

53
2ej

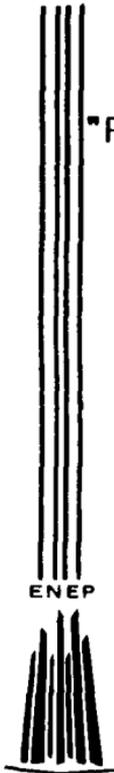


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Escuela Nacional de Estudios Profesionales
"ARAGON"

FALLA DE ORIGEN

"PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES"



ENEP

ARAGON

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO EN COMPUTACION
P R E S E N T A :
JOSE EVELIO RODRIGUEZ PARRA

DIRECTOR DE TESIS: ING. DONACIANO JIMENEZ VAZQUEZ
SAN JUAN DE ARAGON, EDO. DE MEXICO 1995

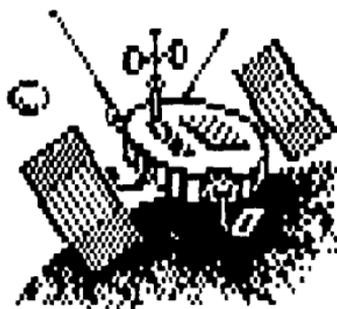


UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

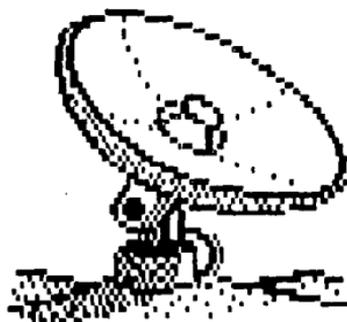
DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES



AGRADECIMIENTO.

Quiero agradecer, a mi Director de Tesis; el ING. DONACIANO JIMENEZ VAZQUEZ, y a la ING. Silvia Vega Muytoy, Jefe de la Carrera de Ingeniería en Computación, por el gran apoyo que me dieron durante la realización del trabajo de Tesis titulado *PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES*, ya que sin su ayuda no hubiera sido posible su realización.

DEDICATORIA.

A mis padres Pascual Rodriguez, Carolina Parra y a mis hermanos Sabina, Juana, Ma. Eloisa, Jaime Antonio, Ma. del Carmen, Isaias e Ismael, que sin su ayuda económica y moral no habría sido posible este trabajo de Tesis.

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

INTRODUCCION.....	xi
-------------------	----

CAPITULO 1

ESTADISTICA DE INFORMACIÓN.

PAGINA

1.1.- MEDIA.....	1
1.2.- VARIANCIA Y COVARIANCIA.....	4
1.3.- CORRELACIÓN Y AUTOCORRELACIÓN.....	7
- CONCEPTO DE PROCESO ALEATORIO.....	7
- CLASIFICACIÓN DE PROCESOS.....	9
- PROCESOS DETERMINISTICO Y NO DETERMINISTICO.....	12
- INDEPENDENCIA Y ESTACIONARIDAD.....	12
- FUNCIÓN DE DENSIDAD Y DE DISTRIBUCIÓN.....	13
- INDEPENDENCIA ESTADISTICA.....	14
- PROCESO ESTACIONARIO DE PRIMER ORDEN.....	14
- PROCESO ESTACIONARIO DE SEGUNDO ORDEN.....	15
1.3.1.- FUNCIÓN DE CORRELACIÓN.....	16

	PAGINA
1.3.2.- FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN Y SUS PROPIEDADES.....	19
1.3.3.- FUNCIÓN DE CORRELACIÓN CRUZADA.....	22
1.3.4.- PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE CORRELACIÓN CRUZADA.....	24
1.3.5.- MATRIZ DE CORRELACIÓN PARA FUNCIÓN MUESTRAL.....	27

CAPITULO 2.

TRANSFORMACIÓN DE SEÑALES.

	PAGINA
2.1.- SEÑAL CONTINUA.....	31
- ANÁLISIS CONTINUO DE FOURIER.....	31
2.2.- SEÑAL DISCRETA (FDT).....	34
- SEÑAL Y FUNCIÓN IMPULSO.....	34
- LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT).....	37
- SERIES DISCRETAS DE FOURIER.....	44
- TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (TRF).....	46
- PROCEDIMIENTO POR DECIMACIÓN EN EL TIEMPO (DT).....	47
- PROCEDIMIENTO POR DECIMACIÓN EN LA FRECUENCIA (DF).....	50

CAPITULO 3.

COMPRESIÓN DE SEÑALES

PAGINA

3.1.- TEORIA Y PRÁCTICA DEL MUESTREO.....	53
3.2.- MODULACIÓN DE PULSOS CODIFICADOS : PCM Y DPCM.....	58
- CUANTIFICACIÓN Y CODIFICACIÓN.....	58
- RUIDO DE CUANTIFICACIÓN.....	61
- UMBRAL DE ERROR.....	64
- MODULACIÓN POR PULSOS CODIFICADOS DIFERENCIAL.....	67
3.3.- PROCESAMIENTO DE IMAGEN.....	68
- TÉCNICAS BÁSICAS DE COMPRESIÓN DE IMAGENES.....	69
3.3.1.- CODIFICACIÓN DE PIXEL.....	69
- PCM.....	70
- CÓDIGOS DE HUMFFMAN.....	70
- RUN-LENGTH.....	70
- BIT-PLANE.....	71
3.3.2.- TÉCNICAS PREDICTIVAS.....	71
- DPCM.....	71
- DPCM LINEA POR LINEA.....	72
- DPCM BIDIMENCIONAL.....	72
- DPCM ADAPTIVO.....	72
3.3.3.- CODIFICACIÓN POR TRANSFORMADA.....	72
- DIFERENTES TIPOS DE TRANSFORMADAS.....	73

	PAGINA
3.3.4.- OTRAS TECNICAS DE COMPRESION.....	74
- CODIFICACION HIBRIDA.....	74
- CODIFICACION HIBRIDA ADAPTIVA.....	75
- CODIFICACION INTERMARCOS (INTERFRAME CODING).....	75
- REPETICION DE MARCOS.....	75
- INTERCAMBIO DE RESOLUCION.....	76
- REPLENISHMENT CONDICIONAL.....	76
3.3.5.- CRITERIOS DE FIDELIDAD.....	77
3.3.5.1.- CRITERIOS SUBJETIVOS DE CALIDAD.....	77
- METODO DE APRECIACION.....	77
- METODO DE COMPARACION.....	79
3.3.5.2.- CRITERIOS OBJETIVOS DE CALIDAD.....	80

CAPITULO 4.

ESTIMADORES ESPECTRALES.

	PAGINA
4.1.- VENTANAS.....	82
4.2.- ESTIMADORES.....	84
4.2.1 ERGODICIDAD.....	84
- INTEGRALES ESTOCASTICAS.....	85
- ERGODICIDAD DE LA MEDIA.....	86

4.2.2.- ESTIMADORES DE LA CORRELACIÓN.....	87
- ERGODICIDAD.....	88
- MUESTRA FINITA.....	88
- ESTIMADOR POLARIZADO.....	89
- OBSERVACIÓN FUNDAMENTAL.....	90
- AUTOCOVARIANZA DEL ESTIMADOR.....	91
- PROCESOS NORMALES.....	92
4.3.- ESTIMACIÓN ESPECTRAL.....	92
4.3.1- LA MUESTRA ESPECTRAL.....	92
4.3.2- ESPECTRO ALISADO.....	95
- SELECCIÓN DE VENTANAS.....	96
- RESTRICCIONES DEBIDAS AL PROCESO DE MEDIDA.....	97
- MÉTODOS NUMERICOS EN ESTIMACIÓN ESPECTRAL.....	97
- VENTANA DE DATOS.....	99
- COSENO TRUNCADO.....	99
4.3.3- ANÁLISIS.....	100
4.3.4- ESTIMADOR PARAMETRICO.....	106
- EL PERIODOGRAMA.....	106
- PERIODOGRAMA PROMEDIO (MÉTODO DE WELCH Y BARTLETT).....	111
4.3.5- ESTIMADOR DE DENSIDAD DE POTENCIA ESPECTRAL USANDO CORRELACIÓN SECUENCIAL (ESTIMADOR DE BLACKMAN-TUKEY).....	113
- ANÁLISIS DE MÁXIMA ENTROPIA ESPECTRAL Y EL ESTIAMDOR DE BURG.....	116

CAPITULO 5.

APLICACIONES

	PAGINA
5.1.- FILTRADO DIGITAL.....	120
- PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS DE TIEMPO DISCRETO.....	120
- LINEALIDAD, ESTACIONARIDAD DE UN SISTEMA DE TIEMPO DISCRETO.....	121
- FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y RESPUESTA DE FRECUENCIA.....	124
- DISEÑO DEL FILTRO DIGITAL.....	127
- EL PROBLEMA DE APROXIMACIÓN.....	128
- EL PROBLEMA DE REALIZACIÓN.....	130
5.2.- PROPIEDADES DEL FILTRO DE RESPUESTA IMPULSO FINITO.....	131
5.2.1.-DESCRIPCIÓN DEL FILTRO FIR EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.....	133
5.2.2.-FILTRO FIR DE FASE-LINEAL.....	135
- CUATRO TIPOS DE FILTROS FIR DE FASE-LINEAL.....	139
- CALCULO DEL FILTRO FIR DE RESPUESTA DE FRECUENCIA.....	141
- LA LOCALIZACIÓN CERO PARA FILTRO FIR DE FASE-LINEAL.....	144
5.3.- DISEÑO DE LA RESPUESTA-IMPULSO FINITO DE FASE LINEAL.....	148
5.3.1.- DISEÑO DE LA FRECUENCIA MUESTRAL.....	148
- DISEÑO DE GUIA DE LINEAS PARA LA FRECUENCIA MUESTRAL.....	152
5.3.2- ERROR MINIMO CUADRADO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.....	153
- MUESTRAS DISCRETAS DE FRECUENCIA.....	154

- INTEGRAL DE ERROR CUADRATICO POR CRITERIO DE APROXIMACION.....159
- APROXIMACION DEL ERROR MINIMO CUADRATICO DE UN DIFERENCIADOR.....165
- REGIONES DE TRANSMISION, FUNCIONES DE CARGA Y VENTANAS PARA EL DISENO DE FILTROS FIR.....166
- MODIFICACION DE LA RESPUESTA DE FRECUENCIA DESEADA.....167
- USO DE UNA BANDA DE TRANSICION.....168
- USO DE CRITERIO EN UNA CARGA DE LA MEDIA DE ERROR CUADRATICO.....168
- USO DE LAS FUNCIONES DE VENTANA EN EL DISENO DE FILTROS FIR.....169
- 5.3.3- APROXIMACION DE CHEBYSHEV.....171
 - CUATRO TIPOS DE FILTROS LINEALES.....172
 - DISENO DE FASE LINEAL PARA UNA APROXIMACION DE CHEBYSHEV.....174
 - PROBLEMA DE APROXIMACION PARA EL DISENO DE FASE LINEAL.....175
 - TEOREMA DE ALTERNACION.....176
- 5.4.- IMPLEMENTACION DE FILTROS DE RESPUESTA-IMPULSO FINITO..178
 - 5.4.1- REPRESENTACION DE LA SEÑAL DIGITAL.....178
 - DOS COMPONENTES ARITMETICOS.....178
 - FRACCIONES.....179
 - ERROR DE CUANTIZACION.....181

5.4.2-	ECUACIONES, ESTRUCTURAS Y PROGRAMAS.....	186
5.4.3-	EFECTOS DE LONGITUD-PALABRA FINITO EN LA IMPLEMENTACION DEL FILTRO.....	190
-	COEFICIENTE DE CUANTIZACION.....	190
-	ESCALAMIENTO Y SOBRE-CARGA.....	192
-	RUIDO DE CUANTIZACION.....	194
5.4.4-	EJEMPLO DE DISENO.....	196
	FILTRO DE RESPUESTA-IMPULSO INIFINITO (IIR)	
5.5.-	PROPIEDADES DEL FILTRO DE RESPUESTA INFINITO.....	199
5.5.1-	FÓRMULAS DE LOS FILTROS IIR EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.....	200
5.5.2-	CALCULO DE LA RESPUESTA DE FRECUENCIA DE UN FILTRO IIR..	201
5.5.3-	LOCALIZACIÓN DE POLOS Y CEROS PARA LOS FILTROS IIR.....	203
5.6.-	DISEÑO DE UN FILTRO DE RESPUESTA-IMPULSO INFINITO.....	204
5.6.1-	APROXIMACIÓN DE LA FUNCIÓN RACIONAL.....	205
5.6.2-	APROXIMACIÓN CLÁSICA DEL FILTRO ANALÓGICO PASO-BAJA.....	207
-	PROPIEDADES DEL FILTRO BUTTERWORTH.....	208
-	PROCEDIMIENTO DE DISEÑO DEL FILTRO DE BUTTERWORTH.....	210
-	PROPIEDADES DEL FILTRO CHEBYSHEV.....	213
-	POLINOMIOS DE CHEBYSHEV.....	213
-	LOCALIZACIÓN DE POLOS.....	214
-	PROCEDIMIENTO DEL DISEÑO DE UN FILTRO CHEBYSHEV.....	216
5.6.3-	MÉTODOS DE DISEÑO DIRECTO DEL FILTRO IIR EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.....	219

- DISEÑO DE FILTROS IIR DE FRECUENCIA-MUESTRAL.....	219
5.7.- IMPLEMENTACIÓN DE FILTROS DE RESPUESTA-IMPULSO INFINITO.....	222
5.7.1- ESTRUCTURAS RECURSIVAS.....	222
- COEFICIENTE DE SENSITIVIDAD.....	224
- ESTRUCTURAS DE SEGUNDO ORDEN.....	226
- ESTRUCTURA EN CASCADA.....	228
- ESTRUCTURA EN PARALELO.....	229
- DESCRIPCIÓN DE LA VARIABLE DE ESTADO DEL FILTRO.....	230
- OTRO TIPO DE ESTRUCTURAS.....	232
5.7.2- EFECTOS DE LA LONGITUD-PALABRA FINITA.....	234
- COEFICIENTE DE CUANTIZACIÓN.....	234
- ESCALAMIENTO Y SOBRE-FLUJO.....	236
- CUANTIZACIÓN DE RUIDO.....	237
- LÍMITES DE CICLOS.....	240
- LÍMITES DE CICLOS DE ESCALA-PEQUEÑA.....	243
5.7.3- EJEMPLO DE DISEÑO DE UN FILTRO IIR.....	244
5.7.4- COMPARACIÓN ENTRE EL FILTRO FIR Y EL FILTRO IIR.....	254
- FILTRO DIGITAL FIR.....	254
- FILTRO DIGITAL IIR.....	255
5.7.5- PROCESAMIENTO EN TIEMPO REAL (DSP DIGITAL SIGNAL PROCESSING).....	258
- DSP TMS320C25 DE PUNTO FIJO.....	258
- DSP DSP56000/1 DE PUNTO FIJO.....	265

PAGINA

- DSP DSP96002 DE PUNTO FLOTANTE.....	273
- DSP TMS320C30 DE PUNTO FLOTANTE.....	285
* CONCLUSIONES	293
* APENDICE	295
* BIBLIOGRAFIA	297

I N T R O D U C C I O N

Las técnicas de análisis de señales han sido orientadas en las últimas tres décadas hacia el procesamiento digital de señales, en razón de las facilidades que presenta su implantación.

De tal forma, una de tantas aplicaciones que se hacen, son reflejadas; por ejemplo, en los centros hospitalarios, en donde las imágenes radiológicas como son : tomografías, radiografías, angiografías e imágenes de resonancia magnética; al ser procesadas mediante técnicas digitales permiten un acceso y almacenamiento más eficiente, así como la posibilidad de un diagnóstico automatizado.

Sin embargo, existen algunos problemas en el procesamiento, y representa la necesidad de contar con métodos eficientes para almacenar y transmitir señales, puesto que éstas, en forma digital requieren de una gran cantidad de memoria, o bien de un ancho de banda grande. Y la solución a tales problemas radica en incorporar a los sistemas de procesamiento digital de señales, las técnicas de compresión de datos.

El presente trabajo, trata de dar de una forma general como es que se procesan las señales aleatorias y no aleatorias, en el procesamiento digital de señales.

La Tesis esta compuesta por 5 capítulos, en donde en el capítulo 1; trata de la estadística de información; esto es, de como se usa la estadística en el procesamiento digital de señales. Conceptos como, la media o el valor esperado de una variable, la variancia y covariancia para casos discretos o continuos. También, se manejan los conceptos de correlación y autocorrelación en procesos aleatorios, junto con sus propiedades más características. Tomando en cuenta, que a todas las señales son manejadas en forma de función, y la variable principal de la función es el tiempo.

En el capítulo 2, se hace requerimiento de la transformación de señales, que es en donde se utiliza el análisis de Fourier. El primer análisis es para el caso de señal continua, que dando denominado como Análisis Continuo de Fourier. El segundo, es para el caso de señal discreta, aquí, a la señal se le conjuga o mezcla con otro tipo de señales necesarias para su análisis y adaptación, que el objetivo principal es tenerlas en forma óptima para su procesamiento.

Un resultado de este tipo de análisis, es la Transformada Discreta de Fourier (DFT) y la Transformada Rápida de Fourier (FFT), que son las transformaciones básicas, para el procesamiento digital de señales.

En el capítulo 3 se da un vistazo a la compresión de señales, comenzando con la teoría y práctica del muestreo; siguiendo con la modulación de pulsos codificados de tipo PCM y DPCM. Que son la base principal de la compresión de señales.

También, se habla del procesamiento de imágenes, en la cual, se trata de las técnicas básicas de compresión de imágenes, algunas de la cuales son codificación de pixel, predictiva, por transformada, etc.

En el capítulo 4, se da un vistazo a los estimadores espectrales, que son señales de tipo función, como las ventanas de tipo Rectangular, de Hamming-Hann, de Blackman, y de Kaiser. Estos estimadores son aplicados a las señales de procesamiento digital para una mejor aplicación de esta señales.

Su aplicación radica en proceso de tipo estacionario de sentido amplio. También, se ven todos los tipos de estimadores que existen como son : el estimador ergódico, de correlación, polarizado, de autocovarianza, paramétrico, de Bartlett, de Blackman, de Burg, etc.

En el capítulo 5, está dedica a las aplicaciones que se le dan al procesamiento digital de señales. En primer plano está dedicado al filtro digital, del cual se desprende la aplicación del filtro de respuesta impulso finito (FIR) y al filtro de respuesta impulso infinito (IIR). En ambos filtros se dan los pasos necesarios para su diseño e implementación de los dos tipos de filtros FIR e IIR.

Como segundo plano se ven las estructuras y métodos de programación de los diferentes tipos de circuitos integrados más comúnmente usados en el mercado que procesan señales digitales, mejor conocidos como los DSP (digital signal processor).

En los cuales hay dos tipos de DSP que son : los DSP de punto fijo y los DSP de punto flotante. En los de punto fijo se analizaran los chips TMS320C25 de Texas Instruments y el DSP56001 de Motorola. Para los de punto flotante serán los chips DSP96002 de Motorola y TMS320C30 de Texas Instruments.

CAPITULO 1.

ESTADÍSTICA DE INFORMACIÓN.

1.1- MEDIA.

Para poder comprender el concepto, el siguiente ejemplo da una idea general. Si se lanzan dos monedas al aire 16 veces y X representa el número de caras que ocurren por lanzamiento, entonces los valores de X son 0, 1 y 2. En donde se obtienen cero caras 4 veces, una cara 7 veces y dos caras 5 veces. El promedio de caras por lanzamiento de las dos monedas es :

$$\frac{(0)(4)+(1)(7)+(2)(5)}{16} = 1.06$$

Este es un valor promedio y no necesariamente un resultado de dicho ejemplo. A éste valor promedio se le conoce como *media de la variable aleatoria X* y se representa como μ_x , o simplemente como μ , todo dependerá de qué tipo de variable aleatoria se trate. También es común designar a este valor como *esperanza o expectativa matemática*, o bien como *valor esperado* de la variable X , y representarla como $E(X)$.

El método descrito antes para calcular el número esperado de caras en cada tirada de 2 monedas, indica que la media o valor esperado de una variable aleatoria discreta puede obtenerse multiplicando cada uno de los valores x_1, x_2, \dots, x_n de la variable aleatoria X por su probabilidad correspondiente $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ y sumando luego los resultados. De tal forma que, al conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ se le denomina función de probabilidad o distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X . Sin embargo, esto se verifica sólo si la variable aleatoria es discreta. En el caso de variables aleatorias continuas, la definición del valor esperado es en esencia la misma, sólo que las sumatorias se reemplazan por integrales.

Definición de la media. - Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La media o valor esperado de X es :

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x) \quad (1.1)$$

si X es discreta, y

$$\mu = E(X) = \int_{-\alpha}^{\alpha} x f(x) dx \quad (1.2)$$

si X es continua.

El considerar ahora a una función $g(X)$ de la variable aleatoria X ; es decir, que a cada valor de $g(X)$ se determina conociendo un valor específico de X . Por ejemplo, $g(X)$ puede ser X^2 ó $3X - 1$, de manera que siempre que X tome el valor 2, $g(X)$ tomará el valor de $g(2)$. En particular, este resultado se generaliza en el teorema siguiente, para variables aleatorias discretas y continuas, diciendo que :

Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La media o valor esperado de la variable aleatoria $g(X)$ es

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_x g(x) f(x) \quad (1.3)$$

si X es discreta y

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x) f(x) dx \quad (1.4)$$

si X es continua.

Ahora se amplía el concepto de esperanza matemática al caso de dos variables aleatorias X y Y con distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$. De tal forma, que si X y Y son dos variables aleatorias discretas, la distribución de probabilidad para su ocurrencia simultánea se puede representar a través de una

función con valores $f(x,y)$ para cualquier par de valores (x,y) dentro del rango de las variables aleatorias X y Y . Así, a esta forma se le conoce como la distribución de probabilidad conjunta de X y Y .

Entonces la definición dice que : Sean X y Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$. La media o valor esperado de la variable aleatoria $g(X,Y)$ es

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y) \quad (1.5)$$

si X y Y son discretas, y

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x,y) f(x,y) dx dy \quad (1.6)$$

si X y Y son continuas.

1.2.- VARIANCIA Y COVARIANCIA.

La media o valor esperado de una variable aleatoria X es de especial importancia, debido a que describe dónde está centrada la distribución de probabilidad. Sin embargo, la propia media no da una descripción adecuada de la forma de la distribución. Se necesita saber cómo se dispersan las observaciones respecto de la media. En la figura 1.1 se tienen los histogramas de dos distribuciones de probabilidad discretas con la misma media $\mu = 2$, que difieren en forma considerable en la variabilidad o dispersión de las observaciones respecto de la media.

La media de variabilidad más importante de una variable aleatoria X se obtiene considerando $g(X) = (X - \mu)^2$. Por lo tanto, se denomina *variancia de la variable aleatoria X* o bien *variancia de la distribución de probabilidad de X* , y es designada por $\text{Var}(X)$, por el símbolo σ_x^2 ó simplemente como σ^2 .

Definición de Variancia. - Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$ y media μ . La variancia de X es :

$$\sigma^2 = E [(x - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x) \quad (1.7)$$

si X es discreta y

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (1.8)$$

si X es continua.

La cantidad $x - \mu$ en la definición de variancia, se denomina *desviación de una observación respecto de la media*. Puesto que estas desviaciones se elevan al cuadrado y luego se promedian, σ^2 será mucho menor para un conjunto de valores x que estén próximos a μ , que para un conjunto de valores que varíen considerablemente respecto de μ .

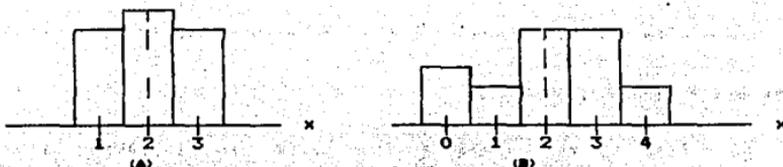


Figura 1.1 Distribuciones con medias iguales y dispersiones diferentes

En este punto, la variancia o la desviación estándar sólo tienen significado cuando se comparan dos ó más distribuciones que tengan las mismas unidades de medición.

Ampliando el concepto de variancia de una variable aleatoria X para que incluya también a una función de X , se tiene que para la variable aleatoria $g(X)$, la variancia denotada por $\sigma_{g(X)}^2$, se calcula por medio de un teorema que dice :

Considérese una variable aleatoria X con una distribución de probabilidad $f(x)$. La variancia de la variable aleatoria $g(X)$ es

$$\sigma_{g(X)}^2 = E \{ [g(X) - \mu_{g(X)}]^2 \} = \sum_x [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x) \quad (1.9)$$

si X es discreta y

$$\sigma_{g(X)}^2 = E \{ [g(X) - \mu_{g(X)}]^2 \} = \int_{-a}^a [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x) dx \quad (1.10)$$

si X es continua.

Sin embargo, existe una $g(X, Y) = (X - \mu_x)(Y - \mu_y)$, donde $\mu_x = E(X)$ y $\mu_y = E(Y)$, produce un valor esperado llamado covariancia de X y Y , la cual es denotada por σ_{xy} ó bien por $Cov(X, Y)$.

Definición de Covariancia. - Sean X y Y variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta $f(x, y)$. La Covariancia de X y Y es

$$\sigma_{xy} = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x,y) \quad (1.11)$$

si X y Y son discretas, y

$$\sigma_{xy} = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} (x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x,y)dx dy \quad (1.12)$$

si X y Y son continuas.

La covariancia será positiva cuando los valores elevados de X se asocian con valores elevados de Y , y valores bajos de X se asocian a valores bajos de Y . Si los valores menores de X se relacionan con valores elevados de Y y viceversa, entonces la covariancia será negativa.

Y por último, hay un teorema que puede servir de mucha ayuda para cuando se quiera calcular la covariancia en una forma más rápida y efectiva, diciendo lo siguiente :

La covariancia de dos variables aleatorias X y Y con medias μ_x y μ_y , respectivamente, están dadas por

$$\sigma_{xy} = E(XY) - \mu_x \mu_y \quad (1.13)$$

1.3. -CORRELACIÓN Y AUTOCORRELACIÓN

PROCESOS ALEATORIOS.

Concepto de Proceso Aleatorio.

El concepto de un proceso aleatorio está basado para ser incluido en el tiempo, es decir, para poder analizar un proceso aleatorio, éste debe estar siempre en función del tiempo. Así, desde que X es una variable aleatoria por definición, el resultado posible de una función s de un experimento dado, llegará a ser una función de s y del tiempo. De tal forma, hay una regla en función del tiempo que es :

$$X(t,s) \quad (1.14)$$

para todos los resultados s . Y toda la familia de tales funciones denotadas como $X(t,s)$ son llamadas como procesos aleatorios.

Claramente un proceso aleatorio $X(t,s)$ representa una familia o un conjunto de funciones en el tiempo, esto es, cuando t y s son variables.

En la figura 1.2 ilustra algunos miembros de un conjunto de funciones, y a cada miembro en función del tiempo es llamado como *función de muestra*, un *conjunto de miembros* o algunas veces como *realización de procesos*. De tal manera, un proceso aleatorio también representa una simple función del tiempo cuando t es una variable y s es un valor específico fijo.

Un proceso aleatorio representa también a una variable aleatoria cuando t es fija y s es una variable. Por ejemplo, la variable aleatoria $X(t_1,s) = X(t_1)$ es obtenida desde el proceso cuando el tiempo es forzado al valor t_1 . Y antes de usar la notación X_1 para denotar la variable aleatoria asociada con el proceso $X(t)$ para el tiempo t_1 . Así, X_1 corresponde a un corte vertical del conjunto del tiempo t_1 , como se muestra en la figura 1.2.

Las propiedades estadísticas de $X_i = X(t_i)$ describen las propiedades estadísticas del proceso aleatorio del tiempo t_i . El valor esperado de X_i es llamado como el grupo promedio del valor esperado o valor medio del proceso aleatorio de un tiempo t_i . Por lo tanto, desde que t_i puede tener varios valores, el valor medio de un proceso no puede ser constante, en general, esto debe ser en función del tiempo.

Y así, se visualiza fácilmente cualquier número de una variable aleatoria X_i derivado desde un proceso aleatorio $X(t)$ de un tiempo t_i , donde $i = 1, 2, \dots$,

$$X_i = X(t_i, s) = X(t_i) \quad (1.15)$$

puede también representarse un proceso aleatorio como un simple número cuando t y s ambos son fijos.

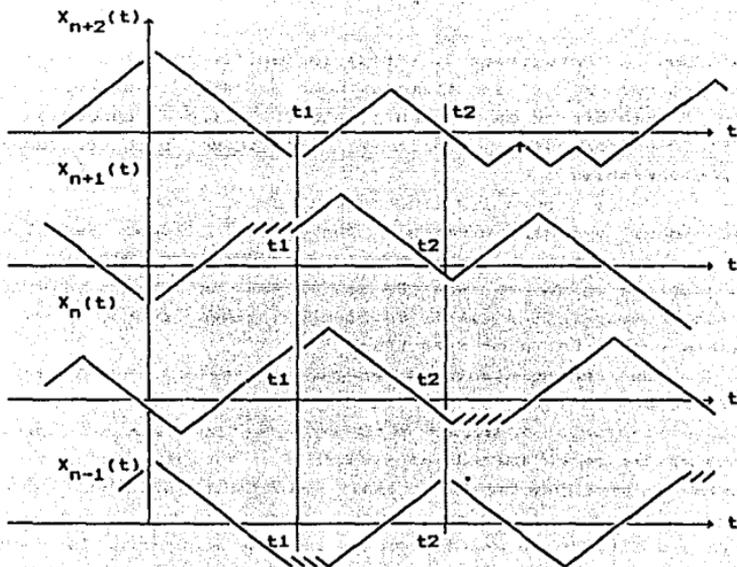


Figura 1.2. Representación gráfica de un proceso aleatorio continuo.

Clasificación de Procesos.

Esta clasificación es conveniente para los procesos aleatorios, acordándolos a las características de t y de la variable aleatoria $X = X(t)$ para el tiempo t . Se considera que sólo hay 4 casos basados en t y X teniendo sus valores en el siguiente rango $-\alpha < t < \alpha$ y $-\alpha < x < \alpha$.

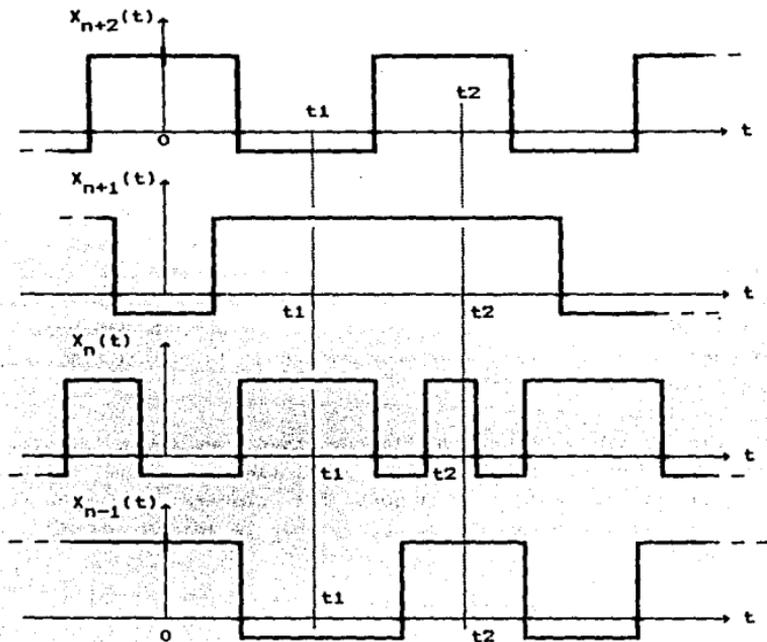


Figura 1.3. Representación gráfica de un proceso aleatorio discreto formado por medio de las señales de la figura 1.2.

Primer Caso. - Si X es continuo y t puede tener varios valores continuos, entonces $X(t)$ es llamado como un proceso aleatorio continuo. La figura 1.2 es una ilustración de esta clase de procesos.

Segundo Caso. - Un proceso aleatorio discreto, corresponde a la variable aleatoria X teniendo sólo valores discretos, mientras que t es continua. La figura 1.3 ilustra tal proceso derivado por los límites de la función simple mostrada en la figura 1.2. Las funciones simples tienen sólo 2 valores discretos, el nivel positivo que es generado cuando una función simple dentro de la figura 1.2 es positiva y el nivel negativo ocurre para otros tiempos.

Tercer Caso. - Un proceso aleatorio para el cual X es continua, pero el tiempo sólo tiene valores discretos es llamado como una secuencia aleatoria continua. Una secuencia tal, puede ser formada por una muestra periódica del conjunto de miembros de la figura 1.2 y sus resultados se muestran en la figura 1.4.

Cuarto Caso. - Este es llamado como secuencia aleatoria discreta, que corresponde para los dos tiempos y la variable aleatoria es discreta. La figura 1.5 ilustra una secuencia aleatoria discreta desarrollada para probar la función muestral de la figura 1.3.

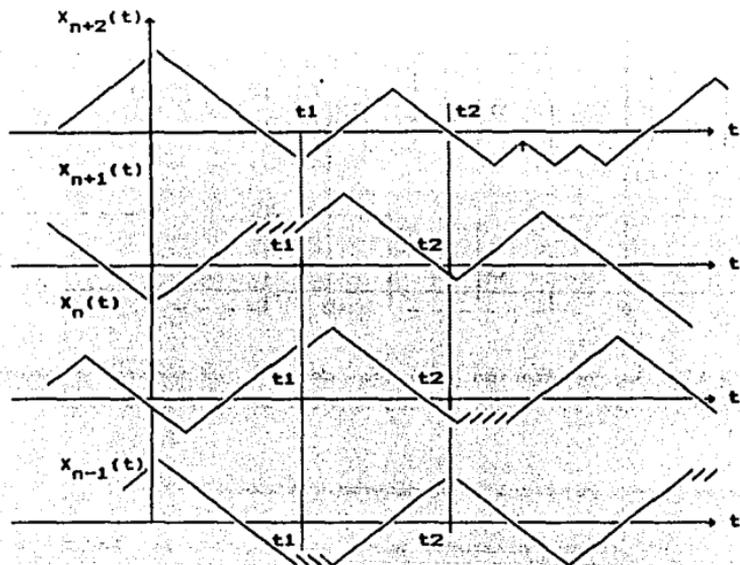
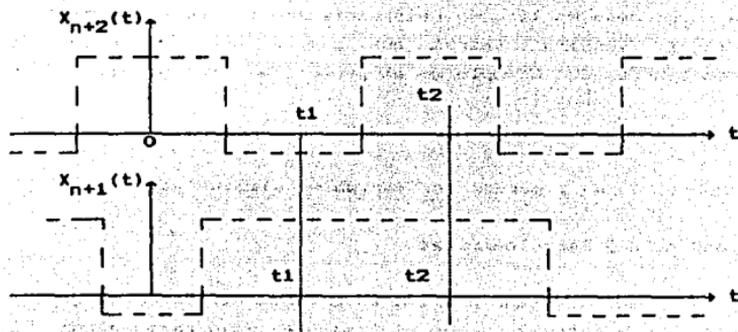


Figura 1.4. Representación gráfica de una secuencia aleatoria continua formado por la señal de la figura 1.2.



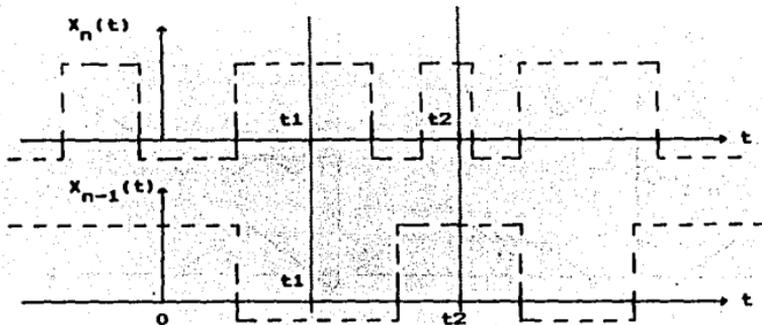


Figura 1.5 Representación gráfica de una secuencia aleatoria discreta formado por medio de las señales de la figura 1.2.

Procesos Determinísticos y No determinísticos.

Un proceso aleatorio puede ser descrito por la forma o por sus funciones de muestras. Así que, si valores futuros de cualquier función muestral que no puedan ser predecidos desde la observación de valores pasados, entonces, el proceso es llamado No determinístico. El proceso de la figura 1.2 es un ejemplo claro. Ahora un proceso es llamado Determinístico si los valores futuros de cualquier función muestral que puedan ser predecidos desde valores pasados. Un ejemplo es el proceso aleatorio definido por :

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (1.16)$$

en donde A , θ , ω_0 ; pueden ser variables aleatorias.

Independencia y Estacionaridad.

Como un estado previo, un proceso aleatorio llega a ser una variable aleatoria cuando el tiempo es fijo para algún valor

en particular. Así, la variable aleatoria tendrá propiedades estadísticas como valor medio, momentos, variancia, etc., que son relacionados para la función de densidad.

Por lo general, un proceso aleatorio es llamado estacionario si todas sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo.

Función de Densidad y de Distribución.

Para la definición de estacionaridad, se debe definir primero que la función de densidad y de distribución son aplicadas para un proceso aleatorio $X(t)$. Ahora, para un tiempo particular t_1 , la función de distribución asociada con la variable aleatoria $X_1 = X(t_1)$ será denotada por $F_X(x_1; t_1)$. De tal forma :

$$F_X(x_1; t_1) = P \{X(t_1) \leq x_1\} \quad (1.17)$$

para cualquier número real x_1 .

Esta es la misma definición usada para todas las funciones de distribución para una sola variable aleatoria. Sin embargo, ahora a esta notación tendría que ser alterada para el factor que es t_1 en función del tiempo.

Para dos variables aleatorias $X_1 = X(t_1)$ y $X_2 = X(t_2)$, (función de distribución de segundo orden) que es la extensión de 2 dimensiones de la ec. 1.17; quedando como :

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P \{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \quad (1.18)$$

en una manera similar, para N variables aleatorias se tiene que $X_i = X(t_i)$; $i = 1, 2, \dots, N$, que para la función de distribución de N -ésima se obtiene :

$$F_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = P \{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_N) \leq x_N\} \quad (1.19)$$

Independencia Estadística.

Dos procesos $X(t)$ y $Y(t)$ son estadísticamente independientes si la variable aleatoria del grupo de funciones $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$ son independientes del grupo de funciones $Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_M)$ para cualquier tiempo de t_1, t_2, \dots, t_N y t'_1, t'_2, \dots, t'_M . Así, la independencia requiere que la densidad sea factorable por grupos:

$$\begin{aligned} f_{XY}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M; t_1, \dots, t_N, t'_1, \dots, t'_M) \\ = f_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) f_Y(y_1, \dots, y_M; t'_1, \dots, t'_M) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Proceso Estacionario de Primer Orden.

Un proceso aleatorio es llamado Estacionario de primer orden si su función de densidad de primer orden no cambia con un movimiento en el tiempo original. En términos de:

$$f_X(x_i; t_i) = f_X(x_i; t_i + \Delta) \quad (1.21)$$

que debe ser verdadero para cualquier t_i y para cualquier número real Δ , si $X(t)$ es un proceso aleatorio de primer orden.

En consecuencia de la ec. 1.21, esta que $f_X(x_i; t_i)$ es independiente de t_i y el proceso del valor medio de $E[X(t)]$ es una constante, como lo expresa la ecuación:

$$E[X(t)] = \bar{X} = \text{constante.} \quad (1.22)$$

para demostrar que la ec. 1.22 es una cte., se encuentra que los valores medios de las variables aleatorias $X_1 = X(t_1)$ y $X_2 = X(t_2)$. Para X_1 es:

$$E[X_1] = E[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_1) dx_1 \quad (1.23)$$

y para X_2 :

$$E [X_2] = E [X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_X(x_2; t_2) dx_2 \quad (1.24)$$

Ahora se iguala a $t_2 = t_1 + \Delta$ en la ec. 1.24, luego sustituyendo en la 1.21; y usando la ec. 1.23 se obtiene :

$$E [X(t_1 + \Delta)] = E [X(t_1)] \quad (1.25)$$

la cual debe ser una constante, porque t_1 y Δ son arbitrarios.

Proceso Estacionario de Segundo Orden.

Un proceso es llamado Estacionario de Segundo orden si su función de densidad de segundo orden satisface lo siguiente :

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta) \quad (1.26)$$

para todos los t_1, t_2 y Δ .

Ahora la correlación $E [X_1 X_2] = E [X(t_1) X(t_2)]$ de un proceso aleatorio, será en general, una función de t_1 y t_2 . Esta función es denotada como $R_{XX}(t_1, t_2)$ y es llamado como la función de autocorrelación de un proceso aleatorio $X(t)$; expresandose como:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E [X(t_1)X(t_2)] \quad (1.27)$$

Esta es una consecuencia de la ec. 1.26, sin embargo, es la función de autocorrelación de un proceso estacionario de segundo orden, y es sólo una diferencia de tiempo y no un tiempo absoluto; esto es si $\tau = t_2 - t_1$, entonces la ec. 1.27 llega a ser :

$$R_{XX}(t_1; t_1 + \tau) = E [X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau) \quad (1.28)$$

1.3.1 Función de Correlación.

La correlación entre 2 variables aleatorias es el valor esperado de sus productos. Si las 2 variables aleatorias son definidas como muestras de un proceso aleatorio de 2 diferentes instantes de tiempo, entonces el valor esperado dependerá de que tan rápido ésta pueda cambiar en función del tiempo.

Se espera a que la variable aleatoria fuera inmensamente correlacionada cuando los dos instantes de tiempo son muy cerrados, porque la función de tiempo no puede cambiar tan rápidamente para que sea diferente. Ahora, para el caso contrario; se debe encontrar una correlación muy pequeña entre los valores de la variable aleatoria cuando en dos instantes de tiempo son muy separados, esto es porque casi cualquier cambio puede ocupar su lugar.

Previamente, la definición de correlación fue siempre un número pero, desde que a la variable aleatoria no se le definía como una asociación en función del tiempo. Para los casos siguientes, a cada par de variables aleatorias pueden ser relacionadas por la separación del tiempo entre ellas, y la correlación sería una función de esta separación. Así, esto llegará a ser apropiado para definir una función de correlación en la cual el argumento es la separación de tiempo de las dos variables aleatorias. Ahora, si las dos variables aleatorias llegan desde el mismo proceso aleatorio, esta función será conocida como la *función de autocorrelación*. Luego, si éstas vienen desde diferentes procesos aleatorios, esto será llamado como *función de correlación cruzada*. Y se considera a ésta como la primera función de autocorrelación.

Si $X(t)$ es una función muestral de un proceso aleatorio y las variables aleatorias son definidas como :

$$X_1 = X(t_1)$$

$$X_2 = X(t_2)$$

entonces la función de autocorrelación es definida como :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E [X_1 X_2] = \int_{-\alpha}^{\alpha} dx_1 \int_{-\alpha}^{\alpha} dx_2 p(x_1, x_2) dx_2 \quad (1.29)$$

Esta definición es válida para los procesos aleatorios estacionarios y No estacionarios. Sin embargo, el resultado de mayor interés es para el proceso estacionario, para la cual, la simplificación de la ec. 1.29 es posible. Esto sería llamado como *proceso estacionario de sentido-amplito*, y todos los promedios en conjunto son independientes del tiempo de origen. Por consiguiente para un proceso estacionario de sentido-amplito es :

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= R_x(t_1 + \tau, t_2 + \tau) \\ &= E [X(t_1 + \tau) X(t_2 + \tau)] \end{aligned}$$

Así, esta expresión es independiente de la que se eligió del tiempo de origen, y podemos asignar que $T = -t$ para obtener :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(0, t_2 - t_1) = E [X(0) X(t_1 + t_2)]$$

así, esta expresión sólo depende de la diferencia del tiempo de $t_2 - t_1$. Asignando la diferencia de tiempo a $\tau = t_2 - t_1$ y suprimiendo el cero dentro del argumento de $R_{xx}(0, t_2 - t_1)$, la ec. queda :

$$R_{xx}(\tau) = E [X(t_1) X(t_1 + \tau)] \quad (1.30)$$

Esta es la expresión para la función de autocorrelación de un proceso estacionario y depende sólo de τ y no del valor de t_1 . Porque de esta falta de dependencia en el tiempo particular de t_1 , el cual, el conjunto promedio son tomados, por lo tanto es práctico escribir la ec. 1.30 como :

$$R_{xx} = E [X(t) X(t + \tau)]$$

Desde la ec. 1.30, se aprecia que para $\tau = 0$, tenemos que $R_{xx}(0) = E[X(t)X(t)]$; de tal forma la función de autocorrelación es igual a el valor medio cuadrático del proceso. Para otros valores de $\tau \neq 0$, la función de autocorrelación $R_{xx}(\tau)$ podría pensarse como una medida similar de la onda espectral $X(t)$ y de la $X(t + \tau)$. Para ilustrar este punto, se deja que $X(t)$ sea una función muestral de un proceso estacionario aleatorio con media igual a cero y de la función nueva como :

$$Y(t) = X(t) - \rho X(t + \tau)$$

Para determinar el valor de ρ que reduce al mínimo el valor de la media cuadrática de $Y(t)$, y se tiene una medida de que tanto la onda espectral $X(t + \tau)$ esta contenida en $X(t)$.

La determinación de ρ es hecha para calcular la variancia de $Y(t)$, puesto que la derivada de la variancia con respecto a ρ es igual a cero, y resolviendo para ρ . Las operaciones son de la forma siguiente :

$$\begin{aligned} E\{[Y(t)]^2\} &= E\{[X(t) - \rho X(t + \tau)]^2\} \\ &= E\{X^2(t) - 2\rho X(t)X(t + \tau) + \rho^2 X^2(t + \tau)\} \\ \sigma_Y^2 &= \sigma_X^2 - 2\rho R_X(\tau) + \rho^2 \sigma_X^2 \\ \frac{d\sigma_Y^2}{d\rho} &= -2R_X(\tau) + 2\rho\sigma_X^2 = 0 \quad (1.31) \\ \rho &= \frac{R_X(\tau)}{\sigma_X^2} \end{aligned}$$

Como se observa la ec. 1.31, en donde ρ esta directamente relacionada a $R_{xx}(\tau)$ y es exactamente la correlación de coeficiente. El coeficiente ρ puede pensarse como la fracción de la onda espectral restante de $X(t)$, antes de que tengan que transcurrir τ segundos.

La correlación de coeficiente ρ puede variar desde +1 a -1. Para un valor de $\rho = 1$, las ondas espectrales deben ser

idénticas, es decir, completamente correlacionadas. Para $\rho = 0$, la onda espectral debe ser completamente no correlacionada, es decir, no parte de la onda espectral $X(t + \tau)$, que debe ser contenida dentro de $X(t)$. Para $\rho = -1$, las ondas espectrales deben ser idénticas, excepto por la oposición de signos, es decir, la señal $X(t + \tau)$ debe ser negativa de $X(t)$.

1.3.2. Función de Autocorrelación y sus propiedades.

Llamar a la función de autocorrelación de un proceso aleatorio $X(t)$, es la correlación de $E [X_1 X_2]$ de 2 variables aleatorias $X_1 = X(t_1)$ y de $X_2 = X(t_2)$ definido por el proceso de tiempo de t_1 y t_2 . Matemáticamente hablando se tiene :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E [X(t_1)X(t_2)] \quad (1.32)$$

para los tiempos asignados de $t_1 = t$ y $t_2 = t_1 + \tau$, con τ como un número real. De tal forma la ec. 1.32 asume la forma siguiente :

$$R_{xx}(t, t + \tau) = E [X(t)X(t + \tau)] \quad (1.33)$$

si $X(t)$ es el menor estacionario de sentido-amplio, esto fué descrito en la sección 1.3.1, en la cual se dijo que $R_{xx}(t, t + \tau)$ debe ser solo una función de la diferencia de tiempo de $\tau = t_2 - t_1$. Y así, para un proceso estacionario de sentido-amplio, se expresa de la siguiente manera :

$$R_{xx}(\tau) = E [X(t)X(t + \tau)] \quad (1.34)$$

Existen algunas propiedades importantes en general, que estan en poder de todas las funciones de autocorrelación de los procesos estacionarios aleatorios, de la siguiente forma :

1) $R_{xx}(0) = \overline{X^2}$. De aquí, el valor de la media cuadrática del proceso aleatorio puede ser siempre obtenido, simplemente igualando a $\tau = 0$.

2) $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$. La función de autocorrelación es siempre una función de τ . Esto es siempre porque el mismo conjunto del producto de valores está promediado, no obstante de la dirección de translación.

3) $|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$. El valor grande de la función de autocorrelación siempre ocurre para $\tau = 0$.

4) Si $X(t)$ tiene un componente de o un valor medio, entonces $R_{xx}(\tau)$ tendría un componente constante. Por ejemplo, si $X(t) = A$, entonces :

$$R_{xx}(\tau) = E [X(t_1)X(t_1 + \tau)] = E [AA] = A^2 \quad (1.35)$$

En general, si $X(t)$ tiene un valor medio y un componente de media igual cero $N(t)$ entonces :

$$\overline{X}(t) = X + N(t)$$

Luego

$$R_{xx}(\tau) = E \{[\overline{X} + N(t_1)][\overline{X} + N(t_1 + \tau)]\}$$

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= E[(\overline{X}^2) + \overline{X}N(t_1) + \overline{X}N(t_1 + \tau) + N(t_1)N(t_1 + \tau)] \quad (1.36) \\ &= (\overline{X})^2 + R_N(\tau) \end{aligned}$$

Después

$$E [N(t_1)] = E [N(t_1 + \tau)] = 0$$

Así, siempre en este caso, $R_{xx}(\tau)$ contiene un componente cte.

5) Si $X(t)$ tiene un componente periódico, entonces $R_{xx}(\tau)$

también tendría un componente periódico, con el mismo período. Por ejemplo :

$$X(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

donde A y ω son cttas. y θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en un rango de 2π . Esto es :

$$\rho(\theta) = 1/2\pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$= 0 \quad \text{en cualquier otro caso}$$

entonces :

$$R_x(\tau) = E [A \cos(\omega t_1 + \theta) A \cos(\omega t_1 + \omega \tau + \theta)]$$

$$= E [A^2/2 \cos(2\omega t_1 + \omega \tau + 2\theta) + A^2/2 \cos(\omega \tau)] \quad (1.37)$$

$$= A^2/2 \int_0^{2\pi} 1/2\pi [\cos(2\omega t_1 + \omega \tau + 2\theta) + \cos(\omega \tau)] d\theta$$

$$= A^2/2 \cos(\omega \tau)$$

en el caso más general, en el cual

$$X(t) = A \cos(\omega t + \theta) + N(t)$$

donde θ y $N(t_1)$ son estadísticamente independientes para toda t_1 , por el método usado en obtener la ec.1.36, esto es fácil para mostrar que :

$$R_x(\tau) = A^2/2 \cos \omega \tau + R_N(\tau) \quad (1.38)$$

De ahí, que la función de autocorrelación fija contiene un componente periódico.

6) Si $\{X(t)\}$ es ergódico y una media igual a cero y no contiene componente periódico entonces :

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0$$

7) Una función de autocorrelación no puede tener un estado arbitrario. Un camino de un estado específico que es permisible esta en términos de la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, esto es :

$$\mathcal{F} [R_{xx}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \text{Exp}(-j \omega \tau) d\tau$$

entonces la restricción es :

$$\mathcal{F} [R_{xx}(\tau)] \geq 0 \quad \text{para toda } \omega \quad (1.39)$$

1.3.3. Función de Correlación Cruzada.

Debe ser posible considerar a la correlación entre dos variables aleatorias, desde diferentes procesos aleatorios. Así esta situación surge cuando hay más de una señal aleatoria para ser aplicada a un sistema o cuando uno desea comparar voltajes aleatorios o cuando existen diferentes corrientes dentro del sistema.

Si los procesos aleatorios son conjuntamente estacionarios en sentido-amplio, y si la función muestral es de esos procesos y son designados como $X(t)$ y $Y(t)$, entonces para dos variables aleatorias se tiene :

$$X_1 = X(t_1)$$

$$Y_2 = Y(t_1 + \tau)$$

con esto es posible definir la función de correlación cruzada, dado por :

$$R_{xy}(\tau) = E [X_1 Y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 p(x_1, y_2) dx_1 dy_2 \quad (1.40)$$

El orden de subscritos es significativo; el segundo subscrito referente a la variable aleatoria toma el valor de $(t_1 + \tau)$.

Existe otra función de correlación cruzada que puede ser definida para los dos instantes iguales, como :

$$Y_1 = Y(t_1)$$

$$X_2 = X(t_1 + \tau)$$

y definido como :

$$R_{xy}(\tau) = E [Y_1 X_2] = \int_{-\alpha}^{\alpha} dy_1 \int_{-\alpha}^{\alpha} y_1 x_2 p(y_1, x_2) dx_2 \quad (1.41)$$

Se observa que en ambos procesos aleatorios, son asumidos para ser conjuntamente estacionarios, esas funciones de correlación cruzada sólo dependen de la diferencia de tiempo de τ .

La función de correlación cruzada de tiempo debe ser definida como antes, es decir, como para un caso en particular de un par de funciones muestrales como :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/2T \int_{-T}^T X(t)Y(t + \tau)dt \quad (1.42)$$

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/2T \int_{-T}^T Y(t)X(t + \tau)dt \quad (1.43)$$

Si los procesos aleatorios son conjuntamente ergódico, entonces la ec. 1.42 y 1.43 producirían el mismo valor para todas las parejas de funciones muestrales. Y de aquí, para un proceso ergódico.

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) \quad (1.44)$$

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}(\tau) \quad (1.45)$$

En general, la interpretación física de una función de correlación cruzada no es más concreto que la propia función de autocorrelación. Esto es simplemente una medida de como esas dos variables aleatorias dependen una de otra.

Ahora, en resumen la función de correlación cruzada de 2 procesos aleatorios de $X(t)$ y $Y(t)$, dado que $t_1 = t$ y $\tau = t_2 - t_1$ se puede escribir la siguiente ecuación :

$$R_{xy}(t, t + \tau) = E [X(t) Y(t + \tau)] \quad (1.46)$$

si $X(t)$ y $Y(t)$ son conjuntamente los miembros de un proceso estacionario de sentido-ancho, entonces $R_{xy}(t, t + \tau)$ es independiente del tiempo absoluto y se puede escribir que :

$$R_{xy}(\tau) = E [X(t) Y(t)] \quad (1.47)$$

Si $R_{xy}(t, t + \tau) = 0 \quad (1.48)$

entonces $X(t)$ y $Y(t)$ son llamados procesos ortogonales. Si los 2 procesos son estadísticamente independientes, así la función de correlación cruzada es :

$$R_{xy}(t, t + \tau) = E [X(t)] E [Y(t + \tau)] \quad (1.49)$$

si en suma para ser independiente, $X(t)$ y $Y(t)$ son tan pequeños, entonces la ec. 1.49 llega a ser :

$$R_{xy}(\tau) = \bar{X} \bar{Y} \quad (1.50)$$

la cual es una cte.

1.3.4. Propiedades de la Función de Correlación Cruzada.

Las propiedades en general de todas las funciones de correlación cruzada son totalmente diferentes de aquellas funciones de autocorrelación. Y estas funciones deben ser resumidas como sigue :

- 1) Las cantidades $R_{xy}(0)$ y $R_{yx}(0)$ no tienen significado físico en particular y no representan valores medios

cuadráticos. Estos es cierto, sin embargo :

$$R_{xy}(0) = R_{yx}(0).$$

2) Las funciones de correlación cruzada no son generalmente funciones de τ . Existe un tipo de simetría, sin embargo, como se indica en la siguiente relación :

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau) \quad (1.51)$$

Esos resultados siguen desde el factor de cambio de $Y(t)$ en una dirección (en el tiempo) es equivalente para un cambio de $X(t)$ en la otra dirección.

3) La función de correlación cruzada no tiene necesariamente este valor máximo de $\tau = 0$. Esto es mostrado como:

$$|R_{xy}(\tau)| \leq [R_x(0) R_y(0)]^{1/2} \quad (1.52)$$

con una relación similar para $R_{yx}(\tau)$. El valor máximo de la función de correlación cruzada puede ocurrir en cualquier momento, pero este no debe exceder por arriba del valor indicado. Además, esto no debe conseguirse para cualquier valor.

4) Si los dos procesos aleatorios son estadísticamente independientes, entonces

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E [X_1, Y_2] = E [X_1] E [Y_2] = X Y \\ &= R_{yx} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Si en suma, cualquiera de los dos procesos tienen media igual a cero, entonces la función de correlación cruzada desaparecerá para toda τ .

Las traspuestas de estas funciones no necesariamente deben ser verdaderas, sin embargo, el hecho de que la función de correlación cruzada es igual a cero, y que un proceso tiene una media igual a cero, no implica que los procesos aleatorios son estadísticamente independientes, excepto para las variables aleatorias Gaussianas.

5) Si $X(t)$ es un proceso aleatorio estacionario y $X'(t)$ es derivable con respecto al tiempo, la función de correlación cruzada de $X(t)$ y $X'(t)$ están dadas por :

$$R_{X'X}(t) = \frac{dR_X(\tau)}{d\tau} \quad (1.54)$$

en la cual, el miembro derecho de la ec. 1.55 es la derivada de la función de autocorrelación con respecto a τ . Estos es fácilmente demostrable para emplear la definición fundamental de la derivada :

$$X'(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{X(t + \epsilon) - X(t)}{\epsilon}$$

de aquí tenemos :

$$R_{X'X}(\tau) = E [X(t) X'(t + \tau)]$$

$$= E \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} X(t) X(t + \tau + \epsilon) - X(t) X(t + \tau) \right]$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{R_X(\tau + \epsilon) - R_X(\tau)}{\epsilon} = \frac{dR_X(\tau)}{d(\tau)}$$

El intercambio de la operación del límite y la expectación o esperanza es permisible cuando $X'(t)$ existe. Si el proceso de arriba es repetido, este es posible para mostrar que la función de autocorrelación de $X'(t)$ es :

$$R_{X'}(\tau) = R_{X'X}(\tau) = - \frac{d^2 R_X(\tau)}{d\tau^2} \quad (1.55)$$

en donde el miembro del lado derecho es la segunda derivada de la función de autocorrelación básica con respecto a τ .

1.3.5. Matriz de Correlación para Función Muestral.

Una situación dentro de la cual la notación de vector es útil en representación de una señal, surge en el caso de una señal en función del tiempo que es muestreada en instantes de un período de tiempo. Si solo un número finito de tales muestras están para ser consideradas, como N , entonces cada valor de la muestra puede ser un componente de un vector de $N \times 1$. así, si los tiempos muestreados son t_1, t_2, \dots, t_N , y el vector representado para la función $X(t)$ en función del tiempo, es expresada como :

$$X = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X(t_N) \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Si $X(t)$ es una función muestral desde un proceso aleatorio, entonces a cada uno de los componentes de el vector X es una variable aleatoria. Pero ahora es posible definir a una matriz de correlación que es de $(N \times N)$ y da la correlación entre las parejas de las variables aleatorias. Como se muestra en seguida :

$$R_X = E [XX^T] = E \begin{bmatrix} X(t_1) & X(t_1) & X(t_1) & X(t_2) & \dots & X(t_1) & X(t_N) \\ X(t_2) & X(t_1) & X(t_2) & X(t_2) & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ X(t_N) & X(t_1) & & & & & X(t_N) & X(t_N) \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

donde X^T es la traspuesta de X .

Cuando el valor esperado de cada elemento de la matriz es formado, esos elementos llegan a ser un valor en particular de la función de autocorrelación del proceso aleatorio, desde el cual la función $X(t)$ llega. Entonces la matriz resultante es :

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} R_x(t_1, t_1) & R_x(t_1, t_2) & \dots & R_x(t_1, t_N) \\ R_x(t_2, t_1) & R_x(t_2, t_2) & & \\ \vdots & \vdots & & \\ R_x(t_N, t_1) & \dots & \dots & R_x(t_N, t_N) \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

Cuando el proceso aleatorio, desde el cual la función $X(t)$ llega a ser estacionario de sentido-ancho, entonces todos los componentes de R_x son funciones de la diferencia del tiempo. Si el intervalo entre los valores de la muestra son Δt , entonces :

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + \Delta t \\ t_3 &= t_1 + 2\Delta t \\ &\vdots \\ t_N &= t_1 + (N-1)\Delta t \end{aligned}$$

y además

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[\Delta t] & \dots & R_x[(N-1)\Delta t] \\ R_x[\Delta t] & R_x[0] & & \\ \vdots & \vdots & & \\ R_x[(N-1)\Delta t] & \dots & \dots & R_x[0] \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

en donde tendría que usarse de hecho la simetría de la función de autocorrelación; que es $R_x[\Delta t] = R_x[-\Delta t]$. Nótese que como es una

consecuencia de la simetría, R_x es una matriz simétrica (siempre y cuando no este en el caso no estacionario), y que como es una consecuencia de estacionaridad, la diagonal mayor (y todas las diagonales paralelas a esto) tienen elementos idénticos.

Aunque a la definida R_x es una consecuencia lógica de previas definiciones, esto no es más que el camino acostumbrado para la designación de la matriz de correlación de un vector aleatorio contenido de valores muestrales. Un procedimiento más común para definir a una matriz de covariancia, la cual contiene las variancias de covariancias de las variables aleatorias. La covariancia general entre dos variables aleatorias esta definida como :

$$E \{ [X(t_i) - \bar{X}(t_i)] [X(t_j) - \bar{X}(t_j)] \} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (1.58)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{X}(t_i) &= \text{valor medio de } X(t_i) \\ \bar{X}(t_j) &= \text{valor medio de } X(t_j) \quad \rho_{ij} = \text{covariancia Normalizada} \\ \sigma_i^2 &= \text{variancia de } X(t_i) \quad \text{de coeficiente de } X(t_i) \\ \sigma_j^2 &= \text{variancia de } X(t_j) \quad \text{y de } X(t_j) \end{aligned}$$

La matriz de Covariancia es definida como :

$$\Lambda_x = E \{ [X - \bar{X}] [X^T - \bar{X}^T] \} \quad (1.61)$$

donde \bar{X} es el valor medio de X . Usando la definición de Covariancia se obtiene inmediatamente a :

$$\Lambda_x = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} & \dots & \sigma_1 \sigma_N \rho_{1N} \\ \sigma_2 \sigma_1 \rho_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_N \sigma_1 \rho_{N1} & \dots & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

dado que $\rho_{ij} = 1$, para $i = 1, 2, \dots, N$. Para expandir la ec. 1.62 es fácil demostrar que Ax está relacionado con Rx por :

$$Ax = Rx - \bar{X} \bar{X}^T \quad (1.63)$$

si los procesos aleatorios tienen una media igual a cero, entonces

$$Ax = Rx$$

La representación para la matriz de covarianza es válida para los procesos estacionarios y no estacionarios, y para el caso del proceso estacionario de sentido-ancho, todas las variancias son las mismas y el coeficiente de correlación dentro de la diagonal dada son iguales. Así que :

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \sigma_j^2 = \sigma^2 \text{ donde } i, j = 1, 2, \dots, N \\ \rho_{ij} &= \rho^{|i-j|} \text{ donde } i, j = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

y además se tiene :

$$Ax = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{N-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{N-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{N-1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

CAPITULO 2.

TRANSFORMACION DE SEÑALES.

2.1. SENAL CONTINUA.

Análisis Continuo de Fourier.

Fourier establece que cualquier función periódica uniforme (unívoca), que tenga un intervalo T de repetición, puede representarse mediante una serie infinita de términos seno y coseno, que son armónicos de $f_0 = 1/T$. La ec. 2.1 viene dada por :

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t) \quad (2.1)$$

donde $f_0 = 1/T$ es la frecuencia fundamental.

