

44  
ZEJ



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS  
1995**

**FLUJOS CON SIMETRIA AXIAL**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:**

**F I S I C O**

**P R E S E N T A:**

**IVAN SANTAMARIA HOLEK**



**FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM**



**FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR**

**FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Flujos con simetría axial"

realizado por Ivan Santamaría Holek

con número de cuenta 8955404-9 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis	DR. RAMON PERALTA FABI
Propietario	DR. JULIO HERRERA VELAZQUEZ
Propietario	DR. STEVEN PETER CZITROM BAUS
Suplente	DR. VICTOR MANUEL ROMERO ROCHIN
Suplente	M. EN I. RUBEN AVILA RODRIGUEZ

*Ramon Peralta Fabi*  
*Julio Herrera Velazquez*  
*Steven Peter Czitrom Baus*  
*Victor Manuel Romero Rochin*  
*Ruben Avila Rodriguez*

Consejo Departamental de Física

*R. a. Roberto Alejandro Ruelas Mayorga*  
DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA  
Coordinador de Licenciatura

... a mis padres.

EL REZO NACE CUANDO LA ESPERANZA MUERE.

Leonardo Da Vinci.

## INDICE

RESUMEN.....	1
INTRODUCCION.....	2
CAPITULO 1.- FORMULACIONES DE LA HIDRODINAMICA .....	4
§1. FORMULACION EULERIANA.....	4
§2. FORMULACION LAGRANGIANA .....	11
§3. RESUMEN .....	14
CAPITULO 2.- ALGUNAS SOLUCIONES EN COORDENADAS ESFERICAS A LAS ECUACIONES DE LA HIDRODINAMICA.....	15
§1. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN COORDENADAS ESFERICAS Y FUNCION DE CORRIENTE .....	16
§2. FLUJO DENTRO DE UN CILINDRO.....	20
§3. VARIABLES DE SEMEJANZA Y VORTICES .....	25
§4. SOLUCIONES PARA FLUJOS CON VELOCIDAD AZIMUTAL NULA .....	36
§5. RESUMEN .....	48
CAPITULO 3.- SOLUCION LAGRANGIANA AL PROBLEMA DEL FLUJO ENTRE DOS PLANOS PARALELOS .....	50
§1. FLUJO BIDIMENSIONAL .....	50
§2. FLUJO DE COUETTE PLANO.....	51
APENDICE A .....	55
APENDICE B .....	59
CONCLUSIONES .....	61
BIBLIOGRAFIA .....	63

## FLUJOS CON SIMETRÍA AXIAL

### RESUMEN

Este trabajo consiste de dos partes principales. En el primer capítulo se deducen las dos formulaciones básicas de la Hidrodinámica: La formulación euleriana y la formulación lagrangiana.

En el segundo capítulo, a partir de la formulación euleriana, se encuentra una serie de soluciones exactas a las ecuaciones escritas en coordenadas esféricas, para flujos que tienen simetría axial. Por la simetría del problema, las ecuaciones se escriben en términos de la función de corriente y de la velocidad azimutal. La función de corriente se construye a partir de la ecuación de continuidad.

Primero se estudia el problema del flujo que solamente tiene la componente azimutal de la velocidad, lo que equivale a decir que la función de corriente es constante. Se estudian dos casos particulares: el flujo dentro de un cilindro y vórtices. En el segundo caso, una vez encontrado el campo de velocidades, se calculan diversas cantidades de interés como el momento angular, la vorticidad, las componentes del tensor de esfuerzos y la disipación de la energía.

Después se estudia el caso en que la velocidad azimutal es nula, pero las componentes radial y polar no lo son. Esta suposición lleva a una ecuación diferencial parcial de cuarto orden no lineal para la función de corriente. En éste caso se encuentran diversas soluciones en variables separables para distintas dependencias de la función de corriente respecto al ángulo y el radio. Como caso particular se encuentra la solución de Landau del Jet sumergido, el vórtice de Hill y el flujo de dos chorros que chocan de frente.

En el tercer capítulo se resuelve el problema del flujo de Couette plano utilizando el sistema de ecuaciones de la formulación lagrangiana.

Para finalizar, y como complemento, en el apéndice A se deduce una formulación integral de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible. La idea que motiva una formulación integral, es tratar de obtener, de ser posible, nueva información acerca del comportamiento de los fluidos sin tener que resolver explícitamente las ecuaciones mismas. La formulación se lleva a cabo usando métodos de transformadas integrales (transformada de Fourier). El resultado es un conjunto de ecuaciones integrales que tienen incorporadas las condiciones de frontera en los límites de las integrales, y que dependen de funciones de Green tensoriales.

## INTRODUCCION

¡Eureka! gritó Arquímedes y salió corriendo de la bañera. Esta es una de las expresiones más famosas de la historia y sin duda la más famosa asociada a un descubrimiento científico. Curiosamente se debe al descubrimiento del principio de Arquímedes que forma parte de lo que hoy se conoce como Mecánica de Fluidos o Hidrodinámica.

Saber manipular los fluidos, y en particular el agua, ha constituido una de las principales preocupaciones del hombre a través de su existencia. La supervivencia de las dinastías Chinas estaba íntimamente ligada a la agricultura, y la agricultura dependía de la cantidad y eficiencia del sistema de canales con los cuales se regaban los inmensos campos de arroz. Para poder sobrevivir en las llanuras semiáridas de nuestro país, los frailes franciscanos construyeron larguísimo acueductos para transportar agua de los manantiales a las ciudades, a veces estas bellas construcciones no llegaron a funcionar, como es el caso del acueducto del Padre Tembleque en Hidalgo, el más alto del mundo.

Se podrían enumerar una gran cantidad de ejemplos similares relativos a las más diversas culturas y épocas, sin embargo es conveniente viajar en el tiempo hasta el siglo XVIII europeo, para poder fijar el nacimiento formal, por decirlo de alguna manera, de la Hidrodinámica.[1] El nombre se debe a Daniel Bernoulli, quien en 1738 lo usó en su libro "Hydrodynamica" para indicar la combinación de la hidrostática y la hidráulica (la consideración del movimiento de los fluidos). Bernoulli determinó la relación entre la presión y la velocidad y la formalizó en su famoso teorema. Pero el concepto de presión interna no estaba entendido del todo así que tocó a su hijo, John Bernoulli el introducirlo con propiedad y el aplicar el principio de conservación del momento a elementos infinitesimales del fluido. Leonard Euler utilizó como base el trabajo de los Bernoulli para formular las ecuaciones fundamentales de movimiento y continuidad para un fluido ideal incompresible en 1775. En esos trabajos se establecieron las bases para una posterior generalización de las ecuaciones, en las que se incluyó los efectos viscosos ya estudiados por Newton unos ciento cincuenta años antes. La generalización fue llevada a cabo por Navier en 1822, e independientemente por Stokes en 1845. Debido al trabajo de estos dos científicos las ecuaciones fundamentales, el problema a resolver de la Hidrodinámica, llevan el nombre de "Ecuaciones de Navier-Stokes". A partir de ese momento surgieron una gran cantidad de trabajos sobre el tema. Hacia finales del siglo XIX el flujo de fluidos comenzó a ser observado e investigado con mayor atención. En 1883 Osborne Reynolds investigó la relación entre turbulencia e inestabilidad de los flujos. En 1904 Ludwig Prandtl formuló la teoría de la Capa Límite que separa los flujos potenciales y los flujos viscosos postulando una delgada región cerca de la frontera en la que los efectos viscosos son predominantes, y en la cual la velocidad del fluido, con respecto a la frontera, tiende a cero.

Sin embargo, la Hidrodinámica tiene una gran cantidad de preguntas sin respuesta. Como en toda teoría, uno de los objetivos es el de encontrar soluciones exactas a las ecuaciones para poder compararlas con la observación directa de los fenómenos. Pero este no es un trabajo fácil. Debido a las complicadas ecuaciones no lineales que la

rigen, encontrar soluciones exactas representa un problema prácticamente infranqueable. De hecho no se conocen soluciones generales a estas ecuaciones. Es por esta razón que en el apéndice A se incluye una formulación integral de la Hidrodinámica como posible método alternativo que pueda contribuir en la solución de problemas. Esta formulación propone métodos para la resolución de problemas, ya sea analíticamente o por métodos aproximados. Aunque no se intente resolver ningún problema específico con ella, queda como una puerta abierta por la cual se podría pasar en el futuro.

Sin embargo, hay que mencionar que el panorama para hallar soluciones exactas por métodos diferenciales no es tan árido. A lo largo de ciento cincuenta años se ha encontrado una pequeña cantidad de soluciones exactas. Estas soluciones son importantes al menos por las razones siguientes:

1.- Las soluciones representan flujos fundamentales de fluidos. Con estas soluciones se pueden estudiar los fenómenos básicos que describen las ecuaciones de Navier-Stokes.

2.- Las soluciones exactas sirven para comparar y evaluar la precisión de los métodos aproximados como son los métodos numéricos, los asintóticos y los empíricos[2].

En el segundo capítulo de este trabajo se presentan soluciones exactas en coordenadas esféricas para flujos con simetría axial, tanto para flujos que únicamente rotan alrededor de un eje, como para aquellos que no tienen giro alguno. Algunas de estas soluciones forman parte de un trabajo recientemente realizado y extienden las soluciones de Landau, el "Jet sumergido", y el "Vórtice de Hill". Una aportación es la relacionada con una solución particular que representa una fuente lineal infinita que mana fluido de forma horizontal. Tanto el vórtice de Hill como el flujo de Stokes son casos particulares de la misma solución, a la que se le aplicaron distintas condiciones de frontera. En el otro caso, se llega a una ecuación diferencial con tres constantes libres, cuya solución más sencilla (las tres constantes iguales a cero) es la solución del "Jet sumergido", encontrada siguiendo otro método por Landau en 1941.

Para finalizar quisiera decir que este trabajo es, de alguna forma, el trabajo de un epígono. En las hojas siguientes se encontrarán los pasos que algunos científicos han dado desde hace mucho tiempo, y de algunos que recientemente han contribuido con su trabajo a la Hidrodinámica. El trabajo representa, también, el eco del grito que todas aquellas personas que han logrado contribuir a la ciencia han dado, dentro de sí mismos, alguna vez: ¡Eureka!

## CAPITULO 1

### FORMULACIONES DE LA HIDRODINAMICA

En este capítulo se obtendrán dos formulaciones de la Hidrodinámica. La descripción matemática del movimiento de los fluidos se puede realizar siguiendo distintos enfoques, éstos son el euleriano y el lagrangiano. A partir de ellos se obtendrán dos sistemas de ecuaciones diferenciales que describen, en forma equivalente el movimiento de los fluidos. Al final se discutirán las características relevantes de cada formulación.

#### §1. FORMULACION EULERIANA

Para derivar las ecuaciones del movimiento de los fluidos desde el punto de vista euleriano se pueden seguir dos caminos relacionados con su estructura interna. El primer método utiliza los resultados de la teoría cinética de los gases, la cual, obteniendo cantidades promedio de la velocidad, el momento, etc., relaciona los modelos microscópicos de la materia con sus manifestaciones macroscópicas.

El otro método para deducir las ecuaciones utiliza la hipótesis del medio continuo. Esto significa que las moléculas individuales que constituyen al fluido serán ignoradas, es decir, cualquier porción de fluido que se considere, por pequeña que sea, contendrá un número lo suficientemente elevado de partículas de manera tal que el comportamiento de dicha porción no se vea significativamente alterado por el comportamiento de una partícula. Además, puede considerarse que la distancia entre moléculas es muy pequeña comparada con la longitud mínima en que se desarrollan los fenómenos que nos interesan.

En este método se supone que para describir el movimiento del fluido se necesitan los campos de velocidades del fluido  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ , de presión  $p(x, y, z, t)$  y de densidad  $\rho(x, y, z, t)$ .

En el enfoque euleriano los campos de velocidades, presión y densidad se refieren a diminutos volúmenes fijos en el espacio ( volúmenes de control), a través de los cuales, en cada instante de tiempo, se moverá el fluido.

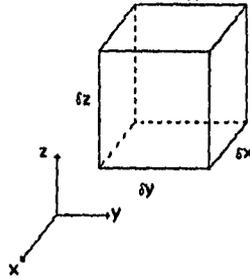


fig1 Volumen de control

El volumen de control puede imaginarse como un paralelepípedo fijo en el espacio de lados  $\delta x$ ,  $\delta y$  y  $\delta z$ .

Considérese el flujo de masa a través de uno de estos volúmenes de control. La masa de fluido por unidad de tiempo que atraviesa una superficie  $d\mathbf{S}$  ( con normal exterior al volumen) es  $\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$ . Si el fluido entra al volumen esta cantidad es negativa, si sale es positiva. Entonces, la cantidad de fluido que sale del volumen es

$$\oint \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} , \quad (1.1)$$

donde la integral se realiza sobre la superficie que encierra al volumen de control. La masa contenida en dicho volumen es

$$\int \rho dV , \quad (1.2)$$

de manera que la disminución de masa de fluido por unidad de tiempo está dada por

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV , \quad (1.3)$$

que debe ser igual a la masa de fluido que sale a través de la superficie que encierra al volumen en cuestión, es decir:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint \rho \vec{u} \cdot d\vec{S}, \quad (1.4)$$

El término de la derecha se puede transformar, utilizando el teorema de Gauss, en una integral de volumen obteniéndose

$$\int \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) \right] dV = 0, \quad (1.5)$$

pero la integral se puede llevar a cabo sobre cualquier volumen, de donde

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0. \quad (1.6)$$

Esta ecuación expresa la conservación de la masa y es llamada "ecuación de continuidad".

Con el objeto de deducir la ecuación de balance de momento lineal, centremos la atención en las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido. Estas fuerzas pueden deberse a la existencia de un campo externo que interactúa con el fluido; a estas fuerzas se les denomina fuerzas volumétricas ya que dependen de la cantidad de masa de fluido sobre la que actúan. Como ejemplos pueden considerarse las interacciones electromagnéticas o la fuerza de Coriolis. Estas fuerzas pueden representarse por medio de la integral de volumen

$$\int \rho \vec{F} dV. \quad (1.7)$$

Nótese que  $\vec{F}$  representa una fuerza por unidad de masa. Otro tipo de fuerzas que actúan sobre el fluido son las denominadas fuerzas superficiales, o esfuerzos cortantes. Estas actúan por medio del contacto directo entre los distintos elementos del fluido y se deben a la presión y a la viscosidad. Sea  $\vec{T}$  la fuerza neta por unidad de área que actúa sobre un elemento de superficie con normal  $\vec{n}$ , entonces la fuerza total que actúa sobre la superficie que envuelve al elemento de fluido es

$$\oint \vec{T}(\vec{n}) \cdot d\vec{S}. \quad (1.8)$$

El cambio del momento lineal de un elemento de fluido está dado por

$$\frac{D}{Dt} \int \rho \bar{u} dV \quad (1.9)$$

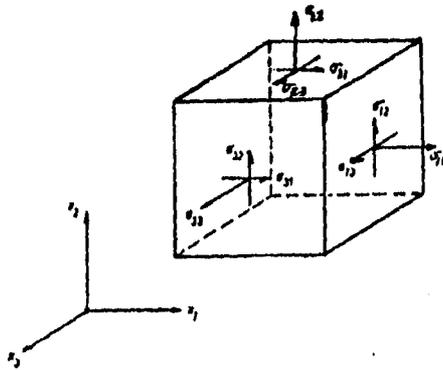
Donde el operador  $\frac{D}{Dt}$  se conoce como la "derivada material". Su significado se aclarará en el Apéndice B. Este término sólo tiene sentido si se sigue la evolución del movimiento del elemento de fluido durante cierto intervalo de tiempo (es decir,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son funciones del tiempo), ya que es la expresión de la segunda ley de Newton, sin embargo, esta evolución puede escribirse en términos de las variables eulerianas ( $x$ ,  $y$ ,  $z$  son independientes de  $t$ ) usando el teorema de transporte de Reynolds. La deducción de este teorema se encuentra en el Apéndice B [3]:

$$\frac{D}{Dt} \left( \int \alpha dV \right) = \int \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \text{div}(\alpha \bar{u}) \right] dV \quad (1.10)$$

De acuerdo con el segundo principio de Newton, el cambio del momento lineal de un elemento de fluido es igual a la fuerza neta resultante aplicada sobre el, es decir,

$$\int \left[ \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u} \bar{u}) \right] dV = \oint \bar{T}(n) \cdot d\bar{S} + \int \rho \bar{F} dV \quad (1.11)$$

La fuerza de superficie, como se mencionó anteriormente, se debe a la presión y a la viscosidad, y actúa sobre el contorno del elemento de fluido considerado. Existen tres tipos de esfuerzos (fuerzas superficiales), estos son: de compresión, de tensión y de corte. Toda la información sobre las fuerzas de superficie se puede expresar en términos del tensor de esfuerzos  $\bar{\sigma}$ . En la figura (2) se observan las componentes de la fuerza por unidad de área que actúan en cada plano (v.g. la fuerza por unidad de área que actúa sobre una superficie con normal  $n_i$  en la dirección  $x_i$  es  $T(n_i) = \bar{\sigma} \cdot \hat{n}_i$ ). La dependencia funcional de las nueve componentes del tensor de esfuerzos está determinada por las características propias del fluido considerado. Así, la forma de esta dependencia será distinta para los fluidos viscoelásticos y para los fluidos newtonianos (v.g. el queso fundido y el agua).



