,Y) es un subespacio lineal cerrado ∎

DEF 4.24:

El espacio de Banach de funciones lineales acotadas es un espacio lineal normado X es llamado el espacio dual de X y se denota como X'. El dual de X' es denotado como X'' y se llama el segundo dual.

TEO 4.20: (" HANN - BANACH ")

Sea X un espacio vectorial y suponemos que dada una función $\rho: X \to R$ satisface $\rho(x+y) \leq \rho(x)+\rho(y)$ y $\rho(ax)=a\rho x$ para $a \in \Re$ y $x,y \in X$. Suponemos que F es una funcional lineal definida en un subespacio S de X con $f(x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in S$. Entonces existe una funcional lineal F en X que es extensión de f, esto es $f(x)=F(x)$ $\forall x \in S$ y satisface $f(x) \leq \rho(x)$ para $x \in X$.

DEM:

Sean g y h funcionales lineales definidas en un subespacio lineal de X. Se dice que g es la extensión de h ($h\angle g$) si el dominio de h está contenido en el dominio de g y h=g en el dominio de h. La relación $\angle$ ordena parcialmente el conjunto de funcionales lineales. Considerese el conjunto de todas las extensiones g de f. las cuales satisfacen $g(x) \angle \rho(x)$ para x en el domminio de g. Por el lema de Zorn aplicado (g / $f \angle g$) existe una extensión maximal f; P.D. domF=X. Por R.A.A. Suponemos que existe $y\in X$ y $y\notin$domF. Entonces F es extendido a una funcional g en el subespacio $X^\wedge\supset$domF. consistente de elementos de la forma $ay + F(x_0)$ con x_0 en el dominio de F. y $a\in\Re$. así $g(ay+x_0)=ag(y)+F(x_0)$. Ahora se define sólo para g(y) y si g(y) se elige como $g(x) \le \rho(x)$ para todo $x\in{}^\wedge X$ Contradicción. Ahora si x_1 .x_2 en domF tenemos que $F(x_2)-F(x_1)=F(x_2-x_1)\le \rho(x_2-x_1) \le \rho(x_2+y)+\rho(-y-x_1)$. lo que nos da $-\rho(-y-x_1)-F(x_1) \le \rho(x_2+y)-F(x_2)$, entonces existe una constante $c\in\Re$ tal que:

1. $c \le \rho(x_2+y)-F(x_2)$. y
2. $-\rho(-y-x_1)-F(x_1) \le c \quad x_1, x_2 \in$ domF.

Entonces elegimos $g(y) = c$; teniendo para $x = ay + x_0 \in X^\wedge$ la desigualdad $g(x)=g(ay+x_0)=ac + F(x_0) \le \rho(ay + x_0)$ sigue de sustituir x_2 por x_0 /a en el inciso 1 si a>0 y x_1 por x_0/a en el inciso 2 si a>0;

Por lo tanto; existe la extensión tal que $F(x) \le \rho(x)$ para $x\in X$ ■

CONCLUSIONES

De acuerdo al trabajo presentado, hemos visto que el Análisis no-standard tiene una aplicación muy amplia, (formidable), en este caso en estructuras topológicas, aunque también tiene grandes aplicaciones en Análisis Funcional, Teoría de la Probabilidad, Teoría de Funciones de Variable Compleja, Teoría Analítica de Números, Física-matemática y Economía Matemática.

En el caso de Estructuras Topológicas, mostramos que los problemas pueden ser resueltos de una manera más fácil, no por que el resultado se pueda escribir en menos líneas, sino porque la teoría se maneja de una forma más ágil e intuitiva.

Nuestro modelo topológico, $^*(X,T)$ nos permitió atacar los Teoremas de una forma más directa, precisa y sobre todo intuitiva, donde estas ventajas hacen muy difícil que uno se llegue a perder en las demostraciones de los resultados, y por lo tanto se tiene una mejor comprensión y un razonamiento más coherente de lo que se está demostrando. Por ejemplo, un resultado impresionantemente intuitivo, además de útil, es el manejo del concepto $d(x,y)<\varepsilon$ como un número infinetesimal y a las vecindades de un punto x, como mónadas de x, (m(x)).

En sí, el Análisis no-standard nos proporciona la herramienta para poder extender una estructura, no perder sus propiedades y obtener los resultados de sus interrogantes de una manera más sencilla y comprensible.

Un punto que se tiene que aclarar es el por qué se proponen las tres construcciones, (Mendelson, Robinson y Davis-Loeb), para modelos no-standard: La razón es la siguiente: la construcción de Mendelson nos lleva paso a paso en su proceso, sobre las teorías formales más sencillas, las de primer orden; la contrucción de Robinson nos generaliza la construcción de Mendelson, y como se mencionó en la introducción, sus resultados se prueban con los resultados de Mendelson. Las dos construcciones anteriores nos formalizan por completo el uso de los modelos no-standard ya que se construyeros desde sus fundamentos lógicos. La construcción de Davis-Loeb, es una manera de salir de los conceptos lógicos rigurosos, para dar un acceso más directo a los modelos no-standard, sin perder la formalidad en dicha construcción.

Finalmente, cabe mencionar, que el Análisis no-standard tuvo un estancamiento en los últimos años, el cual fue superado gracias a los resultados de Edward Nelson, así podemos afirmar que el análisis no-standard es una real y excelente alternativa para solucionar de manera intuitivamente fácil problemas de la matemática moderna.

BIBLIOGRAFÍA

MENDELSON, E.,
INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC,
Editorial Wadsworth & Brooks / Cole, Mathematics Series,
EUA 1987, 328 págs.

ROBINSON, A.,
NONSTANDARD ANALYSIS,
Editorial North Holland,
EUA 1966.

DAVIS, M.,
APPLIED NONSTANDARD ANALYSIS,
Editorial John Wiley & Songs Inc.,
EUA 1977, 177 págs.

LOEB, P.A. and HURD, A.E.,
AN INTRODUCTION TO NONSTANDARD REAL ANALYSIS,
Editorial Academic Press Inc.,
EUA 1985, 221 págs.

CHANG, C.C. and KEISLER H.J.,
MODEL THEORY,
Editorial North Holland,
EUA 1977, 533 págs.

BELL, J.L. and SLOMSON, A.B.,
MODELS AND ULTAPRODUCTS,
Editorial North Holland,
EUA 1969, 307 págs.

GUERRERO ZARCO, María de Lourdes,
ANÁLISIS NO-STANDARD: UNA ALTERNATIVA,
Tésis UNAM, 1979, 112 págs.

PREISSER RODRÍGUEZ, Asunción,
NOTAS DE CLASE,
UNAM, 1989.