La respuesta de un sistema lineal a una forma de onda $f(t)$, que no sea función armónica simple, se encuentra sumando las respuestas producidas por las componentes sinusoidales individuales. El término a_0/T se conoce como la componente continua y es el valor medio de $f(t)$.

$$\frac{a_0}{T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

es decir :

$$a_0 = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (2.2)$$

las amplitudes de los términos seno y coseno vienen dadas por :

$$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad (2.3)$$

$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

La serie de Fourier, por lo tanto, contiene un número infinito de términos seno y coseno. Esto puede expresarse de un forma más compacta de la manera siguiente :

$$X(t) = a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t) \quad (2.4)$$

$$\cos \phi_n = a_n / ((a_n^2 + b_n^2)^{1/2}) \quad , \quad \sin \phi_n = -b_n / ((a_n^2 + b_n^2)^{1/2})$$

de donde $\phi_n = \text{ArcTan} [-b_n/a_n]$ y

$$X(t) = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} [\cos(2\pi n f_0 t) \cos \phi_n - \sin(2\pi n f_0 t) \sin \phi_n] \quad (2.5)$$

es decir

$$X(t) = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n) \quad (2.6)$$

por lo que la serie de Fourier puede ponerse en la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n) \quad (2.7)$$

donde

$$C_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \quad \text{y} \quad \phi_n = \text{ArcTan} [-b_n/a_n]$$

La representación gráfica de C_n en función de la frecuencia se conoce como espectro de amplitudes de $f(t)$, y la representación de ϕ_n en función de la frecuencia se conoce como espectro de fases de $f(t)$.

Se puede desarrollar una forma alternativa y práctica de la ec. 2.1 sin más que escribir los términos seno y coseno en notación exponencial como :

$$\cos(2\pi n f_0 t) = [\exp(j 2\pi n f_0 t) - \exp(-j 2\pi n f_0 t)]/2 \quad (2.8)$$

$$\sin(2\pi n f_0 t) = [\exp(j 2\pi n f_0 t) - \exp(-j 2\pi n f_0 t)]/2j$$

que sustituidos en la ec. 2.1 queda como :

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - j b_n) \text{Exp}(2j\pi n f_0 t) + (a_n + j b_n) \text{Exp}(-2j\pi n f_0 t)$$

Si $C_n = (a_n - j b_n)$, su complejo conjugado es $C_n^* = (a_n + j b_n)$ y

$$(a_n - j b_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\text{Cos}(2\pi n f_0 t) - j \text{Sen}(2\pi n f_0 t)] dt \quad (2.9)$$

es decir

$$C_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{Exp}(-2j\pi n f_0 t) dt \quad (2.10)$$

de forma similar

$$C_n^* = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{Exp}(2j\pi n f_0 t) dt \quad (2.11)$$

por lo tanto

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \text{Exp}(2j\pi n f_0 t) + C_n^* \text{Exp}(-2j\pi n f_0 t)] \quad (2.12)$$

y

$$C_0 = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{Exp}(j^0) dt = a_0 \quad (2.13)$$

de manera que $f(t)$ puede escribirse en la forma

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \text{Exp}(2j\pi n f_0 t) \quad (2.14)$$

Esta es la forma exponencial de la serie de Fourier y los límites de la sumatoria son ahora $n = \pm \infty$. El espectro que contiene tanto componentes positivos como negativos se conoce como espectro bilateral.

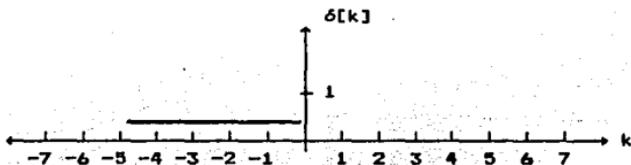
Las frecuencias negativas son el resultado directo de expresar los senos y cosenos en forma exponencial compleja.

2.2. Señal Discreta (FDT).

Señal y Función Impulso.

La señal impulso unitario es una secuencia que vale la unidad cuando su argumento es cero y vale cero para cualquier otro argumento, como se muestra enseguida.

$$\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$



La utilización del impulso unitario en funciones continuas, permitirá caracterizar la salida de las funciones continuas para cualquier entrada. Los valores tomados por el impulso unitario, cuando el tiempo es desplazado de más o menos un número entero n , están dados por la relación :

$$\delta[k - n] = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (2.16)$$

De la igualdad anterior, se desprende que una secuencia

arbitraria $x[k]$ puede ser representada como una sumatoria de impulsos unitarios apropiadamente desplazados y multiplicados por los valores de la secuencia $x[k]$. Dada por la ec :

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[k - n] \quad (2.17)$$

La Función Impulso Unitario se define por la ec. 2.18

$$\int_b^a \delta(t - t_0) dt = 1 \quad \text{para } a < t_0 < b \quad (2.18)$$

= 0 para cualquier otro valor de t_0

el impulso existe únicamente en el instante t_0 y tiene un valor de cero para todos los demás valores de t . La amplitud del impulso en el instante $t = t_0$ no está definida; en vez de ello, el impulso está definido en función de su área en el instante $t = t_0$. Si cualquier función continua $f(t)$ se multiplica por un impulso de área unitaria en el instante $t = t_0$, la función resultante viene dada por :

$$\int_b^a f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t) \quad \text{para } a < t_0 < b \quad (2.19)$$

= 0 para cualquier otro valor de t_0

De donde se deduce que la multiplicación de $f(t)$ por una función impulso en $t = t_0$, junto con la integración de la ec. 2.18, es equivalente a tomar una muestra de $f(t)$ en el instante $t = t_0$. La función impulso sólo está definida en forma integral, por lo que hablando estrictamente la expresión del tipo $f(t_0) = f(t) \delta(t - t_0)$ carecen de significado. Sin embargo, es práctica común expresar de esta forma la ec. 2.18, quedando implícito el proceso de integración. La transformada de Fourier de una función impulso es importante, siendo dicha transformada como :

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \text{Exp}(-2\pi f t_0) dt = 1 \text{Exp}(-2\pi f t_0) \quad (2.20)$$

Esto significa que $|\Delta f|$ vale la unidad para todos los valores de f . La función $\text{Exp}(-2j\pi f t_0)$ representa la fase de cada componente $\Delta(f)$, es decir, $\phi = 2\pi f t_0$.

Ahora, si en vez de un único impulso se considera un tren periódico de impulsos separados por un período T , se puede obtener el espectro de amplitudes mediante la Serie de Fourier. La amplitud del armónico n -ésimo es entonces :

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Exp}(-2j\pi f t_0) dt \quad (2.21)$$

donde $f(t) = \delta(t - nT)$

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \text{Exp}(-2j\pi f t_0) dt = \text{Exp}(-2j\pi n f T) \quad (2.22)$$

Por lo que cada componente de la Serie de Fourier tiene un valor unitario y una fase de 2π radianes. Este tren periódico de impulsos es utilizado para obtener muestras espaciadas regularmente de una forma de onda continua $f(t)$, y es de importancia fundamental en la transmisión digital de señales analógicas.

Ahora que se ha definido la función impulso (o delta), se puede demostrar que la integral de Fourier también se utiliza para definir el espectro de amplitudes de una señal periódica, y que por tanto se trata de una transformada general.

Si

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \text{Exp}(2j\pi n f t_0) \quad (2.23)$$

la transformada de Fourier de $f(t)$ es

$$H(f) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \text{Exp}(2j\pi (f - n f_0) t) dt \quad (2.24)$$

$$H(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp}[2j\pi (f - n f_0) t] dt \quad (2.25)$$

$$H(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - n f_0) \quad (2.26)$$

La transformada de Fourier de una señal periódica es, por lo tanto, un conjunto de impulsos localizados en los armónicos de la frecuencia fundamental $f_0 = 1/T$.

La Transformada Discreta de Fourier (DFT).

La DFT es una extensión de la transformada continua de Fourier, diseñada para trabajar con señales que se han muestreado a intervalos regulares de tiempo. El proceso de muestreo puede considerarse como la multiplicación de la señal continua por una serie periódica de impulsos.

Cuando se multiplica este espectro por el espectro de una señal continua, cada componente de la señal continua formará frecuencias de suma y diferencia con los armónicos del tren periódico de impulsos. Si por ejemplo se supone que los impulsos están separados por un intervalo T_s y que la componente de frecuencia máxima de la señal continua es de W [Hz], el espectro de amplitudes de la señal muestreada tomará la forma de la figura 2.1. En dicha figura puede observarse que siempre que la frecuencia de muestreo $f_s (= 1/T_s)$ sea al menos igual a $2W$, no habrá traslape entre el espectro de la señal y la primera banda lateral inferior del espectro de la señal muestreada. La señal original está definida por su espectro de amplitudes, espectro que se conserva en la versión muestreada siempre que $f_s \geq 2W$.

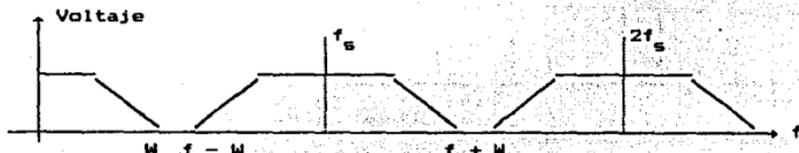


Figura 2.1 Espectro de una señal muestreada.

La DFT está concebida para señales periódicas $f(t)$ que no tengan componentes en, ni por encima, de una cierta frecuencia $f_x = x / T$, siendo x un entero y T el período de la señal. En la Figura 2.2 se muestra un ejemplo de este tipo de señales junto con su espectro, figura que también contiene la versión muestreada de $f(t)$, indicada como $f(k\Delta t)$, junto con su espectro de amplitudes $C(n\Delta f)$. Para evitar posibles traslapes, el valor de la frecuencia de muestreo ($f_s = 1/\Delta T$) se escoge igual a $2f_x$.

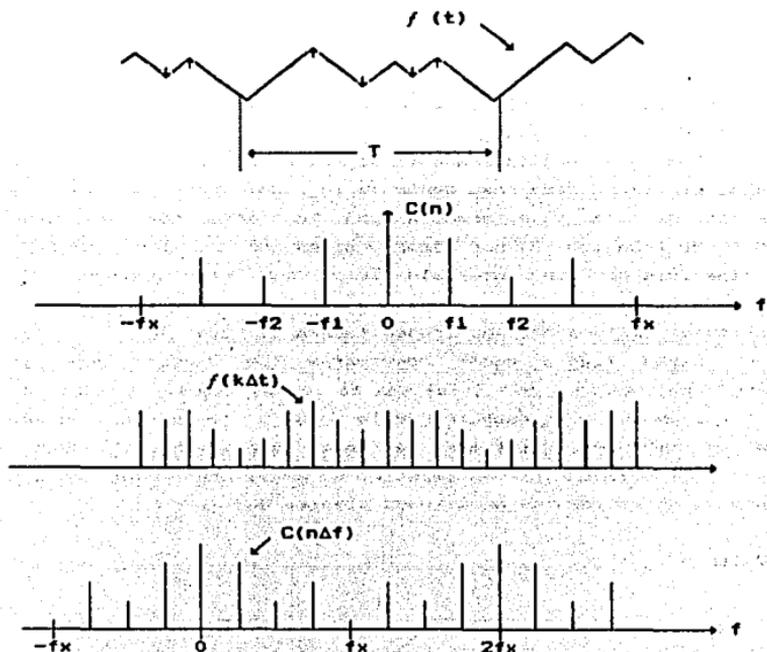


Figura 2.2 Muestreo de una señal continua.

La serie de Fourier de $f(k\Delta t)$ es :

$$f(k\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-(x-1)}^{x-1} C_n \text{Exp}(2j\pi nk\Delta t/T) \quad (2.27)$$

pero dentro del intervalo $-(x-1) \leq n \leq (x-1)$ los coeficientes C_n son idénticos a $C(n\Delta f)$ por lo que

$$f(k\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-(x-1)}^{x-1} C_n(n\Delta f) \text{Exp}(2j\pi nk\Delta t/T) \quad (2.28)$$

Si hay un total de N muestras en el intervalo T , entonces $T = N\Delta t$ y la gama de valores de k es $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm[(N/2)-1]$. Dado que también se puede escribir $t = 1/2fx = T/2x$, entonces $N = 2x$ y la ec. 2.28 se convierte en :

$$f(k\Delta t) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2+1} C(n\Delta f) \text{Exp}(2j\pi nk/N) \quad (2.29)$$

En la figura 2.2 se observa que $C(n\Delta f)$ es periódica y, por lo tanto, se puede cambiar el intervalo de variación de n en la ec. 2.29 para hacer que $C(n\Delta f)$ sea simétrica respecto a la frecuencia f_x ; así que

$$f(k\Delta t) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=0}^{n=N-1} C(n\Delta f) \text{Exp}(2j\pi nk/N) \quad (2.30)$$

esta ec. suele escribirse utilizando la notación de la ec. 2.31

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=N-1} C(n) \text{Exp}(2j\pi nk/N) \quad (2.31)$$

A menudo suele omitirse el factor multiplicador $1/\Delta t$, tal y como se ha hecho en la ec. 2.31. Esta omisión no afecta a los valores relativos de $f(k)$, aunque debe incluirse para conseguir una representación exacta de $f(k)$. El espectro de amplitudes $C(n\Delta f)$ se obtiene utilizando la ec.1.24 y observando que, dado que $f(t)$ sólo existe para valores discretos de t , la integral puede sustituirse por una sumatoria :

$$C(n\Delta f) = \sum_{k=-(N/2-1)}^{N/2-1} f(k\Delta t) \text{Exp}(-2j\pi nk\Delta t/T)\Delta t \quad (2.32)$$

dado que $\Delta t = T/N$ y $f(k\Delta t)$ es una función periódica, los límites de la sumatoria pueden cambiarse, llegando a la expresión :

$$C(n\Delta f) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t) \text{Exp}(-2j\pi nk/N) \quad (2.33)$$

Esta ec. suele escribirse en la notación de la ec. 2.34 y debe tenerse en cuenta que una vez más se debe omitir el factor multiplicativo, que en este caso es Δt :

$$C(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \text{Exp}(-2j\pi nk/N) \quad (2.34)$$

A la ec.2.34 se le conoce como la *Transformada Discreta de Fourier (DFT)* de $f(t)$, y la ec. 2.31 como la *Transformada Discreta Inversa (IDFT)* de $C(n\Delta f)$.

Además, se puede observar que tanto en la ec. 2.31 como en la ec.2.34 no aparecen ni la frecuencia ni el tiempo, ya que los coeficientes k , n y N toman valores numéricos.

Es necesario tomar algunas precauciones al usar la DFT ya que, solamente es válida para el caso especial de señales periódicas de banda limitada. En la Figura 2.3 se muestra una señal de este tipo junto con su DFT. En esta figura $f(t)$ es un tono único con 4 ciclos completos dentro del intervalo T . La DFT tiene una componente para un valor de $n = 4$ (es decir, el cuarto armónico de la frecuencia fundamental $f_0 = 1/T$), y una segunda componente para un valor de $n = 28$. Esta segunda componente es la equivalente de $n = -4$, y es resultado del cambio efectuado en el intervalo de variación de la ec. 2.29. Así, en el caso especial de una función periódica de banda limitada, la DFT proporciona el espectro correcto de $f(t)$. En cualquier otro caso, la DFT dará únicamente una aproximación al espectro de amplitudes de $f(t)$.

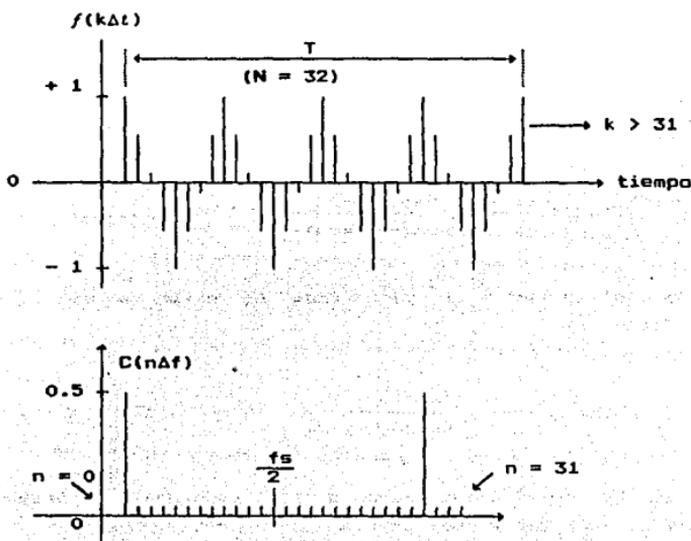


Figura 2.3 DFT de una forma de onda periódica de banda limitada.

Ejemplo 2.1.- Se tiene la siguiente secuencia exponencial.

$$f(k) = a^n \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

en donde a es una constante. Aplicando la ec. 2.34, se tiene la DFT de $f(k)$ como

$$C(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^n \text{Exp}(-2j \pi nk/N).$$

$$C(n) = \sum_{k=0}^{N-1} [a \text{Exp}(-2j \pi nk/N)]^n \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Esto representa una serie geométrica con las siguientes características: un primer término unitario, un radio geométrico de $a \text{Exp}(-2j \pi nk/N)$, un número de términos igual a N . De aquí, usando la fórmula para la suma de una serie geométrica se tiene

$$C(n) = \frac{1 - a^N \text{Exp}(-2j \pi nk)}{1 - a \text{Exp}(-2j \pi nk/N)} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

después $\text{Exp}(-2j \pi nk) = 1$ para toda k , entonces el resultado simplificado es

$$C(n) = \frac{1 - a^N}{1 - a \text{Exp}(-2j \pi nk/N)} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

la figura 2.4 muestra los planos de la secuencia de tiempo de $f(k)$, y la amplitud y fase de $C(n)$ para $a = 0.9$, $N = 16$.

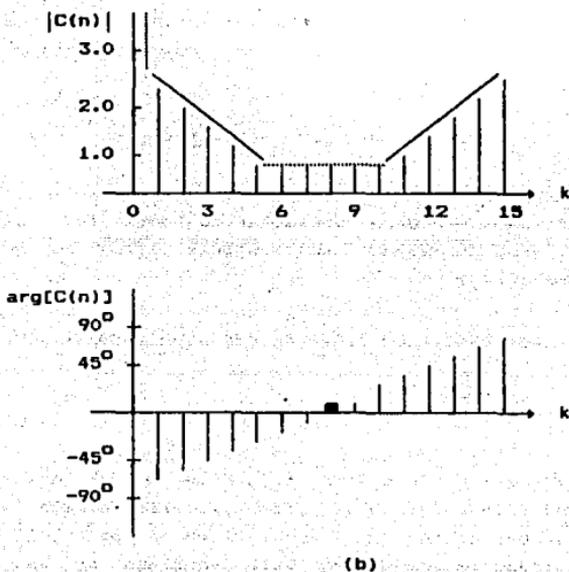
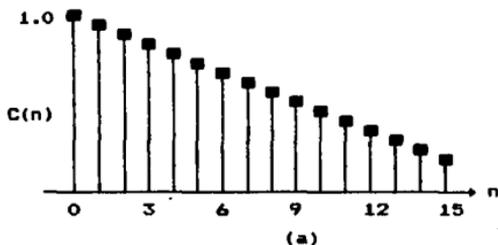


Figura 2.4. (a) Secuencia de datos de $f(k)$. (b) Respuesta de Amplitud de $|C(n)|$ y la respuesta de fase de $\arg[C(n)]$.

Series Discretas de Fourier.

Como se ha visto hasta ahora, una función periódica $f(t)$ puede representarse como una suma infinita :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \text{Exp}(jn\omega_0 t) \quad (2.35)$$

cuyos coeficientes C_n vienen dados por :

$$C_n = 1/T \int_0^T f(t) \text{Exp}(-jn\omega_0 t) dt \quad (2.36)$$

La suma en la ec.2.35 determina $f(t)$ si los coeficientes C_n son conocidos, mientras que la integral en la ec.2.36 determina C_n si la función $f(t)$ es conocida. En la evaluación numérica de la suma de la ec.2.35 o de la integral 2.36, pueden hacerse las siguientes consideraciones :

- 1.- La suma infinita ha de ser aproximada por una suma finita.
- 2.- La integral ha de ser aproximada por una suma.
- 3.- En ambos casos, se debe considerar no todos los valores de $f(t)$, sino únicamente sus valores $f(tm)$ en puntos discretos $t = tm$.

En lo siguiente, se supone que los puntos tm son equidistantes :

$$tm = mT_1$$

en donde

$$T_1 = T/N \quad (2.37)$$

que es una fracción del período T de $f(t)$. El valor del entero N requerido depende de la suavidad de $f(t)$ y, ello afecta a la exactitud de la aproximación y a la complejidad de los cálculos.

Una cantidad importante en este análisis es la raíz N -ésima de la unidad :

$$W_N = \text{Exp}(2j\pi/N) \quad (2.38)$$

que resulta ser un número complejo de amplitud unidad y fase $2\pi/N$, y su potencia N -ésima igual a la unidad :

$$W_N^N = 1 \quad W_N^{m+N} = W_N^m \quad (2.39)$$

la importancia de W_N es debida al hecho de que los valores de la exponencial $\text{Exp}(j\omega t)$ para $t = mT_s$, son potencias de W_N . En realidad

$$W_N^{mT_s} = 2\pi/T (m) T/N = 2\pi m/N \quad (2.40)$$

por lo que :

$$\text{Exp}(j\omega mT_s) = \text{Exp}(2j\pi m/N) = W_N^m \quad (2.41)$$

así pues, según varía t en el intervalo de 0 a T , $\text{Exp}(j\omega t)$ toma valores, sobre la circunferencia de radio unidad y sus valores para :

$$t = mT_s \quad m = 0, \dots, N-1$$

que forman un conjunto de N puntos equidistantes

$$1, W_N, W_N^2, \dots, W_N^{N-1}$$

Se desprende de la ec. 2.41 que :

$$\text{Exp}(n j\omega mT_s) = W_N^{mn} \quad (2.42)$$

y haciendo $t = mT$ en 2.35 se obtiene

$$f(mT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n W_N^{mn} \quad (2.43)$$

De esta manera, se ha expresado las muestras $f(mT_s)$ de $f(t)$ como una suma infinita que contiene las potencias de W_N . Este resultado es básico en la evaluación numérica de las series de Fourier.

Ahora el aspecto general de las series de Fourier, únicamente conciernen a dos secuencias de números, los coeficientes C_n y las muestras $f(mT_s)$. Los dos enfoques son equivalentes si hacemos

$$C_n = F[n] \quad \text{y} \quad f(mT_s) = f[m] \quad (2.44)$$

Así, dados N números $f[0], f[1], \dots, f[N-1]$ reales o complejos, se generan N números de la forma :

$$F[n] = 1/N \sum_{m=0}^{N-1} f[m] W_N^{-mn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.45)$$

en donde $W_N = \text{Exp}(j2\pi/N) = \text{Cos } 2\pi/N + j \text{ Sen } 2\pi/N$. Y así, los números $f[m]$ pueden ser expresados en función de $F[n]$. De tal forma, resolviendo el sistema de la ec.2.45, se obtiene :

$$f[m] = \sum_{n=0}^{N-1} F[n] W_N^{mn} \quad (2.46)$$

En conclusión, se ha establecido una correspondencia biunívoca entre los números $f[m]$ y $F[n]$, la cual se denotará por :

$$f[m] \xleftrightarrow{N} F[n] \quad (2.47)$$

y se denominará como la Serie Discreta de Fourier (SDF).

Transformada Rápida de Fourier (TRF).

Para calcular la suma

$$F[n] = 1/N \sum_{m=0}^{N-1} f[m] W_N^{-mn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.48)$$

de forma rápida. Se va a prescindir del factor $1/N$ centrado el análisis en el sumatorio

$$A_N[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] W_N^{-mn} = f[0] + f[1]W_N^{-n} + f[2]W_N^{-2n} + \dots + f[N-1]W_N^{-(N-1)n}$$

para $n = 0, 1, \dots, N-1$ (2.49)

El Subíndice N en $A_N[n]$ indica el número de puntos distintos a calcular, que forman el período de la sucesión. De una simple inspección se deduce que para calcular cada punto de $A_N[n]$ mediante la suma anterior se necesitan $N - 1$ multiplicaciones complejas y $N - 1$ sumas complejas. El cálculo de los N puntos precisará pues de $N(N - 1) \approx N^2$ operaciones complejas para $N \gg 1$, constando una operación compleja de una suma y un producto complejos.

Los puntos de $A_N[n]$ son los valores de un polinomio de variable compleja, correspondientes a los puntos W_N^{-mn} equidistantes en la circunferencia unidad.

Los procedimientos de cálculo sugiere entonces dividir la suma $A_N[n]$ de N términos en dos sumas de $N/2$ términos que representarán dos SDF de orden mitad : $A_{N/2}^0[n]$ y $A_{N/2}^1[n]$.

Existen dos formas de llevar a cabo la descomposición, conocidas como *decimación en el tiempo* (DT) y *decimación en la frecuencia* (DF), ambas realizan la descomposición en índices pares e impares, la primera con el de tiempos m , y la segunda con el de frecuencias n .

Procedimiento Por Decimación en el Tiempo (DT).

Por medio de este procedimiento, se descompone la sucesión inicial $f[m]$ de N puntos : $f[0], f[1], \dots, f[N-1]$ en dos sucesiones formadas con los puntos de índice par; para la primera y con los índice impar; para la segunda :

$$\begin{aligned} f_0[k] &= f[2k] \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1 \\ f_1[k] &= f[2k + 1] \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

en donde se ha supuesto que N es divisible por 2. Con lo que la suma de la ec. 2.49 puede descomponerse de la forma

$$\begin{aligned}
 A_N[n] &= \{ f[0] + f[2] W_N^{-2n} + \dots + f[N-2] W_N^{-(N-2)n} \} + \\
 &+ \{ f[1] W_N^{-n} + f[3] W_N^{-3n} + \dots + f[N-1] W_N^{-(N-1)n} \} = \\
 &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f[2k] W_N^{-2kn} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f[2k+1] W_N^{-(2k+1)n} \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la igualdad fundamental de :

$$W_N^{-rkm} = \text{Exp}(-j2\pi/N) rkm = \text{Exp}(-j [2\pi/(N/r)] km) = W_{N/r}^{-km} \quad (2.52)$$

para $r = 2$, sacando W_N^{-n} factor común en la segunda suma, y recordando las definiciones de 2.50 se llega a

$$A_N[n] = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_0[k] W_{N/2}^{-kn} + W_N^{-n} \sum_{k=0}^{N/2-1} f_1[k] W_{N/2}^{-kn} \quad (2.53)$$

y siguiendo la misma notación del principio

$$A_N[n] = A_{N/2}^0[n] + W_N^{-n} A_{N/2}^1[n] ; \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.54)$$

en donde

$$\begin{aligned}
 A_{N/2}^0[n] &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_0[k] W_{N/2}^{-kn} \\
 A_{N/2}^1[n] &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_1[k] W_{N/2}^{-kn}
 \end{aligned} \quad (2.55)$$

son series discretas de Fourier salvo el factor multiplicativo $2/N$, en donde el factor multiplicativo no cambia sus propiedades esenciales.

Se observa, que ahora $A_{N/2}^0[n + N/2] = A_{N/2}^0[n]$ y también $A_{N/2}^1[n + N/2] = A_{N/2}^1[n]$, por lo tanto, puede usarse la ec. 2.54 para calcular los N puntos de $A_N[n]$ siempre que se hayan calculado las dos SDF de orden mitad. Parece que se requiere además efectuar

$N - 1$ multiplicaciones adicionales por los factores W_N^{-n} ; esto no es necesario ya que si se sustituye n por $n + N/2$ en la ec. 2.54, para $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$, entonces

$$A_N[n+N/2] = A_{N/2}^0[n] + W_N^{-n} A_{N/2}^1[n], \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \quad (2.56)$$

debido a la periodicidad $N/2$ de las dos SDF de orden $N/2$ y a la igualdad

$$W_N^{-(n+N/2)} = W_N^{-n} \text{Exp}(-j 2\pi/N N/2) = -W_N^{-n} \quad (2.57)$$

El diagrama de la figura 2.5a resume los cálculos comprendidos en las dos ecuaciones fundamentales 2.54 y 2.56 para un valor de n fijo. Son dos sumas y un producto complejos. Si se conocieran los valores de las SDF de orden $N/2$, $A_{N/2}^0[n]$ y $A_{N/2}^1[n]$ podría calcularse $A_N[n]$ y $A_N[n + N/2]$. La figura 2.5 b muestra el simbolismo simplificado correspondiente. A este esquema fundamental de cálculo se le denomina *mariposa*.

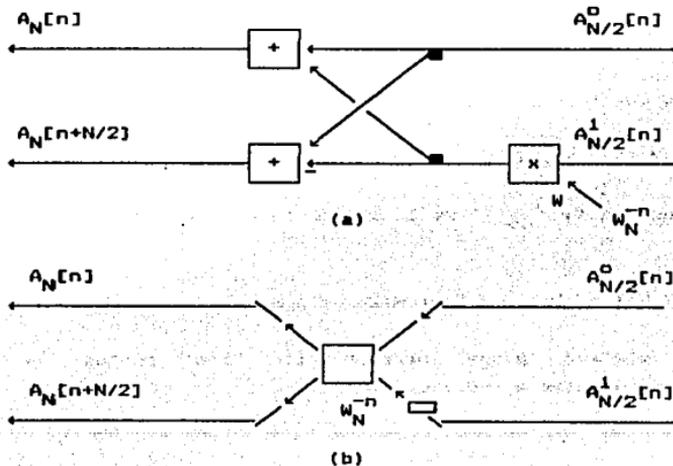


Figura 2.5.

Procedimiento con Decimación en la Frecuencia (DF).

Hasta el momento se ha basado el cálculo rápido en la descomposición de la sucesión temporal $f[m]$ en dos secuencias; los puntos de índice par, $m = 2k$, pasaban a formar parte de la primera y los de índice impar, $m = 2k+1$, se quedaban en la segunda. El cálculo rápido con decimación en frecuencia se basa en hacer algo análogo pero con el índice n de $A_N[n]$. Se consideran sus puntos de índice par separados de los de índice impar. Comenzando con el primer caso, de la ec. 2.49 se tiene :

$$A_N[2k] = \sum_{m=0}^{N/2-1} f[m] W_{N/2}^{-mk} + \sum_{m=N/2}^{N-1} f[m] W_{N/2}^{-mk} \quad (2.58)$$

Esta descomposición, está dada también en dos sumas de mitad de sumandos, que tienen por objeto expresar $A_N[n]$ en función de una SDF de orden mitad, al igual que en la descomposición por (DT), la segunda suma puede ponerse, mediante un cambio de índice, como :

$$\sum_{m=N/2}^{N-1} f[m] W_{N/2}^{-mk} = \sum_{m=0}^{N/2-1} f[m+N/2] W_{N/2}^{-mk} \quad (2.59)$$

con lo que se tiene que

$$A_N[2k] = \sum_{m=0}^{N/2-1} (f[m] + f[m+N/2]) W_{N/2}^{-mk} = A_{N/2}^0[k] \quad (2.60)$$

en donde aquí, $A_{N/2}^0[k]$ es la SDF de la sucesión de orden $N/2$

$$f_0[m] = f[m] + f[m+N/2] ; \quad m = 0, 1, \dots, N/2-1 \quad (2.61)$$

algo similar puede hacerse con los puntos de $A_N[n]$ correspondientes a índices impares.

$$AN[2k + 1] = \sum_{n=0}^{N/2-1} f[n]W_{N/2}^{-mk} W_N^{-m} + \sum_{m=N/2}^{N-1} f[m]W_{N/2}^{-mk} W_N^{-m} = \quad (2.62)$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} f[n]W_N^{-mk} W_{N/2}^{-mk} - \sum_{m=0}^{N/2} f[m + N/2]W_N^{-m} W_{N/2}^{-mk}$$

ya que al cambiar m por $m + N/2$ en la segunda suma se tiene que

$$AN[2k + 1] = \sum_{m=0}^{N/2-1} \{f[m] - f[m + N/2]W_N^{-m}\} W_{N/2}^{-mk} = A_{N/2}^1[k] \quad (2.63)$$

siendo $A_{N/2}^1[k]$ la SDF de la sucesión de orden $N/2$

$$f_1[m] = (f[m] - f[m + N/2])W_N^{-m}; \quad m = 0, 1, \dots, N/2-1 \quad (2.64)$$

El esquema expresado por la ec. 2.61 y la 2.64 queda reflejado en la figura 2.6a. Para una m dada ha de realizarse dos sumas y una multiplicación complejas para obtener un valor de $f_0[m]$ y otro de $f_1[m]$.

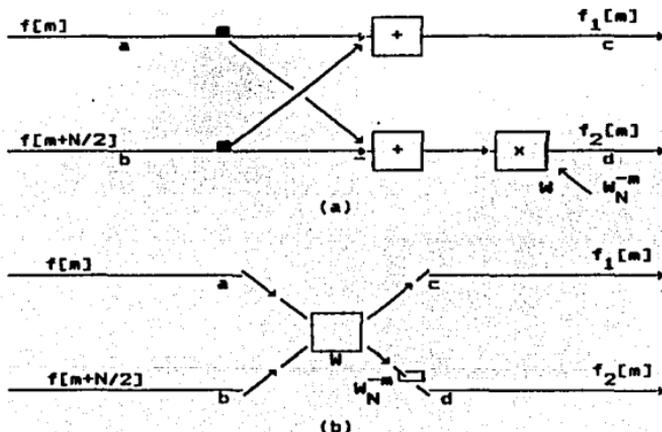


Figura 2.6.

Comparando con la figura 2.5 se ve que la similitud con ella es grande salvo en dos puntos. Por un lado, la dirección de las flechas va ahora de izquierda a derecha, o sea, del tiempo a la frecuencia. La segunda diferencia reside en que la multiplicación se efectúa aquí con posterioridad a la suma. La figura 2.6b muestra el símbolo simplificado de la mariposa en la decimación en frecuencia.

CAPITULO 3.

COMPRESIÓN DE SEÑALES.

3.1.- TEORÍA Y PRÁCTICA DEL MUESTREO.

Los datos experimentales y las funciones matemáticas con frecuencia se presentan como curvas continuas, aunque se puede emplear un número finito de puntos discretos para construir la gráfica. Si estos puntos discretos o muestras tienen un espaciamiento suficientemente próximo, se dibuja una curva uniforme uniéndolos y los valores intermedios se pueden interpolar con un grado razonable de exactitud.

Si esto se cumple, la teoría del muestreo establecerá las condiciones necesarias y sólo se necesitará transmitir los valores muestra según ocurran, en vez de enviar la señal en forma continua, esto es modulación de pulsos.

La clave distintiva entre la modulación de pulsos y la onda modulada, es que, existe algún parámetro de la onda modulada que varía en forma continua con el mensaje, en la modulación de pulsos, existe algún parámetro de cada pulso que se modula por un valor muestra particular del mensaje. Por lo general, los pulsos son muy cortos en comparación con el tiempo entre ellos, por lo que una onda modulada por pulsos está fuera la mayor parte del tiempo. Dadas las características anteriores hay dos ventajas muy importantes, la primera; la potencia transmitida se puede concentrar en ráfagas cortas en vez de ser enviada en forma continua. La segunda, los intervalos entre los pulsos se pueden llenar con valores muestra de otros mensajes, permitiéndose así la transmisión de muchos mensajes en un sistema de comunicación.

Una aproximación simple pero bastante informativa a la teoría del muestreo, se consigue por medio de la operación de conmutación de la figura 3.1a. El conmutador se desplaza en forma periódica entre los dos contactos a una velocidad de $f_s = 1/T_s$, permaneciendo en el contacto de la señal de entrada durante τ segundos y en el contacto conectado a tierra durante lo que resta

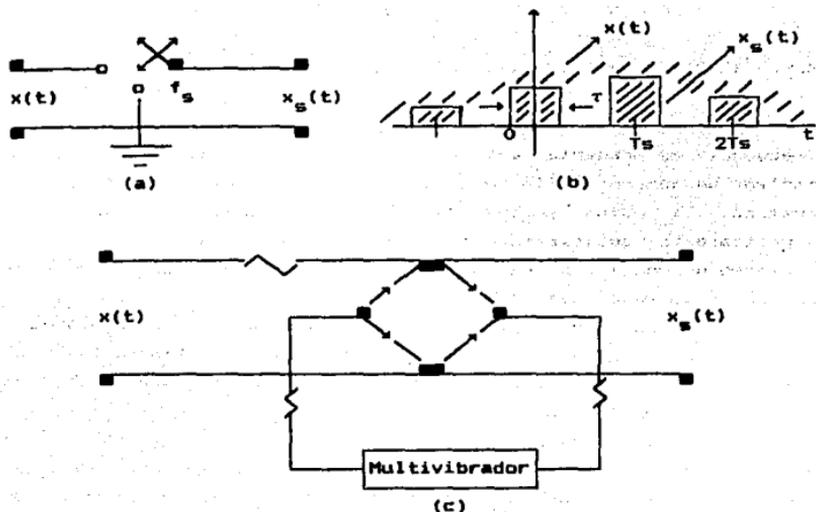


Figura 3.1. Un muestreador de conmutación. a) Diagrama, b) formas de onda, c) circuito electrónico.

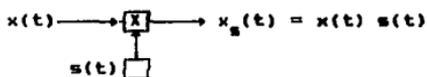
de cada período. La salida $x_s(t)$ está formada entonces de segmentos cortos de la entrada $x(t)$, como se muestra en la figura 3.1b. La figura 3.1c es una versión electrónica de la figura 3.1a, el voltaje de salida es igual al voltaje de entrada excepto cuando el multivibrador polariza en sentido directo a los diodos y con ello se lleva a la salida a cero. Esta operación a la cual se le designa algunas veces como de un solo terminal o troceado unipolar, no es un muestreo instantáneo en el estricto sentido. No obstante, a $x_s(t)$ se le designará como la onda muestreada y a f_s como la frecuencia de muestreo.

Ahora la operación inversa es la de recuperar la señal de entrada $x(t)$ de $x_s(t)$, y esta operación cae en el dominio de la

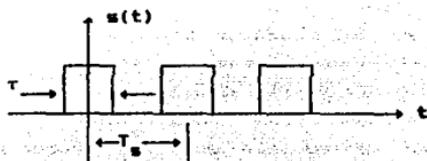
frecuencia, o dicho de otra forma, en el espectro de la onda muestreada. Como primer paso en la búsqueda del espectro, se introduce una función de conmutación $s(t)$ tal que

$$x_s(t) = x(t) s(t) \quad (3.1)$$

así la operación de muestreo viene a ser una multiplicación por $s(t)$, como se indica en forma esquemática en la figura 3.2a, donde $s(t)$ no es otra cosa que el tren periódico de pulsos de la figura 3.2b.



(a)



(b)

Figura 3.2. El muestreo interpretado como multiplicación
a) Diagrama. b) función de conmutación $s(t)$.

Puesto que $s(t)$ es periódico, se le puede escribir como una serie de Fourier de la siguiente forma

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \tau \text{ Senc } n f_n \tau \text{ Exp}(2\pi n f_n t)$$

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \text{ Cos } n \omega_n t \quad (3.2)$$

donde

$$c_n = f_s \tau \operatorname{senc} n f_s \tau, \quad \omega_s = 2\pi f_s$$

combinando la ecuación 3.2 con la 3.1 se llega al desarrollo término a término

$$x_s(t) = c_0 x(t) + 2c_1 x(t) \operatorname{Cos} \omega_s t + 2c_2 x(t) \operatorname{Cos} 2\omega_s t + \dots \quad (3.3)$$

Así, si el espectro de entrada es $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$, el espectro de salida es

$$X_s(f) = c_0 X(f) + c_1 [X(f - f_s) + X(f + f_s)] + c_2 [X(f - 2f_s) + X(f + 2f_s)] + \dots \quad (3.4)$$

lo cual procede en forma directa del teorema de la modulación.

En tanto que la ecuación 3.4, es el espectro de la onda muestreada, si se supone que la señal es de banda limitada, en forma de W . La figura 3.3 muestra una $X(f)$ conveniente y la correspondiente de $X_s(f)$ para los dos casos, $f_s > 2W$ y $f_s < 2W$. Examinando esta figura se revela algo importante, la operación de muestreo a dejado al espectro del mensaje intacto, repitiéndolo en forma periódica en el dominio de la frecuencia con un espaciamiento de f_s . También se nota que el primer término de la ecuación 3.4 es el espectro del mensaje, atenuado por el ciclo de trabajo

$$c_0 = f_s \tau = \tau / T_s$$

Si el muestreo conserva al espectro del mensaje, es posible recuperar o reconstruir a $x(t)$ apartir de la onda muestreada $x_s(t)$. Por lo tanto, de la figura 3.3, a $X(f)$ se le puede separar de $X_s(f)$ por medio de un filtraje pasabajas, siempre y cuando las bandas laterales no se traslapen. Y al filtrar a $X(f)$ sola de $X_s(f)$, se ha recuperado a $x(t)$.

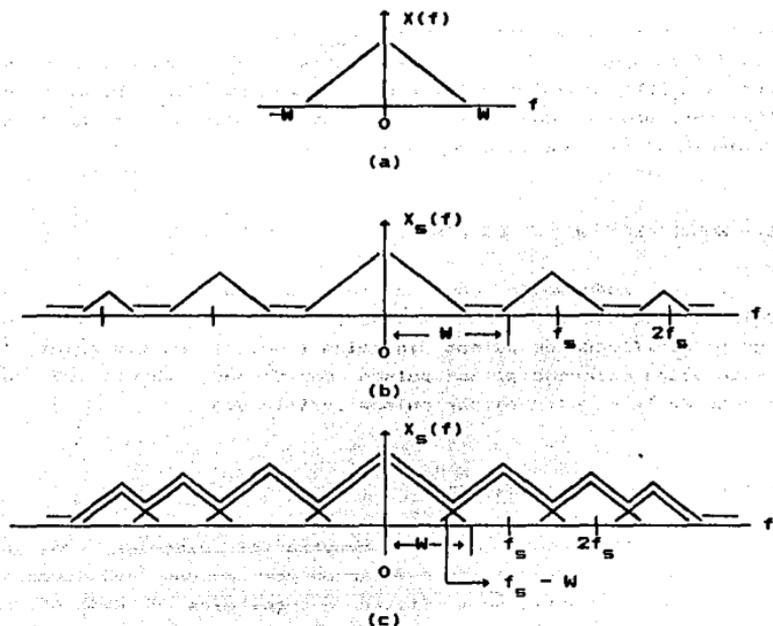


Figura 3.3. Espectros para muestreo de conmutación. a) Mensaje. b) Mensaje muestreado, $f_s > 2W$; c) Mensaje muestreado, $f_s < 2W$.

Las dos condiciones necesarias para que no haya el traslape de las bandas laterales, es que el mensaje debe ser de banda limitada, y la frecuencia de muestreo lo suficientemente grande como para que $f_s - W \geq W$, esto es

$$f_s \geq 2W \quad \text{ó} \quad T_s \leq 1/2W \quad (3.5)$$

A la frecuencia de muestreo mínima $f_{s_{\min}} = 2W$ se le conoce como la velocidad de Nyquist. Y cuando se satisface la ecuación 3.5 y se filtra a $x_s(t)$ por medio de un filtro pasabajas ideal, la señal de salida será proporcional a $x(t)$, y es así como se a de reconstruir el mensaje apartir de la señal muestreada.

3.2. - MODULACIÓN DE PULSOS CODIFICADOS : PCM Y DPCM.

La modulación por pulsos codificados (PCM) es una modulación digital en la que el mensaje se representa por medio de un grupo codificado de pulsos digitales (amplitudes discretas). La modulación diferencial por pulsos codificados (DPCM) es una variante de la modulación por pulsos codificados.

Cuantificación y Codificación.

En la figura 3.4 se muestra el diagrama con los elementos de la generación de modulación por pulsos codificados. La señal continua primero se filtra a pasabajas y después se muestrea para dar $x_s(t)$. Los valores muestra se redondean o cuantifican al valor discreto predeterminado más próximo o nivel cuántico. La señal muestreada o cuantificada resultante $x_{sq}(t)$ es discreta en tiempo (en virtud del muestreo) y en amplitud (en virtud de la cuantificación). Por último, $x_{sq}(t)$ se opera mediante un codificador que convierte las muestras cuantificadas en palabras de código digital apropiadas, con una palabra de código por cada muestra, y genera la correspondiente señal de banda base de modulación por pulsos codificados como una forma de onda digital.

Los parámetros de la señal codificada dependen del número de niveles cuánticos Q , por que cada palabra de código debe representar exclusivamente una de las posibles muestras

cuantificadas. Para indagar la relación, sea ν el número de dígitos en la palabra de código, teniendo cada uno de los valores discretos. Puesto que hay μ^ν palabras de código posibles diferentes, se requiere que $\mu^\nu \geq Q$ para una codificación única. Por lo tanto, cuando se eligen los parámetros de tal manera que la igualdad se cumpla

$$\mu^\nu = Q \quad \nu = \log_\mu Q \quad (3.6)$$

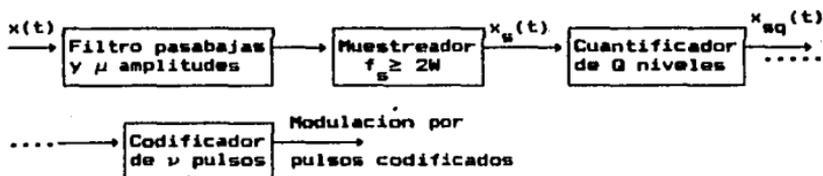


Figura 3.4. Sistema para la generación de la modulación por pulsos codificados.

Examinando la ecuación 3.6 se ve que si $\mu = Q$, entonces $\nu = 1$, y la señal cuantificada no requiere de traslación de código. Sin embargo, en general, $\mu < Q$ y $\nu > 1$. La forma más común de modulación por pulsos codificados es la binaria, para la cual $\mu = 2$; el número de niveles cuánticos se toma entonces como alguna potencia de 2, a saber, $Q = 2^\nu$. La figura 3.5 ilustra estas operaciones para la modulación por pulsos codificados binaria. Se muestran ocho niveles cuánticos, correspondientes a $\pm 1/8, \pm 3/8, \dots, \pm 7/8$, por lo que los niveles están espaciados de manera uniforme en $2 \times 1/8 = 2/8$ e incluyendo el redondeo, ellos cubren el intervalo de -1.0 a $+1.0$ lo cual es consistente con la

convención de normalización $|x(t)| \leq 1$. Se asigna un número de código 0, 1, ..., 7 a cada nivel cuántico y la palabra de código binario, es simplemente el equivalente binario del número de código, por ejemplo, 5 \rightarrow 101, 4 \rightarrow 100, etc.

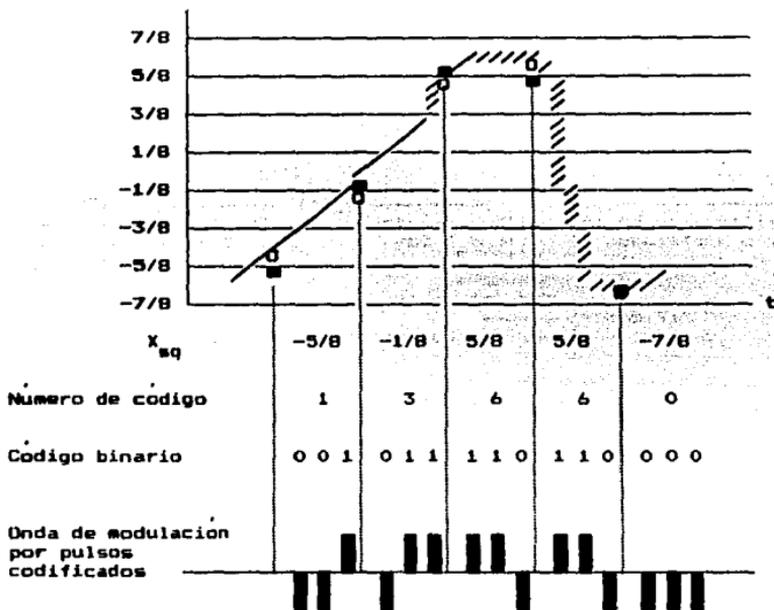


Figura 3.5.

Se necesitan tres dígitos binarios por palabra de código, puesto que $\nu = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$. Como se requieren varios dígitos para cada muestra del mensaje, resulta que el ancho de banda de la modulación por pulsos codificados será mucho mayor que el ancho de

banda del mensaje. Una estimación del ancho de banda se obtiene como sigue. Las muestras cuantificadas ocurren a una velocidad de $f_s \geq 2W$ muestras por segundo, por lo que debe haber $r = \nu f_s$ dígitos por segundo. Por lo tanto, la relación de ancho de banda de velocidad de señalización es :

$$B_{\text{sig}} \geq r/2 = \nu f_s / 2 > \nu W \quad (3.7)$$

El ancho de banda de la modulación por pulsos codificados en banda en base es así un mínimo de $\nu = \log_{\mu} Q$ veces el ancho de banda del mensaje.

Como paso final de la generación de la modulación por pulsos codificados, la señal de banda base puede modular una portadora de RF para propósito de transmisión. La modulación de la portadora puede ser de manipulación por corrimiento de amplitud (ASK), manipulación por corrimiento de fase (PSK) o manipulación por corrimiento de frecuencia (FSK). Aún así, la modulación de portadora resulta en un ancho de banda de transmisión aún mayor que el de la ecuación 3.7 pero sólo se prestará atención al caso de banda base.

Ruido de Cuantificación.

La figura 3.6 muestra la porción de un receptor para la modulación por pulsos codificados que sigue a la demodulación de portadora, si la hay. La forma de onda de la modulación por pulsos codificados analógica contaminada por ruido aleatorio $n(t)$ se opera por medio de un convertidor A/D que regenera las palabras de código digitales (más errores). De estas palabras de código, el decodificador determina los valores muestra cuantificados (de nuevo con errores) y genera a $x_{\text{eq}}(t)$ la cual se procesa por medio de un filtro pasabajas para obtener la señal analógica de salida.

Si la relación señal a ruido en el convertidor A/D es sólo modestamente grande, la probabilidad de error es pequeña, lo suficiente como para que se haga caso omiso de los efectos del ruido aleatorio. No obstante esta condición, $\tilde{x}(t)$ no será idéntica al mensaje $x(t)$ puesto que la entrada del filtro pasabajas es $x_{sq}(t)$ y no $x(t)$, es decir, que la reconstrucción se basa en las muestras cuantificadas más que en los valores muestra exactos. Además, no hay forma de obtener valores exactos en el receptor, esa información se descartó en el transmisor durante el proceso de cuantificación. Por lo tanto, es imposible una reconstrucción perfecta del mensaje en los sistemas de codificación de pulsos, aún cuando el ruido aleatorio tenga una influencia despreciable.

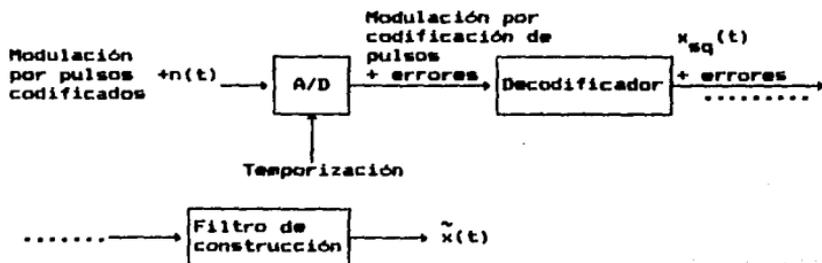


Figura 3.6. Receptor para modulación por pulsos codificados.

Como conclusión, el efecto de cuantificación es una limitación básica de los sistemas codificados, como el ruido aleatorio es una limitación de los sistemas analógicos convencionales.

Para un análisis, se descompone a $x(t)$ en una señal cuantificada en forma de escalón $x_q(t)$ y en un término de error de

cuantificación $\varepsilon_q(t)$, tal que

$$x_q(t) = x(t) + \varepsilon_q(t) \quad (3.8)$$

como se ilustra en la figura 3.7. Dado que es intercambiable el orden de muestreo y cuantificación los valores muestra cuantificados conforme se decodifican en el receptor se pueden escribir en forma

$$x_q(k T_e) = x(k T_e) + \varepsilon_q(k T_e) \quad (3.9)$$

y el filtraje de reconstrucción da

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \sum_k \varepsilon_q(k T_e) \text{senc}(f_a t - k) \quad (3.10)$$

en consecuencia el error de cuantificación aparece en forma de $\bar{\varepsilon}_q^2$ como el ruido de cuantificación.

Este ruido se evalúa con facilidad cuando los niveles cuánticos tienen espaciamiento uniforme $2/Q$ así $|\varepsilon_q(t)| \leq 1/Q$ (ver figura 3.7).

A falta de información, por el contrario, se supone que ε_q está uniformemente distribuido sobre $[-1/Q, 1/Q]$, es decir, que su función de densidad de probabilidad es $p(\varepsilon_q) = Q/2$, $|\varepsilon_q| \leq 1/Q$. Así que tiene lo siguiente

$$\bar{\varepsilon}_q^2 = \int_{-1/Q}^{1/Q} \varepsilon_q^2 \frac{Q}{2} d\varepsilon_q = \frac{1}{3Q^2} \quad (3.11)$$

y

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \bar{x}^2 / \bar{\varepsilon}_q^2 = 3Q^2 \bar{x}^2 \quad (3.12)$$

la cual es independiente de la modulación de portadora, potencia transmitida y del ruido aleatorio, puesto que aquí no se hace caso de los errores de decodificación.

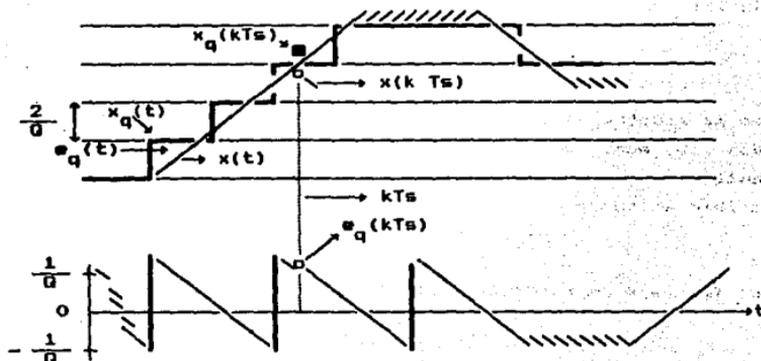


Figura 3.7. Error de cuantificación en la modulación por codificación de pulsos.

Es obvio, que la calidad en el comportamiento se incrementa con Q , el número de niveles cuánticos. Esto simplemente reitera que si se están empleando muchos niveles cuánticos de espaciamiento pequeño, las muestras cuantificadas se aproximan mucho a los valores muestra exactos y la salida se puede hacer tan cercana a $x(t)$ como se desee.

Umbral de Error.

Ahora se considera la situación en la cual no se puede despreciar los errores de decodificación causados por el ruido aleatorio, por lo que tiene ruido de decodificación y de cuantificación. El cálculo del ruido de decodificación cuadrático medio $\bar{\epsilon}_d^2$ es complicado porque el número de errores por palabra de

código es aleatorio y la severidad de un error depende de donde ocurra, siendo más serio en el dígito principal (más significativo) que otros errores en la misma palabra. Se supone que la probabilidad de error por dígito P_e no es muy grande, se puede demostrar para la modulación binaria por pulsos codificados que

$$\bar{\epsilon}_d^2 = \frac{4(Q^2 - 1) P_e}{3Q^2} \quad (3.13)$$

y

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{\bar{\epsilon}_d^{-2}}{\bar{\epsilon}_q^2 + \bar{\epsilon}_d^2} = \frac{3Q^2 \bar{\epsilon}_d^{-2}}{1 + 4(Q^2 - 1) P_e} \quad (3.14)$$

donde P_e depende de $(S/N)_R$, la relación señal a ruido en el receptor.

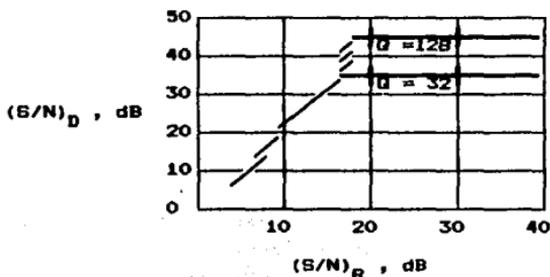


Figura 3.8. Comportamiento bajo ruido de la modulación por codificación de pulsos.

En la figura 3.8 se construye la gráfica de $(S/N)_D$ contra $(S/N)_R$, (ambas en decibelios) para modulación binaria por

pulsos codificados con $Q = 32$ y 128 , suponiendo ruido gaussiano y $\bar{x}^2 = 1/2$. El descenso abrupto a baja $(S/N)_R$ sugiere en forma contundente el efecto de umbral de FM donde, abajo del umbral, se comprueba que el mensaje queda mutilado al grado de ser inútil. En la modulación por pulsos codificados, también se presenta el caso de la mutilación puesto que se aprecia con facilidad que la forma de onda reconstruida tiene poca semejanza con el mensaje original cuando los errores de decodificación son frecuentes. En otras palabras, el mensaje resulta mutilado por el ruido de decodificación.

Para establecer el nivel de umbral en la modulación por pulsos codificados, se expresa que los errores de decodificación son despreciables si $P_e \leq 10^{-4}$. Luego, tomando a P_e como

$$P_e = 2(1 - 1/\mu)Q [(3/\mu^2 - 1)(S/N)_R]^{1/2} \leq 10^{-4} \quad (3.15)$$

se resuelve para $(S/N)_{R_estimo}$ para obtener

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{R_estimo} \cong 5(\mu^2 - 1) \quad (3.16)$$

Por último, puesto que $\gamma = (B\tau/W)(S/N)_R$ y $B\tau \geq \nu W$,

$$\gamma_{estimo} = 5 \frac{B\tau}{W} (\mu^2 - 1) \geq 5\nu(\mu^2 - 1) \quad (3.17)$$

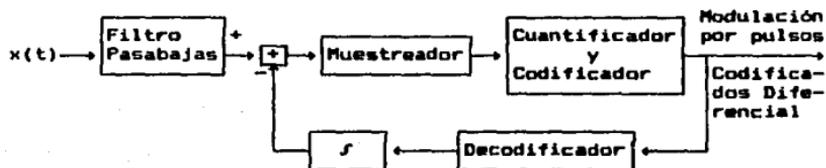
Una implicación sutil pero importante de la ecuación 3.16 es su limitación en μ , el número de dígitos diferentes. Específicamente y para cualquier valor de $(S/N)_R$ el sistema está arriba del umbral sólo si

$$\mu^2 \leq 1/5(S/N)_R + 1 \quad (3.18)$$

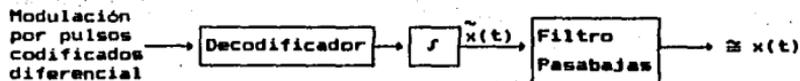
lo cual implica una limitación mayor en Q puesto que $\mu^2 = Q^2/N$.

Modulación Por Pulsos Codificados Diferencial.

La señal de modulación por pulsos codificados diferencial es una representación de modulación por pulsos codificados de la señal diferencia $x(t) - \bar{x}(t)$ generada, como se muestra en la figura 3.9a. Pero $\bar{x}(t)$ ahora tiene un tamaño variable de escalón que va de $\pm \Delta$ a $\pm Q\Delta/2$, siendo Q el número de niveles cuánticos, por lo que ésta sigue con más exactitud a $x(t)$. Así, en especial, si se emplea la compresión expansión, habrá ruido inactivo mucho más bajo, elevación más rápida, y menos posibilidad de sobre carga dependiente. La figura 3.9b es el demodulador.



(a)



(b)

Figura 3.9. Modulación por codificación de pulsos diferencial
a) Modulador, b) Demodulador.

Es obvio que en la modulación por pulsos codificados diferencial con $Q > 2$ se requiere equipo casi tan complejo como en la modulación por pulsos codificados convencional. En cambio ofrece potencial del ancho de banda de transmisión. Esto procede

puesto que la señal diferencia $x(t) - \bar{x}(t)$ se representa en forma adecuada con niveles cuánticos mínimos si $x(t)$ no cambia de manera drástica de muestra a muestra. Por ejemplo, la modulación por pulsos codificados diferencial con $Q = 8 = 2^3$ (un código de tres bits) produce una reproducción aceptable de la señal de video, mientras que la modulación por pulsos codificados directa debe tener $Q = 2^8$ para una calidad de imagen monocromática (blanco y negro) comparable. Así el ancho de banda de transmisión se reduce en $3/8$.

3.3. PROCESAMIENTO DE IMAGEN.

La meta de la codificación de imágenes es reducir (comprimir), tanto como sea posible, el número de bits necesarios para representar y reconstruir un duplicado fiel de una imagen original.

Dentro de las principales aplicaciones de las diferentes técnicas de compresión se puede mencionar :

- Transmisión de imágenes de televisión, satélite, teleconferencia, etc. Para esta aplicación las técnicas de codificación empleadas están sujetas, normalmente, a ser en tiempo real.

- Almacenamiento de imágenes médicas o documentos en general. En este caso los diferentes métodos pueden ser efectuados fuera de línea, sin embargo, es deseable contar con un sistema que permita la decodificación rápida y eficiente.

- Extracción de características aplicable al reconocimiento de formas. El trabajar directamente con la información codificada permite el desarrollo de algoritmos rápidos, para la clasificación de características locales de una imagen.

Técnicas Básicas De Compresión De Imágenes.

Una imagen digitalizada puede ser caracterizada por una secuencia de mensajes, hay varios caminos para seleccionarlos, el único requerimiento es el de obtener un duplicado fiel de esta secuencia de mensajes. El camino particular para seleccionarlos y su codificación define a los diferentes métodos existentes. Por ejemplo, los mensajes pueden ser niveles de intensidad de cada pixel, o de un grupo de pixeles, o los valores de una función computada de ellos.

Las técnicas de compresión de imágenes pueden ser clasificadas, en cuatro grupos según Jain, como :

- Codificación de Pixel.
- Predictiva.
- Por Transformada.
- Otras.

Sin embargo, no es la única clasificación, Kunt distingue dos generaciones de técnicas de Compresión de Imágenes, agrupando las de arriba mencionadas como de la Primera Generación, y llamando a los métodos que toman en cuenta el mecanismo humano de la visión, como los de la Segunda Generación, los cuales describen a la imagen en términos de contornos y texturas.

3.3.1. CODIFICACIÓN DE PIXEL.

En esta codificación cada pixel es procesado independientemente, ignorando las dependencias interpixel existentes, tampoco las propiedades del sistema visual humano son utilizadas. Supone el conocimiento preciso de las estadísticas globales de la imagen, dentro de esta categoría se encuentran : PCM, Código de Huffman, Run-Length, Bit-Plane.

PCM.

Conocido también como Conversión Analógica Digital (ADC), realiza una discretización en el tiempo, muestreando la señal al menos a la frecuencia de Nyquist, mientras que la discretización en amplitud se efectúa utilizando un número suficiente de niveles de cuantización. A una tasa de 2.5 : 1 se obtiene una calidad aceptable de imágenes procesadas.

Códigos De Huffman.

La idea fundamental es de asignar menos bits a aquellos valores de pixel que ocurren más frecuentemente. La construcción del código comienza con el cálculo del histograma de la imagen, el cual nos proporciona la probabilidad de ocurrencia de cada valor de pixel. Posteriormente los diferentes niveles se ordenan según un orden de probabilidades decrecientes. Para obtener la palabra correspondiente a cada nivel se asigna un código binario creciente hacia la parte menos probable, de este modo se obtiene un diccionario. La codificación y decodificación se realiza por medio de una búsqueda (lookup table).

Esta codificación es sensible a los errores de transmisión a través de un canal de tasa constante; lo cual implica un registro temporal de regulación de flujo binario, ya que las palabras codificadas tienen una longitud variable. Es por esto que en la práctica se utilizan algunas variantes de este código, como lo son los códigos de Huffman modificado y truncado.

Run-Length.

Esta es una codificación fuera de error, que se basa en la eliminación de pixeles adyacentes con el mismo valor, ya sea por renglones o columnas. Para comprender el funcionamiento de

esta codificación, se considera el siguiente ejemplo, un renglón de una imagen cualquiera que tenga la siguiente secuencia de valores 20, 30, 41 y en seguida 22 pixeles con un valor de 80. Esta última cadena de pixeles con el mismo valor, puede ser comprimida si se representa como una secuencia de tres números, la marca, que indica el inicio de una cadena de pixeles contiguos iguales, el tamaño de la cadena y el valor de la cadena. De esta manera la cadena anterior puede ser representada como 20, 30, 41, 250, 22, 80. Donde el 250 representa la marca, la cual debe ser un valor inexistente en la imagen, o poco probable, para que no sea confundido con un valor de pixel.

