33

2Ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCION AL ANALISIS DE ONDAS DE DAUBECHIES

Tesis
que para obtener el título de
matemático
presenta

Mateo Vásquez Ramírez

México, D.F. agosto 1995

CIUDAD UNIVERSITARIA

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios
Profesionales
Exp. Núm. 55

M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Universidad Nacional Autónoma de México.
P r e s e n t e .

Por medio de la presente, nos permitimos informar a Usted, que habiendo revisado el trabajo de tesis que realiz 6 el pasante Vásquez Ramírez Mateo

con número de cuenta 8453420-6 con el título:
"Introducción al Análisis de Ondas de Daubechies"

Consideramos que reune___ los méritos necesarios para que pueda continuar el trámite de su Examen Profesional para obtener el título de - Matemático.

GRADO NOMBRE Y APELLIDOS COMPLETOS	FIRMA
Dra. Zenaida Elvira Ramos Zúñiga Director de Tesis	Zenaida E Ramos
Dr. Francisco Larrión Riveroll	
Dr. Carlos José Enrique Signoret Poillon	
M. en C. José Luis Navarro Urrutia Suplente	
M. en C. Rogelio Jiménez Fragoso Suplente	

Ciudad Universitaria, D.F., a20 de junio de 1995

Con eterno cariño y agradecimiento: A mis padres, a mi esposa y a la Dra. Zenaida E. Ramos Zúñiga; para los cuales cualquier elogio a su invaluable ayuda es poco.

Y que decir de mis hermanos y familiares que de una o de otra manera me impulsaron y ayudaron. O de mis maestros con los que siempre estaré en deuda. Así como de mis amigos con quienes compartí mis penas y glorias; y porque no hasta "destrampes".

¡Muchas Gracias a Todos!

Contenido

Introducción.

La Teoría de paquetes de ondas (wavelets) está situada en la frontera de las matemáticas, cálculos científicos, procesamiento de señales y procesamiento de imágenes. El fin de la teoría es dar un conjunto coherente de conceptos, métodos y algoritmos para tratar con las dificultades encontradas en cada una de las disciplinas.

El análisis de paquetes de ondas ha llegado a tener aplicaciones en diversas áreas de la ciencia, porque tal análisis da información (del tipo escala-tiempo) sobre ciertas señales, imágenes y operadores, el cual es más manejable que el obtenido en el análisis estándar de Fourier (o los métodos de frecuencia y tiempo que se derivan de él).

Por muchos años, la función exponencial ha sido la función básica del análisis. La sucesión $(2\pi)^{-1/2}e^{ikx}$, $k \in \mathbf{Z}$ forma una base ortonormal del espacio estándar $L^2[0,2\pi]$; las series de Fourier son las combinaciones lineales $\sum a_k e^{ikx}$. Su contenido ha sido fuente de problemas y descubrimientos en análisis matemático. Los problemas surgen de la falta de un buen diccionario para traducir las propiedades de una función y las propiedades de sus coeficientes de Fourier.

Un ejemplo, dado por Kahane, J. P.; Ketznelson Y. y Leeuw, K. ilustra lo que sucede:

Sea $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$, basta dejar sin cambio el módulo de los coeficientes de Fourier de $f(x)$ y ajustar sus fases para que la función cambie totalmente de comportamiento. Esto muestra como es imposible predecir las propiedades (de magnitud y regularidad) de una función, unicamente del hecho de conocer el orden de magnitud de sus coeficientes de Fourier aún conociendo explícitamente los coeficientes de Fourier es difícil estudiar la función, por lo cual muchos problemas aún están abiertos.

A principios de los 80's, muchos científicos usaron wavelets como una alternativa al tradicional análisis de Fourier. Esta alternativa condujo a que los paquetes de ondas fueran usados en el tratamiento de señales acústicas (palabras o música), recoger e interpretar señales sísmicas y en las expediciones de exploración petrolera. Entre los matemáticos la investigación fue muy activa. Por mencionar solamente a los más notables Coifman, R. y Weiss, G., inventaron los "átomos" y "moléculas" que fue la forma básica de construir bloques de espacios de varias funciones, cuyas reglas de montaje son claramente definidas y fáciles de usar. Ciertas descomposiciones "atómicas", pudieron ser obtenidas mediante una versión discreta de una identidad, debida a Calderon, A., en la cual los paquetes de ondas están involucradas. La identidad fue descubierta por Morlet.

Estas investigaciones separadas tienen tanta semejanza, que parece necesario reunirlas en una teoría coherente, matemáticamente bién definida y al mismo tiempo, aplicable universalmente. Así las bases ortonormales de paquetes de ondas, reemplazan los paquetes de ondas empíricos de Liénard, Morlet y Rodet.

Las mismas bases ortonormales de los paquetes de ondas dan acceso directo a las descomposiciones atómicas de Coifan y Weiss, que están así relacionadas con la construcción de bases absolutas del espacio estándar de funciones y distribuciones. Las bases de los paquetes de ondas son universalmente aplicables; las funciones o distribuciones son la suma de series de paquetes de ondas, que contrariamente a lo que se esperarba con las series de Fourier, los coeficientes de la serie de los paquetes de ondas trasladan las propiedades de la función o distribución simple, precisa y fielmente. Así las propiedades excepcionales de las sumas de estas series especiales, llegan a ser las propiedades ordinarias de sumas genéricas de series de paquetes de ondas. Los algoritmos para análisis y síntesis de las series ortogonales de los paquetes de ondas, juegan un papel muy importante en diferentes áreas de la ciencia y la tecnología.

J.O. Strönberg fue el primero en construir una base ortonormal de $L^2(\mathbf{R})$, de la forma $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$; $j, k \in \mathbf{Z}$; donde para cada $m \in \mathbf{N}$ la función $\psi(x)$

es de clase C^m y decrece exponencialmente al infinito El trabajo desarrollado aquí es esencialmente debido a Daubechies, I. Lemarié, P. G. y Mallat, S.

Las series de paquetes de ondas proveen de una manera más simple y eficiente de analizar esas funciones y distribuciones que han sido estudiadas hasta aquí por medio de integrales y series de Fourier. Pero el análisis del paquete de ondas no puede reemplazar completamente el análisis de Fourier, ya que más tarde es usado para construir las bases ortonormales de los paquetes de ondas que se necesitan para el análisis con series del paquete de ondas básicos usamos lo que se "manipula bien" en análisis de Fourier; su formalismo algebraico. Una vez que los paquetes de ondas han sido construidos, éstos se ejecutan increiblemente bien en situaciones donde las integrales y series de Fourier involucran artificios matemáticos o cálculos numéricos pesados.

Las dos clases de análisis son complementarias, en vez de contraponerse. Más aún, son necesarios los rudimentos del análisis de Fourier, para cuando hacen su aparición los paquetes de ondas y los operadores.

El propósito de la tesis es exponer de manera muy sencilla, la forma en que se construyen los paquetes de ondas, siguiendo la exposición de Ingrid Daubechies.

Esta tesis consta de tres capítulos. En el primer capítulo se construye la función escalar de Daubechies con soporte en $[0,3]$; probamos que es continua en todas partes; diferenciable por la izquierda en los racionales diádicos y no diferenciables por la derecha en los racionales diádicos sobre $[0,3)$; probamos que sus translaciones enteras son ortonormales y que su integral definida es igual a uno. Esta función escalar da lugar a una clase infinita de funciones escalares, introducida por Daubechies, con el propósito de construir bases ortonormales de paquetes de ondas de soporte compacto. La función escalar estudiada aquí se distingue de otras, por la propiedad de que es la función escalar más simple, que puede ser usada para construir una base del paquete de ondas ortonormal completo de $L^2(\mathbf{R})$ cuyo paquete de ondas fundamenteal es continuo.

En el segundo capítulo, se da una contrucción de los paquetes de ondas, construyendo bases ortonormales. Los desarrollos de los paquetes de ondas que construimos pueden ser tomados como generalizaciones de las series de Haar, en las cuales la función de Haar es reemplazada por una función más suave.

Las funciones de Haar son creadas de una sola función de Haar por dilataciones diádicas y translaciones enteras. Además de que las sumas parciales de la serie de Haar representan un aproximación a f del orden de magnitud 2^{-N} o más; también tienen las propiedades de localización en el plano y escalonamiento. Esencialmente estas propiedades son compartidas por todas las bases de los paquetes de ondas, de donde podemos tomar esto como una definición aproximada de un desarrollo del paquetes de ondas.

En el tercer capítulo se da una pequeña introducción al análisis de multiresolución. Se estudian funciones f de tipo L^2 como un límite de aproximaciones sucesivas, cada una de las cuales es una versión suavizada de f, con más y más funciones suaves concentradas.

Las aproximaciones sucesivas en consecuencia usan una resolución diferente de donde el nombre de Análisis de Multiresolución. Los esquemas de aproximaciones sucesivas necesitan ser invariantes bajo translaciones.

Partiendo de un análisis del multiresolución se puede ver que las bases ortonormales de los paquetes de ondas pueden ser construidos a partir de este análisis de multiresolución.

I La función escalar de Daubechies en $[0,3]$

I.1 Preliminares.

Construimos la función escalar de Daubechies con soporte en $[0,3]$; probamos que es continua en todas partes; diferenciable por la izquierda en los racionales diádicos y no diferenciable por la derecha en los racionales diádicos sobre $[0,3)$; probamos que sus translaciones enteras son ortonormales y que su integral definida es igual a uno. Esta función escalar da lugar a una clase infinita de funciones escalares, introducida por Daubechies, con el propósito de construir bases ortonormales de paquetes de ondas de soporte compacto. La función escalar estudiada aquí se distingue de otras, por la propiedad de que es la función escalar más simple, que puede ser usada para construir una base del paquete de ondas ortonormal completo de $L^2(\mathbf{R})$, cuyo paquete de ondas fundamental es continuo.

Se dice que una función f tiene soporte en el intervalo $[0,3]$, si $f(x) = 0$ cuando $x \notin [0,3]$, y $[0,3]$ es el intervalo cerrado más pequeño para el cual se cumple. Para cada $j \in \mathbf{Z}$, el conjunto de los racionales *diádicos de nivel j* está definido por

$$D_j = \left\{ \frac{k}{2^j} : k \in \mathbf{Z} \right\} \tag{I.1.1}$$

Por consiguiente tenemos $D_{-1} = 2\mathbf{Z}$, $D_0 = \mathbf{Z}$, y $D_1 = \frac{1}{2}\mathbf{Z}$.

Definimos el anillo de los racionales diádicos (*Los diádicos*) como $D = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} D_k$. Notemos que D no es campo; pues falla la existencia del inverso multiplicativo para todo $x \in D$: Existe algún $x \in D$ para el cual $x^{-1} \notin D$; por ejemplo para $k = 3$ en el nivel j, tenemos que $x = \frac{3}{2^j}$, $j \in \mathbf{Z}$ implica que $x \cdot x^{-1} = (\frac{3}{2^j})(\frac{2^j}{3}) \neq 1$; pues $\frac{2^j}{3} \notin D$.

Muchos de nuestros cálculos serán en el campo de los números cuadráticos

$$\mathbf{Q}(\sqrt{3}) = \left\{ \alpha + \beta\sqrt{3} : \alpha, \beta \in \mathbf{Q} \right\}.$$

El cual tiene una operación conjugación, denotada por:

$$\overline{\left(\alpha + \beta\sqrt{3}\right)} = \alpha - \beta\sqrt{3}\,.$$

Convendremos en que $a = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$. Entonces a y $\overline{a}$ son raíces de $8x^2 - 4x - 1 = 0$. En efecto, calculando $x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(8)(-1)}}{2(8)} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{4}$, lo cual implica que:

$$a = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \quad \text{y} \quad \overline{a} = \frac{1-\sqrt{3}}{4}\,. \tag{I.1.2}$$

También se considerarán las cotas de a y $\overline{a}$, así:

$$-\frac{1}{2^2} < \overline{a} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} < a < 1\,.$$

I.2 La función escalar sobre D.

Aquí mostraremos que existe una única función φ definida sobre D que satisface las siguientes condiciones:

(i) $x \in D \Longrightarrow$ φ satisface la relación escalar:

$$\varphi(x)=a\varphi(2x)+\overline{(1-a)}\varphi(2x-1)+(1-a)\varphi(2x-2)+\overline{a}\varphi(2x-3) \quad \text{(I.2.1)}$$

(ii) φ satisface la propiedad de normalización:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(k) = 1 \qquad \text{(I.2.2)}$$

(iii) φ se anula fuera de $[0,3]$. (I.2.3)

Nuestro primer paso hacia la prueba será investigar funciones, que satisfagan las tres condiciones anteriores para $x \in \mathbf{Z}$.

Primero asumimos que existe al menos una solución φ, con $x \in \mathbf{Z}$. Entonces sustituyendo en (I.2.1), $x = 0, 1, 2, 3$ y usando (I.2.3) obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= a\varphi(0) \\
\varphi(1) &= (1-a)\varphi(0) + \overline{(1-a)}\varphi(1) + a\varphi(2) \\
\varphi(2) &= \overline{a}\varphi(1) + (1-a)\varphi(2) + \overline{(1-a)}\varphi(3) \\
\varphi(3) &= \overline{a}\varphi(3)
\end{aligned}$$

Cuya versión en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ (1-a) & \overline{(1-a)} & a & 0 \\ 0 & \overline{a} & (1-a) & \overline{(1-a)} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \end{bmatrix}.$$

Esta ecuación matricial y la normalización: $\varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)=1$; tienen exactamente una solución común, a saber:

$$\varphi(0)=0=\varphi(3);\varphi(1)=\frac{1+\sqrt{3}}{2};\varphi(2)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}. \qquad \text{(I.2.4)}$$

Estas son las condiciones que necesariamente debe satisfacer toda solución de φ.

Si una solución existe, entonces los valores de φ en $D-\mathbf{Z}$ están determinados por los valores de φ en $\mathbf{Z}$ y pueden ser calculados recursivamente por (I.2.1). La relación escalar expresa el valor de φ en $x \in D_j$, como una suma lineal de $\varphi(2x),\varphi(2x-1),\varphi(2x-2),\varphi(2x-3)$; los cuales son valores de φ en puntos diádicos que pertenecen al nivel anterior. Esta recursión puede ser repetida hasta que $\varphi(x)$ este expresada en términos de valores de φ en diádicos de nivel cero, los cuales son precisamente los valores de φ en $\mathbf{Z}$. Si $x \notin [0,3]$ entonces para un entero $x \notin \{0,1,2,3\}$, $\varphi(x)$ debe ser cero. Si x es diádico $x \notin [0,1]$, una iteración de la relación escalar expresa a $\varphi(x)$ en términos de φ evaluada sobre todos los enteros que no sean del conjunto $\{0,1,2,3\}$; en consecuencia $\varphi(x)=0$. Por consiguiente, si existe una función φ en D que satisfaga esas propiedades, entonces debe ser única.

Además, se sigue de este análisis que una solución de φ existe y toma los valores antes descritos sobre los enteros. Esta función, restringida a D, es la función escalar continua para 4 coeficientes de Daubechies sobre $[0,3]$. Los valores de φ sobre los semienteros son:

$$\varphi(\frac{1}{2})=\frac{2+\sqrt{3}}{4};\varphi(\frac{3}{2})=0;\varphi(\frac{5}{2})=\frac{2-\sqrt{3}}{4} \qquad \text{(I.2.5)}$$

I.3 Resultados básicos de φ en D.

Examinando los valores de φ en los enteros y los semienteros, se observan dos hechos importantes, a saber:

Teorema (1.3.i). $x \in D \Longrightarrow \varphi(x) \in D[\sqrt{3}]$.

Demostración: Procediendo por inducción sobre el nivel del argumento diádico. Primero se verifica que el resultado se cumple para los puntos diádicos del nivel cero: $D_0 = \mathbf{Z}$. En efecto, de (I.2.4), se tiene que:

$$\begin{array}{rclcrcl} \varphi(0) & = & 0 \in D[\sqrt{3}] & ; & \varphi(1) & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3} \in D[\sqrt{3}]; \\ \varphi(2) & = & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \in D[\sqrt{3}] & , & \varphi(3) & = & 0 \in D[\sqrt{3}]. \end{array}$$

Supongamos que el resultado se cumple pra el nivel j; es decir, para $x \in D_j = \left\{\frac{k}{2^j}: k, j \in \mathbf{Z}\right\}$ se tiene que $\varphi(x) \in D[\sqrt{3}]$ y

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\left(\frac{k}{2^j}\right) = a\varphi\left(\frac{k}{2^{j-1}}\right) + \overline{(1-a)}\varphi\left(\frac{k}{2^{j-1}}\right) + (1-a)\varphi\left(\frac{k}{2^{j-1}}-2\right) + \\ &\quad + \bar{a}\varphi\left(\frac{k}{2^{j-1}}-3\right). \end{aligned}$$

Hay que demostrar que el resultado se cumple para el nivel $j+1$, es decir, para $x \in D_{j+1} = \left\{\frac{k}{2^{j+1}}: k, j \in \mathbf{Z}\right\}$, se debe tener que $\varphi(x) \in D[\sqrt{3}]$. En efecto, calculando

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\left(\frac{k}{2^{j+1}}\right) = \varphi\left(\frac{k}{2(2^j)}\right) = \\ &= a\varphi\left(\frac{k}{2^j}\right) + \overline{(1-a)}\varphi\left(\frac{k}{2^j}-1\right) + (1-a)\varphi\left(\frac{k}{2^j}-2\right) + \bar{a}\varphi\left(\frac{k}{2^j}-3\right) \end{aligned}$$

vemos que es suma en términos del nivel j; pero la hipótesis de inducción es válida, luego entonces $\varphi\left(\frac{k}{2^{j+1}}\right) \in D[\sqrt{3}]$. □

Teorema (I.3.ii). *Los valores de φ son conjugados simétricos sobre $3/2$, es decir, si $x \in D$ entonces $3-x \in D$ y $\varphi(3-x) = \overline{\varphi(x)}$.*

Demostración: Procediendo por inducción sobre el nivel del argumento diádico. Para el nivel cero $D_0 = \mathbf{Z}$, se cumple; pues si $x \in D_0$, donde D_0 es el anillo $\mathbf{Z}$, entonces $-x \in D_0$, por consiguiente $3-x \in D_0$. También $\varphi(3-x) = \overline{\varphi(x)}$, es inmediato de (I.2.4), pues

$$\varphi(3-1) = \varphi(2) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \overline{\varphi(1)}$$

$$\varphi(3-2) = \varphi(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \overline{\varphi(2)}$$

$$\varphi(3-0) = \varphi(3) = 0 = \varphi(0) = \overline{\varphi(0)}.$$

Supongamos que el resultado es válido para $x \in D_j$. Hay que demostrarlo para $x \in D_{j+1}$. Es claro que $3-x \in D_{j+1}$, pues $3-x = \frac{3(2^{j+1})}{2^{j+1}} - \frac{2k'}{2^{j+1}} \in D_{j+1}$; ya que $x \in D_j = \{\frac{k}{2^j}: k, j \in \mathbf{Z}\}$.

