

20
ZEJ



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**
FACULTAD DE CIENCIAS

**REFLEXIONES SOBRE LA CONSTANTE
COSMOLOGICA**

T E S I S
Que para obtener el Título de
F I S I C O
p r e s e n t a

CARLOS RODRIGO MARTINEZ PRIETO



Asesor: **Dr. Claudio Firmani Clementi**
Director de Centro de Instrumentos U.N.A.M.

México, D. F.

1995

FALLA DE ORIGEN





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Prologo.

Este trabajo tiene por objeto, hacer un conjunto de reflexiones sobre el problema de la constante cosmológica. Lo que intento es aclarar el desarrollo del problema de acuerdo a una bibliografía que se fué eligiendo a lo largo del trabajo. Se busca aclarar el desarrollo de las ecuaciones y su significado físico.

Se expone de manera cualitativa una visión general del modelo estándar y sus problemas. Luego, se plantean las ecuaciones de campo gravitacional con constante cosmológica para de ahí obtener las conocidas soluciones de De Sitter y así comprender el efecto físico de la constante cosmológica en la expansión del universo.

El segundo capítulo se refiere a la naturaleza cuántica del vacío en donde se hace la identificación entre su densidad de energía y la constante cosmológica. Se hace un cálculo de la densidad de energía del vacío tomando a un campo escalar libre con espín cero como representativo de todas las partículas. El hacer un cálculo del valor de la densidad de energía basado en este modelo, permite poner en evidencia el dramático contraste entre la observación astronómica y la teoría de campos. A pesar de que ha habido intentos teóricos, el problema aún no se ha resuelto.

En el tercer capítulo, se da una visión elemental de los modelos inflacionarios. El objetivo aquí es hacer ver que la expansión inflacionaria es producida por el decaimiento de la densidad de energía de un vacío primigenio que a su vez provoca un rompimiento de simetría entre las interacciones fundamentales. Existe la posibilidad de que el valor inicial de la constante cosmológica disminuya a un valor actual suficientemente pequeño como para poder conciliar la observación astronómica con la teoría. Nuevamente, hasta la fecha, la teoría no ha podido resolver este problema.

El último capítulo analiza algunos posibles efectos observacionales de una constante cosmológica actual distinta de cero. Se estudia la dinámica de la expansión, en donde las observaciones astronómicas permiten excluir algunos modelos, lo cual impone una cota superior a la constante cosmológica. La contribución de este trabajo consiste en analizar cual es el efecto de la radiación en la cota superior mencionada. También se estudia cual es el efecto de la constante cosmológica en la edad del universo, en el conteo de galaxias y en el fenómeno de lentes gravitacionales.

Es posible que en el futuro, las observaciones astronómicas puedan discriminar entre modelos que admitan una constante cosmológica distinta de cero.

INDICE GENERAL .

1. EL MODELO ESTANDAR Y LA CONSTANTE COSMOLOGICA .	1
1. Descripción general del modelo estándar .	1
2. Algunos problemas del modelo estándar .	6
3. Ecuaciones de campo con constante cosmológica .	9
2. NATURALEZA CUANTICA DEL VACIO .	15
1. Introducción .	15
2. Una estimación de la densidad de energía del vacío.	16
3. Distintas contribuciones a la densidad de energía del vacío .	21
3. INFLACION COMO PROPUESTA DE UNA RUPTURA DE SIMETRIA .	24
1. Introducción .	24
2. Rompimiento espontáneo de la simetría .	28
3. Inflación .	33
4. EFECTOS OBSERVACIONALES DE UNA CONSTANTE COSMOLOGICA DISTINTA DE CERO .	44
1. Introducción .	44
2. Dinámica de la expansión .	45
3. La edad del universo .	72
4. Conteo de galaxias .	75
5. Lentes Gravitacionales .	81
5. COMENTARIOS FINALES .	92
6. BIBLIOGRAFIA .	95

CAPITULO I

EL MODELO ESTANDAR Y LA CONSTANTE COSMOLOGICA

1. DESCRIPCION GENERAL DEL MODELO ESTANDAR.

Las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional, más la hipótesis de un universo homogéneo e isotrópico conducen a un resultado que representa una predicción importante: " el universo puede estar en contracción o en expansión ". Posteriormente, el descubrimiento del alejamiento de las galaxias confirma la validez de esta predicción, es decir, vivimos en un universo en expansión. Observacionalmente esto corresponde al corrimiento al rojo de la frecuencia de la luz proveniente de las galaxias.

Ha habido intentos de interpretar este corrimiento al rojo como debido a fenómenos distintos al de la expansión que involucran interacciones de los fotones, pero un análisis dado por Zeldovich (13) refuta este argumento.

" Si la pérdida de energía de los fotones se debe a la interacción con la materia intergaláctica, éste va acompañada por una transferencia de momento, o sea que hay un cambio en la dirección del fotón. Entonces las imágenes de los objetos celestes se verían como manchas, una estrella se vería como disco y no como un punto. Esto no se observa. Supongamos que el fotón decae dando parte de su energía a una partícula k , $\gamma \rightarrow \gamma' + k$. De las leyes de conservación y evitando una dispersión en los fotones, la partícula k debe moverse en la dirección del fotón y debe tener masa en reposo cero. Por la naturaleza estadística del proceso, algunos fotones perderían más energía que otros, y así habría un amplio espectro de líneas, lo cual no es observado.

Además el corrimiento al rojo medido en las diferentes partes del espectro es exactamente el mismo . Así las sugerencias de que hay otras explicaciones del corrimiento al rojo distintas de las de Friedmann caen en contradicción " .

Podría pensarse también que el corrimiento al rojo se debe a la pérdida de energía del fotón al escaparse del campo gravitacional galáctico , sin embargo un cálculo simple muestra que no es así . Si z es el corrimiento al rojo , λ_e y λ_o son las longitudes de onda emitida y observada respectivamente , tenemos

$$z = (\lambda_o - \lambda_e) / \lambda_e = (G M_g) / (r_g c^2)$$

donde M_g es la masa de la galaxia y r_g su radio . Substituyendo valores para una galaxia típica se obtiene un valor de z del orden de 10^{-7} . Este valor es despreciable con respecto a los valores obtenidos por la observación , además esto no explica la dependencia de la distancia en la ley de Hubble.