Figura(2). Componentes de los esfuerzos.

De acuerdo con I. G. Currie, en su libro *Fundamental Fluid Mechanics* [3], en el caso de fluidos newtonianos el tensor de esfuerzos debe satisfacer las siguientes condiciones:

a) Cuando el fluido está en reposo, los esfuerzos son hidrostáticos y la presión ejercida por el fluido es la presión termodinámica.

b) El tensor de esfuerzos  $\bar{\sigma}$  está relacionado linealmente al tensor de rapidez de deformación  $\bar{e}$ , y depende únicamente de él.

El tensor de rapidez de deformación se construye a partir del estudio de la rotación de un elemento de fluido con respecto a sus propios ejes, y a la deformación propiamente dicha, del elemento considerado. Dicho tensor se define como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right].$$
 La parte antisimétrica representa la rotación del elemento inmerso en un campo de velocidades, mientras que la parte simétrica representa su deformación.[3].

Las componentes del tensor de esfuerzos que cumplen dichas condiciones están dadas por la siguiente relación:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}. \quad (1.12)$$

Aquí los índices repetidos significan suma, de acuerdo con la notación de Einstein. En este caso  $u_i$  son las componentes de la velocidad, y las cantidades  $\eta$  y  $\zeta$  son positivas y se

denominan "coeficientes de viscosidad". Estas cantidades deben ser determinadas experimentalmente y son, en general, funciones de la temperatura y la presión [7]. La viscosidad pone de manifiesto la fricción interna en el fluido, y es una medida de la eficiencia con que se transfiere, irreversiblemente, el momento entre partes del fluido que tienen distintas velocidades.  $\eta$  recibe el nombre de viscosidad cortante ya que está asociada con los gradientes de velocidad que se encuentran fuera de la diagonal del tensor de esfuerzos, mientras que  $\zeta$ , que está relacionada con la presión mecánica (el tensor  $\delta$  indica que es normal a la superficie del elemento) obsérvese que los elementos de esta parte del tensor son únicamente diagonales, se denomina viscosidad volumétrica. Esta cantidad se puede "visualizar" como la cuantificación del efecto de expansión o contracción del elemento de fluido; si éste no variara su volumen, la densidad en él sería constante, y el término que contiene a  $\zeta$  se anularía.

La integral que contiene la contribución de los esfuerzos puede, ahora, escribirse en términos del tensor de esfuerzos como una integral de volumen con ayuda del teorema de Gauss:

$$\int \left[ \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u} \bar{u}) \right] dV = \int \text{div} \bar{\sigma} dV + \int \rho \bar{F} dV \quad (1.13)$$

Esta expresión puede agruparse bajo un sólo símbolo de integral igualado a cero y, dado que el volumen de control escogido es arbitrario, entonces el integrando debe ser igual a cero. De todo esto se obtiene la ecuación de balance de momento del fluido:

$$\frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u} \bar{u}) = \text{div} \bar{\sigma} + \rho \bar{F} \quad (1.14)$$

La ecuación puede reescribirse desarrollando los términos de la izquierda y utilizando la ecuación de continuidad, lo que le da su forma común:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = \text{div} \bar{\sigma} + \rho \bar{F} \quad (1.15)$$

El lado izquierdo de la ecuación representa el cambio de momento por unidad de volumen del fluido. El primer término es la aceleración temporal, mientras que el segundo término es la aceleración convectiva y da las aceleraciones locales (alrededor de óbices, etc.) aún cuando el flujo es estacionario. Nótese que el segundo término es no lineal dado que la velocidad aparece cuadráticamente. En la parte derecha están las fuerzas que causan la aceleración. La primera de estas fuerzas es debida los esfuerzos tanto cortantes como normales, mientras que la segunda es debida a las fuerzas volumétricas.

Otro principio de conservación que se debe satisfacer es el principio de conservación de la energía. Para deducir la ecuación de balance correspondiente debemos considerar que la variación por unidad de tiempo de la energía total del fluido en cualquier volumen (en particular en un volumen de control) debe ser igual al flujo de energía a través de la superficie que limita dicho volumen [4].

La energía de dicha porción de fluido es la suma de la energía interna por unidad de masa  $\epsilon$  más la energía cinética, también por unidad de masa,  $1/2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ . Para poder definir la energía interna del volumen de control es necesario hacer la hipótesis del "equilibrio local", la cual supone que aunque el fluido se encuentra en movimiento, es posible definir las cantidades termodinámicas punto por punto ya que en pequeñas porciones del fluido, éste se encontrará en equilibrio termodinámico con el medio que lo rodea. De ésta forma, se tiene que la variación de la energía contenida en  $V$  es

$$\frac{D}{Dt} \int \left( \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) dV \quad (1.16)$$

Esta variación de la energía se debe exclusivamente a la transferencia de masa y de momento. Ahora hay que considerar el cambio en la energía debido a los procesos de rozamiento interno, es decir, el trabajo por unidad de tiempo (potencia) que realizan las fuerzas sobre dicho volumen:

$$\oint \mathbf{u} \cdot \mathbf{\sigma} \cdot d\mathbf{S} + \int \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{F} dV \quad (1.17)$$

Si la temperatura del fluido no es homogénea existirá también una transferencia de calor entre aquellos puntos donde la temperatura es mayor a los puntos donde es menor. Designando por  $\mathbf{q}$  la densidad de flujo térmico, se tiene que el flujo total a través del volumen considerado es

$$\oint \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.18)$$

De esta forma la ecuación de balance de la energía es

$$\frac{D}{Dt} \int \left( \rho \epsilon + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) dV = \oint (\mathbf{u} \cdot \mathbf{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot d\mathbf{S} + \int \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{F} dV \quad (1.19)$$

Usando nuevamente el teorema de Reynolds en la parte izquierda de la ecuación, y el teorema de Gauss en la integral de superficie, se obtiene una ecuación diferencial que puede ser transformada, después de desarrollar algunos términos y utilizar las ecuaciones de continuidad y de conservación del momento, en la ecuación:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \sigma_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \quad (1.20)$$

Esta ecuación expresa la conservación de la energía. Como se puede observar, el término que contenía el trabajo realizado por las fuerzas volumétricas se canceló al considerar la ecuación de balance del momento lineal (1.15) que aparece a partir del segundo término del lado izquierdo y el primero del lado derecho. El lado izquierdo de (1.20) representa el cambio de la energía interna, tanto temporalmente como el debido al flujo del fluido. En el lado derecho aparecen las causas de este cambio; el primer término representa el trabajo realizado por los esfuerzos superficiales; el último término representa la cantidad de calor transferida al fluido.

Se han deducido las ecuaciones de conservación de la masa, del momento lineal y de la energía para el movimiento de los fluidos a partir del enfoque euleriano. Estos principios forman un conjunto de cinco ecuaciones diferenciales parciales que involucran 15 variables, a saber:  $\mathbf{u}$ ,  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $p$ ,  $\mathbf{q}$ , y seis componentes del tensor de esfuerzos. Como se mencionó en su ocasión, las componentes del tensor de esfuerzos pueden construirse a partir de ciertas consideraciones acerca de la estructura de cada fluido en particular (newtoniano o no newtoniano). Para tener un sistema cerrado de ecuaciones, es necesario dar las relaciones termodinámicas entre  $\varepsilon$ ,  $\rho$ ,  $p$  y la temperatura  $T$  con ayuda de las ecuaciones de estado del medio considerado.

## §2. FORMULACION LAGRANGIANA

Como se mencionó al principio del capítulo, en esta sección se deducirán las ecuaciones de movimiento a partir del enfoque lagrangiano [5]. El estudio se restringirá a fluidos con densidad constante. Este punto de vista centra su atención en un elemento determinado del fluido, observando la evolución de su movimiento en el transcurso del tiempo a partir de un instante inicial  $t_0$ . La posición del elemento de fluido está determinada por las coordenadas espaciales  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que son funciones del tiempo  $t$ . Se considerará que la velocidad y la presión dentro de este elemento de volumen son prácticamente constantes y que, durante los intervalos de tiempo considerados, el volumen de control se moverá como un "todo" sin que las deformaciones sean apreciables.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Este elemento se puede imaginar como un "punto" de fluido que se mueve de acuerdo con las ecuaciones del movimiento de la mecánica. [5].

Sea la función  $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$  la que da las posiciones  $\vec{x}$  de todos los elementos del fluido considerado, identificados por el parámetro  $\vec{x}_0$  en cada instante de tiempo. Este parámetro puede ser, así se considerará en lo sucesivo, la posición inicial de cada elemento de fluido. Así, la descripción lagrangiana consiste en asignar al flujo una familia de trayectorias que difieren una de otra por el valor del parámetro  $\vec{x}_0$ . La función  $\vec{x}$  tiene las componentes  $(x_1, x_2, x_3)$  y el parámetro  $\vec{x}_0$  estará dado por  $(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ . El método a seguir es pasar de las ecuaciones eulerianas a las lagrangianas por medio de la relación entre las variables consideradas en cada caso, esta transformación esta dada por

$$\frac{\partial \vec{x}(\vec{x}_0, t)}{\partial t} = \vec{u}[\vec{x}(\vec{x}_0, t), t]. \quad (1.21)$$

Además se debe hacer el cambio de las variables  $(\vec{x}_0, t)$  por  $(\vec{x}, t)$  y de la función  $\mathbf{u}(\vec{x}, t)$  por  $\mathbf{X}(\vec{x}_0, t)$ , relacionadas éstas dos últimas por la ecuación (1.21). Para realizar esto hay que notar que se pasa de un sistema de coordenadas cartesiano a uno que no es ni estacionario, ni ortogonal. Esto se puede visualizar pensando en que las trayectorias de las partículas son, en general, curvas que se deforman en el transcurso del tiempo. La transformación de las variables  $(x_1, x_2, x_3, t)$ , por las nuevas  $(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t)$  se realiza con la ayuda del jacobiano de la transformación:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} = [x_1, x_2, x_3] = |M|, \quad (1.22)$$

donde  $|M|$  es el determinante de la matriz de transformación  $M$ , es decir, el jacobiano de la transformación. De esta forma las derivadas eulerianas respecto a las coordenadas espaciales se transforman en las derivadas lagrangianas como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_i} = \frac{1}{|M|} [x_j, x_k, f], \quad (1.23)$$

donde  $\frac{\partial x_{0j}}{\partial x_i}$  son los elementos de la matriz inversa  $M^{-1}$ , o bien los cofactores de los elementos  $\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}$  de  $M$ , divididos por el determinante  $|M|$ . A partir de las ecuaciones (1.21) y (1.22) se encuentra que, para un fluido que tiene densidad constante, la ecuación de continuidad esta dada por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{u} = 0 &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{1}{|M|} \frac{\partial |M|}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{|M|} \left\{ \left[ \frac{\partial x_1}{\partial t}, x_2, x_3 \right] + \left[ x_1, \frac{\partial x_2}{\partial t}, x_3 \right] + \left[ x_1, x_2, \frac{\partial x_3}{\partial t} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde  $u_i$  son las componentes cartesianas de la velocidad. De esto se obtiene que  $\frac{\partial |M|}{\partial t} \equiv 0$  es decir el determinante de M es constante. Dado que en el instante inicial  $\bar{x}(\bar{x}_0, t=t_0) = \bar{x}_0$ , la matriz M, definida por (1.22) es una matriz unitaria y su determinante toma el valor 1, de esto se obtiene que  $\frac{\partial |M|}{\partial t} \equiv 0$ , es decir, el determinante de M es constante. Se deduce pues que la ecuación de continuidad para el fluido con densidad constante es, en el sistema lagrangiano:

$$[x_1, x_2, x_3] = 1. \quad (1.25)$$

La ecuación de Navier-Stokes para el caso de un fluido con densidad constante es

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{u}, \quad (1.26)$$

que, después de hacer la transformación de coordenadas con la ayuda de las ecuaciones (1.21), (1.22) y (1.25) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho} [x_j, x_k, p] + \\ &+ \nu \left\{ \left[ x_2, x_3, \left[ x_2, x_3, \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] \right] + \right. \\ &\left. + \left[ x_3, x_1, \left[ x_3, x_1, \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] \right] + \left[ x_1, x_2, \left[ x_1, x_2, \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Las ecuaciones (1.25) y (1.27) forman el conjunto de ecuaciones de movimiento en el enfoque lagrangiano en donde  $\bar{x}(\bar{x}_0, t)$  y  $p(\bar{x}_0, t)$  son las funciones desconocidas. La

primera de esas ecuaciones es la que representa la conservación de la masa, mientras que la segunda es la ecuación de movimiento de cada una de los elementos del fluido; el lado izquierdo es la aceleración de la partícula; en el lado derecho aparecen las fuerzas que actúan sobre dicha partícula, la presión y las fuerzas viscosas.

### §3. RESUMEN

En este capítulo se han mostrado dos formulaciones de las ecuaciones de la hidrodinámica.

La formulación euleriana se deduce a partir de la hipótesis del continuo y de los principios de conservación de la energía, momento lineal y masa. Por medio de estos principios determina el cambio de estas cantidades físicas dentro de un pequeño volumen fijo en el espacio, llevando a un sistema de cinco ecuaciones diferenciales parciales no lineales para los campos de velocidad, presión y flujo de calor. A estas ecuaciones hay que agregar, para tener un sistema completo de ecuaciones, la ecuación de estado y las relaciones para las componentes del tensor de esfuerzos, que se obtienen a partir del tensor de deformación. Esta formulación constituye una teoría clásica de campo con un número infinito de grados de libertad.

En contraposición al enfoque euleriano, la descripción lagrangiana centra su atención en el movimiento individual de cada uno de los elementos de fluido, a los que aplica las leyes de movimiento, ya sean de la mecánica clásica o relativista, que determinarán el flujo. Este enfoque supone que cada elemento, que puede ser identificado por su condición inicial, es prácticamente indeformable en cada intervalo temporal. Supone, también, que la velocidad y la presión dentro del elemento son constantes.

La descripción euleriana considera el flujo como un campo que puede variar sus características en cada punto del espacio conforme transcurre el tiempo. Esto equivale a decir que las funciones que describen el comportamiento dependen de las coordenadas y del tiempo y que estas últimas son independientes entre sí. En cambio, en la deducción lagrangiana, las coordenadas de cada elemento de fluido son funciones del tiempo. Ambas formulaciones son equivalentes entre sí, y la relación entre ellas está dada por el teorema de Reynolds o por las relaciones que se escribieron al principio del segundo inciso.

En el apéndice A se deduce una formulación integral a partir de las ecuaciones eulerianas. Aunque esta formulación no es utilizada en ningún problema particular, pretende ser un enfoque alternativo de la Hidrodinámica. Dicha formulación tiene ciertas virtudes ya que evidencian algunas propiedades de los fluidos. Sin embargo, es preferible evitar aquí una digresión. Si el lector lo desea puede consultar el apéndice A.