Falta ver que si $x \in D_{j+1}$ entonces $\overline{\varphi(x)} = \varphi(3-x)$. De la relación escalar (I.2.1), calculamos $\overline{\varphi(x)}$ y $\varphi(3-x)$; con x de la forma: $x = \frac{k}{2^{j+1}}$, $k, j \in \mathbf{Z}$, así:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi(x)} &= \overline{\varphi\left(\frac{k}{2^{j+1}}\right)} = \overline{\varphi\left(\frac{k}{2(2^j)}\right)} = \overline{a}\varphi\left(3-\frac{k}{2^j}\right) + (1-a)\varphi\left(4-\frac{k}{2^j}\right) + \\ &\quad + \overline{(1-a)}\varphi\left(5-\frac{k}{2^j}\right) + \overline{a}\varphi\left(6-\frac{k}{2^j}\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\varphi(3-x) &= \varphi\left(3-\frac{k}{2^{j+1}}\right) = \varphi\left(3-\frac{k}{2(2^j)}\right) = a\varphi\left(6-\frac{k}{2^j}\right) + \\ &\quad + \overline{(1-a)}\varphi\left(5-\frac{k}{2^j}\right) + (1-a)\varphi\left(4-\frac{k}{2^j}\right) + \overline{a}\varphi\left(3-\frac{k}{2^j}\right).\end{aligned}$$

Por consiguiente las expresiones obtenidas para $\overline{\varphi(x)}$ y $\varphi(3-x)$ con $x \in D_{j+1}$, están dadas en términos del nivel j. Luego entonces para $x \in D_{j+1}$ se tiene $\overline{\varphi(x)} = \varphi(3-x)$. □

Teorema (I.3.iii). *φ satisface la propiedad de partición de la unidad*

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-k) = 1\,. \tag{I.3.1}$$

Demostración: Procediendo por inducción sobre el nivel del argumento diádico. Para el nivel cero $D_0 = \mathbf{Z}$, es inmediato pues de (I.2.4), se tiene:

$$\varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

Supongamos que la propiedad se cumple para el nivel j:
$x \in D_j \Longrightarrow \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-k) = 1$. Hay que demostrar que se cumple para el nivel $j+1$.

Sea $\frac{x}{2} \in D_{j+1}$, y usemos la relación escalar (I.2.1), para calcular $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(\frac{x}{2}-k)$, así:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(\frac{x}{2}-k) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(\frac{x-2k}{2}) = \\
&= a\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-2k) + (1-\bar{a})\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-2k-1) + \\
&\quad + (1-a)\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-2k-2) + \bar{a}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-2k-3) \\
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-2k-2) + \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-2k-1) \\
&= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \varphi(x-n)\,;
\end{aligned}$$

pero por hipótesis inductiva $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} \varphi\,(x-n) = 1$, por lo tanto
$\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} \varphi\left(\frac{x}{2}-k\right) = \sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} \varphi\,(x-n) = 1.$ □

Teorema (I.3.iv). *φ satisface la propiedad de partición de x:*

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}+k\right)\varphi(x-k)=x\,.$$

Demostración: Desarrollando $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}+k\right)\varphi(x-k)=x$, así

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\tfrac{3-\sqrt{3}}{2}+k\right)\varphi(x-k) &= \tfrac{3-\sqrt{3}}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi(x-k)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}k\varphi(x-k)=\\ &= \tfrac{3-\sqrt{3}}{2}+\sum_{k\in Z}k\varphi(x-k)=x\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}+k\right)\varphi(x-k)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}k\varphi(x-k)=x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. Luego basta probar que $\sum_{k\in\mathbf{Z}}k\varphi(x-k)=x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. De la relación escalar

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{Z}}k\varphi(x-k) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}}k\,[a\varphi(2x-2k)+(1-\bar{a})\varphi(2x-2k-1)+\\ &\quad +(1-a)\varphi(2x-2k-2)+\bar{a}\varphi(2x-2k-3)]\\ &= a\sum_{k\in\mathbf{Z}}k\varphi(2x-2k)+(1-\bar{a})\sum_{k\in\mathbf{Z}}k\varphi(2x-2k-1)+\\ &\quad +(1-a)\sum_{k\in\mathbf{Z}}k\varphi(2x-2k-2)+\bar{a}\sum_{k\in\mathbf{Z}}k\varphi(2x-2k-3)(*)\end{aligned}$$

Calculando cada sumando:

$$\begin{aligned}a\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{2k\varphi(2x-2k)}{2} &= a\sum_{k'\in\mathbf{Z}}\frac{k'\varphi(x'-k')}{2}-a\sum_{k'\in(2\mathbf{Z}+1)}\frac{k'\varphi(x'-k')}{2}=\\ &= \frac{a}{2}\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-a\sum_{k'\in(2\mathbf{Z}+1)}\frac{k'\varphi(x'-k')}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-\bar{a})\sum_{k\in\mathbf{Z}}k\varphi(2x-2k-1) &= (1-\bar{a})\sum_{k'\in(2\mathbf{Z}+1)}\frac{k'-1}{2}\varphi(x'-k')\\ (1-a)\sum_{k\in\mathbf{Z}}k\varphi(2x-2k-2) &= (1-a)\left[\sum_{k'}\frac{k'-2}{2}\varphi(x'-k')-\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - \sum_{k' \in (2\mathbf{Z}+1)} \frac{k'-2}{2}\varphi(x'-k')\Bigg] \\
\bar{a}\sum_{k\in\mathbf{Z}} k\varphi(2x-2k-3) &= \bar{a}\sum_{k' \in (2\mathbf{Z}+1)} \left(\frac{k'-3}{2}\right)\varphi\,(x'-k')
\end{aligned}
$$

Ahora sustituyendo cada sumando en $(*)$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbf{Z}} k\varphi(x-k) &= \frac{1}{2}(x'-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})-(1-a)-a\sum_{k' \in (2\mathbf{Z}+1)}\frac{k'\varphi(x'-k')}{2}+ \\
& (1-\bar{a})\sum_{k' \in (2\mathbf{Z}+1)}\frac{k'\varphi(x'-k')}{2}-\frac{1}{2}(1-\bar{a})- \\
& -(1-a)\sum_{k' \in (2\mathbf{Z}+1)} k'\varphi(x'-k')+ \\
& +(1-a)+\bar{a}\sum_{k' \in (2\mathbf{Z}+1)}\frac{k'\varphi(x'-k')}{2}-\frac{3}{2}\bar{a}.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbf{Z}} k\varphi(x-k) &= \frac{1}{2}(x'-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})+(-\frac{1}{2}+\frac{\bar{a}}{2}-\frac{3}{2}\bar{a}) \\
&= x-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{4} \\
&= x-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{2+1-\sqrt{3}}{4} \\
&= x-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

Así

$$
\sum_{k\in\mathbf{Z}} k\varphi(x-k) = x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{I.3.2}
$$

□

Teorema (I.3.v). *Para $0 \leq x \leq 1$ y $x \in D$, φ satisface las propiedades del intervalo translación:*

$$2\varphi(x) + \varphi(x+1) = x + \tfrac{1+\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(I.3.3)}$$
$$2\varphi(2+x) + \varphi(x+1) = -x + \tfrac{3-\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(I.3.4)}$$
$$\varphi(x) - \varphi(x+2) = x + \tfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(I.3.5)}$$

Demostración: De las propiedades de partición de la unidad y de la partición de x; además del hecho de que el soporte de φ está contenido en $[0,3]$, se obtienen estas propiedades. En efecto: Cuando $0 \leq x \leq 1$, se tiene que $1 \leq x+1 \leq 2$ y $2 \leq x+2 \leq 3$; de (I.3.1), se tiene que:

$$\varphi(x) + \varphi(x+1) + \varphi(x+2) = 1 \qquad (*).$$

Y de (I.3.2), para las k's que tengan sentido, es decir, $k = 0, -1, -2$; sustituyendo, obtenemos $-\varphi(x+1) - 2\varphi(x+2) = x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, por tanto

$$\varphi(x+2) = -\frac{x}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\varphi(x+1) \qquad (**),$$

luego sustituyendo ésto último en $(*)$, así:

$$\varphi(x) + \varphi(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\varphi(x+1) = 1\,,$$

lo cual implica

$$2\varphi(x) + \varphi(x+1) = x - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \quad \text{(I.3.3)}$$

De $(**)$ se obtiene $2\varphi(x+2) + \varphi(x+1) = -x + \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, $\quad \therefore$ (I.3.4).

Además de (I.3.3) y (I.3.4), obtenemos (I.3.5). En efecto

$$\varphi(x+1) = -2\varphi(x) + x + \frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \quad 2\varphi(x+2) - 2\varphi(x) + x + \frac{1+\sqrt{3}}{2} = -x + \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

por lo tanto $-\varphi(x+2)+\varphi(x) = x + \frac{1+\sqrt{3}}{4} - \frac{3-\sqrt{3}}{4}$, luego entonces

$$\varphi(x) - \varphi(x+2) = x + \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \qquad \therefore \quad \text{(I.3.5)}$$

$\square$

Teorema (I.3.vi). *Para* $0 \le x \le 1$ *y* $x \in D$:

$$\varphi(\tfrac{0+x}{2}) = a\varphi(x); \qquad (I.3.6)$$
$$\varphi(\tfrac{1+x}{2}) = \bar{a}\varphi(x) + ax + \tfrac{2+\sqrt{3}}{4}; \qquad (I.3.7)$$
$$\varphi(\tfrac{2+x}{2}) = a\varphi(1+x) + \bar{a}x + \tfrac{\sqrt{3}}{4}; \qquad (I.3.8)$$
$$\varphi(\tfrac{3+x}{2}) = \bar{a}\varphi(1+x) - ax + \tfrac{1}{4}; \qquad (I.3.9)$$
$$\varphi(\tfrac{4+x}{2}) = a\varphi(2+x) - \bar{a}x + \tfrac{3-2\sqrt{3}}{4}; \qquad (I.3.10)$$
$$\varphi(\tfrac{5+x}{2}) = \bar{a}\varphi(2+x). \qquad (I.3.11)$$

Demostración: Puesto $0 \le x \le 1$, $x \in D \iff 0 \le \frac{x}{2} \le \frac{1}{2}$

$$\varphi(\frac{0+x}{2}) = a\varphi(x) + (1-\bar{a})\varphi(x-1) + (1-a)\varphi(x-2) + \bar{a}\varphi(x-3)$$

$$\therefore \qquad \varphi(\frac{0+x}{2}) = a\varphi(x), \qquad \therefore \qquad (I.3.6).$$

Puesto que $0 \le x \le 1 \iff \frac{1}{2} \le \frac{1+x}{2} \le 1$:

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{1+x}{2}\right) &= a\varphi(1+x) + (1-\bar{a})\varphi(x) + (1-a)\varphi(x-1) + \bar{a}\varphi(x-2) \\
\therefore \quad \varphi\left(\frac{1+x}{2}\right) &= a\varphi(1+x) + (1-\bar{a})\varphi(x) \\
&= ax + \frac{2+\sqrt{3}}{4} - 2a\varphi(x) + (1-\bar{a})\varphi(x) \\
&= (1-\bar{a}-2a)\varphi(x) + ax + \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{1-\sqrt{3}}{4}\varphi(x) + ax + \frac{2+\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \varphi\left(\frac{1+x}{2}\right) = \bar{a}\varphi(x) + ax + \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \qquad \therefore (I.3.7)$$

Puesto que $0 \le x \le 1 \iff 1 \le \frac{2+x}{2} \le \frac{3}{2}$:

$$\varphi\left(\frac{2+x}{3}\right) = a\varphi(2+x) + (1-\bar{a})\varphi(1+x) + (1-a)\varphi(x) + \bar{a}\varphi(x-1)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{3+\sqrt{3}}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1+\sqrt{3}}{8}\varphi(x+1) + \frac{3-\sqrt{3}}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{8} + \\
&\quad + \frac{3+3\sqrt{3}}{8}\varphi(x+1) = \\
&= \frac{2+2\sqrt{3}}{8}\varphi(1+x) + \frac{2-2\sqrt{3}}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{4}\varphi(x+1) + \frac{1-\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad \varphi\left(\frac{2+x}{2}\right) = a\varphi(x+1) + \bar{a}x + \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad \therefore \quad \text{(I.3.8)}$$

Puesto que $0 \leq x \leq 1 \iff \frac{3}{2} \leq \frac{3+x}{2} \leq 2$:

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{3+x}{2}\right) &= a\varphi(3+x) + (1-\bar{a})\varphi(2+x) + (1-a)\varphi(1+x) + \bar{a}\varphi(x) \\
&= (1-\bar{a})\varphi(2+x) + (1-a)\varphi(1+x) + \bar{a}\varphi(x) \\
&= (1-a)\varphi(1+x) + \varphi(2+x) + \bar{a}\left[\varphi(x) - \varphi(2+x)\right] \\
&= (1-a)\varphi(1+x) - \frac{x}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\varphi(1+x) + \\
&\quad + \bar{a}\left[\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{4} - \frac{3-\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\varphi(1+x) - \frac{1}{2}\varphi(1+x)\right] \\
&= (\frac{1}{2} - a)\varphi(1+x) - \frac{x}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{4} + \bar{a}\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{1-\sqrt{3}}{4}\varphi(1+x) + \left(-\frac{1}{2} + \bar{a}\right)x + \frac{3-\sqrt{3}}{4} + \bar{a}\left[-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right] \\
&= \bar{a}\varphi(1+x) + \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)x + \frac{3-\sqrt{3}}{4} - \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\
&= \bar{a}\varphi(1+x) - ax + \frac{1}{4}, \qquad \therefore \quad \text{(I.3.9)}
\end{aligned}
$$

Puesto que $0 \leq x \leq 1 \iff 2 \leq \frac{4+x}{2} \leq \frac{5}{2}$:

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{4+x}{2}\right) &= a\varphi(4+x) + (1-\bar{a})\varphi(3+x) + (1-a)\varphi(2+x) + \bar{a}\varphi(1+x) \\
&= (1-a)\varphi(2+x) + \bar{a}\varphi(1+x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3-\sqrt{3}}{4}\varphi(2+x) - \bar{a}x + \frac{3-2\sqrt{3}}{4} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\varphi(2+x) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)\varphi(2+x) - \bar{a}x + \frac{3-2\sqrt{3}}{4} \\
&= a\varphi(2+x) - \bar{a}x + \frac{3-2\sqrt{3}}{4}, \qquad \therefore \quad \text{(I.3.10)}
\end{aligned}
$$

Puesto $0 \leq x \leq 1 \iff \frac{5}{2} \leq \frac{5+x}{2} \leq 3$:

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{5+x}{2}\right) &= a\varphi(5+x) + (1-\bar{a})\varphi(4+x) + (1-a)\varphi(3+x) + \bar{a}\varphi(2+x) \\
&= \bar{a}\varphi(2+x), \qquad \therefore \quad \text{(I.3.11)}
\end{aligned}
$$

Luego de lo anterior el teorema está probado. □

Las fórmulas de este teorema dan los valores de φ en los seis intervalos semienteros en $[0,3]$. Estás fórmulas proporcionan un método recursivo para clacular los valores de φ sobre D; él cual es similar al que proporciona la relación escalar. Sin embargo este método es más eficiente, pues el valor de φ en un nivel se obtiene de un sólo valor del nivel anterior, mientras que para la relación escalar se requieren cuatro valores del nivel anterior.

I.4 Extensión de la función escalar a R.

Definición (I.4.i). Sea f una función con dominio $[0,1]$ y rango $\mathbf{R}$, se define el operador K, como una función $K(f)$, con mismo dominio y rango que f, y que satisface:

$$K(f)\left(\tfrac{x}{2}\right) = af(x); \tag{I.4.1}$$

$$K(f)\left(\tfrac{x+1}{2}\right) = \bar{a}f(x) + ax + \tfrac{2+\sqrt{3}}{4}; \tag{I.4.2}$$

$$K(f)\left(\tfrac{x+2}{2}\right) = af(1+x) + a\bar{x} + \tfrac{\sqrt{3}}{4}; \tag{I.4.3}$$

$$K(f)\left(\tfrac{x+3}{2}\right) = \bar{a}f(1+x) - ax + \tfrac{1}{4}; \tag{I.4.4}$$

$$K(f)\left(\tfrac{x+4}{2}\right) = af(2+x) - \bar{a}x + \tfrac{3-2\sqrt{3}}{4}; \tag{I.4.5}$$

$$K(f)\left(\tfrac{x+5}{2}\right) = \bar{a}f(2+x). \tag{I.4.6}$$

Para $x \notin [0,3]$, se define $K(f)(x) = 0$.

Lema (I.4.ii). *$K(\varphi) = \varphi$ en D.*

Demostración: De la definición (I.4.i) y del teorema (I.3.vi), se tiene que:

$$\begin{aligned}
K(\varphi)\left(\frac{x}{2}\right) &= a\varphi(x) = \varphi\left(\frac{0+x}{2}\right);\\
K(\varphi)\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \bar{a}\varphi(x) + ax + \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \varphi\left(\frac{1+x}{2}\right);\\
K(\varphi)\left(\frac{x+2}{2}\right) &= a\varphi(1+x) + \bar{a}x + \frac{\sqrt{3}}{4} = \varphi\left(\frac{2+x}{2}\right);\\
K(\varphi)\left(\frac{x+3}{2}\right) &= \bar{a}\varphi(1+x) - ax + \frac{1}{4} = \varphi\left(\frac{3+x}{2}\right);\\
K(\varphi)\left(\frac{x+4}{2}\right) &= a\varphi(2+x) - \bar{a}x + \frac{3-2\sqrt{3}}{4} = \varphi\left(\frac{4+x}{2}\right);\\
K(\varphi)\left(\frac{x+5}{2}\right) &= \bar{a}\varphi(2+x) = \varphi\left(\frac{x+5}{2}\right);
\end{aligned}$$

Para $x \notin [0,3]$, $K(\varphi)(x) = 0 = \varphi(x)$. □

Sea $g_0: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función poligonal continua con puntos de quiebre en los enteros, tal que $g_0(n) = \varphi(n) \quad \forall n \in \mathbf{Z}$. Entonces, g_0 es continua con soporte $[0,3]$. Para $n \in \mathbf{N}$, definimos $g_n = K(g_{n-1}) = K^n(g_0)$. Fuera del intervalo $[0,3]$ g_n es cero; g_n debe ser continua en todas partes y con soporte en $[0,3]$. Además cada g_n es lineal sobre cada intervalo diádico $\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]$ para $m \in \mathbf{Z}$.