Como se aprecia la tasa de compresión en este caso depende de la estadística de la imagen.

Bit-Plane.

Una imagen con 256 niveles de gris por ejemplo, puede ser considerada como un conjunto de 8 planos de un bit, cada uno de los cuales puede ser codificado utilizando el método de Run-Length. Este método es muy sensible a los errores en el canal, a menos que las palabras que representan los bit-plane más significativos sean cuidadosamente protegidos.

3.3.2. TÉCNICAS PREDICTIVAS.

DPCM.

El principio de esta técnica es remover la redundancia mutua existente entre pixeles sucesivos, codificando, solamente la nueva información. Una predicción del pixel actual se hace, por ejemplo, utilizando el valor codificado previamente y sólo el error de predicción (señal diferencial) es cuantizado para su transmisión.

DPCM Línea por Línea.

En este método cada línea de la imagen es codificada independientemente utilizando la técnica DPCM, generalmente se usa una representación autoregresiva (AR) para diseñar el predictor. Una desventaja de este método, es que no se aprovecha la dependencia estadística entre líneas y solo se pueden alcanzar tasas de 3 : 1.

DPCM Bidimensional.

Es una extensión del método DPCM a dos dimensiones. Se utiliza una ventana de predicción causal bidimensional y la secuencia de píxeles son representados por un modelo causal de varianza mínima (MVR), que permite minimizar la varianza del error de predicción en la imagen. Se pueden alcanzar tasa de 4 : 1.

DPCM Adaptivo.

El esquema DPCM puede ser hecho adaptivo, si los parámetros de la predicción son adaptados a los datos en un camino apropiado. Por ejemplo, se puede definir una medida de la actividad local y los parámetros de la predicción pueden ser actualizados en cada cambio notable de actividad, en este sentido la tasa puede ser aumentada de un 10 a 20 % .

3.3.3. CODIFICACIÓN POR TRANSFORMADA.

En la codificación por transformada, también llamada de bloques, se divide generalmente una imagen de tamaño $N \times N$, en sub-imagenes de $M \times M$, donde $M < N$ y es normalmente una potencia

de 2. Posteriormente se aplica una transformada lineal a cada sub-bloque de valores (píxeles), estadísticamente dependientes, transformandolos en otro bloque de coeficientes más independientes, finalmente los coeficientes así obtenidos son cuantizados y codificados.

Para obtener un buen desempeño en la codificación por transformada, es necesario determinar los siguientes parámetros :

- Tamaño de la Sub-imagen.
- Tipo de Transformada
- Selección de los coeficientes a ser cuantizados.
- Asignación de Bits.

Diferentes Tipos De Transformadas.

Para llevar a cabo la compresión de imágenes, sólo son seleccionados los coeficientes de máxima energía para efectuar su cuantización y su codificación, por lo cual es deseable contar con una transformada que compácte la máxima energía de la imagen en el menor número de coeficientes que sea posible, y además que sea fácil de implementar. Una transformada que cumple con la primera de estas necesidades es la transformada de Karhunen-Loeve o de la componente principal, ya que nos proporciona coeficientes no correlacionados y simultáneamente la máxima concentración de energía en promedio en un número reducido de coeficientes. Sin embargo, esta transformada es computacionalmente difícil de calcular, puesto que depende de la estadística de la imagen, y siendo ésta no estacionaria hay que calcular la matriz de transformación para cada imagen, lo cual no es deseable en el contexto de una codificación en tiempo real. Por tal motivo se utilizan otras transformadas determinísticas, que logran aproximar los resultados óptimos de la transformada Karhunen-Loeve. Estas transformadas son sub-óptimas y producen coeficientes que aún

están correlacionados entre sí, sin embargo, esta correlación tiende a disminuir conforme se incrementa el tamaño de la transformada. Estas transformadas redistribuyen así mismo la energía de los píxeles en un número pequeño de coeficientes y además son fáciles de implementar. Entre ellas se encuentran la transformada de Fourier, Coseno, Seno, Slant, Hadamard. Siendo la transformada Coseno la que proporciona la mejor aproximación con respecto a la transformada Karhunen-Loeve.

Con este método se puede obtener tasas de compresión de 10 : 1, dependiendo del número de coeficientes retenidos en un área dada. Otra posibilidad consiste en fijar un umbral contra el cual se comparan los coeficientes, haciendo cero aquellos debajo de este umbral, de esta manera se pueden alcanzar tasas de 15 : 1 con una buena calidad.

La codificación por transformada puede hacerse adaptiva, si se igualan los parámetros del codificador a la estadística de la sub-imagen a ser codificada, la adaptación puede hacerse ya sea a nivel de la transformada, de la asignación de bits o de los niveles de cuantización. La eficiencia con respecto a la no adaptiva puede ser incrementada de un 25 a un 30 % .

3.3.4. OTRAS TÉCNICAS DE COMPRESIÓN.

Codificación Híbrida.

Comúnmente se denomina así a los métodos que combinan a la codificación predictiva con la codificación por transformada. La idea básica es combinar la sencillez en hardware de una, con la alta tasa de compresión y robustez de la otra.

La codificación se realiza aplicando una transformada unidimensional de orden N por renglones, o columnas. Por medio del cual, se obtienen N secuencias vectoriales de orden N, cada una de estas es entonces codificada independientemente por medio de un

predicador recursivo vectorial DPCM, con N codificadores DPCM escalares desacoplados. En la práctica el número de codificadores es menor a N, ya que muchos elementos del vector transformado son cero.

Codificación Híbrida Adaptiva.

El esquema de codificación puede ser adaptado a imágenes cuya estadística espacial varía lentamente. Dos tipos de adaptividad pueden ser introducidos, por un lado; los parámetros del modelo de predicción de cada codificador DPCM, se pueden adaptar según las variaciones de la estadística de la imagen, utilizando una adaptación de la varianza de los coeficientes. Por otro lado, la distribución de los bits de cuantización se pueden adaptar según una clasificación predeterminada de los vectores.

Codificación Intermarcos (Interframe Coding).

Este método explota la redundancia que existe entre los marcos sucesivos, en la transmisión de imágenes con poco movimiento, por ejemplo, la teleconferencia. La diferencia que existe entre los marcos sucesivos es debida al movimiento del objeto mismo, al movimiento de la cámara, o por una ampliación (zooming).

Repetición de Marcos.

El método consiste en submuestrear las imágenes y reemplazar cada marco no transmitido por el precedente. Sin embargo, esto no produce una buena reconstrucción del movimiento. Una alternativa es hacer un rellenado selectivo, donde los marcos

son transmitidos a una tasa reducida, de acuerdo a un algoritmo predeterminado de actualización. En el receptor cualquier dato no actualizado es refrescado a partir del marco previo, el cual se conserva en una memoria.

Intercambio de Resolución.

La respuesta del sistema visual humano es mala, para discriminar detalles en escenas dinámicas con una alta resolución espacial y temporal. Es por esto que las áreas de escena, que están cambiando rápidamente, pueden ser representadas con menos bits utilizando una amplitud y una resolución espacial reducida, respecto a otras áreas fijas. Para llevar a cabo esta compresión se segmenta la imagen en zonas estacionarias y de movimiento, de acuerdo a un umbral determinado dado por la señal de diferencia entre marcos. En zonas estacionarias sólo son transmitidas las diferencias entre marcos, en el receptor se decodifican y los valores no recibidos son obtenidos del marco anterior. En zonas con movimiento se usa un submuestreo de 2 : 1 y los valores intermedios son recuperados por interpolación. Usando una codificación de marco diferencial de 5 bits por pixel, se puede obtener una tasa de compresión de 2.5 : 1.

Replenishment Condicional.

Esta técnica está basada en la detección y codificación de áreas en movimiento, las cuales son refrescadas de marco en marco. Siempre que la magnitud de la señal de diferencia entre marcos rebasa un umbral determinado, esta se cuantiza y codifica con su ubicación para su transmisión. El receptor un pixel es repetido del marco anterior si pertenece a una área estacionaria, o es decodificado de la señal de diferencia si proviene de una de movimiento.

3.3.5. CRITERIOS DE FIDELIDAD.

Los diversos procesamientos a los que son sometidas las señales, les ocasionan a menudo, modificaciones que las degradan. El simple hecho de digitalizar una señal analógica, trae como consecuencia que sea imposible recuperar exactamente la señal original. El grado de distorsión permisible dependerá de la aplicación a la que se destine la señal procesada.

Después de aplicar alguna técnica de compresión, es posible observar en la imagen reconstruida cierta degradación, la cual depende en general de las operaciones aritméticas (errores por truncamiento, redondeo, o falta de precisión), de la técnica empleada, de la tasa de compresión alcanzada y de la estructura de la propia imagen.

La calidad en el procesamiento de imágenes suele evaluarse mediante criterios subjetivos y criterios objetivos, siendo el primero el de más lenta aplicación y también el más importante, puesto que en la mayoría de los procesos la etapa final es la interpretación humana.

3.3.5.1. Criterios de Subjetivos de Calidad.

Método de Apreciación.

Es posible evaluar la calidad de las imágenes, mostrándolas a algunos observadores o especialistas; asignando cada persona una puntuación por imagen, según la calidad observada. En la Tabla 3.1a se muestra una escala de buena calidad global y en la Tabla 3.1b una escala de buena calidad por grupo, en estas evaluaciones se realizan buscando la mejor imagen de un grupo, y a partir de ella se juzgan las restantes.

Cuando se emplean varios sujetos, los resultados suelen ser evaluados calculando la Puntuación de Opinión Media (POM) :

$$POM = \frac{\sum_{i=1}^k n_i C_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (3.19)$$

donde C_i es la puntuación de la categoría i , n_i es el número de apreciaciones en la categoría i y k es el total de categorías en la escala.

ESCALA DE BUENA CALIDAD GLOBAL	
Clasificación	Puntuación
Excelente	5
Buena	4
Regular	3
Pobre	2
No Satisfactoria	1

(a)

ESCALA DE BUENA CALIDAD POR GRUPO	
Clasificación	Puntuación
La mejor	7
Buena sobre el promedio	6
Ligeramente sobre el promedio	5
Promedio	4
Ligeramente abajo del promedio	3
Muy abajo del promedio	2
La peor	1

(b)

Tabla 3.1. Métodos de apreciación. a) Escala de buena calidad global. b) Escala de buena calidad por grupo.

Método de Comparación.

La escala de deterioro de la tabla 3.2, se emplea comparando una imagen distorsionada con una imagen de referencia, a la que se le va agregando cierto deterioro hasta que ambas parezcan tener la misma calidad, a criterio del sujeto.

ESCALA DE DETERIORO	
Clasificación	Puntuación
No perceptible	1
Apenas perceptible	2
Definitivamente perceptible pero solo ligeramente deteriorada	3
Deteriorada pero no inconveniente	4
Ligeramente inconveniente	5
Definitivamente inconveniente	6
Extremadamente inconveniente	7

Tabla 3.2. Método de comparación que emplea una escala de deterioro.

Los resultados obtenidos por evaluaciones subjetivas, sin embargo presentan cierto grado de incertidumbre, ya que tienden a depender de la experiencia y motivación de los sujetos, del rango del material usado en las pruebas y de las condiciones bajo las cuales son mostradas las imágenes (por ejemplo la iluminación del medio ambiente, la distancia de observación y el tamaño de las imágenes); por lo que este tipo de pruebas suelen ser complementadas empleando criterios objetivos.

3.3.5.2. Criterios Objetivos de Calidad.

Como medida de fidelidad entre una imagen original $g(x,y)$ y una imagen degradada $\hat{g}(x,y)$, ambas de tamaño $N \times M$ es común emplear el error medio cuadrático (MSE), que experimentalmente se estima mediante

$$MSE = \frac{1}{N \cdot M} \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M |g(x,y) - \hat{g}(x,y)|^2 \quad (3.20)$$

otro parámetro de calidad es el error medio cuadrático normalizado (NMSE), el cual se expresa como

$$NMSE = \frac{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M |g(x,y) - \hat{g}(x,y)|^2}{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M [g(x,y)]^2} \times 100 \quad (3.21)$$

e igualmente expresado en el dominio de la transformada, si se emplea una transformada unitaria

$$NMSE = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^M |G(u,v) - \hat{G}(u,v)|^2}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^M [G(u,v)]^2} \times 100 \quad (3.22)$$

El gran atractivo de emplear el MSE y NMSE es su simplicidad de cálculo, sin embargo, no resultan ser criterios adecuados para medir la calidad visual global. Así, la estadística de las imágenes y el comportamiento no lineal del sistema visual, ocasionan que para ciertas imágenes, un valor grande de NMSE no signifique necesariamente mala calidad. Pero, en general, un valor

muy pequeño de error significa buena calidad subjetiva.

Otro índice, más adecuado de estimación, es la relación señal-ruido (SNR), la cual se expresa como

$$\text{SNR} = 10 \text{ Log}_{10} \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \text{ [dB]} \quad (3.23)$$

donde σ^2 es la varianza de la imagen original y σ_0^2 puede calcularse con 3.20.

Otra expresión para calcular la relación señal-ruido es

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{(\text{Valor Pico de la Imagen Original})^2}{2 \sigma_0^2} \text{ [dB]} \quad (3.24)$$

donde el valor pico de la imagen original es igual a $2^n - 1$, y n es el número de bits por pixel. Al emplear la expresión 3.24, debe tomarse en cuenta que esta proporciona un valor de alrededor de 12 a 15 decibeles sobre el calculado con la expresión 3.23.

CAPITULO 4.

ESTIMADORES ESPECTRALES.

4.1. VENTANAS.

Existen cuatro tipos de ventanas que son las siguientes

- 1.- Ventana Rectangular o Uniforme.
- 2.- Ventana de Hamming y Hann.
- 3.- Ventana Blackman.
- 4.- Ventana Kaiser.

Ventana Rectangular.

Una ventana rectangular está dada por :

$$w(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (4.1)$$

La forma espectral de la ventana rectangular es mostrada en la figura 4.1. Como N llega a ser arbitrariamente grande, $W(\omega)$ tiende a ser la delta idealizada de distribución. Sin embargo, para un N finito, existe una distorsión doble para esta apertura finita.

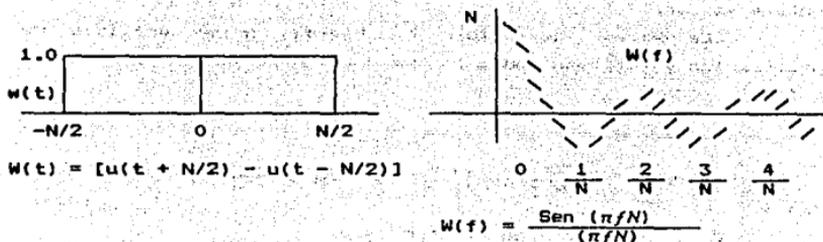


Figura 4.1. Ventana Rectangular y magnitud de la respuesta de frecuencia.

Ventana Hamming-Hann.

Una función de ventana debe ser también definida en términos de

$$w(n) = \begin{cases} a + (1 - a)\cos(2\pi n/N); & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (4.2)$$

para una $a = 0.54$, una ventana de Hamming-Hann es definida, si $a = 0.5$, una ventana Hann (no Hanning) es definida.

Ventana Blackman.

La ventana de Blackman es un refinamiento de ventanas previas. Esto es dado por :

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.8 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right); & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0; & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Las cuatros ventanas comunes pueden ser comparadas en términos de su anchura del lóbulo principal y su radio de rizo (ratio ripple).

Ventana Kaiser.

La ventana de Kaiser es basada en un análisis de optimización y los resultados en una función de ventana que tiene la forma

$$w(n) = \begin{cases} I_0 \left\{ B \left[1 - \left(\frac{2n}{N-1} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}; & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (4.4)$$

en donde I_0 representa una función de Bessel de orden cero dada por

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

el parámetro B establece un tráfico-fuera (trade-off) entre la anchura del lóbulo principal y la atenuación del tamaño del lóbulo.

4.2. - ESTIMADORES.

4.2.1. - ERGODICIDAD.

Dado un proceso aleatorio $x(t)$, se forma la integral

$$\eta_T = 1/2T \int_{-T}^T x(t) dt \quad (4.6)$$

obviamente, η_T varía para cada muestra de $x(t)$, o sea es una variable aleatoria. Ahora se examinará las condiciones bajo las que tiende la constante $E\{x(t)\}$ cuando $T \rightarrow \infty$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \eta_T = E\{x(t)\}, \quad T \rightarrow \infty \quad (4.7)$$

Si así sucede, para una T suficientemente grande, η_T estará cerca de $E\{x(t)\}$ para cualquier muestra de $x(t)$. Luego, el promedio de conjunto $E\{x(t)\}$ del proceso dado podrá ser determinado mediante un promedio temporal de una sola muestra.

La ergodicidad es la parte de la teoría de los procesos estocásticos que trata de dicho tema. De tal forma, el término tiene la interpretación siguiente: ¿Bajo qué condiciones existe el límite de η_T al tender $T \rightarrow \infty$? Esta cuestión es de interés teórico y su respuesta viene dada por el teorema ergódico de

Birkoff : Si $x(t)$ es un proceso estacionario con media finita, el promedio temporal η_T tiende a un limite η para casi todas las muestras de $x(t)$. Asi, si el limite η existe, es en general una variable aleatoria cuyo valor varia con cada muestra.

Integrales Estocásticas.

La integral

$$p = \int_a^b z(t) dt \quad (4.8)$$

es una variable aleatoria con media

$$\eta_p = E(p) = \int_a^b E(z(t)) dt = \int_a^b \eta_z(t) dt \quad (4.9)$$

y su segundo momento

$$E(|p|^2) = \int_a^b \int_a^b R_{zz}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (4.10)$$

ya que

$$|p|^2 = pp^* = \int_a^b \int_a^b z(t_1) z^*(t_2) dt_1 dt_2$$

y obviamente

$$p - \eta_p = \int_a^b [z(t) - \eta_z(t)] dt \quad (4.11)$$

como puede verse al restar (4.9) de (4.8). Si se aplica (4.10) a (4.11), se llega a que la varianza de p viene dada por

$$\sigma_p^2 = E(|p - \eta_p|^2) = \int_a^b \int_a^b C_{zz}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (4.12)$$

ya que la autocorrelación del proceso centrado $z(t) - \eta_z(t)$ es igual a la autovarianza $C_{zz}(t_1, t_2)$ de $z(t)$.

El momento conjunto de las variables aleatorias p y

$$q = \int_c^d w(t) dt \quad (4.13)$$

viene dado por

$$E(pq^s) = \int_a^b \int_c^d R_{zw}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (4.14)$$

ya que

$$pq^s = \int_a^b \int_c^d z(t_1) w^s(t_2) dt_1 dt_2$$

aplicando (4.14) a las integrales $p = \eta_p$ y $q = \eta_q$ de los procesos centrados $z(t) = \eta_z(t)$ y $w(t) = \eta_w(t)$ se obtiene la covarianza de las variables aleatorias p y q :

$$\text{Cov}(p, q) = E\{(p - \eta_p)(q^s - \eta_q^s)\} = \int_a^b \int_c^d C_{zw}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (4.15)$$

Ergodicidad de la Media.

Un proceso estocástico $x(t)$ es denominado ergódico si todas sus propiedades estadísticas pueden determinarse a partir de una sola muestra. Un proceso ergódico debe ser estacionario en sentido estricto.

A la ergodicidad también puede dársele una interpretación más limitada cuando sólo determinadas propiedades de $x(t)$ pueden ser determinadas a partir de una sola muestra. Este caso sólo será necesaria la estacionaridad con respecto a dichas propiedades.

Se supone que $x(t)$ es un proceso estocástico con media constante:

$$E\{x(t)\} = \eta \quad (4.16)$$

se desea ver bajo que condiciones el promedio temporal

$$\eta_T = 1/2T \int_{-T}^T x(t) dt \quad (4.17)$$

está cerca de η . Es obvio que:

$$E\{\eta_T\} = 1/2T \int_{-T}^T E\{x(t)\} dt = \eta \quad (4.18)$$

si el proceso $x(t)$ es estacionario en la covarianza, o sea si $c(t_1, t_2) = c(t_1, -t_2)$, la varianza de η_T viene dada por :

$$\sigma_{\eta_T}^2 = 1/2T \int_{-2T}^{2T} C(\tau) (1 - |\tau|/2T) d\tau \quad (4.19)$$

Ello se sigue haciendo en (4.15) $z(t) = w(t) = x(t)/2T$ y $T_1 = T_2 = T$, por lo tanto

$$1/2T \int_{-2T}^{2T} C(\tau) (1 - |\tau|/2T) d\tau \rightarrow 0 \quad (4.20)$$

$T \rightarrow \infty$

entonces $\sigma_{\eta_T}^2 \rightarrow 0$ y $T \rightarrow \infty$ (4.21)

y al ser la media de η_T igual a η , se llega a que :

$$\eta_T \rightarrow \eta \quad \text{con probabilidad 1} \quad (4.22)$$

$T \rightarrow \infty$

Así pues, si la autocovarianza $c(\tau)$ de $x(t)$ satisface (4.20), entonces para T suficientemente grande el promedio temporal η_T calculado para una sola muestra está cerca de la media η de $x(t)$. La condición (4.20) es por lo tanto necesaria y suficiente para que el proceso $x(t)$ sea ergódico en la media.

4.2.2 ESTIMADORES DE LA CORRELACIÓN.

Sea un proceso estacionario real $x(t)$ con autocorrelación

$$R(\tau) = E\{x(t + \tau) x(t)\}$$

Obviamente, $R(\tau)$ es el valor esperado del proceso

$$\phi(t) = x(t + \tau) x(t) \quad (4.23)$$

en donde τ se toma como parámetro.

Ergodicidad.

$$\text{La integral } R_c(\tau) = 1/2c \int_{-c}^c \phi(t) dt \quad (4.24)$$

es el promedio temporal del proceso $\phi(t)$, por lo tanto su media viene dada por

$$E(R_c(\tau)) = E(\phi(t)) = R(\tau) \quad (4.25)$$

y su varianza por

$$\sigma_c^2 = 1/2c \int_{-2c}^{2c} C_{\phi\phi}(\alpha) (1 - |\alpha|/2c) d\alpha \quad (4.26)$$

en donde $C_{\phi\phi}(\alpha)$ es la autocovarianza de $\phi(t)$. Lo anterior se sigue de (4.19) al sustituir $x(t)$ por $\phi(t)$ en (4.17).

El proceso $x(t)$ es pues ergódico en correlación si el lado derecho de (4.26) tiende a cero al tender $c \rightarrow \infty$. Si así sucede, para c suficientemente grande, la integral $R_c(\tau)$ se acercará a $R(\tau)$. Designado por :

$$R_{\phi\phi}(\alpha) = E\{\phi(t+\alpha)\phi(t)\} = E\{x(t+\alpha+\tau) x(t+\alpha) x(t+\tau) x(t)\} \quad (4.27)$$

a la autocorrelación de $\phi(t)$, tenemos que :

$$C_{\phi\phi}(\alpha) = R_{\phi\phi}(\alpha) - E\{\phi(t)\}^2 = R_{\phi\phi}(\alpha) - R^2(\tau) \quad (4.28)$$

Muestra Finita.

Ahora se pensará que sólo tenemos acceso al intervalo $(-T, T)$ de la muestra $x(t)$. En este caso, el producto $x(t + \tau) x(t)$ puede ser determinado sólo para valores de t en el intervalo $(-T, T - \tau)$ si $\tau > 0$ y en el intervalo $(-T + |\tau|, T)$ si $\tau < 0$. Con el fin de evitar distintas fórmulas para $\tau > 0$ y $\tau < 0$, se introducirá la función simétrica.

$$R^T(\tau) = 1/2T - |\tau| \int_{-T+|\tau|/2}^{T-|\tau|/2} x(t + \tau/2) x(t - \tau/2) dt \quad (4.29)$$

De tal forma que, $R^T(\tau) = R_c(\tau)$ como en (2.24) siempre que $c = T - |\tau|/2$ y que el integrando $\phi(t)$ se sustituya por $\phi(t - \tau/2)$. Luego

$$E\{R^T(\tau)\} = R(\tau) \quad (4.30)$$

o sea que, $R^T(\tau)$ es un estimador no polarizado de $R(\tau)$ con varianza

$$\sigma_{R^T}^2 = \sigma_c^2, \quad c = T - |\tau|/2 \quad (4.31)$$

si, por consiguiente, el proceso $x(t)$ es ergódico en correlación, se tiene

$$R^T(\tau) \rightarrow R(\tau), \quad T \rightarrow \infty$$

y el promedio temporal $R^T(\tau)$ puede emplearse para estimar $R(\tau)$ siempre que c sea lo suficientemente grande. Al ser $c = T - |\tau|/2$, el valor requerido de T para una precisión dada es grande si τ es grande.

Estimador Polarizado.

También se emplea el estimador

$$R_T(\tau) = 1/2T - |\tau| \int_{-T+|\tau|/2}^{T-|\tau|/2} x(t + \tau/2) x(t - \tau/2) dt \quad (4.32)$$

para $|\tau| < 2T$

cuya media ya no vale $R(\tau)$:

$$E\{R_T(\tau)\} = (1 - |\tau|/2) R(\tau) \quad (4.33)$$

se supone también que $R_T(\tau)$ esta definida para $|\tau| > 2T$ de forma que

$$R_T(\tau) = 0 \quad \text{para } |\tau| > 2T \quad (4.34)$$

se puede ver fácilmente que la integral en (4.32) puede expresarse

como una convolución

$$R_T(\tau) = 1/2T X_T(\tau) * X_T(-\tau) \quad (4.35)$$

en donde

$$x_T(t) = x(t) p_T(t) = \begin{cases} x(t), & |\tau| \leq T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases} \quad (4.36)$$

es el segmento dado de $x(t)$.

Designado por $S_T(\omega)$ a la transformada de Fourier de $R_T(\tau)$, se sigue de (4.35) y del teorema de convolución que :

$$S_T(\omega) = \int_{-2T}^{2T} R_T(\tau) \text{Exp}(-j \omega \tau) d\tau = 1/2T \left| \int_{-T}^T x(t) \text{Exp}(-j \omega t) dt \right|^2 \quad (4.37)$$

Así pues, $S_T(\omega)$ puede determinarse de un modo directo a partir de $x_T(t)$.

Observación Fundamental.

Si el proceso $x(t)$ es ergódico en correlación, entonces $R^T(\tau) \cong R(\tau)$ siempre que el intervalo de integración $2T - |\tau|$ en (4.29) sea suficientemente grande. Sin embargo, si T es fija, tan grande como se quiera, la aproximación $R^T(\tau) \cong R(\tau)$ es válida para toda τ sino solamente para $\tau < T$. Dado τ , tan grande como se desee, se puede escoger T tal que $R^T(\tau) \cong R(\tau)$, no obstante la T requerida dependerá de τ .

Lo mismo se cumple para el estimador polarizado

$$R_T^*(\tau) = (1 - |\tau|/2T) R^T(\tau)$$

ya que su polarización

$$b = E\{R_T^*(\tau)\} - R(\tau) = -|\tau|/2T R(\tau)$$

y su varianza

$$\sigma_{R_T}^2 = (1 - |\tau|/2T)^2 \sigma_{R^T}^2 \quad (4.38)$$

tiende a cero al tender $T \rightarrow \infty$.

Por lo tanto

$$R_T(\tau) \rightarrow R(\tau), \quad T \rightarrow \infty \quad (4.39)$$

Autocovarianza del Estimador.

La autocorrelación muestra $R_T(\tau)$ considerada como una función de τ , es proceso no estacionario con media $(1 - |\tau|/2)R(\tau)$. Para determinar su autocorrelación y autocovarianza, se hace lo siguiente :

$$z(t) = (1/2T) x(t + u/2) x(t - u/2)$$

$$w(t) = (1/2T) x(t + v/2) x(t - v/2)$$

se sigue de (4.32) que

$$\begin{aligned} R_T(u) &= \int_{-T_1}^{T_1} z(t) dt, \quad T_1 = T - |u|/2 \\ R_T(v) &= \int_{-T_2}^{T_2} w(t) dt, \quad T_2 = T - |v|/2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

dichas integrales son de la forma de (4.40), si tomamos u y v como dos parámetros. Entonces se tiene

$$E\{R_T(u) R_T(v)\} =$$

$$= 1/4T^2 \int_{-\infty}^{+\infty} l(\alpha) E\{x(t+\alpha+u/2)x(t+\alpha-u/2)x(t+v/2)x(t-v/2)\} d\alpha \quad (4.41)$$

en donde

$$l(\alpha) = \begin{cases} 2T_2 & , \quad |\alpha| < T_1 - T_2 \\ T_1 + T_2 - |\alpha| & , \quad T_1 - T_2 < |\alpha| < T_1 + T_2 \\ 0 & , \quad |\alpha| > T_1 + T_2 \end{cases} \quad (4.42)$$

Se ha propuesto en (4.42) que $T_1 > T_2$, o sea que $|u| < |v|$. Si $|u| > |v|$, se debe entonces intercambiar T_1 y T_2 .

Para determinar la autocovarianza de $R_T(\tau)$ se resta el producto de (4.41) a

$$E\{R_T(u)\}E\{R_T(v)\} = (T_1 T_2 / T^2) R(u)R(v)$$

al ser el área de $l(\alpha)$ igual a $4T_1T_2$, es suficiente restar el término $E\{ \}$, en el integrando de (4.41), el producto $R(u)R(v)$.

Procesos Normales.

Finalmente se supone que $x(t)$ es un proceso normal con media cero. Y aplicando la (4.41), se obtiene que

$$E\{R_T(u) R_T(v)\} = 1/4T^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} l(\alpha) [R(u)R(v) + R(\alpha+u/2-v/2)R(\alpha-u/2+v/2) + R(\alpha+u/2+v/2)R(\alpha-u/2-v/2)] d\alpha \quad (4.43)$$

luego

$$\text{Cov}[R_T(u) R_T(v)] = 1/4T^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} l(\alpha) [R(\alpha+u/2-v/2)R(\alpha-u/2+v/2) + R(\alpha+u/2+v/2)R(\alpha-u/2-v/2)] d\alpha \quad (4.44)$$

si $u = v = \tau$, entonces $l(\alpha) = 2T - |\tau| - |\alpha|$ para $|\alpha| < 2T - |\tau|$ y (4.44) da la siguiente expresión para la varianza de $R_T(\tau)$:

$$\sigma_{R_T}^2 = 1/2T \int_{-2T+|\tau|}^{2T-|\tau|} [R(\tau+\alpha)R(\alpha-\tau)](1-|\tau|+|\alpha|/2T) d\alpha \quad (4.45)$$

4.3. ESTIMACIÓN ESPECTRAL.

4.3.1- LA MUESTRA ESPECTRAL.

Se va a tratar el problema de la estimación del espectro de potencia $S(\omega)$, de un proceso estacionario real $x(t)$ en términos de una sola realización de $x(t)$ disponible en un intervalo finito $(-T, T)$.

Ya que $S(\omega)$ no está definido directamente en función de $x(t)$ sino que es la transformada de la autocorrelación $R(\tau)$ de $x(t)$, puede estimarse por medio de la transformada del estimador de $R(\tau)$ [promedios temporales].

$$R^T(\tau) = 1/2T \int_{-T+|\tau|/2}^{T-|\tau|/2} x(t + \tau/2) x(t - \tau/2) dt \quad (4.46)$$

Y

$$R^T(\tau) = 1/2T \int_{-T+|\tau|/2}^{T-|\tau|/2} x(t + \tau/2) x(t - \tau/2) dt \quad (4.47)$$

dicha definición es válida para $|\tau| < 2T$ y para $|\tau| > 2T$, se los supone nulos.

Sus transformadas vienen pues dadas por :

$$S^T(\omega) = \int_{-2T}^{2T} R^T(\tau) \text{Exp}(-j \omega \tau) d\tau \quad (4.48)$$

$$S_T^*(\omega) = \int_{-2T}^{2T} R_T^*(\tau) \text{Exp}(-j \omega \tau) d\tau \quad (4.49)$$

respectivamente.

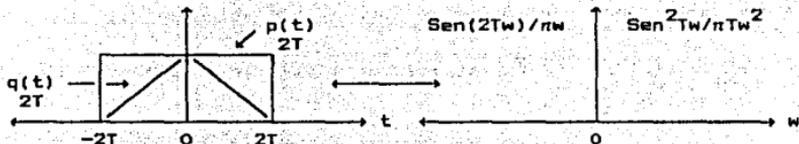


Figura 4.2.

Con $p_{2T}(t)$ y $q_{2T}(t)$ según la figura 4.2, se sigue de 4.46 y 4.47 que :

$$E(R^T(\tau)) = R(\tau) \quad (4.50)$$

$$E(R_T^*(\tau)) = R(\tau)(1 - |\tau|/2T) \quad p_{2T}(\tau) = R(\tau) \quad q_{2T}(\tau) \quad (4.51)$$

luego

$$E\{S^T(\omega)\} = \int_{-2T}^{2T} R(\tau) \text{Exp}(-j \omega \tau) d\tau = S(\omega) * \text{Sen } 2T\omega/\pi\omega \quad (4.52)$$

$$E\{S_T(\omega)\} = \int_{-2T}^{2T} R(\tau) q_{2T}(\tau) \text{Exp}(-j \omega \tau) d\tau = S(\omega) * \text{Sen}^2 T\omega/\pi\omega T \quad (4.53)$$

Así pues, la media de $S^T(\omega)$ es igual a la convolución de $S(\omega)$ con el Kernel de Fourier $\text{Sen}(2T\omega)/\pi\omega$ (ventana rectangular) y la media de $S_T(\omega)$ es igual $\text{Sen}^2 T\omega/\pi\omega T$ (ventana de Bartlett). Ambos estimadores están por lo tanto polarizados, sin embargo

$$E\{S^T(\omega)\} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} S(\omega) \quad \text{y} \quad E\{S_T(\omega)\} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} S(\omega) \quad (4.54)$$

como puede verse fácilmente.

Es obvio que

$$S_T(\omega) = S^T(\omega) * \text{Sen}^2 T\omega/\pi\omega T \quad (4.55)$$

ya que

$$R_T(\tau) = R^T(\tau) q_{2T}(\tau) \quad (4.56)$$

luego, para T suficientemente grande, los espectros muestra $S^T(\omega)$ y $S_T(\omega)$ son aproximadamente iguales, por tal motivo el análisis se continuará solamente con $S_T(\omega)$. Por que a diferencia de $S^T(\omega)$, el espectro $S_T(\omega)$ puede determinarse a partir de la muestra de $x(t)$.

$$S_T(\omega) = 1/2T \left| \int_{-T}^T x(t) \text{Exp}(-j \omega t) dt \right|^2 \quad (4.57)$$

El problema de la varianza de 4.51 se deduce que si T es suficientemente grande entonces

$$E\{S_T(\omega)\} \approx S(\omega)$$

sin embargo, como se demostrará más adelante, la varianza de $S_T(\omega)$ no es pequeña. De hecho, para cualquier T se tiene :

$$\text{Var } S_T(\omega) \geq E^2\{S_T(\omega)\}.$$

4.3.2 ESPECTRO ALISADO.

Para reducir la varianza de la integral en (4.49), se debe quitar importancia a la contribución de $R_T(\tau)$ para τ cerca de $\pm 2T$. Con este fin, se forma el estimador

$$S_w(\omega) = \int_{-2T}^{2T} R_T(\tau) w(\tau) \exp(-j\omega t) dt \quad (4.56)$$

en donde $w(\tau)$ es una ventana, anulándose para $|\tau| > 2T$.

El estimador $S_w(\omega)$ es la transformada de Fourier del producto $R_T(\tau)w(\tau)$, luego

$$S_w(\omega) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} S_T(\omega - y)W(y) dy = 1/2\pi S_T(\omega) * W(\omega) \quad (4.57)$$

de lo anterior se sigue que :

$$E\{S_w(\omega)\} = 1/2\pi E\{S_T(\omega)\} * W(\omega) = 1/2\pi S(\omega) * \text{Sen}^2 T\omega / \pi T\omega^2 * W(\omega) \quad (4.58)$$

para tener una estimación fiable, la duración de $W(\omega)$ debe ser grande comparada con $1/T$. Esto lleva a la aproximación :

$$\text{Sen}^2 T\omega / \pi T\omega^2 * W(\omega) \cong W(\omega)$$

y al sustituir en (4.58) se obtiene :

$$E\{S_w(\omega)\} \cong 1/2\pi S(\omega) * W(\omega) \quad (4.59)$$

así, bajo ciertas condiciones generales, la varianza de $S_w(\omega)$ viene dada por

$$\text{Var. } S_w(\omega) \cong E_w / 2T S^2(\omega), \quad \omega \neq 0 \quad (4.60)$$

en donde

$$E_w = \int_{-2T}^{2T} w^2(t) dt = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} W^2(\omega) d\omega$$

es la energía de $w(t)$.

Las (4.59) y (4.60) dan los factores que afectan la selección de par de ventanas $w(t) \leftrightarrow W(\omega)$, para que la polarización

$$b = E\{Sw(\omega)\} - S(\omega)$$

sea pequeña, $W(\omega)$ debe ser de duración corta. Pero para que la varianza sea pequeña, Ew debe ser pequeña.

Selección De Ventanas.

Para tener una estimación satisfactoria de $S(\omega)$, la varianza del estimador $Sw(\omega)$ debe ser pequeña comparada con $S^2(\omega)$, o equivalentemente, la razón de varianzas.

$$\beta = \text{Var } Sw(\omega) / S^2(\omega)$$

debe ser pequeña comparada con la unidad : $\beta \ll 1$ (4.61)

Así, sucede si la energía de $w(t)$ es pequeña comparada con $2T$: $Ew \cong 2T\beta \ll 2T$.

El requisito anterior lleva a la conclusión de que $w(t)$ debe tomar valores significativos solamente en un intervalo $(-M, M)$ tal que $M \ll 2T$.

Se supondrá que $|w(t)| \leq 1$ para toda t y que para $|t| > M$, es no tan solo pequeña sino que se anula.

$$w(t) = 0 \quad \text{para toda } |t| > M \quad (4.62)$$

se sigue de estas suposiciones que :

$$Ew \leq 2M, \text{ luego, } \beta \leq M/T \quad (4.63)$$

Así pues, para satisfacer el requisito de la varianza

(4.61), se debe escoger una M tal que

$$M \leq T \quad (4.64)$$

con M determinada de este modo, la forma de la ventana se escoge para que minimice la polarización

$$b = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} S(\omega - y) W(y) dy - S(\omega) \quad (4.65)$$

Restricciones Debidas al Proceso de Medida.

En ciertas aplicaciones, la cantidad conocida no es la señal $x(t)$ sino su autocorrelación muestral

$$R_n(\tau) = \frac{1}{n} \int_0^n x(t) x(t - \tau) dt \quad (4.66)$$

medida con algún dispositivo analógico. Por ejemplo, si $x(t)$ es una señal óptica, a diferencia de los valores instantáneos que no pueden medirse fácilmente con instrumentos ordinarios, el promedio temporal $R_n(\tau)$ puede ser determinado fácilmente por medio de un interferómetro.

En tales aplicaciones, el tiempo de observación es suficientemente grande de forma que la varianza de $R_n(\tau)$ puede despreciarse. Ello conduce a la conclusión de que la cantidad medida $R_n(\tau)$ es igual a su valor esperado.

$$R_n(\tau) \cong E\{R_n(\tau)\} = R(\tau) \quad (4.67)$$

para cualquier τ observable.

Métodos Numéricos en Estimación Espectral.

La discusión precedente conduce a los siguientes métodos numéricos para la estimación del espectro de potencia $S(\omega)$ en

términos del segmento dado

$$x_T(t) = x(t) p_T(t)$$

dichos métodos son estadísticamente equivalentes, diferenciándose solamente en la naturaleza de los cálculos.

I.- La autocorrelación muestra $R_T(\tau)$ se determina convolucionando a $x(t)$ con $x_T(-t)$

$$R_T(\tau) = 1/2T x_T(t) * x_T(-t)$$

ahora se multiplica $R_T(\tau)$ por la ventana $w(\tau)$ y se calcula la transformada de Fourier del producto

$$R_T(\tau)w(\tau) \leftrightarrow S_w(\omega)$$

así pues para la determinación del estimador $S_w(\omega)$ de $S(\omega)$ con este método las operaciones requeridas son : una convolución, una multiplicación y una Transformada de Fourier.

II.- La transformada de Fourier de $x_T(t)$

$$x_T(t) \leftrightarrow X_T(\omega)$$

ahora se debe multiplicar a $X_T(\omega)$ por su complejo conjugado y se forma el espectro muestra $S_T(\omega)$

$$S_T(\omega) = 1/2T |X_T(\omega)|^2$$

ahora se convoluciona a $S_T(\omega)$ con la ventana $W(\omega)$

$$S_w(\omega) = S_T(\omega) * W(\omega)$$

las operaciones requeridas son una Transformada de Fourier, una multiplicación y una convolución.

Ventana de Datos.

Como se ha visto, el espectro muestra $S_T(\omega)$ es un estimador polarizado de $S(\omega)$ ya que su media es igual a la convolución de $S(\omega)$ con la ventana de Bartlett. Para reducir su polarización, se introduce la muestra modificada

$$S_c(\omega) = \left| \int_{-T}^T c(t)x(t)\text{Exp}(-j\omega t) dt \right|^2 \quad (4.68)$$

se denominará al factor $c(t)$ ventana de datos, se supondrá que $c(t)$ es real, par y que

$$c(t) = 0 \quad \text{para } |t| > T$$

si $c(t)$ es un impulso rectangular de energía unidad

$$c(t) = 1/(2T)^{1/2} p_T(t) \quad (4.69)$$

entonces $S_c(\omega) = S_T(\omega)$.

En la sección siguiente se demuestra que la media de $S_c(\omega)$ viene dada por

$$E\{S_c(\omega)\} = 1/2\pi S(\omega) * C^2(\omega) \quad (4.70)$$

el par de ventanas $c(t) \leftrightarrow C(\omega)$, debe por lo tanto ser escogido de modo que minimice la polarización resultante

$$b_c = E\{S_c(\omega)\} - S(\omega) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega - y)C^2(y)dy - S(\omega) \quad (4.71)$$

de lo anterior se sigue que $c(t)$ debe ser tal que

$$\int_{-T}^T c^2(t)dt = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} C^2(\omega)d\omega = 1 \quad (4.72)$$

ya que solamente entonces $b_c \rightarrow 0$ al tender $T \rightarrow \infty$.

Coseno Truncado.

Al ser $C^2(\omega) \geq 0$, se concluye que

$$b_c = Mz/2 S''(\omega_1)$$

en donde

$$M_2 = 1/2\pi \int_{-\alpha}^{+\alpha} \omega^2 C^2(\omega) d\omega \quad (4.73)$$

si el término $\omega^2 C^2(\omega)$ toma valores significativos solamente en un intervalo pequeño y $S''(\omega)$ es suficientemente lisa, entonces, $S''(\omega) \cong S''(\omega_1)$.

Esta suposición conduce a la conclusión de que para minimizar b_c , basta con escoger $c(t)$ tal que el segundo momento M_2 sea mínimo. Como ya se observó la $c(t)$ óptima es un Coseno truncado.

$$c(t) = (1/T)^{1/2} p_T(t) \text{Cos}(\pi/2T) t \quad (4.74)$$

y la polarización mínima resultante viene dada por

$$b_c \cong (\pi^2/8T^2) S''(\omega)$$

4.3.3. - Análisis.

Ahora se va a determinar los momentos de segundo orden del espectro muestra $S_T(\omega)$ y del espectro alisado $S_w(\omega)$ en función de la autocorrelación $R(\tau)$ del proceso dado $x(t)$. Se supone que por simplicidad, restando, si es preciso, una constante, que la media de $x(t)$ es cero.

En general, la varianza de $S_T(\omega)$ no puede evaluarse en términos de $R(\tau)$ solamente ya que son necesarios los momentos de cuarto orden de $x(t)$. Sin embargo, si el proceso $x(t)$ es normal, el conocimiento de $R(\tau)$ es suficiente.

Se desarrollará el análisis con la hipótesis simplificadora observando que si el tamaño de T de la muestra es suficientemente grande, los resultados se cumplirán también para procesos arbitrarios que satisfagan ciertas condiciones poco restrictivas.

Se comenzará el análisis empezando con el espectro

muestra modificado $S_c(\omega)$, esta pequeña generalización no complicará el análisis. Entonces si

$$S_c(\omega) = |X_c(\omega)|^2 \quad (4.75)$$

donde

$$X_c(\omega) = \int_{-T}^T c(t) x(t) \text{Exp}(-j \omega t) dt \quad (4.76)$$

así pues, $S_c(\omega)$ es el espectro de energía del proceso $c(t)x(t)$.

Ahora con la ecuación

$$\Gamma_c(u, v) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} C(u+v-\alpha)C(\alpha)S(v-\alpha) d\alpha \quad (4.77)$$

se concluye que

$$E\{S_c(\omega)\} = E\{|X_c(\omega)|^2\} = \Gamma_c(\omega, -\omega) = 1/2\pi C_c^2(\omega) S(\omega) \quad (4.78)$$

Covarianza.

Como se ve, la covarianza de $S_c(\omega)$ viene dada por

$$\text{Cov}[S_c(u), S_c(v)] = \Gamma_c^2(u, -v) + \Gamma_c^2(u, v) \quad (4.79)$$

la varianza de $S_c(\omega)$ se obtiene al hacer $u = v = \omega$ en (4.79)

$$\text{Var } S_c(\omega) = \Gamma_c^2(\omega, -\omega) + \Gamma_c^2(\omega, \omega) \quad (4.80)$$

Observación Fundamental.

A partir de (4.80) y (4.78) se sigue que

$$\text{Var } S_c(\omega) \geq \Gamma_c^2(\omega, -\omega) = E^2\{S_c(\omega)\} \quad (4.81)$$

para cualesquiera T y $c(t)$. Luego, la muestra espectral $S_c(\omega)$ no es un estimador confiable de $S(\omega)$ por grande que sea T .

Alisado.- Para reducir la varianza del estimador, se convoluciona a $S_c(\omega)$ con la ventana $W(\omega)$. La $S_w(\omega)$ resultante viene dada por

$$S_w(\omega) = 1/2\pi \int_{-\alpha}^{+\alpha} S_c(\omega - y)W(y) dy \quad (4.82)$$

Media.- De lo anterior y de (4.78) se sigue que

$$E\{S_w(\omega)\} = (1/4\pi^2)S(\omega) \otimes C^2(\omega) \otimes W(\omega) \quad (4.83)$$

Covarianza.- El lado derecho de (4.82) es un integral de convolución. Luego la autocovarianza de $S_w(\omega)$ viene dada por

$$\text{Cov}\{S_w(u), S_w(v)\} = 1/4\pi \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \text{Cov}\{S_c(u-\alpha), S_c(v-\beta)\}W(\beta)d\alpha d\beta \quad (4.84)$$

apartir de (4.77) y (4.79) se sigue que la anterior integral depende de $C(\omega)$, $W(\omega)$ y de $S(\omega)$.

T grande.- Sean los pares de ventanas

$$c(t) \leftrightarrow C(\omega), \quad w(t) \leftrightarrow W(\omega) \quad (4.85)$$

al ser $c(t) = 0$ para $|t| > T$, la duración de $C(\omega)$ es del orden de $1/T$. Si $w(t) = 0$ para $|t| > M$, la duración de $W(\omega)$ es del orden de $1/M$. La suposición de que $c(t) = 0$ para $|t| > T$ es esencial. La suposición de $w(t) = 0$ para $|t| > M$ no lo es ya que en la evaluación de $S_w(\omega)$ apartir de (4.82) no es necesaria ninguna restricción a priori sobre $W(\omega)$.

Para tener un estimador confiable de $S(\omega)$, la polarización

$$E\{S_w(\omega)\} - S(\omega)$$

debe ser pequeña comparada con $S(\omega)$ y la covarianza de $S_w(\omega)$ debe ser pequeña comparada con $S^2(\omega)$. El primer requisito conduce a la conclusión de que T debe ser lo suficientemente grande para que en

cualquier intervalo de orden $1/T$, la variación de $S(\omega)$ sea despreciable. El segundo requisito se satisface si $M \ll T$.

En la figura 4.3 se muestra el segmento dado de $x(t)$, el espectro $S(\omega)$ y los dos pares de ventanas en (4.85). Se observa que, al ser $M \ll T$, la función $c(\omega)$ es de corta duración con relación a $W(\omega)$.

En la misma figura se dibujó también, las funciones $c^2(t)$, $w^2(t)$ y sus transformadas

$$\rho_c(\omega) = \int_{-T}^T c^2(t) \text{Exp}(-j \omega t) dt = 1/2\pi \int_{-\alpha}^{+\alpha} C(\omega - \alpha) C(\alpha) d\alpha \quad (4.86)$$

$$\rho_w(\omega) = \int_{-M}^M w^2(t) \text{Exp}(-j \omega t) dt = 1/2\pi \int_{-\alpha}^{+\alpha} W(\omega - \alpha) W(\alpha) d\alpha \quad (4.87)$$

la última igualdad en (4.86) y (4.87) es una consecuencia del teorema de convolución en frecuencia. La suposición de que $C(\omega)$ es de corta duración con relación a $S(\omega)$ conduce a la aproximación

$$\Gamma_c(u, v) = S(v)/2\pi \int_{-\alpha}^{+\alpha} C(u+v-\alpha) C(\alpha) d\alpha = S(v) \rho_c(u+v) \quad (4.88)$$

esto se sigue de (4.77), ya que la integral contiene el factor $C(\alpha)$, luego, el término $S(v - \alpha)$ puede sustituirse por $S(v)$.

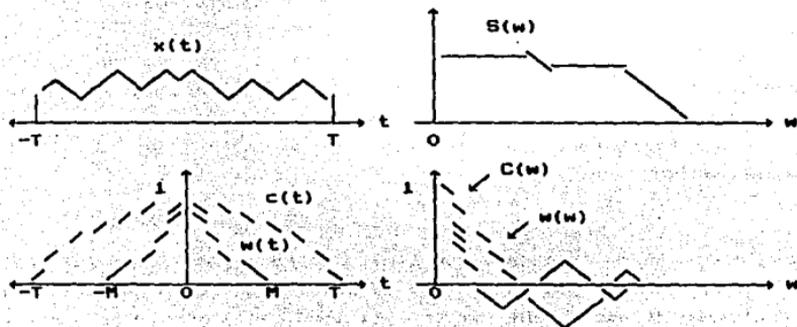


Figura 4.3.

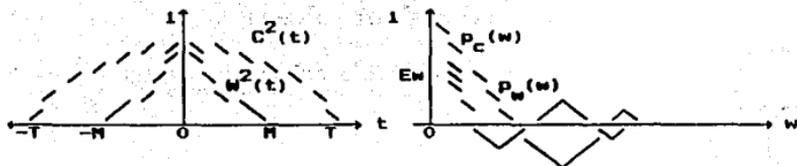


Figura 4.3.

Ahora se introduce también las energías E_c y E_w de las señales $c(t)$ y $w(t)$ respectivamente

$$\rho_c(0) = \int_{-T}^T c^2(t) dt = E_c = 1, \quad \rho_w(0) = \int_{-M}^M w^2(t) dt = E_w \quad (4.89)$$

y la integral

$$I_4 = \int_{-T}^T C^4(t) dt = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \rho_c^2(\omega) d\omega \quad (4.90)$$

Media.- Al ser $C(\omega)$ de duración corta, se concluye de (4.78) que

$$E\{S_c(\omega)\} \cong S(\omega)/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} C^2(\omega) d\omega = S(\omega) \quad (4.91)$$

además

$$1/2\pi C^2(\omega) * W(\omega) \cong W(\omega)$$

y luego

$$E\{S_w(\omega)\} \cong 1/2\pi S(\omega) * W(\omega) \quad (4.92)$$

Así pues para T grande, $S_c(\omega)$ es un estimador no polarizado y la polarización de $S_w(\omega)$ se debe solamente al alisado.

Covarianza del Espectro Muestra.- Introduciendo en (4.79) la aproximación (4.88) se obtiene

$$\text{Cov}\{S_c(u), S_c(v)\} \cong S^2(v) [\rho_c^2(u-v) + \rho_c^2(u+v)] \quad (4.93)$$

haciendo $u = v = \omega$ se obtiene

$$\text{Var}S_c(\omega) \cong S^2(\omega)[1+\rho_c^2(2\omega)] \quad (4.94)$$

luego

$$S^2(\omega) \leq \text{Var}S_c(\omega) \leq 2S^2(\omega) \quad (4.95)$$

ya que

$$|\rho_c(\omega)| \leq \rho_c(0) = 1 \quad (4.96)$$

finalmente se observa, que al ser $\rho_c(2\omega)$ despreciable para $|\omega| \gg 1/T$,

$$\begin{aligned} \text{Var} S_c(\omega) &= S^2(\omega), \quad |\omega| \gg 1/T \\ &= 2S^2(\omega), \quad \omega = 0 \end{aligned} \quad (4.97)$$

Ventana de Datos Constante.- El espectro muestra

$$S_T(\omega) = 1/2T \left| \int_{-T}^T x(t) \text{Exp}(-j \omega t) dt \right|^2 \quad (4.98)$$

es un caso particular de $S_c(\omega)$, por consiguiente tanto sus momentos como los del espectro alisado

$$S_U(\omega) = 1/2\pi S_T(\omega) * W(\omega) \quad (4.99)$$

pueden obtenerse a partir de los resultados anteriores haciendo

$$c(t) = 1/(2T)^{1/2} p_T(t) \quad C(\omega) = (2/T)^{1/2} \text{Sen } T\omega/\omega \quad (4.100)$$

$$c^2(t) = 1/2T p_T(t) \quad \rho_c(\omega) = \text{Sen } T\omega / \omega T$$

$$I_4 = \int_{-T}^T C^4(t) dt = 1/2T \quad (4.101)$$

Así pues, a partir de (4.78) se sigue que

$$E\{S_T(\omega)\} = S(\omega) * \text{Sen}^2 T\omega / \pi T\omega \quad (4.102)$$

las auto varianzas en $S_T(\omega)$ y $S_U(\omega)$ están dadas por (4.79) y (4.84)

respectivamente en donde ahora

$$\Gamma_c(u, v) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \text{Sen } T(u+v-\alpha)/\pi T(u+v-\alpha) \text{ Sen } \alpha/\alpha \text{ Sen } (v-\alpha) \text{ da} \quad (4.103)$$

si T es grande, entonces (4.97) nos da

$$\text{Var } S_w(\omega) \cong \begin{cases} Ew/T S^2(\omega) & , \quad \omega = 0 \\ Ew/2T S^2(\omega) & , \quad |\omega| \gg 1/M \end{cases} \quad (4.104)$$

4.3.4. ESTIMADOR PARAMÉTRICO.

El Periodograma.

Al considerar el problema de una estimación de la densidad de potencia espectral $\phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega))$ de una señal aleatoria de secuencia $x[n]$. Aunque si bien, en teoría, la secuencia $x[n]$ existe en cualquier tiempo, a menudo sólo un segmento finito de la secuencia, dice que, $x[n]$, $n = 0, 1, \dots, L - 1$, está habilitable para procesarse. Además, se puede ver el truncamiento de datos como el producto con una función de ventana $w[n]$. De tal forma, $S(\text{Exp}(j\omega))$ será la transformada de Fourier en tiempo-discreto de $x[n] w[n]$, esto es

$$S(\text{Exp}(j\omega)) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] w[n] \text{Exp}(j\omega n) \quad (4.105)$$

en donde $w[n]$ es no igual a cero para $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Ahora, se considera un estimador de densidad de potencia espectral dado por

$$I_{xx}(\text{Exp}(j\omega)) = \frac{1}{L U} |S(\text{Exp}(j\omega))|^2 \quad (4.106)$$

la constante U es un factor normalizado para remover cualquier inclinación en la estimación espectral que pudiera ser causada por

la ventana $w[n]$. Esto es definido como :

$$U = 1/L \sum_{n=0}^{L-1} |w[n]|^2 \quad (4.107)$$

$I_{xx}(\text{Exp}(j\omega))$ es llamada como el periodograma si $w[n]$ es la función simple de la ventana rectangular. Para otro caso, ésta es llamada como el periodograma modificado.

Usando una computadora, el periodograma estimado puede ser computado sólo para frecuencias discretas, $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Si se denota a la frecuencia ω_k por medio de la indexación k , se tiene :

$$I_{xx}[k] = \frac{1}{L U} |S[k]|^2 \quad (4.108)$$

En general, N puede ser elegida tan grande como L , en cual caso la secuencia $x[n]$ $w[n]$ es un cero lleno con muestras de valores $N-L$ cero, antes de computar la Transformada Discreta de Fourier.

Desde que $x[n]$ es una señal de secuencia aleatoria, la estimación de la densidad de potencia espectral, $I_{xx}(\text{Exp}(j\omega))$, para cada valor de ω es una variable aleatoria. El valor medio y de la variancia determina la calidad de la estimación de la densidad de potencia espectral de la frecuencia ω . Esto puede ser mostrado fácilmente como que el valor de la media de la densidad de potencia espectral $I_{xx}(\omega)$ es

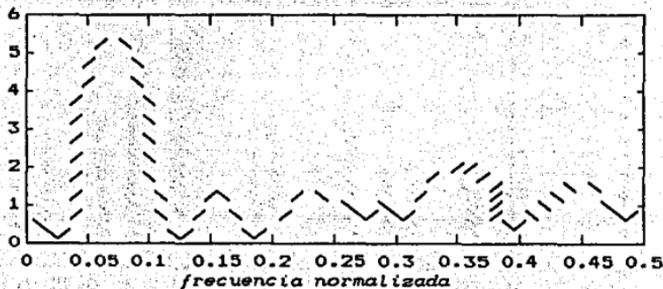
$$\mathbb{E}\{I_{xx}(\text{Exp}(j\omega))\} = \frac{1}{2\pi L U} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{xx}(\text{Exp}(ju)) |W(\text{Exp}(j(\omega - u)))|^2 du \quad (4.109)$$

En donde $\phi_{xx}(\text{Exp}(ju))$ es la prueba de la densidad de potencia

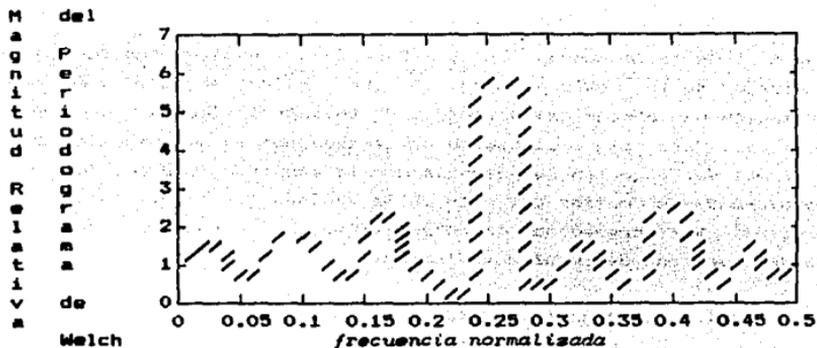
espectral de la secuencia $x[n]$ y $W(\text{Exp}(j\omega))$, y es la Transformada de Fourier de la ventana $w[n]$. La ec. 4.109 muestra que la estimación de la densidad de potencia espectral $I_{xx}(\text{Exp}(j\omega))$ es inclinada. Pero esta inclinación es causada por la convolución de la prueba del espectro de potencia con la magnitud cuadrada de la Transformada de Fourier del dato de la ventana. Si la ventana de longitud L es incrementada entonces $|W(\text{Exp}(j\omega))|$ asintóticamente tiende a un tren de impulso periódico.

Ejemplo 4.1. - Las figuras 4.4 (a) y (c) muestran la estimación del periodograma de una computadora generando un ruido blanco pseudoaleatorio de la secuencia $x[n]$. Las muestras del ruido $x[n]$ fueron dibujadas desde un media cero y una distribución Gaussiana de variancia unitaria. Desde que la secuencia de ruido tiene correlación insignificante de muestra a muestra, la densidad de potencia espectral es el valor esperado (o media) para ser plana sobre el intervalo de Nyquist. La estimación de la densidad de potencia espectral fué obtenida usando la ec. 4.108 para $L = 64, 256$ y 1024 . $w[n]$ fué elegida para ser una ventana rectangular. En la figura 4.4 (a) se tiene el plano de la estimación espectral

M
a
g
n
i
t
u
d
R
e
g
r
a
m
a
t
i
v
a
de
Welch



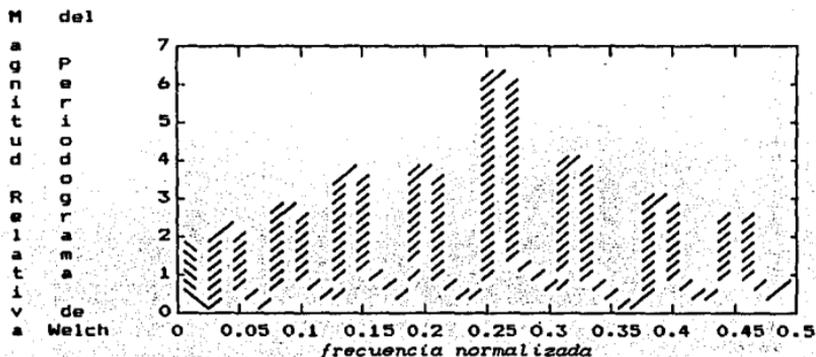
(a)



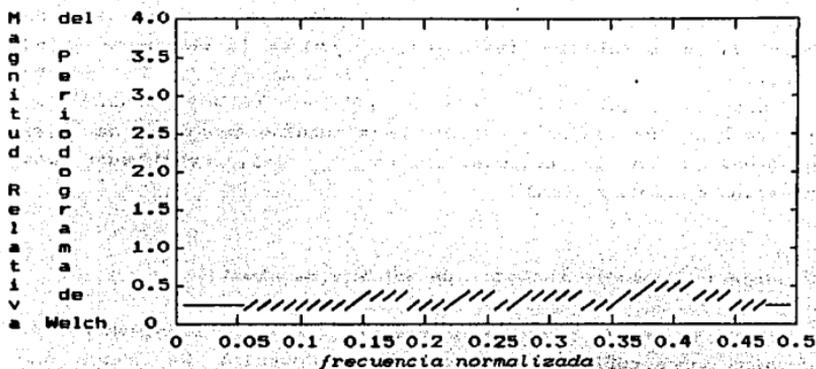
(b)

Figura 4.4.- Estimador de la densidad de potencia espectral de una secuencia de ruido blanco con diferentes longitudes de datos. (a) Periodograma con $L = 64$, (b) periodograma con $L = 256$.

para $L = 64$. En las figuras 4.4 (b) y (c) se muestran las estimaciones para $L = 256$ y 1024 respectivamente. Esto es visto que con el incremento de la longitud de la ventana, en el instante



(c)



(d)

Figura 4.4.- Estimador de la densidad de potencia espectral de una secuencia de ruido blanco con diferentes longitudes de datos. (c) Periodograma con $L = 1024$. (d) Estimador promediado del periodograma de Welch con $Q = 1024$, $P = 7$, $S = 128$ y $L = 256$.

de la convergencia para un plano de densidad de potencia espectral, el espectro muestra más fluctuaciones. Alguna apreciación de este factor debe ser ganado para reescribir el periodograma como se muestra enseguida (ignorando la ventana $w[n]$) :

$$I_{xx}(\text{Exp}(j\omega)) = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} x[l]x^*[m]\text{Exp}(-j\omega(l-m))$$

$$I_{xx}(\text{Exp}(j\omega)) = \sum_{k=-(L-1)}^{L-1} \left(\frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1-|k|} x[m+k]x^*[m] \right) \text{Exp}(-j\omega k)$$

$$I_{xx}(\text{Exp}(j\omega)) = \sum_{k=-(L-1)}^{L-1} \hat{r}_{xx}[k] \text{Exp}(-j\omega k) \quad (4.110)$$

Por lo tanto, el periodograma es actualmente la Transformada de Fourier de la correlación periódica $\hat{r}_{xx}[k]$ de la secuencia $x[n]$ de longitud finita. La $\hat{r}_{xx}[k]$ son los estimadores de la prueba de valores de la autocorrelación $r_{xx}[k]$. Sin embargo, cuando se nota que k es cerrado para L , sólo unas cuantas muestras de $x[n]$ son envueltas en la computación de $\hat{r}_{xx}[k]$, resultando una estimación mala de $r_{xx}[k]$.

