



52
2e
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

“ARAGON”

FALLA DE ORIGEN

**MARPLA, PROGRAMA PARA EL
ANALISIS ESTRUCTURAL MATRICIAL
DE MARCOS PLANOS**

TESIS PROFESIONAL
Que para obtener el Título de:
INGENIERO CIVIL
P r e s e n t a :
ARNULFO JAVIER MATEO ESPINOZA

Asesor: Ing. José Paulo Mejorada Mota

San Juan de Aragón Edo. de Méx.

1995



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

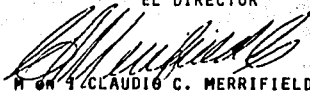
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGÓN
DIRECCION

ARNULFO JAVIER MATEO ESPINOZA
P R E S E N T E .

En contestación a su solicitud de fecha 29 de octubre del año en curso, relativa a la autorización que se le debe conceder para que el señor profesor, Ing. JOSE PAULO MEJORADA MOTA pueda dirigirle el trabajo de Tesis denominado "MARPLA, PROGRAMA PARA EL ANALISIS ESTRUCTURAL MATRICIAL DE MARCOS PLANOS", con fundamento en el punto 6 y siguientes del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

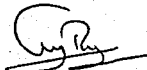
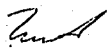
Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
San Juan de Aragón, Edo. de Méx., Diciembre 3 de 1993
EL DIRECTOR

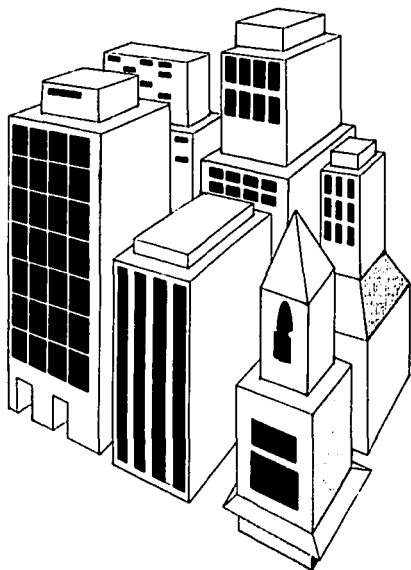


M. EN C. CLAUDIO C. MERRIFIELD CASTRO

c c p Lic. Alberto Ibarra Rosas, Jefe de la Unidad Académica.
c c p Ing. José Paulo Mejorada Mota, Jefe de Carrera de Ingeniería Civil.
c c p Asesor de Tesis.



CCMC/ATR/eva

MARPLA, PROGRAMA PARA EL ANALISIS ESTRUCTURAL MATRICIAL DE MARCOS PLANOS



Agradecimientos:

A Dios.

Por brindarme la vida y darme
la capacidad necesaria para asimilar
los conocimientos adquiridos durante
mi preparación académica.

A mis padres,

Juan Mateo Montaña y Evelia Espinoza Pérez.

Por sus sacrificios, desvelos y
la confianza que en mí depositaron,
manteniéndola en todo momento.

A mis hermanos.

Por su apoyo y comprensión.

Al Ing. José Paulo Mejorada Mata.

*Por su apoyo incondicional durante
la elaboración del presente trabajo, así como
en el transcurso de la carrera; como profesor
y asesor.*

A mis profesores.

*Por transmitirme sus conocimientos
y orientarme en mi formación universitaria.*

A mis compañeros y amigos.

Por su amistad y compañerismo.

A la Universidad.

*Por acogerme en su seno y permitirme
la preparación para una vida profesional.*

Temario:
Índice

Pág.

I.	Introducción.....	1
II.	Método directo de las rigideces.....	5
II.1	Ecuaciones de equilibrio.....	6
II.2	Ecuaciones cinemáticas.....	9
II.3	Ecuaciones constitutivas.....	11
II.4	Ecuaciones del método directo de las rigideces.....	15
III.	Análisis estructural de marcos planos.....	17
III.1	Matriz de continuidad de barra.....	18
III.2	Matriz de rigidez local de barra.....	19
III.3	Matriz de rigidez global de barra.....	22
III.4	Matriz de rigidez global de la estructura.....	22
III.5	Vector de fuerzas externas.....	23
III.5.1	Fuerzas nodales.....	24
III.5.2	Fuerzas en barras.....	24
III.6	Condensación de grados de libertad.....	25
III.7	Sistemas marco-muro.....	27
III.8	Apoyos elásticos.....	28
III.9	Barras de sección variable.....	30
III.10	Reacciones en los apoyos.....	32
III.11	Asentamientos diferenciales.....	32
III.12	Apoyos inclinados.....	33

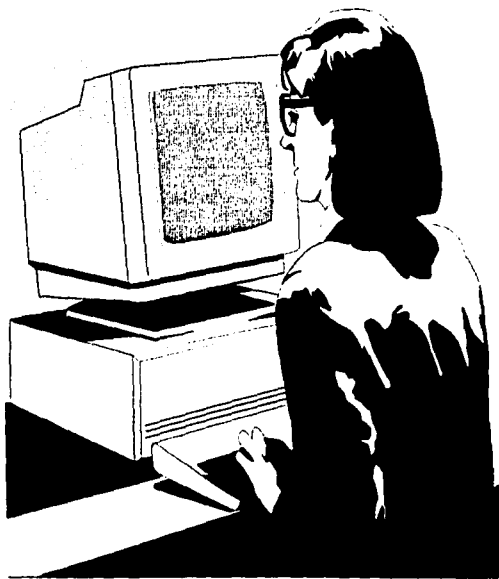
IV. Desarrollo de un programa para el análisis estructural de marcos planos.	35
IV.1 Descripción de las variables del programa.....	38
IV.2 Determinación de parámetros globales.....	43
IV.3 Ensamble de la matriz de rigidez global del marco plano.....	45
IV.4 Factorización de la matriz de rigidez global del marco plano.....	48
IV.5 Solución al sistema $[K]\{d\} = \{F\}$, usando algoritmo LDLT.....	49
IV.6 Determinación e impresión de resultados.....	50
V. Conclusiones.....	54
Apéndice A: Nociones del álgebra lineal.....	58
Apéndice B: Programa Fuente MARPLA.....	69
Apéndice C: Manual de Usuario.....	86
Apéndice D: Ejemplos de aplicación.....	91

Nomenclatura:

A	Nodo origen de la barra i .
A_c	Área de cortante de la sección transversal (constante o variable).
a_{ij}	Elemento de una matriz o coeficiente en un sistema de ecuaciones, en la posición i,j . Pueden ser b, c , etc..
[A]	Matriz o arreglo matricial de un sistema de ecuaciones, pueden ser B, C .
[u]	Matriz de continuidad de barra.
[a]	Vector columna o fila, matriz de una sola columna o fila.
[A]^T	Matriz traspuesta.
B	Nodo destino o final de la barra i .
C	Influencia de la fuerza cortante.
c	coseno θ .
c'	Área del cortante.
d	Elemento de la diagonal principal.
dx, dy	Traslación sobre los ejes y nodos (A o B) respectivos.
[D]	Matriz diagonal.
{ d }	Vector de desplazamientos (sistema global) de los nodos que discretizan a la barra i . Solución general.
{ d₁ }	Subvector de desplazamientos.
{ d₂ }	Elemento de desplazamientos.
E	Módulo de elasticidad del material.
{ e }	Vector de deformaciones.
f_{ij}	Flexibilidad de las barras.
{ F }	Vector de fuerzas externas.
{ F_N }	Vector de fuerzas actuando sobre los nodos.
{ F_{BA} }	Vector de fuerzas actuando sobre las barras (barra/apoyo).
G	Módulo de cortante.
I	Momento de inercia de la sección.

$\{ I \}$	Matriz unitaria o identidad.
i, j	Posición que guarda un elemento: fila y columna respectivamente.
K_x, K_y	Coefficiente de rigidez del resorte idealizado o respuesta del terreno en la dirección indicada X o Y.
K_{θ}	Coefficiente de rigidez del resorte idealizado o respuesta del terreno a la rotación.
$\{ K \}$	Matriz de rigideces globales de la estructura (Matriz acoplada).
$\{ k \}$	Matriz de rigidez de la barra (sistema local).
$\{ K \}_R$	Matriz de rigidez global de la estructura para apoyo elástico.
L	Longitud del elemento barra.
$\{ L \}$	Matriz triangular inferior.
$\{ L \}^T$	Matriz triangular superior o transpuesta de la inferior.
I.D.L.T	Método de solución de ecuaciones lineales simétricas.
m, n	Orden de la matriz.
s	Seno θ .
$X - Y$	Sistema coordenado global de la estructura.
$X' - Y'$	Sistema coordenado local de la barra i.
$\{ Z \}$	Solución complementaria.
γ	Deformación angular en el plano indicado.
Δ	Incremento longitudinal en la dirección indicada.
δ	Incremento diferencial.
e	Deformación lineal (alargamiento por unidad de longitud).
θ	Angulo formado por la barra i con el eje coordenado X-Y.
ν	Relación de Poisson.
σ	Esfuerzo normal al eje indicado.
τ	Esfuerzo cortante en el plano correspondiente.
ϕ	Giro normal al plano X-Y del nodo respectivo.

Capítulo I: INTRODUCCION



Capítulo I: ***Introducción***

Uno de los objetivos del presente trabajo de tesis profesional es la realización e implementación de un programa computacional que realice el análisis estructural de marcos planos, con la intención de que pueda auxiliar en la formación académica del estudiantado de la carrera de **Ingeniería Civil** en sus cursos del área de Ingeniería Estructural, así como apoyar el ejercicio profesional de los mismos.

El apoyo de éste sistema está directamente relacionado con materias como: análisis y diseño estructural. El programa **MARPLA** puede servir para comprobar otros métodos de análisis estructural expuestos en dichos cursos y complementar proyectos de diseño, en los cuales el objetivo principal no es el análisis estructural.

Mediante el uso de **MARPLA**, el estudiante tiene la posibilidad de acceder y practicar en un sistema de análisis semejante a los sistemas empleados en la vida profesional del Ingeniero Estructuralista, por lo que éste trabajo también apoya su formación profesional.

Para poder emplear correctamente el programa **MARPLA** se requieren de algunos conocimientos esenciales del área estructural, con los cuales se pueden generar los datos necesarios para analizar marcos planos (**INPUT**). Así mismo se requieren estos conocimientos para poder realizar la interpretación y corrección adecuada de resultados que se generan mediante ésta herramienta (**OUTPUT**), de otra forma se corre el riesgo de cometer errores graves de concepto y perder la dimensión de los resultados.

El programa MARPLA ha sido diseñado mediante la programación estructurada en forma descendente, lo que reduce en sí mismo la posibilidad de cometer errores en el diseño del software, aún así se tiene el riesgo de incurrir en fallas no contempladas durante su desarrollo, por lo que el usuario tiene la obligación de verificar los resultados que se generen, empleando su sentido común, su experiencia y sus conocimientos sobre el análisis estructural de marcos planos.

Los métodos numéricos empleados en el análisis matricial fueron optimizados para ahorrar esfuerzo computacional y memoria dinámica, de ésta forma se emplean adecuadamente todos los recursos disponibles de la computadora, de éstos recursos MARPLA puede emplear toda la memoria convencional (640 KB o menos) disponible en la computadora y usar al coprocesador matemático (FPU). Empleados correctamente estos recursos, se tiene acceso a grandes cantidades de memoria para almacenar mayores estructuras matriciales y se tiene una eficiente manipulación de datos numéricos de punto flotante, con lo que se reduce el tiempo de ejecución de los proyectos analizados.

En el desarrollo de éste trabajo se presentan las bases teóricas del análisis estructural, resumiendo dichas bases para darle al proyecto un sentido más práctico que conceptual. De ésta forma se describen los procedimientos empleados en la elaboración de MARPLA. Así mismo éstas descripciones son detalladas en los casos directamente relacionados con el análisis estructural, mientras que en otros procesos de programación indirectos solo son descritos en forma general pero resumiendo sus características básicas.

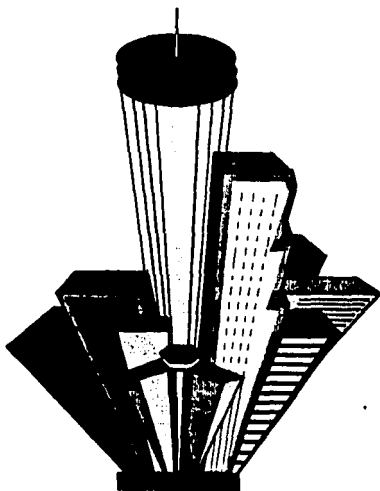
Se eligió el método directo de las rigideces para realizar el análisis de los marcos planos debido a que es el método matricial de análisis elástico más eficiente conocido en la actualidad. Gran parte de su éxito se debe a la evolución de las computadoras y de los métodos numéricos matriciales. Como todo método presenta sus desventajas, pero es el método elástico que más se aproxima a la realidad.

El contenido de los capítulos aquí tratados se podría resumir de la forma siguiente:

- **Capítulo I: Introducción.**
- **Capítulo II: Método directo de las rigideces.** Se dan las bases teóricas del método de las rigideces, así como su deducción e hipótesis realizadas.
- **Capítulo III: Análisis estructural de marcos planos.** Se acopla el método de las rigideces a la estructuración y análisis de marcos planos.
- **Capítulo IV: Desarrollo de un programa para el análisis estructural de marcos planos.** Se exponen los métodos desarrollados en la implementación del programa **MARPLA**, así como: diagramas de bloque, diagramas de flujo, código fuente, comentarios y aplicaciones.
- **Capítulo V: Conclusiones.**

Capítulo II:

METODO DIRECTO DE LAS RIGIDECES



Capítulo II:

Método directo de las rigideces

En el año de 1915, el profesor George A. Maney presentó el Método de Análisis de Estructuras Hiperestáticas por deformaciones (desplazamientos) angulares o lineales; en una publicación sobre Ingeniería Estructural de la Universidad de Minnesota. Fue una continuación de estudios anteriores realizados por Manderla (1880) y Mohr (1892); posteriormente conocido como el Método de las Rigideces.

A principios de la década de 1950 Samuel Levy sugirió algunas ventajas de un método de desplazamientos usando coeficientes de influencia para el análisis estructural de aviones. Simultáneamente otras personas elaboraban una variedad de métodos de análisis basados en métodos matriciales aplicables a las computadoras digitales, los cuales fueron perfeccionándose para consolidarse con el tiempo.

Por 1954 Turner Clough Martin y Topp presentan el primer tratamiento de este método, demostrando que la matriz de rigideces, en un ordenamiento de los coeficientes de influencia de rigidez, pueden ser utilizados para determinar los desplazamientos planteados como la superposición de las rigideces de los elementos o miembros estructurales.

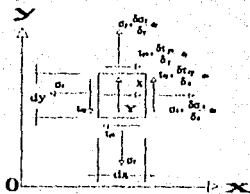
La dualidad de los métodos de las fuerzas y los desplazamientos es demostrada por Argyris y Kesley en 1960 en su tratado de los teoremas de energía, unificándose a partir de entonces los diversos procedimientos, incrementándose rápidamente el tamaño de los problemas tratados, según aumenta el tamaño y la capacidad de las computadoras, es fácil de programar debido a sus algoritmos en forma matricial, representando un modelo más general y exacto que los métodos iterativos como los métodos de Cross y Kani.

El método de las rigideces es conocido también como el método de los desplazamientos, debido que a partir de las fuerzas externas aplicadas en la estructura es posible conocer los desplazamientos internos correspondientes.

En este método se consideran las acciones producidas por desplazamientos externos unitarios considerados en el plano, los cuales son: traslaciones, o rotaciones unitarias. Estas acciones ocasionadas por los desplazamientos unitarios son conocidas como rigideces, en los cuales son tomadas fuerzas o momentos externos.

II.1 Ecuaciones de equilibrio.

Un elemento infinitesimal de un cuerpo debe estar en equilibrio. Para el caso bidimensional, el sistema de fuerzas que actúa en un elemento infinitesimal $(dx)(dy)(1)$, se considera que tiene una unidad de longitud como espesor en dirección perpendicular al plano en que actúa; considerando la posibilidad de un incremento $(\delta\sigma/\delta x)dx$ en los esfuerzos (σ_x) de una cara a otra del elemento. Las derivadas parciales nos indican los cambios en las diferentes direcciones.



Elemento infinitesimal en que actúan esfuerzos y fuerzas de cuerpo

Las fuerzas de inercia o de cuerpo, como las debidas al peso o a un efecto magnético, se designan por X y Y , referidas a la unidad de volumen del material.

Empleando las notaciones anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow, \\ (\sigma_x + \delta\sigma_x/dx)(dy \times 1) - \sigma_x(dy \times 1) \\ + (\tau_{yx} + \delta\tau_{yx}/dy)(dy \times 1) + X(dx \, dy \times 1) = 0 \end{aligned} \quad (11.1)$$

Simplificando y recordando que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, obtenemos la ecuación básica de equilibrio para la dirección x y una análoga para la dirección y :

$$\begin{aligned} \delta\sigma_x/dx + \delta\tau_{yx}/dy + X = 0 \\ \delta\tau_{yx}/dx + \delta\sigma_y/dy + Y = 0 \end{aligned} \quad (11.2)$$

Del equilibrio de momentos del elemento que requiere que se cumpla $\Sigma M_z = 0$, se obtiene $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

De manera análoga para el caso tridimensional, las ecuaciones típicas de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \delta\sigma_x/dx + \delta\tau_{xy}/dy + \delta\tau_{xz}/dz + X = 0 \\ \delta\tau_{xy}/dx + \delta\sigma_y/dy + \delta\tau_{yz}/dz + Y = 0 \\ \delta\tau_{xz}/dx + \delta\tau_{xy}/dy + \delta\sigma_z/dz + Z = 0 \end{aligned} \quad (11.3)$$

En la deducción de estas fórmulas no se consideran las propiedades mecánicas del material, esto quiere decir que tales ecuaciones son aplicables si un material es elástico, plástico o viscoelástico.

Uno de los principios fundamentales que nos permiten plantear una estrategia general para la solución de problemas de análisis estructural, son las ecuaciones de equilibrio. Las cuales quedan establecidas en el siguiente arreglo matricial:

$$\begin{matrix} \{ F \} \\ \{ X \} \\ \{ Y \} \\ \{ Z \} \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & 0 & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & 0 & \frac{\delta}{\delta x} & 0 & \frac{\delta}{\delta z} \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{\delta z} & 0 & \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} \end{bmatrix} \begin{matrix} \{ P \} \\ \{ u_x \} \\ \{ u_y \} \\ \{ u_z \} \\ \{ \tau_{xy} \} \\ \{ \tau_{yz} \} \\ \{ \tau_{xz} \} \end{matrix} \quad (II.4)$$

Donde:

$\{ F \}$ Vector de fuerzas externas

$[a]$ Matriz de continuidad o matriz operador

$\{ P \}$ Vector de fuerzas internas

Finalmente tenemos:

$$0 = \{ F \} + [a]^T \{ P \} \quad (II.5)$$

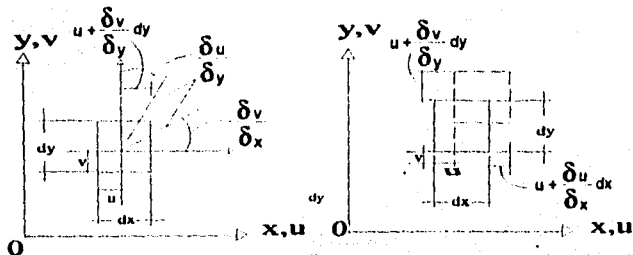
II.2 Ecuaciones cinemáticas.

Sabiendo que existe una relación lineal entre los esfuerzos y las deformaciones. A partir de esta relación llegamos a la expresión que nos define el método de las rigidices.

Considerando las definiciones de deformación dadas por las siguientes ecuaciones:

$$e_x = \delta v / \delta x \quad e_y = \delta v / \delta x \quad e_z = \delta v / \delta x \quad (II.6)$$

Además de las deformaciones lineales, un elemento también puede experimentar una deformación angular en una longitud infinitesimal en relación con los ejes x e y .



Elementos deformados en sus posiciones inicial y final.

Con base a esto un ángulo inicialmente recto, se reduce en una cantidad $\delta v/\delta x + \delta u/\delta y$. Por tanto, estos cambios de ángulos pequeños por definición de deformación angular con respecto a los ejes coordenados xy , xz , y yz son:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \delta v/\delta x + \delta u/\delta y \\
 \gamma_{xu} &= \gamma_{ux} = \delta w/\delta x + \delta u/\delta z \\
 \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \delta w/\delta y + \delta v/\delta z
 \end{aligned}
 \tag{11.7}$$

Estas expresiones son válidas considerando que las tangentes de ángulos pequeños, son iguales a los propios ángulos, medidos en radianes.

De acuerdo a las ecuaciones anteriores, podemos establecer un arreglo matricial que involucre tanto deformaciones lineales como angulares, así como los posibles desplazamientos, de la manera siguiente:

$$\begin{matrix} \{ e \} \\ \left\{ \begin{matrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \end{matrix} \right\} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{\delta z} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ \frac{\delta}{\delta z} & 0 & \frac{\delta}{\delta x} \\ 0 & \frac{\delta}{\delta z} & \frac{\delta}{\delta y} \end{bmatrix} \begin{matrix} \{ d \} \\ \left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad (11.8)$$

Donde:

- { e } Vector de deformaciones
- { a } Matriz continuidad
- { d } Vector de desplazamientos

Finalmente tenemos:

$$\{ e \} = \{ a \} \{ d \} \quad (11.9)$$

11.3 Ecuaciones constitutivas.

Relacionando cada una de las seis deformaciones con sus componentes de esfuerzo, tenemos las ecuaciones lineales entre esfuerzo y deformación siguientes:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \epsilon_x = A_{11}\tau_{xx} + A_{12}\tau_{yy} + A_{13}\tau_{zz} + A_{14}\tau_{xy} + A_{15}\tau_{yz} + A_{16}\tau_{zx} \\
 \epsilon_{yy} &= \epsilon_y = A_{21}\tau_{xx} + A_{22}\tau_{yy} + A_{23}\tau_{zz} + A_{24}\tau_{xy} + A_{25}\tau_{yz} + A_{26}\tau_{zx} \\
 \epsilon_{zz} &= \epsilon_z = A_{31}\tau_{xx} + A_{32}\tau_{yy} + A_{33}\tau_{zz} + A_{34}\tau_{xy} + A_{35}\tau_{yz} + A_{36}\tau_{zx} \\
 \epsilon_{xy} &= \gamma_{xy}/2 = A_{41}\tau_{xx} + A_{42}\tau_{yy} + A_{43}\tau_{zz} + A_{44}\tau_{xy} + A_{45}\tau_{yz} + A_{46}\tau_{zx} \\
 \epsilon_{yz} &= \gamma_{yz}/2 = A_{51}\tau_{xx} + A_{52}\tau_{yy} + A_{53}\tau_{zz} + A_{54}\tau_{xy} + A_{55}\tau_{yz} + A_{56}\tau_{zx}
 \end{aligned} \quad (11.10)$$

$$\epsilon_{xx} = \gamma_{xx}/2 = A_{61}\tau_{xx} + A_{62}\tau_{yy} + A_{63}\tau_{zz} + A_{64}\tau_{xy} + A_{65}\tau_{yz} + A_{66}\tau_{zx}$$

En las cuales aparecen 36 constantes, las cuales como se sabe son simétricas con respecto a la diagonal principal, es decir $A_{ij} = A_{ji}$, esta consideración nos reduce el número de constantes independientes a 21, suponiendo que el material es homogéneo.

La ley de Hooke es aplicable a materiales anisotrópicos homogéneos, tales como cristales simples.

Este sistema de ecuaciones se simplifica notablemente para materiales isotrópicos (con las mismas propiedades en todas direcciones), que para tal condición $A_{11} = A_{22} = A_{33}$, $A_{12} = A_{13} = A_{23}$, $A_{44} = A_{55} = A_{66}$, y como anteriormente se vio que estas constantes son simétricas respecto a la diagonal principal. Todas las otras constantes desaparecen. A estas simplificaciones se les conoce como la ley de Hooke generalizada.