Denotemos por $\|f\|_\infty$ el máximo de los valores absolutos de f. Investigando en cada uno de los seis intervalos mitad, se tiene que: $\|f\|_\infty \leq 3$ entonces $\|K(f)\|_\infty \leq 3$. Puesto que $\|g_0\|_\infty \leq 3$, entonces para toda k, $\|g_n\|_\infty \leq 3$. Para $j, k \in \mathbf{Z}^+$, fijos. De la definición de K y el hecho de que $0 \leq |\overline{a}| \leq a$, tenemos que

$$\|g_k - g_{k+j}\|_\infty \leq a^k \|g_0 - g_j\|_\infty \leq a^k \left(\|g_0\|_\infty + \|g_j\|_\infty\right) \leq 6a^k. \qquad (I.4.7)$$

La primera desigualdad se sigue de la definición de K usando la técnica recursiva sobre cada uno de los seis intervalos mitad; la segunda desigualdad se sigue de la desigualdad del triángulo; y la tercera es consecuencia de las definiciones anteriores.

Por consiguiente $\|g_k - g_{k+j}\|_\infty \leq 6a^k$.

Como $a < 1$, tenemos que la sucesión $\{g_k\}$ es una sucesión de Cauchy de funciones con respecto a la norma $\| \quad \|_\infty$; y para cada x, la sucesión $g_k(x)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbf{R}$. Definimos la función g como $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Entonces g es continua, siendo el límite de una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente. Además que $\{g_n\}$ converge a g uniformemente con error geometricamente decreciente cuya razón está dada por el valor de a.

Puesto que g_k y φ coinciden sobre D_k, puntos diádicos de nivel k, la restricción de g a D es igual a φ. Por tanto, g es una extensión continua de φ, y extendemos φ a $\mathbf{R}$ por la definición $\varphi(x) = g(x)$ para toda $x \in \mathbf{R}$.

La propiedad del conjugado simétrico de φ sobre $3/2$ no puede ser extendida; en efecto, no puede ser expresada directamente; por la extensión de φ

a una función continua sobre $\mathbf{R}$. Sin embargo, como D es denso en $\mathbf{R}$, toda propiedad previamente establecida de φ, tal como la relación escalar, o la partición de la unidad, se extienden a $\mathbf{R}$ por continuidad.

I.5 Diferenciabilidad de la función escalar.

Teorema (I.5.i). *φ no es diferenciable por la derecha en cero.*

Demostración: Calculando el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \frac{\varphi(1/2^j) - \varphi(0)}{1/2^j} &= \lim_{j\to\infty} \frac{\varphi(1/2^j)}{1/2^j}; \quad \text{pues } \varphi(0) = 0 \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{a^j \varphi(1)}{1/2^j}; \quad \text{usando recursión en el intervalo mitad} \\
&= \lim_{j\to\infty} (2a)^j \varphi(1).
\end{aligned}$$

Este límite diverge, ya que $\varphi(1) \neq 0$ y $1 < 2a$. Por tanto φ no es diferenciable por la derecha en cero. □

Teorema (I.5.ii). *Existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Q}\left(\sqrt{3}\right)$, que dependen de k, j tal que para todo x, $0 \leq x \leq 1$, se tiene que $\varphi\left(\frac{k+x}{2^j}\right) = \alpha\varphi(x) + \beta x + \gamma$.*

Demostración: Se sigue del teorema (I.3.vi). □

Teorema (I.5.iii). *φ no es diferenciable por la derecha en todo diádico de $[0,3)$ y fuera de $[0,3)$ si lo es.*

Demostración: Puesto que $\varphi\left(\frac{k+x}{2^j}\right) = \alpha\varphi(x) + \beta x + \gamma$; y del teorema (I.5.i) sabemos que $\varphi(x)$ no es diferenciable por la derecha en cero, ésto implica que $\varphi\left(\frac{k+x}{2^j}\right)$ no lo es en todo diádico de $[0,3)$.

Por otro lado $\varphi(x) = 0$ para toda $x \notin [0,3)$, lo que implica que φ es diferenciable por la derecha fuera de $[0,3)$. □

Teorema (I.5.iv). *φ es diferenciable por la izquierda en 3, con derivada por la izquierda igual a cero.*

Demostración: Para mostrar que φ es diferenciable por la izquierda en 3. Consideraremos la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = 3$ y $x_k \leq 3$. Sin pérdida de generalidad, tomemos una subsucesión en la cual podemos asumir que $x_j \leq x_{j+1}$ para todo j, y que a lo más hay un elemento de la sucesión en cada intervalo $\left[3-\frac{1}{2^j}, 3-\frac{1}{2^{j+1}}\right]$. Y también, sin pérdida de generalidad podemos denotar este elemento por x_j.

Observemos que $\varphi'(3^-) = -\lim_{j\to\infty}\left(\frac{\varphi(3)-\varphi(x_j)}{3-x_j}\right)$.

Del teorema (I.3.vi) y de (I.4.7), vemos que

$$\left|\varphi(3)-\varphi(x_j)\right| \leq |\overline{a}|^j \, \|\varphi\|_\infty .$$

Además, ajustando nuestra sucesión anterior, ponemos

$$\frac{1}{2^j} \leq 3 - x_j \leq \frac{1}{2^{j+1}} .$$

Puesto que $|2\overline{a}| < 1$, tenemos

$$\left|\varphi'(3^-)\right| \leq \lim_{j\to\infty} \|\varphi\|_\infty \, |2\overline{a}|^j = 0 .$$

Así φ es diferenciable por la izquierda y su derivada es cero. □

Teorema (I.5.v). *φ es diferenciable por la izquierda en todo diádico.*

Demostración: Es inmediato, puesto que

$$\varphi\left(\frac{k+3}{2^j}\right) = a\varphi(3) + (\beta)3 + \gamma ,$$

también lo es. □

Denotemos la derivada por la izquierda por φ', y procedemos a investigar sus valores. De la relación escalar para φ, se obtiene la relación escalar para φ', es decir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varphi'(x) &= a\varphi'(2x) + \overline{(1-a)}\varphi'(2x-1) + (1-a)\varphi'(2x-2) + \\ &\quad + \overline{a}\varphi'(2x-3)\,;\end{aligned}$$

de donde se observa que esta relación es análoga a la de φ salvo por el factor $\frac{1}{2}$ en el lado izquierdo. Esta relación escalar para φ',permite calcular recursivamente los valores de φ' sobre D. La relación escalar para φ', es:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varphi'(0)\\ \varphi'(1)\\ \varphi'(2)\\ \varphi'(3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ (1-a) & \overline{1-a} & a & 0\\ 0 & \overline{a} & (1-a) & \overline{(1-a)}\\ 0 & 0 & 0 & \overline{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi'(0)\\ \varphi'(1)\\ \varphi'(2)\\ \varphi'(3)\end{pmatrix}$$

Así esta ecuación es análoga a la ecuación matricial para φ sobre los enteros, excepto que el lado izquierdo tiene un factor de $\frac{1}{2}$. Además de que en la ecuación matricial, los valores de φ' están relacionados por la propiedad de normalización; la cual se obtiene de la propiedad de diferenciabilidad por la izquierda, y la propiedad de partición de x de φ, entonces sustituyendo $x = 0$:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} + k\right)\varphi'(-k) = 1\,.$$

De esta manera la ecuación matricial junto con la propiedad de normalización tiene la solución única $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(1) = 1$, $\varphi'(2) = -1$, $\varphi'(3) = 0$.

Teorema (I.5.vi). *Si $x \in D$ entonces $\varphi'(x) \in D(\sqrt{3})$ y $\varphi'(x) = -\overline{\varphi'(3-x)}$.*

Demostración: Es inmediato, puesto que

$$\varphi'(x^-) \in D(\sqrt{3}) \text{ y } \varphi'(x^-) = -\overline{\varphi'((3-x)^-)}\,. \qquad \square$$

I.6 Propiedades de ortogonalidad de la función escalar.

Teorema (I.6.i). *Integral definida de la función escalar:*

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, dx = 1\,.$$

Demostración: Este resultado es una consecuencia directa de la propiedad de partición de la unidad. Para $K \in \mathbf{N}$ con $K \geq 10$, consideremos la función $F_K(x) = \sum_{k=-K}^{K} \varphi(x-k)$.

Puesto que φ tiene soporte en $[0,3]$, la propiedad de partición de la unidad muestra que f_K es uno sobre $[-K+3, K-3]$, cero en $(-\infty, -K-3]$ y cero en $[K+3, \infty)$. El valor de esta función es no constante sobre $[-K-3, -K+3]$ y sobre $[K-3, K+3]$. No importan los valores alcanzados sobre estos intervalos, notemos simplemente que el valor absoluto de las funciones f_K está acotado sobre estos intervalos por una cota C independiente de K porque la función escalar está acotada en valor absoluto por 3 y hay a lo más cuatro trasladados de φ que contribuyen con cada valor de $f_K(x)$. Por tanto, tenemos que:

$$\frac{2K+1}{2K+1} - C \leq \int_{\mathbf{R}} f_K(x)\, dx \leq \frac{2K+1}{2K+1} + C$$

donde C es independiente de K. Por tanto

$$1 = \lim_{K\to\infty} \left(\frac{1}{2K+1}\right) \int_{\mathbf{R}} \sum_{k=-K}^{K} \varphi(x-k)\, dx = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, dx$$

por tanto $\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, dx = 1$. □

Teorema (I.6.ii). *Propiedad de Ortogonalidad de la función escalar:*

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\varphi(x-k)\,dx = \delta_{k,0}\,, \quad \textit{para cada } k \in \mathbf{Z}\,.$$

Demostración: Definamos $\Lambda = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\varphi(x-k)\,dx$. Deseamos mostrar que $\Lambda_k = \delta_{k,0}$. Por un cambio de variable, vemos que $\Lambda_k = \Lambda_{-k}$. Para $k \geq 3$, los soportes de $\varphi(x)$ y $\varphi(x-k)$ son ajenos; así $\Lambda_k = 0$. Por tanto, sólo necesitamos probar el teorema para Λ_0, Λ_1 y Λ_2. Para cada $k = 0, 1, 2$, tomamos la definición de Λ_k y substituimos en la relación escalar $\varphi(x)$ y $\varphi(x-k)$ para obtener una expresión para Λ_k como una suma finita de términos de la forma: $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(2x-r)\varphi(2x-k-s)\,dx$ donde $r, s \in \mathbf{Z}$. Por otro cambio de variable, esta expresión es en realidad $\frac{1}{2}\Lambda_{s+2k-r}$ la cual debe de ser cero o $\frac{1}{2}\Lambda_0, \frac{1}{2}\Lambda_1$, o $\frac{1}{2}\Lambda_2$. Así obtenemos tres condiciones lineales sobre Λ_0, Λ_1 y Λ_2. Puesto que éstas son homogeneas, no tiene una unica solución. Sin embargo, para cada solución necesariamente tenemos $\Lambda_1 = 0$ y $\Lambda_2 = 0$. Esto establece el teorema para toda $k \neq 0$. Usando la propiedad de partición de la unidad, nuestro resultado sobre la integral definida de φ, y del hecho, que hemos probado, de que $\Lambda_k = 0$ para $k \neq 0$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
1 &= \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx \\
&= \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-k)\right)dx \\
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(x)\varphi(x-k)\,dx \\
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \Lambda_k = \Lambda_0\,;
\end{aligned}$$

el intercambio de la integral y la suma está justificado por el hecho de que φ tiene soporte compacto. □

I.7 El correspondiente paquete de ondas.

Definimos el correspondiente paquete de ondas de la función $\psi(x)$ por

$$\psi(x) \;=\; -\bar{a}\varphi(2x) + (1-a)\varphi(2x-1) - \overline{(1-a)}\varphi(2x-2) + a\varphi(2x-3) \qquad (*)$$

De esta definición, se sigue que ψ es continua con soporte en [0,3].

Teorema (I.7.i). *(Integral definida del paquete de ondas)*

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(x) = 0\,.$$

(El valor medio de $\psi(x)$ es cero).

Demostración: De $(*)$ e integrando:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \psi(x)\,dx \;&=\; (1-a)\int_{\mathbf{R}} \varphi(2x-1)dx + a\int_{\mathbf{R}} \varphi(2x-3)dx - \bar{a}\int_{\mathbf{R}} \varphi(2x)dx - \\ &- \overline{(1-a)}\int_{\mathbf{R}} \varphi(2x-2)dx = \frac{(1-a)}{2}\int_{\mathbf{R}} \varphi(u)du + \frac{a}{2}\int_{\mathbf{R}} \varphi(v)dv - \\ &- \frac{\bar{a}}{2}\int_{\mathbf{R}} \varphi(w)dw - \frac{(1-\bar{a})}{2}\int dz\,;\end{aligned}$$

haciendo los cambios de variable, respectivos:

$$\begin{aligned} u &= 2x-1 \Longrightarrow du = 2dx \\ v &= 2x-3 \Longrightarrow dv = 2dx \\ w &= 2x \quad\;\;\; \Longrightarrow dw = 2dx \\ z &= 2x-1 \Longrightarrow dz = 2dx\,. \end{aligned}$$

y por el teorema (I.6.i):

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx = 1$$

se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \psi(x)\,dx &= \frac{1-a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{\bar{a}}{2} - \frac{1-\bar{a}}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Longrightarrow \int_{\mathbf{R}} \psi(x)\,dx = 0\,.\end{aligned}$$

□

Teorema (I.7.ii). *(Propiedades de ortogonalidad del paquete de ondas):*

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(x)\psi(x-k)\,dx = \delta_{k,0} \quad \text{para todo } k \in \mathbf{Z}\,.$$

Demostración: Como $\psi(x)$, $\psi(x-k)$ están dadas por $\varphi(x), \varphi(x-k)$ se sigue del Teorema (I.6.ii). □

Teorema (1.7.iii). (Propiedad de Ortogonalidad de la función escalar y el paquete de ondas):

$$\int \varphi(x)\psi(x-k)\,dx = 0\,, \quad \forall k \in \mathbf{Z}\,.$$

Demostración: Sabemos de (I.2.1) que:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = a\varphi(2x) + (1-\bar{a})\varphi(2x-1) + (1-a)\varphi(2x-2)+ \\ +\bar{a}\varphi(2x-3)\,,\end{aligned}$$

y de (I.7.i):

$$\psi(x-k) = -\bar{a}\varphi(2x-2k) + (1-a)\varphi(2x-2k-1) - (1-\bar{a})\varphi(2x-2k-2)+$$

$$+a\varphi(2x-2k-3).$$

Calculando $\varphi(x)\psi(x-k)$ e integrando adecuadamente obtenemos los sumandos:

$$\begin{aligned}
\frac{-a\overline{a}}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x)\varphi(2x-2k)2dx &= \frac{-a\overline{a}}{2}\delta_{2k,0}\\
\frac{a(1-a)}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x)\varphi(2x-2k-1)2dx &= \frac{a(1-a)}{2}\delta_{2k+1,0}=0\\
\frac{-a(1-\overline{a})}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x)\varphi(2x-2k-2)2dx &= \frac{-a(1-\overline{a})}{2}\delta_{2k+2,0}\\
\frac{aa}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x)\varphi(2x-2k-3)2dx &= \frac{aa}{2}\delta_{2k+3,0}=0\\
\frac{-a(1-\overline{a})}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-1)\varphi(2x-2k)2dx &= \frac{-a(1-\overline{a})}{2}\delta_{2k-1,0}=0\\
\frac{(1-a)(1-\overline{a})}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-1)\varphi(2x-2k-1)2dx &= \frac{(1-a)(1-\overline{a})}{2}\delta_{2k,0}\\
\frac{-(1-\overline{a})^2}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-1)\varphi(2x-2k-2)2dx &= \frac{-(1-\overline{a})^2}{2}\delta_{2k+1,0}=0\\
\frac{a(1-\overline{a})}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-1)\varphi(2x-2k-3)2dx &= \frac{a(1-\overline{a})}{2}\delta_{2k+2,0}\\
\frac{-\overline{a}(1-a)}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-2)\varphi(2x-2k)2dx &= \frac{-\overline{a}(1-a)}{2}\delta_{2k-2,0}\\
\frac{(1-a)^2}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-2)\varphi(2x-2k-1)2dx &= \frac{(1-a)^2}{2}\delta_{2k-1,0}=0\\
\frac{-(1-a)(1-\overline{a})}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-2)\varphi(2x-2k-2)2dx &= \frac{-(1-a)(1-\overline{a})}{2}\delta_{2k,0}\\
\frac{a(1-a)}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-2)\varphi(2x-2k-3)2dx &= \frac{a(1-a)}{2}\delta_{2k+1,0}=0\\
\frac{-\overline{a}\overline{a}}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-3)\varphi(2x-2k)2dx &= \frac{-\overline{a}\overline{a}}{2}\delta_{2k-3,0}=0\\
\frac{\overline{a}(1-a)}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-3)\varphi(2x-2k-1)2dx &= \frac{\overline{a}(1-a)}{2}\delta_{2k-2,0}
\end{aligned}$$

$$\frac{-\overline{a}(1-\overline{a})}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-3)\varphi(2x-2k-2)2dx = \frac{-\overline{a}(1-\overline{a})}{2}\delta_{2k-1,0} = 0$$
$$\frac{a\overline{a}}{2}\int_{\mathbf{R}}\varphi(2x-3)\varphi(2x-2k-3)2dx = \frac{a\overline{a}}{2}\delta_{2k,0}$$

Por lo tanto, cancelando adecuadamente:

$$(0)\,(\delta_{2k-2,0}) + (0)\,(\delta_{2k,0}) + (0)\,(\delta_{2k+2,0}) = 0$$
$$\therefore \quad \int_{\mathbf{R}}\varphi(x)\psi(x-k)\,dx = 0\,;$$

para toda $k \in \mathbf{Z}$. □

Teorema (I.7.iv). *(Nulidad del primer momento del paquete de ondas):*

$$\int_{\mathbf{R}} x\psi(x)\,dx = 0\,.$$

Demostración: De la partición de x, sabemos que:

$$\sum\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}+k\right)\psi(x-k) = x\,;$$

multiplicando por $\varphi(x)$ e integrando:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}+k\right)\int_{\mathbf{R}}\psi(x-k)\varphi(x) = \int_{\mathbf{R}} x\varphi(x)\,dx\,.$$

pero

$$\int_{\mathbf{R}}\varphi(x)\psi(x-k)\,dx = 0$$

(teorema (I.7.iii)); por tanto

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}+k\right)\int_{\mathbf{R}}\psi(x-k)\varphi(x) = 0\,;$$

así:

$$\int_{\mathbf{R}} x\psi(x)\,dx = \mathbf{0}\,.$$

Observación:

Se usarán indistintamente en esta tesis, los siguientes símbolos

$$\int_{\mathbf{R}} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \quad \text{o} \quad \int$$

II Como hacer paquetes de ondas.

II.1 Introducción.

Los desarrollos en paquetes de ondas disfrutan de un gran número de buenas propiedades, no disponibles en otros tipos de desarrollos.