## CAPITULO 2

### ALGUNAS SOLUCIONES EN COORDENADAS ESFÉRICAS DE LAS ECUACIONES DE LA HIDRODINAMICA.

En este capítulo se estudiará el problema mecánico de flujos con simetría axial en coordenadas esféricas utilizando las ecuaciones de Navier-Stokes. Se comenzará escribiendo las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas y, debido a la simetría del problema considerado, se reescribirán en términos de una función llamada "función de corriente", que se construirá utilizando la ecuación de continuidad. El carácter no lineal de las ecuaciones las convierte en un problema de una dificultad tal que comúnmente es necesario hacer suposiciones que las simplifiquen de alguna forma. Estas simplificaciones dependen del problema específico que se desee resolver. En este caso se simplificarán las ecuaciones considerando las simetrías del problema. La primera simplificación supondrá que la función de corriente será constante, es decir, el campo de velocidades tendrá, únicamente, la componente azimutal de la velocidad distinta de cero. Para este caso el fluido se moverá solamente alrededor del eje sobre planos horizontales. Esta suposición llevará a una simplificación de las ecuaciones que las hará tratables por los métodos ordinarios de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales. En el segundo camino se supondrá un flujo estacionario en que la velocidad tendrá las componentes radial y polar, es decir, la función de corriente dependerá del radio y del ángulo polar, mientras que la componente azimutal de la velocidad será nula. En este caso el flujo será, en términos generales a lo largo del eje sin ninguna tendencia a rotar alrededor de éste.

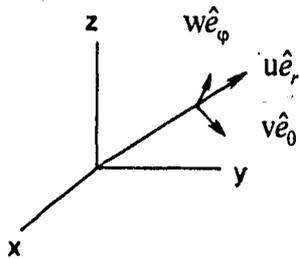
En términos muy superficiales, las razones para buscar soluciones con este tipo de simetrías son diversas, y responden a distintos tópicos de la física. Tal es el caso, por ejemplo, del flujo entre dos esferas concéntricas que tienen una velocidad de rotación relativa entre ellas. Este problema suele denominarse "Flujo esférico de Couette" y tiene relevancia en problemas astrofísicos y geofísicos. Otra cuestión de relevancia es el hecho de que es posible hacer modelos de los núcleos atómicos en términos de gotas de fluido. Una de las motivaciones es también el estudio de vórtices, tan frecuentes en la naturaleza. Así pues, en este capítulo se estudiarán flujos que roten alrededor de un eje, primeros tres incisos; y flujos que se desarrollarán a lo largo de dicho eje, último inciso.

§1. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN COORDENADAS ESFERICAS Y FUNCION DE CORRIENTE

El campo de velocidades se representará por

$$\vec{u}(r, \theta, \varphi, t) = \hat{e}_r u + \hat{e}_\theta v + \hat{e}_\varphi w, \quad (2.1)$$

siendo  $u$  la componente radial,  $v$  la componente polar y  $w$  la componente azimutal de la velocidad, como se muestra en la figura (2.1) siguiente:



Fig(2.1). Componentes del campo de velocidades

Las ecuaciones de Navier-Stokes escritas en coordenadas esféricas son las siguientes.

Ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.2)$$

La componente radial de la ecuación de conservación del momento:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2 + w^2}{r} = \\
& = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\
& + \frac{v}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \\
& - \frac{2vu}{r^2} - \frac{2v}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2vv \cot \theta}{r^2} - \frac{2v}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + F_r
\end{aligned} \tag{2.3}$$

La componente polar de la ecuación de conservación del momento:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} - \frac{w^2 \cot \theta}{r} = \\
& = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \nabla^2 v + \frac{2v}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{vw}{r^2 \sin^2 \theta} - \\
& - \frac{v2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + F_\theta
\end{aligned} \tag{2.4}$$

La componente azimutal es

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{uw}{r} + \frac{vw \cot \theta}{r} = \\
& = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v \nabla^2 w + \frac{2v}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{2v \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{vw}{r^2 \sin^2 \theta} + F_\varphi
\end{aligned} \tag{2.5}$$

donde  $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ , es el laplaciano.

Estas son las ecuaciones completas de Navier-Stokes en coordenadas esféricas. Ahora haciendo la suposición de que el flujo será simétrico con respecto al ángulo  $\varphi$ , es decir que el campo de velocidades solamente dependerá de la coordenada radial, del ángulo polar y del tiempo,  $u(r, \theta, t)$ . Bajo esta suposición todos los términos de las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) en que aparecen derivadas respecto al ángulo  $\varphi$  se anulan, lo que da el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta) = 0, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2 + w^2}{r} = \\ & = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{v}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{v}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \\ & - \frac{2vu}{r^2} - \frac{2v}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2v \cot \theta}{r^2} + F_r, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} - \frac{w^2 \cot \theta}{r} = \\ & = -\frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{v}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{2v}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} + F_\theta, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{uw}{r} + \frac{vw \cot \theta}{r} = \\ & = \frac{v}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{v}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{vw}{r^2 \sin^2 \theta} + F_\varphi, \end{aligned} \quad (2.9)$$

A partir de la ecuación (2.6) rescrita como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta); \quad (2.10)$$

multiplicando esta última ecuación por  $r^2 \sin \theta$ , las velocidades pueden ser escritas en términos de una función que tenga derivadas continuas de segundo orden (función de corriente). Las relaciones son las siguientes:

$$u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \Psi_0 \quad \text{y} \quad v = \frac{-1}{r \sin \theta} \Psi_r, \quad (2.11)$$

donde las expresiones  $\Psi_r, \Psi_0$  significan que debe tomarse la derivada parcial respecto a  $r$  y  $\theta$  en cada caso. Esta notación se ocupará de ahora en adelante.

Derivando la componente radial con respecto a  $\theta$ , la componente polar respecto a  $r$  y restando ambas ecuaciones se elimina el campo de presiones ya que las derivadas cruzadas son iguales. El resultado es

$$\begin{aligned} w_r + \frac{1}{r^3 \sin \theta} \left[ \Psi_0 (rw)_r - \frac{r}{\sin \theta} \Psi_r (w \sin \theta)_\theta \right] = \\ = \frac{v}{r^2} \left[ (r^2 w_r)_r + \left( \frac{1}{\sin \theta} [w \sin \theta]_\theta \right)_\theta \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} (w^2)_r \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} (w^2)_\theta + \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Psi_0}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\Psi_r}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2\Psi_r \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \right. \\ \left. - \frac{2\Psi_0}{r^3 \sin \theta} \right\} E^2 \Psi = v E^4 \Psi \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde  $E^2$  es el operador

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (2.14)$$

§2. FLUJO DENTRO DE UN CILINDRO.

Hasta ahora sólo se ha utilizado la suposición de que el flujo es simétrico respecto al eje de rotación, es decir, que no depende de la coordenada  $\varphi$ . Esto ha dado como resultado que el conjunto de ecuaciones en donde se encuentra representada la dinámica del fluido se reduzca a un conjunto de dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales en términos de la función de corriente y la componente azimutal de la velocidad. Si bien el número de ecuaciones necesarias para determinar la velocidad disminuyó, el orden de estas ecuaciones es mayor que el orden de las ecuaciones anteriores. En términos de las componentes de la velocidad las ecuaciones eran de segundo orden, mientras que ahora son de cuarto orden.

Supóngase ahora que el flujo solamente tendrá la componente azimutal del campo de velocidades; la función de corriente es constante. Al hacer esta suposición las ecuaciones (2.12) y (2.13) se reducen a las siguientes:

$$\frac{1}{\nu} w_t = w_{rr} + \frac{2}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} w_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} w, \quad (2.12b)$$

$$(w^2)_r \cos \theta - (w^2)_\theta \frac{\sin \theta}{r} = 0. \quad (2.13b)$$

Este es el sistema de ecuaciones a resolver. Como se observa es un sistema de dos ecuaciones para una sola incógnita, la única solución posible es que la función  $w$  sea solución de ambas ecuaciones. La ecuación (2.13b) se satisface si  $w$  es función de la combinación  $r \sin \theta$ , es decir,

$$w(r, \theta, t) = w(r \sin \theta, t). \quad (2.15)$$

Para que la solución sea la deseada, se debe sustituir la última igualdad en la ecuación (2.9b). Haciendo el cambio de variables  $R = r \sin \theta$  la ecuación resultante es

$$w_{RR} + \frac{1}{R} w_R - \frac{1}{R^2} w = \frac{1}{\nu} w_t. \quad (2.16)$$

Al considerar el caso estacionario, la ecuación de Euler tiene como solución:

$$w(r, \theta) = AR + \frac{B}{R} \quad (2.17)$$

Esta solución dice que el campo de velocidades del fluido depende, únicamente, de la distancia al eje de rotación y es conocida como el vórtice de Rankine. La solución como se observa es más una solución en coordenadas cilíndricas. Esto se debe a la simetría del problema. De hecho se puede esperar que todas soluciones que se obtengan suponiendo esta simetría, puedan ser fácilmente transcritas a coordenadas esféricas usando el cambio de variable  $r \sin \theta = R$ , donde  $R$  es la distancia al eje de rotación. En este vórtice se considera que la velocidad depende de manera proporcional al eje de rotación hasta un radio (primera parte de la solución) y que después de dicho radio depende de manera inversamente proporcional (segundo término de la solución), es decir:

$$w = \begin{cases} AR, & R < R_0 \\ \frac{B}{R}, & R > R_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

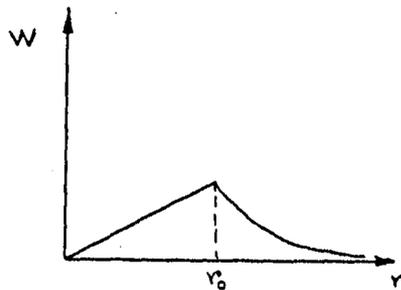


Fig (2.2). Vórtice de Rankine

Como problema particular se estudió el flujo del fluido entre dos esferas concéntricas de radios  $r_1 > r_2$ , siendo que la esfera exterior rota con velocidad angular constante  $\Omega$  mientras que la otra permanece en reposo. Se ajustaron las condiciones de frontera

$$w(r_1, \theta) = \Omega r_1 \sin \theta \quad \text{y} \quad w(r_2, \theta) = 0, \quad (2.19)$$

y se obtuvo que los coeficientes de la solución deben ser iguales a cero. Esto quiere decir que en el flujo estacionario de un fluido contenido entre dos esferas concéntricas no existe ningún caso en que el campo de velocidades sólo tenga la componente azimutal, es decir, deben aparecer, por lento que sea el flujo, al menos una de las otras dos

componentes. Otro caso es cuando una esfera rota, también con velocidad constante, inmersa en un fluido infinito ( la condición de frontera es que el campo se anule en infinito). Como en la situación anterior, los coeficientes se anulan y la conclusión que se obtiene es la misma.

El único caso en que se obtuvo una solución no nula fue en aquél en que el fluido está contenido dentro de un cilindro. La primera condición de contorno (2.19) se mantiene igual mientras que la segunda exige que la velocidad sea cero a lo largo del eje de rotación, es decir,  $w(r,0) = 0$ . Como es de esperarse la solución estacionaria indica que el fluido se moverá como un cuerpo sólido, es decir, su velocidad tangencial es proporcional a la distancia al eje de rotación.

$$w(r, \theta) = \Omega r \sin \theta, \quad (2.20)$$

Ahora se dará la solución para el caso del flujo no estacionario dentro del cilindro. Para esto debe resolverse la ecuación (2.16) completa. Haciendo el cambio de variable del tiempo por  $\tau = \nu t$ , y suponiendo que la ecuación tiene solución de la forma:

$$w(R, t) = S(R)T(\tau), \quad (2.21)$$

al sustituir en la ecuación se llega al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$T' = -\lambda^2 T$$

$$S'' + \frac{S'}{R} + \left( \lambda^2 - \frac{1}{R^2} \right) S = 0 \quad (2.22)$$

donde la ecuación para la variable R, es una ecuación de Bessel de orden 1.  $\lambda$  es una constante. La solución por separación de variables es:

$$w_1(R, t) = \sum_{i=0}^{\infty} (a(\lambda_i) J_1(\lambda_i R) + b(\lambda_i) Y_1(\lambda_i R)) e^{-\lambda_i^2 \nu t} \quad (2.23)$$

Aquí se hace una suma sobre  $\lambda_i$ , pues se considera discreta. Si se considerara continua entonces se debe realizar una integral en lugar de una suma. Debido a que la solución debe contener al eje de rotación ( $R = 0$ ), donde la velocidad es nula, el coeficiente que multiplica a la función de Bessel de segunda clase  $Y_1(\lambda_i R)$  debe ser cero ya que esta función diverge en ese punto. La solución completa de la ecuación puede escribirse como la suma de las soluciones estacionaria y no estacionaria en la siguiente forma:

$$w(R, t) = \Omega R + \sum_{i=0}^{\infty} a(\lambda_i) J(\lambda_i R) e^{-\lambda_i^2 vt} \quad (2.24)$$

La solución debe ser tal que cuando el tiempo sea muy grande ( $t \rightarrow \infty$ ) se alcance la solución estacionaria:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(R, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (w_i + w_s) = w_s, \quad (2.25)$$

donde  $w_s$  y  $w_i$  son las soluciones estacionaria y no estacionaria respectivamente. Las condiciones serán tales que en  $t = 0$  el cilindro está inmóvil,  $w(R, 0) = 0$ , y para  $t > 0$  se moverá con una velocidad angular constante  $w(R, t) = \Omega R$ . De esto se obtiene que  $w_i(R, 0) = -w_s$ , es decir:

$$\Omega R = - \sum_{i=0}^{\infty} a(\lambda_i) J_1(\lambda_i R) \quad (2.26)$$

Usando las propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel se obtiene que  $a(\lambda_i) = \frac{-8\Omega}{\lambda_i [J_0(\mu_i) - J_2(\mu_i)]^2} J_2(\mu_i)$ . Al imponer la condición de frontera para  $t > 0$ ,  $w(R, t) = \Omega R$  (condición de no deslizamiento en la superficie del cilindro) se infiere que:

$$\sum a(\lambda_i) J_1(\lambda_i R) e^{-\lambda_i^2 vt} = 0, \quad (2.27)$$

es decir, que:  $\lambda_i = \frac{\mu_i}{R_1}$  donde las  $\mu_i$  son las raíces de la función de Bessel. La solución normalizada que se obtiene es la siguiente:

$$w(R, t) = \Omega R - 8\Omega R_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{J_2(\mu_i)}{\mu_i^2 [J_0(\mu_i) - J_2(\mu_i)]^2} \times \\ \times J_1\left(\frac{\mu_i}{R_1} R\right) e^{-\left(\frac{\mu_i}{R_1}\right)^2 vt} \quad (2.28)$$

Esta es la solución en separación de variables del flujo de un fluido contenido en un cilindro que, partiendo del reposo, rota con velocidad angular uniforme. Debido a que

existe una discontinuidad en el movimiento del fluido, recuerdese que se encuentra en reposo en el instante  $t = 0$ , y en el instante siguiente el cilindro rota con velocidad angular constante; la serie que representa la evolución del fluido para alcanzar el movimiento estacionario no converge uniforme y absolutamente puesto que los coeficientes se pueden acotar por  $\frac{1}{\mu_1}$ , que es semejante a una serie armónica, que no converge, esta es la misma razón por la que parece existir una inconsistencia entre la condición inicial (2.27), y la condición (2.28), sin embargo, dicha inconsistencia se puede no tomar en cuenta, pues la solución converge en todo el intervalo, salvo en el punto de discontinuidad, y en todo tiempo. Al parecer tanto en esta serie, como en la ecuación (3.14) del último capítulo aparece el fenómeno de Gibbs. La conclusión que se puede obtener de esto es que, por el hecho de existir una discontinuidad en las condiciones del problema, la serie no converge uniformemente. Si la cantidad  $\frac{\nu t}{R_1^2} \ll 1$  (que aparece en el exponente de la función exponencial), que equivale a que la viscosidad del fluido sea muy pequeña o que el radio del cilindro sea muy grande, se puede inferir que el tiempo en que se alcanzará el estado estacionario será grande en comparación con el caso opuesto, en el que ya sea el radio pequeño o la viscosidad grande, o una combinación de ambas, en el que la función exponencial decrecerá rápidamente. El primer término es la solución estacionaria (de cuerpo rígido) válida para tiempos grandes, mientras que el segundo término es la solución de transición al estado estacionario, es decir, da la forma en que el movimiento del fluido evoluciona hasta llegar a ser el movimiento de cuerpo rígido. En la figura (2.3) se muestra la evolución del flujo tomando ocho términos de la sumatoria. Se puede observar que para tiempos cortos ( $2 \geq t \geq 0$ ) considerar tan solo ocho términos no es suficiente para describir adecuadamente la evolución del flujo.