Las ecuaciones de Friedmann explican el fenómeno de expansión , sin embargo la causa física de la expansión queda fuera del modelo estándar . Otros dos fenómenos explicados en forma bastante exitosa por el modelo estándar son la radiación cósmica de fondo y el proceso de la nucleosíntesis de los elementos ligeros D , H^3 , He^3 , He^4 y Li^7 .

En cuanto a la radiación cósmica de fondo , Gamow la predijo como un subproducto de la nucleosíntesis . El exploró la posibilidad que los elementos se obtuviesen de un proceso de materia caliente segundos después de la Gran Explosión . Su hipótesis se considera válida para los elementos ligeros , mientras que la nucleosíntesis de los elementos pesados se origina en el interior de las estrellas . La temperatura de la radiación de fondo predicha por Gamow fue de $6^\circ K$, actualmente las observaciones dan una temperatura de $2.73^\circ k$. Las observaciones indican que la radiación de fondo es altamente isotrópica . La temperatura es muy uniforme en todas las direcciones , aunque se logra detectar tres formas de anisotropía (15) :

1.- Anisotropía de aproximadamente 1 parte en 10^9 , debida al movimiento galáctico de 620 km/seg respecto al sistema de referencia de cuerpo negro de la radiación cósmica.

2.- Una modulación anual en la temperatura en una dirección dada del cielo de aproximadamente una parte en 10^4 , por el movimiento orbital de la tierra alrededor del sol.

3.- Dos anisotropías detectadas por el radiómetro diferencial del COBE :

i) Fluctuaciones de temperatura promediadas por todo el cielo con resolución angular de 10°

$$\langle (\Delta T/T)^2 \rangle = (1.1 \pm 0.2) \times 10^{-5}$$

ii) Anisotropía cuadrupolar .

$$(\Delta T/T)_q = (6 \pm 2) \times 10^{-6}$$

Estas dos anisotropías nos dan fuerte evidencia de las inhomogeneidades primitivas de la densidad, que amplificadas por la gravedad dieron origen a las galaxias, cúmulos de galaxias y grandes estructuras.

El modelo estándar predice la evolución de un universo en donde la densidad de energía y la temperatura van disminuyendo a medida que el tiempo t avanza. Para $t \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$ y $T \rightarrow \infty$. Este estado "inicial" del universo representa un problema de consistencia para la teoría. Entonces a partir de t cercano a cero la temperatura con el tiempo va disminuyendo y se van dando las condiciones para etapas distintas en la formación de las estructuras de materia y energía que evolucionan hasta la forma actual.

Si el plasma primitivo está en equilibrio térmico entonces en él están presentes todas las partículas con masa tal que $mc^2 \ll kT$, donde c es la velocidad de la luz y k es la constante de Boltzman. El equilibrio se da cuando el tiempo de expansión es mayor que el tiempo de relajamiento para el establecimiento del equilibrio, esto equivale a $\sigma n v \gg H$ donde σ es la sección transversal de interacción entre las partículas, n es la densidad numérica de partículas, v es la velocidad térmica y H el coeficiente de expansión del universo.

Para $t = 1$ seg y $T = 1$ Mev, el plasma contiene fotones, neutrinos, antineutrinos y pares electrón-positrón. El número de neutrones y protones por unidad de volumen es despreciable. A medida que el plasma se enfría, la concentración $e^+ + e^-$ disminuye pues el proceso $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ domina.

Para $t \leq 0.1$ seg , $T > 3-5$ Mev , los neutrinos y antineutrinos están en equilibrio con el plasma . A temperaturas menores su interacción se vuelve despreciable.

Para $t < 10^{-2}$ seg había mesones K , pares protón-antiprotón y pares neutrón-antineutrón en el plasma .

Para $t < 10^{-4}$ seg , $T > 10^{12}$ °K , los mesones y bariones estaban disociados en el plasma cuark-gluón .

Para $t < 10^{-10}$ seg , $T > 10^{15}$ °K , había abundancia de bosones W^+ , W^- , Z^0 , intermediarios de la interacción débil.

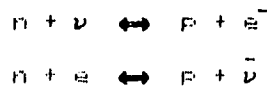
¿ Que sucede con las partículas durante la expansión y enfriamiento ? . A medida que la densidad decrece , la tasa ó ritmo de reacción decrece , su tiempo se vuelve mayor que el tiempo de expansión y llega el momento en que el equilibrio se rompe debido al valor reducido de n y σ (la velocidad térmica también disminuye pues $\langle m \sqrt{v^2/2} \rangle = 3 k T/2$) .

Si la interacción de las partículas es débil , éstas se desacoplan a una temperatura $T > m$ (T y m en MeV) . Este es el caso de los neutrinos que a T entre 3 y 5 MeV se desacoplan del plasma , pues su masa es menor de 100 eV .

Las partículas que tienen interacción fuerte se comportan diferente , estas permanecen en equilibrio con el plasma aún para $T < m$. Al disminuir la densidad , llega el momento en que la concentración es tan baja que ni siquiera las interacciones fuertes pueden mantener el equilibrio . Después de esto , el único factor que cambia la concentración es la expansión , y el número de partículas en un volumen comóvil permanece constante . Este fenómeno se llama congelamiento de la concentración . Como resultado de esto , "fósiles" ó "reliquias" estables del "Big Bang" pueden sobrevivir hasta ahora . Si la concentración de las partículas del universo actual es conocida , uno puede encontrar restricciones sobre sus propiedades , en particular sobre su densidad .