Considerando las observaciones anteriores y empleando la notación usual en ingeniería, realizamos los siguientes cambios: $A_{11} = 1/E$, $A_{12} = -\nu/E$ y $A_{44} = 1/(2G)$. Luego:

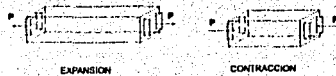
$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sigma_x/E - \nu(\sigma_y/E) - \nu(\sigma_z/E) \\ \epsilon_y &= -\nu(\sigma_x/E) + \sigma_y/E - \nu(\sigma_z/E) \\ \epsilon_z &= -\nu(\sigma_x/E) - \nu(\sigma_y/E) + \sigma_z/E \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \\ \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G \\ \gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G \end{aligned} \quad (II.11)$$

En estas ecuaciones existen tres constantes elásticas E, ν y G. Sin embargo para materiales isotrópicos existen solo dos constantes elásticas, debido a la existencia de una relación entre estas, dada por la ecuación siguiente:

$$G = E / 2(1 + \nu)$$

(II.12)

De acuerdo a la relación de Poisson: Al someter a un cuerpo sólido a tensión axial, este se contrae lateralmente; por otra parte si se le comprime, el material se ensancha lateralmente. Con estas consideraciones es fácil determinar las direcciones de las deformaciones lineales laterales, según el sentido del esfuerzo normal aplicado. Por ejemplo, si solo $\sigma_x \neq 0$, entonces $\epsilon_y = \sigma_x/E$ y $\epsilon_z = \epsilon_y = -\nu \sigma_x/E$; donde el signo negativo nos indica la consideración de posibles contracciones del material en las direcciones y y z a medida que se alarga en la dirección x.



Contracción y expansión laterales de cuerpos sólidos sometidos a fuerzas axiales

Es decir:

$$\nu = -(\epsilon_y/\epsilon_x) = -(\epsilon_z/\epsilon_x) = (\text{deformación lateral} / \text{deformación axial}) \quad (II.13)$$

Esta definición solo es aplicable a deformaciones lineales causadas por esfuerzo uniaxial. La superposición se aplica a situaciones de esfuerzo multiaxial; los efectos de deformación separados o individuales originados por cada esfuerzo se suman en la dirección requerida.

A continuación establcuremos la relación lineal que existe entre las deformaciones y los esfuerzos, formulada por la Ley General de Hooke. Utilizando el principio de superposición, el cual establece que el esfuerzo o la deformación resultante en un sistema sometido a la acción de varias fuerzas es la suma algebraica de sus efectos al ser aplicadas individual o separadamente, siempre y cuando la deformación

esté directa y linealmente relacionada con el esfuerzo que las origina y no causen efectos anormalmente grandes en otros esfuerzos; como generalmente ocurre en las estructuras.

Para esto, de acuerdo a la ecuación (II.8), tendremos:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= 1/E [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
 \epsilon_y &= 1/E [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
 \epsilon_z &= 1/E [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
 \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \\
 \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G \\
 \gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G
 \end{aligned}
 \tag{ II.14 }$$

A partir de estas expresiones, las podemos asociar en el siguiente arreglo:

$$\begin{matrix}
 \{ e \} & & \{ k \} & & \{ P \} \\
 \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\} & + & \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{array} \right] & = & \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{array} \right\}
 \end{matrix}
 \tag{ II.15 }$$

Donde:

- { e } Vector de deformaciones
- { k } Matriz de rigidez del sistema
- { P } Vector de fuerzas internas

Finalmente tenemos:

$$\{ P \} = \{ k \} \{ e \}$$

(II.16)

II.4 Ecuaciones del método directo de las rigideces.

El Método directo de las Rigideces se plantea en término de matrices para la formulación de ecuaciones simultáneas que nos permitan la solución de la estructura a analizar, auxiliándonos en los métodos matriciales. Este método es directo tanto en teoría como en aplicación, no recomendable para el análisis manual.

El método directo de las rigideces está basado en cada uno de los principios fundamentales anteriormente mencionados, contenidos en las ecuaciones de equilibrio, cinemáticas y constitutivas expresadas a continuación:

$$\begin{aligned} 0 &= \{ F \} + \{ a \}^T \{ P \}, && \text{Ecuaciones de equilibrio.} \\ \{ P \} &= \{ k \} \{ \quad \}, && \text{Ecuaciones constitutivas (L y d H k).} \\ \{ e \} &= \{ a \} \{ d \}, && \text{Ecuaciones cinemáticas (o de continuidad).} \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación de cinemática (II.9) en la ecuación constitutiva (II.16), en la ecuación (II.17), y sustituyendo esta en la ecuación de equilibrio, obtenemos la ecuación (II.18):

$$\{ P \} = \{ k \} \{ a \} \{ d \} \quad (II.17)$$

$$0 = \{ F \} + \{ a \}^T \{ k \} \{ a \} \{ d \} \quad (II.18)$$

Esta expresión (II.18), nos define convenientemente el **Método Directo de las Rigideces**, que aunque nos representa un sistema de ecuaciones diferenciales, es posible resolver discretizando estas ecuaciones para un caso práctico (considerando como incógnitas a los desplazamientos en los nodos), con lo cual se reduce el problema para trabajar únicamente con un método discreto en forma matricial.

Considerando $\{ K \}$ como:

$$\{ K \} = \{ a \}^T \{ k \} \{ a \} \quad (II.19)$$

Donde:

- $\{ K \}$ Matriz de rigideces globales de la estructura (Matriz acoplada).
- $\{ k \}$ Matriz de rigideces de la estructura.
- $\{ a \}$ Matriz de continuidad o matriz operador.

Sustituyendo la ecuación anterior (II.19) en la ecuación (II.18), nos queda:

$$\{ F \} + \{ K \} \{ d \} = 0 \quad (II.20)$$

$$-\{ F \} = \{ K \} \{ d \} \quad (II.21)$$

El signo negativo en el vector $\{ F \}$ en la ecuación (II.21), nos indica que se trata de fuerzas internas, pero en nuestro caso las que nos interesan son las fuerzas externas, bastará con cambiar el signo a $\{ F \}$ para que exista el equilibrio.

$$\{ F \} = \{ K \} \{ d \} \quad (II.22)$$

Esta última expresión nos define correctamente el método de las rigideces, y será la que manejemos de aquí en adelante para la representación del método. En la cual encontramos que la única incógnita son los desplazamientos en los nodos, debido a que el vector columna de fuerzas externas es ya conocido (condiciones de carga), la **Matriz de Rigideces Globales de la Estructura $\{ K \}$** está en función de las características geométricas y mecánicas de cada elemento de dicha estructura y además de la relación fuerza deformación para la estructura global.

Para la aplicación de este método es necesario contar con la matriz de rigideces globales de la estructura $\{ K \}$ y con el vector de fuerzas externas $\{ F \}$.

Capítulo II:

ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE MARCOS PLANOS



Capítulo III:

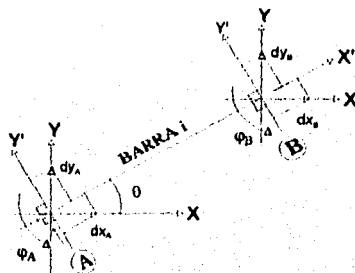
Análisis Estructural de Marcos Planos

De acuerdo a las bases teóricas del Método de las Rigideces descrito en el capítulo anterior, para analizar un marco plano se requiere determinar las siguientes matrices: continuidad, rigidez local y rigidez global. La obtención de cada una de estas matrices se puede hacer, para fines de programación ocupan demasiada memoria y tiempo de ejecución ya que se requiere ensamblar tres matrices. Por tanto se describe a continuación un método más eficiente.

Existe otra posibilidad para obtener la matriz de rigidez global del marco plano, en este método se ensambla para cada barra sus respectivas matrices de: continuidad, rigidez local y rigidez global. Dichas matrices son de un orden inferior que las matrices del marco plano. Una vez ensamblada la matriz de rigidez global de la barra se procede a ensamblarla a sus respectivos desplazamientos localizados en la matriz de rigidez global del marco plano. Mediante este proceso solo se requiere ensamblar una sola matriz de rigidez global de la estructura, por lo que se tiene un ahorro considerable de esfuerzo computacional y memoria.

III.1 Matriz de continuidad de la barra.

Se trata de una matriz tipo operador que transforma las propiedades geométricas locales de la barra a propiedades geométricas globales del marco plano analizado y se ensambla en función del sistema estructural elegido, para el análisis de marcos planos se determina de la forma siguiente:



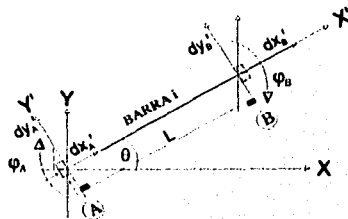
Sistema global de la estructura.

$$[a]_i = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(III. 1)

III.2 Matriz de rigidez local de la barra.

Esta matriz representa las propiedades geométricas y mecánicas del elemento barra a lo largo de toda su longitud, condensando dichas propiedades en los nodos extremos de la barra, de esta manera se pueden considerar deformaciones axiales, cortantes y flexionantes en la determinación de fuerzas internas. En este arreglo las rigideces están acordes al sistema de referencia local de la barra.



Sistema local de barra

- Matriz de rigidez local de un elemento barra considerando: sección constante, esfuerzos axiales y esfuerzos flexionantes; se tiene:

$$[K]_l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (III.2)$$

- Matriz de rigidez local de un elemento barra considerando: sección constante, esfuerzos flexionantes y esfuerzos cortante; se tiene:

$$[k]_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\phi)L^3} & \frac{6EI}{(1+\phi)L^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\phi)L^3} & \frac{6EI}{(1+\phi)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\phi)L^2} & \frac{(4+\phi)EI}{(1+\phi)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\phi)L^2} & \frac{(2-\phi)EI}{(1+\phi)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+\phi)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\phi)L^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\phi)L^3} & -\frac{6EI}{(1+\phi)L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\phi)L^2} & \frac{(2-\phi)EI}{(1+\phi)L} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\phi)L^2} & \frac{(4+\phi)EI}{(1+\phi)L} \end{bmatrix} \quad (III.3)$$

■ Matriz de rigidez local de un elemento barra considerando: rigideces angulares.

$$[k]_i = \begin{bmatrix} Y_N & 0 & 0 & -Y_N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Y_{AA}^* Y_{BB}^* 2Y_{AB}}{L^2} & \frac{Y_{AA}^* Y_{AB}}{L} & 0 & -\frac{Y_{AA}^* Y_{BB}^* 2Y_{AB}}{L^2} & \frac{Y_{AA}^* Y_{AB}}{L} \\ 0 & \frac{Y_{AA}^* Y_{AB}}{L} & Y_{AA} & 0 & -\frac{Y_{AA}^* Y_{AB}}{L} & Y_{AB} \\ -Y_N & 0 & 0 & Y_N & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Y_{AA}^* Y_{BB}^* 2Y_{AB}}{L^2} & -\frac{Y_{AA}^* Y_{AB}}{L} & 0 & \frac{Y_{AA}^* Y_{BB}^* 2Y_{AB}}{L^2} & -\frac{Y_{AA}^* Y_{AB}}{L} \\ 0 & \frac{Y_{BB}^* Y_{AB}}{L} & Y_{AB} & 0 & -\frac{Y_{BB}^* Y_{AB}}{L} & Y_{BB} \end{bmatrix} \quad (III.4)$$

III.3 Matriz de rigidez global de la barra.

En esta matriz se siguen representando las propiedades geométricas y mecánicas del elemento barra pero referidos ahora al sistema global del marco plano analizado. La transformación que se emplea del sistema local al sistema global es únicamente un cambio geométrico. Dicha matriz se obtiene empleando la teoría general del método directo de las rigideces [II.4], en donde se ensambla de la siguiente forma:

$$[K] = [a]^T [k] [a] \quad (III.5)$$

III.4 Matriz de rigidez global de la estructura.

Para la determinación de la matriz de rigidez global de la estructura, teniendo como incógnitas a los desplazamientos en los nodos, y debiendo satisfacer las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones, la podemos descomponer en dos sistemas:

- Sistema básico, es el obtenido de la restricción de los extremos de cada uno de los miembros del sistema inicial, eliminando posibles desplazamientos (grados de libertad), conservando las cargas aplicadas. Esta fijación de los extremos (nodos), genera una estructura como un sistema de elementos fijos (barras doblemente empotradas), con un alto grado de indeterminación.
- Sistema complementario, se deriva del sistema básico, suprimiendo las cargas actuantes y permitiendo deformaciones en los extremos de sus miembros (redundantes) desconocidos para cada uno de ellos, satisfaciendo las restricciones normales del sistema (diferentes tipos de continuidad y de frontera).

III.5 Vector de fuerzas externas.

En el análisis estructural de cualquier sistema lo que en realidad se busca es determinar la reacción correspondiente a la acción (tercera Ley de Newton) provocada por agentes externos a la configuración geométrica y mecánica de la estructura, a estas acciones se les conoce como **fuerzas externas**. Pueden ser provocadas por cargas gravitacionales (carga muerta, viva, etc..) y/o accidentales (sismo, viento, marea, explosiones, etc..), de ésta forma la estructura reacciona a estas acciones mediante: deformaciones, esfuerzos, fuerzas internas, desplazamientos, asentamientos, fallas estructurales, etc..

Para el análisis estructural de sistemas definidos en un plano como el sistema reticular del marco plano, las fuerzas externas que actúan sobre él se pueden idealizar mediante fuerzas puntuales y lineales con las que se pueden representar todo tipo de acciones anteriormente previstas.

En el método de las rigideces se busca determinar las fuerzas internas que provocan las fuerzas externas, basándose en la condensación de las propiedades de la estructura hacia los nodos que la conforman, por lo que se requiere también determinar las fuerzas externas localizadas en cualquier parte del marco plano y condensarlas a los nodos correspondientes. La forma de condensación para los nodos es distinta a la condensación de fuerzas externas en las barras, por lo que su determinación se obtendrá en forma separada.

Los nodos que podrán ser cargados son aquellos que tengan posibilidad de desplazamientos de traslación o rotación, ya que si no cumplen con éste requisito las acciones que puedan ser consideradas en el nodo las va a tomar el apoyo formado por la restricción en el nodo. El número total de posibilidades de desplazamientos de todos los nodos en la estructura se le conoce como **grado de libertad**.

Los elementos del vector de fuerzas externas serán iguales al número de grados de libertad que se presenten en toda la estructura. Para cada traslación sobre el nodo corresponderá una fuerza lineal y para cada rotación un momento, las traslaciones y fuerzas serán referidas al sistema coordenada global del marco plano, mientras que para las rotaciones y momentos son independientes al sistema de referencia.

Resumiendo, cualquier tipo de acción representada por fuerzas externas podrá ser considerada al ser idealizada mediante un vector de fuerzas externas que se ensambla de acuerdo a las fuerzas localizadas a lo largo de los elementos barras y a las fuerzas puntuales concentradas en los nodos, dicha condensación se determina en las siguientes secciones.

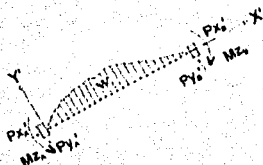
III.5.1 Fuerzas nodales.

Las acciones representadas por fuerzas externas que se concentren en algún nodo de la estructura reticular del marco plano se ensamblarán directamente a su correspondiente grado de libertad sobre el vector de fuerzas externas. Si el grado de libertad se encuentra restringido, entonces la fuerza correspondiente no se ensambla en el vector de fuerzas externas y dicha acción va a ser tomada por la restricción sin afectar a la estructura.

III.5.2 Fuerzas en barras.

Las fuerzas externas que se localicen a lo largo de las barras podrán ser consideradas en el vector de fuerzas externas al transportarlas a los nodos extremos de la barra. Esto se realiza considerando a la barra doblemente empotrada y obteniendo sus reacciones en sus extremos, por lo que para el caso general se tendrán 6 reacciones sobre los dos nodos extremos, dichas reacciones en los nodos se cargarán a su correspondiente

grado de libertad en el vector de fuerzas externas pero ahora como acciones, lo que en términos numéricos significa cambiarle el signo a las fuerzas y momentos correspondientes.



Elementos mecánicos de barra con carga variable en sistema local

En notación matricial lo anterior se puede representar mediante las siguientes expresiones:

$$\{F\} = \{F_N\} + \{F_{B/A}\} \quad (III.6)$$

en donde:

- $\{F\}$ Vector de fuerzas externas.
- $\{F_N\}$ Vector de fuerzas en nodos.
- $\{F_{B/A}\}$ Vector de fuerzas en barras B/A (barra/apoyo).

III.6 Condensación de grados de libertad.

La condensación de los grados de libertad en una barra nos sirven para modelar articulaciones o desplazamientos locales en los nodos extremos de la barra. Mediante esta forma las restricciones extremas de la barra pueden ser distintas a las restricciones de los nodos que sustentan a la barra. Se utilizan en contravientos, muros de mampostería, fallas locales de la estructura, etc..

El método empleado consiste en reducir el orden de la matriz de rigidez local de la barra, en lugar de ensamblar el grado de libertad anulado al sistema global del marco plano analizado. Mediante este proceso se reduce el tiempo computacional, pues se reducen los grados de libertad generales del marco.

Se considera a la matriz de rigidez local subdividida en las submatrices: k_{11} , k_{12} y k_{21} , y con el elemento k_{22} , como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (III.7)$$

En donde:

d_1 Subvector de desplazamientos.

d_2 Elemento de desplazamientos.

F_1 Subvector de fuerzas externas.

0 Fuerza externa nula.

Desarrollando el anterior sistema se pueden determinar las siguientes ecuaciones linealmente dependientes:

$$k_{11} d_1 + k_{21} d_2 = F_1 \quad (III.8)$$

$$k_{12} d_1 + k_{22} d_2 = 0 \quad (III.9)$$

despejando d_2 de la ecuación (III.9) se tiene:

$$d_2 = - k_{12} d_1 / k_{22} \quad (III.10)$$

sustituyendo (III.10) en (III.8):

$$k_{11} d_1 - k_{21} k_{12} d_1 / k_{22} = F_1 \quad (III.11)$$

de donde:

$$d_1 (k_{11} - k_{21} k_{12} / k_{22}) = F_1 \quad (III.12)$$

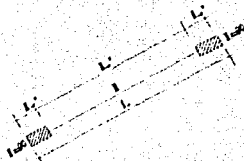
Del sistema (III.11) se obtiene la siguiente matriz, en donde se observa que el orden se ha reducido en un elemento, y se encuentra implícito el desplazamiento d_2 en dicho sistema condensado.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & -\frac{k_{21} k_{12}}{k_{22}} \\ -\frac{k_{21} k_{12}}{k_{22}} & k_{11} \end{bmatrix} \{ d_1 \} = \{ F_1 \} \quad (\text{III.13})$$

Este proceso se debe de repetir para cada grado de libertad que se requiera eliminar, de acuerdo a las restricciones locales de la barra.

III.7 Sistema marco-muro.

En algunas estructuras es difícil, para rigidificar la estructura a cargas horizontales se emplean muros de cortante de concreto reforzado, los cuales son analizados mediante la simplificación de "columna ancha". Usando esta idealización se simplifica el muro mediante elementos barra con sección variables como se muestra a continuación:



Elemento infinitamente rígido.

Esta sección consta de tres secciones variables, en sus extremos infinitamente rígidos y la sección central tiene las mismas propiedades de la trabe regular.

Este tipo de estructuración puede servir también para analizar con más rigor la zona rígida que se presenta en la unión entre columnas y trabes. Esta zona rígida sirve también para poder determinar con mayor aproximación los elementos mecánicos que se presentan en los paños de trabes y columnas.

Se pueden usar dos métodos alternativos para determinar el análisis del sistema marco-muro:

- El primer método consiste en determinar las rigideces angulares del elemento y ensamblar la matriz de rigidez angular, mediante las siguientes expresiones.

$$\gamma_{AA} = \frac{4EI}{L} \left(\frac{1 + C + 3\alpha + 3\alpha^2}{1 + 4C} \right) \quad (\text{III.14})$$

$$\gamma_{BB} = \frac{4EI}{L} \left(\frac{1 + C + 3\beta + 3\beta^2}{1 + 4C} \right) \quad (\text{III.15})$$

$$\gamma_{AB} = \frac{2EI}{L} \left(\frac{1 - 2C + 3\alpha + 3\beta + 6\alpha\beta}{1 + 4C} \right) \quad (\text{III.16})$$

Donde:

$$C = \frac{6 I (1 + \nu)}{A_c L^2} \quad (\text{III.17})$$

III.8 Apoyos elásticos.

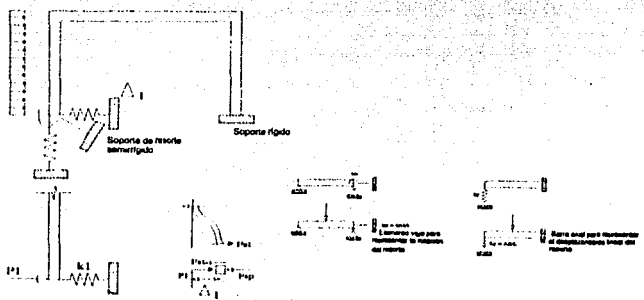
En ocasiones el soporte estructural no impide totalmente el movimiento, esto puede ocurrir cuando la estructura descansa sobre una masa de suelo que se deforma bajo la acción de cargas de la cual es posible saber su respuesta, siempre y cuando se conozcan las propiedades del suelo representado. Este material de sustentación puede

idealizarse mediante un conjunto de resortes o apoyos elásticos. Debe de notarse que para esta idealización no se toma el tiempo de respuesta de los apoyos.

Para fines del método de rigideces dichos resortes pueden ser lineales o angulares, mediante estos apoyos elásticos generalmente se modelan las propiedades del suelo, por ejemplo para modelar: túneles, pilotes, vías férreas, puentes, cimentaciones, carreteras, presas, etc.. Aún considerando la posibilidad de deformación del suelo, dicha idealización es en algunos casos muy burda, puesto que el modelo lineal no se adapta a la mayoría de los tipos inelásticos de suelos existentes.

Modelando el suelo mediante apoyos elásticos se pueden determinar las presiones y esfuerzos que se presentan bajo la cimentación de las estructuras que de alguna manera es más aproximado que no considerarla.

Considerar el efecto de los apoyos elásticos en el método de las rigideces es relativamente sencillo. El modelo que se emplea generalmente es el siguiente:



Elementos sobre apoyo elástico.

De el anterior modelo se puede generar la siguiente matriz de rigidez global para el apoyo elástico:

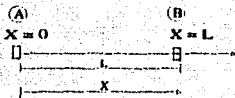
$$[K]_R = \begin{bmatrix} K_{RV} & 0 & 0 \\ 0 & K_{RY} & 0 \\ 0 & 0 & K_{RW} \end{bmatrix} \quad (III.18)$$

Para poder incluir el apoyo elástico se requiere tener al nodo con posibilidad de desplazamiento en la dirección requerida por el resorte, de lo contrario no se considerará la rigidez del apoyo elástico.

III.9 Barras de sección variable.

En el análisis estructural de marcos planos en algunas ocasiones es necesario incluir elementos barra que varían su sección a lo largo de ésta. Tales como: acartelamientos, secciones prismáticas y piramidales, muros de cortante, etc...

Es importante hacer notar que las barras de sección variable aquí analizadas deben de tener su eje neutro sobre una línea recta, éste método no sirve para barras con eje neutro curvo.



Elemento barra de sección variable.

Al variar la sección las propiedades geométricas quedan en función de la longitud del elemento como se muestra a continuación:

La única diferencia entre las secciones variables y secciones constantes que se presentan en el método de las rigideces es la representa la matriz de rigidez local de la barra, dicha matriz se ensambla en función de las rigideces angulares de barra.

La obtención de las rigideces angulares se determinan mediante las flexibilidades de la barra, éstas así mismo se obtienen al integrar a lo largo de la sección de la barra empleando las siguientes expresiones:

$$f_{11} = \int \frac{dx}{EA} \quad (III.19)$$

$$f_{22} = \int \frac{x^2 dx}{EI} + \int \frac{dx}{G Ac} \quad (III.20)$$

$$f_{23} = -\int \frac{x dx}{EI} = -f_{32} \quad (III.21)$$

$$f_{33} = \int \frac{dx}{EI} \quad (III.22)$$

Después de calcular las flexibilidades se determinan las rigideces angulares empleando las siguientes expresiones:

$$\Delta = f_{22} f_{33} - f_{23}^2 \quad (III.23)$$

$$Y_{AA} = f_{22} / \Delta \quad (III.24)$$

$$Y_{AB} = -(f_{33} L + f_{22}) / \Delta \quad (III.25)$$

$$Y_{BA} = Y_{AB} \quad (III.26)$$

$$Y_{BB} = (f_{23} L^2 + 2 f_{23} + f_{22}) / \Delta \quad (III.27)$$

$$Y_N = 1 / f_{11} \quad (III.28)$$

En la obtención de éstas rigideces angulares se observa que intervienen esfuerzos flexionantes, cortantes y axiales.