Periodograma Promedio (Métodos de Welch y Bartlett).

El método de Welch computa los periodogramas de segmentos sobre cubiertos de sus datos y promedios. Se asume que de inmediato, que Q muestras de $x[n]$ son habilitadas para procesarse. Se divide este dato dentro de registros de P segmentos de L muestras cada una. Y S será el cambio entre segmentos sucesivos. Estos parámetros son relacionados por la fórmula $Q = (P - 1)S + L$. La carga p -ésima del segmento es

$$X^{(p)}[n] = w[n] x[n + pS] \quad (4.111)$$

para $0 \leq n \leq L - 1$ y $0 \leq p \leq P - 1$. El periodograma del segmento p -ésimo es

$$I_{xx}^{(p)}(\text{Exp}(j\omega)) = \frac{1}{L} |S^{(p)}(\text{Exp}(j\omega))|^2 \quad (4.112)$$

en donde $S^{(p)}(\text{Exp}(j\omega))$ es la Transformada de Fourier de tiempo discreto del ventaneo del dato p -ésimo.

El promedio de esos segmentos individual produce el estimador de Welch

$$I_{xx}^W(\text{Exp}(j\omega)) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} I_{xx}^{(p)}(\text{Exp}(j\omega)) \quad (4.113)$$

el valor esperado de $I_{xx}^w(\text{Exp}(j\omega))$ puede ser mostrada de la siguiente manera

$$\mathbb{E}\{I_{xx}^w(\text{Exp}(j\omega))\} = \frac{1}{2\pi} \phi_{xx} \cdot |W(\text{Exp}(j\omega))|^2 \quad (4.114)$$

en donde

$$|W(\text{Exp}(j\omega))|^2 = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} w[n] \text{Exp}(-j\omega n) \right|^2 \quad (4.115)$$

Para la ventana rectangular, el valor esperado de $I_{xx}^w(\text{Exp}(j\omega))$ es la convolución de la prueba del espectro de potencia $\phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega))$ con una función de seno cuadrática. Así, el estimador de Welch de la densidad de potencia espectral es inclinada. Asumiendo que la estimación del periodograma de P son esencialmente independientes de cada uno, la varianza de $I_{xx}^w(\text{Exp}(j\omega))$ es aproximadamente reducida por un factor de P doble para promediar y es

$$\text{Var}\{I_{xx}^w(\text{Exp}(j\omega))\} \cong \frac{1}{P} \phi_{xx}^2(\text{Exp}(j\omega)) \quad (4.116)$$

Dentro del factor, para el estimador de Welch de la densidad de potencia espectral la inclinación y la varianza asintóticamente acercándose a cero como Q , el número de muestras aumenta. Sin embargo, para dar un valor de Q , el decremento en la varianza es conseguido al costo de la baja resolución. Para obtener una solución máxima se debe elegir una L tan grande como sea posible; esto es, $L = Q - 1$. Pero este resultó en el periodograma estándar, la cual tiene una varianza grande. Para reducir la varianza se debe elegir una L pequeña, así que el número de segmentos promediados, P , será grande.

La figura 4.4 (d) muestra el estimador de Welch para el espectro potencial usando el ruido blanco. Claramente, el estimador es mucho más plano que la correspondiente periodograma en la figura 4.4 (c).

El periodograma de Bartlett es el antecesor para el método de Welch y puede ser considerado como un caso especial de éste. En este método, el registro de dato es dividido dentro de segmentos y en cada segmento de la estimación del periodograma es obtenido. Sólo un dato de la ventana rectangular $w[n]$ es usada para cada segmento. Al final el estimador de la densidad de potencia espectral es obtenido por un promedio de periodogramas para todos los segmentos.

4.3.9. ESTIMADOR DE LA DENSIDAD DE POTENCIA ESPECTRAL USANDO CORRELACIÓN SECUENCIAL (ESTIMADOR DE BLACKMAN-TUKEY).

Como se mencionó con anterioridad, se computó el estimador del periodograma directamente por medio de la Transformada de Fourier de los segmentos de la secuencia de datos $x[n]$ y su promedio para obtener el estimador de la densidad de potencia espectral. Otra forma de acercarse a la estimación espectral es sugiriendo la siguiente ecuación :

$$\hat{\phi}_{xx}(\omega) = \sum_{m=-Q}^Q r_{xx}[m] \text{Exp}(-j\omega m) \quad (4.117)$$

que es la primera estimación de la autocorrelación secuencial de $r_{xx}[m]$ de $x[n]$ y entonces se calcula la transformada de Fourier para ésta, y así obtener la estimación de densidad de potencia espectral.

Se considera la siguiente estimación de autocorrelación para un retraso m , y se obtiene desde el registro del dato finito dado por $x[n]$, $n = 0, 1, \dots, Q - 1$:

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x^*[n]x[n+m], \quad |m| < Q - 1 \quad (4.118)$$

El valor esperado de $\hat{r}_{xx}[m]$ es :

$$\mathbb{E}\{\hat{r}_{xx}[m]\} = \left(\frac{Q - |m|}{Q}\right) r_{xx}[m], \quad |m| < Q - 1 \quad (4.119)$$

Esto es, $\hat{r}_{xx}[m]$ es una estimación inclinada de $r_{xx}[m]$ para una Q finita. También, se puede definir una estimación no inclinada de una secuencia de autocorrelación por medio de un cambio del factor de escala en la ec. 4.118 desde $1/Q$ a $1/(Q - |m|)$, Sin embargo, este estimador no debe siempre dar una secuencia de autocorrelación válida. Pero más importante, para un valor finito de Q , como m se acerca a Q , la varianza de la estimación de la autocorrelación de $\hat{r}_{xx}[m]$ se incrementa significativamente. Esto es porque para un retraso grande de índices, sólo unas pocas muestras de $x[n]$ entran en la computación de $\hat{r}_{xx}[k]$, resultando una estimación no muy confiable. Por lo tanto, el periodograma $I_{xx}(\text{Exp}(j\omega))$ es la transformada de Fourier de tiempo discreto de la secuencia $\hat{r}_{xx}[m]$ (ver la ec. 4.110), el aumento de la varianza en las estimaciones de la autocorrelación para el gran retraso resulta una variabilidad grande en el periodograma. El efecto de la varianza grande al retraso grande puede ser mitigado por la carga de la correlación estimada por una función de ventana, en la cual; los valores de la autocorrelación son retrasos grandes. El estimador de Blackman-Tukey de la densidad de potencia espectral es definido como :

$$\phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega)) = \sum_{k=-(R-1)}^{R-1} \hat{r}_{xx}[k] w_c[k] \text{Exp}(-j\omega k) \quad (4.120)$$

En donde sólo el valor de retraso arriba de R (típicamente mucho más menor que Q) son usados. Un valor máximo de $R = Q/5$ es a menudo recomendado. Se nota que la ventana de autocorrelación $w_c[k]$ debe tener una simetría par para producir un estimador de

densidad de potencia espectral, que es real y una función para ω . Desde que el Estimador de Blackman-Tukey es la transformada de Fourier de tiempo discreto del producto de la estimación de la autocorrelación de la secuencia $\hat{r}_{xx}[m]$ y la ventana de autocorrelación $w_c[m]$, en donde se debe escribir ésta en el dominio de la frecuencia como se muestra enseguida :

$$\phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_{xx}(\text{Exp}(ju)) W_c(\text{Exp}(j(\omega - u))) du \quad (4.121)$$

Esto es, que el estimador de Blackman-Tukey de la densidad de potencia espectral es la convolución del periodograma con la transformada de Fourier de la función de ventana, es decir, $W_c(\text{Exp}(j\omega))$. Esta tiene el efecto de alisar las fluctuaciones en el periodograma. Se nota que para asegurar que $\phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega))$ es no negativa, $W_c(\text{Exp}(j\omega))$ tiende a ser no negativa también.

El valor esperado del estimador de Blackman-Tukey es :

$$\mathfrak{E}\{\phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega))\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{E}\{I_{xx}(\text{Exp}(ju))\} W_c(\text{Exp}(j(\omega - u))) du \quad (4.122)$$

la expresión para $\mathfrak{E}\{I_{xx}(\text{Exp}(j\omega))\}$ está dada por la ec. 4.109. Como Q aumenta $\mathfrak{E}\{\phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega))\}$ tiende a probar la densidad de potencia espectral. El valor de la media del estimador de Blackman-Tukey es doblemente inclinado para el ventaneo de autocorrelación.

La varianza puede ser mostrada como :

$$\text{Var}\{\phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega))\} \cong \frac{\phi_{xx}^2(\text{Exp}(j\omega))}{Q} \int_{-\pi}^{\pi} W_c^2(\text{Exp}(j\omega)) d\omega \quad (4.123)$$

el $(1/Q) \int_{-\pi}^{\pi} W_c^2(\text{Exp}(j\omega))$ es de curso menor que uno y desde que la

varianza del estimador de Blackman-Tukey es reducido por este factor en comparación con el periodograma. Para las ventanas de Bartlett y rectangular ($w_c[n]$), Este factor es $2R/Q$ y $2R/3Q$, respectivamente. Para una resolución alta, se necesita que R sea tan grande como el de la ventana $w_c(\text{Exp}(j\omega))$ esta cerrada para una función impulso. Pero para una varianza pequeña la ec. 3.80 demanda que R sea una fracción pequeña de Q .

Análisis de Máxima Entropía Espectral y el Estimador de Burg.

El análisis de máxima entropía espectral es basada en la extrapolación de un segmento conocido de la autocorrelación de valores $r_{xx}[0], r_{xx}[1], \dots, r_{xx}[P]$ de una secuencia $x[n]$ para índices, para los cuales los valores de la autocorrelación no son conocidos, esto es, $r_{xx}[\rho + 1], r_{xx}[\rho + 2], \dots$. En curso, a la transformada de Fourier de la autocorrelación secuencial de la extrapolación deben ser no negativa para que éste pueda ser una legítima desindad de potencia espectral. Dada la primera autocorrelación de valores secuenciales $\rho + 1$, hay un número infinito de posibles extrapolaciones que dará una función de densidad de potencia espectral válida. En el análisis de la máxima entropía espectral, esto es demostrando que la extrapolación de la autocorrelación secuencial es así que esto no es impar para cualquier información arbitraria para la secuencia fundamental. La información es medida en términos de la entropía de Shannon.

En particular, para un proceso aleatorio Gaussiano $x[n]$, la entropía medida o entropía por muestra es proporcional a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Ln}(\phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega))) d\omega \quad (4.124)$$

La máxima entropía espectral maximiza la entropía de medida sujeta a la fuerza que es

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega)) \text{Exp}(j\omega n) d\omega = r_{xx}[n], \quad |n| \leq \rho \quad (4.125)$$

éstas fuerzas aseguran que el primer valor de la autocorrelación $p + 1$ corresponda a la máxima entropía espectral, con los valores dados de la autocorrelación $r_{xx}[0], r_{xx}[1], \dots, r_{xx}[p]$.

Este problema de fuerza de maximización puede ser resuelto usando la siguiente solución

$$\phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega)) = \frac{P_p}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p b_k \text{Exp}(-j\omega k) \right|^2} \quad (4.126)$$

en donde los coeficientes $b_k, k = 1, 2, \dots, p$ y P_p son encontrados por usar los valores conocidos de la autocorrelación $r_{xx}[0], r_{xx}[1], \dots, r_{xx}[p]$.

La promesa del análisis de máxima entropía espectral es invariablemente deliverrada en la práctica porque la prueba de los valores de la autocorrelación no deben ser conocidos, si se asume que los datos son estacionarios, lo cual no debe ser realista. Si se substituye los valores estimados de la autocorrelación, implícitamente se asume que los datos son cero en un intervalo dado. En un acercamiento para impedir este dilema, Burg inventa un método ingenioso que no requiere de la computación explícita de la autocorrelación estimada de los datos.

En el método de Burg la suma cuadrática de lo anterior y la predicción de errores atrasados (con un orden i -ésimo de predicción lineal del filtro), y se expresa de la siguiente manera :

$$P_i = \sum_{n=1}^{N-1} (|e_f^i[n]|^2 + |e_b^i[n]|^2) \quad (4.127)$$

y es minimizado con respecto a la predicción de los coeficientes. El seguimiento de las expresiones para el error delantero y el atraso del error de predicción para un i -ésimo orden del filtro es :

$$e_f^i[n] = x[n] + \sum_{s=1}^i \hat{b}_s^i x[n-s] \quad (4.128)$$

$$e_b^i[n] = x^*[n - i] + \sum_{s=1}^i \hat{b}_s^i x^*[n + s - i] \quad (4.129)$$

Sin embargo, el método de la covarianza modificada no es igual al método de Burg que requiere de que la predicción de los coeficientes satisfaga las recursiones de Levinson dada por

$$\hat{b}_j^i = \hat{b}_j^{i-1} + \hat{K}_i(\hat{b}_{i-j}^{i-1}) \quad \text{para } 1 \leq j \leq i-1 \quad \text{y } 1 \leq i \leq p \quad (4.130)$$

El sombrero (^) indica la predicción estimada y los coeficientes de reflexión. Para cada valor de i el arreglo desde 0 a p el error P_i es minimizado con respecto a el complejo coeficiente de reflexión valuado a \hat{K}_i . El resultado para la expresión de \hat{K}_i es la siguiente

$$\hat{K}_i = \frac{-2 \sum_{n=1}^{N-1} e_f^i[n](e_b^i[n-1])^*}{\sum_{n=1}^{N-1} (|e_f^i[n]|^2 + |e_b^i[n-1]|^2)} \quad (4.131)$$

Se nota que el numerador correspondiente a la correlación cruzada entre el error adelantado y el atrasado y el denominador es la suma de los errores de energía. Esto es claro que $|\hat{K}_i| < 1$ y desde que el modelo autoregresivo implícito por el método de Burg es siempre estable. En el algoritmo de Burg es inicializado con $e_f^0[n] = x[n]$ y $e_b^0[n] = x[n]$. También, si se denota que el error mínimo para cada i como para \hat{P}_i , entonces, \hat{P}_i es inicializada con

$$\hat{P}_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

Entonces para toda i entre 1 y p el \hat{K}_i es computado usando la ec. 4.131. Se nota que por definición $\hat{K}_i = \hat{b}_i^i$. Todos los otros dos

coeficientes del i -ésimo orden el filtro es computado usando la recursión de Levinson en la ec. 4.130. El \hat{P}_i es actualizado usando $\hat{P}_i = (1 - |\hat{k}_i|^2) \hat{P}_{i-1}$. Además, el error de adelanto y de retraso puede escribirse en orden recursivamente como sigue:

$$\begin{aligned} e_f^i[n] &= e_f^{i-1}[n] + \hat{k}_i e_b^{i-1}[n-1] \\ e_b^i[n] &= e_b^{i-1}[n-1] + \hat{k}_i^* e_f^{i-1}[n] \end{aligned} \quad (4.132)$$

una vez los coeficientes del p -ésimo orden del filtro es computado, y el estimador de potencia espectral es dado por

$$\phi_{xx}(\text{Exp}(j\omega)) = \frac{\hat{P}_p}{|1 + \sum_{k=1}^p \hat{\delta}_k^p \text{Exp}(-j\omega k)|^2} \quad (4.133)$$

CAPITULO 5.

A P L I C A C I O N E S .

5.1.- FILTRADO DIGITAL.

Propiedades de los Sistemas de Tiempo Discreto.

Un sistema de tiempo discreto toma una secuencia de números como entrada y produce una secuencia de números como salida. Esa secuencia de números son a menudo muestras de una función continua de tiempo, en donde $x(n)$ respresenta la señal $x(t)$ a una separación de tiempo iguales de la forma $t_n = nT$, por tal motivo se le da el nombre de *Tiempo-Discreto*.

En la figura 5.1 la caja etiquetada con *S* representa un sistema de tiempo discreto con entrada x y salida y . Cuando la entrada $x_1(n)$ da la salida $y_1(n)$, y $x_2(n)$ da $y_2(n)$ el sistema *S* en la figura 5.1 es llamado como *Sistema Lineal*, si la combinación lineal de las entradas $a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ produce la salida $a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$ para cualquier selección de constantes a_1 y a_2 .

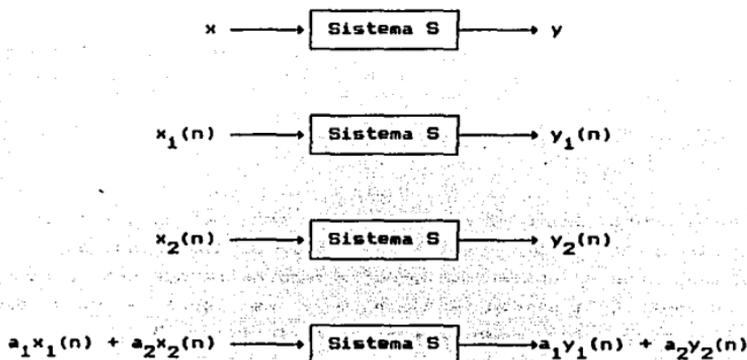
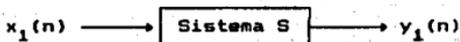


Figura 5.1 Sistema de Tiempo Discreto.

El sistema en la Figura 5.1 es llamado *estacionario* o de *tiempo invariante* cuando



implica que



para cualquier tiempo de cambio m .

El sistema S es *estable* si la salida $y(n)$ cambia para cualquier cambio de la entrada $x(n)$. También, al sistema S es llamado *Sistema Digital* si la entrada $x(n)$ y la salida $y(n)$ pueden tener sólo un número finito de valores posibles o si $x(n)$ y $y(n)$ son equivalentes.

Linealidad, Estacionaridad de un Sistema de Tiempo Discreto.

El análisis de un sistema lineal consiste de tres pasos :

- 1.- Resolución de la entrada dentro de componentes simples.
- 2.- Cálculos del sistema de respuesta para esos componentes simples.
- 3.- Superposición de las respuestas.

Para el análisis del dominio del tiempo de un sistema de tiempo discreto, los componentes simples son cambiados a funciones de muestra unitaria $\delta(n - m)$, también llamado como impulso digital o señal de impulso unitario, donde la función de muestra unitaria $\delta(n)$ es igual a la unidad para $n = 0$ y es igual a cero para cualquier otro valor, como se muestra en la figura 5.2.

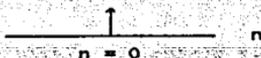


Figura 5.2. La Función Impulso Unitario.

Los tres pasos en el análisis son los siguientes :

1.- La entrada es resuelta dentro del cambio de la función muestra unitaria $\delta(n)$, cargado por el valor de la señal en donde la función de muestra unitaria es localizada como se indica en la figura 5.3.

$$x(n) = \sum_m x(m)\delta(n - m) \quad (5.1)$$

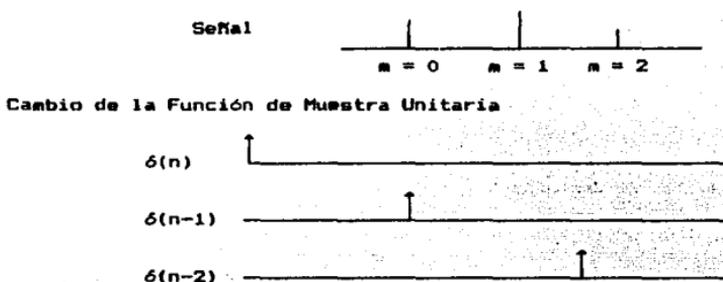
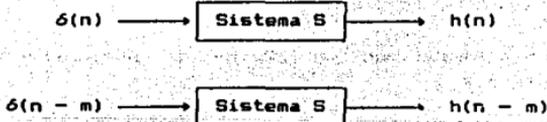


Figura 5.3

Resolución de una señal en una Función de Muestra Unitaria.

2.- La respuesta del sistema a un pulso unitario localizado en el origen es llamado como la respuesta de pulso unitario $h(n)$. Cuando el sistema es estacionario, la respuesta a un cambio de pulso unitario $\delta(n - m)$ es simplemente el cambio de la respuesta pulso unitario $h(n - m)$.



3.- La superposición es usada para sumar la respuesta individual.

$$y(n) = \sum_m x(m)h(n - m) \quad (5.2)$$

en la ec. 5.2, $h(n - m)$ es el sistema de respuesta para una función de muestra unitaria localizada para el tiempo m , y $x(m)$ es la entrada actual del valor del tiempo m . La sumatoria de los componentes de la salida en la ec. 5.2 es llamada como *Convolución de Tiempo-Discreto* o simplemente *Convolución*.

Un sistema Causal tiene una respuesta de impulso-unitario igual a cero para $n < 0$, y la convolución en la ec. 5.2 llega a ser

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n - m) \quad (5.3)$$

o con un cambio de variable

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m)x(n - m) \quad (5.4)$$

Las sumatorias en las ecs. 5.3 y 5.4 asumen la respuesta de impulso unitario con duración infinita, de tal modo, el filtro es un *Filtro de respuesta-impulso de duración infinita (IIF)*. Luego, si la respuesta de impulso unitario de un sistema causal es igual a cero para toda $n > N - 1$, la convolución en la ec. 5.4 está dada por :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n - m) \quad (5.5)$$

y el filtro es llamado como un *Filtro de respuesta-impulso de duración-finita (FIR)*.

Función de Transferencia y Respuesta de Frecuencia.

Si la entrada a un sistema causal, lineal o estacionario es una exponencial compleja con frecuencia ω ,

$$x(n) = \text{Exp}(j \omega n) \quad (5.6)$$

Entonces por la ec. 5.4

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) \text{Exp}(j \omega (n - m)) = \text{Exp}(j \omega n) \left[\sum_{m=0}^{\infty} h(m) \text{Exp}(-j \omega m) \right] \quad (5.7)$$

Cuando la sumatoria sobre m en el lado derecho de la ec. 5.7 es escrita como

$$H(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m) \text{Exp}(-j \omega m) \quad (5.8)$$

entonces la respuesta $y(n)$ para una entrada de forma exponencial de frecuencia ω es :

$$y(n) = H(\omega) \text{Exp}(j \omega n) \quad (5.9)$$

Así, $H(\omega)$ describe el cambio en magnitud y fase a la frecuencia ω , por tal motivo se le denomina *Respuesta-Frecuencial*.

Si la entrada $x(n)$ es un señal de valor real de $2\text{Cos}(\omega n)$, esto puede escribirse como la suma de dos exponenciales complejas :

$$x(n) = \text{Exp}(j \omega n) + \text{Exp}(-j \omega n) \quad (5.10)$$

y la salida es

$$y(n) = H(\omega) \text{Exp}(j \omega n) + H^*(\omega) \text{Exp}(-j \omega n) \quad (5.11)$$

en donde $H^*(\omega)$ es el conjugado de $H(\omega)$.

Ahora $|H(\omega)|$ y $\theta(\omega)$ serán la magnitud y fase de $H(\omega)$, respectivamente, y entonces se tiene la siguiente ec.

$$y(n) = 2|H(\omega)| \text{Cos}(\omega n + \theta(\omega)) \quad (5.12)$$

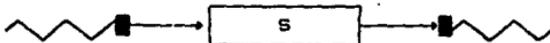


Figura 5.4. Respuesta-Frecuencia de un sistema lineal.

Como se indica en la figura 5.4, la entrada de la señal coseno experimenta un cambio de amplitud acordado para la magnitud $|H(\omega)|$ de la respuesta de frecuencia y un cambio de fase acordado para la fase $\theta(\omega)$ de la respuesta de frecuencia. Si el término de cambio de fase es reescrito como

$$\tau_p = -\theta(\omega)/\omega \quad (5.13)$$

entonces la señal de salida $y(n)$ experimenta un retraso de τ_p . Así, τ_p es llamada como retraso de fase del sistema.

$$y(n) = 2|H(\omega)|\text{Cos}(\omega(n - \tau_p)) \quad (5.14)$$

El grupo de retraso de un sistema es definido para ser

$$\tau_g = -d\theta(\omega)/d\omega \quad (5.15)$$

Para una señal paso-banda, el retraso de fase τ_p representa el retraso de acarreo, y el grupo de retraso τ_g representa el retraso de la señal envolvente.

En contraste para un sistema de tiempo-continuo, la respuesta de frecuencia de un sistema de tiempo-discreto es siempre periódico con un período igual a la frecuencia muestral, la cual en este caso es normalizada para una muestra por segundo o 2π radianes por segundo. Como se muestra en la ecuación 5.16

$$H(\omega + 2\pi) = \sum h(m)\text{Exp}(-j(\omega + 2\pi)) = H(\omega) \quad (5.16)$$

Otra propiedad útil de la respuesta de frecuencia de un sistema con un valor real de respuesta de pulso unitario es

$$H^*(\omega) = H(-\omega)$$

Para generalizar una idea de representar a un sistema en términos de la respuesta de frecuencia se puede usar la transformada z . Es decir, usar un número complejo z , como se muestra en la ec. 5.17.

$$x(n) = z^n \quad (5.17)$$

en la suma de convolución de la ec. 5.4, que corresponde a la entrada exponencial de la ec. 5.6, la salida será

$$y(n) = H(z)z^n \quad (5.18)$$

en donde

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (5.19)$$

es la transformada Z de la respuesta de pulso unitario de $h(n)$. La transformada Z de la respuesta de pulso unitario es llamada también como función de transferencia del sistema. Para la sumatoria de la ec. 5.19; para que converga, la magnitud de z debe ser lo suficientemente grande, es decir

$$|z| > R \quad (5.20)$$

Si la región en el plano complejo de z , dado por la ec. 5.20, en donde la 5.19 converge incluyendo el círculo unitario (si $R \leq 1$), entonces la función de transferencia en la 5.19, cuando se evalúe en el círculo unitario, es simplemente la respuesta de frecuencia del sistema dado en la ec. 5.18.

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\text{Exp}(-j\omega n) = H(\text{Exp}(j\omega)) \quad (5.21)$$

El uso de la misma función N para ambas funciones de transferencia y la respuesta de frecuencia, es de uso común.

Diseño del Filtro Digital.

Las dos partes para el proceso de diseño de un filtro son la aproximación del problema y la realización del problema. La parte de la aproximación del problema dados con los parámetros elegidos o coeficientes en la función de transferencia del filtro para la aproximación ideal o respuesta esperada. Esta aproximación es hecha antes por uso de la respuesta de frecuencia.

La parte de realización del problema de diseño del filtro da como elección una estructura para implementar la función de transferencia. Esta estructura debe ser en forma de un diagrama de circuito, si el filtro es para ser construido por medio de componentes, o éste debe ser un programa de propósito general; para ser usado en una computadora o para un microprocesador para procesar señal.

En la etapa de aproximación se toma la especificación y se da una función de transferencia por medio de cuatro pasos.

- 1.- Una respuesta ideal o deseada es seleccionada, usualmente en el dominio de la frecuencia.
- 2.- Una autorización de una clase o tipo de filtro es seleccionado.
- 3.- Una medida de la calidad de la aproximación es seleccionado (error máximo en el dominio de la frecuencia).
- 4.- Un método o algoritmo es elegido para encontrar el mejor filtro de la función de transferencia.

En la etapa de realización se toma entonces esa función de transferencia y se da un circuito o un programa por medio de cuatro pasos.

- 1.- Se autoriza un conjunto de estructuras ya seleccionadas.
- 2.- Una medida para la realización de la estructura es seleccionada (la minimización de ruido cuantificado).
- 3.- La mejor estructura es elegida desde el conjunto medido, y estos parámetros son calculados desde la función de transferencia.
- 4.- La estructura es implementada con un circuito o con un programa.

Estos pasos en el diseño de un filtro no son independientes unos de otros, por lo tanto, algunas iteraciones son requeridas antes. Sin embargo, para hacer el mejor diseño de un filtro uno debe reconocer y entender éstos pasos.

El Problema de Aproximación.

Como ya se sabe que la función de transferencia es definida como la transformada Z de una respuesta de la función impulso-unitario. Ahora, para una forma general se puede decir que para todos los filtros digitales se les puede caracterizar por medio de la siguiente función de transferencia.

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (5.22)$$

La región de convergencia para $H(z)$ está afuera del centro del círculo del origen del plano z . Este círculo pasó por medio del polo con un radio muy grande. Para un filtro estable este radio es menor que la unidad. Si la función de transferencia de un filtro puede ser escrita como un polinomio (para toda $a_i = 0$), el filtro tiene una respuesta de impulso-unitario de duración-finita y es llamado como un filtro FIR. Si factores

comunes son permitidos en el numerador y denominador de la ec. 5.22, la función de transferencia de un filtro FIR puede ser escrita como una función racional con algunos α_i distintos de cero. Si antes de una cancelación de todos los factores comunes de la ec. 5.22 para el denominador y numerador, y algunos de los coeficientes α_i en el denominador no son iguales a cero, entonces el filtro tiene una respuesta de impulso-unitario de duración infinita y es llamado como un filtro IIR.

El problema de aproximación para un filtro FIR es usualmente en el estado del dominio de la frecuencia, equivalente a $z = \text{Exp}(j\omega)$. Los parámetros del filtro para ser elegidos son el de respuesta impulso-unitario valuados en b_i

$$H(\text{Exp}(j\omega)) = b_0 + b_1 \text{Exp}(-j\omega) + \dots + b_M \text{Exp}(-j\omega M) \quad (5.23)$$

la M -ésima orden del numerador polinomial de la ec. 5.22 será evaluada en un círculo unitario. Más de una terminología convencional que no se refiere para el orden del filtro FIR pero para uno grande. Un N grande de un filtro FIR tiene una respuesta de frecuencia como sigue

$$H(\text{Exp}(j\omega)) = h_0 + h_1 \text{Exp}(-j\omega) + \dots + h_{N-1} \text{Exp}(-j\omega(N-1)) \quad (5.24)$$

con N de respuesta impulso-unitario, valuado a h_i , $i = 0, \dots, N-1$.

En una forma más general el problema de aproximación es un polinomio (para los filtros FIR) o racional (para los filtros IIR) con una función compleja deseada en la banda de frecuencia de $-\pi$ a π . (Recalcando que un filtro digital tiene una respuesta periódica de frecuencia con un período de 2π .) Los parámetros α_i y b_i son elegidos para minimizar una apropiada medida de la distancia entre la respuesta deseada $D(z)$ y la respuesta actual $H(z)$, antes de la norma de la diferencia

$$\|E(z)\| = \left\| D(z) - \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_N z^{-N}} \right\| \quad (5.25)$$

El problema complejo de la no linealidad que resulta con el diseño de un filtro IIR no tiene una solución completamente satisfactoria a la fecha. Ahora, para la complejidad de un problema lineal de filtros de tipo FIR, pueden ser resueltos por una programación lineal.

El Problema de Realización.

Después de que los coeficientes en la función de transferencia tendrían que ser elegidos, el problema es resuelto sólo parcialmente. La segunda parte del diseño del filtro es la realización del problema. La selección debe ser hecha con respecto a los métodos para la implementación del filtro.

La función de transferencia

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (5.26)$$

corresponde a una ecuación diferencial relacionada a la salida $y(n)$ y a la entrada $x(n)$.

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_N y(n-N) \quad (5.27)$$

Una implementación o realización de el filtro es la calculación directa por la ec. 5.27. En realidad, esta es la cuantización de los coeficientes y de los valores de la señal que hacen la selección de la importante realización del filtro. Además, existen diferentes métodos o caminos para calcular un polinomio o la salida de $y(n)$ en la ec. 5.27. Estos diferentes métodos para calcular la salida del filtro deben ser representados convencionalmente por medio de diagramas a bloque que

alternativamente ilustren la estructura del filtro. Por ejemplo, los dos diagramas en la figura 5.5 y 5.6 representan el cálculo de la misma ecuación diferencial describiendo la relación entrada/salida para un filtro IIR de segundo orden. Sin embargo, esas dos estructuras tienen propiedades diferentes cuando los coeficientes y los valores de la señal son cuantizados. Los recuadros con z^{-1} representan elementos de retraso y los coeficientes a_i y b_i son representadas como ganancia en varias ramas de los diagramas.

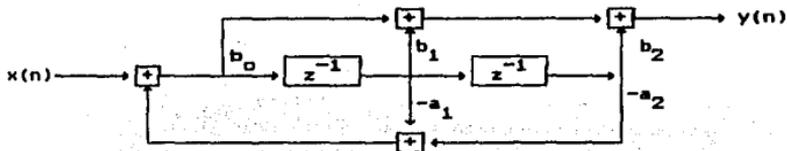


Figura 5.5. Bloque de forma directa de segundo orden.

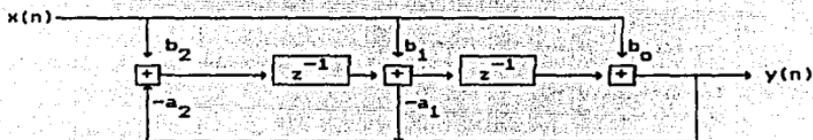


Figura 5.6. Bloque de forma de transposición de segundo orden.

5.2.- PROPIEDADES DEL FILTRO DE RESPUESTA-IMPULSO FINITO.

Los filtros digitales con una respuesta-impulso de duración-finita (FIR) tienen características que los hacen ser útiles en varias aplicaciones. Estos filtros pueden lograr una fase lineal y no pueden ser inestables. Los métodos de diseño son

generalmente lineales. Y éstos pueden ser eficientemente realizables o de propósito especial para hardware. Dentro de estas notas se examinará y evaluarán importantes diseños característicos de los cuatros tipos básicos de filtros FIR de fase-lineal.

Porque de los métodos de implementación, el filtro FIR es llamado como un filtro no-recursivo o como un filtro de convolución. Desde el dominio del tiempo se ve esta operación, en donde el filtro FIR es algunas veces llamado como un filtro de movimiento-promedio. Todos esos nombres representan interpretaciones útiles que serán mencionadas en esta sección, sin embargo, el nombre de filtro FIR es uno de los más comunes que se verán en el diseño de filtro FIR.

La duración o secuencia grande de la respuesta impulso de estos filtros es por definición, finita, por lo tanto, la salida puede escribirse como una suma de convolución finita

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \quad (5.28)$$

y con un cambio de variable de índice, la ec. queda

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n-N+1} h(n-m)x(m) \quad (5.29)$$

en donde $x(n)$ es la entrada y $h(n)$ es la respuesta impulso para una N grande.

El filtro FIR debe ser interpretado como una extensión de una suma de desplazamiento o como una carga promedio de desplazamiento. Si una tiene una secuencia de números, como un valor desde un valor periódico para ser valuado en un valor particular, para remover las variaciones erráticas en orden para descubrir las tendencias grandes, así cada número podría ser reemplazado por un número promedio de sí mismo y el procedimiento de tres números, esto es que, las variaciones afuera de un período de cuatro-días deben ser un promedio de salida y las variaciones de términos-grandes deben quedarse. Para ilustrar como sucede

esto, considera una señal artificial $x(n)$ conteniendo un término lineal, K_1n , y una oscilación deseada a un término agregado a este término, tal que

$$x(n) = K_1n + K_2 \cos(\pi n) \quad (5.30)$$

si un filtro con un promedio de longitud 2 es usado con

$$h(n) = \begin{cases} 1/2, & n = 0, 1, \\ 0, & \text{para cualquier otro caso} \end{cases}$$

esto puede ser verificado, después de dos salidas, la salida es exactamente el término lineal con un retraso de media muestra en el intervalo y sin oscilación.

Este ejemplo ilustra el problema básico de un diseño de filtro FIR determinado para un N , los términos de un número para $h(n)$, y los valores de $h(n)$ para conseguir un efecto deseado en la señal. Los ejemplos simples deberían ser intentados para obtener una idea intuitiva del filtro FIR como un promedio de desplazamiento, sin embargo, esto no se aprovecharía lo suficiente para los problemas complicados en donde el concepto de frecuencia llega a ser más valioso.

5.2.1. - Descripción del Filtro FIR en el Dominio de la Frecuencia.

La función de transferencia de un filtro FIR está dada por la transformada Z de $h(n)$ como

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (5.31)$$

La respuesta de frecuencia de un filtro es encontrada por medio de $z = \text{Exp}(j\omega)$, la cual da la siguiente ec.

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\text{Exp}(-j\omega n) \quad (5.32)$$

donde ω es la frecuencia en radianes por segundo. Estrictamente hablando, la exponencial debe ser $-j \omega T n$, donde T es el intervalo de tiempo entre los pasos enteros de n (los intervalos de la muestra). Se asume que $T = 1$, para simplificar algunos cálculos. Para simplificar la notación, se debe dar primero $H(\omega)$ antes de que se de $H(e^{-j\omega})$ que representa la respuesta de frecuencia. Esto debe estar siempre claro desde el contexto de que H es una función de z o ω .

Esta función de respuesta de frecuencia es un valor complejo y consiste de una magnitud y una fase. Siempre se piensa que la respuesta impulso es una función de una variable discreta n , pero la respuesta es que es una función de una frecuencia continua de la variable ω y que es periódica con un período de 2π . Esta periodicidad es mostrada como sigue :

$$\begin{aligned}
 H(\omega + 2\pi) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \text{Exp}(-j(\omega + 2\pi)n) & (5.33) \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \text{Exp}(-j\omega n) \text{Exp}(-j2\pi n) \\
 &= H(\omega)
 \end{aligned}$$

la frecuencia es denotada por ω en radianes por segundo o en f en hertz (ciclos por segundo). Esas cantidades son relacionadas por $\omega = 2\pi f$.

Un ejemplo de un filtro con una longitud de 5 es $h(n) = (2,3,4,3,2)$. La figura 5.7 muestra la gráfica de respuesta de frecuencia del ejemplo.

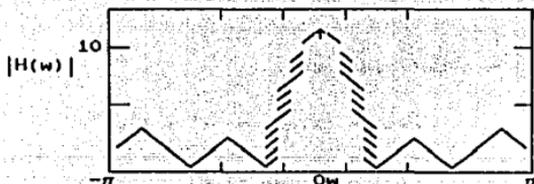


Figura 5.7. Respuesta de frecuencia del ejemplo $h(n)$.

La transformada discreta de Fourier (DFT) puede ser usada para evaluar la respuesta de frecuencia a ciertas frecuencias. La DFT de la respuesta impulso para una longitud N de $h(n)$ es definido como

$$C(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \text{Exp}(-j 2\pi nk/N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.34)$$

cuando se compare a la 5.32, la 5.34 queda como

$$C(k) = H(\omega) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = H(2\pi k/N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.35)$$

Este estado de la DFT de $h(n)$ da N muestras de la función de respuesta de frecuencia $H(\omega)$. Estas muestras de N puntos no deben dar un detalle suficiente, así que, debe de haber más muestras. Cualquier número de muestras espaciada equitativamente pueden ser encontradas con la DFT por medio de una apertura simple de $L - N$ ceros para $h(n)$ y tomar una longitud L que se requiera. Y cuando el número de aberturas tiendan a infinito, la DFT llegará a ser la transformada de Fourier de $h(n)$.

5.2.2. - Filtro FIR de Fase-Lineal.

Particularmente los filtros FIR útiles son aquellos con un cambio de fase lineal. Para el desarrollo de esta teoría se necesita una definición para el cambio de fase. Si las partes real e imaginaria de $H(\omega)$ están dadas por

$$H(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

la magnitud y fase son definidas por

$$M(\omega) = |H(\omega)| = (R^2 + I^2)^{1/2}$$

$$d(\omega) = \arctan (I/R)$$

por lo tanto $H(\omega) = M(\omega)\text{Exp}(jd(\omega))$ (5.36)

Y así, surge un problema matemático, sin embargo, por que $M(\omega)$ no es analítico y $d(\omega)$ no es continuo. Este problema es resuelto por introducir el valor real de la función de amplitud $A(\omega)$ que debe ser positivo o negativo. La respuesta de frecuencia es escrita como

$$H(\omega) = A(\omega)\text{Exp}(j\theta(\omega)) \quad (5.37)$$

donde $A(\omega)$ es llamada como amplitud, para ser distinguida ésta desde la magnitud $M(\omega)$, y $\theta(\omega)$ es la versión continua de $d(\omega)$. $A(\omega)$ es una función analítica real relacionada para la magnitud por

$$A(\omega) = \pm M(\omega) \quad (5.38)$$

o $|A(\omega)| = M(\omega)$. Con esta definición, $A(\omega)$ puede ser analítica y $\theta(\omega)$ puede ser continua. La relación de $A(\omega)$ y $M(\omega)$ y de $\theta(\omega)$ y $d(\omega)$ son mostrados en la figura 5.8.

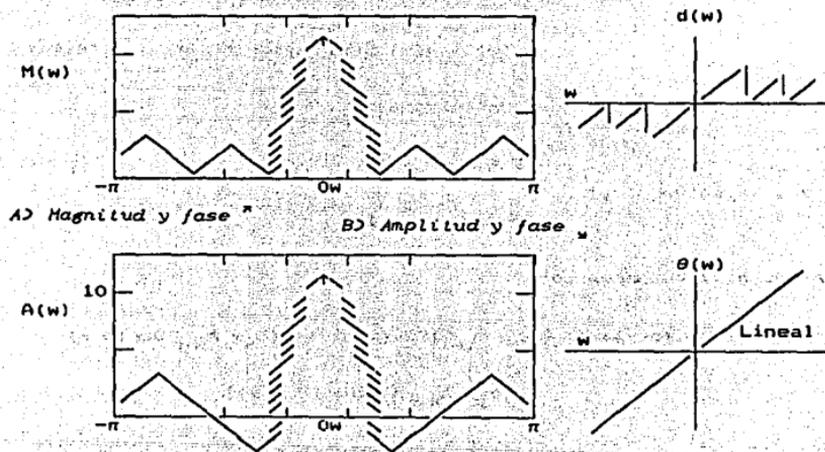


Figura 5.8. La magnitud y amplitud de un filtro FIR de fase-lineal

Para el desarrollo de las propiedades y características del filtro de fase lineal, se asume una forma general para la función de fase

$$\theta(\omega) = K_1 + K_2\omega \quad (5.39)$$

la ecuación 5.32 da la función de respuesta de frecuencia de un filtro FIR con una longitud N como

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\text{Exp}(-j\omega n) \quad (5.40)$$

$$H(\omega) = \text{Exp}(-j\omega M) \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\text{Exp}(j\omega(M-n))$$

Y

$$H(\omega) = \text{Exp}(-j\omega M) [h_0\text{Exp}(j\omega M) + h_1\text{Exp}(j\omega(M-1)) + \dots + h_{N-1}\text{Exp}(j\omega(M-N+1))] \quad (5.41)$$

La ecuación 5.41 puede escribirse en la forma

$$H(\omega) = A(\omega) \text{Exp}(j(K_1 + K_2\omega)) \quad (5.42)$$

si M (no es un entero) es definido por

$$M = N - 1 / 2 \quad (5.43)$$

o equivalentemente,

$$M = N - M - 1.$$

La ec. 5.41 entonces será

$$H(\omega) = \text{Exp}(-j\omega M) \{ (h_0 + h_{N-1})\text{Cos}(\omega M) + j(h_0 + h_{N-1})\text{Sen}(\omega M) + (h_1 + h_{N-2})\text{Cos}(\omega(M-1)) + (h_1 + h_{N-2})\text{Sen}(\omega(M-1)) + \dots \} \quad (5.44)$$

La ec. 5.44 se puede poner en forma de la ec. 5.42, en donde $A(\omega)$ es real, para hacer estos posible se necesita de dos pasos, en donde $K_1 = 0$ o $K_1 = \pi/2$. El primer caso requiere de una simetría especial en $h(n)$ de la forma

$$h(n) = h(N - n - 1) \quad (5.45)$$

la cual da

$$H(\omega) = A(\omega)\text{Exp}(-j H \omega)$$

en donde $A(\omega)$ es una función de valor real de ω y $\text{Exp}(-j H \omega)$ da la fase lineal. Cuando N es impar

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n)\text{Cos}(\omega (H - n)) + h(H) \quad (5.46)$$

con un cambio de variable la ec. queda

$$A(\omega) = \sum_{n=1}^M 2h(M - n)\text{Cos}(\omega n) + h(H) \quad (5.47)$$

Cuando N es par

$$A(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} 2h(n)\text{Cos}(\omega (H - n)) \quad (5.48)$$

con un cambio de variable

$$A(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} 2h(N/2 - n)\text{Cos}(\omega (n - 1/2)) \quad (5.49)$$

cuando $K_1 = \pi/2$ en 5.42, da una simetría impar de la forma

$$h(n) = -h(N - n - 1) \quad (5.50)$$

es requerido. Para N impar, $H(\omega)$ entonces será

$$H(\omega) = jA(\omega)\text{Exp}(-j H \omega)$$

donde

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n)\text{Sen}(\omega (M - n)) \quad (5.51a)$$

para N par

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n)\text{Sen}(\omega (M - n)) \quad (5.51b)$$

Cuatro Tipos de Filtros FIR de Fase-Lineal.

Existen cuatros tipos de filtros FIR de fase-lineal apartir de la ec. 5.42 y son los siguientes :

Tipo 1.- La respuesta de impulso tiene una longitud impar y es siempre simétrica con referencia a este punto medio $n = M = (N - 1)/2$, la cual requiere $h(n) = h(N - n - 1)$ y dadas por las ecs. 5.46 y 5.47.

Tipo 2.- La respuesta de impulso tiene una longitud par y es siempre simétrica con respecto a M , pero M no es un entero. Por eso, no hay $h(n)$ al punto de simetría, pero las ecs.5.48 y 5.49 satisfacen lo antes dicho.

Tipo 3.- La respuesta de impulso tiene una logitud impar y la simetría impar de la ec. 5.50, dan un multiplicador imaginario para la forma de la fase-lineal en la ec. 5.51a.

Tipo 4.- La respuesta de impulso tiene una logitud par y la simetría impar del tipo 3 en la ec. 5.50 y 5.51a.

Ejemplos de los cuatros tipos de filtros FIR de fase lineal con simetría para las longitudes pares e impares son

mostradas en la figura 5.9. Se nota que para una N impar y una antisimetría, $h(M) = 0$.

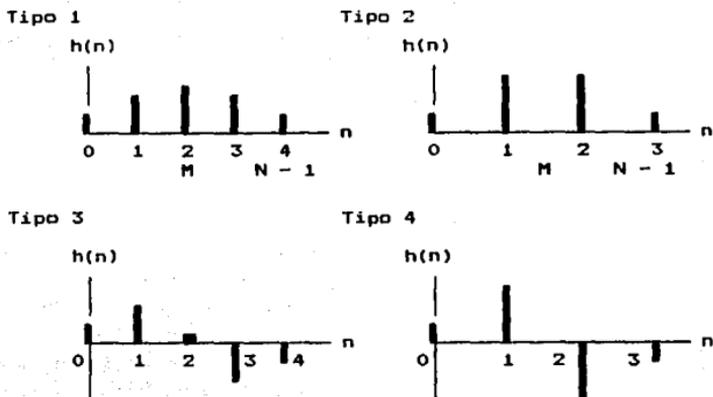


Figura 5.9. Gráficas de los cuatro tipos de Filtros FIR de fase-lineal

Para analizar o diseñar filtros FIR, es necesario saber las características de $A(\omega)$. Por eso, las más importantes características se muestran en la tabla 5.1.

Tabla 5.1 Características de $A(\omega)$ para la fase lineal.

Tipo 1. Longitud impar, y $h(n)$ simétrica	
$A(\omega)$ es par $\omega = 0$	$A(\omega) = A(-\omega)$
$A(\omega)$ es impar $\omega = \pi$	$A(\pi + \omega) = -A(\pi - \omega)$
$A(\omega)$ es periódica con período 2π	$A(\omega + 2\pi) = A(\omega)$
Tipo 2. Longitud par, y $h(n)$ simétrica	
$A(\omega)$ es par $\omega = 0$	$A(\omega) = A(-\omega)$
$A(\omega)$ es impar $\omega = \pi$	$A(\pi + \omega) = -A(\pi - \omega)$
$A(\omega)$ es periódica con período 4π	$A(\omega + 4\pi) = A(\omega)$
Tipo 3. Longitud impar, $h(n)$ con simetría impar	
$A(\omega)$ es impar $\omega = 0$	$A(\omega) = -A(-\omega)$
$A(\omega)$ es impar $\omega = \pi$	$A(\pi + \omega) = -A(\pi - \omega)$
$A(\omega)$ es periódica con período 2π	$A(\omega + 2\pi) = A(\omega)$

Tabla 5.1. Continuación de tabla 2.1 de $A(\omega)$ para la fase lineal.

Tipo 4. Longitud par, $h(n)$ con simetría impar

$A(\omega)$ es impar $\omega = 0$

$A(\omega)$ es par $\omega = \pi$

$A(\omega)$ es periódica con período 4π

$A(\omega) = -A(-\omega)$

$A(\pi + \omega) = A(\pi - \omega)$

$A(\omega + 4\pi) = A(\omega)$

Estas características son extremadamente importantes para el diseño del filtro. Para los tipos 3 y 4, $A(0) = 0$ para cualquier coeficiente del filtro $h(n)$, la cual es no deseable para un filtro Paso-bajas. Los tipos 2 y 3 siempre tienen $A(\pi) = 0$, la cual es no deseable para un filtro Paso-altas. En suma para la representación característica de la fase lineal es un cambio de tiempo, para los tipos 3 y 4 se da un cambio de fase constante de 90° , deseable para un diferenciador o un Transformador de Hilbert. Por lo tanto, el primer paso en el diseño de un filtro FIR de fase lineal es necesario elegir el tipo más compatible con las especificaciones que se dan en la tabla 5.1.

Cálculo del filtro FIR de Respuesta de Frecuencia.

Como se mencionó en la sección 5.2.1, la muestra L espaciada a intervalos iguales de $H(\omega)$ es fácilmente calculado para un $L > N$ y agregando un $L - N$ para una DFT con una longitud L . Esto aparece como

$$H(2\pi k/L) = \text{DFT} \{h(n)\} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, L - 1 \quad (5.52)$$

Este método es un acercamiento flexible y directo.

El uso directo de la DFT puede ser ineficiente, es decir, que la aplicación directa de la DFT, con fórmulas especiales son desarrolladas en las ec. 5.53 y 5.56 para las muestras de $A(\omega)$ que aprovecha la realidad de $h(n)$ como una función real y que tiene cierta simetría. Para los filtros

grandes, un par de fórmulas son también ineficientes, pero la DFT es usada para implementar el algoritmo de una Transformada Rápida de Fourier (FFT).

La DFT es usada primeramente para obtener a $A(\omega)$ en forma directa. Ahora si a $h(n)$ es cambiada para ser simétrica con respecto a $n = 0$, el cambio de fase es cero, por lo tanto $H(\omega) = A(\omega)$. Así, el cambio debe ser circular ya que el resultado de la función tiene que ser una DFT real. En la figura 5.10 se muestra la señal que es cambiada para que dé una DFT real.

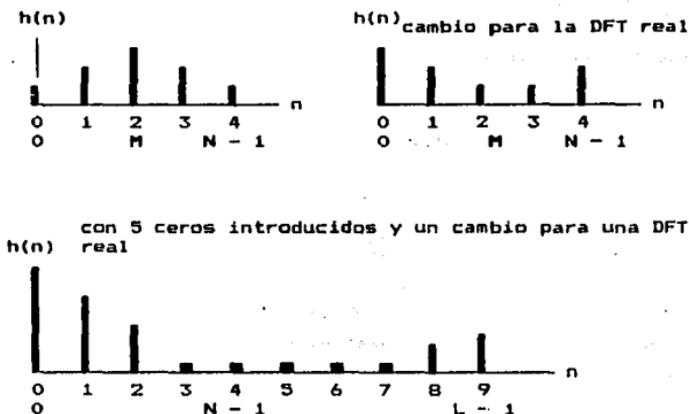


Figura 5.10. Cambio de la respuesta impulso para una DFT real.

Porque el punto de simetría no es un entero, esto es imposible para un cambio de respuesta-impulso de longitud-impar para dar una DFT real. Pero se puede esquivar esta limitación por medio de extender al doble la longitud impar de la señal, colocando en estos espacios un valor de cero entre cada valor original. Esta extensión y cambio se ilustra en la figura 5.11.

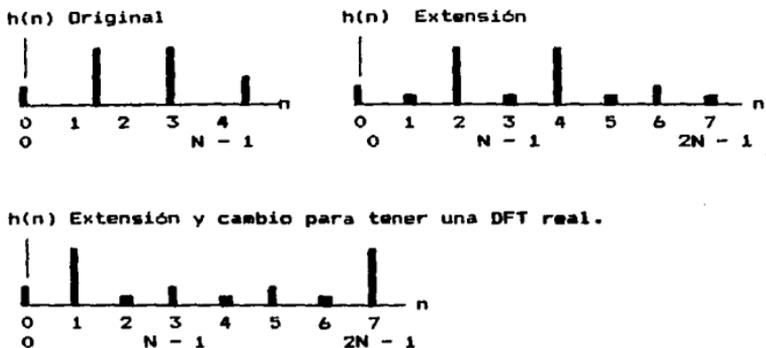


Figura 5.11. Modificaciones a una señal de longitud impar para una DFT real.

Aquellos métodos de la DFT para calcular las muestras de $A(\omega)$ son ineficientes porque no toman ventaja de la simetría y de la función real de $h(n)$. Pero se pueden derivar esas fórmulas especiales para construir aquellas características dentro de la DFT; esto se puede ver en las ecs. 5.46, 5.48 y 5.51a, la cual evalúa a $A(\omega)$ para cualquier valor de ω .

En el caso especial de los filtros de tipo 1 con una L de puntos espaciados a distancias iguales, la muestra de la respuesta de frecuencia tiene la forma siguiente

$$A_k = A(2\pi k/L) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n)\cos(2\pi(M-n)k/L) + h(M) \quad (5.53)$$

para los filtros de tipo 2

$$A_k = A(2\pi k/L) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n)\cos(2\pi(M-n)k/L) \quad (5.54)$$

para los filtros de tipo 3

$$A_k = A(2\pi k/L) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n)\sin(2\pi(M-n)k/L) \quad (5.55)$$

para los filtros de tipo 4

$$A_k = A(2\pi k/L) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \text{Sen}(2\pi(M-n)k/L) \quad (5.56)$$

en todos los casos el punto medio o punto de simetría es $M = (N - 1)/2$, la cual puede ser vista como un tiempo promedio de retraso para el filtro. Para un filtro de longitud impar este retraso no es un múltiplo entero de la muestra del intervalo pero dan un retraso de muestra-media.

Las fórmulas 5.53 y 5.56 son métodos eficientes para calcular la respuesta de frecuencia de un filtro FIR con una longitud de unos cuantos cientos.

La Localización Cero para Filtros FIR de Fase Lineal.

Se puede dar un entendimiento cuantitativo de los filtros característicos por medio de la localización de los ceros $N - 1$ de una función de transferencia del filtro FIR. Esta función de transferencia está dada por la Transformada Z de la respuesta impulso de longitud N , por medio de la ec. 5.31 se tiene que

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (5.57)$$

pero esta ec. puede escribirse como

$$H(z) = z^{-N+1} (h_0 z^{N-1} + h_1 z^{N-2} + \dots + h_{N-1})$$

$$H(z) = z^{-N+1} D(z) \quad (5.58)$$

donde $D(z)$ es un $(N - 1)$ de orden polinomial que es multiplicado por un $(N - 1)$, localizado en el origen del plano complejo z .

La función real $h(n)$ implica que los ceros serán reales o que aparecerán los pares de conjugados complejos. Si el filtro FIR es de fase lineal, hay restricciones más lejanas en las posibles localizaciones cero. Así, desde la ec. 5.45 se ve la ampliación de la fase lineal con una simetría en la respuesta impulso, y por lo tanto, en los coeficientes del polinomio $D(z)$. Por tal motivo, se expresa el cero complejo de z_1 en forma polar

$$z_1 = r_1 \text{Exp}(j x) \quad (5.58)$$

en donde r_1 es la distancia radial de z_1 desde el origen del plano complejo z , y x es el ángulo apartir del eje real. Ver figura 5.12

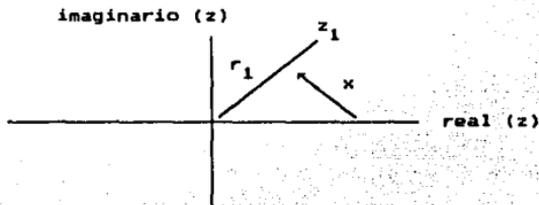


Figura 5.12. Localización del cero de z_1 en el plano complejo.

Usando la definición de $H(z)$ y $D(z)$ en las ec. 5.57 y la 5.58 y requiriendo la fase simétrica de la fase lineal se tiene

$$h(n) = h(N - 1 - n)$$

dando la siguiente ec.

$$H(1/z) = D(z) \quad (5.60)$$

la ec. 5.60 implica que si z_1 es un cero de $H(z)$, entonces $1/z_1$ también es un cero de $H(z)$. En otras palabras,

$$\text{Si } H(z_1) = 0, \text{ entonces } H(1/z_1) = 0 \quad (5.61)$$

La ec. 5.61 dice que si existe un cero en un radio de tipo r_1 , entonces, también existe un radio de tipo $1/r_1$, dándose así un tipo de simetría especial de los ceros con respecto a un círculo unitario. Otra posibilidad es que el cero está en el círculo unitario con $r_1 = 1/r_1 = 1$.

Existen cuatro casos diferentes de filtros con simetría impar que tiene el orden más bajo. Todos los filtros simétricos de orden alto tienen funciones de transferencia que pueden ser factorizados en productos de funciones de transferencia de orden más bajos. Estos son ilustrados por cuatro filtros básicos de menor orden que satisfacen estas condiciones: Uno de longitud 2; Dos de longitud 3 y uno de longitud 5.

Para la longitud 2, con simetría impar, para filtro FIR de fase lineal tiene la forma

$$D(z) = (z + 1)K \quad (5.62)$$

la cual, para cualquier constante K , tiene un cero simple para $z_1 = -1$. El filtro de longitud 3 con simetría impar tiene la forma

$$D(z) = (z^2 + az + 1)K \quad (5.63)$$

Hay dos casos posibles. Para $|a| > 2$, dos ceros reales pueden satisfacer la ec. 5.61 con un $z_1 = r$ y un $1/r$. Por consiguiente

$$D(z) = (z^2 + (r + 1/r)z + 1)K \quad (5.64)$$

para $|a| < 2$, el círculo unitario tiene dos ceros conjugados complejos, y

$$D(z) = (z^2 + (2 \cos x)z + 1)K \quad (5.65)$$

El caso especial para $a = 2$ no es de orden menor porque este puede ser factorizado en la ec. cuadrada de la ec. 5.62.

Cualquier filtro de longitud 4 de simetría impar puede ser factorizada en productos de términos de la forma de la ec.

5.62 y 5.63. Los cuatro casos de filtros de longitud 5 con simetría impar están de la forma

$$D(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1$$

Para $a^2 < 4(b - 2)$ y $b > 2$, los ceros tampoco son reales ni en un círculo unitario; por lo tanto, deben tener sus conjugados complejos y deben tener sus imágenes con respecto al círculo unitario. La forma de su función de transferencia es

$$D(z) = \{z^4 + [(2((r^2+1)/r) \cos x]z^3 + [r^2+1/r^2 + 4 \cos^2 x]z^2 + [(2((r^2+1)/r) \cos x]z + 1\}K \quad (5.66)$$

Si los ceros de un filtro de longitud 5 esta en el eje real o en el círculo unitario, $D(z)$ puede ser factorizado en un producto de términos de menor-orden de las forma de las ecs. 5.62, 5.64 y 5.65; por consiguiente esto no es de orden menor.

El filtro simétrico-par de la ec. 5.50 está descrito por los factores positivos anteriores a el filtro básico de longitud-2 descrito por

$$D(z) = (z - 1)K \quad (5.67)$$

La localización para los cuatros casos básicos de filtros FIR de tipo-1 y tipo-2 son mostrados en la figura 5.13.

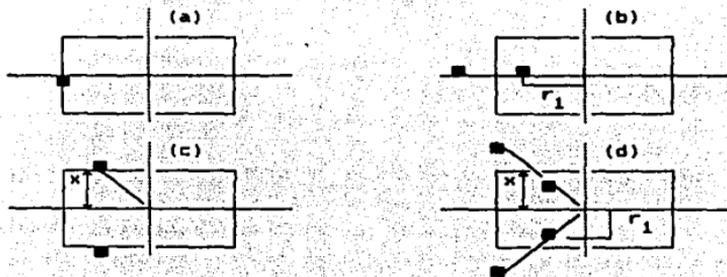


Figura 5.13. Localización del cero del filtros FIR básicos de la función de transferencia en el plano Z

La localización para los casos simétricos-par del tipo-3 y tipo-4 de la ec. 5.50 son los mismos, el cero positivo a una forma unitaria como la ec. 5.67.

Por último, se puede concluir que todos los filtros FIR de fase-lineal tienen ceros dentro y fuera del círculo unitario o en la simetría recíproca de la ecs. 5.64 o 5.66 alrededor del círculo unitario y que sus funciones de transferencia pueden ser siempre factorizables en términos de productos con sus cuatro formas básicas.

5.3. - DISEÑO DE LA RESPUESTA-IMPULSO FINITO DE FASE-LINEAL.

5.3.1. - Diseño de la Frecuencia Muestral.

El método de diseño más directo es simplemente el procedimiento inverso del análisis de la ec. 5.34 dada en el punto 5.2.1. Este problema está bien colocado si N muestras de una respuesta de frecuencia deseada son usadas para encontrar los N coeficientes del filtro, para simplemente resolver las N ecuaciones simultáneas dadas por la ec. 5.35. Este acercamiento puede también ser visto como un problema de interpolación en donde el diseño del filtro tendría una respuesta de frecuencia que pase por medio de los puntos deseados, y entre esos puntos, tome valores dados por la ec. 5.32.

Directamente resolver las N ecuaciones de la ec. 5.35 es generalmente no deseable. Porque resolver N ecuaciones simultáneas requiere el orden de N^2 de operaciones aritméticas y las ecuaciones son algunas veces condicionadas. Si las frecuencias muestrales son espaciadas equitativamente, la DFT puede ser usada. Después la DFT de la respuesta impulso da muestras de la respuesta de frecuencia, y la inversa de DFT (IDFT) de las muestras de una respuesta de frecuencia deseada daría la respuesta-impulso.

Después la $h(n)$ es real y, para el problema de fase-lineal, simétrico, la aritmética requerida está en reducirlo en un factor 4 para compararlo con la DFT directa, y el diseño de fórmulas simples que tienen buenas propiedades numéricas y pueden ser derivadas.

Para el desarrollo explícito de fórmulas del diseño de filtros FIR de frecuencia-muestral con fase lineal, debe usarse la inversa de la DFT que es más directa. Para la respuesta de frecuencia de un N de espacios iguales, la muestra de $C_k = H(2\pi k/N)$, y con una longitud N están dados por la IDFT como

$$h(n) = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} C_k \text{Exp}(j 2\pi nk/N) \quad (5.68)$$

Cuando $H(\omega)$ es de fase lineal, la ec. 5.68 puede ser simplificada por las fórmulas de los cuatro tipos de filtros FIR de fase lineal. Por ejemplo, la respuesta de frecuencia de la 5.53, aplicando el tipo 1 para una N par, $L = N$, y $M = (N - 1)/2$, y con una muestra de frecuencia de $\omega = 0$ se tiene

$$A_k = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \text{Cos}((2\pi(M - n)k)/N) + h(M) \quad (5.69)$$

usando la función de amplitud $A(\omega)$, definida por la 5.37, de la forma 5.69 y la IDFT 5.68 da una respuesta impulso siguiente

$$\begin{aligned} h(n) &= 1/N \sum_{k=0}^{N-1} \text{Exp}(-j 2\pi nk/N) A_k \text{Exp}(j 2\pi nk/N) \\ &= 1/N \sum_{k=0}^{N-1} A_k \text{Exp}((2j \pi(n - M)k)/N) \end{aligned} \quad (5.70)$$

porque $h(n)$ es real, $A_k = A_{N-k}$ y la 5.70 será

$$h(n) = 1/N [A_0 + \sum_{k=1}^M 2A_k \text{Cos}((2\pi(n - M)k)/N)] \quad (5.71)$$

sólo M de la $h(n)$ necesita ser calculada por la simetría en la ec. 5.45.