Entre $t = 1$ seg y $t = 1000$ seg , las condiciones son las adecuadas para la formación de los núcleos atómicos primordiales . Antes de eso , las partículas son tan energéticas que rompen cualquier núcleo atómico previamente formado . Posteriormente a ese tiempo , los nucleones tienen tan poca energía cinética que no pueden penetrar la barrera coulombiana , todos los neutrones libres decaen ($n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$) . Durante ese tiempo se produce He^4 (25 %) , H^2 (3×10^{-5}) , He^3 (2×10^{-5}) , Li^7 (10^{-6}) donde

los números entre paréntesis indican las concentraciones en masa . Las concentraciones de los núcleos obtenidos de esa nucleosíntesis primordial son sensibles al valor de la proporción n/p en ese periodo . Cuando $t < 1$ seg ($T > 1$ MeV) , n/p está descrita por $N_n/N_p = \exp(-\Delta m/T)$, donde $\Delta m = m_n - m_p = 1.3$ MeV , es el valor de la diferencia de masas entre el neutrón y el protón . La proporción es la relación entre el número de neutrones al número de protones . El equilibrio se mantiene mediante los procesos de interacción débil :



Cuando la temperatura se vuelve menor que $T_c = 0.7$ MeV , estos procesos se vuelven muy lentos , hay una pérdida de equilibrio termodinámico y la proporción n/p se congela al valor $(N_n / N_p)_c = \exp(-\Delta m/T_c)$. Cuando T es menor ó igual que 100 KeV , la mayoría de los neutrones quedan atrapados formando deuterio mediante el proceso $n + p \rightarrow H^2 + \gamma$. Luego el deuterio capturando nucleones forma H^3 y He^3 , que posteriormente con un nucleón más , se vuelve He^4 . El acuerdo entre la teoría de la nucleosíntesis y las observaciones de las abundancias de H^2 , He^3 , He^4 y Li^7 es uno de los pilares de la teoría del modelo estándar .

Después de la formación de los elementos ligeros , la materia y la radiación continúan interactuando mediante frecuentes ionizaciones y recombinaciones de átomos , manteniéndose ambos a la misma temperatura . Cuando la temperatura llega a unos cuantos miles de grados , $R/R_0 = 10^{-9}$ (R es el factor de escala , y el subíndice 0 se refiere al tiempo actual) y $\rho = 10^{-20}$ gr/cm³ , la evolución del universo pasa a través de dos pasos , cuando $t = 10^4$ años el universo deja de ser dominado por la densidad de energía de la radiación y se vuelve dominado por la densidad de energía de la materia , esto es $\rho_m = \rho_{m0} (R_0/R)^3 \geq \rho_r = \rho_{r0} (R_0/R)^4$, y un poco más adelante en el tiempo ($t = 300,000$ años) los fotones dejan de ser lo suficientemente energéticos como para mantener a los átomos de hidrógeno ionizados , así que los electrones y protones se recombinan . La recombinación del plasma determina el desacoplamiento entre materia y radiación y se rompe el equilibrio térmico entre éstas . A partir de entonces los fotones se propagan casi libres . Antes de la recombinación , la presión de los fotones evitaba que la materia se condensara . Después de la recombinación , la presión fotónica deja de actuar sobre la materia , y pequeñas perturbaciones en la densidad de materia tal

vez procedentes de la Gran Explosión , empiezan a crecer . Para $1/30 < R/R_0 < 1/10$ (10^8 años $< t < 10^9$ años) , estas perturbaciones darán lugar a galaxias , cúmulos de galaxias y las grandes estructuras.

2. ALGUNOS PROBLEMAS DEL MODELO ESTANDAR

El problema de la singularidad . Se refiere al mencionado estado donde para $t = 0$, $R = 0$, $\rho = \infty$ y $T = \infty$. Se piensa esto como el nacimiento del universo . Se puede plantear lo siguiente: ¿ Qué había antes ? . ¿ De donde proviene el universo ? . ¿ Si en $t < 0$ no existía nada , como apareció algo de la nada ? .

El problema del horizonte . Hoy llegan a nosotros señales de regiones del universo que en el pasado quedaban incomunicadas con respecto a nosotros , es decir, antes las dos regiones no estaban conectadas causalmente . Cuando se observa la radiación de fondo procedente de esas regiones , se ve igual a la de otras regiones. Dicho de otro modo , supongamos un universo infinito y pensemos en los primeros instantes después de la gran explosión , por ejemplo a $t = 10^{-43}$ seg . Entonces regiones que han evolucionado de manera desconectada desde ese tiempo y apenas hoy se han conectado causalmente , se ven similares . ¿ Cómo se dieron las condiciones para que todas las regiones del universo empezaran la expansión de manera uniforme ? .

El problema de un universo euclidiano (plano) . De las ecuaciones de Einstein sin constante cosmológica se obtiene :

$$\left(\frac{dR}{dt}/R\right)^2 = (8\pi/3)G \rho - k/R^2 ,$$

donde ρ es la densidad de energía , G es la constante gravitacional y k es la constante de curvatura (+1 cerrado , 0 plano , -1 abierto) .

$$d^2R/dt^2 = -(4\pi/3)G (\rho + 3p)R ,$$

donde p es la presión.

Como vemos , $d^2R/dt^2 \leq 0$, pues por lo general se supone que ρ , p y R son no negativos y entonces dR/dt decrece . La primera ecuación la podemos escribir :

$$\Omega = 1 + k/(dR/dt)^2 ,$$

donde $\Omega = (8\pi G \rho)/(3 H^2)$ y $H = (dR/dt)/R$

A medida que transcurre la expansión Ω se va alejando de 1 , pero mientras más nos acercamos a la Gran Explosión Ω es más cercana a 1 . Usando esta ecuación podemos calcular que valor debe tener Ω en épocas tempranas para que Ω_0 sea como la observamos hoy . Los resultados son :

Edad del Universo	Periodo	$ 1 - \Omega $
2×10^{10} años	hoy	≤ 1
10^5 años	recombinación	10^{-9}
1 seg	comienzo de la nucleosíntesis	10^{-16}
10^{-5} seg	plasma cuark-gluón	10^{-21}
10^{-10} seg	transición de fase electrodébil	10^{-26}
10^{-49} seg	inicio de la evolución clásica del universo	10^{-60}

Este cuadro nos muestra un universo altamente plano al principio. ¿ Que proceso físico determinó esta condición ?.