Para analizar secciones variables mediante el programa MARPLA se requiere obtener los valores numéricos de las rigideces angulares e introducirlos de acuerdo a la secuencia de entrada.

III.10 Reacciones en los apoyos.

Las reacciones en los apoyos generalmente se emplean para bajar cargas a la cimentación y para comprobar el método de las rigideces. La comprobación se efectúa al comparar las fuerzas externas con respecto a las fuerzas internas en los elementos frontera, de acuerdo a la Tercera Ley de Newton.

Las fuerzas externas están compuestas por todas las fuerzas que actúan sobre nodos y barras, mientras que las fuerzas internas se componen por la suma de fuerzas en los apoyos restringidos (elementos frontera) de la estructura. Todas las fuerzas deben de estar referidas al sistema coordinado global de la estructura. La suma de las fuerzas externas y fuerzas internas da como resultado cero.

III.11 Asentamientos diferenciales.

La transmisión de esfuerzos al interior de la masa de suelo que soporta la estructura, son provocados por cargas impuestas en la frontera del estrato considerado; para fines de cálculo debe considerarse la no uniformidad del incremento de presión transmitida al estrato compresible.

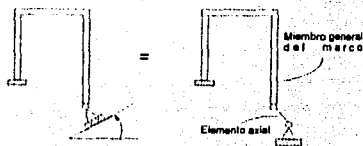
Un enfoque opcional es utilizar un método indirecto, empleando apoyos elásticos, lo que reduce el problema y lo hace considerablemente sencillo de implementar en un programa de computadora; el procedimiento es el siguiente:

- Imponer un desplazamiento en algún punto del claro o en un soporte. Si este se encuentra en el claro, debe incluirse otra junta en ese punto a la cual se fija un resorte y se aplica la carga orientada en dirección al resorte.

- El desplazamiento provocado por la carga requiere el conocimiento del total de rigideces de la estructura real, los cuales son posibles de ajustar; así como de la rigidez del resorte, que se debe de considerar mucho más grande que las rigideces de la estructura. Esta rigidez se puede proponer con cualquier magnitud.
- La determinación de la fuerza nodal que se concentrará en donde se localice el apoyo elástico del asentamiento diferencial, se obtiene mediante rigideces, puesto que se conoce que desplazamiento tendrá el asentamiento diferencial y ya se propuso la rigidez en el paso 2, entonces la fuerza se podrá obtener mediante la expresión: $F = K \cdot d$

III.12 Apoyos inclinados.

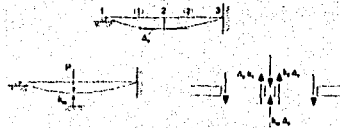
Quando un apoyo estructural permite movimiento en una dirección distinta de las direcciones globales del marco plano, no es posible eliminar el grado de libertad en ambas coordenadas X o Y.



Elementos sobre apoyos inclinados.

Uno de los métodos más comunes de representar el soporte inclinado es nuevamente mediante el uso de un método indirecto que consiste en agregar otro miembro a la estructura, orientado en forma perpendicular al plano de inclinación del apoyo. La selección de las propiedades del elemento se consideran de la siguiente forma:

- Se considera que el elemento será infinitamente rígido a la acción de fuerzas axiales, por lo que el área transversal de la sección de la barra se considerará infinita.
- El momento de inercia de la sección transversal de la barra se considerará casi nulo, por lo que existirá posibilidad de desplazamiento de acuerdo con las restricciones presentadas por el apoyo.

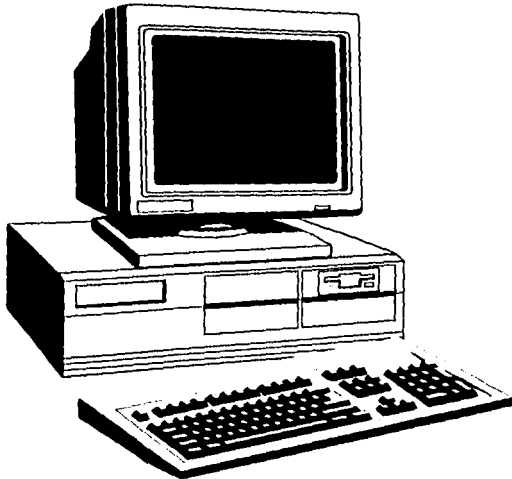


Desplazamientos prescritos.

Como resultado de este proceso se tendrá que en el nodo cuyo elemento que idealiza a la restricción tendrá un desplazamiento en X y en Y de acuerdo al apoyo restringido.

Capítulo IV:

DESARROLLO DE UN PROGRAMA PARA EL ANALISIS ESTRUCTURAL DE MARCOS PLANOS



Capítulo IV:

Desarrollo de un programa para el Análisis Estructural de Marcos Planos

IV.1 Descripción de variables del programa.

- Datos Generales.
- Datos de Nodos.
- Datos de Barras.
- Datos de secciones constante tipo.
- Datos de secciones variables tipo.
- Datos de materiales tipo.
- Datos de conectividades tipo.
- Datos de apoyos elásticos.
- Datos de fuerzas externas en nodos.
- Datos de fuerzas externas en barras.

IV.2 Determinación de parámetros globales.

- Desplazamientos globales.
- Restricciones o apoyos en marco plano.
- Fuerzas externas totales en nodos.
- Ensamble de vector de fuerzas externas debido a cargas nodales.

IV.3 Ensamble de la matriz de rigidez global del marco plano.

- Determinación del ancho de banda en matriz de rigidez global.
- Ensamble de apoyos elásticos en matriz de rigidez global.
- Para cada elemento barra:

- Determinar matriz de rigidez $[K]$ global de la barra.
- Ensamblar la matriz KGB en matriz KGE .
- Cargar la barra y transmitir sus acciones al vector de fuerzas externas.
- Determinar sumatoria de acciones en la barra.

IV.4 Factorización de la matriz de rigidez global del marco plano.

IV.5 Solución al sistema $[K] \{d\} = \{F\}$: usando algoritmo LDLT.

- Solución progresiva: $[L] \{Z\} = \{F\}$.
- Solución regresiva: $\{L\}^T \{d\} = \{Z\} [D]^{-1}$.

IV.6 Determinación e impresión de resultados.

- Imprimir resultados de desplazamientos.
- Imprimir fuerzas internas en barras; para cada barra:
 - Determinar $\{P\} = [K] \{d\}$.
 - Determinar reacciones en barras cargadas.
 - Calcular reacciones de la estructura.
- Imprimir fuerzas internas en apoyos elásticos (resortes).
- Imprimir reacciones en los apoyos.
- Imprimir equilibrio de fuerzas externas-internas.
- Fin: Eliminar arreglos dinámicos, cerrar archivos de lectura y escritura.

IV.1 Descripción de variables del programa.

Todas las variables se leen secuencialmente de un archivo ASCII (INP) y son asignadas a las variables del programa que a continuación se describen. Todas las variables dimensionadas deben de utilizar unidades de medición homogéneas entre sí para evitar errores numéricos, se recomienda usar el sistema de medición que se emplea en el manual del usuario del Apéndice C, así como las unidades que se emplean en ésta descripción de variables.

Los índices de los arreglos de todas las variables del programa se manejan internamente con origen en 0 y los arreglos externos (empleados por el usuario) con origen en 1. Esto se hace por convenciones comúnmente usadas en Lenguaje C++.

Las fuerzas externas para efectos del programa se dividen en fuerzas aplicadas en nodos y fuerzas aplicadas sobre barras. Por convención todas las fuerzas deben de ser aplicadas como acciones (carga/nodo o carga/barra).

Para poder verificar que los datos sean suministrados correctamente se guardan después de que son leídos del archivo INP en un archivo de salida llamado OUT, dicho archivo sirve también para almacenar los resultados generados por MARPLA.

IV.1.1 Datos Generales.

Son los datos que definen las propiedades geométricas y mecánicas de la estructura a analizar. En estos datos también se incluyen las fuerzas externas nodales y fuerzas sobre las barras que actúan sobre la estructura. Estas variables son unidimensionales y básicas porque dimensionan a todos los arreglos definidos en el programa. Los significados que tienen estas variables son:

NND	Número de elementos nodo que definen al marco plano, incluyendo nodos con algunas restricciones al desplazamiento.
NEL	Número de elementos barra que constituyen al marco plano.
NCO	Número de secciones transversales constantes tipo en barras.
NVA	Número de secciones transversales variables tipo en barras.
NMA	Número de materiales tipo en barras.

NCB	Número de conectividades tipo en barras.
NRS	Número de apoyos elásticos lineales tipo en nodos.
NNC	Número de elementos nodo cargados con fuerzas externas puntuales. En un mismo nodo pueden existir varias cargas puntuales. Si el nodo cargado tiene restricciones al desplazamiento, la carga puntual lo toma la restricción (apoyo) sin afectar a la estructura.
NBC	Número de elementos barra cargadas mediante fuerzas puntuales o uniformemente distribuidas. Estas fuerzas pueden actuar simultáneamente sobre la barra.

IV.1.2 Datos de Nodos.

En este proceso se inicializan y dimensionan arreglos bidimensionales que contienen la información de la localización y desplazamientos en los elementos nodo. Estos arreglos son asignados a las siguientes variables:

XYND	Arreglo bidimensional que contiene la ubicación del nodo mediante coordenadas cartesianas sobre los ejes globales del marco plano. El arreglo XYND[0] contiene la coordenada en X y el arreglo XYND[1] contiene la coordenada en Y. El orden del arreglo es (2,NND).
GLND	Arreglo bidimensional que contiene las restricciones al desplazamiento de los nodos. El orden de éste arreglo es (3,NEL).

IV.1.3 Datos de Barras.

Los características de los elementos barra están representadas en un arreglo bidimensional llamado BARR (6,NEL). Este arreglo contiene los siguientes datos para cada elemento barra:

BARR[0]	Nodo origen que define la dirección de la barra [1..NND]
BARR[1]	Nodo destino que define la dirección de la barra [1..NND].
BARR[2]	Tipo de sección transversal de la barra. Este tipo puede ser: constante o variable [0..1].

- BARR[3] Número de sección tipo en la barra [1..NCO ó 1..NVA].
- BARR[4] Tipo de material en la barra [1..NMA].
- BARR[5] Tipo de conectividad en la barra [1..NCB].

IV.1.4 Datos de secciones constante tipo.

La definición del arreglo bidimensional de las secciones tipo se llama CONS (5,NCO). Mediante éste tipo de sección se pueden representar las secciones más comúnmente usadas en la Ingeniería estructural. Los datos de este arreglo son los siguientes:

- CONS[0] Área transversal de la sección en la barra [m²].
- CONS[1] Momento de inercia alrededor del eje Z en la barra [m⁴].
- CONS[2] Factor de forma de la sección transversal []. Este factor generalmente no es calculado, se puede eliminar si no se desea considerar los esfuerzos cortantes sobre la barra.
- CONS[3] Zona infinitamente rígida a partir del nodo origen [m]. Mediante esta zona se pueden considerar muros de cortante y zonas rígidas del nodo.
- CONS[4] Zona infinitamente rígida a partir del nodo destino [m]. Mediante esta zona se pueden considerar muros de cortante y zonas rígidas del nodo.

IV.1.5 Datos de secciones variables tipo.

El arreglo bidimensional que contiene las flexibilidades angulares que definen a los distintos tipos de secciones variables se llama VARI (4,NVA). En función de estas flexibilidades el programa determina las rigideces angulares de la sección variable. Estas flexibilidades de barra se obtienen integrando las ecuaciones (III.23 - III.28). Los datos que contiene este arreglo son los siguientes:

- VARI[0] Flexibilidad a esfuerzos axiales f11 [m/T].
- VARI[1] Flexibilidad a esfuerzos flexo-cortantes f22 [m/T].
- VARI[2] Flexibilidad a esfuerzos flexo-cortantes f33 [1/Tm].
- VARI[3] Flexibilidad a esfuerzos flexo-cortantes f23 [1/T].

IV.1.6 Datos de materiales tipo.

En el desarrollo del análisis estructural se considera que todas las barras van a ser homogéneas. Solo las secciones constantes pueden tener un tipo de material, las secciones variables tienen las propiedades mecánicas del material en forma implícita mediante las flexibilidades. Las características de los materiales tipo están contenidas en el arreglo MATE (2,NMA). Este arreglo cuenta con las siguientes características:

MATE[0] Módulo de Elasticidad [T/m²].
MATE[1] Módulo de Poisson [].

IV.1.7 Datos de conectividades tipo.

Las conectividades son las restricciones al desplazamiento locales que se le pueden asignar a las barras. Mediante esta característica se pueden articular las barras en sus extremos. Para definir una conectividades el programa define el siguiente arreglo TCON (6,NCB). El arreglo mantiene las siguientes características:

TCON[0] Restricción al desplazamiento sobre el eje X en nodo origen.
TCON[1] Restricción al desplazamiento sobre el eje Y en nodo origen.
TCON[2] Restricción al desplazamiento alrededor del eje Z en nodo origen.
TCON[3] Restricción al desplazamiento sobre el eje X en nodo destino.
TCON[4] Restricción al desplazamiento sobre el eje Y en nodo destino.
TCON[5] Restricción al desplazamiento alrededor del eje Z en nodo destino.

IV.1.8 Datos de apoyos elásticos.

Los apoyos elásticos deben de ser asignados a nodos con posibilidad de desplazamiento, de lo contrario la rigidez del apoyo elástico no se acopla a la rigidez global del marco plano. Estos apoyos elásticos son idealizados como elementos elástico lineal. El arreglo bidimensional que define a éstos apoyos es MRES (3,NRS) y es asignado a un arreglo unidimensional que contiene a los nodos con dichos apoyos llamado VRES (1,NRS). Estos arreglos son definidos por:

VRES Contiene a los nodos con apoyos elásticos [1..NRS].
MRES[0] Rigidez traslacional en eje X [T/m].
MRES[1] Rigidez traslacional en eje Y [T/m].
MRES[2] Rigidez rotacional alrededor del eje Z [T/rad].

IV.1.9 Datos de fuerzas externas en nodos.

Las cargas sobre los nodos son cargas puntuales y sus vectores deben de ser paralelos al sistema coordenado cartesiano del marco plano. Para efectos del programa las fuerzas externas nodales no se requiere que sean guardadas en un arreglo, ya que solo es necesario que estas fuerzas se ensamblen directamente al vector de fuerzas externas que carga el marco plano.

IV.1.10 Datos de fuerzas externas en barras.

Las fuerzas externas sobre barras deben de estar referidas al sistema coordenado local de la barra. Si la barra a cargar tiene zonas rígidas, entonces la longitud a cargar es la zona que no presenta ninguna zona rígida. Para cargar y después verificar correctamente los elementos mecánicos de la barra se debe de tener en cuenta la topología de la barra (dirección). La dirección de la carga uniformemente distribuida y la carga puntual son perpendiculares al eje principal de la barra, por lo que para poder analizar cargas inclinadas se deben de combinar dichas cargas.

Los datos de las fuerzas externas en barras son necesarios para ensamblar el vector de fuerzas externas y para obtener los elementos mecánicos de la barra, por lo que es necesario guardar dichos datos en los arreglos bidimensionales BCI (2,NBC) y BCF (3,NBC). Estos arreglos contienen los siguientes datos:

BCI[0] Número de la barra a ser cargada.
BCI[1] Tipo de carga (0:uniforme y 1:puntual).

Para carga uniforme:

BCF[0] Magnitud de la carga uniformemente distribuida [T/m].
BCF[1] Zona sin carga uniforme a partir del nodo origen [m].
BCF[2] Zona sin carga uniforme a partir del nodo destino [m].

Para carga puntual:

BCF[0]	Magnitud de la carga puntual [T].
BCF[1]	Distancia de la carga a partir del nodo origen [m].
BCF[2]	Dato sin utilizar, debe de tener el valor cero.

IV.2 Determinación de parámetros globales.

IV.2.1 Desplazamientos globales.

Los desplazamientos nodales que presenta el marco plano a analizar se cuantifican en función de los grados de libertad que tiene cada nodo de la estructura. Se le asigna un número de grado de libertad en función de la numeración consecutiva de los nodos, si el nodo presenta restricciones no se le asigna número.

El siguiente algoritmo determina el número de desplazamientos de la estructura (NDS), y asigna un número de grado de libertad al desplazamiento posible del nodo (GLND), si se encuentra restringido asigna un valor de -1.

```
for(NDS=i=0; i<NSD; i++)
  for(j=0; j<3; j++) GLND[{}][j] = {GLND[{}][j]} ? -1 : NDS++;
```

IV.2.2 Restricciones o apoyos en nodos.

El programa MARPLA calcula las fuerzas internas que se presentan en los apoyos de la estructura, para determinar éstas fuerzas internas se requiere del número de nodos con apoyos (NAP) que se presentan en el marco plano. Este conteo se realiza mediante el algoritmo siguiente:

```
for(NAP=i=0; i<NSD; i++) {
  for(j=0; j<3; j++) If{GLND[{}][j]}<0 { NAP++; break; }
}
```

IV.2.3 Fuerzas externas totales en nodos.

Estas fuerzas se utilizan como auto comprobación de MARPLA, al comparar las acciones directas de las fuerzas en nodos y barras con las reacciones generadas en los apoyos del marco plano. Mediante este proceso se asegura el equilibrio que comprueba al método de las rigideces.

Se realiza una sumatoria directa de las fuerzas sobre los nodos en las variables FACX y FACY que contienen las fuerzas totales en dirección X y Y respectivamente. A continuación se representa éste proceso:

```
FACX=FACY=0.0;
for(i=0;i<NRC;i++) {
    fscanf(INP,"%d%lf%lf%lf", &NOD, &FND[0], &FND[1], &FND[2]);
    fprintf(OUT, "%d %d %d %d %d %d %d %d\n", NOD, FND[0], FND[1], FND[2]);
    FACX += FND[0]; // Fx de nodo NOD.
    FACY += FND[1]; // Fy de nodo NOD.
}
```

IV.2.4 Ensamble de vector de fuerzas externas debido a cargas nodales.

El vector de fuerzas externas se compone de fuerzas concentradas sobre los nodos, por este motivo las fuerzas sobre los nodos se ensamblan directamente a su correspondiente grado de libertad en el vector de fuerzas externas. Posteriormente se agregaran las fuerzas sobre las barras.

Un mismo nodo se puede cargar varias veces con distintas fuerzas puntuales. Mediante el siguiente proceso se muestra como se ensamblan las fuerzas externas.

```
// Asignación de memoria dinámica a vector de fuerzas externas.
FEXT = new double [NDS];
// Inicializa el vector.
for(i=0;i<NDS;i++) FEXT[i]=0.0;
// Ensambla el vector de fuerzas externas con cargas nodales.
for(i=0;i<NRC;i++) {
    fscanf(INP,"%d%lf%lf%lf", &NOD, &FND[0], &FND[1], &FND[2]);
    NOD--;
    for(j=0;j<3;j++)
        if((aux=GLND[j][NOD])!= -1) FEXT[aux]+=FND[j];
}
```

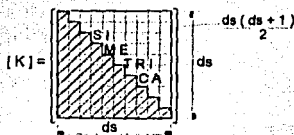
IV.3 Ensamble de la matriz de rigidez global del marco plano.

IV.3.1 Determinar ancho de banda en matriz de rigidez global.

Para administrar los recursos de velocidad y memoria existentes en las computadoras en forma óptima se eliminan todos los datos redundantes o innecesarios de la matriz de rigidez global. Debido a que dicha matriz es simétrica y presenta algunas subzonas nulas fuera de la vecindad de la diagonal; es posible crear un algoritmo que pueda representar a la matriz con éstas características.

El algoritmo empleado por MARPLA es el de matriz bandeada, mediante este proceso la matriz de rigidez; se ensambla, factoriza y resuelve. Por lo que los algoritmos aquí presentados se han modificado para que cumplan con la forma bandeada del método.

La matriz $[K]$ en forma bandeada puede contar con submatrices nulas y con un ancho de banda como lo muestra la siguiente figura:



Generalmente no se realiza una optimización en la reducción del ancho de banda, en MARPLA no se hace esto debido a que dicha optimización consume demasiado tiempo de ejecución y en algunos casos no se justifica. El usuario del programa se hace responsable de realizar sus conectividades en forma adecuada para reducir el ancho de banda. Si este proceso no se realizara el ancho de banda sería igual al número de desplazamientos y no habría ahorro en velocidad y memoria.

Para reducir el ancho de banda se recomienda numerar los elementos nodo de forma tal que la diferencia máxima entre el número de nodos relacionados entre sí por un elemento barra sea lo más pequeño posible.

El siguiente algoritmo determina el ancho de banda de la matriz de rigidez empleando para ello el arreglo de grados de libertad de nodos GLND, este ancho de banda

es representado por la variable NAB. En general lo que realiza este proceso es determinar los sub-anchos de banda de cada barra y el sub-ancho de banda mayor será el ancho de banda que regirá en toda la matriz de rigidez.

```
// Calcula el ancho de banda de la estructura (NAB).
NAB=0;
for(i=0;i<NEL;i++) {
  na = BARR[0][i];
  nb = BARR[1][i];
  if(na>nb) { aux=na; na=nb; nb=aux; }
  mina = minb = maxa = maxb = -1;
  for(j=0;j<3;j++) if(GLND[j][na]>0) { mina=GLND[j][na]; break; }
  for(j=2;j>=0;j--) if(GLSD[j][nb]>0) { maxb=GLND[j][nb]; break; }
  aux = maxb - mina + 1;
  if (mina==1) { // Nodo-A empotrado.
    for(j=0;j<3;j++) if(GLSD[j][nb]>0) { minb=GLSD[j][nb]; break; }
    aux = maxb - minb + 1;
  }
  if (maxb==1) { // Nodo-B empotrado.
    for(j=2;j>=0;j--) if(GLND[j][na]>0) { maxa=GLND[j][na]; break; }
    aux = maxa - mina + 1;
  }
  if (aux > NAB) NAB = aux;
}
}
```

IV.3.2 Ensamblar apoyos elásticos en matriz de rigidez global.

Los apoyos elásticos, representados por resortes se ensamblan directamente a la matriz de rigidez global, sumándole las rigideces del resorte al coeficiente de rigidez de la estructura en la dirección del resorte. Esto significa que se suma la rigidez del resorte al término de la diagonal principal correspondiente al grado de libertad del resorte, los cuales pueden ser lineales o angulares. A continuación se representa éste proceso:

```
if(NRS) {
  for(i=0;i<NRS;i++)
    for(j=0;j<3;j++) {
      aux = GLND[j][VRES[i]]+1;
      if(!((aux<0 || NRES[i][i]==0.0)) KGE[NAB*aux-1]+NRES[j][i]);
    }
}
}
```

IV.3.3 Para cada elemento barra.

A continuación se procede a la descripción de los procesos generales de subrutinas realizadas para cada elemento barra:

IV.3.3.1 Determinar matriz de rigidez $[K]$ global de la barra.

En este proceso se ensambla la matriz triangular inferior de la matriz global de rigidez $[K]$ en forma bandeada, con orden (ds,ab).

```
na = BARR[0][i];
nb = BARR[1][i];
RIG_BARRA(1,na,nb,i);
GLBR[0]=GLSD[0][na];GLBR[1]=GLSD[1][na];GLBR[2]=GLSD[2][na];
GLBR[3]=GLSD[0][nb];GLBR[4]=GLSD[1][nb];GLBR[5]=GLSD[2][nb];
```

IV.3.3.2 Ensamblar la matriz KGB en matriz KGE.

Durante este proceso, se superponen las matrices de rigidez adaptada de cada barra i ($[KGB]$), con la matriz de rigidez global de la estructura $[KGE]$, la cual se describe de la siguiente manera:

```
// Ensambla matriz barra KGB a matriz estructura KGE.
for(j=0;j<6;j++) {
  if((COL-GLBR[j])!=-1) continue;
  COL++;
  for(k=j;k<6;k++) {
    if((REN-GLBR[k])!=-1) continue;
    REN++;
    if(COL<REN) KGE[RES*NAB+COL-REN]+KGB[j][k];
    else KGE[COL*NAB+REN-COL-1]+KGB[j][k];
  }
}
```

IV.3.3.3 Cargar la barra y transmitir sus acciones al vector de T fuerzas externas.