Esta fórmula calcula la respuesta-impulso del valor $\lambda(n)$ desde de la frecuencia-muestral deseada A_k y requiere una operación N^2 antes que una operación N^2 . Una observación interesante es que no solo las ecs. 5.69 y 5.71 son ecs. de análisis y de fórmulas de diseño, sino que son un par de ecs. de tipo transformadas, es decir, que son del tipo Cosenoidales.

Un desarrollo similar aplicado para los casos de una N impar desde la ec. 5.54 da la frecuencia-muestral siguiente

$$A_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \cos((2n - N)k/N) \quad (5.72)$$

el diseño de la fórmula será entonces

$$\lambda(n) = 1/N [A_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} 2A_k \cos((2n - N)k/N)] \quad (5.73)$$

la cual es de alguna forma como la ec. 5.71, excepto que el límite superior en la sumatoria reconoce a un N como impar y un $A_{N/2} = 0$.

El esquema describe el uso de la frecuencia-muestral como

$$\omega = 2\pi k/N, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.74)$$

en donde son muestras N espaciadas de forma equivalente evaluadas para $\omega = 0$. Otro esquema posible de la frecuencia-muestral que permite el diseño de fórmulas, no tiene muestras con una $\omega = 0$, pero usa una muestra N de espacio equivalentes localizados en

$$\omega = ((2k + 1)\pi)/N, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.75)$$

Esta forma de frecuencia-muestral es más dificultosa para relacionarla con la DFT que la ec. 5.72, porque está puede hacercele una ampliación a A_k y tomar una longitud de $2N$ de la DFT. Los dos casos para longitudes pares e impares, y las dos muestras de punto cero, pero no de frecuencia cero dan un total de cuatros casos para el método de diseño de frecuencia muestral aplicados para los filtros FIR de fase lineal de los tipos 1 y 2. como se definieron en la sección 5.2.2.

Para una longitud impar y una muestra no igual a cero, se deriva el análisis y diseño de las fórmulas para las ecs. 5.69 y 5.71.

$$A_k = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos((2\pi(M-n)(k+1/2))/N) + h(M) \quad (5.76)$$

El diseño de la fórmula será

$$h(n) = 1/N \left[\sum_{k=0}^{M-1} 2A_k \cos((2\pi(M-n)(k+1/2))/N) + A_M \cos\pi(n-M) \right] \quad (5.77)$$

En el caso 4, para una longitud par y una frecuencia-muestral no igual a cero, se da el análisis de la fórmula

$$A_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \cos((2\pi(M-n)(k+1/2))/N) \quad (5.78)$$

y el diseño de la fórmula es

$$h(n) = 1/N \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} 2A_k \cos((2\pi(M-n)(k+1/2))/N) \right] \quad (5.79)$$

Las fórmulas 5.71, 5.73, 5.77 y 5.79 permiten un diseño directo de los cuatro casos de la frecuencia-muestral. Estos casos y sus análisis acompañan a las ecs. 5.68, 5.72, 5.76 y 5.78 que también son las cuatro formas de un Coseno discreto y la transformada inversa del Coseno.

Ahora, para calcular la transformada inversa de los Senos, se tiene que, usar un esquema similar a la ec. 5.74, se puede obtener el tipo 3 y 4 de la siguiente forma

$$A_k = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \operatorname{Sen}((2\pi(M-n)k)/N)$$

$$h(n) = 1/N \left[\sum_{k=1}^M 2A_k \operatorname{Sen}((2\pi(M-n)k)/N) \right] \quad (5.80a)$$

para el tipo 4

$$A_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \operatorname{Sen}((2\pi(M-n)k)/N)$$

$$h(n) = 1/N \left[\sum_{k=1}^{N/2-1} 2A_k \text{Sen}((2\pi(M-n)k)/N) + A_{N/2} \text{Sen}(\pi(M-n)) \right] \quad (5.80b)$$

Si se usa el esquema de la frecuencia-muestral de la ec. 5.75, la ecuación de tipo 3 será

$$A_k = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \text{Sen}((2\pi(M-n)(k+1/2))/N)$$

$$h(n) = 1/N \left[\sum_{k=0}^{M-1} 2A_k \text{Sen}((2\pi(M-n)(k+1/2))/N) \right] \quad (5.80c)$$

para el tipo 4 se tiene

$$A_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \text{Sen}((2\pi(M-n)(k+1/2))/N)$$

$$h(n) = 1/N \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} 2A_k \text{Sen}((2\pi(M-n)(k+1/2))/N) \right] \quad (5.80d)$$

Estas fórmulas de los tipos 3 y 4 son útiles en el diseño de diferenciadores y transformadores de Hilbert.

Diseño de Guía de líneas para la Frecuencia-Muestral.

La Guía de Líneas son necesarias para elegir también a los cuatro casos para el diseño de frecuencia-muestral. Un ejemplo es un filtro paso-baja con un filtro paso-banda extendiéndose por medio del rango medio de la frecuencia Nyquist o con una frecuencia pegable. Con una notación normalizada, la muestra de la frecuencia es $\omega = 2\pi$ rad/s o de 1 Hz (un ciclo por segundo). Como se mostró en la Tabla 5.1, la respuesta de frecuencia es periódica con un período de 2π si N es impar y con un período de 4π si N es par. Por eso, la frecuencia máxima o frecuencia de Nyquist es $\omega = \pi$ ó $f = 0.5$ Hz.

Un filtro FIR de fase lineal es designado para aproximarse la respuesta ideal de un filtro paso-baja, que tener un filtro paso-banda desde $\omega = 0$ para $\pi/2$ y un alto de banda desde $\omega = \pi/2$ para un π .

La elección de que sea la longitud es par e impar está hecha por las propiedades intrínsecas de la respuesta de una longitud par o impar, como se vió en la tabla 5.1 y la figura 5.9, para la respuesta deseada. Finalmente, la elección de una frecuencia-muestral de frecuencia cero no se hace. Esta elección es hecha para hacer la transición entre un paso-banda y un alto de banda-baja como un acercamiento posible para un camino medio entre dos puntos de muestra. El diseño puede entonces ser calculado por una de las fórmulas en las ecs. 5.71, 5.73, 5.77 o 5.79.

Una posible generalización con el diseño de frecuencia muestral es la especificación de la respuesta de frecuencia muestral deseada sobre un espacio no uniforme de frecuencias. La IDFT no puede ser usada, y el diseño específico de fórmulas no pueden ser derivadas de este caso, porque el diseño del problema no puede ser poseído por tomar N muestras de la respuesta de frecuencia dadas en las ecs. 5.46, 5.48 o 5.51, frecuencias arbitrarias que dan N ecuaciones simultáneas que pueden ser resueltas para $h(n)$. Más generalmente, para la respuesta de fase arbitraria, la ec. 5.32 puede ser muestreada a N franquicias. Y debe de cuidarse el uso de errores grandes entre las frecuencias muestreadas.

5.3.2 ERROR MINIMO CUADRADO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

La propuesta de más filtros es para separar las señales deseadas de las no deseadas o más específicamente, el ruido. Antes de que la descripción de las señales y del ruido están dadas en términos de su contenido de la frecuencia o de la energía de las señales en frecuencias de banda. Por esta razón, las

especificaciones son generalmente dadas en el dominio de la frecuencia, y desde que la energía de una señal es relacionada para el cuadrado de la señal, es decir, que el error cuadrático es el criterio de aproximación más apropiado. En esta sección se verán dos métodos de definición para un error cuadrático. La primera definición es la suma de los cuadrados de error medidos de un conjunto finito de puntos muestreados. La segunda es la integral del cuadrado de error sobre un rango finito o infinito de frecuencias.

Muestras Discretas de Frecuencia.

El método de diseño de frecuencia-muestral no es realmente un acercamiento de aproximación, pero un método de interpolación que produce un filtro con una respuesta de frecuencia que pasa exactamente por medio de los puntos muestrales. Sin embargo, no hay contraste en la respuesta entre los puntos muestreados y los pobres resultados que deben obtenerse.

La respuesta de frecuencia de un filtro FIR representada en la ec. 5.32, está dada por

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \text{Exp}(-j \omega n)$$

El problema de diseño es poner por definición un error medido E como una suma de diferencias cuadradas entre la respuesta de frecuencia actual y deseada sobre un conjunto de frecuencias muestreadas de tipo L . Esta función de error es definida como

$$E = \sum_{k=0}^{L-1} |H(\omega_k) - H_d(\omega_k)|^2 \quad (5.81)$$

en donde $H_d(\omega_k)$ son las muestras L de las respuestas deseadas.

Este problema es fácil de formular y de resolver si la frecuencia muestral son equitativamente espaciadas, la cual está dada

$$\omega_k = 2\pi k/L$$

y el problema es restringido para filtros de fase-lineal, en donde el valor real de amplitud $A(\omega)$, antes que la respuesta de frecuencia compleja $H(\omega)$, pueda ser aproximada. Con estas condiciones la ec. 5.81 queda como

$$E = \sum_{k=0}^{L-1} |A(2\pi k/L) - A_d(2\pi k/L)|^2$$

o con una notación simple

$$E = \sum_{k=0}^{L-1} |A_k - A_{dk}|^2 \quad (5.82)$$

Una propiedad poderosa de la transformada de Fourier es que permite un diseño directo de los filtros FIR de LS error (Error Mínimo Cuadrático), estado en el que la definición de error por medio de la ec. 5.82 en el dominio de la frecuencia puede ser también calculado en el dominio del tiempo para un L impar por medio de

$$E = \sum_{n=-(L-1)/2}^{(L-1)/2} |h_n - h_{dn}|^2$$

en donde h_{dn} es la longitud L del filtro FIR que tiene una L de amplitud de respuesta de frecuencia muestral A_{dk} . Además, se puede calcular este filtro por medio del método de frecuencia-muestral de la sección 5.3.1, usando las fórmulas especiales como la de la ec. 5.71 con una longitud L o la IDFT. Un factor de $1/L$ es omitido desde estas ecuaciones para simplificar el desarrollo. El filtro

para ser diseñado tiene una longitud N de respuesta-impulso h_n con una L de respuesta de frecuencia muestral A_k . Porque el filtro es de longitud N , y la ecuación de error puede ser puesta de la siguiente forma

$$E = \sum_{n=-M}^M |h_n - h_{dn}|^2 + \sum_{n=M+1}^{(L-1)/2} 2|h_{dn}|^2$$

Esta ecuación muestra claramente que para minimizar a E , se necesita elegir N valores de h_n para ser iguales a los valores N equivalentes de h_{dn} . En otras palabras, se obtiene un h_n por simple truncamiento de h_{dn} . La segunda sumatoria da entonces el error residual. Examinando el error residual como una función de N , debe ayudar a elegir el filtro de longitud N .

Para el filtro FIR de fase lineal de tipo 1 (descrito en la sección 5.2.2) con una longitud N impar y una respuesta-impulso con simetría par, la L de muestras espaciadas equitativamente de la respuesta de frecuencia desde la ec. 5.46 da la ec. 5.53 y la 5.6B. Las muestras son

$$A_k = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n)\cos((2\pi(H-n)k)/L) + h(H).$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$.

en donde $H = (N-1)/2$. Esta fórmula fué derivada como un caso especial de la DFT aplicada para el tipo 1, real, de coeficientes del filtro FIR simétrico par para calcular la amplitud muestreada de la respuesta de frecuencia. A esta ecuación se le conoce como la transformada del coseno, y esta ecuación puede ser mostrada como una transformación ortogonal sobre valores independientes de A_k , justo como es la DFT.

Para el uso alternativo del espacio muestreado en la ec. 5.75, la cual no tiene una muestra de frecuencia cero, entonces se puede calcular a h_{dn} desde la ec. 5.77. Los filtros de tipos 2 con

un N par son desarrollados por un camino similar y por el uso del diseño de las fórmulas 5.73 y 5.79.

La ec. 5.46 relaciona la frecuencia muestral L para los valores independientes de $M + 1$ de la simetría de longitud N de la respuesta impulso $h(n)$. El diseño del problema que da el A_k y los valores para $h(n)$ representan las ecuaciones L con un $M + 1$ desconocido.

La ecuación 5.46 muestra las frecuencias arbitrarias L que puede ser escrita como una ecuación de matriz

$$Fh = a \quad (5.82)$$

en donde h es un vector de longitud $M + 1$ con elementos que son la primera mitad de $h(n)$. F es una matriz L por $(M + 1)$ de la forma de término Coseno desde la ec. 5.46 y a es un vector de longitud L de la frecuencia muestral A_k . Si la fórmula para calcular los valores L de la respuesta de frecuencia de un filtro FIR de longitud N , la ec. 5.46 es usada para definir un vector de error de diferencias, como se definió en la ec. 5.82, y el resultado es escrito en la formulación de la matriz de la ec. 5.83, el error será

$$Fh - a = a_d + e \quad (5.84)$$

o de la forma

$$Fh - a_d = e$$

en donde e es un vector de diferencia entre la muestra actual y la deseada de la respuesta de frecuencia. El error medido, definido en la ec. 5.82 será de la forma cuadrática

$$E = e^T e \quad (5.85)$$

para un $L > N$, la ecuación 5.83 es sobredeterminada y no puede, en general, ser resuelta para h . El filtro de diseño de error medido es la norma de e , como se da en la ec. 5.85. Este error medido es minimizado por hacer a e ortogonal para las columnas de F en la

ec. 5.84. Multiplicando a ambos lados de la ec. 5.84 por la transpuesta de F da como resultado la ec. siguiente

$$F^T F h = F^T a_d + F^T e.$$

para que E sea mínima, e debe ser ortogonal para las columnas de F y, por consiguiente, $F^T e$ debe ser cero. La h óptima debe satisfacer la ecuación normal

$$F^T F h = F^T a_d \quad (5.86)$$

la ecuación 5.86 puede ser reescrita en términos de la pseudoinversa como sigue

$$h = [F^T F]^{-1} F^T a_d \quad (5.87)$$

si $L = N$, la ec. 5.87 será el problema regular de la frecuencia-muestral y puede ser resuelto con un error cero. Para un caso de mayor interés, en donde $L > N$, pero sólo hay una $M + 1$ ecuaciones para ser resueltas. Para $L \gg N$, la ec. 5.86 debe ser condicionada, y la ec. 5.87 no debe ser usada para resolver a ésta. Un método especial sería necesario para evitar serios problemas numéricos.

Si una función de carga de error es deseada, la ec. 5.82 es modificada para obtener

$$E = \sum_{k=0}^{L-1} W_k |A(\omega_k) - A_d(\omega_k)|^2 \quad (5.88)$$

la ecuación normal de la ec. 5.86 será

$$F^T W F h = F^T W a_d \quad (5.89)$$

en donde W es una matriz definida-positiva de la carga. Si las cargas cero son deseadas, el efecto es conseguir por medio de un removimiento de aquellas frecuencias desde el conjunto de

frecuencias L , no para usarse una carga de valor cero, la cual violaría las condiciones del espacio del vector de un problema de minimización.

Integral de Error Cuadrático por Criterio de Aproximación.

Un error medido es definido como la integral de la diferencia cuadrática de la amplitud actual y la amplitud deseada sobre la frecuencia básica en un rango de $-\pi < \omega < \pi$. Esta medida es llamada como la *Integral de Error Cuadrático*.

$$E = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |A(\omega) - A_d(\omega)|^2 d\omega \quad (5.90)$$

El resultado de minimizar este error medido será cerrarlo para que se obtenga desde de la minimización el error medido discreto en la ec. 5.82 para una L muy grande.

Si se asume que la respuesta impulso de un filtro $h(n)$ es de duración infinita y simétrica con respecto al origen, entonces hay un cambio de fase cero, y la amplitud de la respuesta de frecuencia puede ser escrita como

$$H(\omega) = A(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \text{Exp}(-j \omega n) \quad (5.91)$$

la cual es una simple Transformada de Fourier de $h(n)$, con una inversa de

$$h(n) = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} A(\omega) \text{Exp}(-j \omega n) d\omega \quad (5.91a)$$

En el teorema de Parseval, los estados en que la energía de una señal pueden ser calculados en el dominio del tiempo como también en el dominio de la frecuencia. La ec. 5.90 será como

$$\begin{aligned} E &= 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |A(\omega) - A_d(\omega)|^2 d\omega \quad (5.91b) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n - h_{dn}|^2 \end{aligned}$$

en donde h_{dn} es la transformada inversa de $A_d(\omega)$, calculada por la ec. 5.92, y h_n es el filtro de longitud N con respuesta de frecuencia $A(\omega)$. Porque h_n es de longitud N finita, el error de sumatoria puede ser dividido en dos sumas

$$E = \sum_{n=-M}^M |h_n - h_{dn}|^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty} 2h_{dn}^2 \quad (5.91c)$$

en donde $M = (N - 1)/2$. Esta expresión muestra claramente que para minimizar a E , los valores N de h_n deben ser elegidos igual que para los correspondientes valores de N de h_{dn} . El error residual para la h_n óptima es dada por la segunda sumatoria.

Otra interpretación de estas ecuaciones es que la ec. 5.91 es una expansión de las series de Fourier de la función periódica $A(\omega)$ y la segunda ecuación es la fórmula para las series de coeficientes. Desde la teoría de las series de Fourier se conoce que una serie truncada es una aproximación óptima para la función expandida en el sentido que la integral de error cuadrático es minimizado.

Para el filtro FIR de fase-lineal tipo 1 descrito en el punto 5.2.2, el cual tiene una longitud N impar y una respuesta-impulso de simetría par la amplitud de respuesta de frecuencia desde la ec. 5.91 es

$$A(\omega) = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2h_n \cos(\omega n) \quad (5.91d)$$

con una respuesta impulso infinita no causal de

$$h(n) = 1/n \int_0^{\pi} A(\omega) \cos(\omega n) d\omega \quad (5.92)$$

El filtro de tipo 2, el cual tiene una longitud par puede ser diseñado por un modificador de acercamiento, el cual puede ser desarrollado para un filtro ideal paso-baja siguiendo las siguientes indicaciones :

Si la respuesta-impulso de un filtro FIR de fase-lineal es encontrado simétricamente truncado, la expansión de la serie de Fourier de la respuesta de amplitud deseada, el resultado del filtro tendría una respuesta de amplitud que es una aproximación de error LS para la respuesta deseada.

La limitación principal de este método de diseño es la dificultad en calcular a h_{dn} desde $A_d(\omega)$. Este problema existe porque el requerimiento de cálculo de la evaluación de la integral en la ec. 5.92 antes de que se calcule la suma en la ec. 5.71 para la formulación de frecuencia discreta del diseño de error LS.

Para el filtro paso-baja se asume que la amplitud deseada es unitario desde $\omega = 0$ a $\omega = W\pi$, y cero desde $\omega = W\pi$ a $\omega = \pi$, como se ve en figura 5.14.

Para N impar, el rango de frecuencia base para el coeficiente la ec. 5.92 es $-\pi$ a π (ó 0 a 2π). La amplitud deseada es 1 desde $-W\pi$ a $W\pi$, en donde W es la frecuencia interrumpida del filtro expresado como una fracción del rango total desde 0 a π (ver figura 5.14). La amplitud ideal o deseada está dada sobre el rango de la frecuencia $-\pi < \omega < \pi$ por medio de la siguiente ecuación

$$A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } -W\pi < \omega < W\pi \\ 0 & \text{para cualquier caso} \end{cases} \quad (5.93)$$

desde la ec. 5.92 la respuesta-impulso

$$h(n) = 1/\pi \int_0^{W\pi} \cos(\omega n) d\omega$$

llegará a ser

$$h(n) = \text{Sen}(Wn\pi)/n\pi \quad (5.94)$$

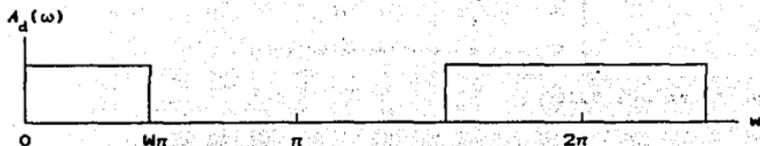


Figura 5.14. Respuesta del filtro ideal paso-baja para un N impar.

la cual tiene una simetría par con respecto al origen y por eso no es causal. Desde entonces esto es infinitamente largo, y por lo tanto no es físicamente realizable. Sin embargo, $h(n)$ da exactamente la respuesta de frecuencia deseada de la ec. 5.93 y la figura 5.14. Para hacer que este resultado sea físicamente posible, se debe trincar la respuesta-impulso de la ec. 5.94 (simétricamente para mantener la propiedad de la fase lineal), la cual, acordado para la teoría de la serie de Fourier, da una respuesta-impulso de longitud-finita con una amplitud que es una aproximación de un error LS a la respuesta deseada. La longitud finita de $h(n)$ es cambiada para la derecha para hacerla causal. El cambio sólo agrega una fase lineal y no es destruida la propiedad de error mínimo.

Para obtener un filtro de longitud N , se debe trincar la respuesta-impulso para todos los términos como $n < -M$ y $n > M$ igual a cero, en donde $M = (N - 1)/2$ como se definió en la ec. 5.43. La respuesta es entonces cambiada para la derecha por M términos, y el resultado es un filtro FIR de error LS causal. El resultado de la respuesta-impulso es

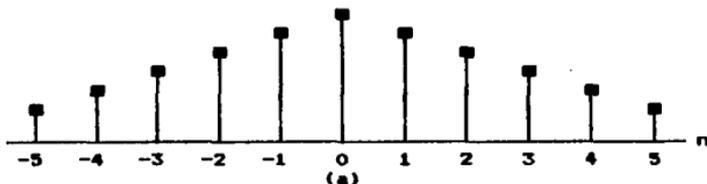
$$h(n) = \begin{cases} \text{Sen}(Wn(n - M))/\pi(n - M), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{para cualquier caso.} \end{cases} \quad (5.95)$$

si la transición entre el filtro paso-banda y el alto-banda es expresado como f_c en Hertz antes de que W sea una fracción de la región $0 < \omega < \pi$, y si la muestra medida es una muestra por segundo, la ec. 5.95 será

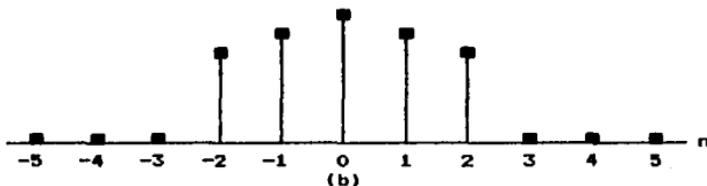
$$h(n) = \begin{cases} \text{Sen}(2\pi f_c (n - M)) / n(n - M), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{para cualquier caso.} \end{cases} \quad (5.96)$$

ver la figura 5.15

$h(n)$



$h(n)$



$h(n)$

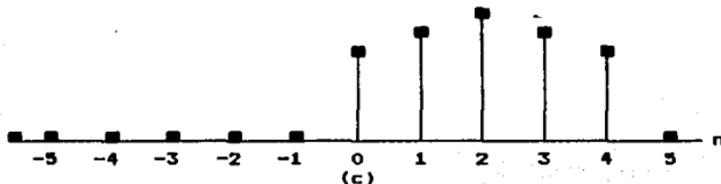


Figura 5.15. Diseño de filtro FIR de error LS óptimo.

La derivación de $h(n)$ por un N par es más complicado porque no hay una fase-cero, el filtro FIR de longitud par corresponde a la ec. 5.94 y la figura 5.15a. La amplitud de

respuesta del filtro ideal paso-baja con un N par está dado en la figura 5.16. Por usar un rango de frecuencia de $-\pi$ a π , se obtiene una longitud doble $h(n)$ con valores ceros en los índices pares. Esto es comprimir a la longitud N por medio de un simple reacomodo de los valores ceros y entonces truncarlos y cambiarlos para dar un filtro óptimo de longitud par. Este proceso es ilustrado en la figura 5.17.

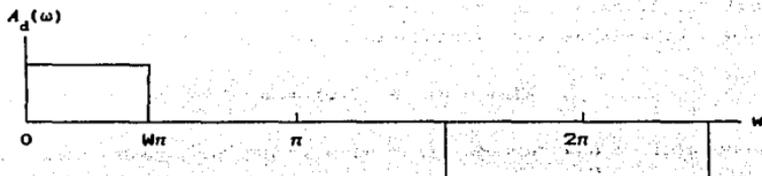


Figura 5.16: Respuesta ideal del filtro paso-baja para un N par.

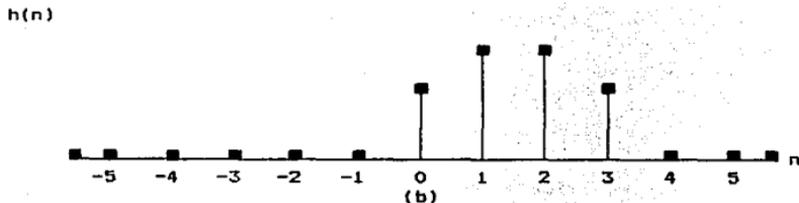
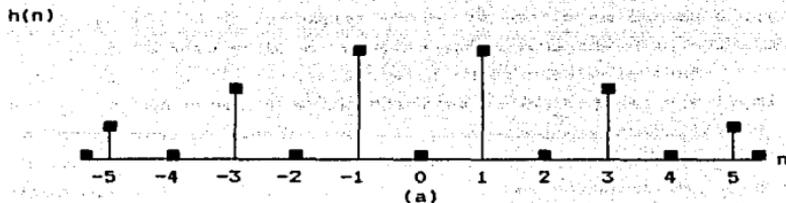


Figura 5.17. Diseño del filtro FIR óptimo de error LS para un N par

El diseño de la fórmula para el caso de longitud par es exactamente el mismo como para una longitud impar dada en la ec. 5.95, pero hay que notar que M es ahora una fracción.

Aproximación del Error Mínimo Cuadrático de un Diferenciador.

El proceso de desarrollo que se tiene considerado para la aproximación de un filtro ideal paso-baja, es el diferenciador ideal que también puede ser aproximado por un filtro FIR de fase lineal. La respuesta de frecuencia de un diferenciador es

$$H(\omega) = j\omega \quad \text{ó} \quad A(\omega) = \omega$$

porque $A(\omega)$ es una función impar de ω y hay un cambio de fase constante de 90° , el diseño debe usarse como el del tipo 3 o tipo 4, y también como se describe en la tabla 5.1. Si la diferenciación es para ser combinada con un filtro paso-baja para reducirse la interferencia de la alta-frecuencia, debe de usarse el tipo 3 porque este tipo tiene una respuesta cero de $A(\pi)$. Si la banda ancha se desea ampliarla, entonces se debe usar el tipo 4.

Para el diseño de un diferenciador de tipo 3 que tiene una longitud N impar, $A_d(\omega)$ es definido sobre un rango de $-\pi < \omega < \pi$ y es periódico con un período de 2π , la cual fué el caso para el filtro de paso-baja en la ec. 5.93 mostrado en la figura 5.14. El filtro de coeficientes son derivados desde la ec. 5.68 y son dados por

$$h(n) = -1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \omega \text{Sen}(\omega n) d\omega$$

$$h(n) = \begin{cases} \text{Cos}(\pi n)/n, & n \text{ diferente de } 0 \\ 0, & n \text{ igual a } 0. \end{cases} \quad (5.97)$$

Para el diseño de tipo 4 de un diferenciador de banda-ancha, con un N par, se define a $A_d(\omega)$ sobre un rango de

$-2\pi < \omega < 2\pi$, la cual es periódica con un período de 4π , como fue el caso para el filtro paso-baja de la figura 5.16. La respuesta ideal es

$$A_d(\omega) = \begin{cases} -2\pi - \omega, & -2\pi < \omega < -\pi \\ \omega, & -\pi < \omega < \pi \\ 2\pi - \omega, & \pi < \omega < 2\pi \end{cases}$$

el filtro de coeficientes son

$$h(n) = -1/4\pi \int_{-2\pi}^{2\pi} A_d(\omega) \text{Sen}(\omega n/2) d\omega$$

$$h(n) = -1/\pi \int_0^{\pi} \omega \text{Sen}(\omega n/2) d\omega, \quad n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm \infty$$

$$h(n) = -\frac{4 \text{Sen}(\pi(2n+1)/2)}{\pi(4n^2+4n+1)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.98)$$

Estos resultados deben ser truncados y cambiados, como para el filtro paso-baja, para dar un filtro causal de longitud N .

Regiones de Transición, Funciones de Carga y Ventanas para el Diseño de Filtros FIR.

Cuatro acercamientos pueden mejorar las características del diseño de filtros para minimizar el error cuadrático y poder reducir el pasar cerca de una discontinuidad. La solución más directa es seleccionar el cambio de respuesta de frecuencia deseado para que no exista una discontinuidad. Este método fue anteriormente introducido y el acarreo hacia afuera es fácil por tener una región de transición en la respuesta de la frecuencia entre la región paso-banda y la alta-banda. Y esto permitirá una función de transición para la respuesta deseada que conectaría al paso-banda y a la respuesta ideal de alta-banda.

El segundo acercamiento es para seleccionar el criterio de error en un camino parecido para reducir o remover el pasarse de la región. Esta región es entonces llamada como *banda de transición* o región de "don't care".

El tercer acercamiento selecciona el error medido para introducir una función de carga en la ec. 5.90 para más de una carga de error en donde hay un sobre límite y/o una región menor que no son tan importantes, tal como la región de transición.

El cuarto método usa el resultado de un diseño regular de error LS, tal como la ec. 5.81, 5.95 y 5.97, y modifica directamente a h_n para reducir el pasarse del límite pero el resultado no es largo para ser óptimo. Desde que se sobre-pasa el límite es causado por el truncamiento de la secuencia finita de longitud L de la ec. 5.81 o la secuencia infinita de la ec. 5.92, esto puede ser reducido por un truncamiento más gentil con ventanas en el dominio del tiempo.

Modificación de la Respuesta de Frecuencia Deseada.

En más aplicaciones de filtros hay un rango de frecuencias que contienen el espectro de la señal deseada, llamada la señal *paso-banda*, y un rango que contienen las señales no deseadas o ruido, llamada la señal de *banda-alta*. Para el diseño fácil del problema, se define una banda entre la *paso-banda* y la *banda-alta*.

La simple modificación para la respuesta de amplitud deseada es para conectarse la ganancia unitaria en la *paso-banda* para la ganancia cero en la *banda-alta* por una línea recta. La respuesta de amplitud deseada es

$$A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{paso-banda} & (0 < \omega < \omega_1) \\ \frac{\omega_2 - \omega}{\omega_2 - \omega_1} & \text{región de transición} & (\omega_1 < \omega < \omega_2) \\ 0 & \text{banda-alta} & (\omega_2 < \omega < \pi) \end{cases}$$

Uso de una Banda de Transición.

Una de las modificaciones más efectivas del método de diseño directo del error LS está para seleccionar las bandas de las frecuencias sobre la cual la minimización es acarriada hacia afuera. En una función de transición es definida sobre la región de transición de frecuencias para crear una respuesta de frecuencia continua ideal para que sea aproximada. En esta sección la banda de frecuencia por la región de transición es simplemente removida desde la definición de error, y la región es llamada la banda de transición o banda "don't care". El error en la ec. 5.90 será

$$E = \int_0^{\omega} |A(\omega) - A_d(\omega)|^2 d\omega + \int_0^{\pi} |A(\omega) - A_d(\omega)|^2 d\omega \quad (5.99)$$

Esta banda de transición tendrá el mínimo error cuadrático y puede dar una gran reducción de pasarse el límite que una función de transición porque no hay un lugar de contraste en $A(\omega)$ en la región de transición.

Uso de Criterio en una Carga de la Media de error cuadrático.

Flexibilidad es agregada para la definición de error dada en la ec. 5.90, por introducción una función de carga positiva $W(\omega)$ para dar lo siguiente

$$E = 1/\pi \int_0^{\pi} W(\omega) |A(\omega) - A_d(\omega)|^2 d\omega$$

que es similar a la que se usó en el caso de la ec. 5.88. Con esta nueva función, más cargas pueden ser usadas para la aproximación de error en regiones de mayor interés o importancia. Usando la banda de transición, pueden algunos resultados de comportamiento no deseado surgir en el diseño del filtro dentro de esa banda. Y

en estos casos esto debe ser preferible para usar una función de transición con una carga pequeña para algún lugar de control sobre la región de transición, y para estos casos una banda de transición con funciones de carga deben tener ventajas.

Uso de las Funciones de Ventana en el Diseño de Filtros FIR.

El truncamiento de una longitud infinita o de una secuencia de longitud L en el dominio del tiempo causa el fenómeno de Gibbs que es una discontinuidad en el dominio de la frecuencia. Este truncamiento puede ser visto como una multiplicación de un prototipo de la secuencia en el dominio del tiempo por una función rectangular que tiene un valor unitario para $-M < n < M$ y un resultado cero en el rango. Si $h_d(n)$ es el prototipo de secuencia ideal simétrico con respecto de cero y $h(n)$ es el resultado truncado finito, el proceso descrito es

$$h(n) = h_d(n)r(n) \quad (5.100)$$

en donde

$$r(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq M, \\ 0, & |n| > M, \end{cases} \quad (5.101)$$

con $M = (N - 1)/2$ para N impar. La respuesta impulso de duración-infinita $h_d(n)$ con valores dan la ec. 5.94. La respuesta de $h_d(n)$ tiene la respuesta de frecuencia ideal deseada de la ec. 5.93 y $h(n)$ tiene la respuesta de frecuencia realizable.

La multiplicación de dos funciones en el dominio del tiempo corresponden a la convolución de la transformada de Fourier de las dos señales. La transformada de Fourier de la función rectangular usada para el truncamiento es

$$R(\omega) = FT\{r(n)\} = \sum_{n=-M}^M r(n) \text{Exp}(-j \omega n) \quad (5.102)$$

$$= \sum_{n=-M}^M \text{Exp}(-j \omega n) = \text{Sen}(\omega N/2) / \text{Sen}(\omega/2) \quad (5.103)$$

Si la transformada de Fourier de $h_d(n)$ y $h(n)$ son $H_d(\omega)$ y $H(\omega)$, respectivamente, la operación de truncamiento en el dominio del tiempo da la ec.5.102, que es descrita en el dominio de la frecuencia por

$$H(\omega) = H_d(\omega) * R(\omega) \quad (5.104)$$

estado en la cual, la respuesta de frecuencia del filtro de longitud finita es igual a la respuesta de frecuencia ideal con una transformación de la función rectangular dada por la ec.5.103.

Existen seis ventanas estándar y son :

Ventana Triángulo de Bartlett.

$$W(n) = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{N+1}, & n = 0, 1, 2, \dots, N-1/2 \\ 2 - \frac{2(n+1)}{N+1}, & n = N-1/2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (5.105)$$

Ventanas Generalizadas de Tipo Coseno.

(Rectangular, Hanning, Hamming y Blackman) :

$$W(n) = \begin{cases} a - b \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{N+1}\right) + c \cos\left(\frac{4\pi(n+1)}{N+1}\right), & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (5.106)$$

Ventana Kaiser con Parámetro β .

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{I_0(\beta(1 - (2(n+1)/(N+1))^2)^{1/2})}{I_0(\beta)}, & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (5.107)$$

La generalización de la ventana coseno tiene cuatro formas especiales que son comúnmente usadas. Esas son determinadas por los parámetros a , b , y c .

Ventana	a	b	c
Rectangular	1	0	0
Hanning	0.5	0.5	0
Hamming	0.54	0.46	0
Blackman	0.42	0.5	0.08

El más directo de estas ventanas es la ventana rectangular simple, la cual da el truncamiento simple y el clásico fenómeno de Gibbs. La ventana de Bartlett o ventana triangular reduce el sobre límite, pero extiende la región de transición considerablemente. Las ventanas de Hannig, Hamming y Blackman usan complicadas funciones Coseno más progresivamente para proveer un truncamiento plano de la respuesta impulso ideal y una respuesta de frecuencia que busca una mejor perspectiva.

El mejor resultado de ventana, probablemente viene desde el uso de la ventana de Kaiser, la cual tiene un parámetro β que permite un ajuste entre la reducción de sobre límite y la región de transición. El rizo de paso-banda y de banda-alta y la anchura de transición pueden ser convertidas dentro de un filtro de longitud N y un parámetro β .

5.3.3 APROXIMACIÓN DE CHEBYSHEV.

Los picos o sobre límites en la respuesta de frecuencia son típicos de una frecuencia muestral y de un diseño LS. Las técnicas de las ventanas son intentos para reducir los picos en la función del error.

Cuidadosamente, por medio de varias aplicaciones de ventanas, el error máximo en la respuesta de frecuencia puede ser reducida y por medio de la teoría de Aproximación de Chebyshev también puede ser reducida.

Una aproximación que minimiza el error máximo sobre un conjunto de frecuencias es llamada como una *Aproximación de Chebyshev*.

Cuatro Tipos de Filtros Lineales.

Como se indicó en la sección 5.2.2, hay 4 tipos de filtros FIR de fase lineal, y los cuatro tipos tienen una respuesta de frecuencia

$$H(f) = (j)^m \Lambda(f) \text{Exp}(-j 2\pi f(N - 1/2)), \quad m = 0, 1, \quad (5.108)$$

donde $\Lambda(f)$ es un valor real positivo o una función negativa. En esta sección la variable de frecuencia f , está en ciclos por segundo o Hertz, pero también, se puede expresar en radianes ω , y es igual a $\omega = 2\pi f$.

Si el filtro tiene $h(n) = h(N - 1 - n)$, esto es que tiene una simetría par y que $m = 0$ en la ec. 5.108. Ahora, si el filtro tiene $h(n) = -h(N - 1 - n)$, entonces el filtro tiene una simetría impar y una $m = 1$ en la ec. 5.108. Para una simetría par hay dos tipos de filtros correspondientes a un N par e impar. Similarmente, para una simetría impar hay dos tipos adicionales de filtros para un N par e impar. En referencia a la ec. 5.108, esta es mostrada que $\Lambda(f)$ puede ser escrita como una carga de suma de tipo cosenoidal para los cuatro tipos de filtros de fase lineal. Estas fórmulas pueden obtenerse de las ecs. 5.46, 5.48 y 5.51 con el uso apropiado de identidades trigonométricas. La forma específica de $\Lambda(f)$ es dada en la tabla 5.2.

Si la respuesta impulso $h(n)$, $n = 0, \dots, N - 1$, tiene una longitud impar (si N es impar) hay dos filtros de fase lineal diferentes

Tipo 1 : simetría par, longitud impar.

Tipo 3 : simetría impar, longitud impar.

Tabla 5.2. Funciones de Aproximación de Filtros de Fase-Lineal.

	Simetría	
	Par	Impar
	$h(n) = h(N - 1 - n). (m = 0)$	$h(n) = -h(N - 1 - n). (m = 1)$
	$(N-1)/2$	$(N-1)/2$
	$A(f) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a_k \cos 2\pi k f$	$A(f) = \text{Sen} 2\pi f \sum_{k=0}^{(N-1)/2} c_k \cos 2\pi k f$
Longitud (N) Impar	$a_0 = h((N - 1)/2)$	$c_0 - 1/2c(2) = 2h((N-3)/2)$
	$a_k = 2h(-k + (N - 1)/2)$	$c((N-5)/2) = 4h(1)$
	$k = 1, \dots, (N - 1)/2$	$c((N-3)/2) = 4h(0)$
		$c(k-1) - c(k+1) = 2h(-k + (N-1)/2)$
		$k = 2, \dots, (N - 5)/2$
	$(N-2)/2$	$(N-2)/2$
Longitud (N) Par	$A(f) = \text{Cos} \pi f \sum_{k=0}^{(N-2)/2} b_k \cos 2\pi k f$	$A(f) = \text{Sen} \pi f \sum_{k=0}^{(N-2)/2} d_k \cos 2\pi k f$
	$b_0 + 1/2b(1) = 2h((N-3)/2)$	$d_0 - 1/2d(1) = 2h((N-3)/2)$
	$b((N-3)/2) = 4h(0)$	$d((N-3)/2) = 4h(0)$
	$b(k-1) + b(k) = 4h(-k + (N-1)/2)$	$d(k-1) - d(k) = 4h(-k + (N-1)/2)$
	$k = 2, \dots, (N - 3)/2$	$k = 2, \dots, (N - 3)/2$

Como se muestra en la tabla 5.2, la simetría impar, de longitud impar del tipo 3 tiene una respuesta de frecuencia que debe ser cero para $f = 0$ y para $f = 0.5$. Así, un filtro de tipo 3 no debe ser usado para un paso-bajas o un paso-altas. Más lejano, el filtro de tipo 3 introduce un cambio de fase de 90° , como se da en la ec. 5.108.

Si la respuesta impulso $h(n)$ tiene una longitud par (si N es par), el filtro de fase-lineal tiene dos resultados que son

Tipo 2 : Simetría par, longitud par.

Tipo 4 : Simetría impar, longitud par.

como se muestra en la tabla 5.2, la simetría impar, de longitud par del tipo 4, tiene una respuesta de frecuencia que debe ser cero para $f = 0$, pero no necesariamente para $f = 0.5$. El filtro de tipo 4 será un buen filtro paso-alta, pero este no debe ser usado para un filtro paso-baja. La simetría par, de longitud par de tipo 2 debe ser cero para $f = 0.5$ pero no necesariamente para $f = 0$. El filtro de tipo 2 será un buen filtro paso-baja, pero no un buen filtro paso-alta. Como se hizo en el filtro de tipo 3, la simetría impar, de longitud par de tipo 4, introduce un cambio de fase de 90° , como se ve en la ec. 5.108.

Diseño de Fase-Lineal para una Aproximación de Chebyshev

La respuesta de frecuencia deseada para un filtro ideal paso-baja es la respuesta ideal de valor real (y no un cambio de fase), es decir, la unidad en el filtro paso-banda y cero para la banda-alta entera. Esto es imposible para un filtro FIR causal por tener una fase cero (excepto para el caso $h(0) = 1$ y todos los coeficientes son cero, en el caso de que la transmisión de banda-alta es igual a la unidad). Sin embargo, esto es posible de obtener un filtro FIR con fase-lineal para todas las frecuencias como se ve en la tabla 5.2. El grupo de retraso (negativo de la derivada con respecto a la frecuencia de la función de fase) es una constante para todas las frecuencias de los filtros de fase-lineal. Sin embargo, una respuesta de frecuencia aceptable tiene las siguientes características :

1. - Fase-Lineal.

2. - Un ancho de banda de transmisión Δf entre el paso-banda y la banda-alta.

- 3.- Una desviación desde la unidad de $A(f)$ dentro del paso-banda de $\pm \delta_1$.
- 4.- Una desviación desde cero de $A(f)$ dentro de la banda-alta de $\pm \delta$.

Un diseño de filtro más en general podría tener un paso-banda y una banda-alta distintos. Algunas de las bandas pares podrían consistir de una señal de punto cuando se especifique, por ejemplo, que el filtro tiene una transmisión cero a una frecuencia específica. Sin embargo, algunas de esas bandas deben ser más importantes que otras; por lo tanto, diferentes cargas deben ser colocadas en diferentes bandas. Las bandas múltiples son asumidas para construir un subconjunto compacto de la banda de frecuencia $[0,0.5]$. El subconjunto compacto de \mathcal{F} en muchas aplicaciones es la unión de intervalos cerrados (correspondiente a bandas de frecuencia) y puntos de frecuencia discreta.

Problema de Aproximación para el Diseño de Fase-Lineal.

Para la realización del diseño se dan los siguientes puntos :

- Un subconjunto compacto \mathcal{F} de $[0,0.5]$.
- Una función deseada de valor-real $D(f)$, definida y continua en \mathcal{F} .
- Una función de carga positiva $W(f)$, definida y continua en \mathcal{F} .
- La forma de $A(f)$,

$$A(f) = Q(f) \sum_{k=0}^{r-1} c_k \cos(2\pi k f) \quad (5.109)$$

y se desea minimizar sobre c_k

$$\|E(f)\| = \max_{f \in \mathcal{F}} W(f) |D(f) - A(f)|$$

para elegir a $A(f)$.

A cada uno de los cuatro tipos de filtros de fase-lineal en la tabla 5.2 son descritos por la ec. 5.109, en donde por definición se tiene que

$$Q(f) = \begin{cases} 1 \\ \cos \pi f \\ \sin 2\pi f \\ \sin \pi f \end{cases} \quad (5.110)$$

Antes los coeficientes de $A(f)$ son encontrados, la respuesta impulso de el filtro puede ser determinada desde la simple relación en la tabla 5.2.

El problema tiene un estado, el cual minimiza la máxima desviación sobre un conjunto de frecuencias, es decir, es el problema de aproximación de Chebyshev para el diseño de filtros FIR. Este problema da directamente una caracterización del filtro óptimo en términos del teorema de alternación.

El estado del teorema de alternación es aquel en cual hay una única aproximación de chebyshev y que la (carga) de error de este filtro óptimo necesariamente tiene un carácter equiripple.

Teorema de Alternación.

Si $A(f)$ es una combinación lineal de r funciones coseno, esto es si

$$A(f) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k \cos(2\pi k f)$$

entonces una condición suficiente y necesaria es que $A(f)$ sea la única y mejor carga de aproximación de Chebyshev para dar una función continua $D(f)$ en \mathcal{F} es que la función de carga de error $E(f) = W(f) [D(f) - A(f)]$ exhiba por lo menos a $r + 1$ de

frecuencias extremas en \mathcal{J} . Esas frecuencias extremas son puntos de tal forma que $f_1 < f_2 < \dots < f_r < f_{r+1}$,

$$E(f_m) = -E(f_{m+1}) \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, r \quad (5.111)$$

y

$$E(f_1) = \max_{f \in \mathcal{J}} E(f) \quad (5.112)$$

La media del teorema de alternación que es la mejor aproximación de Chebyshev debe tener siempre una función de error.

5.4.- IMPLEMENTACIÓN DE FILTROS DE RESPUESTA-IMPULSO FINITO.

Cuando un filtro es implementado con una computadora o un hardware digital, la señal y los valores de coeficientes pueden ser no tan grandes y representados con una precisión arbitraria y una amplitud no limitada. Los números deben ser representados como miembros de un conjunto de valores finitos en un procesador digital. Hay distintos esquemas para la representación de números reales, pero principalmente de punto flotante y de punto fijo.

Los efectos de longitud de palabra finita deben ser divididos dentro de dos categorías diferentes.

- 1.- Errores en la representación de coeficientes como números finitos de punto-fijo. (El filtro actual no tiene los coeficientes correctos pero es lineal.)
- 2.- Errores dobles para las operaciones aritméticas de precisión-finita de adición, multiplicación y almacenaje. (Estos errores hacen a el filtro digital un sistema no lineal.)

5.4.1.- REPRESENTACIÓN DE LA SEÑAL DIGITAL.

El filtro digital requiere que la señal sea de amplitud discreta y de tiempo discreto. A la conversión desde el tiempo continuo al tiempo discreto es llamado muestra. La señal de tiempo discreto producida por una muestra es entonces convertida a una señal de amplitud discreta por un proceso llamado conversión analógico-digital (A/D).

Dos Complementos Aritméticos.

En la representación básica de un número binario del entero x se tiene

$$x = \sum_{n=0}^{B-1} b_n 2^n \quad (5.113)$$

los bits b_m , $m = 0, \dots, B-1$, son el 1 o el 0, por tal motivo reciben el nombre de binario. Los bits son escritos como $b_{B-1} \dots b_0$ en donde el bit b_{B-1} es llamado como el bit de mayor-orden o como el bit más-significativo.

Para el mapa del rango infinito de valores del número real x dentro de un rango finito, se valúa el valor del módulo $x \times 2^B$. Para cualquier resultado del rango de $1, \dots, 2^{B-1}$ es reducido para este rango por medio de una apropiada substracción de un múltiplo entero de 2^B .

Los número negativos son representados como las adiciones inversas de los números positivos. Por ejemplo, cuando el 1 es agregado para 2^B-1 , el resultado es 2^B , la cual es equivalente para cero en el módulo 2^B . De este modo, 2^B-1 es identificado como "-1". En el bit- B hay dos complementos aritméticos, que son los números que se encuentran arriba e incluyendo a $2^{B-1}-1$ representados como números positivos. Todos estos números tienen un bit de orden mayor de 0. Y el siguiente número, 2^{B-1} , es el número más negativo en los dos sistemas. Los números desde 2^{B-1} e incluyendo a 2^B-1 tienen un bit de orden mayor de 1 y representan a los números negativos. El círculo de 3 bits del complemento de dos números en la figura 5.18a muestra un módulo aritmético de 8. Las representaciones enteras para los números binarios son mostrados en el otro lado del círculo.

Fraciones.

Para un redondeo o truncamiento fácil, el camino usual para describirse y usar un punto fijo aritmético es con fracciones. Si los 3-bits grandes de números positivos están de la forma $3/4$, y el número más negativo como $4/4 = -1.000$, entonces el producto de cualquiera de los dos números es un número cuya magnitud es menor que o igual que 1. El bit de mayor orden es llamado como el bit de signo. Un voltaje v de valor real, entre $-V$

y $+V$ volts, está representado en dos complementos aritméticos por B bits con una parte fraccional

$$V(2^{-(B-1)}) \left(\sum_{n=0}^{B-2} b_n 2^n \right) \quad (5.114)$$

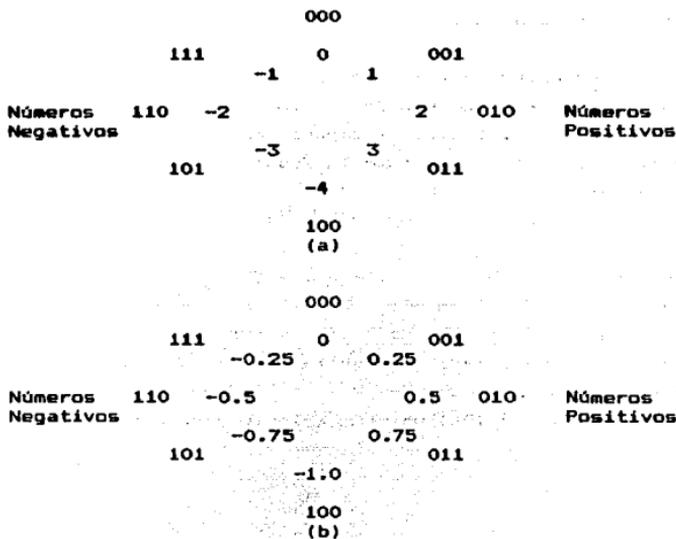


Figura 5.18. Círculo de 3-bits con dos números de complemento (a) números enteros y (b) números fraccionales.

como el valor cuantizado

$$[v]_Q = -Vb_{B-1} + \sum_{n=0}^{B-2} b_n 2^{-B+1+n} \quad (5.115)$$

en donde cada uno de los bits B , b_n , $n = 0, \dots, B - 1$, es cualquiera de los dos de 1 o 0. La figura 5.18 b muestra la representación fraccional para los 3-bits de los números. Por ejemplo, el bit de diseño 101 en la figura 5.18 b con un $b_0 = 1$, $b_1 = 0$ y $b_2 = 1$ representa el número

$$-1 + 2^{-2} + 0 = -0.75$$

Error de Cuantización.

La representación aproximada del número real v en la ec. 5.115, $[v]_Q$, debe ser uno de los posibles valores de 2^B de la fracción en la ec. 5.115. La separación entre valores adyacentes cuantizados, es conocido como la *Cuantización de tamaño de pie*, se expresa como

$$Q = V(2^{-(B-1)}) \quad (5.116)$$

Hay una relación no lineal entre v y $[v]_Q$ que depende en gran medida de la aproximación de v por medio de redondeo o truncamiento. Pero la relación entre el voltaje v y esta aproximación cuantizada se muestra en la figura 5.19 para una representación de 3 bits con $V = 1$, y que se usa para ambas figuras (5.19a y 5.19b) un truncamiento y un redondeo.

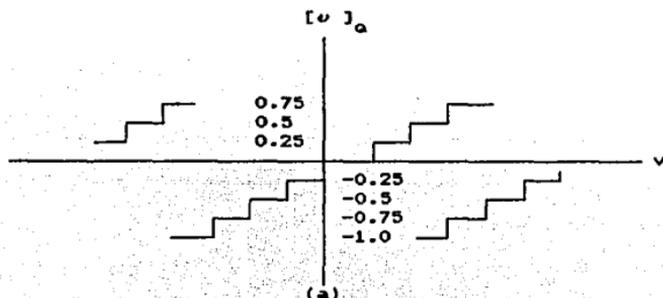


Figura 5.19. Cuantización con tres bits por truncamiento.

El valor máximo de $[v]_Q$ es $1 - Q = 0.75$, y el valor mínimo es -1.0 . El período natural de los dos tipos de complemento de un sobre comportamiento es representado como $-1V$ (ver figura 5.19a). Luego, la periodicidad mostrada en la figura 5.19 corresponde a el envolvimiento descrito en la conexión con la figura 5.18.

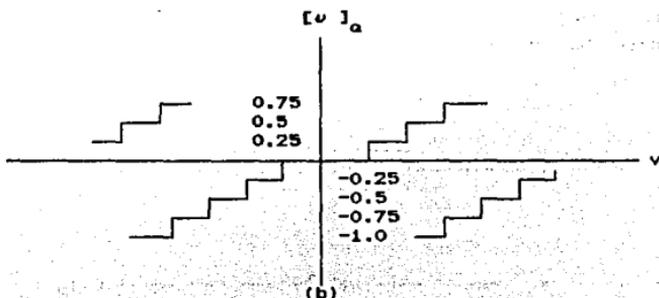


Figura 5.19. Cuantización con tres bits por redondeo.

La cuantización de una señal es una operación no lineal de memoria menor. Porque la entrada para un sistema no lineal de memoria menor, mostrada en la figura 5.20, es la señal de voltaje v , y la salida es la señal de cuantización $[v]_Q$. Aunque el proceso de cuantización es determinístico, la diferencia entre v y $[v]_Q$ es usualmente modelada como una variable aleatoria

$$n = [v]_Q - v \quad (5.117)$$

La señal cuantizada es considerada para ser la señal de prueba v con una suma de ruido de componente n , como se ve en la figura 5.20 b. El ruido de cuantización puede ser modelado como una variable aleatoria de distribución uniforme que es independiente de la señal v cuando el número de bits es

razonablemente largo, y el error es relativamente pequeño, y la señal es cambiada rápidamente de muestra a muestra.

Para el truncamiento, el error de cuantización n está entre 0 y Q y es modelada como una variable aleatoria de distribución uniforme con una media de valor $Q/2$. Para el redondeo, el error de cuantización o de ruido es modelada como una variable aleatoria de distribución uniforme con una media cero. La probabilidad de densidad asumida para el truncamiento y redondeo son mostradas en la figura 5.21.

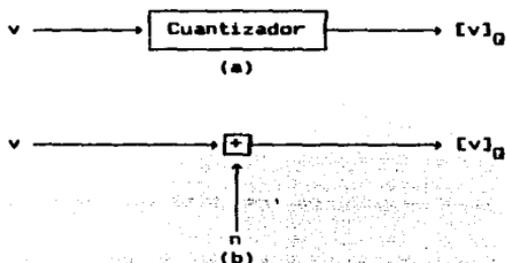


Figura 5.20. Modelo de cuantización de Ruido (a) No-lineal, (b) Modelo Lineal

La variancia de la variable aleatoria n está dada por

$$\sigma_n^2 = E(n - E(n))^2 \quad (5.118)$$

en donde $E(x)$ es el valor esperado de x . Por redondeo, el ruido tiene una media cero, $E(n) = 0$, y la variancia

$$\sigma_n^2 = \int \rho(u)u^2 du \quad (5.119)$$

usando la probabilidad de densidad $\rho(u)$, se muestra en la figura 5.21b, dada por

$$\sigma^2 = 1/Q \int_{-Q/2}^{Q/2} u^2 du = Q^2/12 \quad (5.120)$$

la variancia para el truncamiento es también de la forma $Q^2/12$.

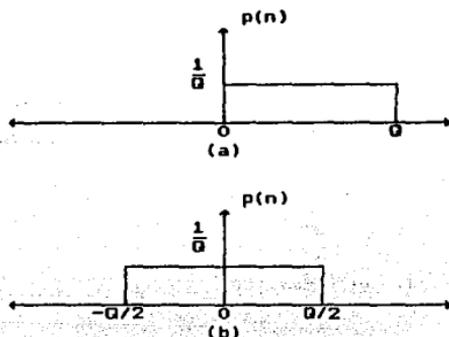


Figura 5.21. Densidades de Probabilidad (a) de truncamiento (b) de redondeo.

Los errores que se cometen en una conversión de una señal de amplitud-continua dentro de una representación discreta, debe ser evaluado en términos de un radio de señal a ruido (SNR). La señal debe ser escalada para el límite de posibilidad de sobre flujo con el uso de un factor de escala o un factor de ganancia G , como se ve en la figura 5.22. Un valor pequeño de G aseguraría que el sobre flujo nunca ocurriría, pero el SNR será reducido porque la cuantización del nivel de ruido es fijo y un valor pequeño de G reduce la componente de la señal. Si ocasionalmente el sobre flujo es permitido, entonces la componente de la señal será grande y así la SNR será no doblada. Este desaprovechamiento entre el sobre

flujo y la cuantización de ruido es siempre necesaria cuando se usa el punto fijo aritmético.

Con $V = 1$ en la ec. 5.115 la Cuantización de tamaño de pie, desde la ec. 5.116 es

$$Q = 2^{-B+1} \quad (5.121)$$

el ruido de variancia es

$$\sigma_n^2 = Q^2/12 = 2^{-2B}/3 \quad (5.122)$$

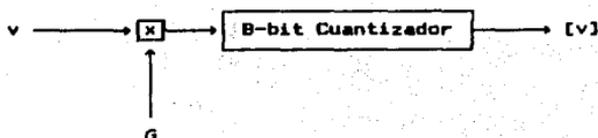


Figura 5.22. Escala de Señal.

El SNR es definido como

$$\text{SNR} = 10 \log [E\{(Gv)^2\} / \sigma_n^2] \quad (5.123)$$

usando los valores en la ec. 5.122, se obtiene

$$\text{SNR} = 10 \log [E\{(Gv)^2\}] - 10 \log [2^{-2B}/3] \quad (5.124)$$

$$\text{SNR} = 10 \log [E\{(Gv)^2\}] - 20B \log 2 + 4.77 \quad (5.125)$$

La SNR depende claramente de la señal estadística. Una hipótesis razonable, basada en el límite central del teorema (CLT), es que la señal es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y variancia σ^2 . Si G es elegida para ser

$$G = 1/4\sigma \quad (5.126)$$

la sobre carga sólo ocurrirá para 64 tiempos en un millón de muestras acordadas para la baja probabilidad Gaussiana. En otras palabras, la probabilidad que una variable aleatoria gaussiana cae con el rango de 4σ que es 0.999936. Substituyendo la ec. 5.126 en la ec. 5.125 da como resultado

$$\text{SNR} = 10 \log [1/16] + 6.02B + 4.77 \quad (5.127)$$

la cual es aproximadamente igual a

$$\text{SNR} \approx 6B - 7.3 \text{ dB} \quad (5.128)$$

El valor exacto de SNR depende de la elección de G . Un valor grande de G podría dar un valor grande de SNR pero no doblarse la probabilidad de sobre flujo. Inversamente, si G fuera reducido para un valor pequeñísimo en la ec. 5.126, la probabilidad de sobre flujo se reduciría, pero también el SNR sería reducido. Si la señal muestreada está gobernada por una baja probabilidad diferente, ligeramente los resultados serían diferentes. Una buena regla a manejar es para asumir que el SNR tendrá un valor de 6 dB/bit.

5.4.2. - ECUACIONES, ESTRUCTURAS Y PROGRAMAS.

Antes para tener el diseño de un filtro FIR se tenían que seguir algunas técnicas de aproximación del problema para resolverlo. Después, los coeficientes en el filtro de la función de transferencia tenían que ser calculados para tener sus especificaciones. La segunda parte del diseño del filtro digital era la realización del problema. La función de transferencia del filtro debe ser realizada como un pedazo del hardware digital o como un programa para implementar la relación de entrada/salida ampliada para la función de transferencia del filtro.

Para dar una función de transferencia hay diferentes caminos para implementar o programar el filtro digital. Estas implementaciones son representadas en forma de diagramas a bloque y son llamadas como *Estructura del Filtro*. Aquí se verán dos estructuras diferentes para los filtros digitales FIR y relacionar estas estructuras con programas de lenguaje ensamblador para implementar el filtro.

Varios factores entran en la selección de una estructura para una aplicación en particular. Una estructura debe ser preferida sobre otra porque ésta es fácil de programar en una computadora o en un chip de procesador de señal. Una estructura debe ser menos sensitiva a los errores en los coeficientes, y además debe tener el mínimo ruido introducido por la cuantización de la señal.

En esta sección se relaciona la función de transferencia del filtro, las ecuaciones para el cálculo de la salida a partir de la entrada, diagramas a bloques, y programas para un chip digital que procese la señal. Uno de los filtros digitales simples es el filtro FIR de longitud 3 con una función de transferencia

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} \quad (5.129)$$

la ecuación que provoca la salida es la de convolución

$$y(n) = h_0 x(n) + h_1 x(n-1) + h_2 x(n-2) \quad (5.130)$$

La estructura indicada por el diagrama a bloque en la figura 5.23 ilustra el cálculo directo de la ec.5.130 y es llamada como la *Estructura Directa*.

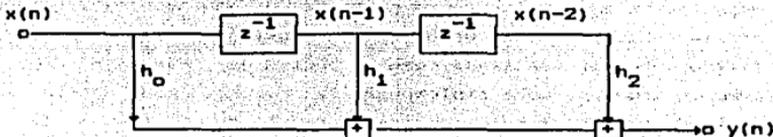


Figura 5.23. Estructura Directa no recursiva.

Las etiquetas de las cajas z^{-1} en la figura 5.118 una muestra unitaria de retraso. El valor $x(n-1)$ es una versión del retraso de $x(n)$. Si el filtro está implementado con una línea de retraso medido, el z^{-1} corresponde a un elemento físico de retraso. Sin embargo, cuando el programa de una computadora digital es escrito para implementar la ec.5.130, las etiquetas de las cajas z^{-1} corresponde a una memoria de las variables antes que cualquier retraso. Este programa es ilustrado en la figura 5.24, en donde las instrucciones del lenguaje ensamblador para el chip TMS32010 son mostradas. El programa asume que la presente entrada de $x(n) = XN$ y las dos más recientes entradas $x(n-1) = XN1$ y $x(n-2) = XN2$ son cargadas en memoria.

NEXT	IN	XN,ADD	Leer la entrada $x(n)$ desde un convertidor A/D
LT	XN2		Cargar el registro temporalmente con $x(n-2)$
MPY	H2		Multiplicar a $x(n-2)$ por h_2
PAC			Cargar a $h_2x(n-2)$ en el acumulador
LT	XN1		Cargar el registro temporalmente con $x(n-1)$
DMOV	XN1		Mover a $x(n-1)$ a la localización XN2
MPY	H1		Multiplicar a $x(n-1)$ por h_1
APAC			Agregar a $h_1x(n-1)$ al acumulador
LT	XN		Cargar el registro temporalmente con $x(n)$
DMOV	XN		Mover a $x(n)$ a la localización XN1
MPY	H0		Multiplicar a $x(n)$ por h_0
APAC			Agregar a $h_0x(n)$ al acumulador
SACH	YN,1		Guardar el contenido del acumulador
OUT	YN,DAC		Poner a $y(n)$ de salida para un convertidor D/A
CALL	WAIT		Esperar la siguiente entrada
B	NEXT		Regresar y conseguir la entrada siguiente $x(n)$

Figura 5.24. Código de Ensamble para la estructura directa.

La etiqueta z^{-1} de los bloques de la figura 5.24 corresponden a las instrucciones DMOV XN1 y DMOV XN, las cuales cambian el dato antes de que se use. El código de la figura 5.24 es presentado para explicar como se implementa una estructura directa. Un programa corto y rápido puede ser escrito para usar una instrucción especial (LTD), la cual realiza las operaciones de las tres instrucciones de APAC, LT y DMOV.