Para ver esto consideremos una función de valores reales $f(x)$ en el intervalo $[0,1]$. Que puede desarrollarse como una serie de Fourier:

$$f(x) \quad = \quad b_0 + \sum_1^{\infty}(b_k \cos 2\pi kx + a_k \operatorname{sen} 2\pi kx) \qquad \text{(II.1.1)}$$

o en serie de funciones de Haar:

$$f(x) \quad = \quad C_0 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} C_{jk}\psi(2^j x - k) \qquad \text{(II.1.2)}$$

donde $\psi(x)$ es la función definida por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{(II.1.3)}$$

Ambas series son ejemplos de desarrollos en términos de funciones ortogonales en $L^2(a,b)$

Las series de Fourier no están bien localizadas en el espacio. Si se esta interesado en el comportamiento de f en $[a,b]$ se necesita involucrar todos los coeficientes de Fourier. En cambio la serie de Haar está bien localizada; de hecho restringiéndonos al intervalo $[a,b]$, solamente sumamos en (II.1.2) sobre los índices para los cuales el intervalo

$$I_{jk} = \left[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\right] \quad \text{intersecta a } [a,b].$$

Notemos que I_{jk} es el soporte de $\psi(2^j x - k)$.

Además, las sumas parciales de las series de Haar (sumando para $0 \leq j \leq N$) representan una aproximación a f de orden de magnitud 2^{-N}

o más. Estas dos propiedades: Localización en el plano, y escalonamiento; son los distintivos del desarrollo del paquete de ondas. Además de que las funciones de Haar son creadas de una sola función de Haar ψ por dilataciones diádicas y translaciones enteras. Escencialmente la misma propiedad es compartida por todas las bases del paquete de ondas y pueden de hecho ser tomadas como una definición aproximada de un desarrollo del paquete de ondas.

Los desarrollos del paquete de ondas que vamos a construir pueden ser tomados como generalizaciones de las series de Haar, en donde la función de Haar es reemplazada por una función más suave. Podemos decir que propiedades queremos para estas funciones, y como construirlas. La manera más sencilla es considerando toda la linea como el dominio de nuestras funciones.

o más. Estas dos propiedades: Localización en el plano, y escalonamiento; son los distintivos del desarrollo del paquete de ondas. Además de que las funciones de Haar son creadas de una sola función de Haar ψ por dilataciones diádicas y translaciones enteras. Escencialmente la misma propiedad es compartida por todas las bases del paquete de ondas y pueden de hecho ser tomadas como una definición aproximada de un desarrollo del paquete de ondas.

Los desarrollos del paquete de ondas que vamos a construir pueden ser tomados como generalizaciones de las series de Haar, en donde la función de Haar es reemplazada por una función más suave. Podemos decir que propiedades queremos para estas funciones, y como construirlas. La manera más sencilla es considerando toda la linea como el dominio de nuestras funciones.

II.2 El bosquejo de los paquetes de ondas de Haar.

Empezemos con la función característica φ del intervalo $[0,1]$. Esta es una de las funciones más simples que podemos imaginar, la cual tiene las siguientes propiedades:

(i) Las translaciones enteras de φ; $\{\varphi(x-k)$ para $k \in \mathbf{Z}\}$ forman un conjunto ortonormal de funciones en $L^2(\mathbf{R})$.

(ii) φ es autosemejante. Si cortamos la gráfica por la mitad entonces cada mitad puede ser desarrollada para cubrir toda la gráfica. Esta propiedad puede ser expresada algebraicamente por la identidad escalar:

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1) \qquad (II.2.1)$$

Llamaremos a φ la función escalar.

El significado de la identidad escalar es el siguiente: Sea V_0 el espacio lineal generado de las funciones $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$ (o por abuso de notación la cerradura en $L^2(\mathbf{R})$ de este espacio lineal generado, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\varphi(x-k)$ con $\sum_k |a_k|^2 < \infty$). Este es un espacio natural, pues por (i) las funciones $\varphi(x-k)$ forman una base ortonormal para V_0. Por supuesto V_0 no es todo L^2; es el subespacio de funciones constantes por pedazos con discontinuidades de salto en $\mathbf{Z}$. Podemos obtener un gran espacio reescalonando. Denotemos por $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$ la retícula de los semienteros $\frac{k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, y V_1 denota el subespacio de L^2 de funciones constantes por pedazos con saltos en $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Es claro que $f(x) \in V_0$ si y sólo si $f(2x) \in V_1$, y las funciones $2^{1/2}\varphi(2x-k)$ forman una base ortonormal para V_1 (El factor $2^{1/2}$ es añadido para hacer la normalización $\|2^{1/2}\varphi(2x-k)\|_2 = 1$). La identidad escalar (II.2.1), o su versión transladada

$$\varphi(x-k) = \varphi(2x-2k) + \varphi(2x-2k-1) \qquad (II.2.1')$$

dice exactamente que $V_0 \subseteq V_1$, puesto que la base para V_0 está explícitamente representada como combinaciones lineales de elementos de una base de V_1.

Todo el argumento puede ser repetido hacia arriba y hacia abajo en la escala diádica. El resultado es una sucesión creciente de subespacios V_j para $j \in \mathbf{Z}$, donde V_j consiste de las funciones L^2 constantes por pedazos, con saltos en $2^{-j}\mathbf{Z}$, y las funciones $2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$, con $k \in \mathbf{Z}$ forman una base ortonormal para V_j. Podemos avanzar y regresar entre los espacios V_j reescalonando:

$$f(x) \in V_j \quad \text{si y sólo si} \quad f(2^{k-j}x) \in V_k\,,$$

y la identidad escalar (II.2.1), convenientemente reescalonada, es decir, $V_j \subseteq V_k$, si $j \leq k$. La sucesión $\{V_j\}$ es un ejemplo de lo que es llamado análisis de multiresolución. Hay otras dos propiedades de $\{V_j\}$ que son significativas, a saber:

$$\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\} \tag{II.2.2}$$

y

$$\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j \quad \text{es denso en } L^2 \tag{II.2.3}$$

En vista de (II.2.3), parecería tentativo, intentar combinar todas las bases ortonormales $\{2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\}$ de V_j en una base ortonormal para $L^2(\mathbf{R})$. Pero veamos que, si bien, $V_j \subseteq V_{j+1}$; la base ortonormal $\{2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\}$ para V_j no está contenida en la base ortonormal $\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x - k)\}$ para V_{j+1}. (Realmente, hay elementos distintos en la 2 bases ortonormales que no son ortogonales a los de la otra). Así nuestra primera tentativa para obtener una base ortonormal para $L^2(\mathbf{R})$ es defectuosa. ¿Podemos arreglarla?

Puesto que $V_0 \subseteq V_1$ y tenemos una base ortonormal para V_0 de la forma $\{\varphi(x-k)\}$ ¿Por qué no, intentamos completar por Gramm-Schmidt una base ortonormal de V_1 adjuntando funciones de la forma $\{\psi(x-k)\}$ para alguna función ψ? Esto es la misma cosa que preguntar por una base ortonormal de la forma deseada para el complemento ortonormal de V_0 en V_1, el cual denotamos por W_0, así $V_1 = V_0 \oplus W_0$ (suma directa del espacio de Hilbert).

Queremos tomar ψ exactamente como la función generadora de Haar. Notemos que ψ puede ser expresada en términos de φ por

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1) \tag{II.2.4}$$

la cual es muy parecida a la identidad escalar.

Ahora podemos reescalar el espacio W_0, así

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \tag{II.2.5}$$

y $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ es una base ortonormal para W_j. Si combinamos las condiciones: (II.2.2), (II.2.3), (II.2.5) obtenemos:

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j \tag{II.2.6}$$

y puesto que los espacios W_j son *todos mutuamente ortogonales* podemos ahora combinar todas las bases ortonormales para W_j en una base principal ortonormal $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ para $L^2(\mathbf{R})$. (El cambio, es que, hemos reemplazado la función escalar φ por el paquete de ondas ψ). Esto da la base de la serie de Haar para toda la recta. Hay una pequeña variación sobre este tema, que está quizas más estrechamente relacionado con el desarrollo de Haar sobre el intervalo unitario: En lugar de (II.2.6) podemos también escribir

$$L^2(\mathbf{R}) = V_0 \bigoplus \left(\bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j\right) \tag{II.2.6$'$}$$

y entonces combinar la base $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ para V_0, con las bases

$$\left\{2^{j/2}\psi(2^{1/2}x - k)\right\}_{k\in\mathbf{Z}},$$

para W_j con $j \geq 0$; para obtener una base ortonormal para $L^2(\mathbf{R})$.

II.3 Análisis de Multiresolución.

La moraleja de esto hasta aquí es que queremos primero construir una función escalar φ y asociar el análisis de multiresolución $\cdots \subseteq V_{-1} \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots$ antes construido para los paquetes de ondas.

Definición. Un análisis de multiresolución $\cdots \subseteq V_{-1} \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots$ con función escalar φ es una sucesión creciente de subespacios de $L^2(\mathbf{R})$ que satisface las 4 condiciones siguientes:

(i) Densidad: $\bigcup_j V_j$ es densa en $L^2(\mathbf{R})$,

(ii) Separación: $\bigcap_j V_j = \{0\}$,

(iii) Escalonamiento: $f(x) \in V_j \iff f(2^{-j}x) \in V_0$

(iv) Ortonormalidad: $\{\varphi(x-k)\}_{\gamma\in\mathbf{Z}}$ es una base ortonormal para V_0.

Se sigue de la definición que $\left\{2^{j/2}\varphi(2^j x - \gamma)\right\}_{\gamma\in\mathbf{Z}}$ forma una base ortonormal para V_j. Ya que $\varphi \in V_0 \subseteq V_1$ debemos tener que

$$\varphi(x) = \sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} a(\gamma)\varphi(2x-\gamma) \tag{II.3.1}$$

para algunos coeficientes $a(\gamma)$; se satisface entonces que:

$$\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} |a(\gamma)|^2 = 2 \tag{II.3.2}$$

y de hecho

$$a(\gamma) = 2\int \varphi(x)\overline{\varphi(2x-\gamma)}\,dx\,. \tag{II.3.3}$$

La ecuación (II.3.1) es análoga de (II.2.1), y nos referimos a ella como la identidad escalar.

Se sigue de la definición que la función escalar determina el análisis de multiresolución, pero no recíprocamente. Una cuestión más difícil, es como caracterizar estas funciones φ las cuales son funciones escalares para un análisis de multiresolución. Aquí esperamos que identidad escalar juegue un papel decisivo, pero antes podemos decir más, dada la necesidad de examinar ciertas condiciones algebraicas sobre los coeficientes $a(\gamma)$ que se siguen de la definición.

Primero hay una condición de consistencia que surge de (iv) y (II.3.1). Sabemos de (iv) que

$$\int \varphi(x-\gamma)\overline{\varphi(x)}\,dx = \delta(\gamma,0) \tag{II.3.4}$$

(δ de Kronecker).

Si usamos (II.3.1) y substituimos $\varphi(x-\gamma)$ y $\overline{\varphi(x)}$ en (II.3.4) obtenemos

$$\sum_{\gamma'\in\mathbf{Z}}\ \sum_{\gamma''\in\mathbf{Z}} a(\gamma')\overline{a(\gamma'')}\int \varphi(2x-2\gamma-\gamma')\overline{\varphi(2x-\gamma'')}\,dx =$$

$$= 2^{-1}\sum_{\gamma''=2\gamma+\gamma'}\ \sum a(\gamma')\overline{a(\gamma'')} = \delta(\gamma,0)$$

después el cambio de variable $x \to 2^{-1}x$ y el uso de (II.3.4). Reescribimos esto como

$$\sum_{\gamma'\in\mathbf{Z}} a(\gamma')\overline{a(2\gamma+\gamma')} = 2\delta(\gamma,0) \tag{II.3.5}$$

Notemos que (II.3.5) contiene a (II.3.2) como caso especial.

Otra condición algebraica que surge, es que, si asumimos que φ es integrable y $\int \varphi(x)\,dx \neq 0$. (Si $\int \varphi(x)\,dx = 0$ entonces lo mismo es verdad para todas las funciones en todo V_j, así no esperariamos tener la condición de densidad (i)). Entonces integramos (II.3.1) y hacemos un cambio de variable para obtener

$$\begin{aligned}\int \varphi(x)\,dx &= \sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} a(\gamma)\int \varphi(2x-\gamma)\,dx\\ &= \sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} a(\gamma)2^{-1}\int \varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

por tanto

$$\sum_{\gamma \in \mathbf{Z}} a(\gamma) = 2 \tag{II.3.6}$$

Ahora nos gustaría revertir el procedimiento:

Paso 1. Se producirán soluciones $a(\gamma)$ a las identidades algebraicas (II.3.5) y (II.3.6)

Paso 2. Se definirá la función escalar vía la identidad escalar (II.3.1). Notemos que (II.3.1) dice que φ es punto fijo de la transformación lineal

$$Sf(x) = \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}} a(\gamma) f(2x - \gamma) \tag{II.3.7}$$

Así, es razonable intentar construir φ, iterando,

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} S^n f \tag{II.3.8}$$

para alguna función inicial razonable f.

Paso 3. Se probará que la función φ que resuelve (II.3.1) (Normalizada así $\|\varphi\|_2 = 1$) genera un análisis de multiresolución. Este es el paso más ingenioso, porque hay contraejemplos para mostrar que no siempre es cierto (probar con $a(\gamma) = 1$ para $\gamma = 0, 3$; de otro modo $a(\gamma) = 0$ y $\varphi = \chi_{[0,3]}$, los cuales violan (iv)). Sin embargo, muchas elecciones de $a(\gamma)$ producen un análisis de multiresolución. La condición difícil de verificar es la ortonormalidad (iv), habremos de posponer la discusión de cuando y porque se cumple, para una sección posterior. Mostraremos como establecer la densidad (i) y separación (ii) dada la ortogonalidad y la condición de normalización adicional

$$\int \varphi(x)\, dx = 1 \tag{II.3.9}$$

Ahora estamos listos para movernos sobre el paso 4, el cual es la construcción del paquete de ondas en sí. Pero antes, demos las pruebas de densidad y separación:

Pruebas de densidad y separación.

Lema B1.1. *Sea V_0 cualquier subespacio de $L^2(\mathbf{R})$ el cual esta contenido en $L^\infty(\mathbf{R})$ y el cual tiene la propiedad de que*

$$\|f\|_\infty \leq c\|f\|_2 \quad \textit{para toda } f \in V_0 . \tag{B1.1}$$

Definimos V_j de la condición escalar (iii) (No asumimos la necesidad de la clasificación $V_j \subseteq V_{j+1}$). Entonces se cumple (ii).

Demostración: La condición escalar y un cambio de variable transforma (B1.1) en:

$$\|f\|_\infty \leq cm^{j/2}\|f\|_2 \quad \text{para toda } f \in V_j . \tag{B1.2}$$

Si $f \in \bigcap V_j$ entonces (B1.2) se cumple $\forall j$, y haciendo $j \to -\infty$ obtenemos $\|f\|_\infty = 0$ por tanto $f = 0$. □

La estimación (B1.1) es fácil de obtener en nuestro caso. Por simplicidad suponemos que φ está acotada y tiene soporte compacto, el cual será el caso en todos nuestros ejemplos. Entonces por la ortogonalidad (iv) tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} \varphi(x-\gamma) \int f(y)\overline{\varphi(y-\gamma)}\, dy \\ &= \int K(x,y) f(y)\, dy \end{aligned}$$

donde $K(x,y) = \sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} \varphi(x-\gamma)\overline{\varphi(y-\gamma)}$, así

$$|f(x)| \leq \left(\int |K(x,y)|^2\, dy\right)^{1/2} \|f\|_2 =$$

$$= \left(\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} |\varphi(x-\gamma)|^2\right)^{1/2} \|f\|_2$$

y $\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} |\varphi(x-\gamma)|^2$ es uniformemente acotada (por supuesto muchas condiciones más débiles sobre φ, tal como el decrecimiento rápido también lo implicará ésto).

Lema B1.2. *Asumimos que φ tiene soporte compacto y satisface (II.3.1), (II.3.9) y la condición de ortonormalidad (iv). Entonces la condición de densidad (i) se cumple.*

Prueba:

Sea

$$P_j f(x) = 2^j \sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} \varphi(2^j x - \gamma) \int f(y)\overline{\varphi(2^j y - \gamma)}\, dy$$

que denota la proyección ortogonal sobre V_j. Necesitamos mostrar que $\lim_{j\to\infty} P_j f = f$ en L^2 para toda $f \in L^2$, lo cual es equivalente a

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j f\|_2^2 = \|f\|_2^2\,;$$

por el teorema de Pitágoras.

Es suficiente probar esto para $f = \chi_A$, A cualquier intervalo, por un argumento de densidad. Pero

$$\|P_j\chi_A\|_2^2 = 2^j \sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} \int_A |\varphi(2^j y - \gamma)|^2\, dy =$$

$$= 2^{-j} \sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} \left|\int 2^j A\varphi(y-\gamma)\, dy\right|^2 .$$

Para j grande, $2^j A$ será un intervalo grande, así escencialmente otro

$$\int_{2^j A} \varphi(y-\gamma)\, dy = 0, \qquad \text{si} \qquad \gamma \notin 2^j A$$

o,

$$\int_{2^jA} \varphi(y-\gamma)\,dy = 1 \qquad \text{si} \qquad \gamma \in 2^jA \text{ por (II.3.9)}.$$

(Para γ en una vecindad pequeña de la frontera de 2^jA esto no es completamente correcto, pero en el límite podemos ignorar este detalle). Así

$$\|P_j\chi_A\|_2^2 \approx 2^{-j}\#\left\{\gamma \in 2^jA\right\} \approx \text{ longitud } (A) = \|\chi_A\|_2^2$$

y en el límite esto se convierte en igualdad. □

Nótese que podríamos revertir el argumento para deducir la necesidad de la condición de normalización (II.3.9).

II.4 Los paquetes de ondas.

Consideraremos la función escalar φ por ser el primer elemento $\varphi = \psi_0$ de un par de funciones ψ_0, ψ_1, con ψ_1 el paquete de ondas generador. Nos gustaría que las funciones $\{\psi_k(x-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z};k=0,1}$ sean una base ortonormal para V_1. Puesto que las funciones $\{\varphi(2x-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z}}$ ya forman una base ortogonal para V_1 las funciones $\psi_0(x)$ y $\psi_1(x)$ deben ser combinaciones lineales de $\varphi(2x-\gamma)$ que deben satisfacer una identidad

$$\psi_k(x) = \sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} a_k(\gamma)\varphi(2x-\gamma)\,; \quad k = 0,1 \tag{II.4.1}$$

que generaliza (II.3.1) (Por supuesto $a_0(\gamma) = a(\gamma)$).