Las fuerzas externas son introducidas como acciones, de acuerdo a sus características (uniforme, variable, puntual), así como rotaciones en la posición que ocupan en el marco plano y sentido que actúan referidas al sistema coordenado global.

```
// Ensambla fuerzas externas de las barras cargadas (F*B/A).
for(j=0;j<NBC;j++) {
  if (BCI[0][j]==1) {
    switch (BCI[1][j]) {
      case 1: CARGA_USIFORME (j); break;
      case 2: CARGA_PUNTUAL (j); break;
    }
  }
}
```

```

        default: P{0}=P{1}*P{2}*P{3}=0.0;
    }
    FF{0} = P{0} * SN;
    FF{1} = -P{0} * CS;
    FF{2} = -P{1};
    FF{3} = P{2} * SN;
    FF{4} = -P{2} * CS;
    FF{5} = -P{3};
    for(k=0;k<6;k++)
        if((aux=GLBR{k})>=0) FEXT{aux}+=FF{k};

    // Sumatoria de ACCIONES en barras.
    FACK += FF{0}*FF{3};
    FACY += FF{1}*FF{4};
}
}

```

IV.3.3.4 Determinar sumatoria de acciones en la barra.

Cuando existan desplazamientos en el nodo A o en el nodo B, se procede al cálculo del número de desplazamientos correspondiente en la numeración global, de los cuales se superpone la columna y el renglón correspondiente en la matriz [K].

Si no existen posibilidades de desplazamiento en los extremos de la barra i, entonces la matriz de la barra calculada [MRA] no alteran a la matriz [K] de la estructura. Esto se puede observar en el algoritmo anterior.

IV.4 Factorización de la matriz de rigidez global del marco plano.

La matriz [K] bandeada, fue linealizada para optimizar el empleo de los punteros, los cuales aceleran aun más la velocidad del método de *Cholesky*.

Al linealizar la matriz [K], se modifican todos los algoritmos referentes a ella, de tal forma que consideran dicha linealización. Los algoritmos mayormente beneficiados por la modificación son los algoritmos del ensamble de la matriz [K] y el método de *Cholesky*. A continuación se enuncia este proceso:

```

p0=KGE*NAB-1;
for(i=0;i<NDS;i++) {
    AUX1={i+1-NAB*0}?:i+1-NAB;

```

```

for(j=AUX1;j<=i-1;j++) {
  p1=p0*NAB+1-i*AUX1;
  p2=p0*NAB+j-i*AUX1;
  sum=0;
  for(k=AUX1;k<=j-1;k++)
    sum+=*(p0+k*SAB)**p1+**p2++;
  AUX2=NAB+j-i-1;
  KGE[i*NAB+AUX2] = (KGE[i*NAB+AUX2]-sum)/KGE[j*NAB+NAB-1];
}
sum=0;
p1=p0*NAB+1-i*AUX1;
for(j=AUX1;j<=i-1;j++)
  sum+=*(p0+j*NAB)**p1**p1++;
KGE[i*NAB+NAB-1]-=sum;
}

```

IV.5 Solución al sistema $[K] \{d\} = \{F\}$: usando algoritmo LDLT.

El método utilizado para la obtención de la solución del sistema de ecuaciones resultante, es el método de *Cholesky*. Este método aprovecha la factorización de la matriz $[K]$ en dos matrices: $[L][L]^T$, mediante las cuales se simplifica la solución de ecuaciones simultáneas empleando las ventajas de las matrices triangulares.

IV.5.1 Solución progresiva: $[L] \{Z\} = \{F\}$.

La obtención de la solución complementaria $\{Z\}$ se consigue resolviendo la ecuación $[L]\{Z\}=\{F\}$, la cual representa a una matriz triangular inferior, para lo cual es necesario realizar una sustitución progresiva. Esta sustitución progresiva se representa en el siguiente algoritmo:

```

p0=KGE+NAB-1;
for(i=0;i<SDS;i++) {
  AUX1=(i+1-NAB<0)?0:i+1-NAB;
  sum=0;
  p1=p0*NAB+1-i*AUX1;
  for(j=AUX1;j<=i-1;j++)
    sum+=*p1+**Z[j];
  Z[i]=FEXT[i]-sum;
}

```

IV.5.2 Solución regresiva: $[L][T^T(d)] = [Z][D]^T$.

Una vez encontrado el vector $[Z]$, se procede a la solución de la ecuación $[Z]=[L]^T(d)$ para obtener el vector (d) que representa a la solución general del sistema $[K](d)=[F]$. La obtención del vector (d) se realiza mediante una sustitución regresiva, debido a que la matriz $[L]^T$ es triangular superior.

```
for(i=NDS-1;i>=0;i--) {
  AUX1=(NAB+i)*NDS?NDS:NAB+i;
  sum=0;
  p1=p0+i;
  for(j=i-1;j<AUX1;j++)
    sum+=DESP[j]**(p1+j*NAB-j);
  DESP[i]=Z[i]/KGE[i*NAB+NAB-1]-sum;
}
```

IV.6 Determinación e impresión de resultados.

En este programa se cuenta con la opción de control de salida de resultados (OUTPUT), este control se efectúa mediante una variable de entrada (INPUT). Esta variable de decisión maneja las distintas posibilidades de salida de datos.

IV.6.1 Imprimir resultados de desplazamientos.

La impresión de los desplazamientos en los nodos obtenidos es de orden (3,NNND) y se realiza mediante la siguiente subrutina:

```
for(i=0;i<NND;i++) {
  for(j=0;j<3;j++)
    DS[j] = ((AUX1=GLND[j][i])?-1) ? DESP[AUX1] : 0;
  fprintf(OUT, "\n%04d  %11.6f  %11.6f  %11.6f", i+1, DS[0], DS[1], DS[2]);
}
```

IV.6.2 Imprimir fuerzas internas en barras; para cada barra.

Para la impresión de las fuerzas internas en barras resultante, de orden (4,NEL), se requiere la subrutina para la obtención de este vector. De las matrices y vectores que

definen la ecuación $\{P\} = \{K\}\{a\}\{d\}$, se requiere el conocimiento del vector de desplazamientos $\{d\}$, la matriz de rigidez $\{k\}$ y la matriz de continuidad $\{a\}$ de cada barra, las cuales fueron utilizadas implícitamente en la obtención de la matriz de rigidez acoplada de barra, por lo cual ya son conocidas.

```
// Imprime fuerzas internas en barras.
fprintf(OUT, "\n%04d  A-%04d  %11.6f  %11.6f  %11.6f*  1,1,na+1, FINT{0}, FINT{1}, FINT{2});
fprintf(OUT, "\n  B-%04d  %11.6f  %11.6f  %11.6f*  ,nb+1, FINT{3}, FINT{4}, FINT{5});
```

IV.6.2.1 Determinar $\{P\} = \{K\}\{d\}$.

El vector de fuerzas internas $\{P\}$ se determina para cada barra i , en función del siguiente producto matricial $\{P\} = \{K\}\{a\}\{d\}$, basado en el método de las rigideces.

Para obtener el vector de fuerzas internas $\{P\}$ de acuerdo a la ecuación anterior, se calcularían nuevamente: la matriz de rigidez de barra $\{K\}$ junto con su respectiva matriz de continuidad $\{a\}$, posteriormente realizar el producto matricial $\{K\}\{a\}\{d\}$. Este programa obtiene una forma matricialmente desarrollada (elemento a elemento) de cada uno de los componentes del vector $\{P\}$, por lo que numéricamente no se realiza ningún producto matricial, solo se substituyen los valores que definen a las matrices $\{k\}$ y $\{a\}$.

```
for(i=0; i<NEL; i++) {
  na = BARR[0][i];
  nb = BARR[1][i];
  RIG_BARRA[0,na,nb,1];
  for(j=0; j<3; j++)
    DS[j] = ((AUX1-GLND[j][na])?-1) ? DESP[AUX1] : 0;
  for(j=3; j<6; j++)
    DS[j] = ((AUX1-GLND[j-3][nb])?-1) ? DESP[AUX1] : 0;
  for(j=0; j<6; j++) {
    sum=0;
    for(k=0; k<6; k++) sum+=KA[j][k]*DS[k];
    FINT[j]=sum;
  }
}
```

IV.6.2.2 Determinar reacciones en barras cargadas.

La determinación de las reacciones en barras cargadas de orden (4,NBC), se realiza mediante el siguiente algoritmo:

```

for(j=0;j<NBC;j++) {
  if (BCI[0][j]==1) {
    case 1: CARGA_UNIFORME (j); break;
    case 2: CARGA_PUNTUAL (j); break;
    default: P[0]=P[1]=P[2]=P[3]=0.0;
    FINT[1]+=P[0];
    FINT[2]+=P[1];
    FINT[4]+=P[2];
    FINT[5]+=P[3];
  }
}

```

IV.6.2.3 Calcular reacciones de la estructura.

El calculo para la obtención de las reacciones de la estructura de orden (3,NAP), se realiza por equilibrio estático, como se observa en el siguiente algoritmo:

```

for(j=0;j<NAP;j++)
  if (na==VREA[j]) { REACCIONES(j,FINT[0],FINT[1],FINT[2]);break; }
for(j=0;j<NAP;j++)
  if (ab==VREA[j]) { REACCIONES(j,FINT[3],FINT[4],FINT[5]);break; }

```

IV.6.3 Imprimir fuerzas internas en apoyos elásticos (resortes).

La impresión de las fuerzas internas en los apoyos elásticos de orden (3,NRS), se realiza de manera similar a las reacciones de la estructura como se aprecia en su algoritmo.

```

if(NRS) {
  for(i=0;i<NRS;i++) {
    nr=VRES[i];
    P[0]=P[1]=P[2]=0;
    for(j=0;j<3;j++) if ((AUX1-GLND[j])(nr))>=0)
      P[j] = DESP[AUX1]*NRES[j][i];
    fprintf(OUT, "\t%14.6f\t%14.6f", nr+1, P[0], P[1], P[2]);
  }
}

```

IV.6.4 Imprimir reacciones en los apoyos.

La impresión de las reacciones en los apoyos se realiza mediante el control de salida de datos (OUTPUT), de orden (3,NAP). Esta controlada por una variable de entrada

(INPUT), la cual maneja diferentes posibilidades de salidas de datos.

```
// Imprime reacciones en los apoyos.
SFX=SFY=0.0;
for(i=0;i<NAP;i++) {
  fprintf(OUT,"%a%10.4d%14.6f%14.6f%14.6f",VREA[i]+1,MREA[0][i],MREA[1][i],MREA[2][i]);
  SFX+=MREA[0][i];
  SFY+=MREA[1][i];
}
```

IV.6.5 Imprimir equilibrio de fuerzas externas-internas.

El equilibrio de fuerzas externas-internas en su proceso de impresión se realiza mediante el algoritmo siguiente:

```
fprintf(OUT,"%aSUMA%14.6f%14.6f : Reacciones[apoyos]",SFX,SFY);
fprintf(OUT,"%aSUMA%14.6f%14.6f : Acciones (cargas)",FACX,FACY);
```

IV.6.6 Fin

Durante este proceso se procede a eliminar arreglos dinámicos, cerrar archivos de lectura y escritura; dando por concluido el proceso del programa. Esto se realiza como se aprecia a continuación.

```
for(i=0;i<2;i++) delete XYND[i];
for(i=0;i<3;i++) delete GLND[i];
for(i=0;i<6;i++) delete BARR[i];
for(i=0;i<2;i++) delete MATE[i];
if (NCD) for(i=0;i<5;i++) delete CONS[i];
if (SVA) for(i=0;i<4;i++) delete VARI[i];

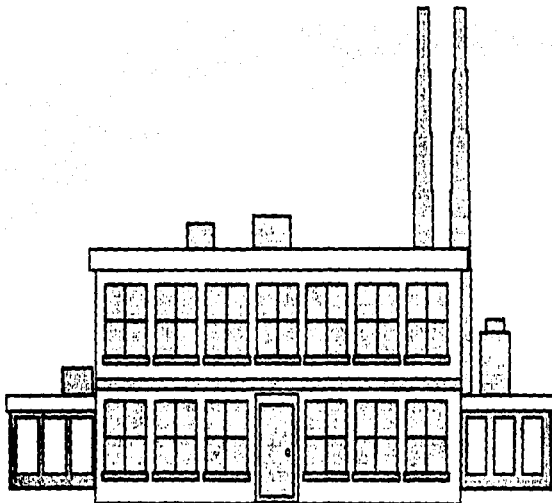
delete FEKT;
delete DESP;
delete Z ;
delete VREA;

for(i=0;i<3;i++) delete MREA[i];
if (SCB) for(i=0;i<6;i++) delete TCOS[i];
if (NRS) { for(i=0;i<3;i++) delete MRES[i]; delete VRES; }
if (NBC) { for(i=0;i<2;i++) delete BCI [i];
           for(i=0;i<3;i++) delete BCF [i]; }

delete NGE ;
```

Capítulo V:

CONCLUSIONES



Capítulo V: **Conclusiones**

Actualmente en México se cuenta con programas comerciales para el análisis estructural de marcos planos, dichos programas no están al alcance económico del estudiantado de Ingeniería Civil, por lo que MARPLA puede ser una herramienta necesaria para su formación académica.

En los últimos años los métodos analíticos se han extendido enormemente, se cuenta con sistemas de cálculo de sollicitaciones en modelos sumamente refinados de estructuras complejas. Pero no hay que olvidar, que lo que analizan estos métodos siguen siendo solo modelos o idealizaciones matemáticas de la estructura y sollicitaciones reales. Aunque parezca que estos métodos de análisis representen el fenómeno físico que se quiere estudiar, no hay que olvidar que por muy refinado que sean estos se debe de tener como mínimo los siguientes atributos:

- Tener sentido físico del problema que se está resolviendo.
- Determinar de manera adecuada los datos que alimentan al modelo.
- Contar con la sensibilidad para poder juzgar los resultados que se están obteniendo, si son o no realistas.

Con la evolución de programas de análisis estructural se ha desarrollado una especialidad de trabajo dentro de la Ingeniería, este trabajo lo realiza un personal dedicado a generar los datos básicos necesarios para los programas y sin tener una idea precisa del proceso que realizan éstos programas, se obtienen resultados que deben de ser interpretados y evaluados correctamente, para no caer en errores conceptuales.

El programa MARPLA tiene algunas limitaciones con respecto a otros programas comerciales, sin embargo tiene también algunas ventajas importantes. Entre las desventajas que no realiza se encuentran: diagramas de fuerzas internas, deflexión en las barras, varias condiciones y combinaciones de cargas, número limitado de secciones y tipos de cargas en las barras. Algunas de las ventajas que se tienen son: se puede obtener el programa completamente gratis, secciones variables, reacciones en los apoyos, velocidad en el análisis y entorno operativo de edición.

El trabajo aquí realizado puede tener continuidad en algún otro trabajo de tesis en Ingeniería Civil, esta extensión puede ser el complementario: diseño estructural, análisis de edificios o análisis de cargas. Esto se facilita ya que el programa utiliza archivos de datos como entrada y archivos de resultados en la salida, lo que permite una fácil comunicación con otros programas.

Se desarrolló en forma aislada el entorno operativo de MARPLA. Este entorno sirve para capturar los datos (INPUT) en forma secuencialmente ordenada, cuenta con: ayudas en línea, representación gráfica de los distintos elementos geométricos y mecánicos del marco plano, representación de fuerzas externas, conexión con MARPLA para realizar el análisis estructural y un EDITOR de datos. Todas estas características auxilian en el uso correcto del programa aquí desarrollado. Debido a que el desarrollo del EDITOR está fuera de los alcances del tema tratado, no se incluye el código fuente.

Hoy en día se tiene acceso a computadoras personales de gran eficiencia. Esto ha generado un nuevo grupo de ingenieros que desarrolla por sí mismo sus propias herramientas de análisis, dichas herramientas son programas de computadora para resolver problemas muy específicos que no pueden ser resueltos por programas comerciales de análisis. Debido a que MARPLA fue escrito en forma estructurada, algunos de sus procesos pueden ser reutilizados por personas interesadas en métodos y algoritmos numéricos del análisis estructural. El código fuente completo se encuentra en este trabajo. Para una mejor comprensión de este código fueron descritas algunas subrutinas importantes.

Este programa pertenece a la Universidad Nacional Autónoma de México y no debe ser usado con fines lucrativos. Puede ser distribuido gratuitamente a cualquier persona interesada en el análisis estructural de marcos planos, especialmente a alumnos de escuelas de ingeniería.

Apéndice A: *Nociones del Algebra Lineal*

Descripción de Matrices:

Debido a que todas las estructuras hiperestáticas están gobernadas por sistemas de ecuaciones lineales, los métodos de análisis estructural convencionales representan las propiedades de sistemas estructurales mediante matrices, aplicando las operaciones respectivas para su solución.

Matriz:

Es una disposición rectangular de elementos, la cual se encierra entre corchetes o paréntesis rectangulares para indicar que pertenecen a una matriz.

Pueden denotarse por una literal mayúscula entre corchetes, los cuales pueden omitirse si no hay peligro de confusión o ambigüedad.

Los elementos o coeficientes de la matriz se representan por una letra mayúscula con dos subíndices; el primero indica la fila o el renglón y el segundo la columna o hilera, en la posición que ocupan los elementos en la disposición matricial. El elemento de una matriz A, en la i-ésima fila y la j-ésima columna, se representa por la notación

a_{ij} .

$$[A]_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(A.1)

El orden de una matriz se refiere a su tamaño. Una que contenga m filas y n columnas, se denomina matriz $m \times n$, y se especifica primero el número de filas.

Matriz Cuadrada:

Es la matriz que cuenta con un número idéntico de filas que de columnas. De orden $m = n$.

$$\{ A \}_I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Vector Columna:

Son aquellas matrices con una sola columna, y son del orden $m \times 1$.

$$\{ A \}_I = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Matriz Simétrica:

Es una matriz cuadrada con elementos iguales colocados simétricamente con respecto a su diagonal principal; es decir, el elemento $a_{ij} = a_{ji}$, la cual no cambia al ser transpuesta.

$$[A]_i = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

Matriz Diagonal:

Es aquella matriz cuadrada cuyos elementos son nulos, excepto los que se encuentran en la diagonal principal (en las posiciones a_{ij} , con $i=j$). Esta línea se forma a partir del elemento superior izquierdo oblicuamente hasta el elemento inferior derecho.

$$[A]_i = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

Matriz Triangular:

Es un sistema equivalente, obtenida de la eliminación Gaussiana de un sistema $A \times b$, simplificando; puede ser triangular superior o triangular inferior.

La Matriz Triangular Superior es aquella con coeficientes nulos debajo de la diagonal principal; y la Matriz Triangular Inferior cuenta con coeficientes nulos arriba de la diagonal principal.

$$[A]_f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Matriz Transpuesta:

Se obtiene intercambiando los renglones por columnas y viceversa, se denota por A^T ; es decir la matriz A de $m \times n$ tiene como transpuesta a A^T de $n \times m$.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad [A]^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Matriz Unitaria o Identidad:

Es una matriz cuadrada de tipo diagonal, cuyos elementos en la diagonal principal en su totalidad son iguales a la unidad, y el resto son nulos. Se denota principalmente por I , desempeñando en algebra matricial la misma función que la unidad en algebra ordinaria.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 1, & i=j; \\ a_{ij} &= 0, & i \neq j \end{aligned}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.8)$$

Matriz Positiva Definita:

Es aquella Matriz Simétrica $[A]$, de orden $n \times n$ con todos los elementos de la diagonal de la matriz mayores que cero y que cumple con las siguientes condiciones:

- $X^T A X > 0$, para todos los vectores x distintos de cero.
- Todos los valores propios de A satisfacen $\lambda_i > 0$.
- Todas las submatrices A_k tienen determinantes positivos.
- Todos los pivotes (sin intercambio de filas) satisfacen $d_i > 0$.

Multiplicación de matrices:

Dos Matrices A_{ij} y B_{jk} , pueden multiplicarse, siempre y cuando el número de columnas de A sea igual al número de renglones de B .

$$[A]_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad [B]_i = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \quad (A.9)$$

Los renglones de la premultiplicadora $a(i,j)$, son multiplicados por la columna de la postmultiplicadora $b(j,k)$, dándonos como resultado una matriz con el mismo número de renglones de la premultiplicadora y columnas de la postmultiplicadora; es decir, una matriz $d(i,k)$.

$$[D]_i = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (A.10)$$

Método LDLT:

Se trata de un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales simétricos, mediante la factorización simétrica de la matriz. Este método es considerado como uno de los más eficientes que se aplican y adaptan en el análisis estructural matricial de sistemas reticulares y elementos finitos.

El método LDLT consiste en:

- Factorizar una matriz simétrica [K] como el siguiente producto:

$$[K] = [L][D][L]^T \quad (A.11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & l_{13} & l_{14} & l_{15} \\ 0 & 1 & l_{23} & l_{24} & l_{25} \\ 0 & 0 & 1 & l_{34} & l_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [K] \quad (A.12)$$

La factorización se realiza mediante las siguientes sumatorias:

para:

$$i = 1, n$$

$$j = 1, i-1$$

$$L_{ij} = \frac{\left(K_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} D_m L_{im} L_{jm} \right)}{D_j} \quad (A.13)$$

$$D_i = K_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} D_j L_{ij}^2 \quad (A.14)$$

Donde:

[L] Matriz triangular inferior, cuyos elementos cumplen con:

$$l(i,j) = 1, i=j.$$

[D] Matriz diagonal con: $d(i,j) \neq 0, i=j.$

- Según el teorema de rigideces se sabe que:

$$[K] \{d\} = \{F\} \quad (\text{A.15})$$

- Substituyendo (A.15) en (A.11):

$$[L] \{D\} [L]^T \{d\} = \{F\} \quad (\text{A.16})$$

- Empleando una solución complementaria $\{Z\}$, se tiene:

$$\{Z\} = [D] \{ [L]^T \{d\} \} \quad (\text{A.17})$$

- Sustituyendo (A.17) en (A.16), se determina la variable $\{Z\}$:

$$[L] \{Z\} = \{F\} \quad (\text{A.18})$$

La solución a éste sistema se realiza mediante sustitución progresiva.

- Se obtiene la solución general $\{d\}$ al resolver la siguiente ecuación:

$$[L]^T \{d\} = [D]^{-1} \{Z\} \quad (\text{A.19})$$

La solución a éste sistema se realiza mediante sustitución regresiva.

Comprobación del método.