Existe otra estructura llamada como *La Estructura Transpuesta* porque la forma de matriz es la transpuesta de la figura 5.23, que implementa exactamente la relación entrada/salida de la muestra de la ec. 5.130. Un diagrama a bloques de la estructura transpuesta es mostrada en la figura 5.25.

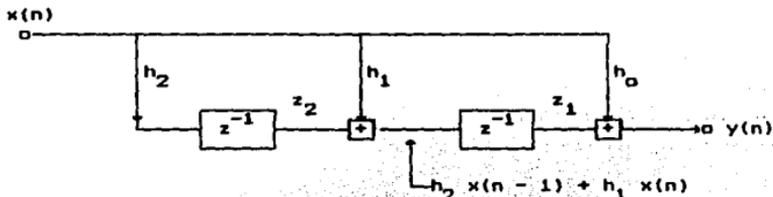


Figura 5.25. Estructura Transpuesta no recursiva.

La estructura de la figura 5.25 guía a un programa diferente para la salida del filtro. El código correspondiente de la estructura transpuesta es mostrado por el chip TMS32010 en la figura 5.26.

NEXT	IN	XN,ADC	Leer la entrada x(n) desde un convertidor A/D
LT	XN		Cargar el registro temporalmente con x(n)
MPY	H0		Multiplicar x(n) por h0
LAC	Z1,Z5		Cargar a Z1 en el acumulador alto
APAC			Ahora a (h0 x(n) + z1) ponerlo en el acumulador
SACH	YN,Z1		Almacenar a (h0 x(n) + z1) en YN
MPY	H1		Multiplicar x(n) por h1
LAC	Z2,Z5		Cargar a z2 en un acumulador alto
APAC			Ahora a (h1 x(n) + z2) ponerlo en el acumulador
SACH	Z1,Z1		Almacenar a (h1 x(n) + z2) en z1
MPY	H2		Multiplicar x(n) por h2
PAC			Ahora a h2 x(n) ponerlo en el acumulador
SACH	Z2,Z1		Almacenar a h2 x(n) en z2
OUT	YN,DAC		Mandar a salida a Y(n) a un convertidor D/A
CALL	WAIT		Esperar la siguiente entrada
B	NEXT		Regresar y conseguir la siguiente entrada x(n)

Figura 5.26. Código de Ensamble para la estructura transpuesta.

El retraso de los bloques en la figura 5.25 corresponden a las instrucciones SACH Z1 y SACH Z2 en la figura 5.26. Los programas de las dos estructuras tienen el mismo número de instrucciones y toman el mismo tiempo de ejecución. Sin embargo, la estructura directa puede tomar una mejor ventaja por la instrucción especial de LTD y tiene un ruido menor de cuantización; que lo preferido para los filtros FIR.

5.4.3.- EFECTOS DE LONGITUD-PALABRA FINITO EN LA IMPLEMENTACIÓN DEL FILTRO.

Las dos estructuras (directa y transpuesta) son no recursivas en la implementación de un filtro FIR. Pero ahora se verá las dos categorías de los efectos de longitud-palabra finito en filtros no recursivos. Esto es, los errores introducidos por la cuantización de los coeficientes del filtro y analizar como la adición de un error de sistema para el sistema ideal con coeficientes no cuantizados.

Coefficiente de Cuantización.

Los coeficientes dentro del filtro no recursivo debe ser cuantizado para B_1 bits. En vez, de implementar la ec. 5.130, el filtro implementado actual será

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} [h(m)]_Q x(n-m) \quad (5.131)$$

en donde $[h(m)]_Q$ representa el coeficiente cuantizado del filtro.

La respuesta de frecuencia con el coeficiente cuantizado $\tilde{H}(f)$ debe ser visto como la suma de la respuesta ideal (no cuantizada) y la respuesta de frecuencia de un error de sistema es $H_e(f)$.

$$\tilde{H}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) \text{Exp}(-j 2\pi f m) + \sum_{m=0}^{N-1} ([h(m)]_Q - h(m)) \text{Exp}(-j 2\pi f m) \quad (5.132)$$

$$\tilde{H}(f) = H(f) + H_e(f). \quad (5.133)$$

El valor máximo de la respuesta de el error de sistema está dado por la desigualdad

$$|H_e(f)| \leq N \max |([\lambda(m)]_Q - \lambda(m))| \quad (5.134)$$

cuando los coeficientes son redondeados para B_1 bits, se tiene

$$|H_e(f)| \leq N 2^{-B_1} \quad (5.135)$$

La adición del error de sistema debe limitar la atenuación en el filtro de banda-alta. Por ejemplo, el error de sistema debe permitir adicionar la señal de transmisión en la banda-alta deseada. Desde la ec. 5.135 se encuentra la transmisión máxima posible de banda-alta, en dB, para ser llevado por

$$20 \log_{10} |H_e(f)| \leq 20 \log_{10} (N 2^{-B_1}) \quad (5.136)$$

desde que $20 \log_{10} (2) \cong 6$, esto lleva a la simplificación

$$20 \log_{10} N + 20 \log_{10} (2^{-B_1}) = 20 \log_{10} N - 6B_1 \text{ dB} \quad (5.137)$$

para que de la siguiente expresión

$$20 \log_{10} |H_e(f)| \leq 20 \log_{10} N - 6B_1 \text{ dB} \quad (5.138)$$

en donde B_1 es el número de bits usado para representar los coeficientes del filtro con una longitud N . Por ejemplo, con un filtro de coeficientes de 16 bits en una longitud de 100 ($N = 100$, $B_1 = 16$), la ec. 5.138 muestra que $H_e(f)$ debe ser tan grande como -56 dB.

Escalamiento y Sobre Carga.

La implementación directa de un filtro no recursivo de logitud 3 es mostrado en la figura 5.27. La figura tiene la misma estructura como en la figura 5.23, sin embargo, este debe ser redibujado para recalcar la salida de la señal acumulada. La salida del filtro de tiempo n esta dada por

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n - m) \quad (5.139)$$

cuando la entrada $x(n)$ y la respuesta de pulso-unitario $h(n)$ tiene magnitudes menores o iguales que la unidad, la magnitud de $y(n)$ en la ec. 5.139 es saltada por

$$|y(n)| \leq \sum_{m=0}^{N-1} |h(m)||x(n - m)| \quad (5.140)$$

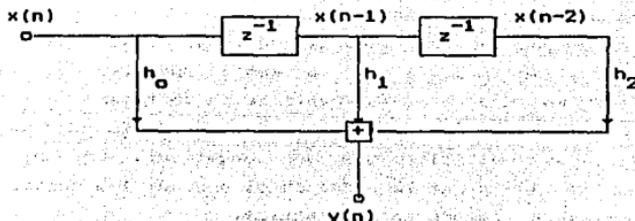


Figura 5.27. Implementación directa de un filtro no recursivo.

para una entrada con más de una magnitud unitaria, el posible valor grande de la salida de tiempo n ocurre cuando

$$x(n - m) = \text{sgn}[h(m)] \quad (5.141)$$

en el peor de los casos

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} |h(m)| \quad (5.142)$$

esta ecuación es conocida como la norma l_1 de h :

$$\|h\|_1 = \sum_n |h(n)| \quad (5.143)$$

si las muestras de la respuesta de pulso-unitario son todas divididas por el factor de escala

$$G = \|h\|_1 \quad (5.144)$$

para dar la respuesta de pulso-unitario escalada

$$\tilde{h}(n) = h(n)/G \quad (5.145)$$

entonces la magnitud máxima de salida del filtro escalado será menor que o igual que la unidad y la sobre carga será completamente eludida.

Este límite en el peor de los casos tiende a ser conservativo por dos razones. La primera, desde que la señal positiva de valor grande es $1 - Q$, en donde Q es la cuantización de tamaño de pie, porque la ec. 5.142 no puede ser obtenida para todos los no menores coeficientes del filtro que son negativos. En segundo, esto es no muy semejante que la señal en el peor de los casos, la ec. 5.141, ocurriera siempre en la práctica.

Se puede calcular el factor de ganancia para usar cualquiera de las dos medidas adicionales del tamaño de $h(n)$ para dar una regla menos conservativa de la escala. Pero para ambas medidas de ganancia están basadas en normas de la respuesta pulso-unitario de h . La norma l_2 de h es

$$\|h\|_2 = \left[\sum_n |h^2(n)| \right]^{1/2} \quad (5.146)$$

es siempre menor que o igual que la norma l_1 de h .

Si $G = \|h\|_1$, entonces la señal de salida de la figura 5.27 está garantizada de no ser un sobre-flujo. Después, la norma l_2 de h es menor que o igual que la norma l_1 de h cuando $G = \|h\|_2$ es usado, los resultados de los valores grandes de la respuesta pulso-unitario y la salida SNR son mejoradas. Esta mejoría del SNR llega a costar la posibilidad de un sobre flujo. El elegir la ganancia de $G = \|h\|_1$ sólo garantiza que la respuesta esté en un estado-estable del sistema para una onda seno que no tendría un sobre-flujo. Las señales trascendentes deben causar sobre-flujo. Sin embargo, la escala de medida en el dominio de la frecuencia es fácil de interpretar que las otras dos normas y está antes que el preferido método para el cálculo de factores de la escala.

Ruido de Cuantización.

En la figura 5.27 es una buena práctica para acumular la suma en doble precisión, y reduciendo a la longitud-palabra original en sólo un proceso adicional o de almacenaje de la salida $y(n)$. Si una acumulación de doble precisión no es ejecutada, los errores de cuantización se introducirían cuando el bit de menor orden sea descartado. La señal cuantizada $y_Q(n)$ es una aproximación a $y(n)$ fuera de la señal de cuantización.

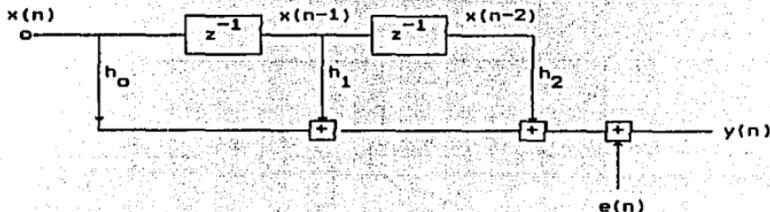


Figura 5.28. Implementación Directa de un Filtro no recursivo con Ruido de Cuantización

En la figura 5.28 el error de cuantización o ruido es

$$e(n) = y_Q(n) - y(n) \quad (5.148)$$

está demostrado para la salida correcta de $y(n)$. Si se usa la precisión de la señal, habrá dos orígenes del ruido de cuantización.

El ruido de cuantización puede ser modelado como una distribución uniforme, de variables aleatorias independientes que son independientes de la señal $y(n)$ cuando el número de bits son razonablemente grandes, y el error es relativamente pequeño, y la señal es elegida rápidamente de muestra a muestra. Este error puede ser analizado por el mismo camino del coeficiente de cuantización, pero es fácil de entender el efecto del error de cuantización en la figura 5.28, porque esto ocurre a la salida del filtro y es representado como un origen externo de ruido-blanco con variancia

$$\sigma_n^2 = 2^{-2B}/3 \quad (5.149)$$

Sin embargo, cuando el filtro es implementado en la estructura transpuesta de la figura 5.25, el ruido de cuantización es introducido dentro del filtro con la variable z^{-1} . Entonces, para la estructura transpuesta hay dos orígenes del ruido de cuantización, como se muestra en la figura 5.29.

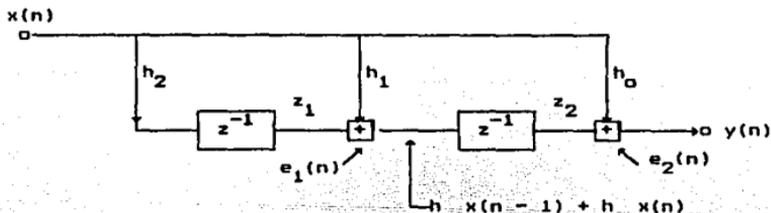


Figura 5.29. Ruido de Cuantización en la Estructura Transpuesta.

Porque el origen extra del ruido de cuantización en la estructura transpuesta, es la forma directa más recomendada para los filtros no recursivos.

Existen otras estructuras más de filtros FIR. Por ejemplo, la función de transferencia puede ser factorizada, y el resultado corto de la sección del filtro puede ser cascado. Cuando los coeficientes del filtro tienen cierta simetría, como el hacer filtros de fase-lineal, la estructura especial debe ser apropiada.

5.4.4- EJEMPLO DE DISEÑO.

El siguiente ejemplo de diseño es un procedimiento paso a paso para el diseño de un filtro paso-baja. Primero, se introducen las especificaciones para el diseño del programa. Después se calculan los coeficientes, y la escala es ejecutada para prevenir un sobre-flujo. Finalmente se escribe un programa en lenguaje ensamblador del chip TMS32010 para implementar el filtro, usando la estructura directa de la figura 5.23.

Paso 1.- El primer paso en el diseño es decidir las especificaciones del filtro. Para este ejemplo las especificaciones son las de un filtro paso-baja con una longitud de 21. Y estas especificaciones y la salida del programa son iguales a la de la figura 5.30 por conveniencia.

Paso 2.- El siguiente paso es decidir el tipo de estructura que se usará en la implementación del filtro. Para este ejemplo, se decidió usar la estructura directa, porque es más fácil implementar las instrucciones especiales de multiplicar/acumular en el chip TMS32010. Para este filtro pequeño se debería hacer un programa pequeño con efectos de cuantización, si los coeficientes de 16 bit son usados para 32 bits y acumular la suma de salida.

Respuesta impulso finito (FIR)
 Diseño del filtro digital de fase lineal
 de selección de algoritmo del filtro pasabanda

Filtro de longitud igual a 21

***** respuesta impulso *****
 h(1) = 0.18255439e-01 = h(21)
 h(2) = 0.55136755e-01 = h(20)
 h(3) = -0.40910728e-01 = h(19)
 h(4) = 0.14930855e-01 = h(18)
 h(5) = 0.27568584e-01 = h(17)
 h(6) = -0.59407797e-01 = h(16)
 h(7) = 0.44841841e-01 = h(15)
 h(8) = 0.31902660e-01 = h(14)
 h(9) = -0.14972545e-01 = h(13)
 h(10) = 0.25687239e-01 = h(12)
 h(11) = 0.69994062e-01 = h(11)

	banda 1	banda 2
margen de banda baja	0.	0.3700000
margen de banda alta	0.3300000	0.5000000
valor deseado	1.0000000	0.
carga	1.0000000	1.0000000
desviación	0.0988697	0.0988697
desviación en Db	0.8189238	-20.0987320

Figura 5.30. Especificaciones para el diseño del filtro FIR.

Paso 3.- En la siguiente escala los coeficientes de respuesta pulso-unitario deben ser limitados al sobre-flujo. Por tal, motivo una escala debe hacerse bien. Entonces, si una escala de coeficientes pequeños del filtro son lo bastante bien calculados nunca existirá un sobre-flujo, y la salida de la señal a un radio de ruido de cuantización será pequeño, que para otra escala estratégica. Lo cual permitiría un sobre-flujo ocasional, si es usado. Las normas de l_1 y l_2 son calculadas para este ejemplo y son

$$l_1 = 2.09905, \quad y \quad l_2 = 0.831802$$

y entonces se espera un pequeño problema desde el ruido de cuantización, pero se usará la estrategia de la escala más conservadora, para garantizar que el sobre-flujo nunca ocurra. Porque todos los coeficientes son divididos por la norma l_1 para dar la escala de respuesta de pulso-unitario listada en la figura 5.31. Para asegurar que la respuesta de frecuencia es aceptable con los coeficientes cuantizados, uno debe planear esto y comparar esto con la respuesta desde los coeficientes no cuantizados.

Escala del Coeficiente l_1

	Decimal		Hexa
h_1	= 0.008697	=	011D
h_2	= 0.026267	=	035D
h_3	= -0.019490	=	FDB2
h_4	= 0.007113	=	00E9
h_5	= 0.013134	=	01AE
h_6	= -0.028302	=	FC62
h_7	= 0.021363	=	02BC
h_8	= 0.015199	=	01F2
h_9	= -0.071330	=	F6DF
h_{10}	= 0.122376	=	0FAA
h_{11}	= 0.333457	=	2AAF

Figura 5.31. Escala de coeficientes para el ejemplo de diseño.

Paso 4. - Finalmente se escribe un programa de lenguaje ensamblador para la implementación directa no recursiva del filtro. Como el programa mostrado en la figura 5.26.

FILTRO DE RESPUESTA-IMPULSO INFINITO (IIR).

5.5- PROPIEDADES DEL FILTRO DE RESPUESTA INFINITO.

El filtro digital con una respuesta impulso de duración infinita (IIR) tiene características que lo hacen útil en muchas aplicaciones.

Porque de la retroalimentación necesaria en una implementación, el filtro de respuesta impulso infinito (IIR) es también llamado como un filtro recursivo, o algunas veces, como un filtro de movimiento-promedio autoregresivo (ARMA). En contraste con el filtro FIR y su función de transferencia polinomial, el filtro (IIR) tiene una función de transferencia racional. La función de transferencia tendrá un radio de medias polinomiales, y esto tiene polos finitos como también ceros, y el dominio de la frecuencia en el diseño del problema llegará a ser una función racional a la aproximación del problema en contraste al el polinomio de aproximación para el filtro FIR.

La definición entre la relación de la entrada y salida de variables para los filtros IIR esta dada por

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N \alpha(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^M b(k)x(n-k) \quad (5.150)$$

La segunda sumatoria en la ec. 5.150 es exactamente el mismo movimiento-promedio del más presente del pasado de los valores M de la entrada que ocurre en la definición del filtro FIR. La diferencia proviene desde la primera sumatoria, la cual es una suma de carga de los valores previos N de salida. Está es la retroalimentación o parte recursiva que causa la respuesta a una entrada impulso teóricamente para continuar siempre. El cálculo de cada una de las salidas del término $y(n)$ desde la ec. 5.150 requiere de $N + M + 1$ multiplicaciones y $N + M$ sumas. Otros algoritmos o estructuras para calcular $y(n)$ debe requerir más o menos cálculos aritméticos.

Como en el caso del filtro FIR, la salida de un filtro IIR puede ser calculado por medio de convolución.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (5.151)$$

En este caso la duración de la respuesta impulso $h(n)$ es infinita, y por eso, el número de términos en la ec. 5.151 es infinita. Las operaciones $N + M + 1$ requeridas en la ec. 5.150 son claramente preferibles para el número infinito requerido por la ec. 5.151.

5.5.1. FÓRMULAS DE LOS FILTROS IIR EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

La función de transferencia de un filtro es definido como el ratio $Y(z)/X(z)$, en donde $Y(z)$ y $X(z)$ son la transformada z de la salida $y(n)$ y la entrada $x(n)$ respectivamente. Esto es también la transformada z de la respuesta impulso. Usando la definición de la transformada z , se obtiene la función de transferencia del filtro IIR definido en la ec. 5.150

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (5.152)$$

esta función de transferencia es también el ratio de la transformada z de los términos $a(n)$ y $b(n)$.

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b(n)z^{-n}}{\sum_{n=0}^M a(n)z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (5.153)$$

La respuesta de frecuencia del filtro, es encontrada por medio de $z = \text{Exp}(j\omega)$, la cual es dada por la ec. 5.152 de la forma

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\text{Exp}(-jn\omega) \quad (5.154)$$

esta forma de la ec. asume una medida de $T = 1$. Para simplificar la notación, se usa a $H(\omega)$ antes que $H(\text{Exp}(j\omega))$ para denotar la respuesta de frecuencia.

Esta respuesta de frecuencia de la función es un valor complejo y consiste de una magnitud y fase. Siempre se debe pensar que la respuesta impulso es una función de la variable discreta n , que la respuesta de frecuencia de una función de frecuencia continua de una variable ω y que es periódica con un período de 2π , como en el caso de los filtros FIR.

Para cualquier caso del filtro FIR, exactamente la fase lineal es imposible para el filtro IIR. Como se mostró en los casos del filtro FIR, la fase lineal es equivalente a la simetría de la respuesta impulso. De tal forma, esta equivalencia es imposible para el filtro IIR con una respuesta impulso que es cero para $n < 0$ y no es cero para una n que tiende a infinito.

El filtro FIR de fase lineal permite un removimiento de la fase desde el diseño de proceso. El resultado del problema está valuado para un valor real, para el problema de aproximación requiriéndose la solución de las ecuaciones lineales. El diseño del problema para un filtro IIR es más complicado. Porque la fase lineal no es posible y las ecuaciones para ser resueltas son no lineales. La técnica más común es por medio de una aproximación de magnitud de la función de transferencia y da a la fase que tomar atención de sí misma. Si la fase es importante, esto llegará a ser parte del problema de aproximación, la cual es entonces muy difícil de resolver.

5.5.2.- CÁLCULO DE LA RESPUESTA DE FRECUENCIA DE UN FILTRO IIR.

Como se vió anteriormente existe una L de espacios de muestras iguales de $H(\omega)$ que puede ser calculada por medio de una DFT de longitud L de $h(n)$ dada en la ec. 5.154. Sin embargo no es semejante para el filtro FIR, porque esto requiere que la respuesta impulso de longitud infinita sea truncada para la menor longitud L . Una alternativa más satisfactoria es usar la DFT para evaluar el numerador y denominador separadamente de la ec.

5.153 antes de que se evalúe aproximadamente a la ec. 5.152. Esto se hace por medio de $L - N$ ceros para la $a(n)$ y un $L - M$ ceros para la $b(n)$ desde la ec. 5.150 y por medio de una DFT de longitud L se obtiene la siguiente ecuación.

$$H(2\pi k/L) = \frac{\text{DFT}\{b(n)\}}{\text{DFT}\{a(n)\}} \quad (5.155)$$

en donde la división es una buena división de cada uno de los valores L de la DFT como una función de k . Este método directo de cálculo es un técnica directa y flexible que no implica un truncamiento de $h(n)$ y que no resulte un error. Siempre que un espacio no uniforme de una frecuencia muestral puede ser conseguida por la alternativa de DFT definida en la ec. 5.34 como estaba sujeta para el filtro FIR. Porque los filtros IIR son generalmente más bajos en orden que los filtro FIR, el uso directo de la DFT es usualmente bastante eficiente, y el uso de la FFT no es necesario. Por lo tanto, $a(n)$ y $b(n)$ no tienen simetría de la $h(n)$ de FIR, y la DFT no puede ser de tipo real, por tal motivo algunas de las técnicas de la sección 5.2.2 no son aplicables.

Un ejemplo del plano de respuesta de frecuencia de una función elíptica de tercer orden, de un filtro paso-baja con una función de transferencia está dada en la siguiente ecuación.

$$H(z) = \frac{z^3 + 1.07669z^2 + 1.07669z + 1}{z^3 - 0.84315z^2 + 0.90535z - 0.25211}$$

factorizando

$$H(z) = \frac{(z + 1)(z^2 + 0.07669z + 1)}{(z - 0.34361)(z^2 - 0.49954z + 0.73370)} \quad (5.156)$$

5.5.3. - LOCALIZACIÓN DE POLOS Y CEROS PARA LOS FILTROS IIR.

Para el filtro IIR existen los polos así como los ceros. Para más aplicaciones de los coeficientes $a(n)$ y $b(n)$ que son reales, y por tal motivo los polos y ceros ocurren en pares de complejos-conjugados, o son de tipo real. Un filtro es estable si, para cualquier salto de entrada, existe un salto de salida. Esta estabilidad implica que los polos de la función de transferencia deban ser estrictamente del tamaño de un círculo unitario del plano complejo z . Una importante característica de cualquier tipo de diseño, es que existe la garantía de que el diseño es estable, y una habilidad importante en el análisis de un filtro dado es la determinación de estabilidad. Para un análisis de un filtro lineal, la determinación de la estabilidad involucra los ceros del denominador polinomial de la ec. 5.153. La localización de los ceros del numerador, los cuales son los ceros de $H(z)$, son importantes para la realización del filtro, pero estos ceros no tienen efecto en la estabilidad.

Si todos los ceros y polos de una función de transferencia están dentro o en un círculo unitario del plano z el filtro es llamado de *fase mínima*. Los efectos en la magnitud de la función de transferencia de un polo o un cero a un radio r desde el origen del plano z son exactamente los mismos como un polo o un cero en el mismo ángulo pero con un radio de la forma $1/r$. Sin embargo, el efecto en la fase es diferente. Porque sólo los filtros estables son generalmente usados en la práctica, debido a que todos los polos deben estar adentro del círculo unitario. Para dar una respuesta de magnitud existen dos posibles localizaciones para cada cero que no este dentro del círculo unitario. La localización de los polos y ceros del ejemplo de la ec.5.156 están dados en la figura 5.32.

De tal forma, la evaluación de la respuesta de frecuencia de una función de transferencia es la misma que la evaluación de $H(z)$ alrededor del círculo unitario en el plano z .

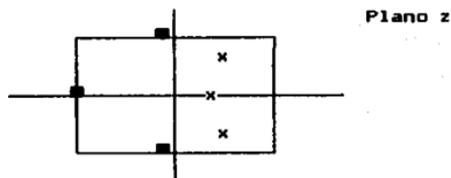


Figura 5.32. Localización del polo y cero para un filtro IIR de tercer orden.

5.6. - DISEÑO DE UN FILTRO DE RESPUESTA-IMPULSO INFINITO.

El diseño de un filtro digital es usualmente especificado en términos de las características de las señales para ser pasadas por medio del filtro. En varios casos las señales son descritas en términos de su contenido frecuencial.

El diseño básico del filtro IIR es de la misma forma que para el filtro FIR.

- 1.- Elegir una respuesta deseada, usualmente en el dominio de la frecuencia.
- 2.- Elegir un filtro de clase permitido - en este caso, un filtro IIR de orden N .
- 3.- Establecer una distancia de medida entre la respuesta deseada y la respuesta actual de un miembro de la clase permitida.
- 4.- Desarrollar un método para encontrar el mejor filtro permitido como una medida para cerrar la respuesta deseada.

Se desarrollarán distintos métodos prácticos para el diseño de filtro IIR, estos métodos están basados en la conversión de Butterworth, Chebyshev I y II, y una función elíptica de impulso-invariante y una transformación bilineal.

5.6.1. APROXIMACIÓN DE LA FUNCIÓN RACIONAL.

El problema matemático inherente en el dominio de la frecuencia del diseño del filtro, es la aproximación de una función compleja deseada para la respuesta de la frecuencia de $H_d(z)$ por una función de transferencia racional de $H(z)$ con un numerador de grado M y un denominador de grado N para los valores de la variable compleja z análogo al círculo unitario de $z = \text{Exp}(j \omega)$. Esta aproximación es conseguir por un error mínimo la medida entre $H_d(\omega)$ y $H(\omega)$.

Para el diseño del filtro digital, las matemáticas son complicadas por la aproximación definida en un círculo unitario. En términos de z , la frecuencia es una variable de coordenada polar. Esto es a menudo mucho más fácil y claro para la formulación del problema, tal que la frecuencia es una variable de coordenada rectangular, la cual es el camino natural para el uso de filtros analógicos usando la variable compleja de Laplace s . Una selección particular de la variable compleja que convierte la variable de coordenada polar a una variable de coordenada rectangular es la transformación bilineal.

$$z = \frac{1 - s}{1 + s} \quad (5.157)$$

Hay dos razones por las que el proceso de aproximación son a menudo formuladas en términos del cuadrado de la magnitud de la función de transferencia antes que en términos de las partes real y/o imaginario de la función de transferencia compleja o en términos de la magnitud de la función de transferencia. La primera razón es que el cuadrado de la magnitud de la respuesta de frecuencia de la función es analítica, función de valor real o variable real, y esto simplifica considerablemente el problema de encontrar una mejor solución. La segunda razón es que los efectos de la señal o interferencia son a menudo estados en términos de la

energía o poder, la cual es proporcional al cuadrado de la magnitud de la señal o ruido.

Para moverse hacia atrás y adelante entre la función de transferencia $F(s)$ y el cuadrado de la magnitud de la respuesta de frecuencia $|F(j\omega)|^2$, se define una función intermedia, la función analítica de valor complejo de la variable compleja s de la siguiente forma

$$\mathcal{F}(s) = F(s)F(-s) \quad (5.158)$$

la cual es relacionada con el cuadrado de la magnitud por

$$\mathcal{F}(s) \Big|_{s=j\omega} = |F(j\omega)|^2 \quad (5.157)$$

si

$$F(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

entonces

$$\begin{aligned} |F(j\omega)|^2 &= R(\omega)^2 + I(\omega)^2 \\ &= (R(\omega) + jI(\omega))(R(\omega) - jI(\omega)) \\ &= F(s)F(-s) \Big|_{s=j\omega} \end{aligned}$$

En este contexto la aproximación es arribada en términos de $F(j\omega)$ y el resultado es una función analítica $\mathcal{F}(s)$, la cual es la función de transferencia del filtro deseado en términos de la variable rectangular s . Se puede definir una función comparable en términos de la función de transferencia digital, usando la variable polar z por medio de la siguiente ecuación

$$\mathcal{X}(z) = H(z)H(1/z) \quad (5.160)$$

la cual da la magnitud al cuadrado de la respuesta de frecuencia cuando se evalúa alrededor del círculo unitario que es $z = \text{Exp}(j\omega)$.

5.6.2. - APROXIMACIÓN CLÁSICA DEL FILTRO ANALÓGICO PASO-BAJA.

Los tres filtros básicos de aproximación son considerados para ser estándar. Son a menudo desarrollados y presentados en términos de un filtro normalizado paso-baja, que pueden ser modificados para dar otras versiones, así como filtros paso-alta o paso-banda. Estas tres formas usan una aproximación de las series de Taylor y de Chebyshev en varias combinaciones. Ninguno es definido en términos de una media cuadrática de error medido. Aunque, esto sería un interesante criterio de error, la razón es que no existe la solución para la aproximación de error LS, en la cual es no lineal para el filtro IIR.

En las tres aproximaciones clásicas, se desarrollan en términos de la transformada de la Laplace de la variable s . Y así, se pueden usar como prototipo de filtros para convertirse en filtros digitales o para usarlos en el diseño de filtros analógicos.

La respuesta de frecuencia deseada de un filtro IIR paso-baja es expresado en términos de la magnitud cuadrada de la función de transferencia, la cual es una función de $s = j\omega$, ilustrada en la figura 5.33

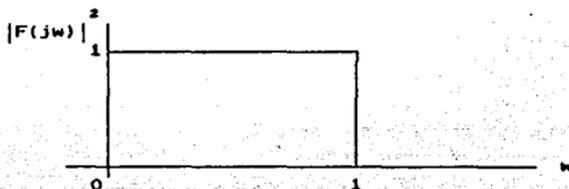


Figura 5.33. Respuesta de frecuencia deseada de un filtro ideal paso-baja.

El filtro de Butterworth usa una aproximación de la serie de Taylor para el filtro ideal para ambos casos de $\omega = 0$ y

$\omega = \alpha$. El filtro de Chebyshev usa una aproximación (mínima-máxima) de Chebyshev cruzada a el paso-banda y a una serie de Taylor de $\omega = \alpha$. El filtro de función elíptica usa una aproximación de Chebyshev cruzada para el paso-banda y el paso-alta.

Propiedades del Filtro Butterworth.

La medida de la aproximación es el número de términos en la expansión de la serie de Taylor de la respuesta de frecuencia actual que puede ser hecha de la misma forma que para la respuesta de frecuencia ideal. Para la solución óptima debe de tener el número máximo de términos iguales. Las series de Taylor es una expansión de las series de una función en la forma siguiente

$$F(\omega) = K_0 + K_1\omega + K_2\omega^2 + K_3\omega^3 + \dots,$$

en donde

$$K_0 = F(0), \quad K_1 = dF(\omega)/d\omega \Big|_{\omega=0},$$

$$K_2 = (1/2) (d^2F(\omega)/d\omega^2) \Big|_{\omega=0},$$

y entonces con los coeficientes de las series de Taylor serán proporcional a varias de las derivadas de N orden de $F(\omega)$ evaluadas para $\omega = 0$. Una característica básica de este aprovechamiento es que la aproximación es realizada toda en un punto. La habilidad de este aprovechamiento para dar buenos resultados sobre un rango de frecuencias depende de las propiedades analíticas de la respuesta.

La forma general de la respuesta de magnitud cuadrática es una función par de ω , y por lo tanto, es una función de ω^2 expresada como

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{d_0 + d_2\omega^2 + d_4\omega^4 + \dots + d_{2M}\omega^{2M}}{c_0 + c_2\omega^2 + c_4\omega^4 + \dots + c_{2N}\omega^{2N}} \quad (5.161)$$

Para obtener una solución que es la del filtro paso-baja, se debe realizar la expansión de la serie de Taylor alrededor de $\omega = 0$, requiriendo que $\mathcal{F}(0) = 1$ y $\mathcal{F}(j\omega) = 0$ (en donde $d_0 = c_0$, $N > M$, y $c_{2N} \cong 0$). Entonces se tiene

$$\mathcal{F}(j\omega) = 1 + E(\omega) \quad (5.162)$$

combinando la ec. 5.161 y la ec. 5.162 se obtiene

$$d_0 + d_2\omega^2 + \dots + d_{2M}\omega^{2M} = c_0 + c_2\omega^2 + \dots + c_{2N}\omega^{2N} + E(\omega)[c_0 + c_2\omega^2 + \dots] \quad (5.163)$$

La mejor aproximación de Taylor requiere que $\mathcal{F}(j\omega)$ y la respuesta ideal deseada tenga varios términos iguales en su expansión de la serie de Taylor a una frecuencia dada. Para un filtro paso-baja la expansión es alrededor $\omega = 0$, la cual requiere que $E(\omega)$ tenga unos cuantos términos de ω de bajo orden como sea posible. Esta condición es conseguida por medio del siguiente conjunto

$$\begin{aligned} c_0 &= d_0, \\ c_2 &= d_2, \\ &\vdots \\ c_{2M} &= d_{2M}, \\ c_{2M+2} &= 0, \\ &\vdots \\ c_{2N-2} &= 0, \\ c_{2N} &= \text{no es cero} \end{aligned} \quad (5.164)$$

Porque la respuesta ideal en el paso-banda es una constante, de la aproximación de la serie de Taylor y es a menudo llamada como plano máximo.

La ec. 5.164 está en un estado en el que el numerador de la función de transferencia debe ser arbitrario. Entonces por la puesta del denominador de coeficientes de $\mathcal{F}(s)$ igual a el numerador de más coeficientes de un término de orden alto, se obtiene una aproximación óptima de las series de Taylor.

Desde que el numerador es arbitrario, estos coeficientes pueden ser elegidos para una aproximación de Taylor a cero de $\omega = \alpha$. Esto se hace por la puesta de $d_0 = 1$ y para todas las otras d 's iguales a cero. El resultado de la función de magnitud cuadrática es

$$\mathcal{F}(\omega) = 1 / 1 + c_{2N} \omega^{2N}$$

El valor de la constante c_{2N} determina para cual valor de ω la transición ocurre para el paso-banda o la banda-alta. Por este desarrollo esto es normalizado para $c_{2N} = 1$, la cual causa la transición para cuando ocurre para $\omega = 1$. Estas aproximaciones y normalizaciones dan la simple forma para la cual es llamada como el *Filtro de Butterworth*.

$$\mathcal{F}(\omega) = 1 / 1 + \omega^{2N} \quad (5.165)$$

Procedimiento de Diseño del Filtro de Butterworth.

Las especificaciones del filtro que son consistentes con que es optimizar en el filtro de Butterworth, y que son los grados de la "flatness" (calidad de plano) para $\omega = 0$ y $\omega = \alpha$. El alto orden, el lucir la respuesta de frecuencia a esos dos puntos. Porque de la naturaleza, analítica de la función racional, el lucir la respuesta es que para $\omega = 0$ y α .

Una consecuencia indirecta del filtro de orden es la pendiente (slope) de la respuesta a la transición entre el

paso-banda y el paso-alta. La pendiente de la magnitud cuadrada de la respuesta de la frecuencia para $\omega = 1$ es

$$\text{slope} = \mathcal{F}'(\omega = 1) = -N/2 \quad (5.166)$$

Los efectos del incremento de los flatness y el incremento de transición de la pendiente de la respuesta de frecuencia con N incrementos son ilustrados en la figura 5.34.

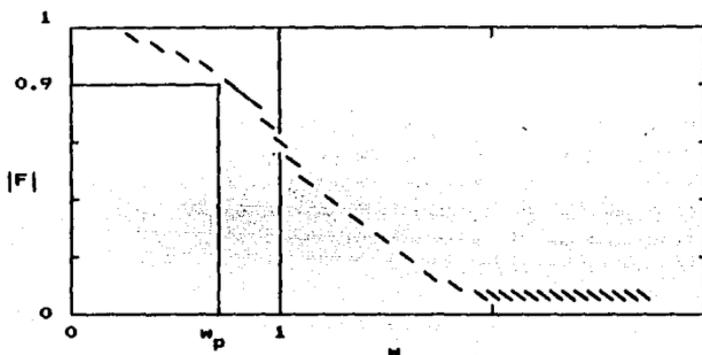


Figura 5.34. Especificaciones de paso-banda para el diseño de un Filtro Butterworth.

En algunos casos las especificaciones de estado de la respuesta deben quedarse por arriba o por abajo de un cierto valor sobre una frecuencia de banda. Aunque si bien, este tipo de especificaciones son más compatibles con un error de optimización de Chebyshev, esto es posible para el diseño de un Filtro Butterworth y para conocer los requerimientos necesarios. Si la magnitud de la respuesta de frecuencia del filtro encima del paso-banda es de $0 < \omega < \omega_p$ debe quedarse entre la unidad y G , en donde $\omega_p < 1$ y $G < 1$, se encuentra el orden de requerimiento para

determinar los enteros más pequeños N que satisfagan a

$$N \geq \frac{\log((1/G)^2 - 1)}{2 \log \omega_p} \quad (5.167)$$

Esta especificación es ilustrada en la figura 5.34, en donde $|F|$ debe quedarse arriba de 0.9 para ω en lo alto de 0.9, por lo tanto, $G = 0.9$ y $\omega_p = 0.9$. Estos requerimientos necesitan un orden de menor valor, es decir, un $N = 7$.

Ejemplo 5.1. Diseño de un filtro de Butterworth paso-baja tipo IIR

Para ilustrar los cálculos, se diseñó un filtro de Butterworth paso-baja. Se desea obtener la respuesta de frecuencia para que se quede por abajo de 0.8 para las frecuencias que están arriba de 0.9. Por medio de la ec. 5.167 se determina un valor de orden dado como de 2.73, después el orden es de 3. La función analítica correspondiente a la magnitud cuadrática de respuesta de frecuencia es

$$F^2(j\omega) = 1/(1 + \omega^6)$$

La función de transferencia correspondiente a los polos de la mitad del plano del lado izquierdo de $F'(s)$ son calculados y se obtiene

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+0.5+j0.866)(s+0.5-j0.866)} \quad (5.168)$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} \quad (5.169)$$

$$F(s) = \frac{1}{(s^3+2s^2+2s+1)} \quad (5.170)$$

Con esto se obtiene la respuesta de frecuencia por la puesta de $s = j\omega$, el cual tiene un polo ilustrado en la figura 5.34 para $N = 3$.

Propiedades del Filtro Chebyshev.

Una alternativa de error medido es el máximo valor absoluto de la diferencia entre la respuesta del filtro actual y la respuesta del filtro ideal. Esta medida es considerada sobre el paso-banda total. Este es el error medido de Chebyshev, el cual fué definido y aplicado para los filtros FIR. Para los filtros IIR, el error de Chebyshev es minimizado sobre el paso-banda y una aproximación de la serie de Taylor para $\omega = \omega_c$ es usado para determinar la realización del banda-alta. Esta mezcla de métodos en el caso de los filtros IIR es llamado como el *Filtro de Chebyshev*, y se obtienen fórmulas simples para el diseño de este filtro.

La forma para la magnitud cuadrada de la función de respuesta de frecuencia para el filtro Chebyshev es

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\omega)} \quad (5.171)$$

en donde $C_N(\omega)$ es un polinomio de Chebyshev de orden N -ésimo y ϵ es un parámetro que controla el tamaño del rizo. Este polinomio en ω tiene características muy especiales, porque en el resultado de la función de respuesta es óptimo.

Polinomios de Chebyshev.

El polinomio de Chebyshev es una función muy poderosa en la teoría de la aproximación. Aunque la función es un polinomio, este es mejor definido y desarrollado en términos de funciones

trigonométricas por

$$C_N(\omega) = \text{Cos}(N \text{Cos}^{-1}(\omega)) \quad (5.172)$$

en donde $C_N(\omega)$ es una función de valor real de la variable real ω de orden N -ésima. El desarrollo es claramente hecho por introducir una variable compleja intermedia ϕ :

$$C_N(\omega) = \text{Cos}(N \phi), \text{ en donde } \omega = \text{Cos}(\phi) \quad (5.173)$$

Aunque si bien, esta definición de $C(\omega)$ no debe ser el primero en aparecer para dar un polinomio, la siguiente relación recursiva es derivada desde la ec. 5.173 que muestra esto que es un polinomio.

$$C_{N+1}(\omega) = 2\omega C_N(\omega) - C_{N-1}(\omega) \quad (5.174)$$

desde la ec. 5.172 está claro que $C_0 = 1$ y $C_1 = \omega$, y desde la ec. 5.174 se realiza lo siguiente.

$$\begin{aligned} C_2 &= 2\omega^2 - 1, \\ C_3 &= 4\omega^3 - 3\omega, \\ C_4 &= 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.175)$$

Otras relaciones usadas para el desarrollo de estos polinomios son

$$C_N^2 = 1/2[C_{2N} + 1], \quad (5.176)$$

$$C_{MN} = C_M(C_N(\omega)) \text{ en donde } M \text{ y } N \text{ son primos.}$$

Localización de Polos.

Ahora se desarrollará un método para encontrar la localización de polos para el filtro de Chebyshev de la función de transferencia.

Desde la ec. 5.171, se ve que los polos de $\mathcal{V}(s)$ ocurren cuando

$$1 + \epsilon^2 C_N^2(s/j) = 0 \quad (5.177)$$

o cuando

$$C_N = \pm j/\epsilon$$

desde la ec. 5.172 se define $\phi = \text{Cos}^{-1}(\omega)$ con una parte real e imaginaria dadas por

$$\phi = \text{Cos}^{-1}(\omega) = u + jv \quad (5.178)$$

Estos están dados desde la ec. 5.173 y 5.177 como

$$C_N = \text{Cos}(N\phi) = \text{Cos}(Nu)\text{Cosh}(Nv) - j \text{Sen}(Nu)\text{Senh}(Nv) = \pm j/\epsilon \quad (5.179)$$

el cual implica que la parte real de C_N es cero. Después

$$\text{Cos}(Nu)\text{Cosh}(Nv) = 0,$$

lo cual implica

$$\text{Cos}(Nu) = 0,$$

y lo cual implica que u asuma valores de

$$u = u_k = \frac{(2k+1)\pi}{2N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.180)$$

para aquellos valores de u $\text{Sen}(Nu) = \pm 1$, la ec. 5.179 llegará a ser

$$\text{Senh}(Nv) = 1/\epsilon,$$

el cual requiere de un v para asumir un valor de

$$v = v_0 = \frac{\text{Senh}^{-1}(1/\epsilon)}{N} \quad (5.181)$$

usando a $s = j\omega$ y a la ec. 5.178 se obtiene

$$s = j\omega = j \text{Cos}(\phi) = j \text{Cos}(u + jv)$$

$$s = j \cos \left((2k + 1)\pi/2N \right) + j\nu_0 \quad (5.182)$$

Esta ecuación da la localización de N polos en el plano s como

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k,$$

en donde

$$\sigma_k = -\operatorname{Senh}(\nu_0)\operatorname{Cos}(k\pi/2N), \quad (5.183)$$

$$\omega_k = \operatorname{Cosh}(\nu_0)\operatorname{Sen}(k\pi/2N)$$

para los valores N de k , de donde

$$k = \begin{cases} \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm(N-1) & \text{para } N \text{ par.} \\ 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm(N-1) & \text{para } N \text{ impar.} \end{cases}$$

Procedimiento del Diseño de un Filtro Chebyshev.

El filtro de Chebyshev tiene un pasa-banda óptimo para minimizar el error máximo sobre el rango completo de la frecuencia del paso-banda, y un banda-alta controlado por la respuesta de frecuencia maximamente plano para $\omega = \alpha$. El rizo del paso-banda y el filtro de orden son los dos parámetros para ser determinados por las especificaciones.

La forma para las especificaciones que más consisten con la formulación del filtro Chebyshev es un error máximo permitido en el paso-banda y un grado deseado de los "flatness" para $\omega = \alpha$.

Como un estado fácil, el diseño de los parámetros debe ser claramente entendido para obtener un resultado deseado. El rizo del paso-banda es definido para ser la diferencia entre la frecuencia máxima y mínima de $|F|$ sobre el paso-banda de $0 \leq \omega \leq 1$.

Las siguientes fórmulas relacionan el rizo de d del paso-banda, el rizo de α del paso-banda en dB positivos, y la

función de transferencia del parámetro ϵ .

$$\alpha = 10 \log(1 + \epsilon^2) = -20 \log(1 - d), \quad (5.184)$$

$$\epsilon = ((2d - d^2)/(1 - 2d + d^2))^{1/2} = ((10^{\alpha/10} - 1)^{1/2}) \quad (5.185)$$

$$d = 1 - 10^{-\alpha/20} = 1 - 1/((1 + \epsilon^2)^{1/2}) \quad (5.186)$$

En algunos casos la realización de la banda-alta no está dado en términos de grados de los "flatness" para $\omega = \alpha$, pero en términos de una magnitud máxima permitada G en la banda-alta por arriba de una cierta frecuencia ω_0 ; esto es, $G > |F| > 0$ para $1 < \omega_0 < \omega < \alpha$. Para dar un ϵ este determinado el orden como un entero pequeño positivo que satisfaga

$$N \geq \frac{\text{Cosh}^{-1}((1 - G^2)^{1/2} / \epsilon^2 G)}{\text{Cosh}^{-1}(\omega_0)} \quad (5.187)$$

El diseño de un filtro Chebyshev involucra los siguientes pasos :

- 1.- La máxima variación permitada del paso-banda debe ser de la forma de d o α . Desde esta variación el parámetro ϵ es calculado por la ec. 5.185.
- 2.- El orden N es determinado por los flatness deseados para $\omega = \alpha$ o una respuesta máxima permitada para las frecuencias que estan arriba de ω_0 por la ec. 5.187.
- 3.- ν_0 es calculado desde ϵ y N por la ec. 5.181 y la escala de factores $\text{Senh}(\nu_0)$ y $\text{Cosh}(\nu_0)$ son entonces determinados.

4.- La localización de los polos son calculados desde la ec. 5.183 por escala de polos de un prototipo de un filtro Butterworth.

5.- Aquellos polos localizados son combinados para dar la función de transferencia del filtro final.

Ejemplo 5.2. Diseño de un filtro Chebyshev paso-banda.

Las especificaciones del diseño requieren de un máximo rizo de paso-banda de $d = 0.1$ o un $\alpha = 0.91515$ dB y no pueda permitir una gran respuesta con una $G = 0.2$ para frecuencias arriba de $\omega_c = 1.6$ rad/s. Dada un $d = 0.1$ o una $\alpha = 0.91515$, la ec. 5.185 implica una

$$\epsilon = 0.484322 \quad (5.188)$$

dada un $G = 0.2$ y $\omega_c = 1.6$, la ec. 5.187 implica una N de orden 3. Desde ϵ y N , ν_0 es 0.49074 desde la ec. 5.181 y con

$$\text{Senh}(\nu_0) = 0.510675, \quad \text{Cosh}(\nu_0) = 1.122849 \quad (5.189)$$

Estos multiplicandos son usados para la escala de la localización básica de un filtro de Butterworth de tercer-orden como en el ejemplo 5.1 para dar lo siguiente

$$F(s) = \frac{1}{(s+0.51067)(s+0.25534+j0.97242)(s+0.25534-j0.97242)} \quad (5.190)$$

$$F(s) = \frac{1}{(s + 0.510675)(s^2 + 0.510675s + 1.010789)} \quad (5.191)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 1.02135s^2 + 1.271579s + 0.516185} \quad (5.192)$$

5.6.3.- METODOS DE DISEÑO DIRECTO DEL FILTRO IIR EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

El procedimiento de los métodos de diseño tienen que ser basados, en diseñar un prototipo de filtro analógico y entonces convertir este filtro a un filtro digital. Este aprovechamiento es apropiado para las clases de aproximación en donde las soluciones analíticas son posibles. Más provechoso son las extensiones de los métodos usados para los filtros FIR, pero éstos son más complicados para el caso IIR en donde la aproximación racional al contrario que la aproximación polinomial sea realizada.

Diseño de Filtros IIR de Frecuencia-Muestral.

El método para calcular muestras de una respuesta de frecuencia de un filtro IIR, es por medio de la función de transferencia de la transformada z

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (5.193)$$

La respuesta de frecuencia del filtro es dado por $z = \text{Exp}(+j \omega)$, y usando la notación

$$H(\omega) = H(z) |_{z = \text{Exp}(+j \omega)} \quad (5.194)$$

se selecciona las muestras espaciadas equitativamente de la respuesta de frecuencia, es que el número de muestras es igual al número de coeficientes no conocidos en la ec.5.193. Estas muestras de $L + 1 = M + N + 1$ de la respuesta de frecuencia son dadas por

$$H_k = H(\omega_k) = H((2\pi k)/(L + 1)), \quad k = 0, 1, \dots, L \quad (5.195)$$

y pueden ser calculados desde la DFT de longitud $(L + 1)$ de el numerador y denominador como

$$H_k = \frac{\text{DFT}\{b_n\}}{\text{DFT}\{a_n\}} = \frac{B_k}{A_k} \quad (5.196)$$

en donde la división es término indicado por el término de cada valor de k . La multiplicación por ambos lados de la ec. 5.196 por A_k se obtiene

$$B_k = H_k A_k \quad (5.197)$$

Si la inversa de la DFT de longitud $(L + 1)$ de H_k es denotado por la longitud $(L + 1)$ de secuencia h_n , entonces la ec. 5.197 llegará a ser una convolución cíclica, la cual puede ser expresada en forma de matriz por

$$\begin{array}{ccccccc} b_0 & & h_0 & h_L & h_{L-1} & & h_2 & h_1 & 1 \\ b_1 & & h_1 & h_0 & h_L & & & h_1 & a_1 \\ b_2 & & h_2 & h_1 & h_0 & & & & a_2 \\ \vdots & = & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ b_M & & \vdots & & & & & \vdots & a_N \\ \vdots & & \vdots & & & & & \vdots & 0 \\ 0 & & h_L & \dots & \dots & \dots & h_0 & & 0 \end{array} \quad (5.198)$$

Una notación de matriz más compacta de la ec. 5.198 es

$$\begin{array}{c} b \\ 0 \end{array} = [H] \begin{array}{c} a \\ 0 \end{array} \quad (5.199)$$

en donde H es $(L + 1)$ por $(L + 1)$, b es la longitud $(M + 1)$, y a es la longitud $(N + 1)$. Porque los términos menores $L - N$ del vector a a mano derecha de 5.198 son cero, y la matriz H puede ser reducida para quitar las columnas más a la derecha $L - N$ para dar

un H_0 , el cual transforma a la ec. 5.199 de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = [H][a] \quad (5.200)$$

Porque el primer elemento de a es 1, y este es particionado para remover el término unitario, y el vector restante de longitud n es denotado por a^* . Las ecuaciones simultáneas representadas por 5.200 son desacopladas por más partición de la matriz H , como se muestra

$$\begin{bmatrix} b \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & \\ \dots & \\ h_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ a^* \end{bmatrix} \quad (5.201)$$

en donde H_1 es $(M + 1)$ por $(N + 1)$, h_1 es la longitud $(L - M)$, y H_2 es $(L - M)$ por N . Las ecuaciones más bajas de $L - M$ son escritas como

$$\begin{aligned} 0 &= h_1 + H_2 a^* \\ h_1 &= -H_2 a^* \end{aligned} \quad (5.202)$$

la cual debe ser resuelta por a^* . La ecuación más alta de $M + 1$ de la ec. 5.201 son escritas como

$$b = H_1 a \quad (5.203)$$

la cual permite una b para ser calculada.

Si $L = N + M$, H_2 es cuadrada. Si H_2 no es singular, la ec. 5.202 puede ser resuelta exactamente por el denominador de coeficientes en a^* , los cuales son aumentados por el término unitario para dar una a . Y desde la ec. 5.203 se puede encontrar el numerador de coeficientes en b .

5.7.-IMPLEMENTACIÓN DE FILTROS DE RESPUESTA-IMPULSO INFINITO.

Todos los análisis de los filtros IIR tienen que ser en términos de un sistema lineal. Por que cuando los efectos de una longitud de palabra finita de un sobre flujo y una cuantización de error son consideradas, el filtro digital llega a ser un sistema no lineal. Y esto es de aquellas no linealidades de cuantización que causa todas las dificultades en el análisis del punto-fijo del filtro recursivo en las implementaciones.

Y ahora en este punto se hablará de los diferentes caminos para la implementación de filtros recursivos (estructuras diferentes) con énfasis en los bloques de segundo orden.

5.7.1.- ESTRUCTURAS RECURSIVAS.

Quando un filtro es implementado con una estructura recursiva, el problema de longitud-palabra finita llega a ser más severo que los problemas asociados con un filtro de estructura no recursiva. Los dos problemas siguientes son más dificultosos para el análisis de filtros recursivos que para los filtros que son no recursivos.

1.- Filtro de coeficiente de error desde la cuantización.

2.- Cuantización de ruido y sobre flujo desde operaciones aritméticas.

En suma a los efectos de cuantización de los coeficientes y de precisión aritmética finita se discutirá para los filtros no recursivos, surgiendo dos nuevos problemas que son causados por la retroalimentación de un filtro recursivo.

1.- Ciclos de limite de escala-pequeña, las cuales son oscilaciones causadas por la cuantización de la no linealidad en el estado aparente del ciclo de

retroalimentación. Y usualmente tienen una amplitud baja y pueden ser después tolerados.

- 2.- Ciclos de límite de escala-larga, las cuales son oscilaciones causadas por el sobre flujo en el ciclo de retroalimentación. Sus amplitudes cubren el rango dinámico completo del filtro, porque esos ciclos deben ser prevenidos.

Estos problemas son especialmente dificultosos para el análisis de los filtros recursivos. El problema de aproximación para el diseño de una función de transferencia racional con unos coeficientes cuantizados no tienen solución.

En un filtro digital recursivo la salida es una combinación lineal de entradas pasadas y salidas pasadas. Las salidas pasadas son la retroalimentación para el producto de la salida presente. La ecuación de diferencia es

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{m=1}^N a_m y(n-m) \quad (5.204)$$

se muestra claramente como la salida $y(n)$ es computada para un filtro recursivo con una función de transferencia

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (5.205)$$

Cuando un filtro digital recursivo es implementado directamente, como en la ec. 5.204, los errores introducidos por cuantización de los coeficientes pueden causar una variación significativa desde la respuesta de frecuencia deseada. Un filtro

diseñado para ser estable puede llegar a ser inestable después de que los coeficientes son cuantizados.

Coefficiente de Sensitividad.

Cuando los coeficientes en la diferencia de la ecuación 5.204, los cuales implementan a un filtro digital recursivo, son cuantizados, los errores de los coeficientes pueden resultar la causa de seleccionar un filtro de mejores características. Se pueden entender los efectos de los errores de coeficiente para la respuesta de frecuencia y la estabilidad por medio del estudio como localizar los polos de la función de transferencia de $H(z)$ en la ec. 5.205 cuando se elija que deban existir cambios en los coeficientes a_k del denominador de $H(z)$.

La función de transferencia de un filtro recursivo es una función racional de z , como se puede ver en la ec. 5.205. Para obtener $H(z)$ en términos positivos de z , se debe reescribir a la ec. 5.205 como sigue

$$H(z) = \frac{z^{N-M} (b_0 z^M + \dots + b_M)}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} \quad (5.206)$$

$$o \quad H(z) = z^{N-M} \frac{\tilde{B}(z)}{\tilde{A}(z)} \quad (5.207)$$

el denominador polinomial en la ec. 5.207 debe ser escrito como

$$\tilde{A}(z) = \sum_{k=0}^N \alpha_k z^{N-k} = \sum_{k=0}^N (z - z_m) \quad (5.208)$$

en donde $\alpha_0 = 1.0$.

Para ver como un cambio en el coeficiente a_k afecta el polo de localización z_m , se considerará la expansión de la serie de Taylor de $\tilde{A}(z)$ considerada como una función de z y a_k : $\tilde{A}(z, a_k)$ de la siguiente forma

$$A(z_m + \Delta z_m, a_k + \Delta a_k) = A(z_m, a_k) + \Delta a_k \frac{\partial \tilde{A}(z)}{\partial a_k} + \Delta z_m \frac{\partial \tilde{A}(z)}{\partial z_m} + \dots \quad (5.209)$$

asumiendo que Δa_k y Δz_m compensan a que $A(z)$ sea el mismo, entonces

$$\Delta z_m = - \Delta a_k \frac{\frac{\partial \tilde{A}(z)}{\partial a_k}}{\frac{\partial \tilde{A}(z)}{\partial z_m}} \quad (5.210)$$

evaluando las derivadas parciales en la ec. 5.210 se obtiene

$$\frac{\partial \tilde{A}(z)}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} \left| \sum_{l=0}^N a_l z^{N-l} \right| = z^{N-k} \quad (5.211)$$

$$\frac{\partial \tilde{A}(z)}{\partial z_m} = \frac{\partial}{\partial z_m} \left| \sum_{j=0}^N (z - z_j) \right|_{j < m} - \sum_{j=1}^N (z - z_j) \quad (5.212)$$

evaluando a 5.211 y 5.212 para $z = z_m$ se obtiene

$$\Delta z_m = \Delta a_k \left\{ \frac{z_m^{N-k}}{\prod_{j=1; j \neq m}^N (z_m - z_j)} \right\} \quad (5.213)$$

la expresión para el coeficiente de sensibilidad de la ec. 5.213 da una conclusión distinta acerca del filtro recursivo de implementación que son :

- 1.- El filtro es más sensitivo para variaciones de los coeficientes menores de a_N porque $N - k$ es cero.
- 2.- El movimiento del polo cerrado z_m para el círculo unitario ($|z| = 1$) incrementa la sensitividad del polo de localización para la variación de un coeficiente porque el numerador de la ec. 5.213 es grande.
- 3.- El coeficiente de sensitividad se incrementa cuando los polos juntos son cerrados porque de valores pequeños de $z_m - z_j$ en el denominador de la ec. 5.213.

Estructuras de Segundo Orden.

En el análisis sensitivo se indica que una estructura de sensitividad menor debe ser obtenida por un rompimiento arriba de la función de transferencia adentro de la sección de bajo-orden y conectar esas secciones en paralelo o en cascada. Aunque los bloques de orden-alto deben ser atractivos en algunas aplicaciones, la sección de segundo orden es un buen bloque para usarse en estructuras de forma paralelo o en cascada.

La forma más directa para implementar la ecuación diferencial es

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) \quad (5.214)$$

y es mostrado en la figura 5.35. La estructura directa en la figura puede ser simplificada, combinando los cuatro bloques de retraso dentro de dos, como se ve en la figura 5.36.

La misma ecuación diferencial debe ser también implementada en la estructura transpuesta, como se ve en la figura 5.37. Esta es llamada estructura transpuesta porque ésta puede ser obtenida desde el estado variable o de la descripción de la matriz

de la figura 5.36 por transposición de la matriz apropiada.

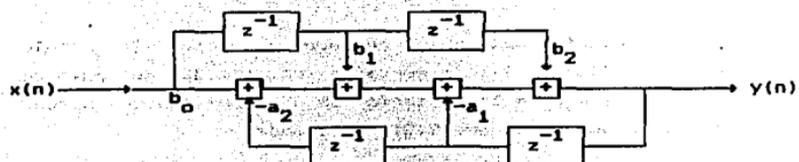


Figura 5.35. Implementación directa de un bloque de segundo orden.

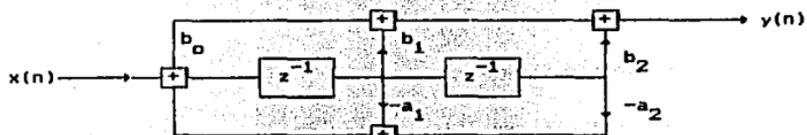


Figura 5.36. Forma directa de un bloque de segundo orden.



Figura 5.37. Transpuesta desde un bloque de segundo orden.

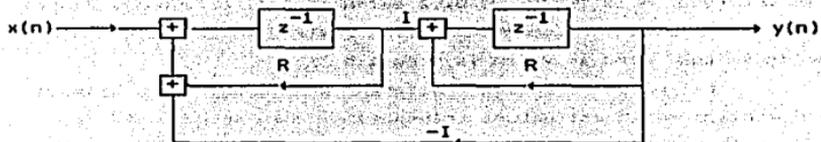


Figura 5.38. Forma acoplada para el bloque de segundo orden.

Una estructura alternativa es la forma acoplada para un bloque de segundo orden, porque esta estructura implementa un par de polos conjugados con una parte real R y una parte imaginaria $\pm I$, como se muestra en la figura 5.38.

Otras estructuras deben ser usadas para implementar una sección de segundo orden. Porque una familia de estructuras deben ser derivadas desde un análisis de estado variable.

Estructura en Cascada.

Por factorización, se puede reescribir la función de transferencia racional

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (5.215)$$

como

$$H(z) = K \prod_{k=1}^{[N/2]} \frac{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \quad (5.216)$$

en donde $[N/2]$ es el entero más pequeño para $\geq N/2$.

A cada factor de segundo orden en la ec. 5.216 puede ser implementada con una de las estructuras descritas con anterioridad, dando una realización de $H(z)$ como una cascada de secciones de segundo orden, como se muestra en la figura 5.39. Si el filtro tiene un orden impar, entonces una primera o una sección de tercer orden es necesaria.

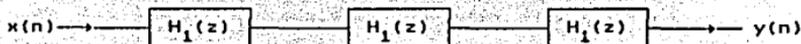


Figura 5.39. Estructura en Cascada.

Una posible ventaja de la estructura en cascada es que el cero del círculo unitario de la función de transferencia puede ser fácilmente implementado. Cuando el numerador del coeficiente b_{2k} en la ec. 5.216 es igual a la unidad, el cero para la sección del k -ésimo es el círculo unitario. Para la estructura en cascada, si una sección tiene un cero en el círculo unitario, entonces (excepto para la posible cancelación del polo-cero) la entrada del filtro tendrá un cero en el círculo unitario.

Estructura En Paralelo.

Si el denominador de la ec. 5.215 tiene N_r raíces reales y N_c pares de raíces conjugadas complejas, entonces una fracción parcial de expansión de la ec. 5.215 da lo siguiente

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-N} \rho_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_r} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{B_k (1 - c_k z^{-1})}{(1 - r_k z^{-1})(1 - r_k^* z^{-1})^{-1}} \quad (5.217)$$

Cuando ambos polos, el real y el complejo-conjugado son agrupados en pares, la ec. 5.217 llega a ser

$$H(z) = \sum_{k=1}^{[N/2]} H_r(z) + \sum_{k=0}^{M-N} \rho_k z^{-k} \quad (5.218)$$

con

$$H_k(z) = \frac{c_0 k - c_1 k z^{-1}}{1 - a_1 k z^{-1} - a_2 k z^{-2}} \quad (5.219)$$

La estructura en paralelo es mostrada en la figura 5.40 para $M = N$.

En la estructura en paralelo, a diferencia de la estructura en cascada, se reorganizan a los bloques $H_k(z)$ hechos no en diferencia; sino que el problema de elegir el orden de los

bloques de segundo orden es el de esquivarlos. Sin embargo, a diferencia de la estructura en cascada, se puede ver, que puede ser realizado para cada bloque independientemente de los otros bloques.