Nótese que para $k = 1$ (II.4.1) es una fórmula explícita no hay nada que resolver. Pero ¿Qué clase de condiciones pondríamos a los coeficientes $a_k(\gamma)$? La misma razón que condujo a (II.3.5), conduce a

$$\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} a_j(\gamma')\overline{a_k(2\gamma+\gamma')} = 2\delta(j,k)\delta(\gamma,0) \tag{II.4.2}$$

En cambio, la condición

$$\int \varphi(x)\,dx \neq 0$$

no se puede algunas veces esperar a que se cumpla para ψ_1 (Por ejemplo las funciones de Haar), así las condiciones (II.3.6) solamente son recopiladas en nuestra nueva notación

$$\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} a_0(\gamma) = 2 \tag{II.4.3}$$

Lema II.4.1. *Si $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z}}$ es un conjunto ortonormal y si $a_j(\gamma)$ satisface (II.4.2) y (II.4.3) entonces $\{\psi_k(x-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z},k=0,1}$ es un conjunto ortonormal.*

Demostración: Es suficiente mostrar que

$$\int \psi_j(x)\overline{\psi_k(x-\gamma)}dx = \delta(j,k)\delta(\gamma,0) \tag{II.4.4}$$

Ahora

$$\int \psi_j(x)\overline{\psi_k(x-\gamma)}dx = \sum_{\gamma'\in\mathbf{Z}}\sum_{\gamma''\in\mathbf{Z}} a_j(\gamma')\overline{a_k(\gamma'')}\int \varphi(2x-\gamma')\overline{\varphi(2x-2\gamma-\gamma'')}dx$$

Pero la integral es $\frac{1}{2}\delta(\gamma', 2\gamma-\gamma'')$ por la ortonormalidad de $\varphi(x-\gamma)$, (II.4.4) se reduce a (II.4.2). □

Observación. Hemos omitido la justificación del intercambio de series e integrales,pero en la mayoría de los ejemplos veremos que en las series son sumas finitas.

Así $\{\psi_k(x-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z},k=0,1}$ es un conjunto ortonormal de funciones en V_1 ¿Es una base? (Una clase de pseudodimensión cuenta con argumentos que hacen esto muy plausible). Para mostrar que es una base es suficiente representar cada función $\varphi(2x-\bar{\gamma})$ como una combinación lineal, y sabemos que los coeficientes tendrán que ser:

$$\begin{aligned}\int \varphi(2x-\bar{\gamma})\overline{\psi_k(x-\gamma)}dx &= \sum \overline{a_k(\gamma')}\int \varphi(2x-\bar{\gamma})\overline{\varphi(2x-2\gamma-\gamma')}dx \\ &= \frac{1}{2}\overline{a_k(\bar{\gamma}-2\gamma)}.\end{aligned}$$

Así necesitamos mostrar que

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0,1}\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}}\overline{a_k(\bar{\gamma}-2\gamma)}\psi_k(x-\gamma) \tag{II.4.5}$$

es igual a $\varphi(2x-\bar{\gamma})$. Pero si substituimos (II.4.1) en (II.4.5) obtenemos

$$\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0,1}\sum_{\gamma'\in\mathbf{Z}}\overline{a_k(2\gamma'+\bar{\gamma})}a_k(2\gamma'+\gamma)\right)\varphi(2x-\gamma)$$

así es suficiente demostrar

$$\sum_{k=0,1} \sum_{\gamma' \in \mathbf{Z}} \overline{a_k(2\gamma' + \bar{\gamma})} a_k(2\gamma' + \gamma) = 2\delta(\gamma, \bar{\gamma}) \qquad \text{(II.4.6)}$$

para $\bar{\gamma} = 0$ o 1.

Lema II.4.2. *Siempre se cumple (II.4.6), por lo tanto $\{\psi_k(x-k)\}_{\gamma \in \Gamma, k=0,1}$ es una base ortonormal para V_1.*

Teorema II.4.3. *Supongamos que φ genera un análisis de multirresolución y $a_k(\gamma)$ satisface (II.4.2), (II.4.3) con ψ_k definida por (II.4.1) y $\psi_0 = \varphi$. Entonces las funciones $\left\{2^{j/2}\psi_1(2^j x - \gamma)\right\}$ para $j \in \mathbf{Z}$, $\gamma \in \mathbf{Z}$ forman una base ortonormal de $L^2(\mathbf{R})$.*

Demostración: Como antes, W_0 denota el complemento ortogonal de V_0 en V_1, $V_1 = V_0 \oplus W_0$. Afirmamos $\{\psi_1(x-\gamma)\}_{\gamma \in \mathbf{Z}}$ es una base ortonormal para W_0. Esto se sigue porque hemos tomado la base para V_1 dada por el lema II.4.2 y $\{\psi_0(x-\gamma)\}_{\gamma \in \mathbf{Z}}$ la cual es una base para V_0. Clasificándolos, obtenemos:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad \text{y} \quad \left\{2^{j/2}\psi_1(2^j x - \gamma)\right\}_{\gamma \in \mathbf{Z}}$$

es una base ortonormal para W_j. Pero $L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j$ por la condición de densidad. □

Como una variación del tema, se tiene la

Afirmación. El conjunto de funciones $\{\varphi(x-\gamma)\}$ para $\gamma \in \mathbf{Z}$ junto con $\left\{2^{j/2}\psi_1(2^j x - \gamma)\right\}$ para $j \geq 0$, $\gamma \in \mathbf{Z}$ forman una base ortonormal de $L^2(\mathbf{R})$.

La ventaja de esta variante es que escalamos solamente para reducciones más y más finas ($j \to \infty$) y cuidamos todas las descomposiciones más gruesas ($j < 0$) para la familia $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma \in \mathbf{Z}}$.

En suma hemos reducido la construcción de los paquetes de ondas a la solución de las identidades algebraicas (II.4.2) y (II.4.3), algunas condiciones técnicas para asegurar la condición de ortogonalidad (iv).

Paso 5. Se producirán las soluciones para (II.4.2) y (II.4.3).

Paso 6. Se establecerán varias propiedades del paquete de ondas de funciones: *regularidad, decrecimiento rápido al infinito y condiciones de momento.*

La razón de que hemos pospuesto algunos detalles en la construcción, hasta aquí, es que se requieren nuevas técnicas. Así, ahora es tiempo de abrir la puerta e invitar regresar a Fourier.

II.5 El punto de vista de la transformada de Fourier.

Supongamos que tomamos la transformada de Fourier. Porque la mayoria de nuestras identidades tiene una estructura convolucional, esperamos una simplificación, con identidades multiplicativas, que surgen en su lugar. Igualmente que antes, retomamos la cuestión de ortogonalidad, porque aquí la transformada de Fourier da un punto de vista completamente nuevo para manejar el problema. Dado $\varphi \in L^2$, ¿Cómo podemos distinguir si $\widehat{\varphi}$ o $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z}}$ son o no ortonormales?

Simplificaremos la cuestión si adaptamos la convención

$$\widehat{\varphi}(x) = \int e^{2\pi i x y}\varphi(y)\,dy \tag{II.5.1}$$

así que la fórmula de inversión de Fourier es

$$\widehat{\widehat{\varphi}}(x) = \varphi(-x) \tag{II.5.2}$$

y la fórmula de Plancharel es

$$\|\varphi\|_2 = \|\widehat{\varphi}\|_2 \tag{II.5.3}$$

Lema I.5.1. *$\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z}}$ es un conjunto ortonormal si y sólo si*

$$\sum |\widehat{\varphi}(\xi+\gamma)|^2 = 1 \quad \textit{para todo } \xi \tag{II.5.4}$$

Demostración: Por la fórmula de Plancharel, $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z}}$ es ortonormal si y sólo si

$$\int e^{2\pi i\xi\gamma}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \delta(\gamma,0) \tag{II.5.5}$$

Pero la integral sobre $\mathbf{R}$ puede ser separada en una integral sobre $[0,1]$ y sumar sobre $\mathbf{Z}$. Ya que $e^{2\pi i\xi\gamma}$ es periódica y obtenemos

$$\int_0^1 e^{2\pi i\xi\gamma}\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}}|\widehat{\gamma}(\xi+\gamma)|^2 d\xi = \delta(\gamma,0)$$

lo cual significa que la función $\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+\gamma)|^2$ sobre $[0,1]$ tiene como coeficientes de Fourier $\delta(\gamma,0)$, por lo tanto debe ser la función constante dada por (II.5.4). □

Ahora la identidad escalar (II.4.1) se transcribe en la condición

$$\widehat{\psi}_k(\xi) = A_k\left(\frac{1}{2}\xi\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{1}{2}\xi\right) \tag{II.5.6}$$

donde

$$A_k(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} a_k(\gamma)e^{2\pi i\gamma\xi} \tag{II.5.7}$$

ésto se efectúa usando la definición de la transformada de Fourier y un cambio de variable.

Notemos que $A_k(\xi)$ es suave y periódica. Entonces de (II.4.3):

$$A_0(0) = 1 \tag{II.5.8}$$

y de (II.3.9):

$$\widehat{\varphi}(0) = 1\,. \tag{II.5.9}$$

Iterando (II.5.6) para $k=1$ (recordemos que $\psi_0 = \varphi$):

$$\widehat{\psi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} A_0\left(2^{-j}\xi\right) \tag{II.5.10}$$

De (II.5.8) podemos justificar la convergencia uniforme local del producto infinito.

Sustituyendo (II.5.10) en (II.5.6) obtenemos

$$\widehat{\psi}_k(\xi) = A_k\left(\frac{1}{2}\xi\right)\prod_{j=2}^{\infty} A_0\left(2^{-j}\xi\right)\,. \tag{II.5.11}$$

Así las funciones A_k completa y explícitamente determinan los paquetes de ondas.

La parte más intrincada del proceso de transcripción es la identidad (II.4.2) que los coeficientes $a_k(\gamma)$ deben satisfacer. ¿Qué podemos decir de las funciones A_k? Antes de tratar con esta pregunta directamente, repitamos el proceso que nos condujo a (II.4.2), esto es la consistencia de (II.4.1), conocida como (II.5.6), con la ortonormalidad, conocida como (II.5.4). En otras palabras, si $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z}}$ es ortonormal entonces (II.5.4) debe cumplirse, y si (II.5.6) define $\widehat{\psi}_k$ entonces queremos el análogo de (II.5.4), a saber:

$$\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi+\gamma)\overline{\widehat{\psi}_j(\xi+\gamma)} = \delta_{jk} \tag{II.5.12}$$

Ahora sean $\eta_1 = 0$ y $\eta_2 = \frac{1}{2}$. Hay representaciones de las clases laterales del subgrupo $\mathbf{Z}$ en $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Entonces los puntos de la retícula $\mathbf{Z}$ puede ser representada unicamente como $2(\gamma+\eta_p)$, donde γ varía en $\mathbf{Z}$ y $p = 1,2$. Entonces

$$\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi+\gamma)\overline{\widehat{\psi}_j(\xi+\gamma)} = \sum_{p=1}^{2}\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi+2(\gamma+\eta_p))\cdot\overline{\widehat{\psi}_j(\xi+2(\gamma+\eta_p))}$$

por la parametrización de $\mathbf{Z}$, y si sustituimos (II.5.6) y usamos la periodicidad de A_k obtenemos:

$$\sum_{p=1}^{2} A_k\left(\frac{1}{2}\xi+\eta_p\right)\overline{A_j\left(\frac{1}{2}\xi+\eta_p\right)}\sum_{\gamma\in\mathbf{Z}}\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{1}{2}\xi+\eta_p+\gamma\right)\right|^2.$$

La suma interna sobre $\mathbf{Z}$ da la constante 1, y (II.5.12) da la condición de consistencia

$$\sum_{p=1}^{2} A_k(\xi+\eta_p)\overline{A_j(\xi+\eta_p)} = \delta_{jk} \tag{II.5.13}$$

Esto es la transformada de Fourier equivalente de (II.4.2). Notemos que (II.5.13) implica que

$$|A_k(\xi)| \leq 1 \tag{II.5.14}$$

lo que implica el acotamiento de las transformadas de Fourier $\widehat{\psi}_k$.

Podemos ahora dar la prueba faltante del lema 4.2. Notemos que (II.5.13) dice que, para cada ξ la matriz de 2×2, $\{A_k(\xi + \eta_p)\}$ es unitaria por renglones. Pero esto es equivalente a que sea unitaria por columnas,

$$\sum_{k=0,1} A_k(\xi + \eta_p)\overline{A_k(\xi + \eta_q)} = \delta_{pq} \tag{B2.1}$$

Ahora sustituyendo (II.5.7) en (B2.1) obtenemos:

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{4} \sum_{k=0,1} \sum_{\gamma'\in\mathbb{Z}} a_k(\gamma' + \gamma)\overline{a_k(\gamma')} e^{2\pi i\gamma\eta_p} e^{2\pi i\gamma'(\eta_p - \eta_q)} \right) e^{2\pi i\gamma\xi} = \delta_{pq}$$

Mirando esto como una identidad en desarrollos de series de Fourier podemos concluir que

$$\frac{1}{4} \sum_{k=0,1} \sum_{\gamma'\in\mathbb{Z}} a_k(\gamma' + \gamma)\overline{a_k(\gamma')} e^{2\pi i\gamma\eta_p} e^{2\pi i\gamma'(\eta_p - \eta_q)} = \delta_{pq}\delta(\gamma, 0).$$

Escogiendo $\eta_p = 0$ y sumando sobre q obtenemos (II.4.6) para $\overline{\gamma} = 0$, ya que

$$\sum_{q=1}^{2} e^{-2\pi i\gamma'\eta_p} = \begin{cases} 2 & \text{si } \gamma' \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Analogamente, escogiendo $\eta_p = \frac{1}{2}$, multiplicando por $e^{2\pi i\eta_q}$ y sumando sobre q obtenemos (II.4.6) para $\overline{\gamma} = 1$.

Es tiempo de probar la ortonormalidad de $\{\varphi(x - \gamma))_{\gamma\in\mathbb{Z}}$ directamente. Para esto necesitamos una hipótesis adicional.

Teorema II.5.2. *Supongamos*

$$A_0(\xi) \neq 0 \quad \textit{para} \quad |\xi| \leq \frac{1}{4} \tag{II.5.15}$$

Entonces $\{\varphi(x - \gamma)\}_{\gamma\in\mathbb{Z}}$ *es ortonormal.*

Demostración: Construimos una sucesión de funciones φ_j tal que $\{\varphi_j(x - \gamma)\}_{\gamma\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal, y tal que $\varphi_j \to \varphi$ en norma, en L^2 cuando $j \to \infty$. Para

φ_0 simplemente tomamos $\widehat{\varphi}_0(\xi) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\xi)$. Entonces $\{\varphi_0(\xi-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z}}$ es ortonormal por el lema (II.5.1) porque (II.5.4) tiene exactamente un término no cero.

Inductivamente definimos funciones φ_j por

$$\widehat{\varphi}_j(\xi) = A_0\left(\frac{1}{2}\xi\right)\widehat{\varphi}_{j-1}\left(\frac{1}{2}\xi\right) \tag{II.5.16}$$

Pretendemos que $\{\varphi_j(x-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z}}$ es ortonormal otra vez.

Esto se sigue de (II.5.13) con $j = k = 0$ y el lema I.5.1. Puede deducirse de:

$$\varphi_j(x) = \sum_{\gamma\in\mathbf{Z}} a_0(\gamma)\varphi_{j-1}(2x-\gamma) \tag{II.5.17}$$

la cual es una transformada que no es de Fourier; de (II.5.16) y (II.4.2). Notemos que:

$$\widehat{\varphi}_j(\xi) = \left(\prod_{k=1}^{j} A_0\left(2^{-k}\xi\right)\right)\chi_{[-2^{j-1},2^{j-1}]}(\xi), \tag{II.5.18}$$

a fin de que $\widehat{\varphi}_j \to \widehat{\varphi}$ puntualmente, por (II.5.10).

Nos gustaría mostrar que $\varphi_j \to \varphi$ en norma L^2. Esto será suficiente para completar la demostración, porque el límite de la norma de conjuntos ortonormales es un conjunto ortonormal. Este es el punto clave de la demostración, donde las hipótesis no desaparecidas deben de ser usadas.

Según la fórmula de Plancharel es suficiente mostrar que $\widehat{\varphi}_j \to \widehat{\varphi}$ en norma en L^2 y puesto que tenemos convergencia puntual, nos gustaría usar el teorema de la convergencia dominada. Notemos primero que $\widehat{\varphi} \in L^2$ según el teorema de Fatou, puesto que es el límite puntual de $\widehat{\varphi}_j$ y $\|\widehat{\varphi}\|_2 = 1$. Así podemos usar un multiplo de $\widehat{\varphi}$ como un denominador. Comparando (II.5.18) y (II.5.10) vemos que

$$\widehat{\varphi}_j(\xi) = \begin{cases} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{\widehat{\varphi}(2^{-j}\xi)} & \text{si } |\xi| \le 2^{j-1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{II.5.19}$$

Pretendemos que $\widehat{\varphi}$ esté acotada en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. El punto es que $\widehat{\varphi}$ es continua, y por (II.5.15) $A_0(2^{-j}\xi) \neq 0$ para $|\xi| \leq \frac{1}{2}$. Así $\widehat{\varphi}$ no es vacío en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y $|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq c|\widehat{\varphi}(\xi)|$ para $c = \left(\inf_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |\widehat{\varphi}|\right)^{-1}$. □

II.6 La receta.

Hasta ahora hemos indicado todos los principales pasos en la construcción, pero hemos dejado lo primero al último. Necesitamos encontrar soluciones efectivas a las identidades algebraicas (II.5.8), (II.5.13) y (II.5.15). Hay varios accesos a este problema. Describimos uno que es debido a Ingrid Daubechies.

Buscamos soluciones con solamente un número finito de $a_k(\gamma)$ diferentes de cero, lo que significa que $A_k(\gamma)$ son polinomios trigonométricos. Esto implica que la función escalar φ y el paquete de ondas ψ_1 tienen soporte compacto. Esto puede ser visto más facilmente del procedimiento de iteración (II.3.7) y (II.3.8). Diremos que $a(\gamma) = 0$, a menos que $\gamma \in [0, N]$; entonces si f tiene soporte en $[0, N]$, denotado por Sf.

Nos concentramos primero en encontrar la función A_0, la cual debe de satisfacer tres condiciones

$$A_0(0) = 1 \tag{II.6.1}$$

$$|A_0(\xi)|^2 + |A_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1 \tag{II.6.2}$$

$$A_0(\xi) \neq 0 \quad \text{para} \quad |\xi| \leq \frac{1}{4} \tag{II.6.3}$$

(Aquí (II.6.1) es (II.5.8), (II.6.2) es (II.5.13) para $j = k = 0$ y (II.6.3) es (II.5.15)). Y, por supuesto, A_0 debe ser de la forma

$$A_0(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}} a_0(\gamma) e^{2\pi i \gamma \xi} \quad (suma finita) \tag{II.6.4}$$

Notemos que $|A_0(\xi)|^2$ es entonces de la misma forma.