- Solución complementaria: $[L] \{Z\} = \{F\}$

Desarrollando la ecuación (A.18):

$$\begin{aligned} z_1 &= F_1 \\ l_{21}z_1 + z_2 &= F_2 \\ l_{31}z_1 + l_{32}z_2 + z_3 &= F_3 \\ l_{41}z_1 + l_{42}z_2 + l_{43}z_3 + z_4 &= F_4 \\ l_{51}z_1 + l_{52}z_2 + l_{53}z_3 + l_{54}z_4 + z_5 &= F_5 \end{aligned}$$

Despejando $\{Z\}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= F_1 \\ z_2 &= F_2 - l_{21}z_1 \\ z_3 &= F_3 - l_{31}z_1 - l_{32}z_2 \end{aligned}$$

$$z_4 = F_4 \cdot l_{31} z_1 \cdot l_{32} z_2 \cdot l_{34} z_3$$

$$z_5 = F_5 \cdot l_{31} z_1 \cdot l_{32} z_2 \cdot l_{33} z_3 \cdot l_{34} z_4$$

Generalizando el proceso para la solución complementaria:

$$Z_i = F_i - \sum_{m=1}^{i-1} v_{im} Z_m \quad (\text{A. 20})$$

■ Solución General:

Desarrollando la ecuación (A.19) se tiene:

$$d_1 \cdot l_{12} d_2 \cdot l_{11} d_1 \cdot l_{11} d_1 \cdot l_{11} d_5 = z_1 / D_1$$

$$d_2 \cdot l_{12} d_1 \cdot l_{12} d_1 \cdot l_{12} d_5 = z_2 / D_2$$

$$d_1 \cdot l_{14} d_1 \cdot l_{13} d_5 = z_3 / D_3$$

$$d_1 \cdot l_{14} d_5 = z_4 / D_4$$

$$d_5 = z_5 / D_5$$

Despejando { d }:

$$d_5 = z_5 / D_5$$

$$d_4 = z_4 / D_4 \cdot l_{14} d_5$$

$$d_3 = z_3 / D_3 \cdot l_{13} d_1 \cdot l_{13} d_1$$

$$d_2 = z_2 / D_2 \cdot l_{12} d_1 \cdot l_{12} d_1 \cdot l_{12} d_5$$

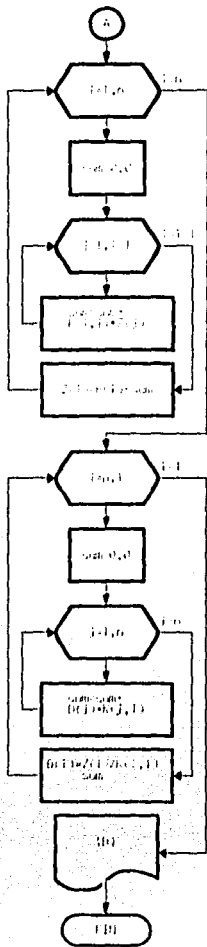
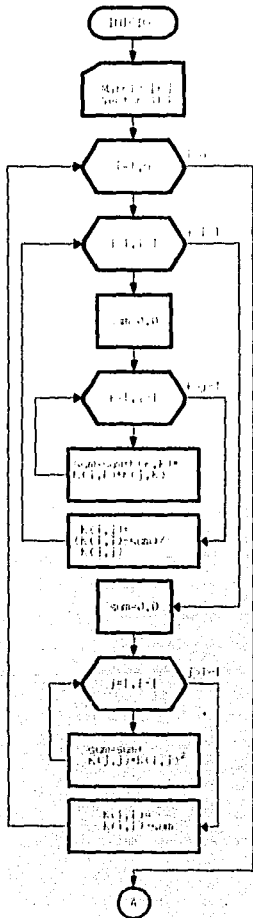
$$d_1 = z_1 / D_1 \cdot l_{11} d_5 \cdot l_{11} d_1 \cdot l_{11} d_1 \cdot l_{11} d_5$$

Generalizando el proceso:

$$d_i = \frac{Z_i}{D_i} - \sum_{j=1}^n v_{ji} d_j \quad (\text{A.19})$$

Desarrollo del programa de aplicación del método LDT:

Este programa fue desarrollado de acuerdo a la teoría anteriormente descrita. No considera el ancho de banda y no tiene las optimizaciones realizadas en el programa principal de MARPLA, ya que se realizó con el fin de representar al método de la forma más descriptiva posible, con fines didácticos.



Ejercicio 06

FALLA DE ORIGEN

El programa puede ser utilizado de forma aislada para resolver sistemas de ecuaciones positivas definidas o puede ser utilizado en otros programas de análisis estructural.

Los datos de entrada son los siguientes:

- Número de desplazamientos.
- Matriz simétrica $[K]$. Únicamente se introduce la matriz triangular inferior.
- Vector de constantes $\{F\}$.

Listado completo de programa auxiliar LDLT.C:

```
#include <conio.h>
#include <stdio.h>

void main(void) {

    float K[10][10],F[10],D[10],Z[10];
    float sum;
    int n,i,j,k;

    /* ENTRADA DE DATOS (INPUT) */
    clrscr();
    printf("\Numero de renglones:");
    scanf("%d",&n);
    printf("\nMatriz simetrica [ K ]\n");
    for(i=1;i<=n;i++)
        for(j=1;j<=i;j++) {
            printf("K[%2d,%2d] : ",i,j);
            scanf("%f",&K[i][j]);
        }
    printf("\nVector de fuerzas [ F ]\n");
    for(i=1;i<=n;i++) {
        printf("F[%2d] : ",i);
        scanf("%f",&F[i]);
    }

    /* FACTORIZACION DE MATRIZ [K] = [L][D][L]^T */
    for(i=1;i<=n;i++) {
        for(j=1;j<=i-1;j++) {
            sum=0;
            for(k=1;k<=j-1;k++)
                sum+=K[i][k]*K[j][k]*K[i][k];
        }
    }
}
```

```

    K[i][j] = (K[i][j]-sum)/K[i][j];
}
sum=0;
for(j=1;j<=i-1;j++)
    sum=K[i][j]*K[i][j]*K[i][j];
K[i][1]-=sum;
}

/* CALCULA SOLUCION COMPLEMENTARIA [L][Z]=F (SOLUCION PROGRESIVA) */
for(i=1;i<=n;i++) {
    sum=0;
    for(j=1;j<=i-1;j++)
        sum=K[i][j]*Z[j];
    Z[i]=F[i]-sum;
}

/* CALCULA SOLUCION GENERAL [L]^-1*d-[0]^-1*Z (SOLUCION REGRESIVA) */
for(i=n;i>=1;i--) {
    sum=0;
    for(j=i+1;j<=n;j++)
        sum=D[j]*K[j][i];
    D[i]=Z[i]/K[i][i]-sum;
}

/* IMPRIMIR SOLUCION GENERAL {d} (OUTPUT) */
printf("\nVector de Desplazamientos { d }\n");
for(i=1;i<=n;i++)
    printf("\nd[%2d] = %f",i,D[i]);
getch();

/* IMPRIME MATRIZ FACTORIZADA (OUTPUT) */
printf("\nMatriz Factorizada [ L ] [ D ]\n");
for(i=1;i<=n;i++)
    for(j=1;j<=i;j++)
        printf("\nL[%2d][%2d] = %f",i,j,K[i][j]);
getch();

/* IMPRIMIR SOLUCION COMPLEMENTARIA {Z} (OUTPUT) */
printf("\nVector de Solucion Complementaria { Z }\n");
for(i=1;i<=n;i++)
    printf("\nz [%2d] = %f",i,Z[i]);
getch();
}

```

Apéndice B:

Programa Fuente MARPLA

El programa fuente aquí descrito contiene ensambladas todas las subrutinas del programa original MARPLA versión 1.0. Este programa fue realizado en lenguaje C++ versión 2.0 y se compiló en Borland C++ versión 4.0 para DOS. Adjunto a ésta tesis se anexa un disco que contiene el código objeto del programa, así como el programa EDITOR y archivo de ejemplo.

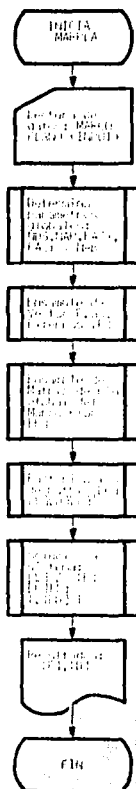
Todas las subrutinas están controladas en la subrutina main(), dicha subrutina controla el tráfico de información entre ellas.

El programa MARPLA, fue hecho con un enfoque de manera descendente; generándose para ello un código preciso, claro y legible. Esto simplifica su estructura general y de operación, minimizando el tiempo de análisis.

Esto quiere decir que este programa trabaja a partir de un concepto general del problema, hasta llegar a lo específico. Para esto debe definirse exactamente en los niveles superiores lo que debe realizar.

En la siguiente página se da un diagrama de bloques ilustrativo acerca de cada una de las funciones realizadas por MARPLA, así como el listado completo del programa.

Diagrama de bloques:



Listado completo del programa fuente MARPLA:

/* ***** PROGRAMA DE ANALISIS ESTRUCTURAL DE MARCOS PLASOS *****

Realiza: 01. Barras con esfuerzos: normales/cortantes/flexionantes.
02. Cargas en los nodos.
03. Cargas en las barras.
04. Conectividades en barra.
05. Apoyos elásticos.
06. Reacciones en los apoyos.
07. Barras de sección variable.
08. Muros de cortante.
09. Agregar las 2 primeras líneas de entrada como comentarios.
10. Agregar fecha y tiempo de ejecución.
11. Cambio de variables del programa a variables más representativas.
12. Compatibilidad de entrada y salida de datos con el editor MARPLA.
13. Comprueba equilibrio de fuerzas externas-internas, hace sumatoria de fuerzas externas (ACCIONES) y las comparárlas con las reacciones en apoyos (REACCIONES).
14. Separa para cada elemento tipo: SECCION y MATERIAL.
15. Archivos de entrada en línea.

Variables de elementos:

NND : Número de NODOS (SPN).
NEL : Número de ELEMENTOS.
NCO : Número de SECC.CONSTANTES.
NVA : Número de SECC.VARIABLES.
NMA : Número de MATERIALES.
NCB : Número de TIPOS de CONECTIVIDADES en BARRAS.
NRS : Número de RESORTES en NODOS.
NKC : Número de NODOS CARGADOS.
NBC : Número de BARRAS CARGADAS.
NDS : Número de DESPLAZAMIENTOS (NEC).
NAB : Número de ANCHO de BANDA (MB).
NAP : Número de NODOS con almenos una REACCION en su APOYO.

Variables de matrices:

RGE : Matriz de rigidez global de la estructura (RIGLO).
RLB : Matriz de rigidez local de la barra.
RGB : Matriz de rigidez global de la barra.
XYSD : Matriz de datos de coordenadas de nodos (X,Y).
GLSD : Vector de grados de libertad de nodos (INDI).
FEXT : Vector de fuerzas externas (P).
BARR : Matriz de información de barras.
TCOS : Matriz de conectividades tipo (ITCM).
COSS : Matriz de secc. constantes tipo.
VARI : Matriz de secc. variables tipo.
MATE : Matriz de materiales tipo.
MRES : Matriz de rigideces de apoyos elásticos en nodos (RES).
VRES : Vector de nodos con apoyos elásticos.

```

MREA :   Matriz de reacciones por apoyos.
VREA :   Vector de nodos con apoyos.
*/

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <dos.h>
#include <time.h>
#include <string.h>

FILE *INP,*OUT;
time_t t1,t2;
class MARCO {
double *XYND[2],*CONS[5],*VARI[4],*MATE[2],*MRES[3],*MREA[3],*BCF[3],*KGE,*FEXT,*DESP,*Z;
double KGB[6][6],A[6][6],KA[6][6],KAI[6][6],KLB[6][6],F[4];
double SN,CS,L,FACX,FACY;
int *GLND[3],*BARR[6],*BCI[2],*TCOS[6],*VRES,*VREA;
int NND,NEL,NCO,SVA,NMA,NCB,NRS,NXC,NBC,NAP,NAB,NDS;

void RIG_BARRA(int,int,int,int);
void CARGA_UNIFORME(int),CARGA_PUNTUAL(int);
void REACCIONES(int,double,double,double);
void KLB_CONSTANTE(int,int),KLB_VARIABLE(int);
public:
void DATOS(void),RIGIDECES(void),FACTORIZA(void);
void SOLUCION(void),RESULTADOS(void),FIS(void);
char arch[15];
};
int main(int argc,char *argv[]) {

MARCO A;

if(argc<2) return 0;
strcpy(A.arch,argv[1]);

gotoxy(1,1);  printf("[1] Lectura de datos ..... "); A.DATOS  (); printf("ok");
gotoxy(1,2);  printf("[2] Ensambla matriz de rigideces ... "); A.RIGIDECES (); printf("ok");
gotoxy(1,3);  printf("[3] Factoriza matriz de rigideces .. "); A.FACTORIZA (); printf("ok");
gotoxy(1,4);  printf("[4] Solución a sistema ..... "); A.SOLUCION (); printf("ok");
gotoxy(1,5);  printf("[5] Salida de resultados ..... "); A.RESULTADOS (); printf("ok");
gotoxy(1,6);  printf("[6] Fin de MARPLA ..... "); A.FIN (); printf("ok");

// Termina conteo del tiempo.
t2=time(NULL);
fprintf(OUT,"u\n\nTiempo empleado en ANALISIS .....%6.1f segs",difftime(t2,t1));
gotoxy(1,7);  printf("[7] Tiempo empleado en ANALISIS .... %6.1f segs",difftime(t2,t1));
fclose(OUT);

return 1;
}

```

```

void MARCO::DATOS(void) {

    int    i,j,aux,cont,NOD;
    double FND[3];
    char   linea1[80],linea2[80],fecha[50],aux1[15];
    struct date ff;
    char   mes[]={"enero","febrero","marzo","abril","mayo","junio","julio",
                "agosto","septiembre","octubre","noviembre","diciembre"};

    // Abrir archivos INPUT/OUTPUT:
    strcpy(aux1,arch);strcat(aux1, ".DAT");
    if(!ISP=fopen(aux1,"rt"))--NULL {
        printf("\n\n!!! Error en la lectura de datos !!!");
        getch();
        exit(0);
    }
    strcpy(aux1,arch);strcat(aux1, ".RES");
    if(!OUT=fopen(aux1,"wt"))--NULL {
        printf("\n\n!!! Error en la escritura de datos !!!");
        getch();
        exit(0);
    }

    // Inicia conteo del tiempo.
    ti=time(NULL);

    // Lectura de las 2 primeras lineas de comentarios de archivo INP.
    cont=0;while(!linea1[cont++]!=fgetc(ISP))!-10;linea1[--cont]=NULL;
    cont=0;while(!linea2[cont++]!=fgetc(ISP))!-10;linea2[--cont]=NULL;
    getdate(&ff);
    sprintf(fecha,"%d de %s de %d",ff.da_day,mes[ff.da_mon-1],ff.da_year);
    fprintf(OUT, "***** ANALISIS ESTRUCTURAL DE MARCOS PLANOS / %s *****", fecha);
    fprintf(OUT, "\n%s",linea1);
    fprintf(OUT, "\n%s\n",linea2);

    // Datos Generales:
    fscanf (ISP, "%d%d%d%d%d%d%d", &NND, &NEL, &NCO, &NVA, &NSA, &NCB, &NRS, &NWC, &NBC);

    fprintf(OUT, "\n-----");
    fprintf(OUT, "\n# NODOS ..... : %d", NND);
    fprintf(OUT, "\n# BARRAS ..... : %d", NEL);
    fprintf(OUT, "\n# SECC. CONSTANTES TIPO ..... : %d", NCO);
    fprintf(OUT, "\n# SECC. VARIABLES TIPO ..... : %d", NVA);
    fprintf(OUT, "\n# MATERIALES TIPO ..... : %d", NSA);
    fprintf(OUT, "\n# COSECTIVIDADES en BARRAS ..... : %d", NCB);
    fprintf(OUT, "\n# APOYOS ELASTICOS en NODOS ..... : %d", NRS);
    fprintf(OUT, "\n# NODOS CARGADOS ..... : %d", NWC);
    fprintf(OUT, "\n# BARRAS CARGADAS ..... : %d", NBC);
    fprintf(OUT, "\n-----");

    // Asignación de memoria dinámica.
    for(i=0;i<2;i++) XYSD[i] = new double [NND];
    for(i=0;i<3;i++) GLSD[i] = new int [NND];
}

```

```

for(i=0;i<6;i++) BARR[i] = new int  {NEL};
for(i=0;i<2;i++) MATE[i] = new double {NVA};
if {CONS} for(i=0;i<5;i++) CONS[i] = new double {NCO};
if {VARI} for(i=0;i<4;i++) VARI[i] = new double {NVA};

// Lectura de datos de NODOS:
fprintf(OUT, "\n\nDatos de NODOS:");
fprintf(OUT, "\n-----");
fprintf(OUT, "\nNOD0  Coord-X[m]  Coord-Y[m]  dx  dy  Yz");
fprintf(OUT, "\n-----");
SDS=NAP=0;
for(i=0;i<NSD;i++) {
  fscanf(INP, "%d", &aux);
  for(j=0;j<2;j++) fscanf(INP, "%lf", &XYND[j][i]);
  for(j=0;j<3;j++) fscanf(INP, "%d", &GLSD[j][i]);
  fprintf(OUT, "\n%04d%14.4f%14.4f  %3d  %3d  %3d", i+1,
    XYND[0][i], XYND[1][i], GLSD[0][i], GLSD[1][i], GLSD[2][i]);
  // Determina nodos con apoyos.
  for(j=0;j<3;j++) if(GLSD[j][i] { SAP++;break; }
  // Determina el número de DESPLAZAMIENTOS en la estructura (NDS).
  for(j=0;j<3;j++) GLSD[j][i] = (GLSD[j][i] ? -1 : SDS++);
}

// Asignación de memoria dinámica.
FEXT = new double {SDS};
DESP = new double {SDS};
Z = new double {NDS};
VREA = new int {SAP};
for(i=0;i<3;i++) HREA[i] = new double {NAP};

// Inicializa vectores.
for(i=0;i<NDS;i++) FEXT[i]-DESP[i]=Z[i]=0.0;

// Define que NODOS tienen reacciones en sus APOYOS.
aux=0;
for(i=0;i<NSD;i++)
  for(j=0;j<3;j++)
    if(GLSD[j][i]==-1) | VREA[aux++]=i; break; }
for(i=0;i<NAP;i++)
  for(j=0;j<3;j++) VREA[j][i]=0;

// Lectura de datos de BARRAS:
// 0 : Nodo origen A.
// 1 : Nodo final B.
// 2 : Tipo de SECCION.
// 3 : Número de SECCION.
// 4 : Tipo de MATERIAL.
// 5 : Tipo de COESISTIVIDAD.
fprintf(OUT, "\n\nDatos de ELEMENTOS BARRA:");
fprintf(OUT, "\n-----");
fprintf(OUT, "\nBARR nd-A nd-B tipo secc mate coes");
fprintf(OUT, "\n-----");
for(i=0;i<NEL;i++) |

```

```

scanf(INP, "%d", &aux);
for(j=0;j<6;j++) scanf(INP, "%d", &BARR[j][i]);
fprintf(OUT, "\n%04d %4d %4d %4d %4d %4d", i+1,
BARR[0][i], BARR[1][i], BARR[2][i], BARR[3][i], BARR[4][i], BARR[5][i]);
for(j=0;j<6;j++) BARR[j][i]--;
}

// Lectura de SECC. CONSTANTES TIPO:
if(NCO) {
printf(OUT, "\n\nSecc. constantes TIPO:");
printf(OUT, "\n-----");
printf(OUT, "\nSECC#      Area[m2]      lz[m4]      fy[]      ZH-A[m]      ZH-B[m]");
printf(OUT, "\n-----");
for(i=0;i<NCO;i++) {
scanf(INP, "%d", &aux);
for(j=0;j<5;j++) scanf(INP, "%lf", &COSS[j][i]);
fprintf(OUT, "\n%04d %12.5E %12.5E %5.2f %9.4f %9.4f", i+1,
COSS[0][i], COSS[1][i], COSS[2][i], COSS[3][i], COSS[4][i]);
}
fflush(OUT);
}

// Lectura de SECC. VARIABLES TIPO:
if(SVA) {
printf(OUT, "\n\nSecc. variables TIPO:");
printf(OUT, "\n-----");
printf(OUT, "\nSECC#      f11[]      f22[]      f33[]      f23[]");
printf(OUT, "\n-----");
for(i=0;i<SVA;i++) {
scanf(INP, "%d", &aux);
for(j=0;j<4;j++) scanf(INP, "%lf", &VARI[j][i]);
fprintf(OUT, "\n%04d %12.5E %12.5E %12.5E %12.5E", i+1,
VARI[0][i], VARI[1][i], VARI[2][i], VARI[3][i]);
}
fflush(OUT);
}

// Lectura de MATERIALES:
if(SMA) {
printf(OUT, "\n\nMateriales TIPO:");
printf(OUT, "\n-----");
printf(OUT, "\nMAT#      E[T/m2]      Mu[]");
printf(OUT, "\n-----");
for(i=0;i<SMA;i++) {
scanf(INP, "%d%lf%lf", &aux, &MATE[0][i], &MATE[1][i]);
fprintf(OUT, "\n%04d %12.5E %5.2f", i+1, MATE[0][i], MATE[1][i]);
}
fflush(OUT);
}

// Datos de TIPOS de COECTIVIDADES en BARRAS.
if(NCB) {
for(i=0;i<6;i++) TCOSS[i] = new int [NCB];
}

```

```

printf(OUT, "\n\nConectividades en BARRAS:");
printf(OUT, "\n-----");
printf(OUT, "\nCON#      dxA  dyA  YA      dxB  dyB  YB");
printf(OUT, "\n-----");
for(i=0; i<NCB; i++) {
    fscanf(INP, "%d", &aux);
    fscanf(INP, "%d%d%d", &YCON[0][i], &YCON[1][i], &YCON[2][i], &YCON[3][i], &YCON[4][i], &YCON[5][i]);
    printf(OUT, "\n%d      %d  %d  %d      %d  %d  %d", i+1,
        YCON[0][i], YCON[1][i], YCON[2][i], YCON[3][i], YCON[4][i], YCON[5][i]);
    }
    fflush(OUT);
}

// Datos de APOYOS ELASTICOS en NODOS.
if(NBS) {
    VRES = new int [NRS];
    for(i=0; i<3; i++) MRES[i] = new double [NRS];
    printf(OUT, "\n\nApoyos elasticos en NODOS:");
    printf(OUT, "\n-----");
    printf(OUT, "\nNOD#      Kx[T/m]      Ky[T/m]      Kz[T/rad]");
    printf(OUT, "\n-----");
    for(i=0; i<NBS; i++) {
        fscanf(INP, "%d", &VRES[i]); --VRES[i];
        fscanf(INP, "%f%f%f", &MRES[0][i], &MRES[1][i], &MRES[2][i]);
        printf(OUT, "\n%d%d%d14.4f14.4f14.4f", VRES[i]+1, MRES[0][i], MRES[1][i], MRES[2][i]);
    }
    fflush(OUT);
}

// Datos de fuerzas externas en NODOS.
FACX=FACY=0.0;
if(NNC) {
    printf(OUT, "\n\nCargas en NODOS:");
    printf(OUT, "\n-----");
    printf(OUT, "\nNOD#      Fx[T]      Fy[T]      Mz[T.m]");
    printf(OUT, "\n-----");
    for(i=0; i<NNC; i++) {
        fscanf(INP, "%d%f%f%f", &NOD, &FND[0], &FND[1], &FND[2]);
        printf(OUT, "\n%d%d%d14.4f14.4f14.4f", NOD, FND[0], FND[1], FND[2]);
        NOD--;
        for(j=0; j<3; j++)
            IF{(aux=GLSD[j][NOD])=-1} FEXT[aux] += FND[j];
        // Sumatoria de ACCIONES en nodos.
        FACX += FND[0];
        FACY += FND[1];
    }
    fflush(OUT);
}

// Datos de fuerzas externas en BARRAS.
if(NBC) {
    for(i=0; i<2; i++) BCI[i] = new int [NBC];

```



```

for(i=0;i<6;i++)
for(j=0;j<6;j++) A[i][j]=0.0;
A[2][2]=A[5][5]=1.0;

for(i=0;i<NEL;i++) {

// Obtener matriz KLB de la barra.
na = BARR[0][i];
nb = BARR[1][i];
RIG_BARRA[1,na,nb,1];
GLBR[0]=GLND[0][na];GLBR[1]=GLND[1][na];GLBR[2]=GLND[2][na];
GLBR[3]=GLND[0][nb];GLBR[4]=GLND[1][nb];GLBR[5]=GLND[2][nb];

// Ensambla fuerzas externas de las barras cargadas (F*(B/A)).
for(j=0;i<NBC;j++) {
if (BCI[0][j]==i) {
switch (BCI[1][j]) {
case 1: CARGA_UNIFORME (j); break;
case 2: CARGA_PUNTUAL (j); break;
default: P[0]=P[1]+P[2]+P[3]=0.0;
}
FF[0] = P[0] * SN;
FF[1] = -P[0] * CS;
FF[2] = -P[1];
FF[3] = P[2] * SN;
FF[4] = -P[2] * CS;
FF[5] = -P[3];
for(k=0;k<6;k++)
if((aux=GLBR[k])>=0) FEXT[aux]=FF[k];

// Sumatoria de ACCIONES en barras.
FACX += FF[0]+FF[3];
FACY += FF[1]+FF[4];
}
}

// Ensambla matriz barra KGB a matriz estructura KGE.
for(j=0;j<6;j++) {
if((COL=GLBR[j])>=1) continue;
COL++;
for(k=j;k<6;k++) {
if((REN=GLBR[k])>=1) continue;
REN++;
if(COL<REN) KGE[REN*SAB+COL-REN-1]+=KGB[j][k];
else KGE[COL*SAB+REN-COL-1]+=KGB[j][k];
}
}

// Ensamble de APOYOS ELASTICOS en matriz de estructura KGE.
if(SRS) {
for(i=0;i<NRS;i++)
for(j=0;j<3;j++) {

```



```

        aux = GLND[j][VRES[i]]+1;
        if(![aux<0 ] MRES[j][i]==0.0) KGE[NAB*aux-1]+=MRES[j][i];
    }
}