El problema de la homogeneidad y la formación de galaxias . Las observaciones astronómicas nos muestran que a una escala de 10^{10} años luz la distribución de materia difiere de una distribución homogénea en menos de una parte en mil . A escalas menores el universo se vuelve más inhomogéneo . A estas escalas aparecen cúmulos , galaxias , etc . ¿ Por que nuestro universo es tan homogéneo a gran escala ? . ¿ Cual es el origen de esas inhomogeneidades que a su vez dan origen a las galaxias , etc ?.

Estos problemas planteados son muy difíciles y no se les ha encontrado una solución dentro del modelo estándar de la Gran Explosión.

3. ECUACIONES DE CAMPO CON CONSTANTE COSMOLOGICA.

Einstein modificó sus ecuaciones de campo gravitacional añadiendo un término que permitiera una solución estática para el universo. Con el término cosmológico las ecuaciones de campo tienen la forma :

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} . \quad (1.1)$$

Aquí $G_{ab} = R_{ab} - (1/2) R g_{ab}$ es el tensor de curvatura de Einstein, T_{ab} es el tensor energía-momento, G es la constante gravitacional y Λ es la llamada constante cosmológica.

Dado que $g_{ab;b} = 0$, es claro que $G_{ab;b} + \Lambda g_{ab;b} = 8\pi G T_{ab;b} = 0$, es decir, las ecuaciones de campo son compatibles con una ley de conservación. Como resultado de estas ecuaciones se tiene que el tensor de curvatura no es cero para un espacio vacío. Conceptualmente podemos pasar el término cosmológico del lado del tensor de energía e interpretarlo como un término adicional para el tensor energía-momento. Escribimos la ecuación 1.1 como

$$G_{ab} = 8\pi G (T_{ab} + T^{vac}_{ab}) . \quad (1.2)$$

El término $T^{vac}_{ab} = - \Lambda g_{ab}/(8\pi G)$ representa la contribución efectiva del vacío al tensor energía-momentum.

Usando un modelo de Friedmann con métrica de Robertson-Walker :

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \{ dr^2/(1 - k r^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \} , \quad (1.3)$$

donde $k = +1, -1$ ó 0 , se obtienen las componentes de G_{ab} . Se observa que $G_{ab} = 0$ cuando a es distinto de b y que $G_{11} = G_{22} = G_{33}$ (el espacio es isotrópico y homogéneo). Las ecuaciones quedan

$$G_{00} = 3 ((dR/dt)/R)^2 + 3 k/R^2 = 8\pi G \rho + \Lambda , \quad (1.4)$$

$$G_{11} = (-2 dR^2/dt^2)/R - ((dR/dt)/R)^2 - k/R^2 = 8\pi G p - \Lambda . \quad (1.5)$$

Dividiendo la ecuación 1.4 entre 3 y sumandola con la ecuación 1.5 se obtiene

$$-2 \left(\frac{d^2 R / dt^2}{R} \right) = (8\pi/3) G(\rho + 3 p) - (2/3)\Lambda . \quad (1.6)$$

Reescribiendo las ecuaciones 1.4 y 1.6 :

$$(1/2) (dR/dt)^2 - (4\pi/3) G \rho R^2 = \Lambda R^2/6 - R/2 , \quad (1.4.1)$$

$$d^2 R / dt^2 = (1/3) \Lambda R - (4\pi/3) G (\rho + 3 p) R . \quad (1.6.1)$$

4. LA SOLUCIÓN DE DE SITTER

Consideremos una región esférica de radio $(R = r_0)$, podemos calcular las fuerzas que actúan sobre una partícula de masa unitaria situada en la superficie . Multipliquemos la ecuación 1.6.1 por r_0 , la ecuación queda

$$d^2(R r_0) / dt^2 = - G M / (R r_0)^2 + \Lambda R r_0 / 3 .$$

$M = 4\pi/3 (\rho + 3 p) (R r_0)^3$ es toda la masa contenida en la esfera. En la partícula actúan dos fuerzas , la primera es la fuerza newtoniana de atracción gravitatoria $F_n = -G M / (R r_0)^2$, y la segunda $F_\Lambda = (\Lambda/3) (R r_0)$ es proporcional a la distancia $(R r_0)$ entre las partículas interactuantes . Vemos claramente que si $\Lambda > 0$ entonces F_Λ es de repulsión entre las partículas , y si $\Lambda < 0$ entonces F_Λ es de atracción . El valor de Λ ha de ser muy pequeño pues su efecto hasta ahora no se observa en la astronomía extragaláctica a escala cosmológica . El efecto de F_Λ solo se manifiesta a escalas muy grandes comparables con el tamaño del horizonte . Si $\Lambda < 0$, hay una fuerza adicional de atracción y el universo finalmente se contraerá . Si $\Lambda > 0$ la fuerza sería repulsiva y la gama de posibilidades es mayor . La distinción entre un universo cerrado y que se contraería en ausencia de Λ , y un universo plano o abierto en expansión , deja de ser válida.

Resolvamos la ecuación 1.4.1 con $\rho = 0$ y $\Lambda > 0$ para los tres casos $k = 1, 0, -1$.

a) $k = 0$. La ecuación 1.4.1 se reduce a (tomando la raíz positiva)

$$dR/dt = (\Lambda/3)^{1/2} R. \quad (1.7)$$

La solución es :

$$R(t) = R_0 \exp((\Lambda/3)^{1/2} t). \quad (1.8)$$

y de ahí se obtiene

$$H = (dR/dt)/R = (\Lambda/3)^{1/2}. \quad (1.9)$$

b) $k = 1$. La ecuación 1.4.1 queda

$$(dR/dt)^2 = \Lambda R^2/3 - 1. \quad (1.10)$$

La solución es :

$$R(t) = (3/\Lambda)^{1/2} \cosh((\Lambda/3)^{1/2} t) \quad (1.11)$$

$$H = (\Lambda/3)^{1/2} \tanh((\Lambda/3)^{1/2} t). \quad (1.12)$$

c) $k = -1$. La ecuación 1.4.1 queda

$$(dR/dt)^2 = \Lambda R^2/3 + 1. \quad (1.13)$$

La solución es :

$$R(t) = (3/\Lambda)^{1/2} \sinh((\Lambda/3)^{1/2} t), \quad (1.14)$$

$$H = (\Lambda/3)^{1/2} \coth((\Lambda/3)^{1/2} t). \quad (1.15)$$

Estas soluciones son válidas para un universo vacío y representan el puro efecto de la constante cosmológica. Para $t \rightarrow \infty$ la diferencia entre las tres soluciones tiende a cero. Para los tres casos se puede hablar de una expansión exponencial.