Ahora ya sabemos una solución, a saber

$$A_0(\xi) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{2\pi i \xi}\right) = e^{\pi i \xi} \cos \pi\xi$$

lo cual produce los paquetes de ondas de Haar. Esta fue una estimación poco satisfactoria por que los paquetes de ondas no son continuos. Una manera de crear continuidad y diferenciabilidad es tomar potencias de convolución, o en la transformada de Fourier tomar potencias ordinarias. Así estamos tentados a probar que

$$A_0(\xi) = \left(e^{\pi i \xi} \cos \pi\xi\right)^N$$

para alguna N grande. Desafortunadamente (II.6.2) no se satisface ampliamente, pero podemos fijar esto. Notemos que

$$\cos \pi \left(\xi + \frac{1}{2}\right) = -\operatorname{sen} \pi\xi\,,$$

esto es porque

$$|\cos \pi\xi|^2 + |\cos \pi \left(\xi + \frac{1}{2}\right)|^2 = 1\,.$$

Ahora tomemos la identidad $\cos^2 \pi\xi + \operatorname{sen}^2 \pi\xi = 1$ y elevada a la potencia impar, así:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\cos^2 \pi\xi + \operatorname{sen}^2\pi\xi\right)^5 \\ &= \cos^{10} \pi\xi + 5\cos^8 \pi\xi \operatorname{sen}^2\pi\xi + 10\cos^6 \pi\xi \operatorname{sen}^4\pi\xi + \\ &\quad + 10\cos^4 \pi\xi \operatorname{sen}^6\pi\xi + 5\cos^2 \pi\xi \operatorname{sen}^8\pi\xi + \operatorname{sen}^{10}\pi\xi\,. \end{aligned}$$

Tomemos la primera mitad de términos para $|A_0|^2$,

$$|A_0(\xi)|^2 = \cos^{10} \pi\xi + 5\cos^8 \pi\xi \operatorname{sen}^2\pi\xi + 10\cos^6 \pi\xi \operatorname{sen}^4\pi\xi\,. \qquad \text{(II.6.5)}$$

Reemplazando ξ por $\xi + \frac{1}{2}$ en la segunda mitad de los términos, así (II.6.2) es automática, y (II.6.1), (II.6.3) son inmediatas. Esto da una receta para producir $|A_0|^2$, y el resto para tomar una raíz cuadrada de la forma (II.6.4).

Nos gustaría tomar los coeficientes $a_0(\gamma)$ en (II.6.4) como reales, para producir una función escalar de valores reales (y también paquetes de ondas con valores en los reales). Existe el teorema de F. Riez, que asegura que esto es posible, la cual en este caso lo realizamos por prueba y error. Como:

$$\begin{aligned} |A_0(\xi)|^2 &= \cos^6 \pi\xi \left(\cos^4 \pi\xi + 5\cos^2 \pi\xi \operatorname{sen}^2\pi\xi + 10 \operatorname{sen}^4\pi\xi\right) \\ &= \cos^6 \pi\xi \left((\cos^2 \pi\xi - \sqrt{10}\operatorname{sen}^2\pi\xi)^2 + (5 + 2\sqrt{10})\cos^2 \pi\xi \operatorname{sen}^2 \pi\xi\right) \end{aligned}$$

Podemos tomar

$$
\begin{aligned}
A_0(\xi) &= \left(e^{\pi i\xi}\cos\pi\xi\right)^3\left(cos^2\pi\xi - \sqrt{10}\,\mathrm{sen}^2\pi\xi + i\sqrt{5+2\sqrt{10}}\cos\pi\xi\,\mathrm{sen}\,\pi\xi\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{2\pi i\xi}+1\right)^3\left[\frac{1-\sqrt{10}}{2} + \frac{1+\sqrt{10}}{4}\left(e^{2\pi ix}+e^{-2\pi ix}\right)\right] \\
&\quad +\frac{1}{4}\sqrt{5+2\sqrt{10}}\left(e^{2\pi ix}-e^{-2\pi ix}\right)\Big) \qquad \text{(II.6.6)}
\end{aligned}
$$

lo cual es claramente de la forma (II.6.4) con $a_0(\gamma)$ real y $a_0(\gamma) \neq 0$ si y sólo $-1 \leq \gamma \leq 4$.

Para completar el argumento necesitamos encontrar $A_1(\xi)$, también de la forma (II.6.4), la cual satisface

$$|A_1(\xi)|^2 + |A_1\left(\xi+\frac{1}{2}\right)|^2 = 1 \qquad \text{(II.6.7)}$$

y

$$A_0(\xi)\,\overline{A_1(\xi)} + A_0\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\overline{A_1\left(\xi+\frac{1}{2}\right)} = 0 \qquad \text{(II.6.8)}$$

(Estas son las condiciones restantes de (II.5.13)). Afortunadamente, esto puede ser cumplido, solo tomando

$$A_1(\xi) = e^{2\pi i\xi}\overline{\left(A_0(\xi+\frac{1}{2}\right)} \qquad \text{(II.6.9)}$$

lo cual es igual a poner:

$$a_1(\xi) = (-1)^{\gamma+1}\overline{a_0\,(1-\xi)} \qquad \text{(II.6.10)}$$

Entonces (II.6.7) y (II.6.8) se sigue directamente de (II.6.2) y la periocidad de A_0. Notemos también que $a_1(\gamma)$ son de valores reales si $a_0(\gamma)$ lo es.

La transformada de Fourier de ψ_1 esta dada por (II.5.11), la cual ahora es:

$$\widehat{\psi}_1(\xi) = A_1\left(\frac{1}{2}\xi\right)\prod_{j=2}^{\infty} A_0\left(2^{-j}\xi\right) \qquad \text{(II.6.11)}$$

con A_0 dada por (II.6.6) y A_1 por (II.6.9). Si queremos obtener el paquete ψ_1, antes que su transformada de Fourier, primero encontramos $\psi_0 = \varphi$ iterando el mapeo

$$Sf(x) = \sum_{\gamma} a_0(\gamma) f(2x - \gamma) \tag{II.6.12}$$

empezando con una f razonable, que satisfaga

$$\int f(x)\, dx = 1 ,$$

y entonces

$$\psi_1(x) = \sum_{\gamma} a_1(\gamma)\varphi(2x - \gamma) \tag{II.6.13}$$

Hay una vía alternativa para construir la función escalar que produce una base del paquete de ondas diferente. Tiene la ventaja de que requiere menos álgebra, pero la desventaja de que los paquetes de ondas producidos no están soportados compactamente. Empezamos con la base de Haar de la función escalar $\chi_{[0,1]}$ cuya transformada de Fourier es $e^{\pi i\xi}(\operatorname{sen}\pi\xi/\pi\xi)$, y tomamos los N productos de convoluciones

$$g = \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} * \cdots * \chi_{[0,1]} \qquad (N \text{ factores})$$

de tal suerte que

$$\widehat{g}(\xi) = \left(e^{\pi i\xi} \frac{\operatorname{sen}\pi\xi}{\pi\xi} \right)^N .$$

Se puede ver que $g \in C^{N-1}$, pero por supuesto hemos destruido la ortonormalidad de los trasladados por $\mathbf{Z}$ que teniamos para $\chi_{[0,1]}$. Escribamos:

$$h(\xi) = \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{g}(\xi + k)|^2 \right)^{1/2}$$

y observamos que h es periódica y $0 < c_1 \le h(\xi) \le c_2 < \infty$. Entonces hemos de tomar solamente

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{g}(\xi)/h(\xi) ,$$

y (II.5.4) es automática, así tenemos la ortonormalidad de $\{\varphi(x-\gamma)\}_{\gamma\in\mathbf{Z}}$. Notemos que $\widehat{g}(0)=1$ y $\widehat{g}(\gamma)=0$ para $\gamma\neq 0$ así $\widehat{\varphi}(0)=1$ como era requerido.

¿Qué podemos decir sobre la identidad escalar? Bien, es cierta para g, es decir

$$\widehat{g}(\xi)=B(\xi/2)\widehat{g}(\xi/2) \quad \text{donde} \quad B(\xi)=\left(e^{\pi i\xi}\cos\pi\xi\right)^{N}$$

tiene la forma requerida (II.6.4). Entonces se sigue que

$$\widehat{\varphi}(\xi)=A_0(\xi/2)\,\widehat{\varphi}(\xi/2)\ , \quad \text{donde} \quad A_0(\xi)=B(\xi)h(\xi)/h(2\xi)\,.$$

Ahora A_0 es periódica, con lo que debe tener la forma (II.6.4), pero la suma no es más grande que lo finito. Esto es donde perdemos el soporte compacto de φ. En el otro sentido A_0 es claramente suave, así los coeficientes de Fourier en (II.6.4) deben rápidamente decrecer, lo que implica que φ es rápidamente decreciente.

La construcción de $A_1(\xi)$ y la transformada de Fourier del paquete de ondas $\widehat{\psi}_1(\xi)$ entonces procede vía (II.6.9) y (II.6.11) como antes.

II.7 Suavidad de los paquetes de ondas.

¿Cómo suavizar nuestros paquetes de ondas? Ya que las entendemos mejor por el lado de la transformada de Fourier, usaremos el principio de decrecimiento rápido al infinito de $\hat{\varphi}$ que implica la suavidad de φ (Estableceremos suavidad de la función escalar y pasarla a los wavelets vía (II.6.13)). Por ejemplo, mostrar que:

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq c(1+|\xi|)^{-N-1-\epsilon} \tag{II.7.1}$$

implica que $\varphi \in C^N$. ¿Cómo estableceremos (II.7.1)?

Tenemos la representación del producto infinito (II.5.10) la cual dice

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} A_0\left(2^{-k}\xi\right) \tag{II.7.2}$$

y A_0 es periódica. Puesto que cada factor no decrece rápido al infinito ¿Por qué decrecería el producto? Esto es un misterio, el cual esta resuelto viéndolo en el caso más simple, $A_0(\xi) = \cos \pi\xi$. Entonces

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos 2^{-k}\pi\xi = \frac{\operatorname{sen} \pi\xi}{\pi\xi} \tag{II.7.3}$$

decae en razón $\mathcal{O}(|\xi|^{-1})$.

Para la mayoría de los ξ, los valores de $\cos 2^{-k}\pi\xi$ llegarán a ser pequeños y esto hace el producto (II.7.3) pequeño. Y para N grande se toma $\xi = 2^N$. Por consiguiente $\cos 2^{-k}\pi\xi = \pm 1$ para $k = 1, \ldots, N$, $\therefore$ no decrece rápido al infinito, pero entonces $\cos 2^{-N-1}\pi\xi = 0$ se aniquila. Podemos intentar cuantificar esta linea de razonamiento pero no hay gran paga en el resultado, por ejemplo, que $\operatorname{sen} \pi\xi/\pi\xi = \mathcal{O}\left(|\xi|^{-2/3}\right)$, tomaríamos (II.7.3) como punto de partida.

La expresión (II.6.6) para A_0, o cualquiera de sus más complicadas primas, contienen $\cos \pi\xi$ como un factor, muchas veces. Así, $\hat{\varphi}(\xi)$ contiene

$\operatorname{sen} \pi\xi/\xi$ como factor muchas veces, por consiguiente, esperamos decrecimiento. Desafortunadamente los otros factores crecen. Es más fácil trabajar con $|A_0|^2$ dado por (II.6.5), si recordamos tomar la raíz cuadrada al final. Tenemos el caso especial considerando,

$$|A(\xi)|^2 = (\cos \pi\xi)^6 \left(\cos^4 \pi\xi + 5\cos^2 \pi\xi \operatorname{sen}^2\pi\xi + 10 \operatorname{sen}^4\pi\xi\right) .$$

El primer factor produce decrecimiento $\mathcal{O}(|\xi|^{-6})$. El segundo factor puede ser escrito como $1 + 3\operatorname{sen}^2\pi\xi + 6\operatorname{sen}^4\pi\xi$ con lo que claramente tiene un valor máximo de 10 en $\xi = \frac{1}{2}$. Podemos obtener una estimación tosca para la razón de crecimiento producida por el segundo factor, por la siguiente razón: Si $|\xi| \approx 2^N$ entonces serán aproximadamente N factores, donde $2^{-k}|\xi|$ es grande, así una cota superior para el producto es una constante 10^N veces. Pero $10^N \approx |\xi|^\alpha$ para $\alpha = \log 10/\log 2 \approx 3.32$. Así, la razón de crecimiento es a lo más $\mathcal{O}(|\xi|^{3.32})$, así la combinación da $\mathcal{O}(|\xi|^{-2.68})$ para $|\widehat{\varphi}(\xi)|^2$ por tanto $\mathcal{O}(|\xi|^{-1.34})$ para $\widehat{\varphi}(\xi)$.

Esta es una aproximación desilucionante. De acuerdo a (II.7.1) es suficiente, solamente, mostrar que φ es continua. Puede ser mejorada pero no mucho. Para ver porque, consideramos $\xi = 2^N/3$. Entonces para cada uno de los N factores $2^{-k}\xi = 2^{N-k}/3$, $1 \leq k \leq N$, tenemos:

$$1 + 3\operatorname{sen}^2 2^{N-k}\pi/3 + 6\operatorname{sen}^4 2^{N-k}\pi/3 = 1 + 3\left(\sqrt{3}/2\right)^2 + 6\left(\sqrt{3}/2\right)^4 = 6.625$$

así una mínima cota inferior para α es $\log 6.625/\log 2$ lo cual produce $\mathcal{O}(|\xi|^{-1.636})$, como la ventaja óptima.

Si consideramos la familia del paquete de ondas, construido como lo esbozado en (II.6), tendremos $|A_0(\xi)|^2$ escrito como el producto de potencias más grandes y más grandes de $\cos \pi\xi$ de más y más segundos factores complicados. Así tenemos decrecimiento más rápido y crecimiento más rápido en $\widehat{\varphi}(\xi)$. ¿Cuál ganancia? Bién, sucede que el decrecimiento gana por el método, poco preciso, de estimación del crecimiento que no es suficientemente bueno para mostrar ésto. El resultado final es que, para crear los paquetes de onda de clase C^N, necesitamos para llevar a cabo la construcción empezar con $(\cos^2 \pi\xi + \mathrm{sen}^2 \pi\xi)^M = 1$, para M sobre el orden de $5(N+1)$. Esto significa, que hay un alto precio por pagar en términos de complejidad (El álgebra requerida para pasar de $|A_0|^2$ a A_0, por ejemplo). A fín de ganar una cantidad moderada de uniformidad.

Más recientemente, han sido encontradas mejores técnicas para estimar la uniformidad directamente, sin involucrar la transformada de Fourier.

Además de la uniformidad, otra propiedad importante de los paquetes de ondas, es la anulación de las condiciones de momento

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi_1(x)\, dx = 0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, N \tag{II.7.4}$$

las cuales son equivalentes a la anulación de las transformada de Fourier de orden superior en el origen

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \widehat{\psi}_1(0) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, N \tag{II.7.5}$$

En constraste con la uniformidad, sin embargo, es solamente el paquete de ondas, no la función escalar la que disfruta de esta propiedad. El significado de esta condición, es que implica una forma débil de localización en la frecuencia variable (la transformada de Fourier), ya que la transformada de Fourier de $\psi_1(2^j x - k)$ está principalmente concentrada alrededor de valores de $|\xi|$ sobre el orden de 2^j. (Hay aún otra familia de paquetes de onda en la cual la transformada de Fourier está soportada en una región anular $c_1 2^j \leq |\xi| \leq c_2 2^j$). Para nuestros paquetes de ondas se verifica (II.7.5). De (II.6.11) vemos que $\widehat{\psi}_1$ tiene un factor $A_1((1/2)\xi)$ y de (II.6.9) vemos que A_1 en $\xi = 0$ tiene el mismo orden cero que A_0 en $\xi = \frac{1}{2}$. Pero A_0 tiene un factor de $\cos \pi\xi$ para el orden 3, en nuestro particular ejemplo, y en orden M si empezamos con $(\cos^2 \pi x + \mathrm{sen}^2 \pi x)^M = 1$ en nuestra construcción. Notemos que en general las condiciones (II.6.1) y (II.6.2) implican que $A_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, mientras más aplanemos A_0 cerca de 0, más se anula cerca de $\frac{1}{2}$.

III Análisis de Multiresolución.

III.1.A. Análisis de multiresolución y bases de paquetes de onda ortonormales.

En esta sección, repasamos el análisis de multiresolución, y mostramos como bases ortonormales de paquetes de ondas pueden construirse partiendo de un análisis de multiresolución. Ilustramos esta construcción con ejemplos.

La idea de análisis de multiresolución, es escribir funciones f de tipo L^2 como un límite de aproximaciones sucesivas, cada una de las cuales es una versión suavizada de f, con más y más funciones suaves concentradas. Las aproximaciones sucesivas en consecuencia usan una resolución diferente, de donde el nombre de análisis de multiresolución. Los esquemas de aproximaciones sucesivas necesitan ser invariantes bajo translaciones. Especificando, un análisis de multiresolución consta de:

(i) Una familia de subespacios cerrados encajados $V_m \subset L^2(\mathbf{R}), m \in \mathbf{Z}$.

$$\cdots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots \tag{III.1.1}$$

tal que

(ii) $$\bigcap_{m\in\mathbf{Z}} V_m = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_{m\in\mathbf{Z}} V_m} = L^2(\mathbf{R}), \tag{III.1.2}$$

y

(iii) $$f \in V_m \iff f(2x) \in V_{m-1}, \tag{III.1.3}$$

además, hay una $\phi \in V_0$ tal que, para toda $m \in \mathbf{Z}$,

$$\phi_{mn}(x) = 2^{-m/2}\varphi(2^{-m}x - n)$$

constituye una base sin restricciones (absoluta) para V_m, esto es

(iv) $\overline{V_m = \text{Espacio lineal generado } \{\phi_{mn},\ n \in \mathbf{Z}\}}$ (III.1.4a)

y existen $0 < A \leq B < \infty$ tales que, para toda $\{C_n\}_{n \in \mathbf{N}} \in L^2(\mathbf{Z})$

$$A \sum_n |C_n|^2 \leq \| \sum_n C_n \phi_{mn} \|^2 \leq B \sum_n |C_n|^2 . \tag{III.1.4b}$$

Aquí $\phi_{mn}(x) = 2^{-m/2}\phi(2^{-m}x - n)$.

Sea P_m la proyección ortogonal sobre V_m. Entonces de (III.1.1), (III.1.2) se tiene que $\lim_{m \to -\infty} P_m f = f$, para toda $f \in L^2(\mathbf{R})$. La condición (III.1.3) asegura que las V_m corresponden a diferentes escalas, mientras que la invarianza translacional $f \in V_m \to f(x - 2^m n) \in V_m$ para toda $n \in \mathbf{Z}$ es una consecuencia de (III.1.4).

Ejemplo III.1.1 Un ejemplo típico es el siguiente. Tomamos los espacios V_m de funciones constantes por pedazos

$$V_m = \left\{ f \in L^2(\mathbf{R}) \colon f \text{ constante en } [2^m n, 2^m(n+1)), \quad \forall n \in \mathbf{Z} \right\} .$$

Las condiciones (III.1.1)-(III.1.3) son claramente satisfechas.