```

```

void MARCO::FACTORIZA(void) {

    double *p0,*p1,*p2,sum;
    register int i,j,k;
    int     AUX1,AUX2;

    // ***** FACTORIZACION DE MATRIZ [KGE] = [L][D][L]^T *****
    p0=KGE+NAB-1;
    for(i=0;i<NDS;i++) {
        AUX1=[i+1-NAB<0]?0:i+1-NAB;
        for(j=AUX1;j<i-1;j++) {
            p1=p0+NAB*1-i+AUX1;
            p2=p0+NAB*j-i+AUX1;
            sum=0;
            for(k=AUX1;k<j-1;k++)
                sum+=p0*k*NAB**p1***p2++;
            AUX2=NAB*j-i-1;
            KGE[i*NAB+AUX2] = (KGE[i*NAB+AUX2]-sum)/KGE[j*NAB+NAB-1];
        }
        sum=0;
        p1=p0+NAB*i-i+AUX1;
        for(j=AUX1;j<i-1;j++)
            sum+=p0*j*NAB**p1**p1++;
        KGE[i*NAB+NAB-1]-=sum;
    }
}

```

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

```

void MARCO::SOLUCIOS(void) {

    double *p0,*p1,sum;
    register int i,j;
    int     AUX1;

    // ***** CALCULA SOLUCION COMPLEMENTARIA [L][Z]={FEXT} {SOLUCIOS PROGRESIVA} *****
    p0=KGE+NAB-1;
    for(i=0;i<NDS;i++) {
        AUX1=[i+1-NAB<0]?0:i+1-NAB;
        sum=0;
        p1=p0+NAB*1-i+AUX1;
        for(j=AUX1;j<i-1;j++)
            sum+=p1**Z[j];
        Z[i]=FEXT[i]-sum;
    }

    // ***** CALCULA SOLUCION GENERAL [L]^T(d)=[D]^-1[Z] {SOLUCION REGRESIVA} *****
    for(i=NDS-1;i>=0;i--) {
        AUX1=[NAB-i>NDS]?NDS:NAB+i;
    }
}

```

```

sum=0;
pl=p0+i;
for(j=i+1;j<AUX1;j++)
    sum+=DESP[j]**(pl+j*SAB-j);
DESP[1]=Z[1]/NGE[1*SAB*SAB-1]-sum;
}
}

void MARCO::RESULTADOS(void) {

int i,j,k,AUX1,na,nb,or;
double DS[6],FINI[6],sum,SFX,SPV;

printf(OUT, "%n\n\nRESULTADOS:>");

// Desplazamientos.
printf(OUT, "%n\n\nDesplazamientos en NODOS:");
printf(OUT, "%n-----");
printf(OUT, "%nNOD# dx[m] dy[m] z[rad]");
printf(OUT, "%n-----");
for(i=0;i<NND;i++) {
    for(j=0;j<3;j++)
        DS[j] = ((AUX1-GLND[j][i])!=1) ? DESP[AUX1] : 0;
    printf(OUT, "%n%04d %11.6f %11.6f %11.6f", i+1, DS[0], DS[1], DS[2]);
}

// Fuerzas Internas en BARRAS:
printf(OUT, "%n\n\nFuerzas Internas en BARRAS:");
printf(OUT, "%n-----");
printf(OUT, "%nBARR# NOD# N[T] V[T] M[T.m]");
printf(OUT, "%n-----");

for(i=0;i<SEL;i++) {
    na = BARR[0][i];
    nb = BARR[1][i];
    RIC_BARRA[0,na,nb,i];
    for(j=0;j<3;j++)
        DS[j] = ((AUX1-GLND[j][na])!=1) ? DESP[AUX1] : 0;
    for(j=3;j<6;j++)
        DS[j] = ((AUX1-GLND[j-3][nb])!=1) ? DESP[AUX1] : 0;
    for(j=0;j<6;j++) {
        sum=0;
        for(k=0;k<6;k++) sum+=KA[j][k]*DS[k];
        FINI[j]=sum;
    }
}

// Fuerzas internas de las barras cargadas P*(A/B)
for(j=0;j<NBC;j++) {
    if (BCI[0][j]==1) {
        switch (BCI[1][j]) {
            case 1: CARGA_UNIFORME [j]; break;
            case 2: CARGA_PUNTUAL [j]; break;
            default: P[0]=P[1]=P[2]=P[3]=0.0;
        }
    }
}

```

```

        FINT[1]=P[0];
        FINT[2]=P[1];
        FINT[4]=P[2];
        FINT[5]=P[3];
    }
}

// Cálculo de REACCIONES.
for(j=0;j<NAP;j++)
    if((na==VREA[j]) { REACCIONES(j,FINT[0],FINT[1],FINT[2]);break; }
for(j=0;j<NAP;j++)
    if((nb==VREA[j]) { REACCIONES(j,FINT[3],FINT[4],FINT[5]);break; }

// Imprime fuerzas internas en barras.
fprintf(OUT,"%10d A-104d %11.6f %11.6f %11.6f",i+1,na+1,FINT[0],FINT[1],FINT[2]);
fprintf(OUT,"%10d B-104d %11.6f %11.6f %11.6f",nb+1,FINT[3],FINT[4],FINT[5]);
}

// Determina fuerzas internas en apoyos elásticos (resortes).
if(NRS) {
    fprintf(OUT,"\n\nFuerzas internas en apoyos elásticos de XODOS:");
    fprintf(OUT,"\n-----");
    fprintf(OUT,"%10d FxR[T] FyR[T] MzR[T.m]");
    fprintf(OUT,"\n-----");
    for(i=0;i<NRS;i++) {
        nr=VRES[i];
        P[0]=P[1]=P[2]=0;
        for(j=0;j<3;j++) if((AUX1=GLND[j][nr])>0)
            P[j] = DESP[AUX1]*MRES[i][j];
        fprintf(OUT,"%10d%14.6f%14.6f%14.6f",nr+1,P[0],P[1],P[2]);
    }
}

// Imprime reacciones en los apoyos.
fprintf(OUT,"\n\nReacciones en los APOYOS:");
fprintf(OUT,"\n-----");
fprintf(OUT,"%10d FxA[T] FyA[T] MxA[T.m]");
fprintf(OUT,"\n-----");
SFx=SFy=0.0;
for(i=0;i<NAP;i++) {
    fprintf(OUT,"%10d%14.6f%14.6f%14.6f",VREA[i]+1,MREA[0][i],MREA[1][i],MREA[2][i]);
    SFx+=MREA[0][i];
    SFy+=MREA[1][i];
}
fprintf(OUT,"\n\nEquilibrio de fuerzas INTERNAS-EXTERNAS:");
fprintf(OUT,"\n-----");
fprintf(OUT,"%10d FxT[T] FyT[T]");
fprintf(OUT,"\n-----");
fprintf(OUT,"%10d%14.6f%14.6f : Reacciones(apoyos)",SFx,SFy);
fprintf(OUT,"%10d%14.6f%14.6f : Acciones (cargas)",FACx,FACy);
}

void MARCO::FIN(void) {

```

```

int i;

// Liberar memoria dinamica:

for(i=0;i<2;i++) delete XYND[i];
for(i=0;i<3;i++) delete GLND[i];
for(i=0;i<6;i++) delete BARR[i];
for(i=0;i<2;i++) delete MATE[i];
if (NCO) for(i=0;i<5;i++) delete CONS[i];
if (NVA) for(i=0;i<4;i++) delete VARI[i];

delete FEXT;
delete DESP;
delete Z ;
delete VREA;
for(i=0;i<3;i++) delete MREA[i];

if (NGB) for(i=0;i<6;i++) delete TCON[i];
if (NRS) { for(i=0;i<3;i++) delete MRES[i]; delete VRRES; }
if (NBC) { for(i=0;i<2;i++) delete BCI [i];
           for(i=0;i<3;i++) delete BCF [i]; }

delete KGE ;
}

void MARCO::RIG_BARRA(int opci,int na,int nb,int nel) {

double sum,DX,DY;
int i,j,k,tipo,secc,mate,tcon;

tipo = BARR[2][nel];
secc = BARR[3][nel];
mate = BARR[4][nel];
tcon = BARR[5][nel];

DX = XYND[0][nb]-XYND[0][na];
DY = XYND[1][nb]-XYND[1][na];
L = sqrt(DX*DX+DY*DY);
SN = DY/L;
CS = DX/L;

// Ensamble de matriz de continuidad.
A[0][0] = A[1][1] = A[3][3] = A[4][4] = CS;
A[0][1] = A[3][4] = SN;
A[1][0] = A[4][3] = -SN;
A[1][2] = A[4][5] = 0;

// Inicialización de matriz KLB de rigidez local de la BARRA.
for(j=0;j<6;j++)
for(k=0;k<6;k++) KLB[j][k] = 0;

// Ensamble de matriz KLB de rigidez local de la BARRA.
switch(tipo) {

```

```

case 0: KLB_CONSTANTE (secc,mate); break;
case 1: KLB_VARIABLE (secc ); break;
}

// Condensación de matriz de rigidez local de barra (Conectividades).
if (tcon>=0)
for (i=0;i<6;i++) {
  if (TCOS[i][tcon]) {
    if (j=0;j<6;j++) if (i!=j)
      for (k=0;k<6;k++) { (i!=k)
        KLB[j][k]-KLB[j][i]*KLB[i][k]/KLB[i][i];
      }
    for (j=0;j<6;j++) KLB[j][i]-KLB[i][j]*0;
    KLB[i][i]=0;
  }
}

// Conversión de matriz de rigidez de barra KLB de local a global.
// KGB = A^T * KLB * A
for (i=0;i<6;i++)
for (j=0;j<6;j++) {
  sum=0;
  for (k=0;k<6;k++) sum+=KLB[i][k]*A[k][j];
  KA[i][j]=sum;
}
if (opci) // No se requiere determinar este producto en fuerzas internas.
for (i=0;i<6;i++)
for (j=0;j<6;j++) {
  sum=0;
  for (k=0;k<6;k++) sum+=A[k][i]*KA[k][j];
  KGB[i][j]=sum;
}
}

void MARCO::CARGA_UNIFORME(int a) {
  double W,ALA,ALB,ALC,ALD,ALE;
  W = BCF[0][a];
  ALA = BCF[1][a];
  ALC = BCF[2][a];
  ALB = L - ALA - ALC;
  ALD = ALB + ALA;
  ALE = ALB + ALC;
  P[1] = -W/12./L/L*(ALE*ALE*ALE*(4.*L-3.*ALE)-ALC*ALC*ALC*(4.*L-3.*ALC));
  P[3] = W/12./L/L*(ALD*ALD*ALD*(4.*L-3.*ALD)-ALA*ALA*ALA*(4.*L-3.*ALA));
  P[2] = (-P[3]-P[1])-W*ALB*(ALA+ALB/2.)/L;
  P[0] = (P[3]+P[1])-W*ALB*(ALC+ALB/2.)/L;
}

void MARCO::CARGA_PUSTUAL(int a) {
  double PP,ALA,ALB;
  PP = BCF[0][a];
  ALA = BCF[1][a];

```

```

ALB = L - ALA;
P[1] = -PP*ALA+ALB*ALB/L/L;
P[3] = PP*ALB+ALA*ALA/L/L;
P[0] = {-P[3]-P[1]}-ALA*PP/L;
P[2] = { P[3]*P[1]}-ALB*PP/L;
}

void MARCO::REACCIONES(int napoyo,double FX,double PY,double MZ) {

// CS y SN definidos para barra analizada en RIG_BARRA().
MREA[0][napoyo]= PX*CS-PY*SN;
MREA[1][napoyo]= PX*SN+PY*CS;
MREA[2][napoyo]= MZ;
}

void MARCO::KLB_VARIABLE (int secc) {

double det,f11,f22,f33,f23,GAA,GBB,GAB,GNN,KK1,KK2,KK3;

// Flexibilidades.
f11 = VARI[0][secc];
f22 = VARI[1][secc];
f33 = VARI[2][secc];
f23 = VARI[3][secc];

// Rigideces angulares.
det = f22*f33-f23*f23;
GAA = f22/det;
GBB = (f33*L*L+2*f23*L*f22)/det;
GAB = -(f23*L*f22)/det;
GNN = 1/ f11;
KK1 = (GAA*GBB+2.0*GAB)/L/L;
KK2 = (GAA*GAB)/L;
KK3 = (GBB*GAB)/L;

// Ensamble de matriz KLB.
KLB[0][0] = KLB[3][3] = GNN;
KLB[0][3] = KLB[3][0] = -GNN;
KLB[1][1] = KLB[4][4] = KK1;
KLB[1][4] = KLB[4][1] = -KK1;
KLB[2][1] = KLB[1][2] = KK2;
KLB[2][4] = KLB[4][2] = -KK2;
KLB[1][5] = KLB[5][1] = KK3;
KLB[4][5] = KLB[5][4] = -KK3;
KLB[5][2] = KLB[2][5] = GAB;
KLB[2][2] = GAA;
KLB[5][5] = GBB;
}

void MARCO::KLB_CONSTANTE(int secc,int mate) {

double Ar,Ix,Iy,E,G,FIY,AFL,BFL;

```

```

// Materiales TIPO.
E = MATE[0][mate];
Mu = MATE[1][mate];

// Secciones TIPO.
Ar = CONS[0][secc];
Iz = CONS[1][secc];
fy = CONS[2][secc];
AFL = CONS[3][secc];
BFL = CONS[4][secc];

// Ensamble de matriz KLB.
L = AFL + BFL;
A[1][2] = AFL;
A[4][5] = -BFL;
G = E/(2.0*(1.0*Mu));
FIY = (12.0*fy*E*Iz)/(Ar*G*L*L);
KLB[0][0] = KLB[3][3] = E*Ar/L;
KLB[5][5] = KLB[2][2] = E*Iz*(4.0*FIY)/(1.0*FIY)/L;
KLB[5][2] + KLB[2][5] = E*Iz*(2.0*FIY)/(1.0*FIY)/L;
KLB[1][1] = KLB[4][4] = E*Iz*12.0/(1.0*FIY)/L/L/L;
KLB[1][5] = KLB[5][1] = KLB[2][1] = KLB[1][2] = E*Iz*6.0/(1.0*FIY)/L/L;
KLB[2][4] = KLB[4][2] = KLB[4][5] = KLB[5][4] = -KLB[1][2];
KLB[0][3] = KLB[3][0] = -KLB[0][0];
KLB[1][4] = KLB[4][1] = -KLB[1][1];
}

```

Apéndice C: ***Manual del Usuario***

El archivo de entrada de datos (INPUT) debe estar escrito en formato ASCII con formato de lectura libre; es decir sin restricción en cuanto formatos, campos y líneas o tarjetas. El único dato con formato son las dos primeras líneas, las cuales deben contener una breve descripción de la estructura a analizar (marco plano).

Secuencia de entrada de datos:

- **Primeras dos líneas:**
Descripción de la estructura, máximo 80 caracteres por línea
(Único dato con formato).
- **Número de nodos.**
- **Número de barras.**
- **Numero de secciones constantes.**
- **Número de secciones variables.**
- **Número de secciones tipo.**
- **Número de materiales tipo.**
- **Número de conectividades en barras.**
- **Número de apoyos elásticos en nodos.**
- **Número de nodos cargados.**
- **Número de barras cargadas.**

MANUAL PROGRAMA << M A R P L A >>

Archivo de datos de entrada:

Análisis de MARCOS PLANOS:

1.	# Nodos	NND
2.	# Barras	NEL
3.	# Secciones constantes	NCO
4.	# Secciones variables	NVA
5.	# Materiales tipo	NMA
6.	# Conectividades en barras	NCB
7.	# Apoyos elásticos en nodos	NRS
8.	# Nodos cargados	NNC
9.	# Barras cargadas	NBC

Datos de NODOS: 1..NND

1.	Número del nodo	NODO
2.	Coordenada en X [m]	Coord-X
3.	Coordenada en Y [m]	Coord-Y
4.	Traslación en X []	dx
5.	Traslación en Y []	dy
6.	Rotación sobre Z []	φz

Datos de BARRAS: 1..NEL

1.	Número del elemento	ELEMENTO
2.	Nodo origen	nodo-A
3.	Nodo destino	nodo-B
4.	Tipo de sección	TIPO
5.	Número de sección	SECC
6.	Número de material tipo	MATE
7.	Número de conectividad tipo	CONE

Datos de SECCIONES CONSTANTES: 1..NCO

1.	Número de sección constante	SECCION
2.	Área de la sección transversal [m ²]	Area
3.	Momento de Inercia de la sección transversal [m ⁴]	Iz
4.	Factor de forma []	Iy
5.	Zona rígida de la sección en nodo origen [m]	ZNA
6.	Zona rígida de la sección en nodo destino [m]	ZNB

Datos de SECCIONES VARIABLES: 1..NVA

1.	Número de sección variable	SECCION
2.	Flexibilidad f_{11} [m/T]	f11
3.	Flexibilidad f_{22} [m/T]	f22
4.	Flexibilidad f_{33} [-1/Tm]	f33
5.	Flexibilidad f_{23} [1/T]	f23

Datos de MATERIALES: 1..NMA

1.	Número del material	MATERIAL
2.	Módulo de elasticidad [T/m ²]	E
3.	Módulo de Poisson []	Mu

Datos de CONECTIVIDADES en BARRAS: 1..NCC

1.	Número de conectividad	CONECTIVIDAD
2.	Traslación en X nodo origen	dxA
3.	Traslación en Y nodo origen	dyA
4.	Rotación en Z nodo origen	φA
5.	Traslación en X nodo destino	dxB
6.	Traslación en Y nodo destino	dyB
7.	Rotación en Z nodo destino	φB

Datos de APOYOS ELASTICOS en NODOS: 1..NRS

1.	Número de NODO con el apoyo elástico	NODO
2.	Rigidez traslacional del nodo elástico [T/m]	Rx
3.	Rigidez traslacional del nodo elástico [T/m]	Ry
4.	Rigidez rotacional del nodo elástico [T/rad]	Rz

Datos de fuerzas externas en NODOS:1..NNC

1.	Número del nodo cargado	NODO
2.	Fuerza sobre eje X en sistema global [T]	Fx
3.	Fuerza sobre eje Y en sistema global [T]	Fy
4.	Momento alrededor de eje Z [T/m]	Mz

Datos de fuerzas externas en BARRAS: 1..NBC

1.	Número de barra cargada	BARRA
2.	Tipo de carga (1:UNIFORME,2:PUNTUAL)	TIPO
3.	Variable 1 VAR1 (W:CARGA ,P:CARGA)	W o P
4.	Variable 2 VAR2 (A:DIST-1, A:DIST-1)	A
5.	Variable 3 VAR3 (B:DIST-1, -----)	B

Información de salida de resultados (OUTPUT):

La información de salida (OUTPUT) se refiere a los resultados del análisis, generado por el programa MARPLA; así como la emisión de un reporte de los datos de entrada con los cuales se alimentó el programa. Todo esto con el propósito de ser revisados al concluir su ejecución y poder corregir posibles errores en la entrada de datos (INPUT).

Desplazamientos en los NODOS: 1..NND

1.	Número de nodo	NODO
2.	Traslación del nodo sobre eje X	dx
3.	Traslación de nodo sobre eje Y	dy
4.	Rotación de nodo sobre eje Z	φz

Fuerzas internas en las BARRAS: I..NEL

1.	Número de la barra	BARRA
2.	Nodo origen de la barra	ND _A
3.	Fuerza normal en nodo origen [T]	N _A
4.	Fuerza cortante en nodo origen [T]	V _A
5.	Momento flexionante en nodo origen [T.m]	M _A
6.	Nodo destino de la barra	ND _B
7.	Fuerza normal en nodo destino [T]	N _B
8.	Fuerza cortante en nodo destino [T]	V _B
9.	Momento flexionante en nodo destino [T.m]	M _B

Fuerzas internas en APOYOS ELASTICOS: I..NRS

1.	Número de nodo con apoyo elástico	NODO
2.	Fuerza interna en resorte traslacional en X [T]	P _{XR}
3.	Fuerza interna en resorte traslacional en Y [T]	P _{YR}
4.	Fuerza interna en resorte rotacional sobre Z [T.m]	M _{ZR}

Reacciones en los APOYOS: I..NAP

1.	Número de nodo con apoyo	NODO
2.	Reacción en X [T]	F _{XA}
3.	Reacción en Y [T]	F _{YA}
4.	Reacción sobre Z [T.m]	M _{ZA}

Equilibrio de fuerzas INTERNAS-EXTERNAS:

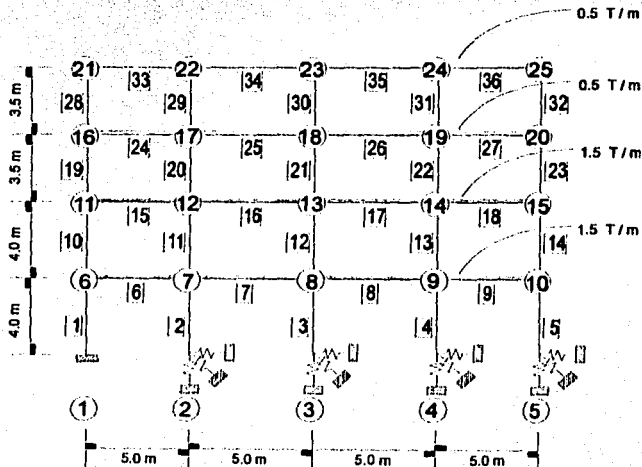
1. Fuerzas internas (reacciones en los apoyos).
2. Fuerzas externas (acciones, cargas en nodos y barras).

Apéndice D: ***Ejemplos de aplicación.***

El siguiente conjunto de datos es generado por el programa MARPLA, los primeros son los datos de entrada (INPUT) y los segundos a los datos de salida (OUTPUT); resultantes del correspondiente Análisis Estructural realizado.

Previo a estos resultados, se da una gráfica de todos y cada uno de los marcos, con la topología y características físicas y mecánicas utilizadas para su análisis.

□ Barras ○ Nodos ~ Apoyos de resorte



MARCOX01, ejemplo de comprobación
de MARK<->MARPLA

[INPUT]

	25	36	5	0	1	0	5	0	16
0001	0.0000	0.0000	1	0	1				
0002	5.0000	0.0000	1	0	1				
0003	11.0000	0.0000	1	0	1				
0004	17.0000	0.0000	1	0	1				
0005	22.0000	0.0000	1	0	1				
0006	0.0000	4.0000	0	0	0				
0007	5.0000	4.0000	0	0	0				
0008	11.0000	4.0000	0	0	0				
0009	17.0000	4.0000	0	0	0				
0010	22.0000	4.0000	0	0	0				
0011	0.0000	8.0000	0	0	0				
0012	5.0000	8.0000	0	0	0				
0013	11.0000	8.0000	0	0	0				
0014	17.0000	8.0000	0	0	0				
0015	22.0000	8.0000	0	0	0				
0016	0.0000	11.5000	0	0	0				
0017	5.0000	11.5000	0	0	0				
0018	11.0000	11.5000	0	0	0				
0019	17.0000	11.5000	0	0	0				
0020	22.0000	11.5000	0	0	0				
0021	0.0000	15.0000	0	0	0				
0022	5.0000	15.0000	0	0	0				
0023	11.0000	15.0000	0	0	0				
0024	17.0000	15.0000	0	0	0				
0025	22.0000	15.0000	0	0	0				

0001	1	6	1	1	1	0
0002	2	7	1	1	1	0
0003	3	8	1	1	1	0
0004	4	9	1	1	1	0
0005	5	10	1	1	1	0
0006	6	7	1	2	1	0
0007	7	8	1	2	1	0
0008	8	9	1	2	1	0
0009	9	10	1	2	1	0
0010	6	11	1	1	1	0
0011	7	12	1	1	1	0
0012	8	13	1	1	1	0
0013	9	14	1	1	1	0
0014	10	15	1	1	1	0
0015	11	12	1	2	1	0
0016	12	13	1	2	1	0
0017	13	14	1	2	1	0

0018	14	15	1	2	1	0
0019	11	16	1	3	1	0
0020	12	17	1	3	1	0
0021	13	18	1	3	1	0
0022	14	19	1	3	1	0
0023	15	20	1	3	1	0
0024	16	17	1	4	1	0
0025	17	18	1	4	1	0
0026	18	19	1	4	1	0
0027	19	20	1	4	1	0
0028	16	21	1	3	1	0
0029	17	22	1	3	1	0
0030	18	23	1	3	1	0
0031	19	24	1	3	1	0
0032	20	25	1	3	1	0
0033	21	22	1	5	1	0
0034	22	23	1	5	1	0
0035	23	24	1	5	1	0
0036	24	25	1	5	1	0

0001	2.0000000E-01	4.1666670E-03	0.00	0.0000	0.0000
0002	1.8000000E-01	5.4000000E-03	0.00	0.0000	0.0000
0003	1.2000000E-01	1.6000000E-03	0.00	0.0000	0.0000
0004	1.5000000E-01	3.1250000E-03	0.00	0.0000	0.0000
0005	1.2500000E-01	2.6041670E-03	0.00	0.0000	0.0000

0001 2.1000000E+06 0.00

0001	0.00	400.00	0.00
0002	0.00	400.00	0.00
0003	0.00	400.00	0.00
0004	0.00	400.00	0.00
0005	0.00	400.00	0.00

0006	1	-1.50	0.00	0.00
0007	1	-1.50	0.00	0.00
0008	1	-1.50	0.00	0.00
0009	1	-1.50	0.00	0.00
0015	1	-1.50	0.00	0.00
0016	1	-1.50	0.00	0.00
0017	1	-1.50	0.00	0.00
0018	1	-1.50	0.00	0.00
0024	1	-1.00	0.00	0.00
0025	1	-1.00	0.00	0.00
0026	1	-1.00	0.00	0.00
0027	1	-1.00	0.00	0.00
0033	1	-0.50	0.00	0.00
0034	1	-0.50	0.00	0.00
0035	1	-0.50	0.00	0.00
0036	1	-0.50	0.00	0.00

TESIS para obtener el título de INGENIERO CIVIL
presenta: **Mateo Espinoza Arnulfo Javier.**
Asesor: Ing. José Paulo Mejorada Mota.