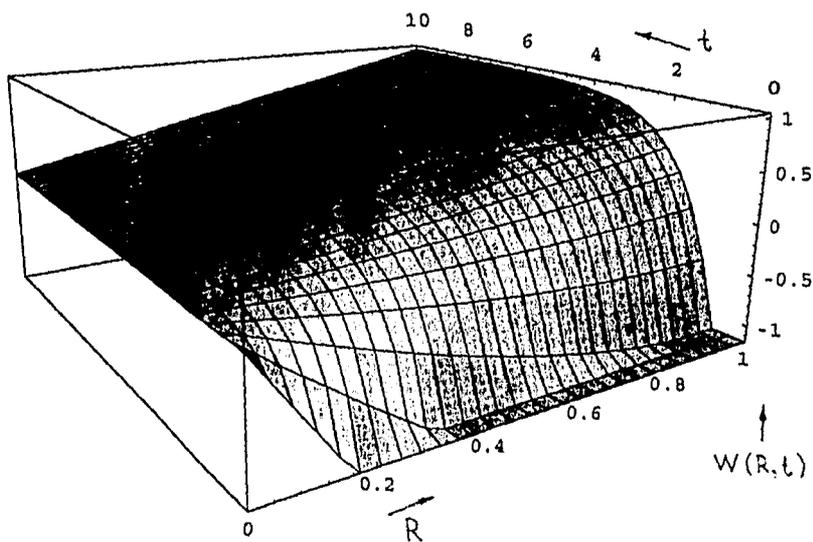


Figura (2.3). Flujo dentro de un cilindro.

### §3. VARIABLES DE SEMEJANZA Y VORTICES

En esta sección se estudiarán soluciones con las que principalmente se describirán vórtices. Debido a que las soluciones por separación de variables representan una familia de soluciones con una forma muy particular, en lo que sigue se presentarán otro tipo de soluciones a la ecuación (2.13), llamadas soluciones de semejanza. Para hallar este tipo de soluciones es necesario saber si la ecuación es invariante frente a transformaciones de escala, lo cual se consigue haciendo las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} w &= A^\alpha y \\ t &= A^\beta \tau \\ R &= A^\delta \xi \end{aligned} \quad (2.29)$$

que al ser sustituidas en la ecuación antedicha se obtiene como resultado:

$$\frac{1}{v} \frac{A^\alpha}{A^\beta} y_\tau = \frac{A^\alpha}{A^{2\delta}} \left( y_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} y_\xi - \frac{1}{\xi^2} y \right). \quad (2.30)$$

De esto se concluye que  $\alpha$  puede ser arbitrario, mientras que  $\beta$  debe ser el doble de  $\delta$ . Se puede construir la siguiente variable adimensional:

$$s = \frac{R^2}{avt}, \quad \text{donde } a \text{ es una constante adimensional ajustable.}$$

Para dar solución a la ecuación (2.13) se propuso que la solución general, en términos de las variables de semejanza, fuese de la forma:

$$w(R, t) = f(t)g(s), \quad (2.31)$$

donde  $s$  es la variable de semejanza definida anteriormente. Al sustituir esta expresión en la ecuación (2.13) usando el cambio de variable  $\tau = vt$ , se obtiene:

$$w_{RR} + \frac{1}{R} w_R - \frac{1}{R^2} w = w_\tau. \quad (2.32)$$

Al sustituir la expresión para  $w$  se llega a:

$$\frac{4R^2}{(\alpha\tau)^2} g''f + \frac{4}{\alpha\tau} g'f - \frac{1}{R^2} gf = g\dot{f} - \frac{R^2}{\alpha\tau^2} g'f, \quad (2.33)$$

Rescribiéndola en términos de  $s$  y separando los términos que sólo dependen de  $\tau$  y los que dependen de  $s$  se llega a:

$$\alpha \frac{\dot{f}}{f} = \frac{1}{sg} [4s^2 g'' + (4s + as^2)g' - g] = -4n, \quad (2.34)$$

donde  $n$  es un índice libre. La constante de separación se ha escogido como  $a = -4n$  por razones de conveniencia. Se tiene ahora dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para la función  $f(\tau)$  y otra para la función  $g(s)$ . La solución de la parte izquierda de la ecuación (2.34) es inmediata. El resultado es

$$f(\tau) = \tau^{-n}. \quad (2.35)$$

La parte derecha de la siguiente ecuación por resolver:

$$4s^2 g'' + (4s + 4s^2)g' - (4ns - 1)g = 0. \quad (2.36)$$

En este caso se puede usar, como antes, el factor de control. Así, primero se supondrá que:

$$g(s) = e^{-\alpha s} h(s). \quad (2.37)$$

Después de la siempre mencionada sustitución y algebra necesaria, se encuentra que si el exponente  $\alpha$  es igual a  $1/2$  (se escoge este valor de  $\alpha$  para simplificar la ecuación que se obtiene). La ecuación resultante para la función  $h$  es la siguiente:

$$4s^2 h'' + 4sh' - [s^2 - (4n - 2)s + 1]h = 0. \quad (2.38)$$

Suponiendo ahora que:

$$h(s) = s^\delta k(s), \quad (2.39)$$

y siguiendo el mismo criterio que antes se llega a que  $\delta$  puede tomar los valores  $\pm 1/2$ . Para el valor positivo se obtiene la ecuación:

$$s^2 k'' + 2sk' + \left( \frac{-s^2}{4} + \frac{s}{4}(n-2) \right) k = 0, \quad (\delta = 1/2), \quad (2.40)$$

mientras que para el valor negativo de  $\delta$  se obtiene:

$$k'' + \left[ \frac{-1}{4} + \frac{1}{4s}(4n-2) \right] k = 0, \quad (\delta = -1/2), \quad (2.41)$$

Ya que ambas ecuaciones tienen el mismo origen y deben dar solución al mismo problema, puesto que ambas provienen de la misma ecuación lineal de segundo orden que, como se sabe de la teoría de ecuaciones diferenciales, debe tener una solución única; con cualquiera de ellas que se resuelva se obtendrá la solución al problema original. Con base en este criterio se decidió resolver la ecuación (2.27), que es un caso especial de la ecuación de Whittaker [6]:

$$k'' + \left[ \frac{-1}{4} + \frac{c}{s} + \left( \frac{1}{4} - m^2 \right) \frac{1}{s^2} \right] k = 0. \quad (2.42)$$

Las soluciones de esta última ecuación se conocen como las funciones de Whittaker y están dadas por las relaciones:

$$\begin{aligned}
M_{c,m}(s) &= s^{\frac{1}{2}+m} e^{\frac{-s}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-c+m; 1+2m; s\right) \\
M_{c,-m}(s) &= s^{\frac{1}{2}-m} e^{\frac{-s}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}-c-m; 1-2m; s\right), \quad (2.43)
\end{aligned}$$

donde la función  ${}_1F_1$  es la función hipergeométrica confluyente. Como se puede observar los valores de  $m$  que corresponden a este problema en particular son los de  $m = \pm 1/2$ , mientras que el valor de  $c$  es  $c = n - 1/2$ . Para ambos valores de  $m$  se obtiene la misma solución a la ecuación (2.41). Recordando que originalmente se busca la solución de la ecuación (2.13), se tiene que dicha solución se encuentra dada por:

$$w(s, \tau) = \tau^{-n} e^{-s} s^{\frac{1}{2}} {}_1F_1\left(\frac{3}{2}-n; 2; s\right). \quad (2.44)$$

En realidad la ecuación de Whittaker tiene dos soluciones linealmente independientes. No se a tomado en cuenta la segunda solución puesto que diverge logarítmicamente para valores grandes del argumento (variable de semejanza) y se tiene que una condición impone que la función sea acotada en dicho límite. Por consiguiente, la solución general de semejanza, en coordenadas esféricas, es

$$w(r \sin \theta, t) = \frac{r \sin \theta}{(\nu t)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-(r \sin \theta)^2}{4\nu t}} \sum_{n=2}^{\infty} A_n (\nu t)^{-n} {}_1F_1\left(\frac{3}{2}-n; 2; \frac{(r \sin \theta)^2}{4\nu t}\right). \quad (2.45)$$

Como es sabido la función hipergeométrica se puede reducir a distintos polinomios y funciones especiales conocidas, sin embargo, esta última forma de escribir la solución es la de más amplio contexto puesto que, dependiendo de las condiciones de frontera que imponga un problema determinado, se puede escoger la forma del primer parámetro ( $3/2 - n$ ), de manera tal que las funciones a las que se reduce la hipergeométrica sean las más adecuadas para dicho problema. Aquí se considerará el caso en que el parámetro está restringido a tomar el valor de un entero negativo. Cuando esto sucede, la función hipergeométrica se reduce a los polinomios asociados de Laguerre [7], que están bien acotados en el intervalo  $[0, \infty)$ , y forman una base completa, en términos de la cual, en principio, es posible escribir cualquier condición de frontera e inicial. De

este modo, el campo de velocidades de un fluido que se mueve alrededor de un eje se expresa como<sup>4</sup>:

$$w(r \sin \theta, t) = \frac{r \sin \theta}{(vt)^2} e^{-\frac{(r \sin \theta)^2}{4vt}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (vt)^{-m} L_m^1 \left( \frac{r^2 \sin^2 \theta}{4vt} \right) \quad (2.46)$$

En la siguiente gráfica tridimensional, figura (2.4), se muestra el campo de velocidades para un valor de  $m = 10$ , como función de la distancia al eje de rotación y del tiempo. Se observa que para dos instantes dados, el perfil de la velocidad es el mismo. Esta es la característica de las soluciones de semejanza, y significa que la apariencia del flujo no cambia al aumentar o disminuir la escala. Para este caso particular se tiene que que el flujo será de manera tal que ciertas regiones circulares concéntricas giran en un sentido, mientras que otras giran en sentido opuesto, alternandose unas con otras. Esto se observa a partir de que la función cambia de signo. En el centro de cada una de estas regiones la velocidad es máxima. Se ve también que la velocidad es nula en el eje ( $\sin \theta = 0$ ), mientras que al alejarse de él, su magnitud decae a cero rápidamente.

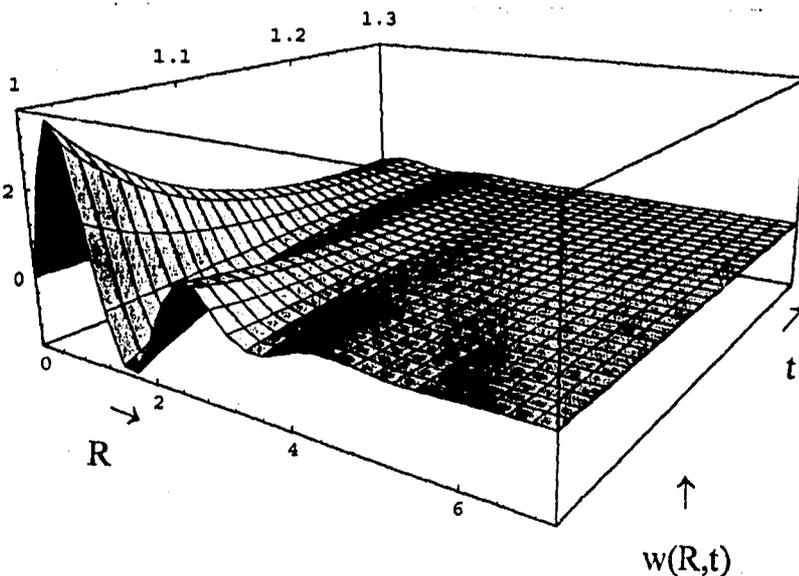


Figura (2.4). Gráfica tridimensional del campo de velocidades

<sup>4</sup> Este último resultado concuerda con el presentado en coordenadas cilíndricas en [8],[9].

Una forma de visualizar el campo de velocidades es con ayuda de las siguientes figuras (2.5), donde se muestra, como es el flujo visto desde los polos, lo cual se simboliza por medio de flechas. Las raíces indican las distancias en las que la velocidad se anula antes de cambiar de signo. Las gráficas están hechas para tres tiempos distintos y muestran claramente la propiedad de las soluciones de semejanza en la que la forma del perfil no cambia esencialmente, aunque si se observa la escala, la magnitud de la velocidad disminuye conforme el tiempo transcurre. Como se observa, los ceros de la función se corren hacia la derecha, lo que significa que las regiones en que la velocidad tiene un sentido determinado se ensanchan. Esto se debe a los efectos viscosos ( que provocan la disipación de energía cinética del fluido), gracias a los cuales la velocidad tiende a anularse.

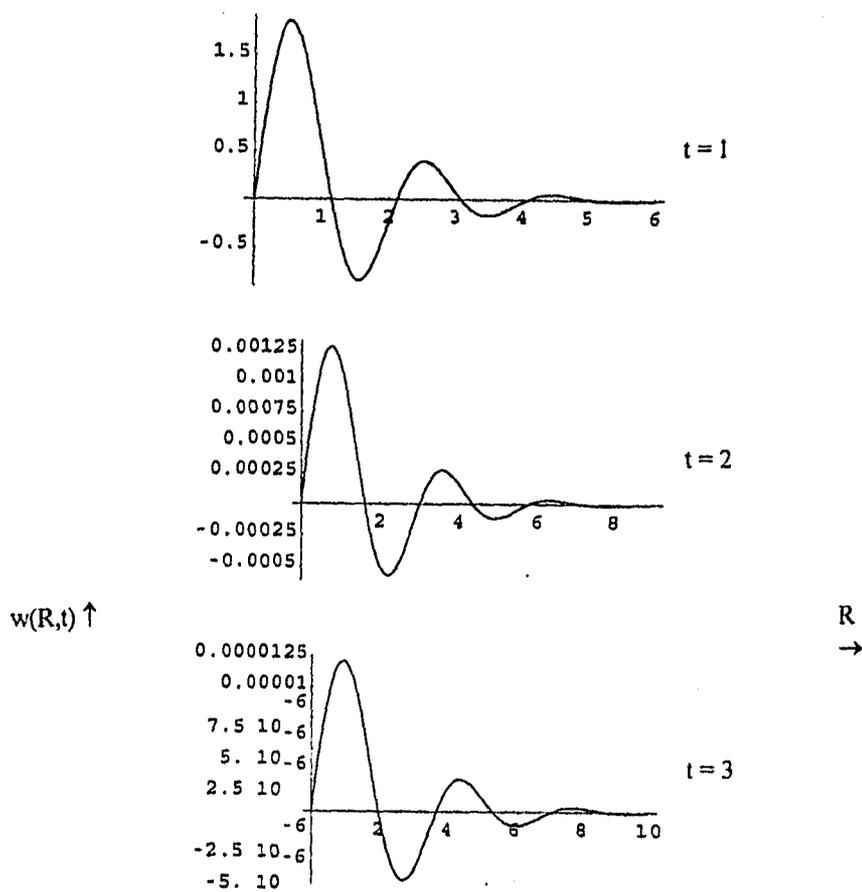


Figura (2.5). Perfil de velocidades para distintos tiempos.