Como se puede observar de las figuras 1a y 1b, cuando $k = 0$ el factor de escala siempre crece y cuando $t \rightarrow -\infty$, $R \rightarrow 0$. En el caso $k = 1$, R viene decreciendo de un valor infinito hasta alcanzar un mínimo distinto de cero y luego se expande hacia infinito. Cuando $k = -1$ el factor de escala evoluciona desde un valor cero para un valor de t finito, y luego crece exponencialmente con el tiempo. Esto se puede poner en contraposición con el modelo estándar sin constante cosmológica en donde la densidad de energía es la de la radiación o la materia, y para cualquier valor de k el universo empieza su expansión en una singularidad dada en un tiempo finito.

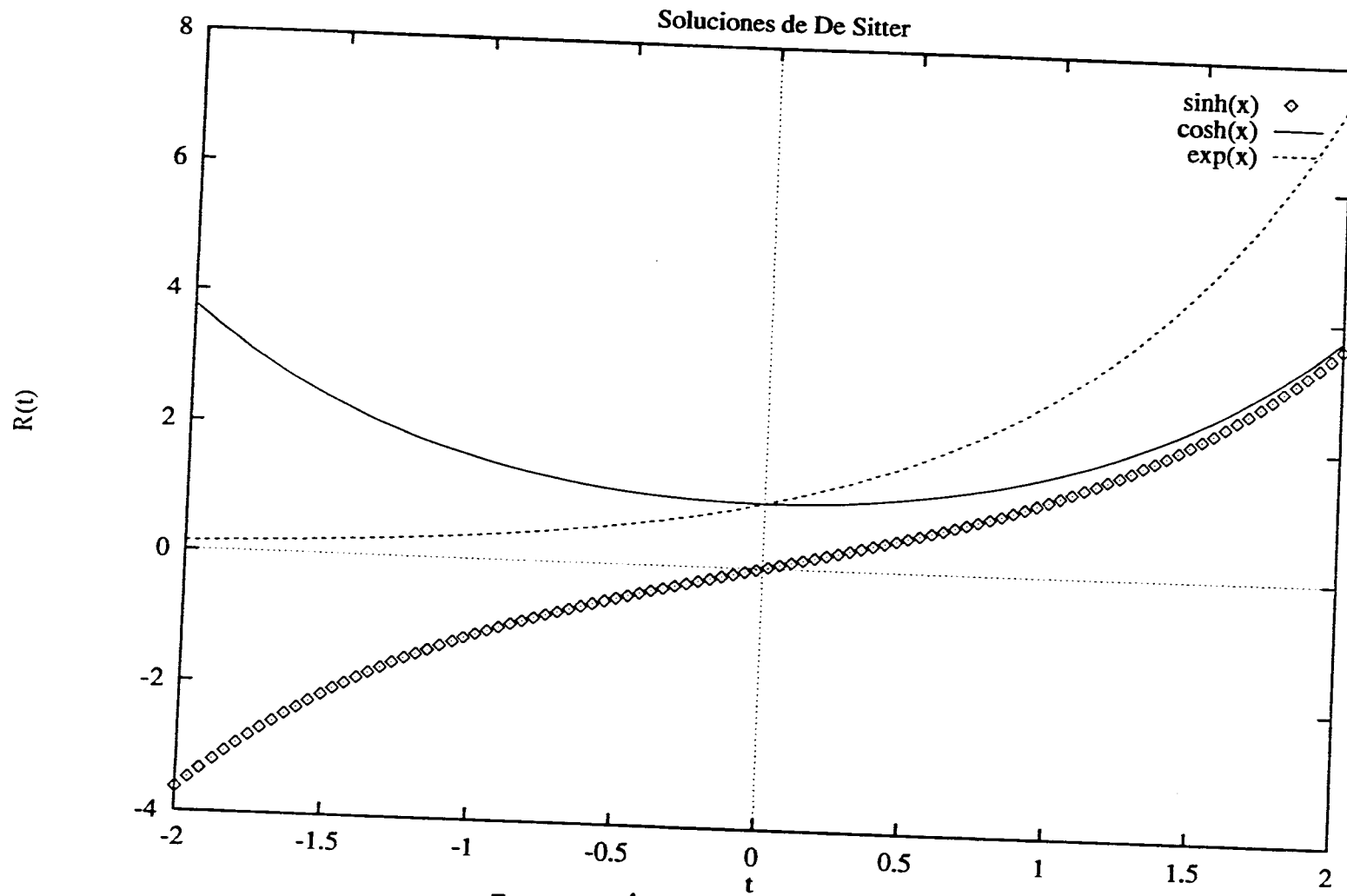


FIGURA 1a.