Las proyecciones P_m están definidas por

$$P_m f|_{[2^m n, 2^m(n+1))} = 2^{-m} \int_{2^m n}^{2^m(n+1)} f(x)\, dx .$$

Las sucesivas $P_m f$ (cuando m decrece) corresponden a aproximaciones de f en una escala cada vez más fina. Finalmente, podemos escoger para ϕ la función característica del intervalo $[0, 1)$,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, $\phi \in V_0$ y $V_m = \overline{\text{Espacio lineal generado } \{\phi_{mn}\}}$.

En lo que sigue, revisaremos este ejemplo para ilustrar la construcción de una base del paquete de ondas ortonormal del análisis de multiresolución.

Notemos que, en vista de (III.1.3), la condición (III.1.4a) puede ser reemplazada por la condición más débil

$$V_0 = \overline{\text{Espacio lineal generado}\,\{\phi_{0n}\}}\,.$$

Además por otro lado, sin perdida de generalidad, asumimos que las ϕ_{0n} son ortonormales (Lo cual implica automáticamente que las ϕ_{mn} son ortonormales para cada m fija.

Si las ϕ_{0n} no son ortonormales al iniciar, entonces se define $\tilde{\phi}$ por

$$\left(\widehat{\tilde{\phi}}\right)(\xi) = C\hat{\phi}(\xi)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2\right)^{-1/2} \qquad \text{(III.1.5)}$$

(Donde asumimos implicitamente que $\hat{\phi}$ decae suficientemente para hacer que la suma infinita converja).

Se encuentra que

$$\overline{\text{Espacio lineal generado}\,\{\phi_{0n}\}} = \overline{\text{Espacio lineal generado}\,\{\tilde{\phi}_{0n}\}}\,,$$

mientras que por otra parte, las $\tilde{\phi}_{0n}$ son ortonormales.

Continua ejemplo (III.1.1). En este caso las ϕ_{0n} son ortonormales desde el principio. Si definimos

$$C_{mn}(f) = \langle \phi_{mn}, f\rangle = 2^{-m/2}\int_{2^m n}^{2^m(n+1)} f(x)\,dx \qquad \text{(III.1.6)}$$

entonces $P_m f = \sum_n C_{mn}(f)\phi_{mn}$. Veamos la diferencia entre $P_m f$ y la aproximación siguiente $P_{m+1} f$. Puesto que:

$$\phi_{m+1n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_{m2n} + \phi_{m2n+1}\right)\,;$$

por consiguiente

$$C_{m+1n}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[C_{m2n}(f) + C_{m2n+1}(f)\right]\,.$$

Así, se ve $P_{m+1}f$ como una versión promedio de $P_m f$, i.e., como una aproximación a escala mayor. La diferencia entre estas dos aproximaciones sucesivas está dada por

$$P_m f - P_{m+1} f = \frac{1}{2} \sum_n [C_{m2n}(f) - C_{m2n+1}(f)] [\phi_{m2n} - \phi_{m2n+1}] \,.$$

El hecho notable sobre esta expresión es que puede ser escrito bajo una forma muy similar a (III.1.6).

Se define

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{III.1.7}$$

Entonces

$$\psi_{mn}(x) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}x - n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{m-12n} - \phi_{m-12n+1}) \tag{III.1.8}$$

y

$$Q_{m+1}f = P_m f - P_{m+1} f = \sum_n d_{m+1n}(f)\psi_{m+1n} \,, \tag{III.1.9}$$

donde

$$d_{m+1n}(f) = \langle \psi_{m+1n}, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [C_{m2n}(f) - C_{m2n+1}(f)] \,.$$

¿Qué es lo notable de esto? Notemos primero, que (III.1.7) para m fija, ψ_{mn} son ortonormales. La descomposición (III.1.9) es la expansión, con respecto a una base ortonormal, de $Q_{m+1}f$, la proyección ortogonal de f sobre $W_{m+1} = P_m L^2 - P_{m+1}L^2$, i.e., sobre el complemento ortogonal de V_{m+1} en V_m. El hecho sorprendente es que (III.1.9), los W_n son también (como lo son las V_m) generado por las translaciones y dilataciones ψ_{mn} de una sola función ψ. Una vez que ésto es entendido, es fácil construir una base del paquete de ondas (III.1.1), (III.1.2), $W_m \perp V_m$ y $V_{m-1} = V_m \oplus W_m$ implica que las W_m son todas mutuamente ortogonales, y que su suma directa es $L^2(\mathbf{R})$. Ya que para cada m, el conjunto $\{\psi_{mn}: n \in \mathbf{Z}\}$ constituye una base ortonormal para

W_m, se sigue que toda la colección $\{\psi_{mn}: m, n \in \mathbf{Z}\}$ es una base del paquete de ondas ortonormal para $L^2(\mathbf{R})$.

En el ejemplo anterior la función ψ es solamente la función de Haar, y es calro que las ψ_{mn} constituyen una base ortonormal. El ejemplo sin embargo muestra como esta base puede ser construida de un análisis de multiresolución.

Para un análisis de multiresolución, i.e., una familia de espacios V_m una función ϕ satisfaciendo (III.1.1)-(III.1.4), definimos W_m como el complemento ortogonal (como en el ejemplo III.1.1), en V_{m-1}, de V_m,

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m, \qquad W_m \perp V_m . \tag{III.1.10}$$

Equivalentemente

$$W_m = Q_m L^2(\mathbf{R}) \qquad \text{con} \qquad Q_m = P_{m-1} - P_m . \tag{III.1.11}$$

Se sigue inmediatamente que todas las W_m son versiones escalonadas de W_0,

$$f(x) \in W_m \iff f(2^m x) \in W_0 \tag{III.1.12}$$

y que las W_m son espacios ortogonales cuya suma es $L^2(\mathbf{R})$:

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} W_m . \tag{III.1.13}$$

Porque de las propiedades (III.1.1)-(III.1.4) de los V_m, sucede que en W_0 también (como en V_0) existe un vector ψ tal que su espacio lineal generado de translaciones enteras es W_0, i.e.,

$$\overline{\text{Espacio lineal generado}\,\{\psi_{0n}\}} = W_0 , \tag{III.1.14}$$

donde, como antes $\psi_{mn}(x) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}x - n)$ para $m, n \in \mathbf{Z}$.

Se sigue, de (III.1.12) que

$$\overline{\text{Espacio lineal generado}\,\{\psi_{mn}\}} = W_m \qquad \forall m \in \mathbf{Z} .$$

Intuitivamente, puede ser entendida esta similitud entre W_0 y V_0 por el hecho de que V_{-1} es *dos veces más grande que* V_0, ya que V_0 está generada por las translaciones enteras de una sola función ϕ_{00}, mientras que V_{-1} está generada por las translaciones enteras de dos funciones, a saber ϕ_{-10} y ϕ_{-11}. Por lo tanto parece natural que el complemento ortogonal W_0 de V_0 en V_{-1} está también generado por las translaciones enteras de una sola función. Este argumento señala que puede ser hecho rigurosamente usando argumentos de representaciones de grupos (lo cual esta fuera del tema de esta tesis). La sola prueba de existencia de una función ψ que satisface (III.1.14) no sería suficiente para própositos prácticos. Un análisis más detallado conduce al siguiente algoritmo para la construcción de ψ. Aparte, partimos de una función ϕ tal que las ϕ_{0n} son una base ortonormal para V_0 (si necesariamente aplicamos (III.1.5)). Ya que $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$ $= \overline{\text{Espacio lineal generado}\,\{\phi(2x-n)\}}$ existe C_n tal que

$$\phi(x) = \sum_n C_n \phi(2x-n)\,. \qquad \text{(III.1.15)}$$

Definimos entonces

$$\psi(x) = \sum_n (-1)^n C_{n+1} \phi(2x+n)\,. \qquad \text{(III.1.16)}$$

Las correspondientes ψ_{0n} constituirán una base ortonormal de W_0. Consecuentemente las ψ_{mn}, para m fija, constituirán una base ortonormal de W_m. Se sigue entonces de (III.1.12) que $\{\psi_{mn}: m,n \in \mathbf{Z}\}$ constituye una base ortonormal de los paquetes de onda para $L^2(\mathbf{R})$. Esto completa la construcción explícita, en el caso general, de una base de paquete de ondas ortonormal de un análisis de multiresolución.

Ejemplo (III.1.1) Como ya notamos antes, las ϕ_{0n} son ortonormales, en este ejemplo, y

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1)\,.$$

Aplicando el recíproco (III.1.5) y (III.1.6) entonces nos lleva a

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1)$$

lo que corresponde a (III.1.7).

Observaciones.

1. Las funciones ϕ, ψ tienen todas las propiedades anteriores y necesariamente satisfacen

$$\int \psi(x)\,dx = 0 \tag{III.1.17}$$

y

$$\int \phi(x)\,dx \neq 0\,,$$

donde asumimos implícitamente que ϕ, ψ actuan suficientemente bién, para que estas integrales tengan sentido (en todos los ejemplos de interés práctico $\phi, \psi \in L^1$).

Notamos también que la transición (III.1.5) de ϕ a $\widetilde{\phi}$, ortonormalizando las ϕ_{0n}, preserva

$$\int \phi(x)\,dx \neq 0\,.$$

2. Si se restringe al caso donde ϕ es una función real (como en el ejemplo anterior), entonces ϕ está determinada unicamente, adecuada a un signo, por el requerimiento de que las ϕ_{0n} son ortonormales. Entonces también se tiene

$$\int \phi(x)\,dx = \pm 1\,;$$

fijaremos el signo de ϕ, para que

$$\int \phi(x)\,dx = 1\,. \tag{III.1.18}$$

En la práctica, podemos empezar toda la construcción escogiendo una ϕ apropiada, i.e., una función ϕ que satisfaga (III.1.15) para alguna C_n. A condición de que ϕ sea *razonable* (suficiente, por ejemplo, que $\inf_{|\xi|\leq\pi} |\widehat{\phi}(\xi)| > 0$ y que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2$ está acotada), en el espacio lineal generado cerrado V_m de las ϕ_{mn} (m fija) entonces se satisfacen (III.1.1)-(III.1.4) y existe una base ortonormal asociada de paquetes de ondas. Dos ejemplos típicos son:

Ejemplo (III.1.2).

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Esta es una función lineal por pedazos; los espacios V_m consisten de funciones lineales continuas por pedazos. Las C_n están dadas por

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x) + \phi(2x-1) + \frac{1}{2}\phi(2x-2).$$

Ejemplo (III.1.3).

$$\phi(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ -2x^2 + 6x - 3 & 1 \leq x \leq 2, \\ (3-x)^2 & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Esta es una función cuadrática por pedazos; los espacios V_m consisten de funciones cuadráticas de clase C^1 por pedazos. Los C_n están dadas por

$$\phi(x) = \frac{1}{4}\phi(2x) + \frac{3}{4}\phi(2x-1) + \frac{3}{4}\phi(2x-2) + \frac{1}{4}\phi(2x-3).$$

En estos dos últimos ejemplos la correspondiente ψ será, respectivamente, continua y lineal por pedazos, o clase C^1 y cuadrática por pedazos. Partiendo de que son funciones definidas por pedazos uno puede, de hecho, construir bases ortonormales de paquetes de ondas con un número arbitrariamente grande de derivadas continuas. Estas bases son las bases de Battle-Lemarié.

En estas construcciones la función inicial ϕ tien soporte compacto, pero sus ϕ_{0n} no son ortogonales, como se ilustró en los dos ejemplos anteriores. Por lo tanto se tiene que aplicar (III.1.5) antes de usar (III.1.15), (III.1.16); la transición $\phi \rightarrow \tilde{\phi}$ en (III.1.5) lleva a una función con soporte no compacto $\tilde{\phi}$ en una de soporte no compacto ψ. Típicamente los paquetes de onda de Battle-lemairé tienen decrecimiento exponencial.

Vemos más adelante que, para la construcción de bases ortonormales de paquetes de ondas soportados compactamente, es más natural partir de los coeficientes $C_n$que de la función ϕ.

Hasta ahora nos hemos restringido a una dimensión. Es muy fácil, sin embargo, extender el Análisis de Multiresolución a más dimensiones. Como mostraron R. Coifman y Y. Meyer, esta extensión ya inherente en la primera construcción por P.G. Lemairé y Y. Meyer de una base del paquete de ondas n-dimensional. Se convierte en mucho más transparente, desde el punto de vista del Análisis de Multiresolución. Ilustramos esto para dos dimensiones. El caso de n dimensiones, n arbitraria, completamente similar. Asumimos que disponemos de un Análisis de Multiresolución unidimensional, i.e., tenemos una escalera de espacios V_m, y funciones ϕ ψ que satisfacen (III.1.1)-(III.1.4) y (III.1.14), donde asumimos que ϕ_{0n} y ψ_{0n} son ortonormales. Definimos $\mathbf{V}_m = V_m \oplus V_m$; $\mathbf{V}_m$ define una escalera de subespacios de $L^2(\mathbf{R})$, satisfaciendo (III.1.1), y equivalente para $\mathbf{R}^2$ de (III.1.2). Más aún, (III.1.3) se cumple, y si definimos

$$\Phi(x_1, x_2) = \phi(x_1)\phi(x_2),$$

entonces esta función 2-dimensional satisface el análogo de (III.1.4):

$$\mathbf{V}_m = \overline{\text{Espacio lineal generado } \{\Phi_{mn} : n \in \mathbf{Z}^2\}}$$

donde Φ_{mn} está definida por

$$\begin{aligned}\Phi_{mn}(x_1,x_2) &= 2^{-m}\Phi\left(2^{-m}x_1 - n_1, 2^{-m}x_2 - n_2\right)\\ &= \phi_{mn_1}(x_1)\phi_{mn_2}(x_2)\,.\end{aligned}$$

Notemos que se usa la misma dilatación para ambos argumentos. Por la definición (III.1.10) de W_m, encontramos inmediatamente que

$$\mathbf{V}_{m-1} = \mathbf{V}_m \oplus [(V_m \oplus W_m) \oplus (W_m \oplus V_m) \oplus (W_m \oplus W_m)]\,.$$

Esto implica que una base ortonormal para el complemento ortogonal $\mathbf{W}_m$ de $\mathbf{V}_m$ en $\mathbf{V}_{m-1}$ está dado por las funciones

$$\phi_{mn_1}\psi_{mn_2}, \psi_{mn_1}\phi_{mn_2}, \psi_{mn_1}\psi_{mn_1}; \qquad n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$$

o equivalentemente, para los paquetes de onda 2-dimensionales Ψ^ℓ_{mn}:

$$\Psi^\ell_{mn}(x_1,x_2) = 2^{-m}\Psi^\ell\left(2^{-m}x_1 - n_1, 2^{-m}x_2 - n_2\right)\,, \qquad \text{(III.1.19)}$$

donde $\ell = 1,2,3$; $n \in \mathbf{Z}^2$, y

$$\Psi^1(x_1,x_2) = \phi(x_1)\psi(x_2) \qquad \text{(III.1.20)}$$

$$\Psi^2(x_1,x_2) = \psi(x_1)\phi(x_2) \qquad \text{(III.1.21)}$$

$$\Psi^3(x_1,x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2) \qquad \text{(III.1.22)}$$

Se sigue que las Ψ^ℓ_{mn}, $\ell = 1,2,3$; $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}^2$ constituyen una base ortonormal de los paquetes de onda para $L^2(\mathbf{R}^2)$.

La construcción anterior muestra como cualquier análisis de multiresolución, más la base del paquete de ondas asociado, en una dimensión, puede ser extendido a d dimensiones.

III.1.B El esquema de pirámide laplaciana de P. Burt y E. Edelson.

En esta sección repasamos algunos aspectos relevantes, para el presente trabajo, del algoritmo de Burt y Adelson para la descomposición y reconstrucción de imágenes.

Uno de los objetivos de un esquema de descomposición para imágenes, es eliminar la muy alta correlación que existe entre puntos de imagen cercanos, a fin de lograr la compresión de datos. Muchos esquemas diferentes, han sido propuestos para lograr esto. Típicamente, usan un método de predicción, en el cual el valor en un punto de imagen está predicho (por un promedio ponderado) de otro previamente codificado o puntos de imagen cercanos y solamente la diferencia entre el actual valor del punto de imagen y el valor predicho es codificado. Es más natural usar los puntos de imagen cercanos para predicción que conducirá a una predicción más exacta (y por tanto una más grande compresión de datos), pero es más difícil de implementar, que el esquema de predicción causal, que solamente usa puntos de imagen previamente codificado. El esquema propuesto por Burt y Adelson combina la facilidad del cálculo de un esquema causal con la ventaja y elegancia de un esquema no casual. El resultado es "...una técnica para codificar imágenes en la cual se usan operadores locales de muchas escalas, pero de formas idénticas como base de funciones". La analogía con el análisis de multiresolución es evidente de esta cita.

Las imágenes son dos-dimensionales, y el esquema de piramide laplaciana es un algoritmo dos-dimensional. Por simplicidad, el examen de más adelante será restringuido a una dimensión. Más aún, los esquemas dos-dimensionales pueden ser obtenidos (por razones de simplicidad) como un producto tensorial de los esquemas uni-dimensionales.

Las datos originales (uni-dimensionales) pueden ser representados como una sucesión de números reales $\{C_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$, representa los valores de puntos de imagen. Por conveniencia, damos la sucesión de índice cero: $C_m^0 = C_n$. La idea principal es descomponer C^0 en sucesiones diferentes correspondientes a distintos rangos de frecuencia de C^0. El nivel más alto, con solamente el alto contenido de frecuencia de C^0, es obtenido calculando la diferencia entre C^0 y una versión borrosa $\tilde{C}^0$. El residuo, i.e., la versión borrada, contiene solamente frecuencias espaciales más bajas, y puede por tanto ser probada más facilmente que C^0 en sí misma, sin perdida de información. El algoritmo de la pirámide laplaciana provee un elegante y fácil esquema para hacer todo ésto. Todo el proceso es repetido varias veces para lograr la descomposición deseada.

Principia por transformar la sucesión C^0 en una sucesión C^1 según el significado de un operador el cual promedia y diezma:

$$C_k^1 = \sum_n w(x - 2k) C_n^0 \tag{III.1.23}$$

Los coeficientes considerados $w(n)$ son siempre reales; son escogidos para ser simétricos y normalizados, i.e.,

$$w(n) = w(-n), \qquad \sum_n w(n) = 1 \tag{III.1.24}$$

También se requiere que satisfagan una "Condición de igual contribución", condicionando el que la suma de todas las contribuciones de un nodo n dado es independiente de n, i.e., todos los nodos contribuyen con lo mismo:

$$\sum_k w(n - 2k)$$

es independiente de n.