A continuación se mostrarán las expresiones de algunas cantidades físicas asociadas al flujo como son la vorticidad, el campo de presiones, las componentes del tensor de esfuerzos, la energía disipada y el momento angular. Estas cantidades se calcularán para el polinomio  $m$ -ésimo. La velocidad para este polinomio es

$$w_m = \frac{A_m R}{(\nu t)^2} e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} (\nu t)^{-m} L_m^1\left(\frac{R^2}{4\nu t}\right). \quad (2.47)$$

Para conocer el campo de presiones es necesario regresar a las ecuaciones de las componentes del campo de velocidades, en particular, a las componentes radial y polar, ecuaciones (2.7) y (2.8), donde, por hipótesis inicial, sabemos que  $u = v = 0$ . Entonces a partir de:

$$\frac{w^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{Ec. Radial.} \quad (2.48)$$

que puede reescribirse como:

$$p_r = \frac{\partial(r \sin\theta)}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial(r \sin\theta)} = p' \sin\theta = \rho \frac{w^2}{r}; \quad (2.49)$$

Haciendo  $R = r \sin\theta$  e integrando, se sigue que la presión está dada por

$$p(R, t) - p_0 = \rho \int \frac{w^2(R, t)}{R} dR. \quad (2.50)$$

El campo de presiones disminuye conforme se aleja del eje de rotación del fluido, lo cual es razonable si se pide que la velocidad tienda a cero conforme uno se aleja del eje. Dado que el argumento es  $r \sin\theta$ , si  $\theta \rightarrow 0, \pi$ , es decir, acercándose al eje de rotación, la presión aumenta; en otros términos, si uno se mueve en una esfera de radio constante encontrará que la presión es mayor en los polos que en el ecuador. El gradiente de presiones está orientado hacia afuera de la esfera y es paralelo al plano del ecuador.

En términos del m-ésimo polinomio de Laguerre la expresión, que no fue posible evaluar explícitamente, es

$$p = p_0 + 2A_m^2 t^{-2n-1} \int_0^{2(st)^{\frac{1}{2}}} e^{-2s} [L_m^1(s)]^2 ds \quad (2.51)$$

Ahora se calculará la vorticidad que es un campo vectorial definido como el rotacional del campo de velocidades:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \quad (2.52)$$

El rotacional en coordenadas cilíndricas, considerando la simetría impuesta, se reduce a:

$$\nabla \times \vec{u} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial}{\partial R} [R w] \right) \hat{e}_z \quad (2.53)$$

lo que en términos de los polinomios de Laguerre es

$$\vec{\omega} = \frac{A_m}{(vt)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-R^2}{4vt}} (vt)^{-m} \left[ 2L_m^1 \left( \frac{R^2}{4vt} \right) - \frac{R^2}{4vt} L_m^2 \left( \frac{R^2}{4vt} \right) \right] \hat{e}_z \quad (2.54)$$

La vorticidad es, pues, un vector que puede estar orientado tanto en la dirección positiva del eje de rotación (eje z) como en la dirección negativa. La vorticidad determina la "tendencia local" del fluido a girar. Entrecorillando el término "tendencia" se quiere hacer notar que el fluido no necesariamente rota, como en el caso del flujo de Couette. Esta "tendencia" se debe a que el fluido es viscoso, es decir, a la transferencia de momento entre partes contiguas del fluido que tienen distintas velocidades.

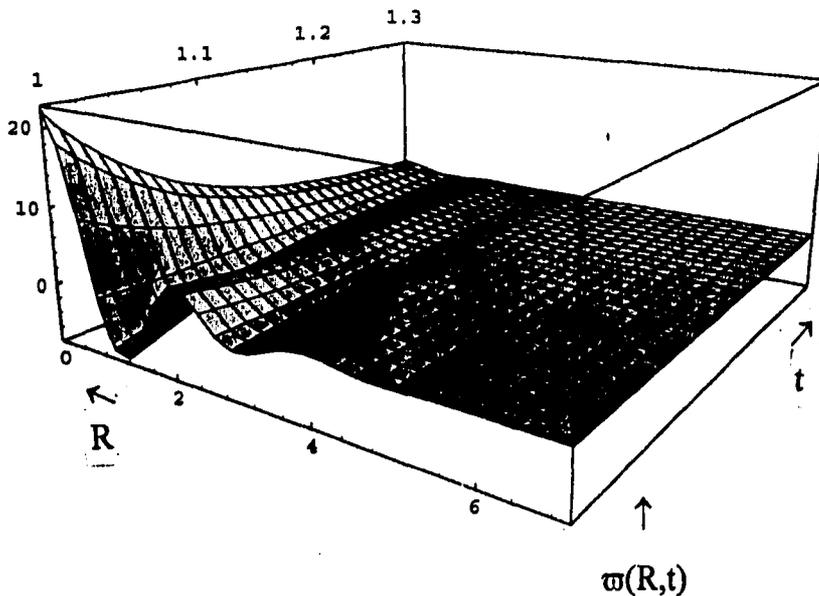


Figura (2.6). Gráfica tridimensional de la vorticidad.

En la gráfica ( figura (2.6)), se muestra el campo de vorticidad como función del tiempo y la distancia al eje de rotación para un valor de  $m = 10$ . Como se puede observar la vorticidad es una función que decae rápidamente conforma aumentan el tiempo y la distancia al eje de rotación. Analizando comparativamente esta gráfica con la de la velocidad, se advierte que en los puntos en los que la velocidad tiene un máximo, la vorticidad es cero; mientras que en los puntos donde la velocidad se anula, la vorticidad es máxima. Esto refleja el hecho de que alrededor de los puntos donde la velocidad es máxima el gradiente de velocidades es casi nulo, lo cual disminuye la tendencia a rotar del fluido. Por otro lado, el gradiente tiende a ser máximo alrededor de los puntos en que la velocidad se anula; por ejemplo en la región cercana que rodea al eje de rotación. Cabe hacer notar que la vorticidad tiene la misma dirección en los intervalos comprendidos entre un máximo y un mínimo de la velocidad, cambiandola en el intervalo siguiente entre un mínimo y un máximo.

Otras cantidades relevantes son, por ejemplo, las componentes del tensor de esfuerzos. En coordenadas cilíndricas dichas componentes se encuentran dadas por [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial u}{\partial r} = -p \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right] = -p \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} = -p \\
\sigma_{r\varphi} &= \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right] = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \\
\sigma_{\varphi z} &= \eta \left[ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right] = 0 \\
\sigma_{zr} &= \eta \left[ \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Donde  $w$  es la velocidad azimutal,  $u$  es la velocidad radial y  $u$  subíndice  $z$  es la velocidad a lo largo del eje de rotación. Como se ve, la única componente distinta de cero, además de las componentes diagonales, es la componente  $r,\varphi$ . En términos de las funciones de Laguerre se obtiene que dicha componente es

$$\sigma_{r\varphi} = -2\eta \frac{R^2}{4\nu t} e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\nu t)^{-n-2} L_n^2 \left( \frac{R^2}{4\nu t} \right). \tag{2.56}$$

En la figura (2.7), se muestra la gráfica de esta función, para el valor de  $m=10$ . Comparando esta gráfica con la de la velocidad se advierte que la dirección de los esfuerzos viscosos, el signo de ambas funciones, es opuesta, lo que indica que los esfuerzos viscosos se oponen al movimiento del fluido. Por otro lado, cuando la magnitud de los esfuerzos es máxima, la dirección de la vorticidad cambia de signo, lo cual muestra que la vorticidad depende fuertemente de los efectos viscosos.

Dado que el tensor de esfuerzos proporciona la información de la transferencia de momento se puede concluir que dicha transferencia se lleva a cabo en dos direcciones: en la dirección radial (componente  $\varphi,r$ ), y en la dirección azimutal (componente  $r,\varphi$ ) y es debida exclusivamente a la viscosidad. En el primer caso el fluido trata de alejarse del eje pero la viscosidad lo impide; en el segundo caso la viscosidad frena la rotación del fluido.

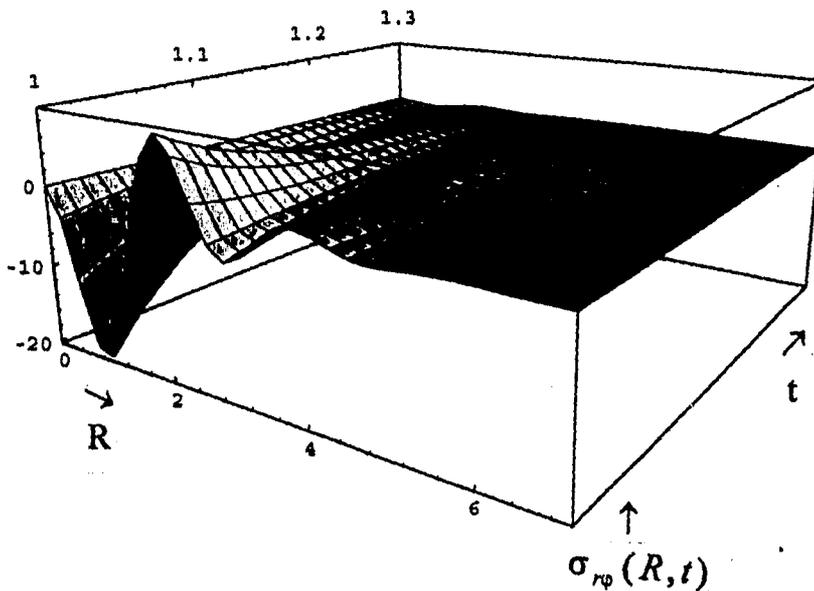


Figura (2.7). Gráfica tridimensional de la componente  $r, \phi$  del tensor de esfuerzos.

Otra cantidad de interés físico es el momento angular. Este se encuentra definido por la siguiente expresión:

$$\vec{L} = \rho \int \vec{r} \times \vec{u} dV, \quad (2.57)$$

donde  $\vec{r}$  es el radio vector y  $\vec{u}$  el campo de velocidades. Tomando nuevamente el  $m$ -ésimo término de la velocidad, y notando que es conveniente realizar los cálculos en coordenadas cilíndricas, en las cuales se obtiene, como era de esperarse, que el momento angular esta dirigido en la dirección del eje  $z$ . La expresión integral puede ser llevada a la forma:

$$L_z = 8\pi A_m \rho t^{-m} \int_0^{\infty} e^{-s} s L_m^1(s) ds \quad (2.58)$$

De acuerdo con las tablas matemáticas [10], esta integral da como resultado:

$$L_z = 8\pi A_m \rho t^{-m} \frac{\Gamma(2+m)(\alpha-1)^m}{m! \alpha^{2+m}} \quad \text{con } \beta=1. \quad (2.59)$$

Como se observa, el momento angular total del fluido es cero para cualquier vórtice descrito por un polinomio con  $m > 0$ , debido a que  $\alpha = 1$ . El único caso en que el momento angular es distinto de cero es para el valor  $m = 0$ ; siendo el momento angular:

$$L_z = 8\pi A_0 \rho. \quad (2.60)$$

Este caso corresponde al campo de velocidades del vórtice de Taylor:

$$w(r, t) = \frac{L_z}{8\pi\rho} \frac{r}{(vt)^2} e^{-r^2/4vt}. \quad (2.61)$$

Un análisis detallado tanto del vórtice de Taylor como del vórtice de Lamb, el cual corresponde a considerar los términos  $m = 0$ , y  $m = 1$ , se puede encontrar en [11]. (Esta referencia fué encontrada después de realizar el trabajo). De hecho en ella se encuentra la solución que corresponde a la ecuación (2.44).

Para saber cual es la disipación de la energía del flujo es preciso determinar la energía cinética del fluido, ésta se encuentra dada por

$$E_{kin} = \frac{\rho}{2} \int u^2 dV, \quad (2.62)$$

donde la integración se hace sobre todo el espacio. El resultado encontrado para la energía cinética es el siguiente:

$$E_{kin} = 2\pi A_m^2 \rho (vt)^{-2m-2} \frac{\Gamma(2m+2)}{(m!)^2} \quad (2.63)$$

Como se observa, la energía cinética del fluido es una función decreciente con el tiempo. La derivada de esta expresión respecto al tiempo da la energía disipada por unidad de tiempo. Como se observa, el flujo terminará por detenerse puesto que conforme transcurra el tiempo la energía irá disminuyendo.

#### §4. SOLUCIONES PARA FLUJOS CON VELOCIDAD AZIMUTAL NULA

En los últimos dos incisos se encontraron soluciones a flujos que contenían exclusivamente a la componente azimutal del campo de velocidades, es decir  $\Psi = \text{cte.}$  En

este inciso se buscarán soluciones estacionarias, en términos de la función de corriente, que tengan dicha componente igual a cero. Este tipo de simetría es de bastante interés, ya que las soluciones pueden usarse para determinar flujos alrededor de óbices, y calcular la fuerza de arrastre que el flujo ejerce sobre diversas geometrías del obstáculo, lo cual resulta de gran importancia en problemas de ingeniería. En particular, como se mencionará más adelante, se encontrará una solución que describe el flujo alrededor de una esfera; inclusive se puede describir el flujo alrededor de objetos con formas esferoidales (ver [12]). Otro tipo de flujos de interés son aquellos que en los que se tiene un difusor. En [13] se estudia el flujo que emerge de un difusor cónico. En este trabajo se quiso introducir el problema del flujo entre dos conos, sin embargo, las soluciones que se mostrarán más adelante no cumplen con las condiciones de frontera de dicho problema.

Así pues, bajo la suposición de que el campo de velocidades contendrá únicamente a las componentes radial y polar de la velocidad, dicho campo quedará representado por:

$$\vec{u}(r, \theta) = u(r, \theta) \hat{e}_r + v(r, \theta) \hat{e}_\theta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \Psi_\theta \hat{e}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \Psi_r \hat{e}_\theta. \quad (2.64)$$

Ya que se buscarán soluciones en términos de la función de corriente se sigue que la ecuación de continuidad se satisface por su definición misma. Por otro lado la ecuación (2.9) también se satisface automáticamente ya que  $w = 0$ . Así pues el problema se reduce a resolver la ecuación (2.13) que al hacer  $w = 0$ , toma la forma:

$$\left( \frac{\Psi_\theta}{r^2 \sin \theta} \partial_r - \frac{\Psi_r}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta + \frac{2 \Psi_r \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \Psi_\theta}{r^3 \sin \theta} \right) E^2 \Psi = \nu E^4 \Psi \quad (2.65)$$

donde  $\partial_r$  es la derivada parcial respecto a  $r$ , etc.. El operador  $E^2$  está definido por la ecuación (2.14). La ecuación puede reescribirse haciendo el cambio de variable  $x = \cos \theta$ , siendo el resultado:

$$\left( \frac{\Psi_r}{r^2} \partial_x - \frac{\Psi_x}{r^2} \partial_r + \frac{2x}{r^2(1-x^2)} \Psi_r + \frac{2}{r^3} \Psi_x \right) E^2 \Psi = \nu E^4 \Psi, \quad (2.66)$$

con

$$E^2 = \partial_{rr} + \frac{(1-x^2)}{r^2} \partial_{xx}. \quad (2.67)$$

Resulta evidente que la ecuación (2.66) es una ecuación diferencial parcial no lineal de cuarto orden. Como es sabido no existe ningún método general establecido para resolver las ecuaciones diferenciales no lineales, es decir, a partir de este momento el trabajo empieza a ser, por decirlo así, artesanal. Se buscarán soluciones del tipo de variables separables, razón por la cual se proponen las siguientes funciones de corriente:

$$\begin{aligned} \Psi(r, x) &= \nu g(r) x^\alpha \\ \Psi(r, x) &= \nu g(r) (1-x^2)^\alpha \\ \Psi(r, x) &= \nu r f(x) \end{aligned} \quad (2.68)$$

La función se define incluyendo al coeficiente de viscosidad para simplificar los cálculos y para hacerla adimensional, ya que al sustituir a  $\Psi$  en la ecuación (2.66) dicho coeficiente queda elevado al cuadrado en ambos lados. Se han propuesto estas funciones de corriente ya que  $x = \cos\theta$  y es de esperarse que la solución este dada en términos de funciones trigonométricas. Nótese que en la última relación  $\Psi$  depende linealmente de  $r$ . Este tipo de dependencia es la única que mantiene correctamente, en el caso más general, la dimensionalidad de la ecuación (2.66), por eso se ha escogido ese exponente en particular para el caso de una función arbitraria  $f(x)$ .