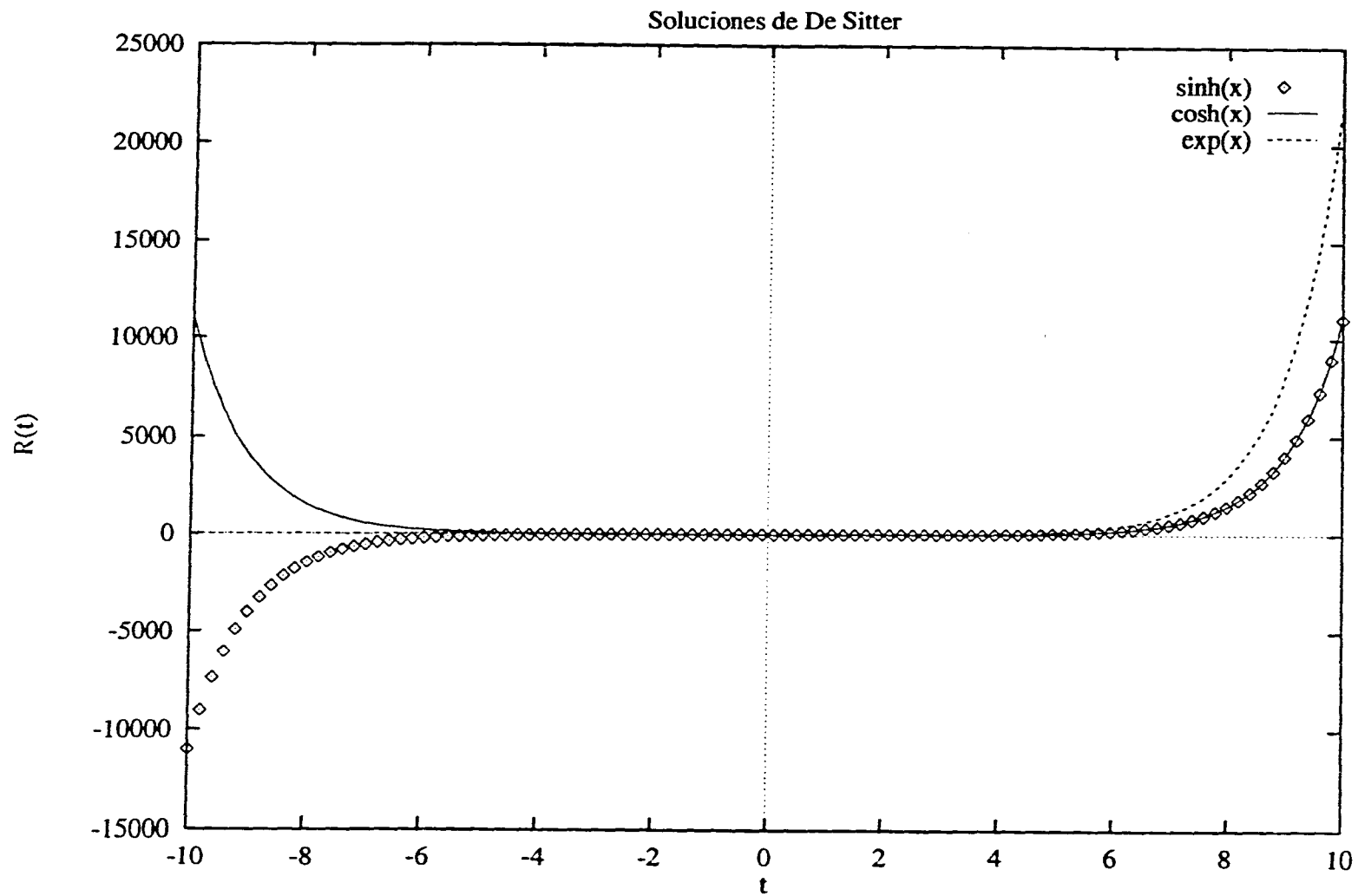


FIGURA 1b. 14

CAPITULO II

NATURALEZA CUANTICA DEL VACIO

1. INTRODUCCION

Escribiendo la componente temporal de las ecuaciones de campo con el término de la constante cosmológica, esta constante queda asociada con la densidad de energía del vacío mediante la relación $\rho_{vac} = \Lambda / (8\pi G)$ que es constante por construcción. El hecho de esta asociación se debe en parte a que la densidad de energía de la materia ó radiación varía de una forma definida con el factor de escala, y ρ_{vac} al ser constante solo redefine el nivel cero de la energía, pero genera un efecto en la expansión del universo.

La forma del tensor energía-momento del vacío en un sistema de referencia local de Lorentz es

$$T_{ab}^{vac} = - \rho_{vac} \eta_{ab} , \quad (2.1)$$

donde η_{ab} es el tensor métrico de Minkowski dado por $\eta_{ab} = \text{diag}(-1,1,1,1)$.

De esta relación se puede inferir que el término cosmológico representa a un fluido perfecto con ecuación de estado

$$p_{vac} = - \rho_{vac} , \quad (2.2)$$

p_{vac} es la presión del vacío. Esto también se puede inferir a partir de la ecuación de conservación de la energía para un fluido perfecto en comovimiento, es decir

$$d\rho_{vac}/dt = - 3 H(\rho_{vac} + p_{vac}) . \quad (2.3)$$

De ésta relación se observa que , dado que ρ_{vac} es constante , entonces se cumple la relación 2.2 . También se observa de la ecuación 2.1 que el tensor energía-momento del vacío es un invariante de Lorentz , propiedad que se esperaría , el vacío tuviera.

Desde un punto de vista cuántico , el vacío es el estado de mínima energía ó estado base de las partículas cuyo comportamiento queda descrito por una ecuación de onda . A está asociada con la densidad de energía de las partículas en los estados "virtuales" de vacío . Estimaciones teóricas de ρ_{vac} difieren en 120 ordenes de magnitud de los límites observacionales . Los modelos inflacionarios proponen que el universo sufrió una expansión exponencial temprana producida por una constante cosmológica primitiva , donde la expansión va acompañada de un decaimiento en la densidad de energía del vacío . Ese cambio en la densidad de energía del vacío se transfiere a las partículas en estados reales (las partículas adquieren masa) . Existe la posibilidad de que estos fenómenos puedan explicar la discrepancia planteada anteriormente.

2. UNA ESTIMACION DE LA DENSIDAD DE ENERGIA DEL VACIO

Las observaciones astronómicas indican que ρ_{vac} es muy pequeña El límite superior es

$$\rho_{vac} < 10^{-29} \text{ gr/cm}^3 = 10^{-47} (\text{GeV})^4 , \quad (2.4)$$

Este valor tiene que ser confrontado con el valor teórico calculado por la teoría cuántica de campos . Para eso se tiene que considerar los diferentes tipos de campos que contribuyan a ρ_{vac} . Básicamente se consideran los siguientes : campos espinoriales que representan a los leptones y cuarks (fermiones) ; campos vectoriales que representan a los bosones que median la interacción entre los fermiones ; campos escalares que en un principio aparecieron representando a los mesones pi que

mediaban la interacción entre nucleones , sin embargo al descubrirse los cuarks y gluones ésta teoría se abandonó . Sin embargo , posteriormente los campos escalares reaparecieron en la teoría de partículas jugando un papel mucho más fundamental .