Análisis : 21 de julio de 1995
Comentarios : Marco sobre apoyos elásticos.
ejemplo de comprobación
de MARK <-> MARPLA.

NODOS : 25
BARRAS : 36
SECC. CONSTANTES TIPO : 5
SECC. VARIABLES TIPO : 0
MATERIALES TIPO : 1
CONECTIVIDADES en BARRAS : 0
APOYOS ELASTICOS en NODOS : 5
NODOS CARGADOS : 0
BARRAS CARGADAS : 16

Datos de NODOS:

NOD# Coord-X[m] Coord-Y[m] dx dy Yz

0001 0.0000 0.0000 1 0 1
0002 5.0000 0.0000 1 0 1
0003 11.0000 0.0000 1 0 1
0004 17.0000 0.0000 1 0 1
0005 22.0000 0.0000 1 0 1
0006 0.0000 4.0000 0 0 0
0007 5.0000 4.0000 0 0 0
0008 11.0000 4.0000 0 0 0
0009 17.0000 4.0000 0 0 0
0010 22.0000 4.0000 0 0 0
0011 0.0000 8.0000 0 0 0
0012 5.0000 8.0000 0 0 0
0013 11.0000 8.0000 0 0 0
0014 17.0000 8.0000 0 0 0
0015 22.0000 8.0000 0 0 0
0016 0.0000 11.5000 0 0 0
0017 5.0000 11.5000 0 0 0
0018 11.0000 11.5000 0 0 0
0019 17.0000 11.5000 0 0 0
0020 22.0000 11.5000 0 0 0

0021	0.0000	15.0000	0	0	0
0022	5.0000	15.0000	0	0	0
0023	11.0000	15.0000	0	0	0
0024	17.0000	15.0000	0	0	0
0025	22.0000	15.0000	0	0	0

Datos de ELEMENTOS BARRA:

BAR#	nd-A	nd-B	tipo	secc	mate	cone
0001	1	6	1	1	1	0
0002	2	7	1	1	1	0
0003	3	8	1	1	1	0
0004	4	9	1	1	1	0
0005	5	10	1	1	1	0
0006	6	7	1	2	1	0
0007	7	8	1	2	1	0
0008	8	9	1	2	1	0
0009	9	10	1	2	1	0
0010	6	11	1	1	1	0
0011	7	12	1	1	1	0
0012	8	13	1	1	1	0
0013	9	14	1	1	1	0
0014	10	15	1	1	1	0
0015	11	12	1	2	1	0
0016	12	13	1	2	1	0
0017	13	14	1	2	1	0
0018	14	15	1	2	1	0
0019	11	16	1	3	1	0
0020	12	17	1	3	1	0
0021	13	18	1	3	1	0
0022	14	19	1	3	1	0
0023	15	20	1	3	1	0
0024	16	17	1	4	1	0
0025	17	18	1	4	1	0
0026	18	19	1	4	1	0
0027	19	20	1	4	1	0
0028	16	21	1	3	1	0
0029	17	22	1	3	1	0
0030	18	23	1	3	1	0
0031	19	24	1	3	1	0
0032	20	25	1	3	1	0
0033	21	22	1	5	1	0
0034	22	23	1	5	1	0
0035	23	24	1	5	1	0
0036	24	25	1	5	1	0

Secc. constantes TIPO:

SEC#	Area[m2]	Iz[m4]	fy[]	ZN-A[m]	ZN-B[m]
0001	2.00000E-01	4.16667E-03	0.00	0.0000	0.0000
0002	1.80000E-01	5.40000E-03	0.00	0.0000	0.0000
0003	1.20000E-01	1.60000E-03	0.00	0.0000	0.0000
0004	1.50000E-01	3.12500E-03	0.00	0.0000	0.0000
0005	1.25000E-01	2.60417E-03	0.00	0.0000	0.0000

Materiales TIPO:

MAT#	E[T/m2]	Mu[]
0001	2.10000E+06	0.00

Apoyos elasticos en NODOS:

NOD#	Kx[T/m]	Ky[T/m]	Kz[T/rad]
0001	0.0000	400.0000	0.0000
0002	0.0000	400.0000	0.0000
0003	0.0000	400.0000	0.0000
0004	0.0000	400.0000	0.0000
0005	0.0000	400.0000	0.0000

Cargas en BARRAS:

BAR#	TIPO	VAR1	VAR2	VAR3
0006	1	-1.5000	0.0000	0.0000
0007	1	-1.5000	0.0000	0.0000
0008	1	-1.5000	0.0000	0.0000
0009	1	-1.5000	0.0000	0.0000
0015	1	-1.5000	0.0000	0.0000
0016	1	-1.5000	0.0000	0.0000
0017	1	-1.5000	0.0000	0.0000
0018	1	-1.5000	0.0000	0.0000
0024	1	-1.0000	0.0000	0.0000
0025	1	-1.0000	0.0000	0.0000
0026	1	-1.0000	0.0000	0.0000
0027	1	-1.0000	0.0000	0.0000
0033	1	-0.5000	0.0000	0.0000
0034	1	-0.5000	0.0000	0.0000
0035	1	-0.5000	0.0000	0.0000
0036	1	-0.5000	0.0000	0.0000

< < < < RESULTADOS > > > >

Desplazamientos en NODOS:

NOD#	dx[m]	dy[m]	Yz[rad]
0001	0.000000	-0.046157	0.000000
0002	0.000000	-0.050762	0.000000
0003	0.000000	-0.053660	0.000000
0004	0.000000	-0.050762	0.000000
0005	0.000000	-0.046157	0.000000
0006	-0.000062	-0.046333	-0.000438
0007	-0.000044	-0.050956	-0.000452
0008	0.000000	-0.053865	0.000000
0009	0.000044	-0.050956	0.000452
0010	0.000062	-0.046333	0.000438
0011	0.000057	-0.046448	-0.000506
0012	0.000041	-0.051086	-0.000498
0013	0.000000	-0.054002	0.000000
0014	-0.000041	-0.051086	0.000498
0015	-0.000057	-0.046448	0.000506
0016	-0.000002	-0.046532	-0.000471
0017	-0.000002	-0.051181	-0.000471
0018	0.000000	-0.054102	0.000000
0019	0.000002	-0.051181	0.000471
0020	0.000002	-0.046532	0.000471
0021	0.000110	-0.046561	-0.000623
0022	0.000077	-0.051213	-0.000598
0023	0.000000	-0.054135	0.000000
0024	-0.000077	-0.051213	0.000598
0025	-0.000110	-0.046561	0.000623

Fuerzas Internas en BARRAS:

BAR#	NOD#	N[T]	V[T]	M[T.m]
0001	A-0001	18.462960	-1.538047	-2.118770
	B-0006	-18.462960	1.538047	-4.033418
0002	A-0002	20.304949	-1.555484	-2.122300
	B-0007	-20.304949	1.555484	-4.099634
0003	A-0003	21.464183	0.000000	0.000000
	B-0008	-21.464183	0.000000	0.000000
0004	A-0004	20.304949	1.555484	2.122300
	B-0009	-20.304949	-1.555484	4.099634
0005	A-0005	18.462960	1.538047	2.118770
	B-0010	-18.462960	-1.538047	4.033418
0006	A-0006	-1.362933	6.361131	9.685324
	B-0007	1.362933	1.138869	3.370332
0007	A-0007	-2.783358	5.478542	6.581418
	B-0008	2.783358	3.521458	-0.710166
0008	A-0008	-2.783358	3.521458	0.710166

	B-0009	2.783358	5.478542	-6.581418
0009	A-0009	-1.362933	1.138869	-3.370332
	B-0010	1.362933	6.361131	-9.685324
0010	A-0006	12.101829	-2.900980	-5.651905
	B-0011	-12.101829	2.900980	-5.952015
0011	A-0007	13.687538	-2.975908	-5.852116
	B-0012	-13.687538	2.975908	-6.051518
0012	A-0008	14.421267	0.000000	0.000000
	B-0013	-14.421267	0.000000	0.000000
0013	A-0009	13.687538	2.975908	5.852116
	B-0014	-13.687538	-2.975908	6.051518
0014	A-0010	12.101829	2.900980	5.651905
	B-0015	-12.101829	-2.900980	5.952015
0015	A-0011	1.237411	6.066835	8.897378
	B-0012	-1.237411	1.433165	2.686799
0016	A-0012	2.578963	5.396803	6.250059
	B-0013	-2.578963	3.603197	-0.869242
0017	A-0013	2.578963	3.603197	0.869242
	B-0014	-2.578963	5.396803	-6.250059
0018	A-0014	1.237411	1.433165	-2.686799
	B-0015	-1.237411	6.066835	-8.897378
0019	A-0011	6.034993	-1.663569	-2.945362
	B-0016	-6.034993	1.663569	-2.877129
0020	A-0012	6.857570	-1.634357	-2.885340
	B-0017	-6.857570	1.634357	-2.834907
0021	A-0013	7.214873	0.000000	0.000000
	B-0018	-7.214873	0.000000	0.000000
0022	A-0014	6.857570	1.634357	2.885340
	B-0019	-6.857570	-1.634357	2.834907
0023	A-0015	6.034993	1.663569	2.945362
	B-0020	-6.034993	-1.663569	2.877129
0024	A-0016	-0.031624	3.945303	5.697352
	B-0017	0.031624	1.054697	1.529162
0025	A-0017	-0.082209	3.549522	4.133112
	B-0018	0.082209	2.450478	-0.835979
0026	A-0018	-0.082209	2.450478	0.835979
	B-0019	0.082209	3.549522	-4.133112
0027	A-0019	-0.031624	1.054697	-1.529162
	B-0020	0.031624	3.945303	-5.697352
0028	A-0016	2.089690	-1.695193	-2.820223
	B-0021	-2.089690	1.695193	-3.112951
0029	A-0017	2.253351	-1.684942	-2.827367
	B-0022	-2.253351	1.684942	-3.069931
0030	A-0018	2.313917	0.000000	0.000000
	B-0023	-2.313917	0.000000	0.000000
0031	A-0019	2.253351	1.684942	2.827367
	B-0024	-2.253351	-1.684942	3.069931
0032	A-0020	2.089690	1.695193	2.820223
	B-0025	-2.089690	-1.695193	3.112951
0033	A-0021	1.695193	2.089690	3.112951
	B-0022	-1.695193	0.410310	1.085501
0034	A-0022	3.380135	1.843041	1.984430

	B-0023	-3.380135	1.156959	0.073819
0035	A-0023	3.380135	1.156959	-0.073819
	B-0024	-3.380135	1.843041	-1.984430
0036	A-0024	1.695193	0.410310	-1.085501
	B-0025	-1.695193	2.089690	-3.112951

Fuerzas internas en apoyos elásticos de NODOS:

NOD#	PxR[T]	PyR[T]	MzR[T.m]
0001	0.000000	-18.462960	0.000000
0002	0.000000	-20.304949	0.000000
0003	0.000000	-21.464183	0.000000
0004	0.000000	-20.304949	0.000000
0005	0.000000	-18.462960	0.000000

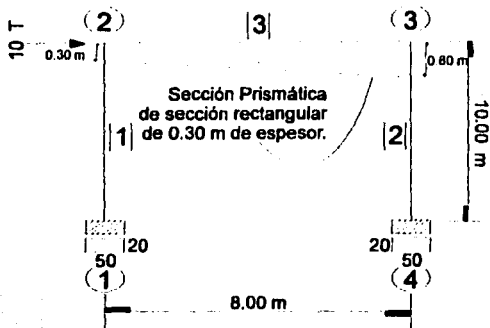
Reacciones en los APOYOS:

NOD#	FxA[T]	FyA[T]	MzA[T.m]
0001	1.538047	18.462960	-2.118770
0002	1.555484	20.304949	-2.122300
0003	0.000000	21.464183	0.000000
0004	-1.555484	20.304949	2.122300
0005	-1.538047	18.462960	2.118770

Equilibrio de fuerzas INTERNAS-EXTERNAS:

	FxT[T]	FyT[T]	
SUMA	0.000000	99.000000	: Reacciones(apoyos)
SUMA	0.000000	-99.000000	: Acciones (cargas)

Tiempo empleado en ANALISIS [seg] 0000.71



Comprobación de programa MARPLA.
marcol.res/sección variable prismática.

[INPUT]

4 3 1 1 1 0 0 1 0

0001	0.0000	0.0000	1	1	1
0002	0.0000	4.0000	0	0	0
0003	8.0000	4.0000	0	0	0
0004	8.0000	0.0000	1	1	1

0001	1	2	1	1	1	0
0002	4	3	1	1	1	0
0003	2	3	2	1	0	0

0001	1.00000E-01	2.08333E-03	0.00	0.0000	0.0000
------	-------------	-------------	------	--------	--------

0001	4.02391E-05	2.02300E-02	2.35043E-03	-5.12821E-03
------	-------------	-------------	-------------	--------------

0001	1.30000E+06	0.00
------	-------------	------

0002	10.00	0.00	0.00
------	-------	------	------

TESIS para obtener el título de INGENIERO CIVIL
 presenta: **Mateo Espinoza Arnulfo Javier.**
 Asesor: Ing. José Paulo Mejorada Mota.

Análisis : 21 de julio de 1995
 Comentarios : Marco de sección variable prismática.
 ejemplo de comprobación de programa.
 marcol.res/MARPLA.

```

# NODOS ..... : 4
# BARRAS ..... : 3
# SECC. CONSTANTES TIPO ..... : 1
# SECC. VARIABLES TIPO ..... : 1
# MATERIALES TIPO ..... : 1
# CONECTIVIDADES en BARRAS ..... : 0
# APOYOS ELASTICOS en NODOS ..... : 0
# NODOS CARGADOS ..... : 1
# BARRAS CARGADAS ..... : 0
    
```

Datos de NODOS:

NOD#	Coord-X[m]	Coord-Y[m]	dx	dy	Yz
0001	0.0000	0.0000	1	1	1
0002	0.0000	4.0000	0	0	0
0003	8.0000	4.0000	0	0	0
0004	8.0000	0.0000	1	1	1

Datos de ELEMENTOS BARRA:

BAR#	nd-A	nd-B	tipo	secc	mate	cone
0001	1	2	1	1	1	0
0002	4	3	1	1	1	0
0003	2	3	2	1	0	0

Secc. constantes TIPO:

SEC#	Area[m2]	Iz[m4]	fy[]	ZN-A[m]	ZN-B[m]
0001	1.00000E-01	2.08333E-03	0.00	0.0000	0.0000

Secc. variables TIPO:

SEC#	f11[]	f22[]	f33[]	f23[]
0001	4.02391E-05	2.02300E-02	2.35043E-03	-5.12821E-03

Materiales TIPO:

MAT#	E[T/m2]	Mu[]
0001	1.30000E+06	0.00

Cargas en NODOS:

NOD#	Fx[T]	Fy[T]	Mz[T.m]
0002	10.0000	0.0000	0.0000

< < < < RESULTADOS > > > >

Desplazamientos en NODOS:

NOD#	dx[m]	dy[m]	Yz[rad]
0001	0.000000	0.000000	0.000000
0002	0.015554	0.000062	-0.003863
0003	0.015311	-0.000062	-0.001723
0004	0.000000	0.000000	0.000000

Fuerzas Internas en BARRAS:

BAR#	NOD#	N[T]	V[T]	M[T.m]
0001	A-0001	-2.027213	3.974678	10.565090
	B-0002	2.027213	-3.974678	5.333621
0002	A-0004	2.027213	6.025322	13.217202
	B-0003	-2.027213	-6.025322	10.884087
0003	A-0002	6.025322	-2.027213	-5.333621
	B-0003	-6.025322	2.027213	-10.884087

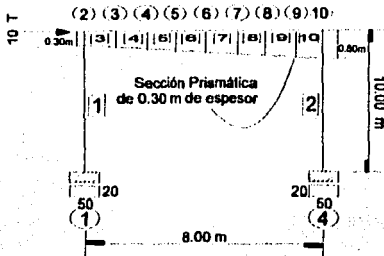
Reacciones en los APOYOS:

NOD#	FxA[T]	FyA[T]	MzA[T.m]
0001	-3.974678	-2.027213	10.565090
0004	-6.025322	2.027213	13.217202

Equilibrio de fuerzas INTERNAS-EXTERNAS:

	FxT[T]	FyT[T]	
SUMA	-10.000000	0.000000	: Reacciones(apoyos)
SUMA	10.000000	0.000000	: Acciones (cargas)

Tiempo empleado en ANALISIS [seg] 0000.11



Ejemplo de comprobación marco1.dat => marco2.dat [INPUT]
 Barra variable de 8 segmentos sección constante

11 10 9 0 1 0 0 1 0

1	0.00	0.00	1	1	1
2	0.00	4.00	0	0	0
3	1.00	4.00	0	0	0
4	2.00	4.00	0	0	0
5	3.00	4.00	0	0	0
6	4.00	4.00	0	0	0
7	5.00	4.00	0	0	0
8	6.00	4.00	0	0	0
9	7.00	4.00	0	0	0
10	8.00	4.00	0	0	0
11	8.00	0.00	1	1	1

1	1	2	1	1	1	0
2	11	10	1	1	1	0
3	2	3	1	2	1	0
4	3	4	1	3	1	0
5	4	5	1	4	1	0
6	5	6	1	5	1	0
7	6	7	1	6	1	0
8	7	8	1	7	1	0
9	8	9	1	8	1	0
10	9	10	1	9	1	0

1	0.100000	2.083333E-03	0.00	0.00	0.00
2	0.099375	9.086731E-04	0.00	0.00	0.00
3	0.118125	1.526166E-03	0.00	0.00	0.00
4	0.136875	2.374371E-03	0.00	0.00	0.00
5	0.155625	3.489911E-03	0.00	0.00	0.00

6	0.174375	4.909406E-03	0.00	0.00	0.00
7	0.193125	6.669476E-03	0.00	0.00	0.00
8	0.211875	8.806744E-03	0.00	0.00	0.00
9	0.230625	1.135783E-02	0.00	0.00	0.00

1 1300000 0.00

2 10.00 0.00 0.00

TESIS para obtener el título de INGENIERO CIVIL.
 presenta: Mateo Espinosa Arnulfo Javier.
 Assesor: Ing. José Paulo Mejorada Mota.

Análisis : 21 de julio de 1995
 Comentarios : Ejemplo de comprobación (barra variable).
 Sección constante = Sección prismática
 marcol.dat => marco2.dat

```

-----
# NODOS ..... : 11
# BARRAS ..... : 10
# SECC. CONSTANTES TIPO ..... : 9
# SECC. VARIABLES TIPO ..... : 0
# MATERIALES TIPO ..... : 1
# CONECTIVIDADES en BARRAS ..... : 0
# APOYOS ELASTICOS en NODOS ..... : 0
# NODOS CARGADOS ..... : 1
# BARRAS CARGADAS ..... : 0
-----
    
```

Datos de NODOS:

NOD#	Coord-X[m]	Coord-Y[m]	dx	dy	Yz
0001	0.0000	0.0000	1	1	1
0002	0.0000	4.0000	0	0	0
0003	1.0000	4.0000	0	0	0
0004	2.0000	4.0000	0	0	0
0005	3.0000	4.0000	0	0	0
0006	4.0000	4.0000	0	0	0
0007	5.0000	4.0000	0	0	0
0008	6.0000	4.0000	0	0	0
0009	7.0000	4.0000	0	0	0
0010	8.0000	4.0000	0	0	0
0011	8.0000	0.0000	1	1	1

Datos de ELEMENTOS BARRA:

BAR#	nd-A	nd-B	tipo	secc	mate	cone
0001	1	2	1	1	1	0
0002	11	10	1	1	1	0
0003	2	3	1	2	1	0
0004	3	4	1	3	1	0

0005	4	5	1	4	1	0
0006	5	6	1	5	1	0
0007	6	7	1	6	1	0
0008	7	8	1	7	1	0
0009	8	9	1	8	1	0
0010	9	10	1	9	1	0

Secc. constantes TIPO:

SEC#	Area[m2]	Iz[m4]	fy[]	ZN-A[m]	ZN-B[m]
0001	1.00000E-01	2.08333E-03	0.00	0.0000	0.0000
0002	9.93750E-02	9.08673E-04	0.00	0.0000	0.0000
0003	1.18125E-01	1.52617E-03	0.00	0.0000	0.0000
0004	1.36875E-01	2.37437E-03	0.00	0.0000	0.0000
0005	1.55625E-01	3.48991E-03	0.00	0.0000	0.0000
0006	1.74375E-01	4.90941E-03	0.00	0.0000	0.0000
0007	1.93125E-01	6.66948E-03	0.00	0.0000	0.0000
0008	2.11875E-01	8.80674E-03	0.00	0.0000	0.0000
0009	2.30625E-01	1.13578E-02	0.00	0.0000	0.0000

Materiales TIPO:

MAT#	E[T/m2]	Mu[]
0001	1.30000E+06	0.00

Cargas en NODOS:

NOD#	Fx[T]	Fy[T]	Mz[T.m]
0002	10.0000	0.0000	0.0000

< < < < RESULTADOS > > > >

Desplazamientos en NODOS:

NOD#	dx[m]	dy[m]	yz[rad]
0001	0.000000	0.000000	0.000000
0002	0.015448	0.000063	-0.003785
0003	0.015401	-0.001708	-0.000043
0004	0.015362	-0.001065	0.001158
0005	0.015328	0.000205	0.001271
0006	0.015299	0.001327	0.000899
0007	0.015272	0.001961	0.000315
0008	0.015248	0.001964	-0.000349

0009	0.015227	0.001289	-0.001030
0010	0.015207	-0.000063	-0.001696
0011	0.000000	0.000000	0.000000

Fuerzas Internas en BARRAS:

BAR#	NOD#	N[T]	V[T]	M[T.m]
0001	A-0001	-2.036115	4.000411	10.563557
	B-0002	2.036115	-4.000411	5.438086
0002	A-0011	2.036115	5.999589	13.147527
	B-0010	-2.036115	-5.999589	10.850831
0003	A-0002	5.999589	-2.036115	-5.438086
	B-0003	-5.999589	2.036115	3.401971
0004	A-0003	5.999589	-2.036115	-3.401971
	B-0004	-5.999589	2.036115	1.365857
0005	A-0004	5.999589	-2.036115	-1.365857
	B-0005	-5.999589	2.036115	-0.670258
0006	A-0005	5.999589	-2.036115	0.670258
	B-0006	-5.999589	2.036115	-2.706372
0007	A-0006	5.999589	-2.036115	2.706372
	B-0007	-5.999589	2.036115	-4.742487
0008	A-0007	5.999589	-2.036115	4.742487
	B-0008	-5.999589	2.036115	-6.778602
0009	A-0008	5.999589	-2.036115	6.778602
	B-0009	-5.999589	2.036115	-8.814716
0010	A-0009	5.999589	-2.036115	8.814716
	B-0010	-5.999589	2.036115	-10.850831

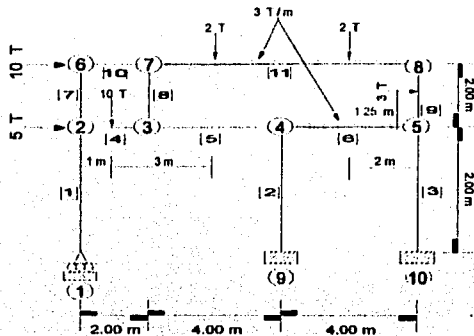
Reacciones en los APOYOS:

NOD#	FxA[T]	FyA[T]	MzA[T.m]
0001	-4.000411	-2.036115	10.563557
0011	-5.999589	2.036115	13.147527

Equilibrio de fuerzas INTERNAS-EXTERNAS:

	FxT[T]	FyT[T]	
SUMA	-10.000000	0.000000	: Reacciones(apoyos)
SUMA	10.000000	0.000000	: Acciones (cargas)

Tiempo empleado en ANALISIS [seg] 0000.27



Apuntes de Análisis Estructural II.
Ejemplo de Marco Plano Normal.