#### § 4.1

Se comenzará estudiando el caso en que la función de corriente es de la forma  $\Psi = \nu g(r) x^\alpha$ . Al sustituir esta función en la ecuación (2.66) se obtiene una ecuación para la función  $g(r)$  multiplicada por coeficientes que dependen de  $x$ . La dimensiones del lado derecho y del lado izquierdo son distintas,  $1/r^5, 1/r^4$  respectivamente, por esta razón cada uno de éstos términos se iguala a cero. Después de igualar a cero el término derecho, y factorizando  $\nu^2 x^\alpha$ , se obtiene:

$$g'''' + \frac{\alpha(\alpha-1)x^{-2}(1-x^2)}{r^2} g'' - \frac{4\alpha(\alpha-1)x^{-2}(1-x^2)}{r^3} g' + \left[ \frac{4\alpha(\alpha-1)x^{-2}(1-x^2) + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)x^{-4}(1-x^2)}{r^4} \right] g = 0 \quad (2.69)$$

Las primas representan el orden de la derivada. Debido a la dependencia con respecto a  $x$  de la ecuación, la única forma de resolverla consistentemente es escogiendo los valores de  $\alpha$  como 0, 1. La solución de la ecuación resultante es

$$g'''' = 0 \Rightarrow g = ar^3 + br^2 + cr + d \quad \text{para } \alpha = 0, 1. \quad (2.70)$$

Sustituyendo la solución en la parte izquierda de la misma ecuación se llega a lo siguiente:

$$L[E^2\Psi] = \frac{2x}{r^2} [6a^2r^3 + 6abr^2 + 2b^2r + bc - 3ad] + \frac{4x}{r^3} [3a^2r^4 + abr^3 + (3ac + b^2)r^2 + (3ad + bc)r + bd] + \frac{4x^3}{(1-x^2)r^2} [9a^2r^3 + 9abr^2 + (3ac + 2b^2)r + bc] = 0 \quad (2.71)$$

La única combinación de las constantes  $a, b, c, d$  que cumple con igualar a cero al operador no lineal y a la parte derecha de la ecuación (2.67) es:  $a = b = d = 0$ . De esto se deduce que la única solución particular de la forma buscada es:  $\Psi = v r x$ , que en términos de coordenadas esféricas se traduce en:

$$\Psi = A v r \cos \theta. \quad (2.72)$$

Haciendo un breve análisis de esta solución se deduce que representa una fuente lineal infinita (o sumidero, dependiendo del signo de  $A$ ) situada a lo largo del eje de rotación, de la que emana fluido en forma radial. Esto es fácil de visualizar en coordenadas cilíndricas, donde  $r \cos \theta = z$  y  $\Psi = Av z$ , es decir, las líneas de corriente están en planos

a  $z = \text{constante}$ . En coordenadas cilíndricas las componentes de la velocidad dadas en términos de la función de corriente son:

$$u_R = \frac{-1}{R} \Psi_z \quad \text{y} \quad u_z = \frac{1}{R} \Psi_R, \quad (2.73)$$

de donde se obtiene que las componentes cilíndricas de la velocidad son:

$$u_R = \frac{Av}{R}, \quad u_z = 0. \quad (2.74)$$

La velocidad radial decae conforme crece la distancia al eje, y se mantiene constante a lo largo del eje  $z$ . Dicha componente tiene una singularidad en el origen. Por otro lado la componente  $z$  de la velocidad es cero en todo punto.

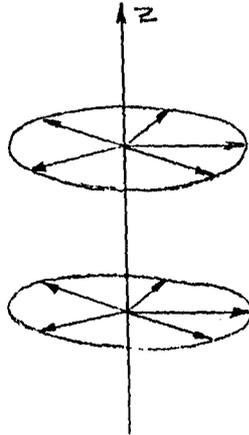


Figura (2.8). Fuente lineal infinita.

#### § 4.2

Sustituyendo ahora a la función de corriente de la forma  $\Psi = vg(r)(1-x^2)^a$  en la ecuación (2.66) y siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior se obtiene lo siguiente a partir de la parte derecha de la ecuación:

$$\begin{aligned}
& g'''' + \frac{4}{r^2} \left[ \frac{2\alpha(\alpha-1)x^2}{1-x^2} - \alpha \right] g'' - \frac{8}{r^3} \left[ \frac{2\alpha(\alpha-1)x^2}{1-x^2} - \alpha \right] g' + \\
& + \frac{4}{r^4} \left[ (6\alpha(\alpha-1) - 10\alpha(\alpha-1)^2 - 2\alpha^2(\alpha-1)) \frac{x^2}{1-x^2} \right] g + \\
& + \frac{4}{r^4} \left[ 4\alpha(\alpha-1)^2(\alpha-2) \frac{x^4}{(1-x^2)^2} + 2\alpha(\alpha-1) - 3\alpha + \alpha^2 \right] g = 0
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Al escoger  $\alpha = 1$  la ecuación solamente tendrá dependencia en  $r$ . La ecuación resultante es una ecuación de Euler de cuarto orden, de modo que al suponer una solución de la forma  $g(r) = r^\sigma$  se encuentra que  $\sigma$  puede tomar los valores 1, -1, 2 y 4. Al sustituir la función de corriente en la parte no lineal se puede manipular la ecuación hasta obtener una ecuación de tercer orden para la función  $g(r)$ , cuyas soluciones en términos de potencias de  $r$  corresponden a los valores de  $\sigma = 1, 2, 4$ . Así pues la solución en términos de  $r$  y del ángulo  $\theta$  es la siguiente:

$$\Psi(r, \theta) = v(ar^4 + br^2 + cr^{-1}) \sin^2 \theta. \tag{2.76}$$

Las constantes  $a, b, c$  pueden ser escogidas para describir distintos flujos. Sin embargo esta solución contiene, por citar un ejemplo famoso (5), al flujo dentro de una esfera, solución que se conoce por el nombre de "Vórtice esférico de Hill" (1894). Si se escogen los exponentes  $\sigma = -1, 1, 2$ , de la solución a la ecuación (2.75) se obtiene la famosa solución fuera de la esfera que se conoce como "Flujo de Stokes alrededor de una esfera". Sólo que hay que notar que dicha solución es una solución a las ecuaciones linealizadas, puesto que el exponente  $\sigma = 1$  no cumple con la parte no lineal. Las componentes de la velocidad son las siguientes:

$$\begin{aligned}
u &= 2v \cos \theta (ar^3 + b + cr^{-3}) \\
v &= -v \sin \theta (4ar^2 + 2b + cr^{-3})
\end{aligned} \tag{2.78}$$

En general, la única singularidad del campo de velocidades es en el origen, lo cual permite, en principio, el análisis de un vasto número de problemas que excluyan dicho punto. Para el caso de problemas que contengan al origen es necesario igualar a cero el coeficiente  $c$ . En la figura (2.9) se muestra un esquema donde aparecen las líneas de

<sup>5</sup> Cabe hacer notar que la solución del flujo de Stokes presentada por Panton es una solución a la ecuación aproximada, que incluye el término proporcional a  $r$ . Este término, como ya se mencionó, no es solución de las ecuaciones completas, es decir, no aproximadas. [12].

corriente y las líneas vorticosas para las mismas partículas de fluido. Las primeras son las que parecen frijoles; las segundas son las representadas por los círculos horizontales que salen de la figura.

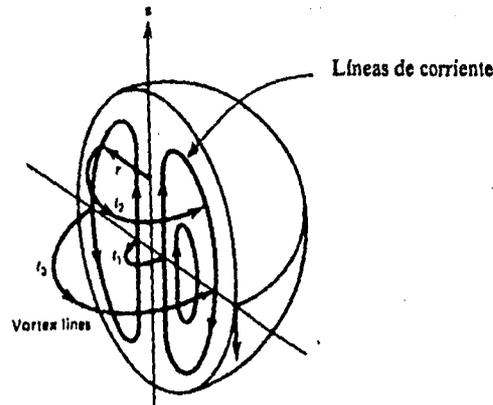


Figura (2.9). Vórtice de Hill. (Figura tomada de [12])

#### § 4.3

El último tipo de función de corriente del que se buscarán soluciones es  $\Psi = vrg(x)$ . Sustituyendo esta función en la ecuación (2.67) y haciendo el álgebra necesaria para simplificar lo más posible el resultado, se llega a la siguiente ecuación diferencial de cuarto orden no lineal para la función  $g(x)$ :

$$(1 - x^2)g'''' - 4xg''' - gg''' - 3g'g'' = 0. \quad (2.79)$$

Esta ecuación puede integrarse tres veces hasta reducirla a una ecuación no lineal y no homogénea de primer orden del tipo de Riccati. Para lograr esto hay que notar que los dos últimos términos de la ecuación (provenientes de la parte no lineal) pueden escribirse como la segunda derivada del producto  $gg'$ , es decir,

$$\frac{d^2}{dx^2}[gg'] = 3g'g'' + gg'''. \quad (2.80)$$

Por otro lado, los dos primeros términos son equivalentes a lo siguiente.

$$\frac{d^2}{dx^2}[(1-x^2)g''] + 2\frac{d^2}{dx^2}g = (1-x^2)g'''' - 4xg'''. \quad (2.81)$$

Después de reescribir la ecuación en términos de las relaciones anteriores, la ecuación resultante puede ser integrada de manera inmediata dos veces, ya que es de la forma

$\frac{d^2}{dx^2}[f] = 0$ . El resultado de dichas integraciones es

$$(1-x^2)g'' + 2g - gg' = 2ax + b, \quad (2.82)$$

donde a, b son las constantes que se obtienen en cada integración. Esta última ecuación puede integrarse una vez si se escribe el término  $2g$  como la segunda derivada de una función mas otros términos, es decir,

$$2g = (1-x^2)g'' - 4xg' - \frac{d^2}{dx^2}[(1-x^2)g]. \quad (2.83)$$

Después de sustituir en la ecuación (2.79) y realizar las simplificaciones necesarias, se puede expresar el resultado como una derivada total de una función. Integrando nuevamente se obtiene:

$$2(1-x^2)g' + 4xg - g^2 = ax^2 + bx + c. \quad (2.84)$$

Para simplificar aún más el resultado se puede hacer el cambio de variable  $g(x) = (1-x^2)h(x)$ , quedando la ecuación:

$$2h' = h^2 + \frac{ax^2 + bx + c}{(1-x)^2(1+x)^2}, \quad (2.85)$$

que es la mencionada ecuación de Riccati.

Para continuar con el análisis de la ecuación (2.85), se puede hacer el cambio de variable  $h(x) = \frac{-2y'(x)}{y(x)}$  para que la ecuación se transforme en la siguiente ecuación lineal de segundo orden:

$$y''(x) + \frac{(ax^2 + bx + c)y(x)}{(1-x)^2(1+x)^2} = 0. \quad (2.86)$$

Los puntos singulares de esta ecuación son  $x = 1, -1$ . Los límites cuando  $x \rightarrow 1, -1$  del coeficiente de  $y(x)$  multiplicado por las singularidades respectivas son finitos, condición necesaria para que la singularidad sea regular [14]. Por tanto se tiene una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con singularidades regulares en 1, -1, lo cual indica que esta ecuación debe tener dos soluciones linealmente independientes con dos constantes libres. Al sustituir dicha solución en la función de corriente se obtendrán cuatro constantes libres: a, b, c, d, siendo d una de las constantes que multiplica a una de las soluciones de la ecuación (2.86). Con estas constantes se puede, en principio, ajustar las condiciones de frontera deseadas al campo de velocidades. Como recordatorio, la función de corriente se expresa en los siguientes términos:

$$\Psi(r, \theta) = -2vr(1-x^2) \frac{y_1' + dy_2'}{y_1 + dy_2}, \quad (2.87)$$

donde  $y_1, y_2$  son funciones de a, b, c, x; son las soluciones independientes de la ecuación (2.86). Así pues, a partir de la definición de la función de corriente, que en términos de la variable "x" se expresa como:

$$u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(r, x) \quad y \quad v = \frac{-1}{r(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial r} \Psi(r, x), \quad (2.88)$$

se puede observar que dichas condiciones de frontera, que en general exigirán que ambas componentes de la velocidad se anulen en la frontera, para el caso de flujos confinados, se traducen a que la función de corriente ó sus derivadas se anulen. A partir de las ecuaciones (2.87) y (2.88) se puede inferir, en términos generales, que las soluciones serán válidas únicamente en aquellas regiones en las que la función  $y_1 + dy_2$  sea distinta de cero, ya que siempre aparecerá en el denominador, es decir, existirán regiones del espacio que contengan puntos (raíces de la ecuación  $y_1 + dy_2 = 0$ ) en los que tanto la función de corriente como las componentes de la velocidad sean singulares. De hecho, para el flujo entre dos conos las condiciones de frontera serían impuestas exclusivamente en términos de la variable "x" (hay que recordar que  $x = \cos\theta$ ) que es una medida de su apertura. En este caso, las condiciones de frontera equivalen a pedir (ver ecuaciones (2.88)) que tanto la función de corriente como su derivada sean cero. Geométricamente esto significa que los intervalos en los que existirán soluciones son aquellos en los que la

función de corriente no tenga raíces, y que los extremos de dichos intervalos sean tales que la función tenga un mínimo (ó máximo) que toque el eje.

Hasta el momento se han hecho diversos intentos por resolver analíticamente la ecuación (2.87), pero no se ha obtenido ningún resultado satisfactorio definitivo. Sin embargo, una forma distinta de atacar el problema, con el fin de obtener algún resultado físicamente plausible, es escogiendo las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$ , de manera tal que la ecuación se simplifique y pueda ser resuelta con mayor facilidad.

Antes de tratar algún problema particular, cabe hacer notar que Batchelor [15] hace un análisis de las singularidades de esta ecuación y llega a la conclusión de que la única forma de evitar que el campo de velocidades sea singular es anulando las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Sin embargo, en los casos anteriores las ecuaciones resultantes para  $g(r)$  fueron ecuaciones con un punto singular en el origen, lo cual no significó que no existiesen campos de velocidad continuos en todo punto. Aún más, aunque el campo de velocidades, o la función de corriente, tengan puntos singulares no convierte esas soluciones en algo completamente inservible ya que estas soluciones se pueden utilizar en problemas que excluyan dichos puntos, inclusive (¿por qué excluir la posibilidad?) pueden ser de utilidad en problemas con flujos que involucren singularidades. Debido a que las características de la solución están determinadas por las singularidades de la ecuación, hay que tratar de caracterizar el tipo de singularidad y tratar de identificar su posible significado físico, como hace L. D. Landau en el problema del jet sumergido, que aparecerá más adelante. Volviendo al problema, la ecuación (2.85) puede ser escrita como una ecuación lineal de segundo orden. Al analizar las singularidades de esa ecuación se encuentra que dichas singularidades son regulares, es decir, que la ecuación tiene soluciones que convergen en todo punto. Todo esto se mostrará en lo sucesivo, aunque quizá sea necesario aclarar que al obtener la función de corriente y el campo de velocidades se hará un análisis de sus singularidades con la misma intención que Batchelor.

Como primer paso, se pueden hacer cero las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en la ecuación (2.85), esto la vuelve homogénea y permite escribirla dicha en la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{h(x)} \right] = \frac{-1}{2}, \quad (2.89)$$

la solución de esta ecuación es:  $h(x) = \frac{2}{A-x}$ . La función de corriente toma la siguiente forma en coordenadas esféricas:

$$\Psi(r, \theta) = \frac{2vr \sin^2 \theta}{A - \cos \theta}. \quad (2.90)$$

Esta es la famosa solución de L. D. Landau (1944) del "Jet sumergido". Así pues las soluciones de la ecuación (2.86) contienen como el caso particular más sencillo a la solución de Landau. "La solución representa un "chorro" de fluido moviéndose rápidamente lejos del origen, y entrando en un fluido que se mueve lentamente." [15]. En la figura (2.10), se muestran distintas líneas de corriente. El extremo del chorro se puede determinar a partir de la distancia más cercana de las líneas al eje. El campo de velocidades solamente tiene una singularidad, la cual se encuentra en el origen, siendo la responsable del movimiento.(6)

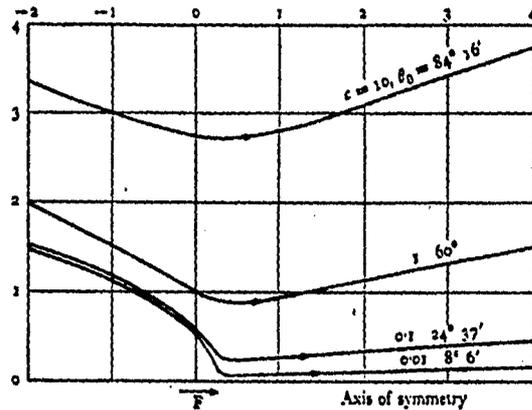


Figura (2.10). Líneas de corriente para el "Jet sumergido" de Landau. (Figura tomada de [15].