Para hacer una estimación en cuanto a ordenes de magnitud de p_{vac} , se puede usar un campo escalar sin interacción (Klein-Gordon) como representante de todas las partículas . Esto se justifica pues el proceso de cuantización de los campos conduce a una expresión para el Hamiltoniano como una sumatoria infinita de términos donde cada uno representa el Hamiltoniano de un oscilador armónico de una frecuencia específica , esto es cierto para bosones vectoriales, para bosones escalares y también para fermiones . Aceptando ésta aproximación , la ecuación de onda para un campo escalar ϕ sin interacción es

$$\{ \partial^2/\partial t^2 - \nabla^2 + m^2 \} \phi = 0 . \quad (2.5)$$

(Aquí se ha tomado $\hbar = 1$ y $c = 1$, donde \hbar es la constante de Planck y c es la velocidad de la luz) .

Multiplicando la ecuación 2.5 por una variación infinitesimal de la amplitud ϕ en un punto x , $\delta\phi = \phi'(x) - \phi(x)$ e integrando sobre las coordenadas espaciales y sobre un intervalo de tiempo

(t_1 , t_2) , se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \{ \partial^2\phi/\partial t^2 - \nabla^2\phi + m^2\phi \} \delta\phi = 0 . \quad (2.6)$$

Asumimos $\delta\phi(t_1) = \delta\phi(t_2) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta\phi = 0$. De la ecuación 2.6 se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \delta \{ 1/2(\partial\phi/\partial t)^2 - 1/2|\nabla\phi|^2 - m^2\phi^2/2 \} = 0 . \quad (2.7)$$

Para comprobarlo basta aplicar la variación e integrar por partes. Entonces de la ecuación 2.7 se concluye que la densidad lagrangiana para el campo de Klein-Gordon es

$$L(\phi, \partial\phi/\partial x^r) = 1/2 (\partial\phi/\partial x^r \partial\phi/\partial x_r - m^2\phi^2) . \quad (2.8)$$

El momento conjugado se define como $\Pi \equiv \partial L / \partial \dot{\phi} = \dot{\phi}$, el punto se refiere a la derivada respecto al tiempo, entonces la densidad hamiltoniana es

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - L = 1/2 (\Pi(x,t)^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2) . \quad (2.9)$$

Π y ϕ son operadores hermitianos que satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [\phi(x,t), \phi(x',t)] &= [\Pi(x,t), \Pi(x',t)] = 0 , \\ [\Pi(x,t), \phi(x',t)] &= i \delta^3(x-x') . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Según la ecuación 2.9, el operador Hamiltoniano es

$$H = 1/2 \int d^3x (\Pi^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2) . \quad (2.11)$$

La función ϕ la podemos escribir mediante una transformada de Fourier (superposición de ondas planas), es decir

$$\phi(x,t) = 1/2 \int d^3k (2\pi)^{-3} 2\omega_k^{-1/2} (a(k) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_k t) + a^\dagger(k) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega_k t)) . \quad (2.12)$$

$a^\dagger(k)$ es el complejo conjugado de $a(k)$ y $\omega_k = (k^2 + m^2)^{1/2}$. En términos de $a(k)$ y $a^\dagger(k)$ el operador hamiltoniano se escribe

$$H = 1/2 \int d^3k \omega_k (a^\dagger(k) a(k) + a(k) a^\dagger(k)) . \quad (2.13)$$

Dividiendo el espacio k en celdas de volumen ΔV_k se puede escribir

$$\begin{aligned} \int d^3k &\rightarrow \sum_k \Delta V_k \quad ; \quad a_k = (\Delta V_k)^{1/2} a(k) ; \\ \delta^3(k-k') &\rightarrow \delta_{kk'} / \Delta V_k , \end{aligned} \quad (2.14)$$

entonces el Hamiltoniano adquiere la forma

$$H = \sum_k (1/2) \omega_k (a^\dagger_k a_k + a_k a^\dagger_k) = \sum_k H_k . \quad (2.15)$$

En base a las relaciones de conmutación 2.10 y las definiciones 2.14 los operadores a^{\dagger}_k y a_k satisfacen las siguientes relaciones de conmutación :

$$[a_k, a^{\dagger}_k] = \delta_{kk} ; [a_k, a_l] = [a^{\dagger}_k, a^{\dagger}_l] = 0 . \quad (2.16)$$

Recordando la teoría del oscilador armónico, resulta fácil ver que el hamiltoniano 2.14 es equivalente a una suma de hamiltonianos donde cada uno de ellos es el de un oscilador armónico con modo normal k y la suma es sobre todos los modos normales posibles. Los operadores a^{\dagger}_k y a_k son llamados los operadores de creación y aniquilación respectivamente. La solución al problema de eigenvalores para cada k puede ser caracterizado por un entero $n_k = 0, 1, 2, 3, \dots$, en términos del cual las eigenfunciones y eigenvalores de la energía son :

$$\begin{aligned} \phi_k(n_k) &= (1/n_k!)^{1/2} (a^{\dagger}_k)^{n_k} \phi_k(0) , \\ H_k \phi_k(n_k) &= \omega_k(n_k + 1/2) \phi_k(n_k) , \end{aligned} \quad (2.17)$$

$\phi_k(0)$ es el estado base para el modo normal k , el cual queda definido mediante la relación $a_k \phi_k(0) = 0$.