Esto puede se escrito como:

$$\sum_n w(2n) = \sum_n w(2n + 1)\,. \tag{III.1.25}$$

Regresaremos más adelante al significado matemático de este requerimiento. Consideremos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcl} w(n) & = & 0 \quad \text{si} \quad |n| > 2, \\ w(n) & = & w(-2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}a, \\ w(1) & = & w(-1) = \frac{1}{4}, \\ w(0) & = & a; \end{array}\right\} \tag{III.1.26}$$

donde a puede tomar los valores .6, .5, .4, .3.

La sucesión C^1 juega un doble papel: Servirá como la sucesión de entrada (el lugar de C^0) para el siguiente nivel de la pirámide, y es también un paso intermedio para el cálculo de la versión borrosa $\tilde{C}^0$ para ser substraida de C^0. (Notemos que no podemos tener C^1, en si mismo, como esta versión borrosa: C^1 y C^0 "viven" sobre diferentes escalas). Sean

$$\tilde{C}_n = \sum_k w(n-2k)C_k^1, \tag{III.1.27}$$

$$\tilde{C}_n^0 = \sum_\ell \tilde{w}(n,\ell)C_\ell^0,$$

donde

$$\tilde{w}(n,\ell) = \sum_n w(n-2k)w(\ell-2k). \tag{III.1.28}$$

Notemos que esto no define totalmente una convolución; de (III.1.28) se ve que $\tilde{w}(n,\ell) = \tilde{w}(n-2,\ell-2)$, pero $\tilde{w}(n,\ell) \neq \tilde{w}(n-1,\ell-1)$ en general. La sucesión $\tilde{C}^0$ es claramente una versión borrosa de C^0, entonces se define la diferencia d^0, como:

$$d_n^0 = C_n^0 - \tilde{C}_n^0. \tag{III.1.29}$$

Conociendo esta sucesión diferencia, es suficiente reconstruir el dato C^0, ya que:

$$C_n^0 = d_n^0 + \sum_k w(n-2k)C_k^1.$$

El proceso completo se repite. De C^1 se calcula C^2 y $\tilde{C}^1$, d^1 es la diferencia C^1-$\tilde{C}^1$, etc.

Una notación más condensada para todo lo anterior es la siguiente. Se define el operador

$$F: \ell^2(\mathbf{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z})$$

(F para *filtro*) como

$$(Fa)_k = \sum_n w(n-2k)a_k . \qquad \text{(III.1.30)}$$

Entonces (III.1.23), (III.1.27) y (III.1.29) se convierten en :

$$C^1 = FC^0, \qquad \text{(III.1.31)}$$

$$\tilde{C}^0 = F^*C^1 = F^*FC^0, \qquad \text{(III.1.32)}$$

$$d^0 = C^0 - \tilde{C}^0 = (1 - F^*F)\,C^0 . \qquad \text{(III.1.33)}$$

Aquí usamos la notación estandar F^* para el adjunto del operador acotado F. Notese que asumimos que: $C^0 \in \ell^2(\mathbf{Z})$, o en términos de análisis de señal, que la sucesión de datos C^0 tien energía finita: $(C^0 = \{C_i\}$, $\sum |C_i|^2 < \infty)$.

La descomposición total consta de L pasos consecutivos,

$$C^\ell = FC^{\ell-1} \qquad ; \ell = 1, \ldots, L, \qquad \text{(III.1.34)}$$

$$d^{\ell-1} = C^{\ell-1} - F^*C^\ell = (1 - F^*F)\,C^{\ell-1} .$$

De las sucesiones $d^0, \ldots, d^{L-1}$, C^L entonces C^0 se reconstruye recursivamente por:

$$C^{\ell-1} = d^{\ell-1} + F^*C^\ell . \qquad \text{(III.1.35)}$$

En cada paso, de la descomposición (III.1.34) así como de la reconstrucción (III.1.35) se utilizan los mismos coeficientes, y todas las operaciones involucradas son directas y lineales (No resuelve sistemas de ecuaciones complicadas). Esto hace a este algoritmo muy fácil de implemetar. El aspecto de reducción del operador F, reduce el número de entradas de C^ℓ por un factor de 2 en cada paso, hace todo el algoritmo de descomposición tan rápido como la transformada de Fourier.

Sea N el número total de entradas no cero en C^0. Entonces el número total de entradas en $d^0, \ldots, d^{L-1}, C^L$ es:

$$N + N/2 + \cdots + N/2^{L-1} + N/2^L = 2N\left(1 - 2^{-L-1}\right) .$$

Después de la descomposición de la pirámide laplaciana hay un gran número de entradas (casi dos tantos) como en la sucesión de datos original. Sin embargo, sucede que la descomposición de datos, puede ser grandemente abreviada. El efecto neto, es sin embargo, una compresión apreciable de datos. No investigaremos esto aquí, sin embargo, notemos que el incremento del número de entradas está menos marcado en 2 dimensiones (un factor de $\frac{4}{3}$ en lugar de 2).

La similitud entre el algoritmo de la pirámide laplaciana y un análisis de multiresolución es ahora clara. En ambas aproximaciones, los datos (una función en análisis del multiresolución, y una sucesión en la pirámide laplaciana) son descompuestos en una *pirámide* de aproximaciones, correspondientes a menos y menos detalles. Además se calculan las diferencias entre cada dos aproximaciones sucesivas (corresponde a la descomposición del paquete de ondas en el análisis del multiresolución). Sin embargo es también claro que los esquemas son totalmente diferentes en los detalles del cálculo de la descomposición. El algoritmo desarrollado por S. Mallat, descrito en la siguiente sección, recuerda las características atractivas del esquema de la pirámide laplaciana, sin embargo, es mucho más cercano el análisis descrito en la sección (III.1.A).

Los coeficientes filtro $w(n)$, o equivalentemente el operador filtro F, están asociados con "funciones de peso equivalente". Solamente el límite de estas funciones será relevante para nosotros; concluimos esta sección con su definición y unas cuantas de sus propiedades. Puede preguntarse que clase de sucesión de entrada C^0, correspondiente a la sucesión "más simple" de descomposición. i.e., para $d^0 = \cdots = d^{L-1} = 0$ y $(C^L)_n = \delta_{n0}$. La respuesta es obviamente (por el uso del algoritmo de reconstrucción).

$$C^0 = (F^*)^L e\,, \tag{III.1.36}$$

donde e es la sucesión $e_n = \delta_{n0}$. Si, por ejemplo, $L = 1$, entonces las entradas de C^0 son exactamente $w(n)$.

Ya que cualquier sucesión puede ser considerada como una suma de versiones transladadas de e, la sucesión $C^0 = (F^*)^L e$ da el bloque de construcción básico para el subespacio $(F^*)^L \ell^2(\mathbf{Z})$, i.e., para las sucesiones componentes de nivel L. Es por tanto importante que estas sucesiones C^0 no se hagan enredadas, para L sufientemente grandes. Se puede hacer una representación gráfica de C^0 definida por (III.1.36), para L's sucesivas. Representamos la sucesión e, por un histograma, con valor 1 para $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$, y cero en otro caso. La sucesión F^*e "vive" sobre una escala 2 veces más pequeña, y por tanto será representada por un histograma cuya anchura es $\frac{1}{2}$; sus amplitudes diferentes estás dadas por $2(F^*e)n = 2w(n)$. Similarmente, $(F^*)^\ell e$ está representado por un histograma cuya anchura $2^{-\ell}$, las amplitudes sucesivas están dadas por $2^\ell\left((F^*)^\ell e\right)n$. Se introduce el factor dos en cada paso para própositos de normalización: El área bajo el histograma siempre es 1. Hay una convergencia muy rápida de estos histogramas hacia una "buena" función. Esta característica sorprendente es debida en gran parte, a la forma especial (III.1.26) de los coeficientes $w(n)$ y en particular, la condición (III.1.25). El siguiente argumento muestra el porque. La "representación" de e es la función característica del intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, la cual denotamos por h_0.

Las representaciones h_1, h_2 de F^*e, $(F^*)^2e$ respectivamente, están dadas por

$$h_1(x) = 2\sum_n w(n)\chi_{[-1/4,1/4)}\left(x - \frac{1}{2}n\right) \tag{III.1.37}$$

y

$$h_2(x) = 4\sum_n w(n)\left[\sum_m w(m)\chi_{[-1/8,1/8)}\left(x-\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}m\right)\right], \qquad \text{(III.1.38)}$$

Para hacer la transición de h_{j-1} a h_j.

(i) dividir h_{j-1}, en una función escalón, con anchura del orden $2^{-(j-1)}$, en sus componentes:

$$h_{j-1} = \sum_k a_{j-1,k}\chi_{\left[2^{-(j-1)}(k-1/2),2^{-(j-1)}(k+1/2)\right)} \qquad \text{(III.1.39)}$$

(ii) reemplazar cada componente por una versión de h_1 apropiadamente escalonada y recentrada:

$$\chi_{[2^{-j+1}(k-1/2),2^{-j+1}(k+1/2))} \rightarrow h_1(2^{j-1}x-k) =$$
$$= 2\sum_n w(n)\chi_{[-1/4,1/4)}\left(2^{j-1}x-k-\frac{1}{2}n\right).$$

(iii) sumar completamente:

$$h_j(x) = 2\sum_k a_{j-1,k}\sum_n w(n)\chi_{[2^{-j}(2k+n-1/2),2^{-j}(2k+n+1+1/2))}.$$

Luego de lo anterior, se define:

$$h_j = \tilde{T}_j h_{j-1} \qquad \text{o} \qquad h_j = \tilde{T}_j\tilde{T}_{j-1}\cdots\tilde{T}_1 h_0 \qquad \text{(III.1.40)}$$

donde

$$\left(\tilde{T}_\ell f\right)(x) = 2\sum_k\sum_n w(n)\left(\chi_{\left[2^{-\ell+1}(k-1/2),2^{-\ell+1}(k+1/2)\right)}f\right)\cdot$$
$$\cdot\left(2x-2^{-\ell+1}(k+n)\right) \qquad \text{(III.1.41)}$$

El algoritmo iterativo (III.1.40), (III.1.41) es extremadamente fácil para implementarse numéricamente.

Las h_j pueden, sin embargo, ser diferentemente escritas. Regresemos a las expresiones (III.1.36), (III.1.37) para h_1 y h_2. Estas pueden ser escritas como:

$$h_1(x) = 2\sum_n w(n)h_0(2x-n)\,, \tag{III.1.42}$$

$$h_2(x) = 4\sum_n w(n)\sum_m w(m)\chi_{[-1/4,1/4)}\left(2x-n-\frac{1}{2}m\right) = 2\sum_n w(n)h_1(2x-n)\,. \tag{III.1.43}$$

Esto sugiere que

$$h_j = Th_{j-1} = \cdots = T^j h_0\,, \tag{III.1.44}$$

donde

$$(Tf)(x) = 2\sum_n w(n)f(2x-n)\,. \tag{III.1.45}$$

El siguiente argumento muestra que (III.1.44) es cierto:

$$\left(T\widetilde{T}_\ell f\right)(x) = 4\sum_{m,n} w(m)w(n)\cdot\sum_k \left(\chi_{[2^{-\ell+1}(k-1/2),2^{-\ell+1}(k+1/2))}f\right)\cdot$$

$$\cdot\left(4x-2m-2^{-\ell+1}(n+k)\right)\,,$$

$$\left(\widetilde{T}_{\ell+1}Tf\right)(x) = 4\sum_{m,n} w(m)w(n)\sum_k \chi_{[2^{-\ell}(k-1/2),2^{-\ell}(k+1/2))}\left(2x-2^{-\ell}(n+k)\right)\cdot$$

$$f\left(4x-m-2^{-\ell+1}(n+k)\right)\,.$$

Sustituyendo $k = k' + 2^{\ell-1}m$ en esta última suma, encontramos que:

$$\left(\widetilde{T}_{\ell+1}Tf\right)(x) = 4\sum_{m,n} w(m)w(n)\sum_{k'}\Big[\chi_{[2^{-\ell}(k'-1/2),2^{-\ell}(k'+1/2))}\cdot$$

$$\cdot\left(2x-2^{-\ell}(n+k')-m\right)\cdot f\left(4x-2m-2^{-\ell+1}(n+k')\right)\Big] = T\widetilde{T}_\ell f(x)\,.$$

Puesto que (ver (III.1.42) y (III.1.43)) $h_1 = Th_0$, $h_2 = T^2h_0$, se sigue que:

$$\begin{aligned} h_j &= \widetilde{T}_j\cdots\widetilde{T}_3 h_2 \\ &= \widetilde{T}_j\cdots\widetilde{T}_3 T h_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{T}_j \cdots \tilde{T}_3 T \tilde{T}_1 h_0 \\
&= \tilde{T}_j \cdots \tilde{T}_4 T \tilde{T}_2 \tilde{T}_1 h_0 \\
&= \cdots = T \tilde{T}_{j-1} \cdots \tilde{T}_1 h_0 \\
&= T h_{j-1} ,
\end{aligned}
$$

lo cual prueba (III.1.44).

Tenemos así dos manera distintas, (III.1.44) y (III.1.40), para calcular h_j. Observemos que, al menos para alguna elección de los $w(n)$, la función h_j converge, cuando $j \to \infty$, a una "buena" función h_∞. Para $.125 < a < .625$ la función h_∞ es continua, tiene soporte compacto, y la convergencia $h_j \to h_\infty$ es uniforme. Por el momento aceptaremos estos hechos.

Las dos fórmulas (III.1.40) y (III.1.44) son extremadamente útiles para el estudio y demostración de esta convergencia. La construcción de $h_\infty = \lim_{j\to\infty} h_j$ usando (III.1.40) tiene la siguiente propiedad de localización. Para calcular el valor $h_{j+1}(x)$ la recursión $h_{j+1} = \tilde{T}_j h_j$ usa solamente valores $h_j(y)$ para $|y - x| \leq 2^{-j-1}(N+1)$, donde suponemos $w(n) = 0$ para $n \geq 2N$. Consecuentemente, el valor de $h_\infty(x)$ puede ser calculado usando solamente los valores de $h_j(y)$ para $|y - x| \leq 2^{-j}(N+1)$.

Al incrementar j se obtiene un acercamiento a la construcción gráfica. Esto es extremadamente útil cuando se quiere enfocar los detalles del comportamiento de h_∞. Esta propiedad de localización no está presente en (III.1.14). La fórmula $h_j(x) = (Th_{j-1})(x)$ usa valores de h_{j-1} en puntos que están a una distancia fija unos de otros (i.e., $2x, 2(x \pm \frac{1}{2}), 2(x \pm 1), \ldots$), independientemente del tamaño de j. La utilidad de (II.1.44) por tanto no es "gráfica". Sin embargo, esta fórmula menos local, será más útil en pruebas de convergencia de h_j, y de continuidad de h_∞, etc.

Introduciendo transformadas de Fourier (III.1.45) puede reescribirse como:

$$
\left(\widehat{Tf}\right)(\xi) = W\left(\frac{1}{2}\xi\right) \hat{f}\left(\frac{1}{2}\xi\right) ,
$$

donde $W(\xi) = \sum_n w(n)e^{in\xi}$.

Consecuentemente, de (III.1.45), se obtiene

$$\hat{h}_\ell(\ell) = (2\pi)^{-1/2}\left[\prod_{j=1}^{\ell} W(2^{-j}\xi)\right]\frac{\operatorname{sen}(2^{-\ell-1}\xi)}{2^{-\ell-1}\xi}.$$

Cuando $\ell \to \infty$, esto converge, puntualmente a

$$\hat{h}_\infty(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{\infty} W\left(2^{-j}\xi\right)$$

probando que este producto infinito tiene sentido.

(Sucede que, para $w(n)$ como en (III.1.26), la convergencia $h_\ell \to h_\infty$ se cumple a todos los espacios L^p, $1 \leq p \leq \infty$). Porque de la restricción (III.1.25), se encuentra que $W(\xi)$ es divisible por $(1 + e^{i\xi})$;

$$\mathbf{W}(\xi) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\xi}\right)Q(\xi) = e^{i\xi/2}\cos\frac{1}{2}\xi Q(\xi).$$

Combinando esto con

$$\prod_{j=1}^{\infty}\cos\left(2^{-j}\xi\right) = \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi},$$

encontramos que:

$$\hat{h}_\infty(\xi) = (2\pi)^{-1/2}e^{i\xi/2}\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\xi}{\xi}\prod_{j=1}^{\infty} Q\left(2^{-j}\xi\right).$$

La restricción (III.1.25) produce un factor ξ^{-1} en $\hat{h}_\infty$, i.e., da una regularidad en h_∞. Sin esta restricción, el procedimiento gráfico, puede producir funciones h_∞ bastante horribles (Un fractal). De hecho, para (III.1.26), se encuentra un factor $\cos\frac{1}{2}\xi$:

$$W(\xi) = \left(\cos\frac{1}{2}\xi\right)^2\left[(8a-3) + 4(1-2a)(\cos\frac{1}{2}\xi)^2\right].$$

Utilizando una técnica de estimación, debida a P. Tchamitchian, se halla que

$$|\widehat{h}_\infty(\xi)| \leq C\,(1+|\xi|)^{-2+\log_2\,[\max\{1,|8a-3|\}]} \tag{III.1.46}$$

Para $.125 < a < .625$, implica que h_∞ es continua. Para $a = \frac{3}{8} = .375$, el decaimiento de $\widehat{h}_\infty$ es igual de fuerte:

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \left(\cos\frac{1}{2}\xi\right)^4, \\ \widehat{h}_\infty(\xi) &= (2\pi)^{-1/2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\xi}{\frac{1}{2}\xi}\right)^4. \end{aligned}$$

En este caso, h_∞ es una convolución de orden 4 de $\chi_{[0,1)}$ consigo misma, por lo que resulta ser una función $C^{3-\epsilon}$.

La observación anterior muestra que la restricción sobre los $w(n)$, corresponde a la divisibilidad de $W(\xi)$ por $(1+e^{i\xi})$, que resulta en la regularidad de h_∞.

Esto concluye nuestra revisión al esquema de la pirámide laplaciana. Lo anterior no es una revisión completa; solamente se muestran aspectos relevantes.

Bibliografía

[1] Chui, Charles K. ***Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications.***

[2] Daubechies, Ingrid. ***Orthonormal Bases of Compactly supported Wavelets.*** Comm. Pure and Appl. Math. 41 (1988).

[3] Daubechies, I. and Lagarias, J.C. ***Two-scale Difference Equations, Parts I and II.*** AT& T Bell Labs., 1988, Preprint.

[4] Meyer Yves. ***Wavelets and Operators.*** Cambridge University Press.

[5] Robinson, S.L. and Ryczek, P.F. ***Wavelets.*** The Mathematical Journal, Miller Freeman Publications Vol. 5 (1995). pp. 74–81.

[6] Brigham, E. Oran. ***The Fast Fourier Transform.*** Prentice-Hall, Inc.

[7] Rudin, W. ***Real and Complex Analysis.*** McGraw-Hill International Editions.

[8] Hoffman, K. and Kunze, R. ***Algebra Lineal.*** Prentice Hall.