Una solución distinta se puede encontrar escogiendo de la siguiente forma a las constantes:  $a = -c$ ,  $b = 0$ . Al hacer esto e imponiendo que  $c = n(n-1)$ , se llega a que la ecuación (2.86) se reduce a la ecuación para los polinomios de Gegenbauer [13]. Así pues, la solución puede ser escrita en términos de una suma infinita de dichos polinomios, es decir,

$$\Psi(r, x) = -\frac{vr(1-x^2)}{2} \frac{\sum_n \mathcal{J}'_n(x) + d\mathcal{H}'_n(x)}{\sum_n \mathcal{J}_n(x) + d\mathcal{H}_n(x)} \quad (2.91)$$

Con el fin de ilustrar brevemente, se escogerá un polinomio particular y se identificará el flujo que representa. Escogiendo el valor de  $n = 2$ , la función de corriente toma la siguiente forma particular:

<sup>6</sup> Debido a que la singularidad en  $r = 0$  determina el movimiento del fluido, en [15], se hace un análisis sobre dicha singularidad, llegándose a la conclusión de que dicha singularidad proporciona únicamente momento al fluido.

$$\Psi(r, x) = 8vr(1-x^2) \frac{x - d \left( 1 - \frac{x}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+x}{1-x} \right)}{2(1-x^2) + d \left( 2x + (1-x^2) \operatorname{Ln} \frac{1+x}{1-x} \right)} \quad (2.92)$$

Como se mencionó anteriormente la constante  $d$  puede ajustarse de manera que represente un flujo físicamente plausible. En particular, este es el caso si se escoge  $d = 1.7$ , obteniéndose que la función de corriente toma el aspecto de la figura (2.11) que puede interpretarse como la estructura de las líneas de corriente en el caso en que dos chorros chocan frente a frente

El chorro proveniente de la izquierda tiene mayor momento, lo que produce que al encontrarse ambos, sea el chorro de la derecha el que es "repelido". La línea de corriente que envuelve a las restantes representa la parte más interna del chorro de la izquierda, que se abre en forma de embudo. Las líneas envueltas son las líneas de corriente del flujo repelido. Con las flechas se indica la dirección del flujo, es decir, la dirección del campo de velocidades, que es tangente a la función de corriente. La figura está representada en el espacio cartesiano, siendo la proyección en el plano "y-z".

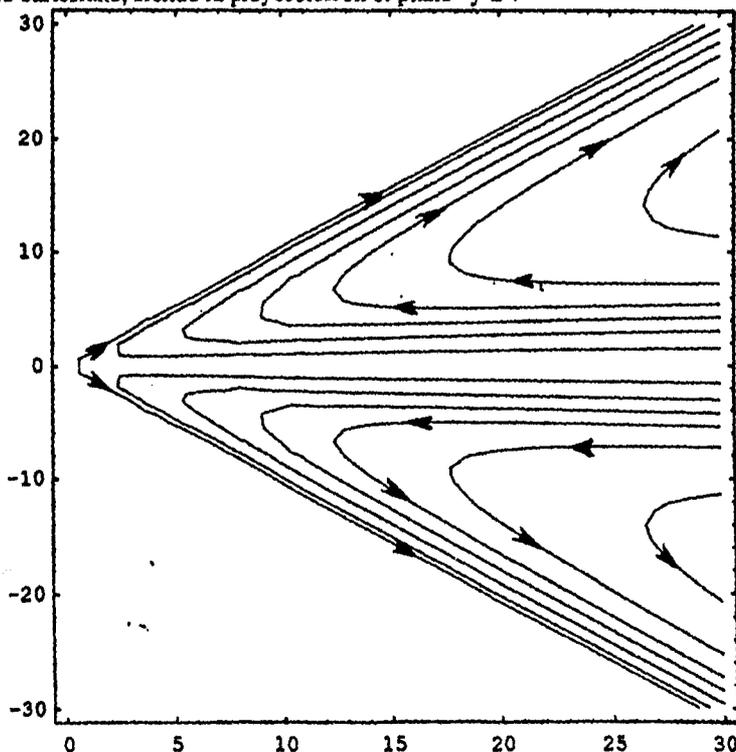


Figura (2.11). Choque de dos chorros. (Figura tomada de [16]).

§ 5.- RESUMEN.

En este capítulo se encontraron diversas soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos con simetría axial. En los incisos 2 y 3, se encontraron soluciones a flujos que contenían únicamente a la velocidad azimutal, mientras que en el inciso 4 se encontraron soluciones para flujos con velocidad azimutal nula.

Específicamente, en el segundo inciso se encontró la solución del flujo dentro de un cilindro que rota con velocidad angular constante, en términos de una suma infinita de funciones de Bessel de primera clase que dependen exclusivamente de la distancia al eje de rotación, multiplicadas por funciones exponenciales que dependen del tiempo. La solución se encontró usando el método de separación de variables, ecuación (2.28). Como un resultado agregado, se encontró, también, el vórtice de Rankine, ecuación (2.18).

En el tercer inciso, se encontró una solución en variables de semejanza en términos de una función hipergeométrica confluyente, ecuación (2.45). Dicha función tiene un parámetro libre, el cual se puede escoger de manera que sea lo más conveniente. En particular se escogió a dicho parámetro como un entero negativo, lo que permitió escribir la solución como una suma infinita de funciones de Laguerre, ecuación (2.46). Los primeros dos términos de esta serie contienen a los vórtices de Taylor y de Lamb, respectivamente, como caso especial. En particular se analiza el flujo debido a un sólo término de la serie: se encuentran cantidades como la vorticidad, la presión, el momento angular, las componentes del tensor de esfuerzos, y la energía disipada.

Cabe hacer notar que para flujos con esta simetría se encontraron las siguientes soluciones, las cuales no han sido estudiadas con detenimiento, motivo por el cual no se incluyen en el presente trabajo. La primera es una solución en la variable de semejanza, y es la suma de dos funciones de Bessel de argumento imaginario.

$$w(s) = As^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi s}{2}} \left[ I_0(s/2) + I_1(s/2) \right] \left\{ 1 + \frac{B}{A} \int \frac{ds}{s^2 [I_0 + I_1]^2} \right\}, \text{ donde } s = \frac{R^2}{4\nu t}.$$

La segunda solución se encontró tomando la transformada de Fourier del tiempo en la ecuación (2.16), y es la siguiente:

$$\bar{w}(R, \varpi) = AI_1(\sqrt{i\varpi} R) + BK_1(\sqrt{i\varpi} R), \text{ donde } \varpi \text{ juega el papel de contraparte del tiempo.}$$

En el último inciso, se encontraron soluciones exactas a las ecuaciones no lineales a flujos que tienen la componente azimutal de la velocidad nula, es decir, las soluciones fueron encontradas en término de la función de corriente, que se construyó en términos de las velocidades radial y polar a partir de la ecuación de continuidad (2.6).

Una solución particular que se encontró, subinciso 4.1, fue la que corresponde a una fuente lineal infinita situada a lo largo del eje z, de la que mana fluido en forma radial en planos z = cte., ecuación (2.72).

Otras soluciones, subinciso 4.2, están relacionadas con soluciones famosas, como es el caso del vórtice de Hill, ecuación (2.76). Esta solución representa el flujo estacionario

dentro de una esfera, por ejemplo de una gota de agua o una burbuja de aire. En el procedimiento para obtener esta solución se puede obtener el flujo alrededor de una esfera, conocido como flujo de Stokes, sin embargo dicha solución es una solución aproximada puesto que no cumple con las ecuaciones completas.

En el subinciso 4.3 de ese capítulo, se obtuvo, como resultado más relevante una ecuación diferencial ordinaria con puntos singulares regulares, ecuación (2.85), cuya solución más simple es el Jet sumergido de Landau. Dicha ecuación tiene tres constantes libres ajustables, sin embargo la solución general de esta ecuación no ha sido encontrada. Se escogió cierta forma de las constantes libres de tal forma que se pudo describir el flujo de dos chorros que chocan, frente a frente, uno de los cuales envuelve al otro, ecuación (2.92).

### CAPITULO 3

#### SOLUCION LAGRANGIANA AL PROBLEMA DEL FLUJO ENTRE PLANOS PARALELOS

Con el fin de complementar este trabajo, en este capítulo se plantearán las ecuaciones lagrangianas para el caso de flujos bidimensionales [17] a partir de las ecuaciones obtenidas en el segundo inciso del capítulo 2. Después se resolverá el flujo de un fluido contenido entre dos planos paralelos, uno de los cuales se mueve con velocidad constante.

##### §1.- FLUJO BIDIMENSIONAL

Para obtener las ecuaciones lagrangianas del flujo bidimensional de un fluido incompresible en forma general es suficiente hacer la suposición de que una de las coordenadas se mantenga constante conforme transcurre el tiempo. Recordando que  $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$  es la función que da las posiciones de las "partículas de fluido" y que  $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$  es un parámetro que etiqueta a cada una de ellas, se escogerá que  $x_0$  sea la posición inicial de cada partícula, así la posición de cada partícula dependerá de su posición inicial. En términos matemáticos la suposición anterior se traduce a lo siguiente:  $x_3 = x_{03}$ , donde el subíndice cero significa la posición de la partícula en el instante  $t = t_0$ . La coordenada  $x_3$  será independiente del tiempo. Debido a que el flujo es bidimensional las coordenadas  $x_1, x_2$ , son a su vez independientes de  $x_{03}$ . Se tiene entonces que las ecuaciones de continuidad y de conservación del momento, (1.25) y (1.27), toman la forma:

$$[x_1, x_2] = 1$$

$$\rho \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -[p, x_2] + \eta \left( \left[ x_1, \left[ x_1, \frac{\partial x_1}{\partial t} \right] \right] + \left[ x_2, \left[ x_2, \frac{\partial x_1}{\partial t} \right] \right] \right) \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = -[x_1, p] + \eta \left( \left[ x_1, \left[ x_1, \frac{\partial x_2}{\partial t} \right] \right] + \left[ x_2, \left[ x_2, \frac{\partial x_2}{\partial t} \right] \right] \right)$$

Como se puede ver, en este caso las fuerzas viscosas son de tercer grado. Estas son las ecuaciones lagrangianas generales para el caso de un flujo bidimensional. Ya que en el inciso siguiente se resolverá el problema particular antes mencionado, conviene hacer otra hipótesis que simplifique un poco más las ecuaciones y que sirva para acortar el camino.

Considérese que otra de las coordenadas es también constante, en particular:  $x_2 = x_{02}$ , pero que la coordenada restante sea una función de la forma:  $x_1 = (x_{01}, x_{02}, t)$ . Al hacer estas suposiciones la ecuación de continuidad se reduce a que la derivada parcial de  $x_2$  respecto a su condición inicial es igual a uno. De esto se deduce que la solución de las ecuaciones debe ser la suma de  $x_{01}$  y una función  $f(x_{02}, t)$ , arbitraria, por encontrar, que depende exclusivamente de la condición inicial de la otra coordenada y del tiempo. En la última de las ecuaciones (3.1), exceptuando a el que involucra a la presión, se anulan todos los términos ya que todos ellos contienen segundas derivadas de  $x_2 (= x_{02})$ , lo que da la siguiente ecuación para la presión y la función  $f(x_{02}, t)$ :

$$\frac{\partial p}{\partial x_{01}} \frac{\partial f}{\partial x_{02}} - \frac{\partial p}{\partial x_{02}} = 0. \quad (3.2)$$

Siguiendo un razonamiento semejante se llega a que la ecuación de movimiento para la primera componente (segunda de las ecuaciones (3.1)) es

$$\rho \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x_{01}} + \eta \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_{02} \partial t}. \quad (3.3)$$

Hay que resaltar lo siguiente: aunque el flujo sea estacionario las derivadas temporales de la ecuación no se anulan. Esto no debe extrañar pues las ecuaciones describen el movimiento de "partículas". Si el movimiento del fluido fuese uniforme, es decir, si la velocidad del fluido fuese la misma en todos sus puntos, entonces las derivadas temporales deben desaparecer puesto que al hacer la transformación galileana adecuada de un sistema de referencia a otro que se mueva con él, el fluido debe encontrarse en reposo.

Para poder continuar se precisan las condiciones iniciales y de frontera, lo cual corresponde al problema particular que se resolverá en el siguiente inciso.

## §2.- FLUJO DE COUETTE PLANO

Considérese la región entre dos planos paralelos infinitos ocupada por un fluido con densidad ( $\rho$ ) y viscosidad ( $\eta$ ) constantes que se encuentran inicialmente,  $t \leq 0$ , en

reposito. La distancia entre planos es  $h$ . En los instantes posteriores,  $t > 0$ , el plano superior comienza a moverse con una velocidad constante  $v$  en la dirección del eje  $x$ , como se muestra en la figura (3.1)

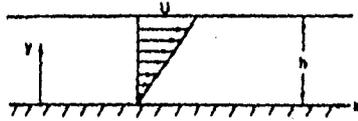


Figura (3.1). Flujo de Couette plano.