[INPUT]

10 11 3 0 1 0 0 2 6

0001	0.0000	0.0000	1	1	0
0002	0.0000	4.0000	0	0	0
0003	2.0000	4.0000	0	0	0
0004	6.0000	4.0000	0	0	0
0005	10.0000	4.0000	0	0	0
0006	0.0000	6.0000	0	0	0
0007	2.0000	6.0000	0	0	0
0008	10.0000	6.0000	0	0	0
0009	6.0000	0.0000	1	1	1
0010	10.0000	0.0000	1	1	1

0001	1	2	1	3	1	0
0002	9	4	1	3	1	0
0003	10	5	1	3	1	0
0004	2	3	1	1	1	0
0005	3	4	1	1	1	0
0006	4	5	1	1	1	0
0007	2	6	1	2	1	0
0008	3	7	1	2	1	0
0009	5	8	1	2	1	0
0010	6	7	1	1	1	0
0011	7	8	1	2	1	0

0001	1.0000000E+09	1.0000000E+00	0.00	0.0000
0.0000				
0002	1.0000000E+09	2.0000000E+00	0.00	0.0000
0.0000				
0003	1.0000000E+09	3.0000000E+00	0.00	0.0000
0.0000				

0001	1.0000000E+00	0.00		
------	---------------	------	--	--

0002	5.00	0.00	0.00	
0006	10.00	0.00	0.00	

0004	2	-10.00	1.00	0.00
0006	1	-3.00	0.00	0.00
0009	2	-3.00	1.25	0.00
0011	1	-3.00	0.00	0.00
0011	2	-2.00	2.00	0.00
0011	2	-2.00	6.00	0.00

TESIS para obtener el título de INGENIERO CIVIL
 presenta: **Mateo Espinosa Arnulfo Javier.**
 Asesor: Ing. José Paulo Mejorada Mota.

Análisis : 21 de julio de 1995
 Comentarios : Ejemplo de Marco Plano Normal.
 de Apuntes de Análisis Estructural II.

```

-----
# NODOS ..... : 10
# BARRAS ..... : 11
# SECC. CONSTANTES TIPO ..... : 3
# SECC. VARIABLES TIPO ..... : 0
# MATERIALES TIPO ..... : 1
# CONECTIVIDADES en BARRAS ..... : 0
# APOYOS ELASTICOS en NODOS ..... : 0
# NODOS CARGADOS ..... : 2
# BARRAS CARGADAS ..... : 6
-----
    
```

Datos de NODOS:

NOD#	Coord-X[m]	Coord-Y[m]	dx	dy	Yz
0001	0.0000	0.0000	1	1	0
0002	0.0000	4.0000	0	0	0
0003	2.0000	4.0000	0	0	0
0004	6.0000	4.0000	0	0	0
0005	10.0000	4.0000	0	0	0
0006	0.0000	6.0000	0	0	0
0007	2.0000	6.0000	0	0	0
0008	10.0000	6.0000	0	0	0
0009	6.0000	0.0000	1	1	1
0010	10.0000	0.0000	1	1	1

Datos de ELEMENTOS BARRA:

BAR#	nd-A	nd-B	tipo	secc	mate	cone
0001	1	2	1	3	1	0
0002	9	4	1	3	1	0
0003	10	5	1	3	1	0
0004	2	3	1	1	1	0
0005	3	4	1	1	1	0

0006	4	5	1	1	1	0
0007	2	6	1	2	1	0
0008	3	7	1	2	1	0
0009	5	8	1	2	1	0
0010	6	7	1	1	1	0
0011	7	8	1	2	1	0

Secc. constantes TIPO:

SEC#	Area[m2]	Iz[m4]	fy[]	ZN-A[m]	ZN-B[m]
0001	1.00000E+09	1.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000
0002	1.00000E+09	2.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000
0003	1.00000E+09	3.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000

Material es TIPO:

MAT#	E[T/m2]	Mu[]
0001	1.00000E+00	0.00

Cargas en NODOS:

NOD#	Fx[T]	Fy[T]	Mz[T.m]
0002	5.0000	0.0000	0.0000
0006	10.0000	0.0000	0.0000

Cargas en BARRAS:

BAR#	TIPO	VAR1	VAR2	VAR3
0004	2	-10.0000	1.0000	0.0000
0006	1	-3.0000	0.0000	0.0000
0009	2	-3.0000	1.2500	0.0000
0011	1	-3.0000	0.0000	0.0000
0011	2	-2.0000	2.0000	0.0000
0011	2	-2.0000	6.0000	0.0000

< < < < RESULTADOS > > > >

Desplazamientos en NODOS:

NOD#	dx[m]	dy[m]	Yz[rad]
0001	0.000000	0.000000	-7.152860
0002	30.119464	0.000000	-8.283879

0003	30.119464	-17.531871	-3.803060
0004	30.119464	0.000000	-5.008264
0005	30.119464	0.000000	-8.734190
0006	43.324565	0.000000	-6.605123
0007	43.324565	-17.531871	-9.714613
0008	43.324565	0.000000	1.175303
0009	0.000000	0.000000	0.000000
0010	0.000000	0.000000	0.000000

Fuerzas Internas en BARRAS:

BAR#	NOD#	N[T]	V[T]	M[T.m]
0001	A-0001	14.985600	-0.424132	0.000000
	B-0002	-14.985600	0.424132	-1.696529
0002	A-0009	7.438052	11.307901	26.372001
	B-0004	-7.438052	-11.307901	18.859605
0003	A-0010	27.576347	7.116235	20.783113
	B-0005	-27.576347	-7.116235	7.681828
0004	A-0002	0.372428	13.167398	8.426988
	B-0003	-0.372428	-3.167398	7.907807
0005	A-0003	-0.565289	-6.591472	-12.881644
	B-0004	0.565289	6.591472	-13.484246
0006	A-0004	-11.873190	0.846580	-5.375359
	B-0005	11.873190	11.153420	-15.238322
0007	A-0002	1.818202	-5.051703	-6.730459
	B-0006	-1.818202	5.051703	-3.372947
0008	A-0003	9.758870	-0.937717	4.973836
	B-0007	-9.758870	0.937717	-6.849270
0009	A-0005	16.422927	18.989424	7.556494
	B-0008	-16.422927	-15.989424	25.969229
0010	A-0006	15.051703	1.818202	3.372947
	B-0007	-15.051703	-1.818202	0.263457
0011	A-0007	15.989424	11.577073	6.585813
	B-0008	-15.989424	16.422927	-25.969229

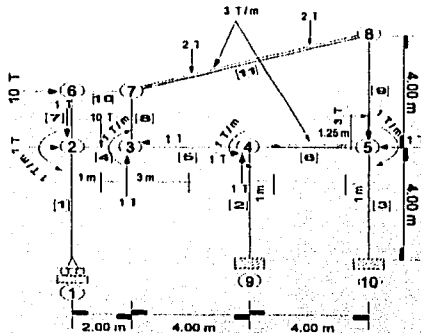
Reacciones en los APOYOS:

NOD#	FxA[T]	FyA[T]	MzA[T.m]
0001	0.424132	14.985600	0.000000
0009	-11.307901	7.438052	26.372001
0010	-7.116235	27.576347	20.783113

Equilibrio de fuerzas INTERNAS-EXTERNAS:

	FxT[T]	FyT[T]	
SUMA	-18.000004	50.000000	: Reacciones(apoyos)
SUMA	18.000000	-50.000000	: Acciones(cargas)

Tiempo empleado en ANALISIS [seg] 0000.38



Apuntes de Análisis Estructural II.
Ejemplo de Marco Plano con barra inclinada.

[INPUT]

10 11 3 0 1 0 0 4 6

0001	0.0000	0.0000	1	1	0
0002	0.0000	4.0000	0	0	0
0003	2.0000	4.0000	0	0	0
0004	6.0000	4.0000	0	0	0
0005	10.0000	4.0000	0	0	0
0006	0.0000	6.0000	0	0	0
0007	2.0000	6.0000	0	0	0
0008	10.0000	8.0000	0	0	0
0009	6.0000	0.0000	1	1	1
0010	10.0000	0.0000	1	1	1

0001	1	2	1	3	1	0
0002	9	4	1	3	1	0
0003	10	5	1	3	1	0
0004	2	3	1	1	1	0
0005	3	4	1	1	1	0
0006	4	5	1	1	1	0
0007	2	6	1	2	1	0
0008	3	7	1	2	1	0
0009	5	8	1	2	1	0

0010	6	7	1	1	1	0
0011	7	8	1	2	1	0

0001	1.00000E+09	1.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000
0002	1.00000E+09	2.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000
0003	1.00000E+09	3.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000

0001	1.00000E+00	0.00			
------	-------------	------	--	--	--

0002	1.00	-1.00	1.00		
0003	-1.00	1.00	-1.00		
0004	1.00	1.00	1.00		
0005	-1.00	-1.00	-1.00		

0004	2	-10.00	1.00	0.00	
0006	1	-3.00	0.50	1.00	
0009	2	-3.00	1.25	0.00	
0011	1	-3.00	0.00	0.00	
0011	2	-2.00	2.00	0.00	
0011	2	2.00	6.00	0.00	

TESIS para obtener el título de INGENIERO CIVIL
 presenta: Mateo Espinoza Arnulfo Javier.
 Asesor: Ing. José Paulo Mejorada Mota.

Análisis : 21 de julio de 1995
 Comentarios : Ejemplo de Marco Plano con barra inclinada.
 apuntes de Análisis Estructural II.

```

-----
# NODOS ..... : 10
# BARRAS ..... : 11
# SECC. CONSTANTES TIPO ..... : 3
# SECC. VARIABLES TIPO ..... : 0
# MATERIALES TIPO ..... : 1
# CONECTIVIDADES en BARRAS ..... : 0
# APOYOS ELASTICOS en NODOS ..... : 0
# NODOS CARGADOS ..... : 4
# BARRAS CARGADAS ..... : 6
-----
    
```

Datos de NODOS:

NOD#	Coord-X[m]	Coord-Y[m]	dx	dy	Yz
0001	0.0000	0.0000	1	1	0
0002	0.0000	4.0000	0	0	0
0003	2.0000	4.0000	0	0	0
0004	6.0000	4.0000	0	0	0
0005	10.0000	4.0000	0	0	0
0006	0.0000	6.0000	0	0	0
0007	2.0000	6.0000	0	0	0
0008	10.0000	8.0000	0	0	0
0009	6.0000	0.0000	1	1	1
0010	10.0000	0.0000	1	1	1

Datos de ELEMENTOS BARRA:

BAR#	nd-A	nd-B	tipo	secc	mate	cone
0001	1	2	1	3	1	0
0002	9	4	1	3	1	0
0003	10	5	1	3	1	0
0004	2	3	1	1	1	0
0005	3	4	1	1	1	0

0006	4	5	1	1	1	0
0007	2	6	1	2	1	0
0008	3	7	1	2	1	0
0009	5	8	1	2	1	0
0010	6	7	1	1	1	0
0011	7	8	1	2	1	0

Secc. constantes TIPO:

SECC#	Area[m2]	Iz[m4]	fy[]	ZN-A[m]	ZN-B[m]
0001	1.00000E+09	1.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000
0002	1.00000E+09	2.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000
0003	1.00000E+09	3.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000

Materiales TIPO:

MAT#	E[T/m2]	Mu[]
0001	1.00000E+00	0.00

Cargas en NODOS:

NOD#	Fx[T]	Fy[T]	Mz[T.m]
0002	1.0000	-1.0000	1.0000
0003	-1.0000	1.0000	-1.0000
0004	1.0000	1.0000	1.0000
0005	-1.0000	-1.0000	-1.0000

Cargas en BARRAS:

BAR#	TIPO	VAR1	VAR2	VAR3
0004	2	-10.0000	1.0000	0.0000
0006	1	-3.0000	0.5000	1.0000
0009	2	-3.0000	1.2500	0.0000
0011	1	-3.0000	0.0000	0.0000
0011	2	-2.0000	2.0000	0.0000
0011	2	2.0000	6.0000	0.0000

< < < < RESULTADOS > > > >

Desplazamientos en NODOS:

NOD#	dx[m]	dy[m]	Yz[rad]
0001	0.000000	0.000000	-2.384791
0002	18.028568	0.000000	-8.751844
0003	18.028568	-20.119104	-6.175856
0004	18.028568	0.000000	-1.817307
0005	18.028568	0.000000	-6.088910
0006	36.459268	0.000000	-9.366628
0007	36.459268	-20.119104	-11.767299
0008	31.429492	0.000000	7.261627
0009	0.000000	0.000000	0.000000
0010	0.000000	0.000000	0.000000

Fuerzas Internas en BARRAS:

BAR#	NOD#	N[T]	V[T]	M[T.m]
0001	A-0001	12.264871	-2.387645	0.000000
	B-0002	-12.264871	2.387645	-9.550579
0002	A-0009	7.162847	8.096599	17.556178
	B-0004	-7.162847	-8.096599	14.830217
0003	A-0010	22.072280	3.291046	11.148774
	B-0005	-22.072280	-3.291046	2.015409
0004	A-0002	4.324328	12.787106	8.999112
	B-0003	-4.324328	-2.787106	6.575099
0005	A-0003	4.786960	-6.769768	-14.629174
	B-0004	-4.786960	6.769768	-12.449900
0006	A-0004	-2.309641	1.393079	-1.380317
	B-0005	2.309641	6.106921	-9.922369
0007	A-0002	-1.522235	0.936683	1.551467
	B-0006	1.522235	-0.936683	0.321899
0008	A-0003	10.556874	1.462632	7.054075
	B-0007	-10.556874	-1.462632	-4.128812
0009	A-0005	14.965359	6.600685	6.906960
	B-0008	-14.965359	-3.600685	17.679372
0010	A-0006	-0.936684	-1.522235	-0.321899
	B-0007	0.936684	1.522235	-2.722571
0011	A-0007	-0.136455	9.346809	6.851382
	B-0008	0.136455	15.391825	-17.679372

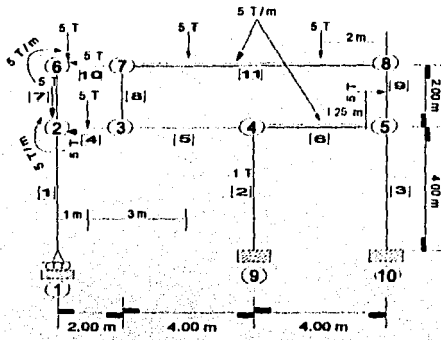
Reacciones en los APOYOS:

NOD#	FxA[T]	FyA[T]	MzA[T.m]
0001	2.387645	12.264871	0.000000
0009	-8.096599	7.162847	17.556178
0010	-3.291046	22.072280	11.148774

Equilibrio de fuerzas INTERNAS-EXTERNAS:

	FxT[T]	FyT[T]	
SUMA	-9.000000	41.499998	: Reacciones(apoyos)
SUMA	9.000000	-41.500000	: Acciones (cargas)

Tiempo empleado en ANALISIS [seg] 0000.17



Apuntes de Análisis Estructural II. [INPUT]
 Ejemplo de Marco Plano con rotación en nodos.

10 11 3 0 1 0 0 2 6

0001	0.0000	0.0000	1	1	0
0002	0.0000	4.0000	0	0	0
0003	2.0000	4.0000	0	0	0
0004	6.0000	4.0000	0	0	0
0005	10.0000	4.0000	0	0	0
0006	0.0000	6.0000	0	0	0
0007	2.0000	6.0000	0	0	0
0008	10.0000	6.0000	0	0	0
0009	6.0000	0.0000	1	1	1
0010	10.0000	0.0000	1	1	1

0001	1	2	1	3	1	0
0002	9	4	1	3	1	0
0003	10	5	1	3	1	0
0004	2	3	1	1	1	0
0005	3	4	1	1	1	0
0006	4	5	1	1	1	0
0007	2	6	1	2	1	0
0008	3	7	1	2	1	0
0009	5	8	1	2	1	0

0010	6	7	1	1	1	0
0011	7	8	1	2	1	0

0001	1.0000000E+09	1.0000000E+00	0.00	0.0000
0002	1.0000000E+09	2.0000000E+00	0.00	0.0000
0003	1.0000000E+09	3.0000000E+00	0.00	0.0000

0001	1.0000000E+00	0.00
------	---------------	------

0002	-5.00	-5.00	-5.00
0006	-5.00	-5.00	-5.00

0004	2	-5.00	1.00	0.00
0006	1	-5.00	0.00	0.00
0009	2	-5.00	1.25	0.00
0011	1	-5.00	0.00	0.00
0011	2	-5.00	2.00	0.00
0011	2	-5.00	6.00	0.00

TESIS para obtener el título de INGENIERO CIVIL
 presenta: **Mateo Espinoza Arnulfo Javier.**
 Asesor: Ing. José Paulo Mejorada Mota.

Análisis : 21 de julio de 1995
 Comentarios : Ejemplo de Marco Plano con rotación.
 Apuntes de Análisis Estructural II.

```

-----
# NODOS ..... : 10
# BARRAS ..... : 11
# SECC. CONSTANTES TIPO ..... : 3
# SECC. VARIABLES TIPO ..... : 0
# MATERIALES TIPO ..... : 1
# CONECTIVIDADES en BARRAS ..... : 0
# APOYOS ELASTICOS en NODOS ..... : 0
# NODOS CARGADOS ..... : 2
# BARRAS CARGADAS ..... : 6
-----
    
```

Datos de NODOS:

```

-----
NOD#   Coord-X[m]   Coord-Y[m]   dx   dy   Yz
-----
0001   0.0000         0.0000      1    1    0
0002   0.0000         4.0000      0    0    0
0003   2.0000         4.0000      0    0    0
0004   6.0000         4.0000      0    0    0
0005  10.0000         4.0000      0    0    0
0006   0.0000         6.0000      0    0    0
0007   2.0000         6.0000      0    0    0
0008  10.0000         6.0000      0    0    0
0009   6.0000         0.0000      1    1    1
0010  10.0000         0.0000      1    1    1
-----
    
```

Datos de ELEMENTOS BARRA:

```

-----
BAR# nd-A nd-B tipo secc mate cone
-----
0001  1  2  1  3  1  0
0002  9  4  1  3  1  0
0003 10  5  1  3  1  0
0004  2  3  1  1  1  0
0005  3  4  1  1  1  0
-----
    
```

0006	4	5	1	1	1	0
0007	2	6	1	2	1	0
0008	3	7	1	2	1	0
0009	5	8	1	2	1	0
0010	6	7	1	1	1	0
0011	7	8	1	2	1	0

Secc. constantes TIPO:

SEC#	Area[m2]	Iz[m4]	fy[.]	ZN-A[m]	ZN-B[m]
0001	1.00000E+09	1.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000
0002	1.00000E+09	2.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000
0003	1.00000E+09	3.00000E+00	0.00	0.0000	0.0000

Materiales TIPO:

MAT#	E[T/m2]	Mu[.]
0001	1.00000E+00	0.00

Cargas en NODOS:

NOD#	Fx[T]	Fy[T]	Mz[T.m]
0002	-5.0000	-5.0000	-5.0000
0006	-5.0000	-5.0000	-5.0000

Cargas en BARRAS:

BAR#	TIPO	VARI	VAR2	VAR3
0004	2	-5.0000	1.0000	0.0000
0006	1	-5.0000	0.0000	0.0000
0009	2	-5.0000	1.2500	0.0000
0011	1	-5.0000	0.0000	0.0000
0011	2	-5.0000	2.0000	0.0000
0011	2	-5.0000	6.0000	0.0000

< < < < RESULTADOS > > > >

Desplazamientos en NODOS:

NOD#	dx[m]	dy[m]	Yz[rad]
0001	0.000000	0.000000	2.114045
0002	0.497040	0.000000	-4.600870

0003	0.497040	-17.765185	-1.468502
0004	0.497040	0.000000	0.338211
0005	0.497040	0.000000	-3.041389
0006	5.720869	0.000000	-4.711584
0007	5.720869	-17.765185	-9.848021
0008	5.720868	0.000000	6.859557
0009	0.000000	0.000000	0.000000
0010	0.000000	0.000000	0.000000

Fuerzas Internas en BARRAS:

BAR#	NOD#	N[T]	V[T]	M[T.m]
0001	A-0001	34.852088	-2.518093	0.000000
	B-0002	-34.852088	2.518093	-10.072373
0002	A-0009	12.741139	0.660072	1.066486
	B-0004	-12.741139	-0.660072	1.573802
0003	A-0010	37.406772	-3.141978	-4.002914
	B-0005	-37.406772	3.141978	-8.564998
0004	A-0002	-14.747782	20.043719	17.227535
	B-0003	14.747782	-15.043719	17.859903
0005	A-0003	-33.025864	-3.754831	-7.961341
	B-0004	33.025864	3.754831	-7.057984
0006	A-0004	-33.685936	8.986308	5.484183
	B-0005	33.685936	11.013692	-9.538951
0007	A-0002	9.808369	-12.265875	-12.155161
	B-0006	-9.808369	12.265875	-12.376588
0008	A-0003	18.798550	-18.278083	-9.898563
	B-0007	-18.798550	18.278083	-26.657602
0009	A-0005	26.393080	30.543958	18.103949
	B-0008	-26.393080	-25.543958	35.562092
0010	A-0006	7.265875	4.808369	7.376588
	B-0007	-7.265875	-4.808369	2.240150
0011	A-0007	25.543958	23.606920	24.417452
	B-0008	-25.543958	26.393080	-35.562092

Reacciones en los APOYOS:

NOD#	FxA[T]	FyA[T]	MzA[T.m]
0001	2.518093	34.852088	0.000000
0009	-0.660072	12.741139	1.066486
0010	3.141978	37.406772	-4.002914

Equilibrio de fuerzas INTERNAS-EXTERNAS:

	FxT[T]	FyT[T]	
SUMA	4.999999	85.000000	: Reacciones(apoyos)
SUMA	-5.000000	-85.000000	: Acciones (cargas)

Tiempo empleado en ANALISIS [seg] 0000.28

Bibliografía:

- [1] **Introducción a la Mecánica de Sólidos.**
Autor: Egor P. Popov.
Editorial: Limusa, México 1989.
- [2] **Algebra Lineal y sus Aplicaciones.**
Autor: Gilbert Strang.
Editorial: Addison-Wesley Iberoamericana, México 1990.
- [3] **Lenguaje C++, Programación Avanzada.**
Autor: Herbert Schildt.
Editorial: Osborne/Mc. Graw-Hill, México 1993.
- [4] **Theory of Matrix Structural Analysis.**
Autor: J. S. Przemieniecki.
Editorial: Mc. Graw-Hill Book Company, U. S. A. 1968.
- [5] **Computers Methods of Estructural Analysis.**
Autor: Beaufait, F.
Editorial: Prentice-Hall, U. S. A. 1966.
- [6] **Numerical Methods of Structural Analysis.**
Autor: Bathe, K. J.
Editorial: Prentice-Hall, U. S. A. 1971.
- [7] **Análisis Estructural**
Autor: Jeffrey P. Liable.
Editorial: Mc. Graw-Hill, México 1988.
- [8] **Análisis y Mecánica de las Estructuras.**
Autor: W. M. Jenkins.
Editorial: Representaciones y Servicios de Ingeniería, México 1985.
- [9] **Análisis Estructural.**
Autor: Jack C. Mc. Cormac.
Editorial: HARLA, México 1984.