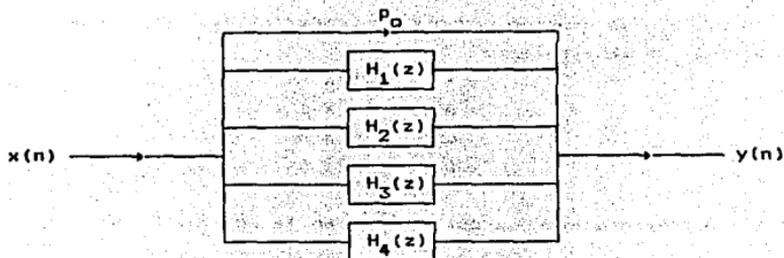


Figura 5.40. Estructura en Paralelo.

Una posible desventaja de la estructura en paralelo es la dificultad para el lugar de los ceros en el eje de la frecuencia (círculo unitario). En la estructura en cascada esta es fácil para el lugar de un cero del filtro en el círculo unitario por la muestra del lugar cero de una de las secciones en la cascada en el círculo unitario. Sin embargo, en la estructura en paralelo los ceros dependen en cancelación de términos en la sumatoria y son más sensitivos para el coeficiente de cuantización.

Descripción de la Variable de Estado del Filtro.

Esto es a menudo conveniente para el modelo de un filtro digital como un sistema lineal de tiempo-invariante con un coeficiente de constante, una matriz de ecuaciones diferenciales llamada *ecuaciones de estado*.

Con el vector de estado x , hay una simple entrada u y una simple salida y ,

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n), \quad y(n) = Cx(n) + Du(n) \quad (5.220)$$

Para un sistema de N -ésimo orden la entrada/salida, el tamaño de las matrices es la siguiente

$$\begin{array}{ll} A & N \times N \\ B & N \times 1 \\ C & 1 \times N \\ D & 1 \times 1 \end{array}$$

La función de transferencia del sistema en la ec. 5.218 es

$$H(z) = C[zI - A]^{-1} B + D \quad (5.221)$$

en donde I es la matriz identidad.

Varias de las elecciones de A , B , C , y D en la ec. 5.220 da la misma función de transferencia de la ec. 5.221. Por lo tanto se obtiene

$$A' = M^{-1}AM, \quad B' = M^{-1}B, \quad C' = CM, \quad D' = D. \quad (5.222)$$

El sistema descrito en la ec. 5.222 tiene una función de transferencia

$$H'(z) = C'[zI - A']^{-1} B' + D'. \quad (5.223)$$

substituyendo la ec. 5.222 en la ec. 5.223 se obtiene

$$H'(z) = CM[zI - M^{-1}AM]^{-1} M^{-1}B + D \quad (5.224)$$

Después

$$[zI - M^{-1}AM]^{-1} = M^{-1}[zI - A]^{-1}M \quad (5.225)$$

en donde se tiene que $H'(z) = H(z)$.

Si el sistema lineal era un sistema lineal, entonces todos los sistemas infinitos descritos por la ec. 5.223 para elegir diferentes M deben de tener todos el mismo comportamiento. Sin embargo, después de que un filtro digital no es un sistema lineal porque la longitud de palabra finita aritmética es usada, para diferentes elecciones de M que tienen diferentes propiedades.

Un diagrama a bloques de la estructura de la variable de estado es mostrada en la figura 5.41 para la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \quad D = d$$

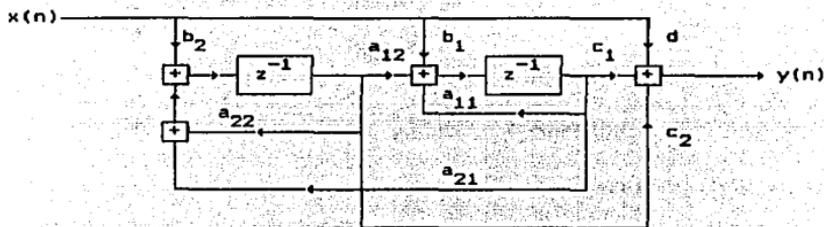


Figura 5.41. Estructura de la Variable de Estado.

La estructura de la variable de estado requiere de mucho más aritmética que la estructura directa y la estructura transpuesta.

Otro Tipo de Estructuras.

Existen otras estructuras para implementar filtros digitales que tengan que ser propuestas como alternativas para las

estructuras de tipo cascada o paralelo para la conexión de bloques de segundo orden. Estas estructuras son generalmente menos sensitivas para el coeficiente de error. Las únicas estructuras aquí mencionadas son la estructura enrejada y la estructura de la onda de filtro digital.

La estructura enrejada es usada para la síntesis del habla. Esta es menos sensitiva para el coeficiente de error que la forma directa, tiene una fina interpretación en términos de un tubo acústico, y tiene un simple camino para la prueba de estabilidad. La sección de enrejada en la figura 5.42 puede ser conectada a otras secciones para la forma de un filtro de orden alto.

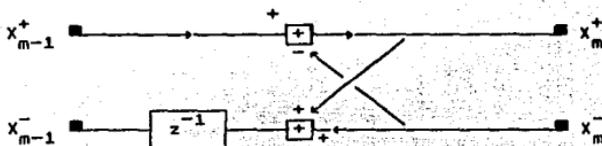


Figura 5.42. Sección de la Estructura Enrejada.

La estructura de la onda de filtro digital tiene que ser desarrollada en la forma de filtros analógicos tipo LC por Fettweis. Existen distintos tipos de la onda de filtro digital con variantes computacionales y requerimientos de memoria. Este tipo de clase de la onda de filtro digital son caracterizados por una muy baja sensibilidad para los coeficientes de error.

Generalmente, como la estructura de un filtro digital llega ser más y más compleja, la parte de la carga para hacer el filtraje es elevar desde los coeficientes y llevarlos en la estructura a ellos mismos. Las estructuras más complicadas, como la onda de filtro digital, son capaces de operar con muy pocos bits para la representación del coeficiente.

5.7.2. EFECTOS DE LA LONGITUD-PALABRA FINITA.

Para el tiempo mínimo de cómputo o para el más poderoso filtro que pueda ser computado en un tiempo dado, el punto-fijo aritmético es usualmente el mejor elegido. Más un chip (procesador de señal) usa un punto-fijo aritmético para el uso más eficiente del área de silicón avilitable. En esta parte se analizará en detalle implementaciones de punto-fijo de filtros recursivos. Los efectos de la longitud-palabra finita son más complicados y potencialmente causan más problemas con los filtros recursivos que con los no recursivos. Por tal motivo, se dividieron los efectos en cuatro categorías que son :

- 1.- Filtro de error de coeficiente.
- 2.- Cuantización de ruido y sobre flujo de errores en señales representadas como números de punto-fijo.
- 3.- Duetos de ciclos de límite de escala pequeña para la cuantización no lineal característica de implementos de punto-fijo.
- 4.- Duetos de ciclos de límite de escala grande para el sobre flujo no lineal característico de las implementaciones de punto-fijo.

A cada uno de estos aspectos del filtro digital requiere de un tipo diferente de análisis.

Coefficiente de Cuantización.

Como se mencionó con anterioridad, un filtro recursivo es menos sensitivo para un coeficiente de error cuando este es implementado con bloques de segundo orden. Porque con un bloque par de segundo orden, sólo hay un número finito de polos de localización debido a el coeficiente de cuantización. A continuación se verá un ejemplo.

Ejemplo. 5.3. - Un Oscilador Digital tiene una salida $y(n)$ que satisface la siguiente ecuación homogénea

$$y(n) = 2b_1 y(n-1) - y(n-2) \quad (5.226)$$

el origen de la ecuación característica es

$$z^2 - 2b_1 z + 1 \quad (5.227)$$

son localizados como

$$z_{1,2} = \text{Exp}(\pm j 2\pi f_0) \quad (5.228)$$

en donde la frecuencia de oscilación es

$$f_0 = 1/2\pi (\text{Cos}^{-1} b_1) \quad (5.229)$$

para muy bajas frecuencias ($f_0 \cong 0$), y la aproximación es

$$b_1 = \text{Cos}(2\pi f_0) \cong 1 - 0.5(2\pi f_0)^2 \quad (5.230)$$

debe ser usado para que las frecuencias bajas de oscilación, correspondan a

$$b_1 = 1 - m Q, \quad m = 1, 2, 3$$

y son aproximadamente

$$f_{0m} = 1/2\pi (2m Q)^{1/2}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (5.231)$$

en donde $Q = 2^{-B+1}$ es el tamaño del paso. Para los 16 bits del coeficiente $B = 16$

$$f_{0m} = (m)^{1/2} / 256\pi$$

$$f_{01} \cong 0.00124,$$

$$f_{02} \cong 0.00176,$$

$$f_{03} \cong 0.00215.$$

Las posibles frecuencias o equivalentemente, los posibles polos de

localización no son muy densos para las regiones cerca a $+1$ en el plano z , con 16 bits de coeficientes pares en la ecuación diferencial. La razón es que siempre que los cambios pequeños en el coeficiente b_1 causan grandes cambios en el argumento de la función Coseno en la ec. 5.230, porque la función coseno tiene valores tan pequeños del ángulo $2n\theta$.

Escalamiento y Sobre-flujo.

El escalamiento es más importante para los filtros recursivos que para los no recursivos. Para un filtro no recursivo un sobre-flujo en el registro de salida sólo causa un error en la salida de la muestra, pero para un filtro recursivo un sobre-flujo es una retroalimentación y afecta varias salidas. Para las estructuras que pueden tener un ciclo límite de escala grande, el sobre-flujo puede estar fuera de una oscilación con una amplitud de escala-llena, la cual completamente destruye el valor del filtro de salida para todo el tiempo después de que ocurre el sobre-flujo.

Los escalamientos principales son iguales a los filtros no recursivos. El primero, es la respuesta impulso (equivalente a la respuesta de la frecuencia) y son calculados entre la entrada y varios registros en el filtro en donde ocurre el sobre-flujo (a la mitad). Esto se muestra en la figura 5.43.

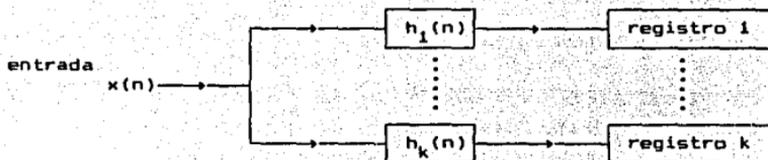


Figura 5.43. Escalamiento de razones por registro.

Se asume que todos los registros son del mismo tamaño de la escala del factor G_k , que deben ser calculados para hacer la magnitud de la señal a la del registro k -ésimo menor que la unidad para prevenir el sobre-flujo. La escala de la respuesta impulso unitario está dada como

$$h_k'(n) = \frac{h_k(n)}{G_k} \quad (5.232)$$

El factor de ganancia es igual a una de las tres siguientes medidas del tamaño de $h(n)$. La norma l_1 de h de la forma

$$\|h\|_1 = \sum_n |h(n)| \quad (5.233)$$

La norma de Chebyshev de la respuesta de frecuencia $H(F)$ es

$$\|H\|_c = \max_F |H(F)| \quad (5.234)$$

la norma l_2 de h es dada como

$$\|h\|_2 = \left[\sum_n h^2(n) \right]^{1/2} \quad (5.235)$$

Si $G_k = \|h\|_1$, entonces la señal del registro k es garantizado para que no halla un sobre-flujo. Una ganancia grande ocurre (con el resultado pequeño de cuantización de ruido) si $G_k = \|H\|_c$. Y por lo tanto, se garantiza que en el sistema no exista un sobre-flujo.

Cuantización de Ruido.

Multiplicar un número B_1 -bit con un número B_2 -bit da un producto $(B_1 + B_2)$ -bit. Este producto debe ser aproximado a menos bits o de lo contrario la longitud de palabra estará afuera del límite. Como se describió anteriormente, el truncamiento o

redondeo debe usarse para dar una aproximación de un B -bit para el número $(B_1 + B_2)$ -bit. La diferencia entre el producto de prueba $z = x$ y la aproximación del B -bit de representación $[z]_Q$, $e = z - [z]_Q$, es modelada como una variable aleatoria uniformemente distribuida que es independiente del valor de z . La variancia de esta cuantización de ruido es $Q^2/12$, en donde la cuantización del tamaño de paso es $Q = 2^{-B+1}$.

La potencia de ruido de la salida es encontrado por asumir que cada fuente de ruido es independiente de todos los otros ruidos, para que el total de la potencia es simplemente la suma individual de los ruidos de potencia. El ruido de potencia de salida que resulta desde un ruido fuente n_i es encontrado, por medio de calcular primeramente la función de transferencia desde la localización del i -ésimo ruido fuente, $H_i(z)$, y entonces evaluar la potencia por medio de la integración del ruido de potencia de densidad espectral para dar lo siguiente

$$P_i = 2^{-2B}/3 \int_{-1/2}^{1/2} |H_i(\text{Exp}(j 2\pi F))|^2 dF \quad (5.236)$$

La figura 5.44 ilustra como el ruido fuente contribuye a la salida total del ruido. Los bloques etiquetados con H_i corresponden a la función de transferencia desde la localización del i -ésimo ruido fuente para la salida del filtro.



Figura 5.44. Contribuciones de Fuentes de Error.

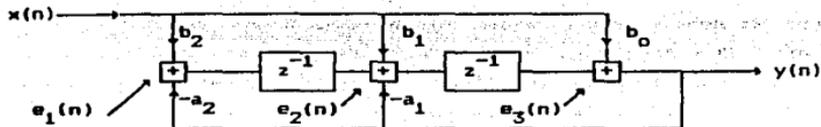


Figura 5.45. Estructura transpuesta con ruido de cuantización.

Ejemplo 5.4. Cálculo del ruido de potencia de un bloque de segundo orden. La estructura transpuesta en la figura 5.37 es reproducida en la figura 5.45 con una adición de ruido de cuantización indicado por el símbolo de error de ruido $e_i(n)$, en los tres lugares en donde la señal debe ser cuantizada. La función de transferencia desde el primer ruido fuente e_1 a la salida es

$$Y(z)/E_1(z) = T_1(z) = \frac{z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (5.237)$$

La función de transferencia desde el segundo ruido fuente e_2 para la salida es

$$Y(z)/E_2(z) = T_2(z) = \frac{z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (5.238)$$

finalmente, la función de transferencia desde el tercer ruido fuente para la salida es

$$Y(z)/E_3(z) = T_3(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (5.239)$$

Las tres funciones de transferencia tienen la misma magnitud cuadrada, para el factor de ganancia de ruido que es

$$R = 1/2\pi \oint T(z)T^*(z^{-1}) dz/z \quad (5.240)$$

después evaluando la integral en la ec. 5.240, se obtiene

$$R = \frac{1 + \alpha_2}{(1 - \alpha_2)[(1 + \alpha_2)^2 - \alpha_1^2]} \quad (5.241)$$

La grandeza del ruido de ganancia R ocurre cuando el filtro tiene un polo doble cerca de $+1$ (frecuencia cero) o -1 (una media de frecuencia muestral) con $\alpha_1^2 = 4\alpha_2$. En este caso

$$R = R_{\max} = \frac{1 + \alpha_2}{(1 - \alpha_2)^3} \quad (5.242)$$

Los ruidos de ganancia más pequeños ocurren cuando el filtro tiene polos más cerca o al menos un cuarto de la frecuencia muestral con $\alpha_1 = 0$ y

$$R = R_{\min} = \frac{1}{1 - \alpha_2^2} \quad (5.243)$$

el ruido de potencia total es

$$P = \sum_{i=1}^3 R_i Q^2 / 12 = 3(RQ^2/12) \quad (5.244)$$

en donde $Q = 2^{-B}/3$.

Límites de Ciclos.

En el análisis de los filtros recursivos, se tiene asumido que el filtro era un sistema lineal. Porque en el análisis de cuantización de ruido se modela el error de cuantización como un error fuente adicionado y usando la teoría del sistema lineal para proporcionar cálculos de la potencia de ruido, resultado de la cuantización.

Los filtros digitales no son sistemas lineales porque del sobre-flujo y el fenómeno de cuantización, el fenómeno de sobre-flujo es un tipo no lineal distintamente del comportamiento. Los métodos usados para manejar el sobre-flujo determina el tipo específico de la no linealidad y la respuesta del filtro después un sobre-flujo. Un filtro digital que es estable acordado para un modelo lineal debe comenzar a oscilar cuando ocurre un sobre-flujo. Este tipo de oscilación es llamada como un límite de ciclo. En el siguiente ejemplo se ilustrará este tipo de oscilación.

Ejemplo 5.5. Límite de ciclo de dos complementos. En este ejemplo un filtro de segundo-orden es mostrado para exhibir un sobre-flujo de un límite de ciclo. La función de transferencia del filtro es

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - z + 1/2} \quad (5.245)$$

La estructura es mostrada en la figura 5.46. El bloque etiquetado con *NL* representa la no linealidad que resulta desde dos complementos aritméticos.

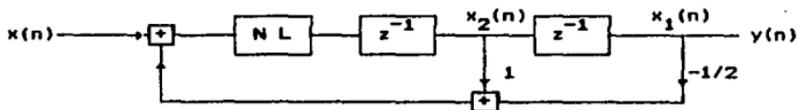


Figura 5.46. Estructura Directa con límite de ciclo.

La no linealidad característica es ilustrada en la figura 5.47. Si la función *NL* era una función lineal, el sistema será estable, con polos de $z_{1,2} = 0.5 \pm j0.5$. Un análisis de la variable de estado del filtro, usando las salidas de los elementos de retraso como variables de estado, se muestran en la figura 5.46.

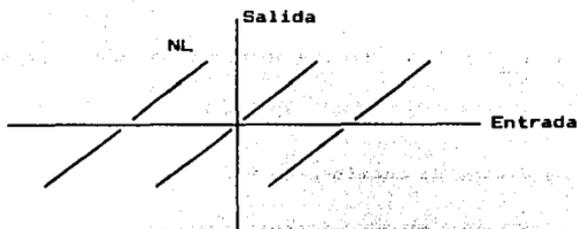


Figura 5.47. Complemento a dos de un sobre-flujo no lineal.

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= x_2(n) \\ x_2(n+1) &= NL[-0.5x_1(n) + x_2(n)] \end{aligned} \quad (5.246)$$

Con un estado inicial de $x_1(0) = 0.8$ y $x_2(0) = -0.8$, en la ec. 5.246, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1(1) &= -0.8, \\ x_2(1) &= NL[-1.2] = +0.8, \end{aligned} \quad (5.247)$$

y para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} x_1(n) &= (-1)^n 0.8, \\ x_2(n) &= -(-1)^n 0.8. \end{aligned} \quad (5.248)$$

Y así, el sistema oscila atrás y entre cuatro de los dos estados

$$\begin{aligned} x_1 &= +0.8, & y & x_1 = -0.8, \\ x_2 &= -0.8, & x_2 &= +0.8, \end{aligned} \quad (5.249)$$

es dicho para que sea un límite de ciclo.

Un sobre flujo de límite de ciclo no ocurriría en la estructura de la figura 5.46, si no hay un sobre flujo para activarse, y el estado inicial no se activaría en uno. No habría un sobre-flujo si el argumento de NL es menor que 1. En otras palabras

$$|-a_2 x_1(n) - a_1 x_2(n)| < 1 \quad (5.250)$$

desde que $|x_{1,2}| \leq 1$, el límite de ciclo no ocurriría si

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| < 1 \quad (5.251)$$

Límites de Ciclos de Escala-pequeña.

El sobre-flujo del límite de ciclo tiene una amplitud de escala-llena y que puede vencer cualquier componente de la señal. Las condiciones para eliminar este tipo de límite de ciclo depende de la estructura del filtro y en el camino en que el sobre-flujo es manipulado. Existen otros tipos de límite de ciclo que tienen una amplitud muy pequeña y depende del tipo de cuantización usado después de una multiplicación y en la estructura del filtro.

Un límite de ciclo de escala-pequeño ocurre antes de que la entrada del filtro sea una constante y los productos sean redondeados. El redondeo de sí mismo introduce una oscilación de amplitud pequeña en el filtro. Un cálculo de la amplitud del límite de ciclo tiene que dar un bloque de segundo orden con un denominador

$$A(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 \quad (5.252)$$

para una longitud de palabra B -bit, cuando se redondea es usada, la magnitud máxima de un límite de ciclo de escala-pequeña y es calculada para que sea

$$H = 2^{-B+1} \left| \frac{0.5}{1 - |\alpha_2|} \right|_{INT} \quad (5.253)$$

en donde x_{INT} es el entero pequeño medio menor que o igual que x . La ec. 5.253 implica que la amplitud del límite de ciclo de escala pequeña pueda ser reducida por incrementar la longitud de palabra (incrementando a B) y/o por reducir la magnitud de α_2 . Reduciendo el tamaño de α_2 correspondiente a mover los polos desde el círculo unitario.

5.7.3. EJEMPLO DE DISEÑO DE UN FILTRO IIR.

En este ejemplo se da un diseño detallado de 5 pasos a seguir, con la implementación de un filtro elíptico de cuarto orden. Se utilizará una estructura en cascada de dos bloques de segundo orden, y en cada bloque es implementado la estructura transpuesta. Los polos son parejas con los cero cerrados, y en la sección con los polos más cercanos el círculo unitario es usado para la salida. El escalamiento para el filtro es realizado primero para la primera sección de segundo orden, y la respuesta impulso de este primer escalamiento es convocada con cada una de las respuestas impulso apropiadas de la segunda sección, y el escalamiento es hecho en la segunda sección.

Paso 1. El primer paso en el diseño es decidir las especificaciones del filtro, las cuales serán para un filtro elíptico de cuarto orden. La especificaciones y la salida son dadas en el figura 5.217.

- a) Paso-banda de corte deseado 0.25
 Banda-alta de corte deseado 0.30
 Paso-banda máxima de atenuación 0.5 dB
 Banda-alta mínima de atenuación 32 dB

b)

$$H(z) = 0.147305 \left(\frac{1 + 1.621784z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.4030703z^{-1} + 0.2332662z^{-2}} \right) \left(\frac{1 + 0.7158956z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.0514214z + 0.7972861z^{-2}} \right)$$

c)

Parte Real	Parte Imaginaria	Magnitud	Fase
-0.8108920e+00	0.5851958e+00	0.1000000e+01	0.2516471e+01
-0.8108920e+00	-0.5851958e+00	0.1000000e+01	-0.2516471e+01
-0.3579478e+00	0.9337416e+00	0.1000000e+01	0.1936865e+01
-0.3579478e+00	-0.9337416e+00	0.1000000e+01	-0.1936865e+01

c)

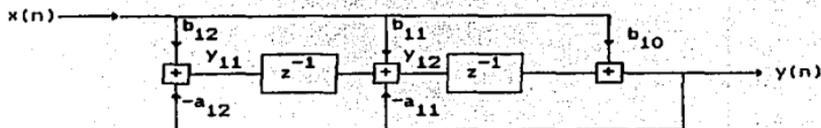
Parte Real	Parte imaginaria Polos	Magnitud	Fase
0.2015399+00	0.4389205+00	0.4829798e+00	0.1140341e+01
0.2015399+00	-0.4389205+00	0.4829798e+00	-0.1140341e+01
-0.2570916-01	0.8925394+00	0.8929096e+00	0.1599593e+01
-0.2570916-01	-0.8925394+00	0.8929096e+00	-0.1599593e+01

Figura 5.48 Ejemplo del diseño del filtro elíptico paso-baja de cuarto orden. a) Especificaciones, b) Función de Transferencia, c) Polos y ceros.

Paso 2. El siguiente paso es elegir el tipo de estructura para la implementación del filtro. Para este caso se elige la estructura en cascada. Y los polos más lejos desde el círculo unitario serán usados para la primera sección en la figura 5.49, y los pares de los ceros cerrados para estos polos son usados.

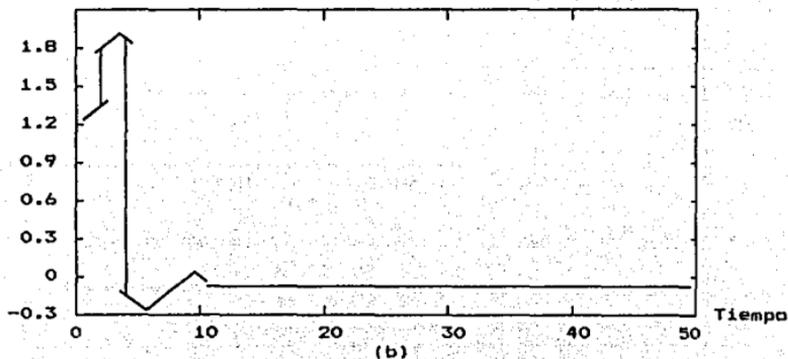
Paso 3. Para la sección de escala, se debe calcular la respuesta impulso y la respuesta de frecuencia desde la entrada x para cada uno de los tres puntos en donde ocurrirá el sobre-flujo, y estos puntos son etiquetados como y_{11} , y_{12} , y y_{13} en la figura 5.49a. Para la salida de la respuesta impulso de esta sección y_{11} , las normas l_1 y l_2 son 5.30748 y 2.7843, respectivamente. El valor máximo de la respuesta de frecuencia, se muestra en la figura 5.50, y es 4.38. La respuesta impulso y_{11} y es la transformada de Fourier, la respuesta de frecuencia H_{11} , son mostradas en la figura 5.51 y 5.52, respectivamente. La respuesta impulso y_{12} y la respuesta de frecuencia H_{12} son mostradas en las figuras 5.53 y 5.54. Y las tres medidas diferentes de ganancia son mostradas en la Tabla 5.3 para cada una de las tres localizaciones en la sección 1.

$A(11) = -0.4030702997$
 $A(12) = 0.2332661953$
 $B(10) = 1.0$
 $B(11) = 1.621783996$
 $B(12) = 1.0$



(a)

1	3.980495E-02	6.100444E-05	
2.024854	1.468299E-02	-9.915724E-05	
1.582892	-3.366872E-03	-5.419761E-05	
0.1656869	-4.782131E-03	1.284583E-06	
-0.3024518	-1.142158E-03		
-0.1605585	6.551397E-04	norma l1 = 5.30748	
5.835414E-03	5.304941E-04	norma l2 = 2.7843	



(b)

Figura 5.49. a) Coeficientes para la sección 1; b) Respuesta impulso para y_1 de la sección 1.

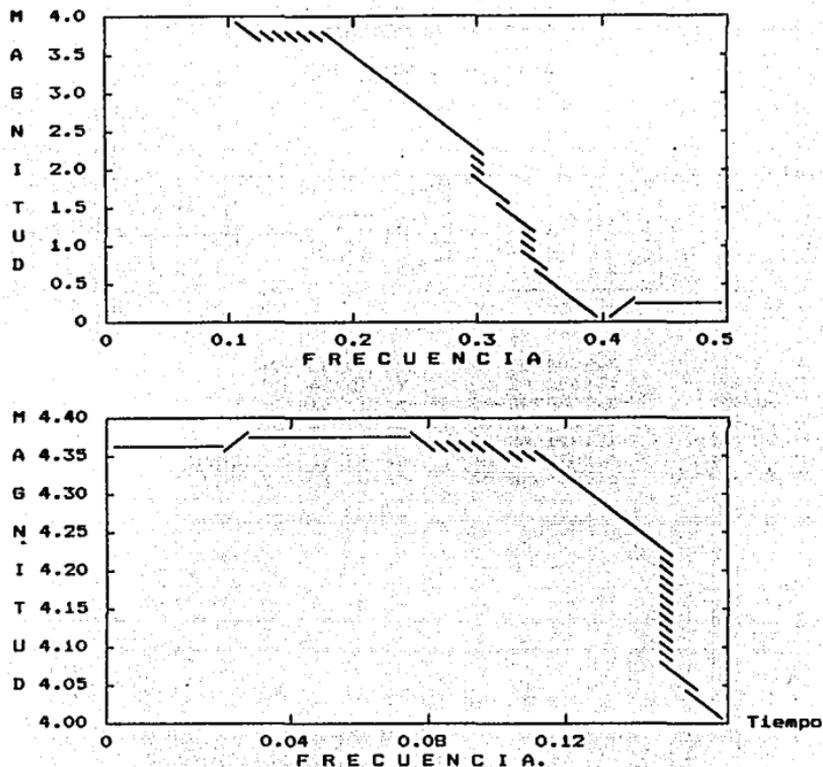


Figura 5.50. Respuesta de frecuencia para la salida de la sección 1.

Tabla 5.3. Normas para la escala de la sección 1.

Localización	Norma l ₁	Norma l ₂	Max H(f)
1	5.30748	2.7843	4.38
11	1.7715	0.9774	1.28
12	4.30748	2.5985	3.67

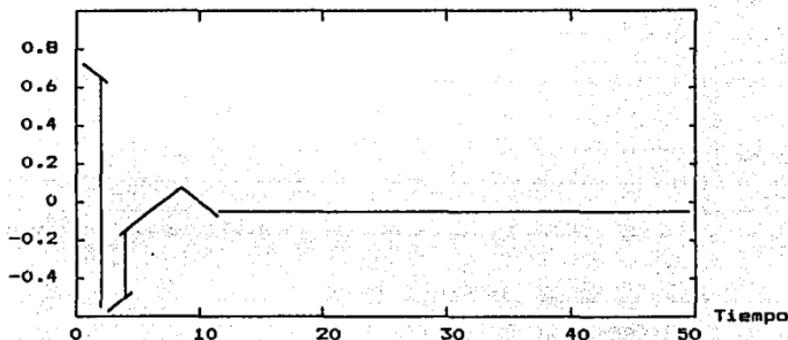
La figura 5.55 muestra la escala de coeficientes para la sección 1, la cual es obtenida por dividir el numerador de coeficiente original por la norma l_1 de la respuesta impulso y_1 , y la norma grande l_1 . Esta escala es estratégicamente la más conservativa.

La función de Transferencia para y_{11} :

$$H_{11}(z) = \frac{Y_{11}}{X} = \frac{b_{110} + b_{111} z^{-1}}{1 + a_{111} z^{-1} + a_{112} z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} A_{(111)} &= -0.4030702997 \\ A_{(112)} &= 0.2332661953 \\ B_{(110)} &= 0.766733805 \\ B_{(111)} &= -0.781377681 \\ B_{(112)} &= 0.0 \end{aligned}$$

(a)



(b)

-0.7667338	-3.425045E-03	1.264247E-05	
-0.4723301	7.853776E-04	-2.99649E-07	
-0.3692353	1.11551E-03		
-3.864915E-02	2.664268E-04		Norma $l_1 = 1.7715$
7.055178E-02	-1.528219E-04		
3.745287E-02	-1.237464E-04		Norma $l_2 = 0.9774$
-1.361206E-03	-1.423029E-05		
-9.28515E-03	2.313003E-05		

Figura 5.51. a) Función de transferencia y_{11} Sección 1; b) Respuesta impulso

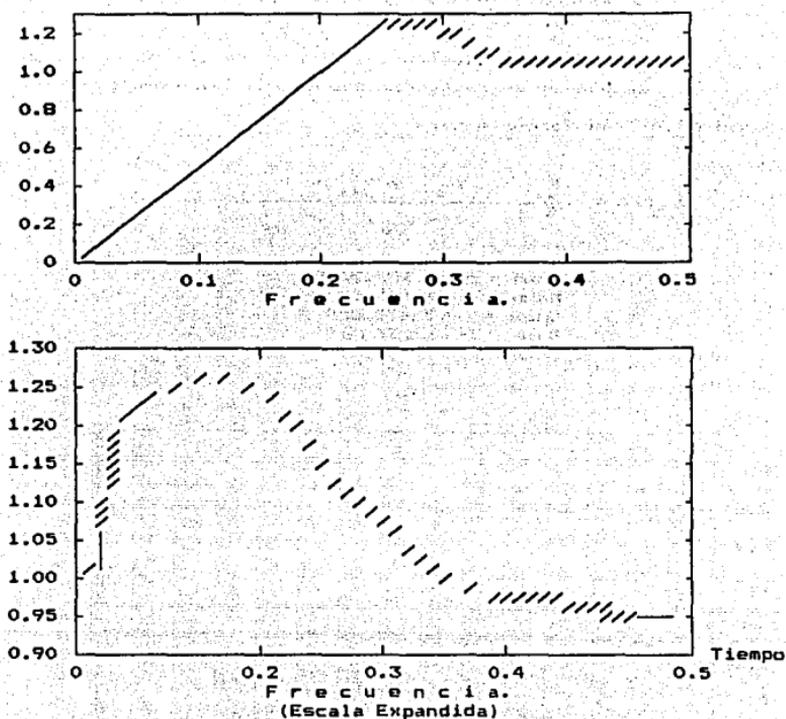


Figura 5.52. Respuesta de Frecuencia para y_{11} en la sección 1.

Sección 1 Función de Transferencia para y_{12}

$$H_{12} = \frac{Y_{12}}{X} = \frac{b_{120} + b_{121} z^{-1}}{1 + a_{121} z^{-1} + a_{122} z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} A_{121} &= -0.4030702997 & B_{121} &= 0.766733805 \\ A_{122} &= 0.2332661953 & B_{122} &= 0.0 \\ B_{120} &= 2.024854296 \end{aligned}$$

(a)

2.024854	5.835414E-03	-1.142158E-03	-5.419761E05
1.582892	3.980495E-02	6.551397E-04	1.316025E-06
0.1656869	1.468299E-02	5.304941E-04	1.284583E-06
-0.3024518	-3.366872E-03	6.100444E-05	Norma l ₁ = 4.30748
-0.1605585	-4.782131E-03	-9.915724E-05	Norma l ₂ = 2.59849

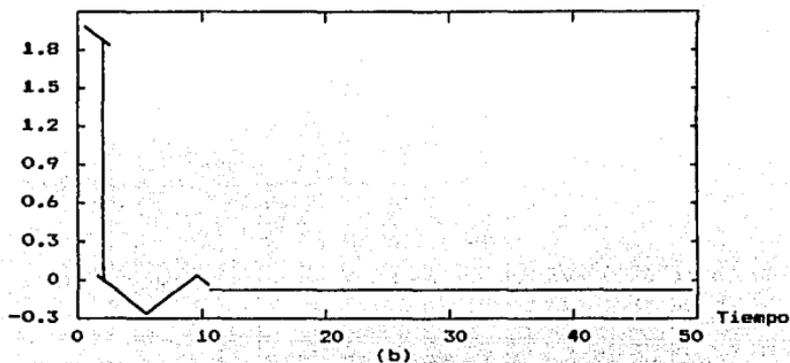
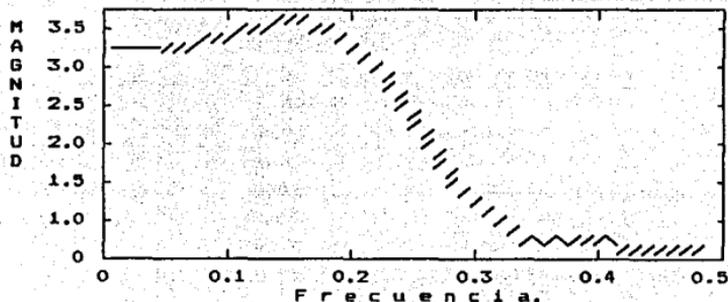


Figura 5.53. a) Función de Transferencia para la localización de y1z en la sección 1; b) Respuesta impulso de y1z.



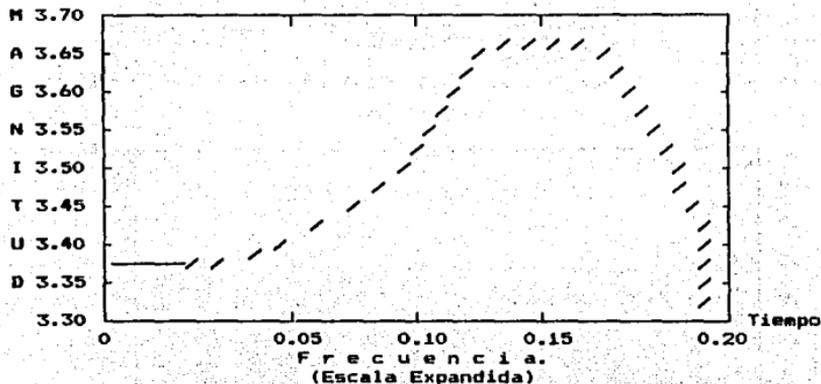
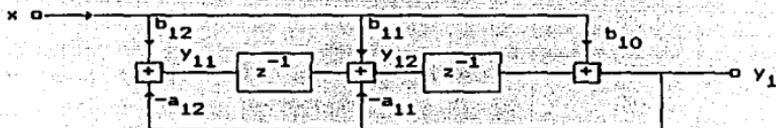


Figura 5.54. Respuesta de frecuencia para la localización y_{12} en sección 1.



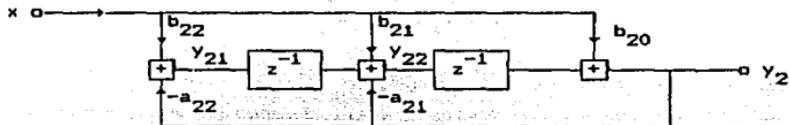
$$H_1(z) = \frac{b_{10} + b_{11}z^{-1} + b_{12}z^{-2}}{1 + a_{11}z^{-1} + a_{12}z^{-2}}$$

Escala de Coeficientes cuantizados :
(coeficiente original b dividido entre 5.30748)

	Decimal	Hex
a_{11}	= -0.4030703	CC68
a_{12}	= 0.2332662	1D0C
b_{10}	= 0.1884133	181E
b_{11}	= 0.3055656	271D
b_{12}	= 0.1884133	181E

Figura 5.55. Escala de coeficientes cuantizados para la sección 1.

Paso 4. Para la escala de la sección 2, se calcula la respuesta impulso y la respuesta de frecuencia desde la segunda entrada x_2 para cada uno de los tres puntos donde el sobre-flujo pudiera ocurrir; esos puntos son etiquetados como y_{21} , y_{22} y y_2 en la figura. Porque se debe ser de interés en la escala acordada para la entrada x , del filtro, y no la entrada de la segunda sección, esas tres respuestas impulso son convocadas con la respuesta impulso de la escala de la sección 1. En este camino la respuesta impulso es calculada desde el filtro de entrada x para las tres localizaciones en la segunda sección, y_{21} , y_{22} , y y_2 .



$$A(21) = 0.05142140356$$

$$A(22) = 0.7972860789$$

$$B(20) = 1.0$$

$$B(21) = 0.7158955928$$

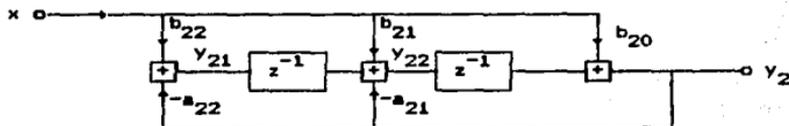
$$B(22) = 1.0$$

Figura 5.56. Coeficientes para la sección 2.

Para la respuesta impulso de la salida de la sección, y_2 , la norma l_1 es 2.85527. Las otras dos respuestas impulso tienen normas pequeñas, como se muestran en la tabla 5.4.

Localización	Norma 1
2	2.85527
21	1.36112
22	1.86357

Tabla 5.4. Normas para la escala de la sección 2.



$$H_2(z) = \frac{b_{20} + b_{21}z^{-1} + b_{22}z^{-2}}{1 + a_{21}z^{-1} + a_{22}z^{-2}}$$

Escala de Coeficientes cuantizados :

(coeficiente original b dividido entre 2.855274)

	Decimal	Hex
a_{11}	0.0514214	0695
a_{12}	0.7972861	660D
b_{10}	0.35022908	1A00
b_{11}	0.25072745	129D
b_{12}	0.35022908	1A00

Figura 5.57. Escala de coeficientes cuantizados para la sección 2.

La figura 5.57 muestra la escala de coeficientes cuantizados para la sección 2, la cual es obtenida por dividir el numerador original de coeficientes por la norma 1 de la respuesta impulso yz , esta escala estratégica es más conservativa.

Paso 5. La escala de los coeficientes calculados en los pasos 3 y 4 son usados en un programa de lenguaje ensamblador para la implementación en cascada de dos secciones de estructura transpuesta de segundo orden.

5.7.4. - COMPARACIÓN ENTRE EL FILTRO FIR Y EL FILTRO IIR.

Filtro Digital FIR.

Un filtro digital FIR tiene una respuesta de pulso unitario de duración finita. Y su función de transferencia es un polinomio de z^{-1}

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{N-1} z^{-(N-1)} \quad (5.254)$$

Un filtro de longitud N tiene una función de transferencia que tiene $N - 1$ ceros en el plano z y tiene un polo de orden $N - 1$ en el origen del plano z .

$$H(z) = \frac{h_0 z^{N-1} + \dots + h_{N-1}}{z^{N-1}} \quad (5.255)$$

Un filtro FIR es llamado como un *Filtro all-zero (Cero total)*, porque éste tiene ceros pero no polos de otro lugar que en el origen.

Un filtro FIR puede tener una fase lineal. Es decir el grupo de retraso del filtro puede ser una constante. Esta propiedad de fase-lineal resulta desde la simetría de la respuesta pulso-unitario del filtro. Pero un filtro IIR tiene una respuesta de pulso-unitario infinito y que no puede ser simétrica si esta es causal (es decir igual a cero para $n < 0$). Por tal motivo, un

filtro IIR no puede tener una fase lineal. Es más, un filtro IIR no puede ser diseñado con una buena aproximación de fase lineal, a menos que sobre un límite de banda de frecuencias. El retraso de un filtro FIR causal de fase-lineal de longitud N es $(N - 1)/2$. El requerimiento del filtro de longitud N se incrementa cuando la buena transición entre la frecuencia de bandas son especificadas, y/o una atenuación grande son requeridas en un banda alta.

El problema de aproximación para el filtro FIR y IIR es resuelto en uno de dos caminos. Cualquiera de los dos en una forma cerrada, la expresión analítica es usada, posiblemente con una transformación sutil, o con un procedimiento numérico de optimización para resolver los coeficientes del filtro. Una familia de diseño de fórmulas analíticas para filtros FIR dan una óptima aproximación de error LS para un filtro ideal paso-baja o una función trigonométrica de transición de región. Una segunda familia es basada en el diseño de ventanas para un error LS de aproximación en orden para reducir el error de Chebyshev a la expectativa del error cuadrático.

La realización o implementación de un filtro FIR con puntos-fijos aritméticos, son mucho más fáciles y menos problemosos que la implementación de un filtro IIR. En la implementación no recursiva del filtro FIR en donde las salidas son calculadas como una carga de combinación lineal de las entradas presentes y pasadas son un camino estable.

Filtro Digital IIR.

Un filtro IIR tiene una respuesta de pulso-unitario de duración infinita. La función de transferencia de un filtro IIR, es una función racional de z^{-1} :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (5.256)$$

Esta función es también escrita como una función racional de z

$$H(z) = z^{N-M} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} \quad (5.257)$$

a diferencia de los filtros analógicos, en donde el orden del numerador debe ser menor que o igual que para el orden del denominador, un filtro digital puede tener N grandes que igual o menores que M . En suma para el orden $N - M$ cero o polo del origen, el filtro tiene M ceros y N polos en el plano z .

Un filtro IIR puede conseguir en general una buena transición entre el borde de la banda que un filtro FIR puede con el mismo número de coeficientes. La razón es que el filtro IIR tiene un polo cerca del borde del paso-banda y uno cerca a cero del borde del banda-alta. Desde que un filtro FIR no tiene polos (excepto en el origen), éste no puede conseguir el mismo buen corte (cutoff). El cero y el polo de espacio cerrado, producen el cambio elegido en la magnitud característica del filtro, también producen un cambio rápido en la fase y en la fase de la pendiente para frecuencias cercanas al polo y el cero. Esto no es posible para un filtro IIR por tener precisamente un grupo constante de retraso para todas las frecuencias. La fase mínima, del filtro IIR paso-baja con una buena transición entre el paso-banda y el banda-alta típicamente tienen un pequeño grupo de retraso de frecuencia cero que se incrementa rápidamente a las frecuencias cercanas al borde de la banda.

La implementación de un filtro IIR con una realización recursiva en un punto fijo aritmético es mucho más difícil que el directo, de la implementación de un filtro FIR no recursivo.

Un filtro IIR tiene una ventaja sobre un FIR, en que generalmente tiene menos coeficientes que un FIR con una magnitud característica similar, así la memoria es menos requerida para almacenar los coeficientes. Una memoria más significativa resulta

cuando ocurre porque sólo un menor de las entradas recientes necesita ser almacenada, en contraste para el caso del FIR en donde N entradas de valores necesitan ser almacenadas para una longitud N del filtro.

5.7.5. PROCESAMIENTO EN TIEMPO REAL (DSP DIGITAL SIGNAL PROCESSING)

Ahora, se verán las estructuras y métodos de programación de los diferentes tipos de circuitos integrados que procesan señales digitales, mejor conocidos como DSP (digital signal processor).

Existen dos clases distintas de DSP : Los DSP de punto fijo y los de punto flotante. Dentro de la primera categoría se tratará primero con un DSP de la manufactura de Texas Instruments con el chip TMS320C25 y con el chip DSP56001 de Motorola.

Los de la segunda categoría serán el chip DSP96002 de Motorola y el chip TMS320C30 de Texas Instruments.

DSP TMS320C25 DE PUNTO FIJO.

El chip TMS320C25 es mejorado pin por pin y con un código-objeto ascendente, compatible con la versión antigua del chip TMS32020. Sus manufacturas sobresalientes son las siguientes:

- Ciclo de tiempo por instrucción de 100 ns.
- Alta tecnología CMOS con un bajo consumo de energía.
- Memoria de datos de 64K palabras, con espacio de memoria para programas de 64k palabras.
- Chip activo de tipo RAM de programa/dato de 544 X 16 bits.
- 4K de palabras de tipo ROM enmascarado.
- Operaciones de ciclo simple, de multiplicación y de acumulación.
- 32-bits de ALU con distintos cambios de opciones.
- Cinco registros de dirección, con unidad aritmética dedicada.
- Ocho registros auxiliares con unidad aritmética dedicada.
- Ocho niveles de pila de hardware.
- Bit-reservado de modo de direccionamiento para FFT de radix-2.
- Extensión de precisión aritmética y soporte de filtrage.
- Operación dinámica de MAC/MACD desde memoria externa.
- Acumulador de bit de acarreo y multiplicaciones sin signo para calculos aritméticos complejos.
- Chip activo de hardware de registros de tiempo/periód.
- Estática completa de doble buffer de 8/16 bits de puerto serial.

- Multiprocesador de interface con reloj de sincronización.
- Interface paralela de 16 bits para datos, programas y acceso de entrada/salida con capacidad de espera de estado.
- Interface de transmisión T1/G.711.
- Concurrente DMA usando una operación extendida de retención.
- Paquete PLCC de 68 pines.
- Polarización a 5 volts positivos.

INSTRUCCIONES DE REFERENCIA DEL ACUMULADOR DE MEMORIA (TMS320C25)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 7.3
ABS	Acumulador de valor absoluto	
ADDC	Agregar al acumulador con acarreo	
ADDK	Agregar al acumulador inmediato corto	
ADDT	Agregar al acumulador con cambio específico para el registro T	
AND	Instrucción logica AND con acumulador	
CMPL	Acumulador complemento	
LACK	Acumulador de carga inmediata corta	
LALK	Acumulador de carga inmediata de longitud con cambio	
NORM	Normalizador de contenido de acumulador	
ORK	Instrucción logica OR inmediata con acumulador y cambio	
ROR	Acumulador rodante derecho	
SACL	Almacenador de acumulador bajo con cambio	
SFL	Cambio de acumulador izquierdo	
SUB	Subtraer desde el acumulador con cambio	
SUBC	Subtracción condicional (usando una rutina de división)	
SUBK	Subtraer desde el acumulador corto inmediato	
SUBT	Subtraer desde el acumulador con cambio específico para el registro T	
XORK	Instrucción logica OR exclusiva inmediata con acumulador y cambio	
ZALH	Acumulador cero bajo y carga de acumulador alto	

INSTRUCCIONES DE REFERENCIA DEL ACUMULADOR DE MEMORIA (TMS320C25)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 7.3
ZALS	Acumulador cero y acumulador de carga baja con extensión de signo suprimido	
ADD	Agregar al acumulador con cambio	
ADDH	Agregar al acumulador alto	
ADDS	Agregar al acumulador bajo con extensión de signo suprimido	
ADLK	Agregar al acumulador grande inmediato con cambio	
ANDK	Instrucción lógica AND inmediata con acumulador y cambio	
LAC	Cargar al acumulador con cambio	
LACT	Cargar al acumulador con cambio específico para el registro T	
NEG	Acumulador negativo	
OR	Instrucción lógica OR con acumulador	
RDL	Acumulador rodante izquierdo	
SAC	Almacenamiento de acumulador alto con cambio	
SBLK	Substracción desde el acumulador grande inmediato con cambio	
SFR	Cambio al acumulador derecho	
SUBB	Substracción desde el acumulador con préstamo	
SUBH	Substracción desde el acumulador alto	
SUBS	Substracción desde el acumulador bajo con extensión de signo suprimido	
XOR	Instrucción lógica OR exclusiva con acumulador	
ZAC	Acumulador cero	
ZALR	Acumulador menor cero y carga al acumulador alto con redondeo	

Arquitectura del TMS320C25.— Un diagrama a bloques del TMS320C25 se muestra en la figura 5.58. La arquitectura de este chip está basada en el uso de memorias (datos e instrucciones de memoria), y cada una de estas memorias contiene un chip activo y uno no activo. El chip activo corresponde a una memoria RAM de 256K de

16-bits (bloque B0). Hay otras dos memorias, y estas son, el bloque B1 de 256 palabras y el bloque B2 de 32 palabras. Estas dos RAM son siempre usadas para datos de memoria. La razón para asignar dos RAMs más es porque éstas no tienen continuidad en la dirección. EL chip no activo corresponde a un memoria ROM de 128K palabras de direccionamiento.

Hay dos buses de 16-bit de tamaño adentro del chip llamados como Bus de Datos y Bus de Programa. El Bus de programa lleva las instrucciones de código e inmediatamente opera desde el programa de memoria. El Bus de datos está interconectado con varios elementos, así como con la unidad central aritmética lógica (CALU) y el archivo auxiliar de registro para los datos de la RAM.

Conjunto de Instrucciones del TMS320C25.- De la tabla 5.5 al 5.10 se especifican todas las instrucciones básicas del chip. Estas incluyen desde el movimiento de datos, programas, subrutinas, control de flujo e instrucciones de entrada/salida.

INSTRUCCIONES DE PUNTERO DE PAGINA DE DATOS Y REGISTROS AUXILIARES (TMS320C25)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 7.4
ADRK	Agregarse a registro auxiliar corto de inmediato	
LAR	Cargar a registro auxiliar	
LARP	Cargar a registro auxiliar puntero	
LDPK	Carga de dato de programa memoria de puntero inmediato	
MAR	Modifica registro auxiliar	
SBRK	Subtraer el registro auxiliar corto inmediato al valor	
CMPR	Comparar registro auxiliar con registro auxiliar ARO	
LARK	Carga de registro auxiliar corto inmediato	
LDP	Carga de datos de memoria a pagina puntero	
LRLK	Carga de registro auxiliar grande inmediato	
SAR	Almacenar registro auxiliar	

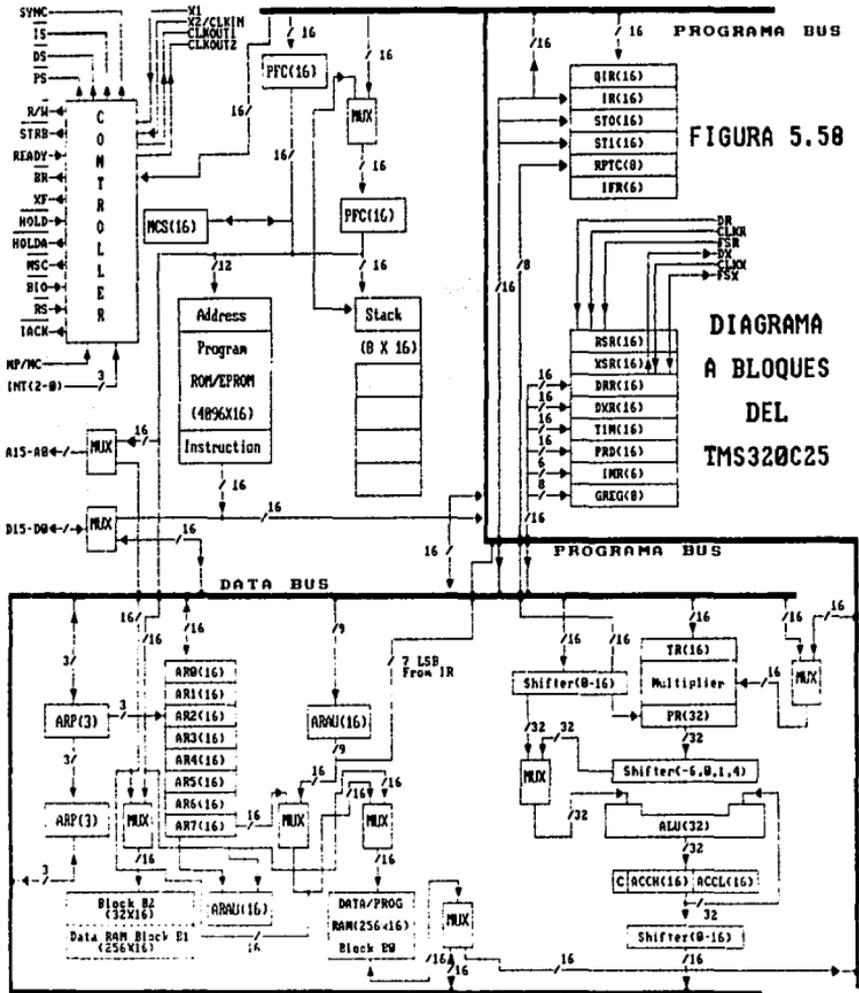


FIGURA 5.58

DIAGRAMA A BLOQUES DEL TMS320C25

FALLA DE ORIGEN

REGISTROS T, P E INSTRUCCIONES DE MULTIPLICACIÓN (TMS320C25)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 7.5
APAC	Agregar el registro P al acumulador	
LT	Cargar el registro T	
LTD	Cargar el registro T, acumulador previo del producto y mover dato	
LTS	Cargar el registro T y restar previo el producto	
MACD	Multiplicar y acumular con movimiento de dato	
MPYA	Multiplicar y acumular producto previo	
MPYS	Multiplicar y restar producto previo	
PAC	Cargar el acumulador con el registro P	
SPH	Almacenar el registro P a alta	
SPM	Colocar el registro P a salida en modo de cambio	
SQRS	Elevar al cuadrado y restar previo producto	
LPH	Cargar el registro P a alta	
LTA	Cargar el registro T y acumular previo producto	
LTP	Cargar el registro T y almacenar el registro P en el acumulador	
MAC	Multiplicar y acumular	
MPY	Multiplicar (con registro T, almacenar producto en el registro P)	
MPYK	Multiplicar inmediatamente el operando	
MPYU	Multiplicar sin signo	
SPAC	Restar el registro P desde el acumulador	
SPL	Almacenar el registro P a baja	
SQRA	Elevar al cuadrado y acumular	

RAMA Y LLAMADAS DE INSTRUCCIÓN (TMS320C25)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 7.6
B	Dividir incondicionalmente	
BANZ	Dividir en registro auxiliar no igual a cero	

RAMA Y LLAMADAS DE INSTRUCCIÓN (TMS320C25)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 7.6
BBZ	Dividir si el estado de control/prueba de bit(TC)=0	
BGEZ	Dividir si el acumulador es mayor que o igual que cero	
BIOZ	Dividir en entrada/salida el estado igual a cero	
BLZ	Dividir si el acumulador es menor que cero	
BNV	Dividir si no hay overflow	
BV	Dividir en overflow	
CALA	Llamar a subrutina indirecta	
RET	Regresar desde subrutina	
BACC	Dividir a la direccion especificada del acumulador	
BBNZ	Dividir si el estado de control/prueba del bit (TC) no es cero	
BC	Dividir el acarreo si es verdadero	
BGZ	Dividir si el acumulador es mayor que cero	
BLEZ	Dividir si el acumulador es menor que o igual a cero	
BNC	Dividir en no acarreo	
BNZ	Dividir si el acumulador no es cero	
BZ	Dividir si el acumulador es cero	
CALL	Llamar a la subrutina	
TRAP	Interrumpir software	

INSTRUCCIONES DE CONTROL (TMS320C25)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 7.7
BIT	Probar el bit de especificacion del dato de memoria	
CNFD	Configurar el bloque como el dato de memoria	
DINT	Desactivar interrupcion	
IDLE	Inactivar hasta que se interrumpa	
LST1	Cargar el estado del registro ST1	

INSTRUCCIONES DE CONTROL (TMS320C25)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 7.7
POP	Colocar en lo alto de la pila el acumulador bajo	
PSHD	Empujar el valor del dato de memoria a la pila	
RC	Iniciar bit de acarreo	
ROVM	Iniciar modo over flow (saturado)	
RPTK	Repetir instruccion como se especifico para el valor inmediato	
RTC	Iniciar control/prueba de bandera	
SHM	Poner en modo de retension	
SST	Almacenar es estado del registro STO	
SSXM	Ponerse en modo de extension de signo	
BITT	Prueba del bit especifico para el registro T	
CNFP	Configurar el bloque del programa en la memoria	
EINT	Activar la interrupcion	
LST	Cargar el estado del registro STO	
NOP	No operacion	
POPD	Colocar en lo alto de la pila el dato de la memoria	
PUSH	Empujar el acumulador bajo dentro de la pila	
RHM	Inicial modo de retension	
RPT	Repetir instruccion como se especifico para el valor del dato en la memoria	
RSXM	Iniciar modo de extension de signo	
SC	Poner bit de acarreo	
SOVM	Ponerse en modo overflow (saturado)	
SST1	Almecenar el estado del registro ST1	
STC	Poner tes/control de bandera	

I/O (ENTRADA/SALIDA) E INSTRUCCIONES DE DATOS DE MEMORIA (TMS320C25)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 7.8
BLKD	Mover bloque de datos hacia la memoria	
DMOV	Mover datos en la memoria	
IN	Entrada de datos desde el puerto	
RFSM	Iniciar puerto serial en modo de sincronizacion	
RXF	Iniciar bandera externa	
STXM	Poner puerto serial en modo de transmision	
TBLR	Leer Tabla	
BLKP	Mover el bloque desde el programa a datos de memoria	
FORT	Formato de registros de puerto serial	
OUT	Salida de dato a puerto	
RTXM	Iniciar puerto serial en modo de transmision	
SFSM	Poner puerto serial en modo de sincronizacion	
SXF	Poner bandera externa	
TBLW	Escribir tabla	

DSP DSP5600/1 DE PUNTO FIJO.

El DSP56000/1 es un chip de punto fijo de 24-bits, fabricado con tecnología HCMOS. El chip tiene una manufactura de 512 palabras de lleno-rápido, chip activo, programa RAM, dos ROMs de datos preprogramados, y un chip de boot-strap; que permite la carga conveniente de usar un programa dentro del programa RAM.

El corazón del procesador consiste de tres unidades de ejecución de operación en paralelo : la unidad aritmética lógica de datos (ALU), la unidad de generación de direccionamiento (AGU), y el controlador de programa. EL DSP56000/1 tiene un chip activo

para periféricos, un programa de memoria, memoria de datos, y un puerto de expansión de memoria.

La manufactura del DSP56000/1 de Motorola :

- 75 or 100 ns de instrucción por ciclo
- Multiplicación/Suma de 24 x 24 bits en una instrucción por ciclo
- Dos acumuladores de 56-bits
- 544 palabra de ROM y 1024 palabras de RAM en chip activo.
- Conjunto completo de operaciones ALU
- Tres tipos de puertos de entrada/salida

Arquitectura del DSP56000/1. - La arquitectura del DSP56000/1 tendría que ser designada para maximizar a través de datos intensivos en la aplicación del DSP. El objetivo tiene resultado para una natural dualidad, la arquitectura expandible con un sofisticado chip activo de periféricos y un propósito general de entrada/salida. La arquitectura es doblemente Harvard porque desde que el programa de memoria, hay dos independientes, espacio expandible de memoria, dos unidades de generación de direccionamiento (AGUs), y una unidad aritmética lógica de datos (ALU) tienen dos acumuladores y dos circuitos de cambio/limite. Así particionando dos segmentos de datos dentro pueden ser usados para gráficas y procesamiento de imagen para trabajar en el espacio con coordenadas X e Y. En la aplicación de filtros para ordenar datos y coeficientes y en procesos aritméticos complejos para separar la parte real de la imaginaria. En figura 5.59 se muestra un diagrama a bloques del DSP56000/1.

El DSP56000/1 es organizado alrededor de los registros de un procesador central compuesto de tres unidades independientes de ejecución. El bus mueve datos e instrucciones mientras las instrucciones son ejecutadas a través de la unidad de ejecución. El movimiento de datos en el chip ocurre sobre cuatro buses bidireccionales de 24-bits; el bus del dato X (XDB), el bus del

dato Y (YDB), el bus del dato de programa (PDB), y el bus de dato global (GDB). El bus de los datos X e Y deben ser tratados por ciertas instrucciones como un bus de datos de 48-bits.

La ALU realiza todas las operaciones aritméticas y lógicas de los datos que le llegan a esta unidad. Esto consiste de cuatro registros de entrada de 24-bits, dos acumuladores de registro de 48-bits, dos acumuladores de extensión de registro de 8-bits, un acumulador de cambio, dos circuitos de bus de datos de cambio de limitador y uno en paralelo.

Conjunto de Instrucciones del DSP56000/1.- De la tabla 5.11 a la 5.16 se especifican todas las instrucciones básicas del chip. Además fueron divididas en seis grupos : el aritmético, lógico, el bit de manipulación, el ciclo (loop), el de movimiento (move), y el del programa de control.

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP56000).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.11
ABS D (parallel move)	Almacenar el valor absoluto de la destinacion del operando D en el acumulador de destino	
ADC S,D (parallel move)	Agregar el origen del operando S y el bit de acarreo C de la condicion del codigo de registro al destino del operando D y almacenar el resultado en el acumulador destino.	
ADD S,D (parallel move)	Agregar el operando S al operando de destinacion D y almacenar el resultado en el acumul.	
ADDL S,D (parallel move)	Agregar el origen del operando S para 2 tiempos del operando D de destino y almacenar el resultado en el acumulador destino.	
ADDR S,D (parallel move)	Agregar el origen del operando S para uno y medio de la destinacion de operando D y almacenar el resultado en el acumulador destino.	
ASL D (parallel move)	Aritmeticamente cambiar el operando D de destino un bit a la izquierda y almacenar el resultado en el acumulador destino.	
ASR D (parallel move)	Aritmeticamente cambiar el operando D destino un bit a la derecha y almacenar el resultado en el acumulador destino.	
CLR D (parallel move)	Limpia el acumulador destino de 56 bits.	