En este caso la velocidad del fluido será función de la segunda coordenada y del tiempo únicamente, es decir,  $\frac{\partial x_1}{\partial t} = v(x_{02}, t)$ . Por los cálculos hechos en el inciso anterior se tiene que  $x_1 = f(x_{02}, t)$ , y por lo tanto las condiciones iniciales y las condiciones de frontera se pueden expresar en los siguientes términos:

$$f(x_{02}, 0) = 0, \quad (3.4)$$

$$v(x_{02}, 0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x_{02}, 0) = 0, \text{ para } t = 0, \quad (3.5)$$

$$v(0, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = 0, \quad (3.6)$$

$$v(h, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(h, t) = v, \text{ para } t > 0. \quad (3.7)$$

Una vez planteadas todas las condiciones que debe satisfacer el flujo y debido a que la presión es constante a lo largo del eje horizontal, de las ecuaciones (3.2) y (3.3) se sigue que la ecuación a resolver es la siguiente:

$$\rho \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \eta \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_{02} \partial t} \quad (3.8)$$

Como es evidente esta ecuación puede ser llevada a una ecuación parcial de tipo parabólico. Una solución de esta ecuación es de la forma  $f(x_{02}, t) = ax_{02} + b + f_1$ , donde el último término es una solución en variables separables. Para encontrar esta última solución debe seguirse el procedimiento habitual, delineado ya en el capítulo anterior. Dicha solución es

$$f = ax_{02}t + bt + c(x_{02}) + e^{-vk^2t} (A \sin kx_{02} + B \cos kx_{02}). \quad (3.9)$$

Al ajustar las condiciones de frontera (3.6) y (3.7) se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = 0 = b - Bvk^2 e^{-vk^2t}, \text{ de donde se sigue que } b = B = 0, \quad (3.10)$$

$$\text{además, } \frac{\partial f}{\partial t}(h, t) = v = ah - Avk^2 e^{-vk^2t} \sin kh, \quad (3.11)$$

de donde se obtiene que  $a = \frac{v}{h}$ , y que  $k = \frac{n\pi}{h}$ , es decir,

$$f(x_{02}, t) = \frac{x_{02}vt}{h} c(x_{02}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-vk_n^2t} \sin k_n x_{02} = 0, \quad (3.12)$$

de manera semejante, al imponer las condiciones iniciales (3.4) y (3.5), se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} f(x_{02}, 0) &= c(x_{02}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x_{02} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x_{02}, 0) &= \frac{x_{02}v}{h} - v \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n^2 \sin k_n x_{02} = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

de donde se obtienen los coeficientes de la sumatoria:  $A_n = \frac{(-1)^n 2vh^2}{v(n\pi)^3}$ . Todo esto da como resultado que la solución al problema es:

$$X_1 = x_{01} + \left( \frac{vx_{02}}{h} \right) t + \frac{2vh^2}{v\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} (1 - e^{-vk_n^2t}) \sin k_n x_{02}. \quad (3.14)$$

En el término  $(1 - e^{-vk_n^2t})$ , que se encuentra dentro de la sumatoria, el 1 corresponde a el valor de la función  $c(x_{02})$  que se encuentra a partir de la primera de las ecuaciones (3.13). Como se puede observar, la solución tiende a una recta cuando el tiempo tiende a infinito,

ya que en dicho límite la solución en variables separables tiende a cero debido al término entre paréntesis que contiene una exponencial negativa: siendo el término dominante el término lineal en  $t$ . Algo relevante de este resultado es que la sumatoria converge absoluta y uniformemente, ya que se puede usar como cota superior a  $\frac{1}{n^3}$ , cuya serie de términos positivos converge, es decir, la discontinuidad de la condición inicial no es tan fuerte como podría parecer. Como puede observarse, el método lagrangiano, aunque físicamente más intuitivo, es mucho más complicado (o laborioso al menos) que el método euleriano, una referencia a la forma de resolver éste problema usando las ecuaciones de Navier-Stokes puede encontrarse en [15]. En la gráfica (3.2) se muestra de manera cualitativa la evolución del flujo desde el momento inicial  $t_0 = 0$ , en el que el fluido está en reposo, hasta que alcanza su movimiento estacionario en  $t_\infty$ , pasando por diversos tiempos intermedios. En el primero,  $t_1 \approx 0$ , la capa de fluido que está pegada a la superficie alcanza inmediatamente la velocidad de la superficie, mientras que el resto del fluido aún no se ha enterado del movimiento y tiene velocidad cero. Conforme el tiempo transcurre, instantes  $t_3 > t_2 > t_1 > 0$ , el fluido comienza a enterarse del movimiento del plano superior. Como se mencionó en el capítulo dos, la discontinuidad en la condición inicial produce una aparente inconsistencia, sin embargo, como ya se mencionó en dicho capítulo, ésta se debe al fenómeno de Gibbs [18].

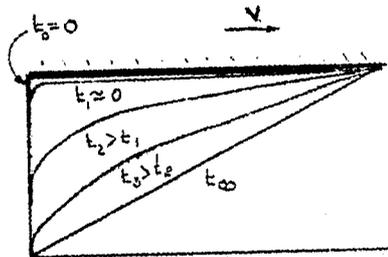


Figura (3.2). Perfil del campo de velocidad en el flujo de Couette plano.

## APENDICE A

Como se mencionó al final del primer capítulo en este apéndice se deducirá una formulación alternativa de la Hidrodinámica. Dicha formulación es integral, construida con base en transformadas integrales. Se considerará que el fluido en cuestión es newtoniano y tiene densidad constante. Se supondrá también que el flujo es estacionario[20].

Para este fluido las ecuaciones de Navier-Stokes son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{V} &= -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidades,  $p$  el campo de presión,  $\mathbf{F}$  la fuerza externa por unidad de masa,  $\nu (= \eta/\rho)$  es la viscosidad cinemática y el tensor de velocidades  $\vec{V}$  está definido como

$$\vec{V} = \vec{u}\vec{u}, \quad \text{es decir,} \quad V_{ij} = u_i u_j, \quad (\text{A.2})$$

La primera formulación se llevará a cabo usando transformadas de Fourier. La transformada de Fourier se define como

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r}) d\vec{r} \quad (\text{A.3})$$

Se supondrá que los campos contenidos en las ecuaciones se anulan en el infinito en el caso de un fluido no acotado. En el caso de un fluido confinado se supondrá que los campos se anularan en las fronteras:

$$\hat{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{y} \quad \hat{n} \times \vec{u} = 0, \quad (\text{A.4})$$

donde  $\hat{n}$  es el vector normal a la frontera. Tomando la transformada respecto de las coordenadas espaciales de las ecuaciones (A.1) se obtiene

$$i\vec{k} \cdot \vec{u} = 0$$

$$-i\vec{k} \cdot \vec{V}_k + \nu k^2 \vec{u}_k = \vec{F}_k + i\vec{k} \left( \frac{p_k}{\rho} \right) \quad (\text{A.5})$$

Con el fin de obtener una ecuación en la que solamente aparezca el campo de velocidades, se puede multiplicar la segunda ecuación por  $i\vec{k} \cdot$  y despejar, con ayuda de la primera, el término que involucra a la presión, obteniéndose:

$$\frac{p_k}{\rho} = \frac{i\vec{k} \cdot \vec{F}}{k^2} - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{V} \cdot \vec{k})}{k^2} \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo ahora en la ecuación de movimiento transformada se obtiene la ecuación deseada para el campo de velocidades, que escrita en forma tensorial tiene la forma:

$$\vec{u}_k = \frac{1}{\nu k^2} \left( \vec{I} - \frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2} \right) \cdot (\vec{F}_k + i\vec{k} \cdot \vec{V}_k) \quad (\text{A.7})$$

Indicando el tensor de Oseen transformado por

$$\vec{T}_k = \frac{1}{\nu k^2} \left( \vec{I} - \frac{\vec{k}\vec{k}}{k^2} \right), \quad (\text{A.9})$$

se llega a la ecuación

$$\vec{u}_k = \vec{T}_k \cdot (\vec{F}_k + i\vec{k} \cdot \vec{V}_k) \quad (\text{A.10})$$

Que es una ecuación integro-diferencial para la transformada de Fourier del campo de velocidades. El tensor  $\vec{V}$  esta dado explícitamente por

$$\vec{V}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u}_{k-k'} \vec{u}_k \cdot d\vec{k}' \quad (\text{A.11})$$

El siguiente paso para obtener el resultado deseado consiste en tomar la transformada de Fourier inversa de la ecuación (A.10), de esta forma se tendrá el campo de velocidades en términos de una ecuación integral que contendrá, implícitamente, las condiciones de frontera. Para realizar este cálculo es conveniente usar el teorema de la convolución en el lado derecho de la ecuación. El campo de velocidades tiene la forma:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{u}_k d\vec{k}, \quad (\text{A.12})$$

mientras que el término que involucra a la fuerza externa es

$$\frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{T}_k \cdot \vec{F}_k d\vec{k} = \int \vec{T}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (\text{A.13})$$

quedando el tensor de Oseen expresado por

$$\vec{T}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\nu r} \left( \vec{I} + \frac{\vec{r}\vec{r}}{r^2} \right). \quad (\text{A.14})$$

Aplicando ahora el teorema de la convolución al término que contiene al tensor de velocidades se llega a que

$$\frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{T}_k \cdot i\vec{k} \cdot \vec{V}_k d\vec{k} = \int \vec{T}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \nabla \cdot \vec{V}(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (\text{A.15})$$

y por lo tanto la ecuación integral para el campo de velocidades es

$$\vec{u} = \int \vec{T}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}' + \int \vec{T}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot [\nabla \cdot \vec{V}(\vec{r}')] d\vec{r}'. \quad (\text{A.16})$$

El segundo término de esta ecuación puede integrarse por partes y aprovechando las condiciones de frontera ( los campos deben anularse en las fronteras) se obtiene por fin:

$$\vec{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{T}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}' + \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{r} - \vec{r}') \vec{u}(\vec{r}') \cdot \vec{D}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{u}(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (\text{A.17})$$

donde el tensor

$$\vec{D} = -\frac{1}{8\pi\nu r^3} \left( \vec{I} - \frac{3\vec{r}\vec{r}}{r^2} \right), \quad (\text{A.18})$$

es el tensor del dipolo, que, como se puede ver está asociado a los términos no lineales de la ecuación de movimiento. La ecuación (A.17) debe ser satisfecha por cualquier flujo estacionario con las condiciones de no deslizamiento en la frontera. Como puede observarse por las ecuaciones anteriores el tensor de Oseen es la función de Green de las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso estacionario. Debe notarse también, que el efecto de las fuerzas externas es de largo alcance y que el tensor de Oseen puede interpretarse como el propagador de las interacciones hidrodinámicas (tensor de propagación de las interacciones hidrodinámicas) y que, por la forma en que fue obtenido, su dependencia en las coordenadas esta fuertemente ligada con la geometría de las fronteras; de aquí se deduce que las interacciones hidrodinámicas dependen fuertemente de la región del espacio en que se desarrolla el flujo. El tensor  $\vec{D}$  indica el efecto y la propagación las no linealidades en el flujo.

Como se mencionó en su momento, esta formulación puede generalizarse al caso no estacionario utilizando la transformada de Laplace respecto al tiempo, la ecuación resultante es, evidentemente, mucho más compleja, ya que en la forma de los kernels se encuentra la evolución temporal de dichas interacciones. En resumen ésta formulación integral muestra un estructura muy rica en tanto a ciertos detalles físicos susceptibles a ser analizados, como en su utilidad en la búsqueda de la existencia de soluciones globales, así como un método para obtener soluciones numéricas por métodos iterativos.

## APENDICE B

En este apéndice se deducirá el teorema de transporte de Reynolds el cual se utilizó para la deducción de las ecuaciones eulerianas de la Hidrodinámica en el primer capítulo.

Considere un elemento de fluido arbitrario que será seguido por un pequeño intervalo de tiempo, de acuerdo con el sistema lagrangiano de coordenadas. Sea  $\alpha$  una propiedad del fluido como la masa, el momento lineal. Debido a que  $x_0, y_0, z_0$  y  $t$  son variables independientes en el sistema de referencia lagrangiano, la cantidad  $\alpha = \alpha(t)$  será una función del tiempo conforme el elemento de fluido se mueva. Entonces, el cambio en el tiempo de la integral de esta cantidad en el volumen de control  $V(t)$  considerado es,

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[ \int_{V(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] \right\}, \quad (\text{B.1})$$

dicho volumen de control cambiará de forma y de orientación conforme se mueva. La cantidad  $\alpha(t + \delta t)$  integrada en el volumen  $V(t)$ , se sumará y se restará dentro del límite:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[ \int_{V(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t+\delta t) dV \right] + \left[ \frac{1}{\delta t} \int_{V(t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] \right\}. \quad (\text{B.2})$$

En las dos primeras integrales el integrando es fijo, permitiendo que varíen los límites, es decir, que varíe el volumen de control. Por otra parte las dos últimas integrales corresponden a un volumen fijo permitiendo que  $\alpha$  cambie. Esta integral puede ser escrita como la integral de la derivada parcial respecto al tiempo de  $\alpha(t)$ . El resultado es el siguiente:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[ \int_{V(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) dV \right] \right\} + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} dV. \quad (\text{B.3})$$

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

El primer término corresponde al cambio del volumen, manteniéndose  $\alpha$  constante. Durante el intervalo  $\delta t$ , el volumen cambia su forma y su tamaño. Al modificarse esto, se modifica la superficie  $S(t)$ , con vector normal  $\mathbf{n}$  apuntando hacia afuera, que lo envuelve, dicha deformación ocurre con velocidad  $\mathbf{u}$ , de modo que la distancia que recorre cada punto de la superficie es  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta t$ ; así el cambio de volumen es  $\delta V = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta t \delta S$ , por lo que la integral de volumen dentro del límite puede ser transformada en una integral de superficie sustituyendo  $dV$  por  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta t \delta S$ . Esto da como resultado, una vez evaluado el límite:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \int_{S(t)} \alpha(t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} dV \quad (\text{B.4})$$

Una vez completado el límite, la derivada lagrangiana de una integral de volumen se ha convertido en una integral de superficie y en una integral de volumen en donde los integrandos contienen únicamente derivadas eulerianas. Para escribir este teorema en su forma habitual se puede escribir la integral de superficie como una integral de volumen con ayuda del teorema de Gauss: el resultado es el siguiente:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \int_V \nabla \cdot (\alpha(t) \mathbf{u}) dV + \int_V \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} dV \quad (\text{B.5})$$

La ecuación (B.5) es la forma de transcribir la derivada lagrangiana de una integral de volumen a una integral de volumen que sólo contiene derivadas eulerianas [3].

## CONCLUSIONES

Los principales resultados del presente trabajo son los siguientes.

A)

### 1.- FLUJO DENTRO DE UN CILINDRO.

Se encontró la solución al problema no estacionario del flujo dentro de un cilindro que, partiendo del reposo, rota con velocidad angular constante, ecuación (2.28). Dicha solución representa la evolución del flujo, desde el reposo hasta el movimiento estacionario del fluido.

### 2.- VORTICES.

Otro resultado relevante es el que se obtuvo, en términos de las variables de semejanza, para el caso de vórtices, ecuaciones (2.45) y (2.46). La solución está expresada como una serie infinita, lo que permite ajustar diversas condiciones de frontera. Además contiene, como casos particulares, a los vórtices de Taylor y de Lamb.

B)

A partir de ciertas formas particulares de la función de corriente, ecuaciones (2.68), se obtuvieron las siguientes soluciones exactas para el caso estacionario de las ecuaciones no lineales.

### 1.- FUENTE LINEAL INFINITA.

Se obtuvo una solución que representa una fuente lineal infinita, ecuación (2.72), que mana fluido en planos  $z = \text{constante}$ , es decir, de manera radial al eje en todo punto de éste.

### 2.- VORTICE DE HILL.

La ecuación (2.76) es una solución exacta a las ecuaciones de Navier-Stokes. A esta solución se le pueden ajustar las condiciones de frontera adecuadas para describir el flujo estacionario dentro de una esfera, conocido como vórtice de Hill.

### 3.- JET SUMERGIDO DE LANDAU Y POSIBLES GENERALIZACIONES.

Por último se obtiene una ecuación diferencial, ecuación (2.86), cuya solución más simple es el Jet sumergido de Landau, es decir, se obtiene una generalización en el planteamiento del problema de flujos con simetría axial.

A partir de la mencionada ecuación se presenta el flujo de dos chorros que chocan uno contra otro, figura (2.11).

Para concluir, cabe mencionar que las soluciones exactas por sí mismas no son de gran importancia a menos que cumpla con dos condiciones: 1) Representen problemas

físicos reales o posibles y, 2) Sean estables. Como se observa las soluciones representan flujos físicos aunque algunas de ellas no hayan sido estudiadas con detenimiento, cosa que se pretende hacer fuera de este trabajo. Acerca de la estabilidad de las soluciones no se puede mencionar nada más que se estudiará en el futuro.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Mc Cromak, Cane, *Physical Fluid Dynamics* (Academic Press, 1973).
- [2] C. Y. Wang, *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **23**, 159 (1991).
- [3] I. G. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids* (McGraw-Hill, 1974).
- [4] L. D. Landau, *Curso de Física Teórica, Mecánica de Fluidos* (Reverté, 1991).
- [5] A. S. Monin, A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics* (The MIT Press, 1981).
- [6] D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations* (Academic Press, 1989).
- [7] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover).
- [8] R. Peralta-Fabi, A. Mandujano, F. Hussain, *Rev. Mex. de Física.* **37.1**(1991).
- [9] R. Peralta-Fabi, F. Hussain, *Axisymmetric Flows: Some Exact Solutions*, Pretiro.
- [10] Gradshteyn, Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press 1980).
- [11] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics* (Cambridge University Press 1993).
- [12] R. L. Panton, *Incompressible Flow* (John Wiley and Sons, 1984).
- [13] J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics* (Noordhoff International Publishing, Leyden, 1973).
- [14] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores a la frontera* (LIMUSA, 1990).
- [15] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press 1967).
- [16] R. Peralta-Fabi, *Notas personales.*
- [17] R. Peralta-Fabi, *Notas personales.*
- [18] R. Courant, F. John, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático, vol. I* (LIMUSA 1979).
- [19] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press 1985).
- [20] R. Peralta-Fabi, *Rev. Mex. de Física.* **31.1**, 56 (1984).