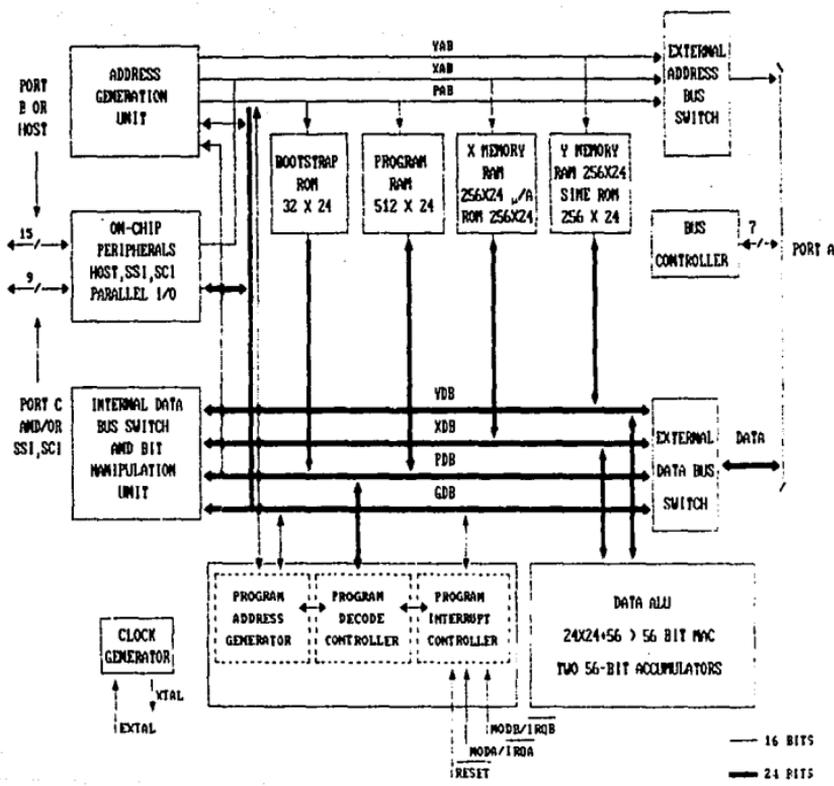


DIAGRAMA A BLOQUES DEL DSP56001

FIGURA 5.59

FALLA DE ORIGEN

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP56000).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.11
CMP S1, S2 (parallel move)	Subtraer del origen un operando S1, desde el origen del acumulador S2, y actualizar el codigo del registro de condicion.	
CMPM S1,S2 (parallel move)	Subtraer la magnitud del origen de un operando S1, desde la magnitud del origen de un segundo acumulador S2, y actualizar la condicion de registro de codigo.	
DIV S,D	Divide el operando D destino (48 bits de fraccion positiva dividiendo la extension del signo a 56 bits) por origen del operando S (24 bits de divisor de fraccion de signo y almacenar el parcial restante) y la forma del cociente (un nuevo bit) en el acumulador D destino.	
MAC (+,-)S1,S2,D (parallel move)	Multiplicar el origen de los operandos S1 y S2 por dos signos de 24 bits y suma/resta el producto desde/para el especificado acumulador D de destino de 56 bits.	
MACR (+,-)S1,S2,D (parallel move)	Multiplica el origen de los operandos S1 y S2 por dos signos de 24 bits y suma/resta el producto desde/para el especificado acumulador D de destino de 56 bits y entonces redondea.	
MPY (+,-)S1,S2,D (parallel move)	Multiplica el origen de los operandos S1 y S2 por 2 signos de 24 bits y almacenar el resultado del producto (con opcion de negacion) en el acumulador destino especificado de 56 bits.	
NEG D (parallel move)	Negar (2 complementos de 56 bits) el destino del operando D y almacenar el resultado.	
MPYR (+,-)S1,S2,D (parallel)	Multiplicar el origen de los operandos S1 y S2 por 2 signos de 24 bits, redondeando el resultado del producto (con opcion a negacion) en el acumulador destino especificado de 56 bits.	
NORM Rn,D	Basado arriba el resultado de una iteracion normalizada de 56 bits en el operando D destino especificado, actualizar la direccion del registro Rn y el resultado almacenarlo devuelta en el acumulador destino.	
RND D (parallel move)	Redondear el valor de 56 bits en el operando D destino especificado por medio de un redondeo convergente y almacenar el resultado en la porcion mas significativa del acumlador destino (A1 a B1).	
SBC S,D (parallel move)	Subtraer el origen del operando S y el bit de acarreo C, la condicion del registro de codigo desde el operando D destino y almacenar el resultado en el acumulador destino.	
SUB S,D (parallel move)	Subtraer el origen del operando S desde el operando D y almacenar el resultado en el operando D destino.	

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP56000).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.11
SUBL S,D (parallel move)	Subtraer el origen del operando S desde 2 tiempos del operando D destino y almacenar el resultado en el acumulador destino.	
SUBR S,D (parallel move)	Subtraer el origen del operando S desde el uno y medio del operando D destino y almacenar el resultado en el acumulador destino.	
Tcc SI, DI	Transferir datos desde el origen del registro SI especificado a el acumulador destino especificado DI si la condicion especificada "cc" es verdadera.	
TFR S, D (parallel move)	Transferir datos desde el origen del dato especificado ALU del registro S a el destino especificado del dato ALU del acumulador D.	
TST S (parallel move)	Comparar el origen especificado del acumulador S con cero y poner la condicion de codigo acordado.	

INSTRUCCIONES LOGICAS (DSP56000)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.12
AND S,D (parallel move)	Logicamente AND, el origen del operando S con los bits 47-24 del operando D destino y almacenar el resultado en los bits 47-24 del acumulador destino.	
AND(I) #xx, D	Logicamente AND, los 8 bits del operando inmediato (#,xx) con el contenido de la destination del registro D de control y almacenar el resultado en D.	
EOR S,D (parallel move)	Logicamente OR exclusiva, el origen del operando S con los bits 47-24 de la destination del operando D y almacenar el resultado en los bits 47-24 del acumulador destino.	
LSL D (parallel move)	Logicamente el cambio de bits 47-24 del operando D destino de un bit a la izquierda y almacenar el resultado en el acumulador destino.	
LSR D (parallel move)	Logicamente el cambio de bits 47-24 del operando D destino de un bit a la derecha y almacenar el resultado en los bits 47-24 del acumulador destino.	
NOT D (parallel move)	Almacenar los resultados de complemento a uno de los bits 47-24 del operando D destino regresandolo en los bits 47-24 del acumulador destino.	
OR S, D (parallel move)	Logicamente OR, el origen del operando S con los bits 47-24 del operando D destino y almacenar el resultado en los bits 47-24 del acumulador destino.	

INSTRUCCIONES LOGICAS (DSP56000)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.12
OR(I) #xx, D	Logicamente OR, los 8 bits inmediatos del operando (#,xx) con el contenido del destino del registro D de control y almacenar el resultado en D.	
ROL D (parallel move)	Rotar los bits 47-24 del operando D destino a un bit a la izquierda y almacenar el resultado en el acumulador destino.	
ROR D (parallel move)	Rotar los bits 47-24 del operando D destino a un bit a la derecha y almacenar el resultado en el acumulador destino.	

INSTRUCCIONES DE MANIPULACION DE BIT (DSP56000)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.13
BCLR #n, D	Probar el n-esimo bit del operando D destino limpiandolo y almacenar el resultado en la localizacion destino.	
BSET #n, D	Probar el n-esimo bit del operando D destino en si mismo, y almacenar el resultado en la localizacion destino.	
BCHG #n, D	Probar el n-esimo bit del operando D destino complementandolo y almacenar el resultado en la localizacion destino.	
BTST #n, D	Probar el n-esimo bit del operando D destino y almacenar su estado en el bit de acarreo C del registro de codigo condicion.	

INSTRUCCIONES TIPO LOOP (DSP56000)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.14
DO S, expr	Comenzar un numero de cabecera de hardware de ciclo DO para que sea representado el numero de tiempo especificado en el origen del operando y que rango de excusion es determinado para "expr".	
ENDDO	Terminar el concurrente hardware de ciclo DO antes de que el contador del ciclo concurrente sea igual a uno (LC).	

INSTRUCCIONES DE TIPO MOVE (DSP56000)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.15
LUA ea, D	Cargar la dirección actual(especificada por la dirección efectiva "ea") dentro de la dirección de destino del registro D.	
MOVE S, D	Mover el contenido del dato específico del origen S a el destino especificado(el dato ALU es inactivo durante esta instrucción S de ejecución.)	
MOVE (C) S1, D2	Mover el contenido del registro S1 de control del origen especificado a el destino especificado o mover el origen especificado al control del registro D2.	
MOVE (M) S, D	Mover el operando especificado a/desde el programa especificado de la memoria (especificado por S o D siendo desde P : ea).	
MOVE (P) S, D	Mover el operando especificado desde/a la X o Y especificada de entrada/salida periférica (especificado por S o D siendo desde X : pp o Y : pp).	

INSTRUCCIONES TIPO CONTROL PRORGAM (DSP56000)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.16
ILLEGAL	Instrucción ilegal de interrupción (NOP).	
Jcc ea	Si la condición "cc" es verdadera, ve a la localización en el programa dado por "ea".	
JMP ea	Ir a la localización en el programa de memoria dada por la dirección efectiva "ea".	
JCLR #n,S,xxxx	Ir a la dirección absoluta de 16 bits en el programa de memoria especificada en la instrucción S de 24 bits de extensión de palabra si el n-ésimo bit del origen S es borrado.	
JScC ea	Ir a la subrutina en la que la localización de programa de memoria es dado por la dirección efectiva "ea" si la condición "cc" es verdadera.	
JSET #n,S,xxxx	Ir a la dirección absoluta de 16 bits en el programa de memoria especificado en la instrucción S de 24 bits de extensión de palabra si el n-ésimo bit del origen de operando S es puesto	
JSR ea	Ir a la subrutina en la que la localización de programa de memoria es dado por la dirección "ea" incondicionalmente.	
JSCLR #n,S,xxxx	Ir a la subrutina de la dirección absoluta de 16 bits en el programa de memoria especificado en la instrucción S de 24 bits de extensión de palabra si el n-ésimo bit operando S limpiado.	

INSTRUCCIONES TIPO CONTROL PROGRAM (DSP56000)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.16
NOP	Incrementar el contador del programa (PC).	
JSSSET #n,S,xxxx	Ir a la subrutina en la que la direccion absoluta de 16-bits en el programa de memoria especifica la instruccion S de 24-bits de extension de palabra si la condicion es verdadera.	
REP S	Repetir la instruccion de palabra signo inmediatamente despues de la instruccion REP del numero de tiempo especificado(especificado por S).	
RESET	Iniciar la interrupcion prioritaria de registro y todos los chips activos de la periferia.	
RTI	Regresar desde la interrupcion por medio del reset de la (PC) y el estado del registro (SR)	
RTS	Retornar desde la subrutina por medio del reset de la PC desde el sistema de bloque.	
STOP	Parar las instrucciones procesadas (bajo el poder estandar segura).	
SWI	Comenzar el software de interrupcion de proceso.	
WAIT	Esperar para interrumpir (bajo el poder estandar de seguridad).	

DSP DSP96002 DE PUNTO FLOTANTE.

El DSP96002 es el primer miembro de una familia de doble puerto de punto flotante IEEE programable de manufactura CMOS. El concepto familiar define un corazón como el dato de la unidad aritmética lógica (ALU), unidad de generación de direccionamiento (AGU), programa controlador, y el conjunto de instrucciones asociada. Las características del DSP96002 son :

- 16.5 MIPS con 33-MHz en reloj.
- 49.5 Millones de operaciones de punto-flotante por segundo (MFLOPS) con 33-MHz en reloj.
- Un alto paralelismo de instrucción con modos de direccionamiento especial DSP.
- Anidación en hardware de ciclos DD.
- Rapidez de autoregreso de interrupciones.
- Dos chip activos independientes de 512x32 bits de datos tipo RAM y 1024 x32 bits de programa en RAM.
- Dos chip activos independientes de 1024x32 bits de datos de tipo ROM y 64x32 bits de boot-strap de tipo ROM.
- Lugar para chips no activos de 2×2^{32} 32 bits de palabras de datos de memoria y 2^{32} 32 bits de palabras de memoria de programa
- Dos microprocesadores paralelos de tipo interface con DMA.
- Dos canales de chip-activo tipo DMA de forma controlador y un emulador de interface.

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.17
FABS.SD	Tomar el valor absoluto del operando destino, redondear a una simple precision y almacenar el resultado en el operando D destino.	
FABS.XD	Tomar el valor absoluto del operando destino, y almacenar el resultado en el operando D de destino.	
FADD.S S,D	Agregar (D + S) los dos operandos especificos a un redondeo de simple precision y almacenar el resultado en el operando D destino.	
FADD.X S,D	Agregar (D + S) los dos operandos especificos, con un redondeo simple de extension de precision y almacenar el resultado en operando D.	

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.17
FADDSUB.S D1,D2	Agregar (D1 + D2) y restar (D1 - D2) los dos operandos especificos y redondear una simple precision. Almacenar el resultado redondeado de la adicion en D2 y la subtraccion en D1.	
FADDSUB.X D1,D2	Agregar (D1 + D2) y restar (D1 - D2) los dos operandos especificos y redondear una simple extension de precision. Almacenar el resultado redondeado de la adicion en D2 y la resta D1.	
FCLR D	Todos los 96 bits del operando destino son borrados a cero.	
FCMP S1,S2	Subtraer los dos operandos especificos (S2-S1) y colocar el codigo de condicion apropiado CCR	
FCMPG S1,S2	Subtraer los dos operandos especificos (S2-S1) y colocar el codigo de condicion apropiado CCR para compararse graficamente con banderas triviales de aceptar/rechazar.	
FCMPM S1,S2	Subtraer el valor absoluto (magnitud) de los operandos especificos (S2 -S1) y colocar el apropiado CCR de codigo de condicion Z, N, I.	
FCOPYS.S S,D	Copiar el signo del operando S de punto flotante a el operando D de punto flotante, redondeando el operando D a una simple precision y almacenar el resultado en la especificacion D.	
FCOPYS.X S,D	Copiar el signo del operando S de punto flotante al operando D de punto flotante.	
FGETMAN S,D	Extraer la mantisa y el signo del operando S de punto flotante, normalizando la mantisa (como el resultado esta en el rango 1-2) y almacenar el resultado como un valor de punto flotante en la destinacion D especificada.	
FINT S,D	Redondear el origen del operando S de punto flotante para un valor entero usando el modo de redondeo concurrente especificado por los bits RI-RO en el registro IER y almacenar el resultado como un numero de punto flotante en la destinacion D especificada.	

Arquitectura del DSP96002.- Un diagrama a bloques del chip DSP96002 es mostrado en la figura 5.60. Los datos en movimiento ocurren sobre un bus bidireccional de 32-bit. El bus del dato X (XDB), el bus del dato Y (YDB), el bus del dato DMA (DDB), el bus del dato de programa (PDB), y el bus del dato global (GDB). La

transferencia del dato entre el dato ALU y el dato X e Y de la memoria ocurre sobre el XDB y el YDB. El programa del dato de memoria y la transferencia del dato DMA ocurre sobre un bus ya dedicado. Y todas las demás transferencias ocurren sobre el bus de dato global (GDB).

Las instrucciones del DSP96002 contienen un conjunto global de modos de direcciones de operandos que pueden ser agrupados en tres categorías: registro directo, registro de dirección indirecto (Mn; Nn; Rn con n siendo el número del registro) y el registro especial (para especificar el operando o la dirección del operando directamente).

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.17
FLOAT.S D	Convertir los 2 complementos de 32 bits entero localizados en la porcion baja del operando D dentro de un operando de punto flotante, redondeando a una simple extension de precision .	
FLOAT.X D	Convertir los 2 complementos de 32 bits entero localizados en la porcion baja del operando D dentro de un operando de punto flotante, redondeado a una simple extension de precision y almacenar el resultado en el operando D.	
FMPY S1,S2,D1 FSUB.X S3,D2	Multiplicar los dos operandos S1 y S2, redondeando a simple extension de precision y almacenar el resultado en el registro D1 destino especificado. Simultaneamente, subtraer S3 desde D2, redondear a simple extension de precision y almacenar el resultado en el operando D2 .	
FMPY.S S1,S2,D	Multiplicar los operandos S1 y S2, redondeando a simple precision y almacenar el resultado en el operando D destino.	
FMPY.X S1,S2,D	Multiplicar los operandos S1 y S2, redondeando a simple extension de precision y almacenar el resultado en el operando D destino.	
FNEG.S D	Subtraer el operando D destino desde cero, redondeando a simple precision y almacenar el resultado en el operando D destino.	
FNEG.X D	Subtraer el operando D destino desde cero y almacenar el resultado en el operando D destino.	
FSCALES S,D	La escala del operando D destino acordada a la escala del factor contenido en el 11 LSB de la	

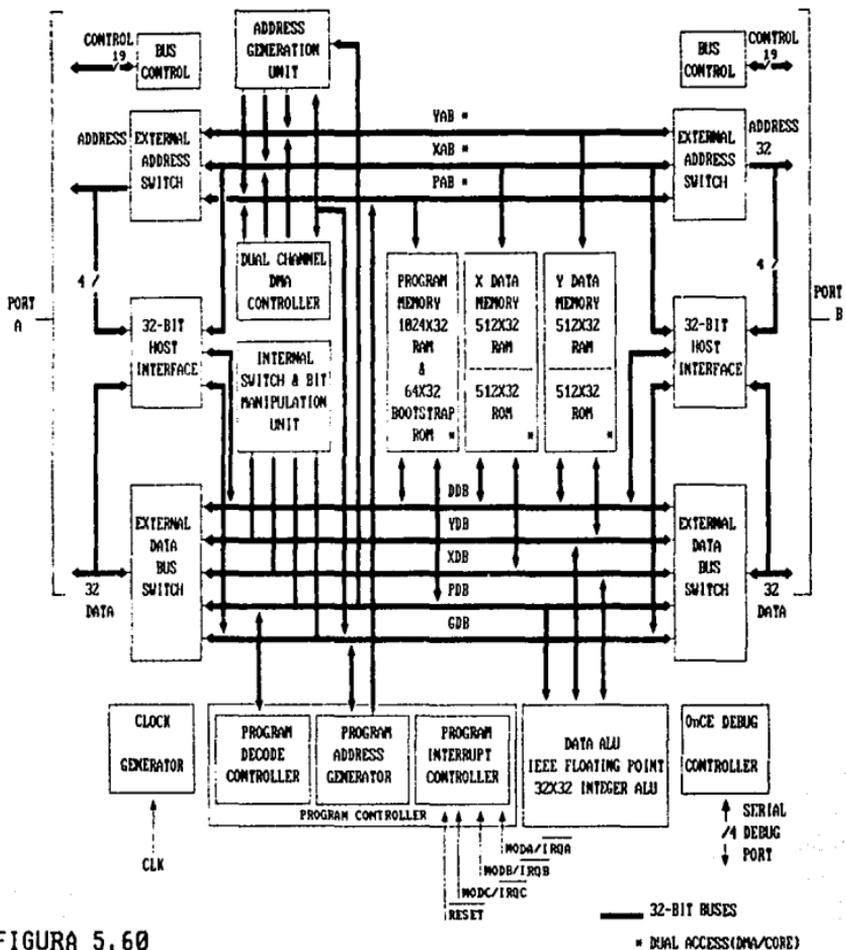


FIGURA 5.60

DIAGRAMA A BLOQUES DEL DSP96002

FALLA DE ORIGEN

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP98002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.17
	porcion alta del origen del registro S, redondeado a simple precision y almacenar el resultado en el operando D destino. Un factor de escala inmediato corto de 8 bits (en lugar de S) signo extendido a 11 bits debe ser usado tambien.	
FSCALE.X S,D	La escala del operando D destino acordado para la escala del factor contenido en el LSB 11 de la porcion alta del origen del registro S, redondear a simple extension de precision y almacenar el resultado en el operando D destino. Un factor escalable corto inmediato de 8 bits, (en lugar de S) signo extendido de 11 bits debe ser usado.	
FSEEDD S,D	Determinar una aproximacion a $1.0/S$, y almacenar el resultado en el operando D destino. Usado para inicializar la division de punto flotante.	
FTFR.X S,D	Almacenar el origen del operando S en el operando D destino.	
FSEEDR S,D	Determinar una aproximacion a $\sqrt{1.0/S}$, y almacenar resultado en el operando D destino.	
	Usado para inicializar la elevacion al cuadrado del punto flotante de calculacion.	
FSUB.S S,D	Subtraer los 2 operandos especificados ($D - S$) redondear a una simple precision y almacenar el resultado en el operando D destino.	
FLOATU.S D	Convertir el entero localizado en la porcion baja del operando D de 32 bits dentro de un operando de punto flotante, redondeado a simple precision y almacenar resultado en operando D.	
FLOATU.X D	Convertir el entero localizado en la porcion baja del operando D de 32 bits dentro de un operando de punto flotante, redondeado a simple extension de precision y guardar en operando D.	
FLOOR S,D	Redondear el origen del operando S de punto flotante a un valor entero usando el redondeo para el modo finito y guardar el resultado como un numero de punto flotante en destino D.	
FMPY S1,S2,D FADD.S S3,D2	Multiplicar los 2 operandos S1 y S2 redondeado a una precision indicada por el modo MP bit y almacenar el resultado en el registro D1 destino especificado. Simultaneamente, agregar los dos operandos S3 y D2, redondeando a simple precision y guardar el resultado en operando D2.	
FMPY S1,S2,D1 FADD.X S3,D2	Multiplicar los 2 operandos S1 y S2 redondeado a simple extension de precision indicada por el modo MP bit y guardar el resultado en registro D1 destino especificado. Simultaneamente, agregar los dos operandos S3 y D2, redondeado a simple extension de precision y guardar a D2.	

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.17
FMPY S1,S2,D1 FADDSUB.S D3,D2	Multiplicar los dos operandos S1 y S2, redondear a la precision indicada por el modo MPbit y guardar el resultado en el registro D1 destino especificado.Simultaneamente, agregar los 2 operandos D2 y D3, subtraer D2 desde D3,redondeando a ambos resultados en simple precision y almacenar el resultado de la adicion en el registro D2 y de la subtraccion en registro D3	
FMPY S1,S2,D1 FADDSUB.X D3,D2	Multiplicar los 2 operandos S1 y S2, redondeando a simple extension de precision y almacenar el resultado en el registro D1 destino especifico.Simultaneamente,agregar los 2 operandos D2 y D3,subtraer D2 desde D3,redondeando ambos resultados en simple extension de precision y almacenar el resultado de la adicion en registro D2 y de la subtraccion en el registro D3.	
FMPY S1,S2,D1 FSUB.S S3,D2	Multiplicar los 2 operandos S1 y S2 redondeando a precision indicada por el modo MP bit y guardar el resultado en el registro D1 destino especificado.Simultaneamente,subtraer S3 de S2 redondeando a simple precision y guardar el resultado en el operando D2 destino.	
FSUB.X S,D	Subtraer los 2 operandos especificados (D - S) redondeando a simple extension de precision y guardar el resultado en el operando D destino.	
FTFR.S S,D	Redondear el origen del operando S a simple precision y guardar el resultado en operando D	
FTST S	Comparar el operando especificado con cero y colocar CCR de codigos Z, N, I.	

Conjunto de Instrucciones del DSP96002.- De la tabla 5.17 a la 5.23 se muestran todas instrucciones básicas para la programación del chip.

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.18
ABS D	Tomar el valor absoluto del operando destino de porcion baja y guardar el resultado en la porcion baja de D.	
ADD S,D	Agregar la porcion baja de los 2 operandos especificados y almacenar el resultado en la porcion baja del operando D destino.	

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP06002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.1B
ADDC S,D	Agergar la porcion baja de los 2 operandos grandes especificados con el bit C del codigo de registro condicion y almacenar el resultado en porcion baja del operando D destino.	
ASL S,D	Aritmeticamente cambiar la porcion baja del operando D especificado izquierdo por un bit (cuando S no es especificado) por 11 bits enteros sin signo localizado en el LBS 11 de la porcion alta de S o por un campo inmediato de 6 bits en la instruccion (en lugar de S). El resultado es almacenado en la porcion baja de D.	
ASR S,D	Aritmeticamente el cambio de porcion baja del operando D especificado a la derecha por un bit (cuando S no es especificado) o por 11 bits enteros sin signo localizado en el 11 LBS de la porcion alta de S o por un campo inmediato de 6 bits en la instruccion (en lugar de S). El resultado es almacenado en la porcion baja de D.	
CLR D	Limpiar la porcion baja del operando D destino para cero.	
CMP S1,S2	Subtraer la porcion baja del operando S1 desde S2 y colocar la condicion CCR de codigo C, V, Z, N, LR apropiadamente.	
CMPG S1,S2	Subtraer la porcion baja del operando S1 desde S2 y colocar la condicion CCR de codigo C, V, Z, N, LR, RB, A apropiadamente. Esta grafica es comparada con banderas triviales.	
DEC D	Decrementar por uno a la porcion baja del operando D especificado y almacenar el resultado en la porcion baja de D.	
EXT D	Signo extendido a los 16 bits bajos de D.L dentro de los 16 bits arriba de D.L.	
EXTB D	Signo extendido del byte bajo de D.L dentro de los 24 bits arriba de D.L.	
GETEXP S,D	Extraer el exponente del signo extendido de precision del operando S de punto flotante y almacenar este como un no basado, complemento a 2, 32 bits enteros en la porcion baja de D.	
INC D	Incrementar por uno a la porcion baja del operando S especificado y guardar el resultado en la porcion baja de D.	
INT D	Convertir el operando especifico de punto flotante a 32 bits, complemento a 2 enteros y almacenar el resultado en la porcion baja de D.	

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.18
INTRZ D	Convertir el operando especificado de punto flotante para 32 bits, complemento a 2 enteros redondeados a cero y almacenar el resultado en la porcion baja de D.	
INTU D	Convertir el operando especificado de punto flotante para 32 bits de entero sin signo y almacenar el resultado en la porcion baja de D.	
INTURZ D	Convertir el operando especificado de punto flotante para 32 bits, de entero sin signo redondeada hacia cero y almacenar el resultado en la porcion baja de D.	
JOIN S,D	Transferir los 16 bits LBS de la porcion baja del origen del operando S dentro de los 16 MBS de la porcion baja de destinacion D.	
JOINB S,D	Transferir los 8 LBS de la porcion baja del origen del operando S dentro de los 15-8 bits de la porcion baja de destinacion D. Los 16 MSB de la porcion baja de D son cero.	
MPYS S1,S2,D	Multiplicar 2 operandos de signo de 32 bits desde las porciones bajas de S1 y S2, y almacenar los 64 bits de signo producto del centro y de la porcion baja de D.	
MPYU S1,S2,D	Multiplicar 2 operandos sin signo de 32 bits desde las porciones bajas de S1 y S2, y almacenar los 64 bits enteros sin signo producto del centro y de la porcion baja de D.	
NEG D	Subtraer desde cero la porcion baja del operando destino y guardar el resultado en la porcion baja de D.	
NEGC D	Subtraer desde cero la porcion baja del operando destino grande con el bit C de la condicion de codigo registro y guardar el resultado en la porcion baja de D.	
SETW D	Colocar a todos unos a la porcion baja (longitud palabra) del operando destino.	
SPLIT S,D	Transferir los 16 MSB de la porcion baja del origen del operando S dentro de los 16 LBS de la porcion baja de destinacion D y extender el signo a 32 bits.	
SPLITB S,D	Transferir los 15-8 bits de la porcion baja de origen del operando S dentro de los 8 LBS de la porcion baja de destinacion D y extender el signo a 32 bits.	
SUB S,D	Subtraer la porcion baja del origen del operando S desde D y guardar el resultado en la porcion baja de D.	

INSTRUCCIONES ARITMETICAS (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.18
SUBC S,D	Subtraer la porcion baja del origen del operando S desde D, grande con el bit C de la condicion de codigo registro y almacenar el resultado en la porcion baja de D.	
TFR S,D	Transferir datos desde la porcion baja de S para la porcion baja de D afectando la condicion de bit de codigo.	
TST S	Comparar la porcion baja del operando especifico con cero y apropiadamente colocar el CCR condicion de los codigos V, Z, N.	

INSTRUCCIONES LOGICAS (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.19
AND S,D	Logicamente la instruccion AND de porcion baja de 2 operandos especificos y guardar el resultado en la porcion baja de D.	
ANDC S,D	La instruccion logica AND de la porcion baja de D con el complemento logico de la porcion baja de S, y guardar el resultado en la porcion baja de D.	
AND(I)#byte,D	La instruccion logica AND contiene el control del registro D con un operando inmediato de 8 bits y almacenar el resultado de regreso a D.	
BFIN D S,D	Regresar a la pocision del origen del operando S cargandole un 1, considerado desde izquierda a derecha, como un complemento a 2 de forma entera en la porcion alta del operando D destino	
EOR S,D	La instruccion logica OR exclusiva de porcion baja del operando especificado y almacenar el resultado en la porcion baja de D.	
LSL S,D	Logicamente el cambio a la izquierda de la porcion baja del operando D especificado por un bit (cuando S no es especificado o por los 11 bits sin signo de tipo entero localizado en los 11 LSB de la porcion alta de S o por un campo inmediato de 6 bits en la instruccion (en lugar de S) y guardar en la porcion baja de D.	
LSR S,D	Logicamente el cambio a la derecha de la porcion baja del operando D especificado por 1bit (cuando S no es especificada) o por los 11 bits sin signo de tipo entero localizados en los 11 LSB de la porcion alta de S, o por un campo inmediato de 6 bits en la instruccion (en lugar de S) y guardar en la porcion baja de D.	

INSTRUCCIONES LOGICAS (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.19
NOT D	Tomar el complemento a 1 de la porcion baja de operando D destino y guardar el resultado en D	
OR S,D	La instruccion logica OR de porcion baja de los 2 operandos especificados y almacenar el resultado en la porcion baja de D.	
ORC S,D	La instruccion logica OR de porcion baja de D con el complemento logico de S y guardar el resultado en la porcion baja de D.	
OR(I)#mask,D	La instruccion logica OR de contenido del control del registro D con un operando inmediato de 8 bits y almacenar el resultado de regreso a D.	
ROL D	Rotar la porcion baja del operando D un bit a la izquierda y almacenar el resultado en la porcion baja de D.	
ROR D	Rotar la porcion baja del operando D un bit a la derecha y almacenar el resultado en la porcion baja de D.	

INSTRUCCIONES DE BIT DE MANIPULACION (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.20
BCHG #bit,D	Probar el n-esimo bit del operando D destino y almacenar este estado en la condicion C de codigo de bit, despues de la prueba, limpiar el n-esimo bit destino.	
BSET #bit,D	Probar el n-esimo bit del operando D destino y almacenar este estado en la condicion C de codigo bit, despues de la prueba colocar el n-esimo en la destinacion.	
BTST #bit,S	Probar entonces el n-esimo bit del origen del operando D y almacenar este estado en la condicion C de codigo bit.	

INSTRUCCIONES DE TIPO LOOP (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.21
DO S,label	Comenzar un ciclo Do que es para ser repetido el numero de veces especificado en la instruccion del origen del operando S y en el rango en que la ejecucion es terminada por la operacion destino de la etiqueta "label".	

INSTRUCCIONES DE TIPO LOOP (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.21
DOR S,label	Comenzar un ciclo D0 de PC relativo a hardware que esta para ser repetido el numero de veces que esta especificado en la instruccion del origen del operando S y que el rango de ejecucion es terminado por el operando destino "label".	
ENDDO	Terminar el ciclo concurrente D0 de hardware antes de que el contador concurrente del ciclo	
REP S	Ejecutar la simple instruccion de palabra siguiendo la instruccion REP de LC del tiempo respectivamente, en donde LC es el valor del ciclo del contador obtenido desde el origen del operando S.	

INSTRUCCIONES PARA MOVER DATOS (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.22
LEA address,D	Calcular la direccion efectiva como se especifico en el operando de direccion y almacenar en el registro D destino afectando el origen del registro de direccion.	
LRA displacement,D	Agregar el desplazamiento especificado a la PC y almacenar el resultado en la destinacion D.	
MOVE	Mover el contenido del origen especificado a la destinacion especificada.Usualmente el registro se mueve en forma paralela con algunos datos de la ALU de instrucciones y las instrucciones son escritas con el mnemonico MOVE.	
MOVETA	Mover el contenido del origen especificado a la destinacion especificada y actualiza las banderas C, V, N, Z en el CCR acordado para el resultado del calculo de la direccion.	
MOVE(C) S2,D1	Mover el contenido del registro de control especificado para destinacion especificada o mover el origen especificado para el control de registro especificado.	
MOVE(I)#data,D	Los 16-bits del operando inmediato corto esta extendido de signo para un operando de palabra y es almacenado en el registro D destino.	
MOVE(M) S,D	Mueve la palabra del programa de memoria especificado (S = P :ea) para el registro destino especificado a la localizacion del programa de memoria especificado (D = P:ea).	
MOVE(P) S,D	Mover el operando palabra a o desde el periferico de entrada/salida de X e Y.	
MOVE(S) S,D	Mover el operando palabra a o desde la localizacion baja de memoria de 128 en memoria de datos X e Y.	

INSTRUCCIONES DE PROGRAMA DE CONTROL (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.23
Bcc label	Si la condicion especificada es verdadera, el programa de ejecucion continua a la localizacion PC mas el desplazamiento.	
BRA label	Dividir siempre a la localizacion PC más el desplazamiento.	
BRCLR#bit,S,label	Dividir a la localizacion mas el desplazamiento si el n-esimo bit en el origen del operando es limpio.	
BRSET#bit,S,label	Dividir a la localizacion PC mas el desplazamiento si el n-esimo bit en el origen del operando esta colocado	
BScC label	Dividir a subrutina si la condicion esta limpia	
BSCLR#bit,S,label	Dividir a la subrutina si el n-esimo bit del origen del operando esta limpio.	
BSR label	Dividir a la subrutina.	
BSSET#bit.S,label	Dividir a la subrutina si el n-esimo bit del origen del operando esta colocado.	
DEBUGCc	Si la condicion especifica es verdadera entrar en modo de bug.	
FBcc label	Dividir si la condicion especificada de punto flotante es verdadera.	
FBScc label	Dividir a la subrutina para la condicion de punto flotante.	
FDEBUGcc	Si la condicion especificada del punto flotante es verdadera entrar en modo de debug.	
FFcc(FFcc.U)	La operacion condicional DATA ALU con CCR actualizada.	
FJcc label	Ir si la condicion de punto flotante es verdadera.	
FJScc	Ir a la subrutina si la condicion de punto flotante es verdadera.	
FTRAPcc	Si la condiciones especificada de punto flotante es verdadera, inicializar el software.	
IFcc	La operacion condicional DATA ALU con CCR actualizada.	
IFcc.U	La operacion condicional DATA ALU con CCR actualizada.	
ILLEGAL	Instruccion de interrupcion ilegal.	
Jcc	Ir a si la condicion es verdadera.	
JCLR #bit,S,label	Ir a si el n-esimo bit en el origen del operando esta limpio.	
JMP label	IR a.	
JScC label	Ir a la subrutina si la condicion especifica es verdadera.	

INSTRUCCIONES DE PROGRAMA DE CONTROL (DSP96002).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.23:
JSLR#bit,S,label	Ir a la subrutina si el n-esimo bit en el origen del operando esta limpio.	
JSET#bit,S,label	Ir a si el n-esimo bit en el origen del operando esta colocado.	
JSR label	Ir a la subrutina.	
JSSET#bit,S,label	Ir a la subrutina si el n-esimo bit en el origen del operando esta colocado.	
NOP	No operacion.	
RESET	Inicializar los dispositivos perifericos.	
RTI	Regresar desde de la interrupcion.	
RTR	Regresar desde la subrutina y almacenar el estado del registro.	
RTS	Regresar desde la subrutina.	
STOP	Detener el proceso para una potencia baja de recurso seguro.	
TRAPcc	Si la condicion entera especifica es verdadera norma; la instruccion de ejecucion es suspendida y el procesamiento de excepcion de software es inicializado.	
WAIT	Esperar para la interrupcion para la potencia baja del recurso seguro.	

DSP TMS320C30 DE PUNTO FLOTANTE.

El procesador digital de señal TMS320C30 es un CMOS de 32-bits de tercera generación de la familia de TMS320 de Texas Instruments. Algunas de sus características de este chip son listadas enseguida :

- 60-ns de ciclo simple por instrucción de ejecución de tiempo resultando un 33.3 MFLOPS.
- Chip activo de 4K x 32 bits de acceso dual de tipo ROM.
- Dos chips activos de 1K x 32 bits de acceso dual a bloques de tipo RAM.
- Instrucción cache de 64 X 32-bits.
- 32-bits de instrucción y un dato de palabra, de 24 bit de direccionamiento.
- 32-bits de punto flotante y un multiplicador entero, ALU barrel shifter.
- Ocho acumuladores de precisión extendido.
- Chip controlador DMA activo para entrada/salida concurrente.
- Dos y tres instrucciones de operando.
- Cero ciclos por encima con divisiones de ciclo simple.
- Dos puertos seriales para transferir 8/16/32 bits.
- Dos tiempos de 32 bits.
- Paquete PGA de 180 pines.

INSTRUCCIONES DE CARGA (LOAD) Y ALMACENAMIENTO (STORE) (TMS320C30)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.24
LDE	Cargar el exponente a punto flotante.	
LDF	Cargar el valor a punto flotante.	
LDF cond	Cargar el valor condicional a punto flotante.	
LDI	Cargar un entero.	
LDI cond	Cargar un entero condicional.	
LDM	Cargar mantisa a punto flotante.	
POP	Dar un entero desde lo alto de la pila.	
POPF	Dar un valor de punto flotante desde la pila.	
PUSH	Empujar un entero en la pila.	

INSTRUCCIONES DE CARGA (LOAD) Y ALMACENAMIENTO (STORE) (TMS320C30)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.24
PUSHF	Empujar un valor de punto flotante en la pila.	
STF	Almacenar un valor de punto flotante.	
STI	Almacenar un entero.	

INSTRUCCIONES DE DOS OPERANDOS (TMS320C30)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.25
ABSF	El valor absoluto de un numero tipo punto flotante.	
ABSI	EL valor absoluto de un entero.	
ADDC	Agregar enteros con acarreos.	
ADDF	Agregar valores de punto flotante.	
ADDI	Agregar enteros.	
AND	Bit de sentido logico AND.	
ANDN	Bit de sentido logico AND con complemento.	
ASH	Cambio aritmetico.	
CMPF	Comparar valores de punto flotante.	
CMPI	Comparar enteros.	
FIX	Convertir valor de punto flotante a entero.	
FLOAT	Convertir valor entero a punto flotante.	
LSH	Cambio logico.	
MPYF	Multiplicar valores de punto flotante.	
MPYI	Multiplicar entero.	
NEGB	Entero negativo con prestamo.	
NEGF	Valor negativo de punto flotante.	
NEGI	Entero negativo.	
NORM	Valor normalizado de punto flotante.	
NOT	Bit de sentido logico de complemento.	

INSTRUCCIONES DE DOS OPERANDOS (TMS320C30)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.25
OR	Bit de sentido logico OR.	
RDN	Redondeo de valor de punto flotante.	
RDL	Rotar a la izquierda.	
ROLC	Rotar a la izquierda por medio de acarreo.	
ROR	Rotar a la derecha.	
RORC	Rotar a la derecha por medio de acarreo.	
SUBB	Subtraer un entero con prestamo.	
SUBC	Subtraer enteros condicionales.	
SUBF	Subtraer valores de punto flotante.	
SUBI	Subtraer entero.	
SUBRB	Subtraer un entero en reversa (valor de origen destino valor).	
SUBRF	Subtraer un valor de punto flotante en reversa (valor de origen destino valor).	
SUBRI	Subtraer un entero en reversa (valor de origen destino valor).	
TSTB	Probar campos de bit.	
XOR	Bit de sentido de OR exclusivo.	

Arquitectura del TMS320C30.- La arquitectura del chip es caracterizado por la exactitud y precisión de la unidad de punto flotante, gran cantidad de memoria en chip activado, un alto grado de paralelismo, y el controlador DMA. En la figura 5.61 se muestra un diagrama a bloques del TMS320C30.

La unidad de procesamiento central (CPU) del TMS320C30 incluye las siguientes especificaciones :

- Un multiplicador de punto fijo y flotante (punto flotante : 32 x 32 → 40; punto-fijo : 24 X 24 → 32).
- Un cambiador barrel shifter de 32 bit.
- Una unidad lógica aritmética (ALU) de 32 bits.

DIAGRAMA A BLOQUES DEL TMS320C30

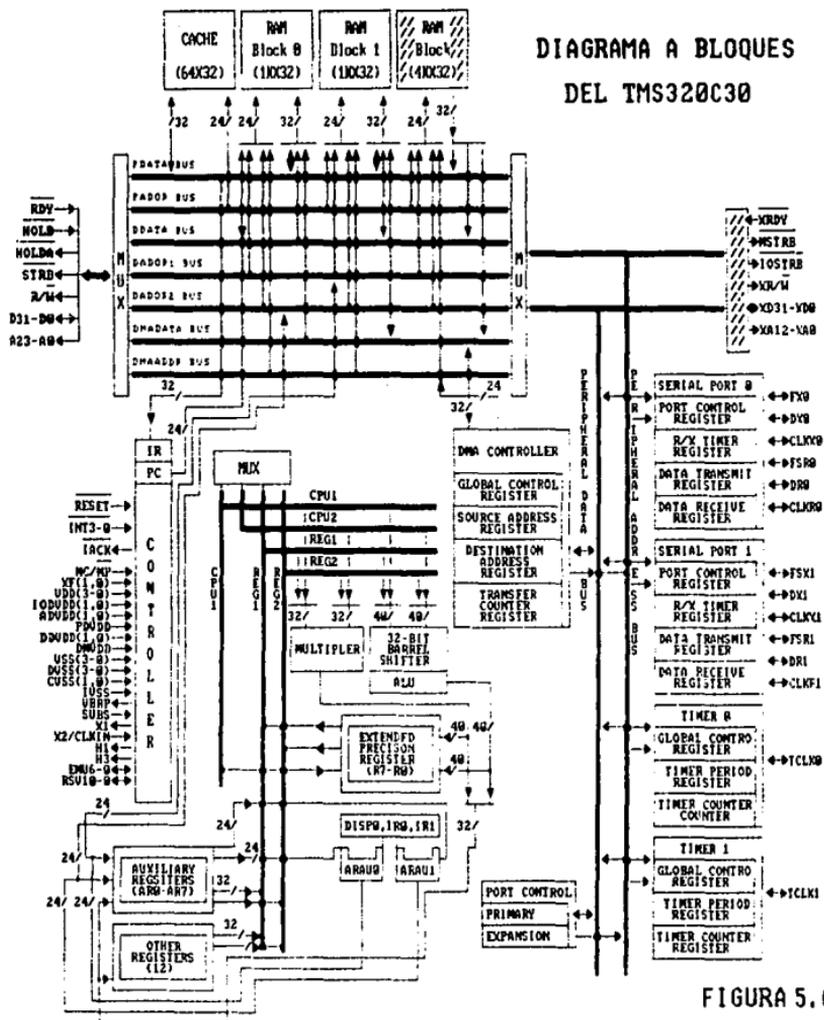


FIGURA 5.61

FALLA DE ORIGEN

- Dos unidades de registro auxiliar (ARAU) para generar dos operandos de direccionamiento en un ciclo simple.
- Ocho registros de expansión extendida de 40 bits (R0-R7) para acumular.
- Ocho registros auxiliares de 32 bits (AR0-AR7) para 2 ARAU.
- Un puntero de dato de pagina (DP) de 32 bits de tipo registro para apuntar a 254-64K palabras de longitud de datos de paginas.
- Dos registros index de 32 bits (IR0-IR1) para direcciones index.
- Un tamaño de bloques de registro de 32 bits (BK) usado por ARAU en dirección circular.
- Un puntero de pila de sistema de 32 bits (SP).
- Un registro estado (ST) que contiene información global en el estado del CPU.
- Un interruptor CPU/DMA de 32 bit activo tipo registro (IE).
- Una bandera de interrupción CPU de 32 bits tipo registro (IF).
- Un registro bandera de entrada/salida de 32 bits (IOF) para el control de la función de los pines externos dedicados.
- XF0 y XF1 para chip entrada/salida.
- Un contador de repetición de 32 bits (RC) para operaciones ciclo.
- Un registro de dirección activo de repetición (RS).
- Un registro de dirección final de repetición de 32 bits (RE).
- Un contador de programa de 32 bits (PC) registro.

Cinco grupos de modo de direccionamiento son proporcionados en el TMS320C30 :

- Registro de direccionamiento general (para cualquier registro de CPU), corto inmediato (16-bits operando), directo (24 bits de direcciones), e indirecto.
- Tres operandos de registro de direccionamiento e indirecto.
- Registro de direccionamiento paralelo (R0 - R7) e indirecto.
- Longitud inmediata (operando de 24 bits).
- División condicional de registro de direccionamiento y PC relativa (a un signo de 16 bits de desplazamiento está en la PC)

INSTRUCCIONES DE TRES OPERANDOS (TMS320C30)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.26
ADDC3	Agregar operandos con acarreo.	
ADDF3	Agregar valores de punto flotante.	
ADDI3	Agregar enteros.	
AND3	Bit de sentido logico AND.	
ANDN3	Bit de sentido logico AND con complemento.	
ASH3	Cambio aritmetico para dar un conteo.	
CMPF3	Comparar valores de punto flotante.	
CMPI3	Comparar entero.	
LSH3	Cambio logico para dar un conteo.	
MPYF3	Multiplicar valores de punto flotante.	
MPYI3	Multiplicar enteros.	
OR3	Bit de sentido logico OR.	
SUBB3	Subtraer enteros con acarreo.	
SUBF3	Subtraer valores de punto flotante.	
SUBI3	Subtraer enteros.	
TSTB3	Probar campos de bit.	
XOR3	Bit de sentido logico OR exclusivo.	

INSTRUCCIONES DE CONTROL DE PROGRAMA (TMS320C30)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.27
B cond	Division condicional.	
B condD	Retraso de division condicional.	
BR	Division incondicional.	
BRD	Retraso de division incondicional.	
CALL	Llamar a subrutina.	
CALL cond	Llamar a subrutina condicional.	

INSTRUCCIONES DE CONTROL DE PROGRAMA (TMS320C30)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.27
DB cond	Decremento especifico del registro auxiliar y division condicional.	
IDLE	Dar vueltas hasta que halla un interrupcion.	
NOP	No operacion.	
RETI cond	Regresar desde la interrupcion condicional.	
RETS cond	Regresar desde la subrutina incondicional.	
RPTB	Repetir bloque de instrucciones.	
RPTS	Repetir instruccion simple.	
SWI	Interrupcion de software.	
TRAP cond	Interrupcion trampa condicional.	

Conjunto de Instrucciones del TMS320C30.- El conjunto de instrucciones contienen 114 instrucciones organizados dentro de seis grupos funcionales, los cuales son incluidos en las tablas 5.24 a la 5.30.

CERRADURA OP DE INSTRUCCIONES PARA EL MULTIPROCESADOR DE COMUNICACION (TMS320C30).

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.28
LDFI	Cargar valor punto flotante cerrado.	
LDII	Cargar entero, cerrado.	
SIGI	Señal de operacion cerrado.	
STFI	Almacenar el valor de punto flotante, cerrada.	
STII	Almacenar un entero, cerrado.	

INSTRUCCIONES DE OPERACIONES EN PARALELO (TMS320C30)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.29
ABSF STF	El valor absoluto de un numero de punto flotante en paralelo con almacenaje.	
ABSI STI	El valor absoluto de un entero en paralelo con almacenaje.	

INSTRUCCIONES DE OPERACIONES EN PARALELO (TMS320C30)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.29
ADDF3 STF	Agregar valores de punto flotante en paralelo con almacenaje.	
ADDI3 STI	Agregar valores enteros en paralelo con almacenaje.	
AND3 STI	Bit de sentido logico AND en paralelo con almacenaje.	
ASH3 STI	Cambio aritmetico en paralelo con almacenaje.	
FIX STI	Convertir valor de punto flotante a entero en paralelo con almacenaje.	
FLOAT STF	Convertir valor entero de punto flotante en paralelo con almacenaje.	
LDF LDF	Cargar dato de punto flotante a paralelo.	
LDF STF	Cargar dato de punto flotante en paralelo con almacenaje.	
LDI LDI	Cargar enteros en paralelo.	
LDI STI	Cargar un dato entero en paralelo con almacenaje.	
LSH3 STI	Cambio logico en paralelo con almacenaje.	
MPYF3 ADDF3	Multiplicar y sumar numeros de punto flotante.	
MPYF3 STF	Multiplicar valores de punto flotante en paralelo con almacenaje.	
MPYF3 SUBF3	Multiplicar y restar valores de punto flotante.	
MPYI3 ADDI3	Multiplicar y sumar valores enteros.	
MPYI3 STI	Multiplicar valores enteros en paralelo con almacenaje.	
MPYI3 SUBI3	Multiplicar y restar valores enteros.	
NEGF STF	Valor negativo de punto flotante en paralelo con almacenaje.	
NEGI STI	Valor entero negativo en paralelo con almacenaje.	
NOT3 STI	Complemento entero en paralelo con almacenaje.	
OR3 STI	Bit de sentido logico OR en paralelo con almacenaje.	
STF STF	Almacenaje en paralelo de datos de punto flotante.	
STI STI	Almacenaje en paralelo tipo entero.	
SUBF3 STF	Restar valores de punto flotante en paralelo con almacenaje.	
SUBI3 STI	Restar dato entero en paralelo con almacenaje.	
XOR3 STI	Bit de sentido logico OR exclusivo con almacenaje.	

CODIGOS DE CONDICIÓN (TMS320C30)

INSTRUCCION	DESCRIPCION	TABLA 5.30
U	Incondicional.	
LO (C)	Menor que (acarreo).	
LS	Menor o igual.	
HI	Mayor que.	
HS (NC)	Mayor o igual (No acarreo).	
EQ(Z)	Igual (cero).	
NE (NZ)	No igual (No cero).	
LT (N)	Menor que (Negativo).	
LE	Menor que o igual.	
GT (P)	Mayor que (positivo).	
GE (NN)	Mayor que o igual (no negativo).	
NV	No overflow (saturado).	
V	Overflow (saturado).	
NUF	No Bajo saturado (underflow).	
UF	Bajo saturado (underflow).	
NLV	No agarrar de baja saturada (latched overflow).	
LV	Agarrar baja saturada (latched overflow).	
NLUF	No agarrar punto flotante de baja saturada (overflow)	
LUF	Agarrar punto flotante de baja saturada (overflow).	
ZUF	Cero o punto flotante de baja saturada (overflow).	

CONCLUSIONES.

El objetivo principal de este trabajo de tesis es, el conocer en forma básica y general todos los elementos teóricos necesarios; que se utilizan para un procesamiento digital de señales. Y se debe de entender que el análisis y procesamiento de cualquier señal lleva consigo una serie de pasos necesarios para un mejor estudio y aplicación.

Todas las herramientas que se usan, tienen como función común el lograr que su análisis sea lo más cercano a la realidad del problema, viéndose desde un punto de vista real o de aplicación.

Sin embargo, se debe hacer resaltar que las primeras herramientas usadas para este tipo de análisis, fueron y son fundamentales para ir evolucionando el procesamiento digital de señales. Estas son; la Transformada Discreta de Fourier (TDF) y la Transformada Rápida de Fourier (TRF), junto con todas sus funciones derivadas de los diferentes tipos de análisis; ya que su función principal es de realizar un número de operaciones bastante tediosas, en un tiempo que sea lo más corto posible.

Es importante entender que una de las primeras aplicaciones que tuvieron cavida en el procesamiento digital de señales, fueron los filtros digitales. Representándose en dos tipos de filtro : los Filtros de Respuesta Impulso Finita y los Filtros de Respuesta Impulso Infinita, dándose así una primera evolución en una aplicación en concreto.

Dadas las circunstancias, se llega a plantear la necesidad de tener un circuito integrado que fuera capaz de procesar señales digitales, dándole el nombre de DSP (Digital Signal Processor) o Microprocesador Digital de Señales. Que dió un gran cambio en el avance del procesamiento digital de señales.

Con lo que se puede concluir, que las aplicaciones fueron mucho más reales a la solución de problemas de todas las áreas del conocimiento científico y de aplicación, basadas en el procesamiento digital de señales, quedando éstas como el poder analizarse cualquier tipo de señal aleatoria o no aleatoria.

APÉNDICE.

Este apéndice contiene el listado de un programa escrito en lenguaje C. Dicho programa calcula la Transformada Discreta de Fourier (TDF), y el nombre de este archivo es *TDF.C*.

El cálculo de la TDF lo realiza por medio de un conjunto de datos que se le proporciona al programa, estos datos están dados por tres archivos los cuales son : *SEN.DAT* , *COS10.DAT*, *COS1.DAT*.

La salida que produce el archivo es de una gráfica, en la cual, se muestra el resultado del cálculo de los archivos de nombre *SEN.DAT*, *COS10.DAT* y *COS1.DAT*.

Después del listado del programa *TDF.C*, se muestra el resultado de las gráficas obtenidas de los archivos *SEN.DAT*, *COS10.DAT*, y *COS1.DAT*. Que son una aproximación a las gráficas reales; que entrega el programa cuando se esta ejecutando.

```

#include<stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#include<graphics.h>
#define pi 3.14159226
FILE #archivo;
char cadi[4][2]={{124,0},{47,0},{45,0},{92,0}};

main()
{
int n,i,j,ap;
char c,name[12];
float arreglo[512],total[512],real,imagi;
float factor,sub,factorx;
i=DETECT;
initgraph(&i,&j,"");
cara();
setcolor(14);
settextstyle(1,0,3);
do{
cleardevice();
outtextxy(getmaxx()/7,getmaxy()/17,"Da nombre de el archivo: ");
gotoxy(20,6);
gets(name);
archivo=fopen(name,"r");
}while(archivo==NULL);
i=0;
cleardevice();
setfillstyle(6,LIGHTBLUE);
bar(0,0,getmaxx(),getmaxy());
outtextxy(getmaxx()/7,getmaxy()/2,"Trabajando");
while(fscanf(archivo,"%f %f",&arreglo[i],&factor)>0) i++;
fclose(archivo);
n=i;
settextstyle(2,0,7);
factorx=(float) getmaxx()/2/(n-12.0);
for(i=0;i<n;i++)
{
real=imagi=0;
for(j=0;j<n;j++)
{
real=(arreglo[j]*cos((2*pi*i*j)/n))+real;
imagi=(arreglo[j]*-sin((2*pi*i*j)/n))+imagi;
}
setcolor(10+random(5));
bar(getmaxx()/2-50,getmaxy()/2-10,getmaxx()/2,getmaxy()/2+20);
fillellipse(getmaxx()/2-45,getmaxy()/2+10,
17,17);
if (i%4 !=0 )
outtextxy(getmaxx()/2-50,getmaxy()/2,cadi[fmod(i,4)]);
else
outtextxy(getmaxx()/2-45,getmaxy()/2,cadi[fmod(i,4)]);
sub=(real*real)+(imagi*imagi);
}
}

```

```

total[i]=(sqrt(sub)/n);
printf(archivo,"%f\n",&total[i]);
}

factor=0;
for(i=0;i<n;i++)
    if(total[i]>factor) factor=total[i];
factor=(getmaxx()-70)/factor;
cleardevice();
setfillstyle(7,LIGHTGRAY);
bar(1,1,getmaxx(),getmaxy());
setcolor(15);
j=getmaxx()/2;
for(i=0;i<n;i++)
{
    line(factor*x*i+getmaxx()/2,getmaxy()-60-total[i]*factor,
        factor*x*i+getmaxx()/2,getmaxy()-60);
    line(getmaxx()/2-factor*x*i,getmaxy()-60-total[i]*factor,
        getmaxx()/2-factor*x*i,getmaxy()-60);
}
c=getch();
closegraph();
restorecrmode();
}

```

```

cara()
{
    int i,j,d,a,b=0,c;
    cleardevice();
    for(d=1;d<=500;d++)
        putpixel(random(getmaxx()),random(getmaxy()),10);
    arc(200,250,138,225,20);
    arc(175,218,299,46,20);
    arc(240,200,138,225,20);
    arc(235,168,299,46,20);
    arc(280,290,138,225,20);
    arc(255,218,299,46,20);
    setcolor(5);
    line(140,300,340,300);
    arc(240,300,180,360,100);
    arc(340,325,245,90,25);
    setcolor(9);
    line(100,400,400,400);
    setttextstyle(1,1,3);
    outtextxy(40,10,"PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES");
    setcolor(14);
    setttextstyle(2,0,4);
    outtextxy(210,360,"DIRECTOR DE TESIS");
    setttextstyle(2,0,4);
    outtextxy(190,290,"ING. DONACIANO JIMENEZ VAZQUEZ");
    setttextstyle(2,0,4);
    outtextxy(210,310,"JOSE EVELIO RODRIGUEZ PARRA");
    delay(2000);
}

```

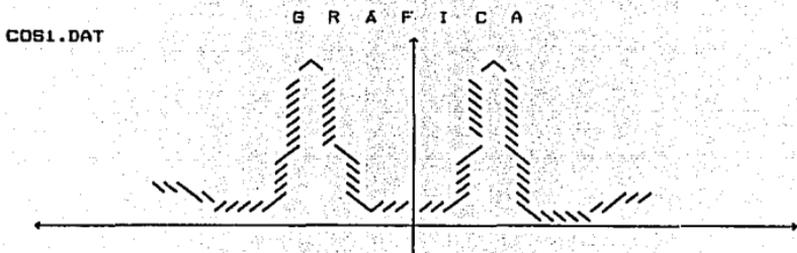
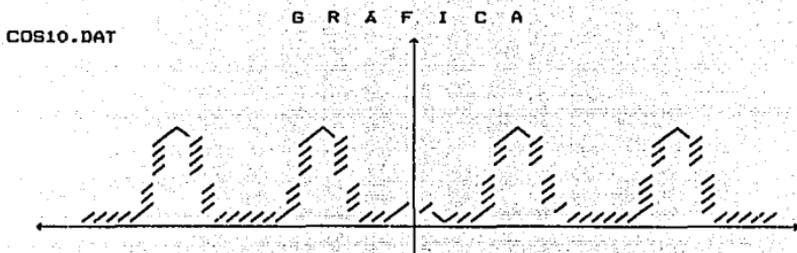
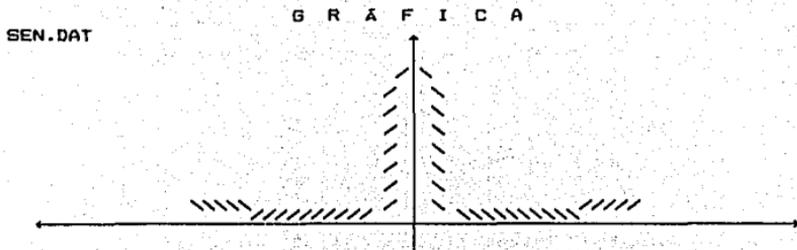
```

b=0;
c=0;
a=0;
for(a=0;a<=265;a++)
{
cleardevice();
settextstyle(2,0,5);

for(d=1;d<=500;d++)
putpixel(random(getmaxx()),random(getmaxy()),random(d));
setcolor(14);
outtextxy(212,300-a,"DIRECTOR DE TESIS");
if(a>=100)
{
settextstyle(2,0,5);
outtextxy(200-b,300-b,"ING. DONACIANO JIMENEZ VAZQUEZ");
b++;
if(a>=150){
c++;
settextstyle(2,0,5);
outtextxy(190+c,300-c,"JOSE EVELIO RODRIGUEZ PARRA");
}
}
setcolor(WHITE);
arc(200+a,250-a,138,225,20);
arc(175+a,218-a,299,46,20);
arc(260,200-a,138,225,20); /* ARCO */
arc(235,168-a,299,46,20);
arc(280-a,250-a,138,225,20);
arc(255-a,218-a,299,46,20);
/* FIGURA DE LA TAZA */
setcolor(5);
line(145,275,337,326);
setfillstyle(1,2); /* SIN MOVIMIENTO*/
arc(240,300,165,345,100);
arc(335,355,230,85,25);
setcolor(9);
line(100,400,400,450);
}
setcolor(12);
line( 25,155,140,155);
line( 200,55,350,55);
line( 300,205,445,205);
setcolor(9);
settextstyle(1,1,3);
outtextxy(550,20,"PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEXALES");
getche();
}

```

Resultado que produce el archivo *TDF.C* en el cálculo de la Transformada Discreta de Fourier, de los archivos *SEN.DAT*, *COS10.DAT* y *COS1.DAT*.



BIBLIOGRAFÍA.

- * BLANFORD, DICK KENT
THE DIGITAL FILTER ANALYZER
ED. ADDISON-WESLEY, 1988
- * PARKS, T. W.
DIGITAL FILTER DESIGN
ED. ADDISON-WESLEY, 1987
- * BARKAT MOURAD
SIGNAL DETECTION AND ESTIMATION
ED. N.Y. ARTECH, 1986
- * JESUS SAVAGE CARMONA
IMPLANTACION DE ALGORITMOS DE PORCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES
CON MICROPROCESADOR. (TESIS MAESTRIA)
ED. DEFFI-UNAM, MEXICO D.F., 1989
- * SAGE ADREW, P
ESTIMATION THEORY WITH APPLICATIONS
ED. MC. GRAW HILL, 1971.
- * PEEBLES PEYTON Z
PROBABILITY, RANDOM VARIABLES AND RANDOM SIGNAL PRINCIPLES
ED. MC. GRAW-HILL. 1987
- * SCHWARTZ, MISCHA
SIGNAL PROCESSING, DISCRETE SPECTRAL ANALYSIS
ED. MC. GRAW HILL, 1984
- * COOPER GEORGE
PROBABILISTIC METHODS OF SIGNAL AND SYSTEM ANALYSIS
ED. N.Y. HOLT, 1971
- * CLARKE A, BRUCE
PROBABILITY AN RANDOM PROCESSES
ED. J. WILEY, 1985
- * TAYLOR FRED J
DIGITAL FILTER DESIG HANBOOK
ED. N.Y. M. DEKER, 1983
- * ANTONIOU ANDREAS
DIGITAL FILTERS
ED. MC. GRAW HILL, 1979
- * LIU BEDE
DIGITAL FILTERS AND THE FFT
ED. HUTCHISON & ROSS, 1975

* BELLANGER
DIGITAL PROCESSING OF SIGNALS
ED. J. WILEY, 1984

* H. BAHER
ANALOG & DIGITAL SIGNAL PROCESSING
ED. WILEY EDITORIAL OFFICES, 1991

* MARK J. T. SMITH
RUSSELL M. MERSEREAU
DIGITAL SIGNAL PROCESSING
ED. WILEY EDITORIAL OFFICES, 1992

* SANJIT K. MITRA
JAMES F. KAISER
HANDBOOK FOR DIGITAL SIGNAL PROCESSING
ED. JOHN WILEY & SONS, 1993

* E.O. BRIGHAM
THE FAST FOURIER TRANSFORM
PRENTICE HALL, 1974

* DIGITAL SIGNAL APLICATIONS WITH THE TMS320 FAMILY TEXAS
INSTRUMENTS
1986

* DSP56000 DIGITAL SIGNAL PROCESSOR
USER'S MANUAL
1986

* A.V. OPPENHEIM
APPLICATIONS OF DIGITAL SIGNAL PROCESSING
PRENTICE HALL, 1978

* HAYKIN
ADAPITIVE FILTER THEORY
PRENTICE HALL, 1986

* ROGELIO ALCANTARA
APUNTES DE LA MATERIA DE PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES
DEPFI-UNAM 1989

* ATHANASIOS PAPOULIS
PROBABILITY, RANDOM VARIABLES, AND STOCHASTIC PROCESSES
ED. MC.GRAW-HILL, 1965

* ATHANASIOS PAPOULIS
SIGNAL ANALYSIS
ED. MC. GRAW-HILL, 1977

* TEXAS INSTRUMENTS INC.
DIGITAL SIGNAL PROCESSING APPLICATIONS WITH THE TMS320 FAMILY
1986

* SÁNCHEZ V.J.
SISTEMAS DE IMPLANTACION EN PROCESADORES DIGITALES DE SEÑALES
ASISTIDO POR COMPUTADORA (TESIS MAESTRIA)
DEPFI-UNAM, MEXICO D.F. 1989

* ATHANASIOS PAPOULIS
DIGITAL SYSTEM AND ANALOGIC, FOURIER TRANSFORM
ED. MARCOMBO BOIXAREU EDITORES, 1978

* ATHANASIOS PAPOULIS
DIGITAL CIRCUITS AND ANALOGIC SYSTEM.
ED. MARCOMBO BOIXAREU EDITORES, 1989

* ATHANASIOS PAPOULIS
THE FOURIER INTEGRAL AND ITS APPLICATIONS
ED. MC. GRAW HILL, 1962

* JOHN DUNLOP
D.GEOFFREY SMITH
INGENIERIA DE LAS TELECOMUNICACIONES
ED. EDITORIAL GUSTAVO GIL, S.A., 1983

* LOUIS L. SCHAT
STATISTICAL SIGNAL PROCESSING DETECTION, ESTIMATION AND ANALYSIS
ED. ADDISON-WELEY PUBLISHING COMPANY, 1991