Las eigenfunciones ϕ son los productos de las ϕ_k para cada k , o sea para cada celdilla en el espacio k ó de momento, y éstas están caracterizadas por los enteros n_k para cada k , es decir

$$\phi(n_{k_1}, \dots, n_{k_l}) = \prod_k \phi_k(n_k) . \quad (2.18)$$

El estado base, que es el de más baja energía, se caracteriza haciendo todos los $n_k = 0$, entonces se puede escribir

$$|\text{vac}\rangle = \phi_0 = \prod_k \phi_k(0) . \quad (2.19)$$

Usando las relaciones 2.15 , 2.16, 2.19 y la definición de $\phi_k(0)$ se llega a que la energía E_0 del estado base ó de vacío se escribe según la fórmula

$$E_0 = \langle \text{vac} | H | \text{vac} \rangle = \sum_k \omega_k/2 = \sum_k \hbar \omega_k/2 . \quad (2.20)$$

Esta energía puede ser interpretada como la energía de las partículas que aparecen y desaparecen en el vacío . Esto puede ser entendido si imaginamos una partícula en su estado base , la partícula no tiene la suficiente energía como para presentarse en su estado no virtual (real) , sin embargo su estado de energía sufre fluctuaciones cuánticas ΔE , durante un lapso de tiempo Δt definidos por la relación de incertidumbre $\Delta E \Delta t \geq \hbar$. Si la fluctuación en la energía es suficientemente grande como para pasar el umbral de partícula virtual a real , esto lo hace sólo durante un lapso de tiempo que puede ser muy pequeño .

Para realizar la suma 2.20 situamos al sistema en una caja de volumen L^3 . Las condiciones en la frontera son que la longitud de onda en una dirección i satisface $\lambda_i = L/n_i$ para un entero n_i . Dado que $k_i = 2\pi/\lambda_i = 2\pi n_i/L$, entonces en un intervalo $(k_i, k_i + dk_i)$ hay $dn_i = dk_i L/2\pi$ valores discretos de k_i . Entonces la expresión para E_0 se vuelve :

$$E_0 = (1/2) \hbar L^3 (2\pi)^{-3} \int_0^{k_{\max}} dk_x dk_y dk_z \omega_k . \quad (2.21)$$

Cambiando a coordenadas esféricas y haciendo uso de la expresión $\omega_k = (k^2 + (m/\hbar)^2)^{1/2}$, la integral se reduce a

$$\rho_{\text{vac}} = \lim_{L \rightarrow \infty} E_0/L^3 = \hbar/2 (2\pi)^{-3} \int_0^{k_{\max}} 4\pi k^2 (k^2 + (m/\hbar)^2)^{1/2} dk ;$$

Imponemos la condición de que $k_{\max} \gg m/\hbar$. Tomando en cuenta la condición anterior , la integral da

$$\rho_{\text{vac}} = \hbar k_{\max}^4 / (16\pi^2) . \quad (2.22)$$

Para estimar k_{\max} , debemos considerar el límite de energías donde la teoría actual ya no es válida. Este límite está dado por la energía de Planck $E^* = 10^{19}$ GeV aproximadamente. De ahí obtenemos $k_{\max} = E^*/\hbar$, y entonces de la expresión 2.22 se obtiene:

$$\rho_{\text{vac}} = (E^*)^4 / (16\pi^2 \hbar^3) = 10^{74} (\text{GeV})^4 \hbar^{-3} = 10^{92} \text{ gr/cm}^3. \quad (2.23)$$

Este valor es proporcional a la densidad de Planck la cual es igual a m_p^4 , donde m_p es la masa de Planck ($E^* = m_p c^2$).

3. DISTINTAS CONTRIBUCIONES A LA DENSIDAD DE ENERGÍA DEL VACÍO.

Del cálculo anterior se estima una ρ_{vac} que es 120 ordenes de magnitud mayor que la ρ_{vac} máxima permitida por la observación. Pudiera pensarse que el valor de k_{\max} considerado es muy grande, sin embargo para satisfacer el límite observacional sería necesario considerar valores de $k_{\max} < 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ lo que equivale a que se tendría que ignorar efectos para energías mayores que 10^{-2} eV . Esta no es una energía grande, pues la energía de amarre de un electrón en un átomo de hidrógeno es mucho mayor.

En el mundo real hay muchos tipos diferentes de partículas, cada campo de partículas contribuya en forma algo distinta de los demás campos a la densidad de energía del vacío. Podemos considerar 3 tipos de contribuciones:

1. El valor que ρ_{vac} tuviera si no existiera ningún tipo de partícula y sólo existiera la fuerza de gravedad. A esta contribución se le da el nombre de constante cosmológica "desnuda", y es un parámetro libre que solo se puede determinar mediante la experimentación.

2. El segundo tipo de contribución surge en parte de las fluctuaciones cuánticas. Los campos tales como el campo espinorial electrónico, experimentan fluctuaciones que se manifiestan como pares partícula-antipartícula que aparecen espontáneamente, interactúan brevemente y luego desaparecen. Aunque las partículas virtuales no se pueden detectar mediante una observación casual en el espacio vacío, ellas alteran la densidad de energía del vacío. Hemos calculado este tipo de contribución para bosones con spin 0 a partir del hamiltoniano 2.15, que mediante las reglas de conmutación 2.16 se puede escribir

$$H_b = \sum w_k (a_k^\dagger a_k + 1/2) .$$

Para los fermiones hay que recordar que los operadores a_k^\dagger y a_k anticommutan, entonces el hamiltoniano para los fermiones será

$$H_f = \sum w_k (a_k^\dagger a_k - 1/2) .$$

Este cambio de signo representa un desplazamiento negativo del potencial fermiónico oscilatorio relativo al potencial de los bosones con igual masa.

Se cree que hay una profunda simetría entre bosones y fermiones. Los experimentos revelan que la simetría no es exacta, pues las masas de los bosones son diferentes a la de los fermiones, así entonces la energía del vacío no se cancela aunque haya el mismo número de estados fermiónicos que de bosónicos.

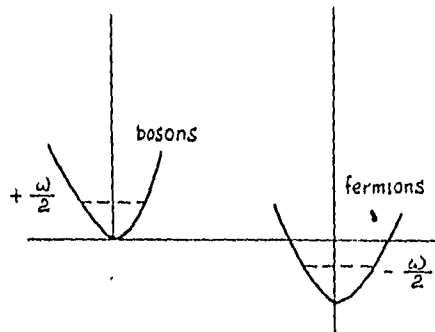


FIGURA 2. ENERGIA DE VACIO DE BOSONES Y FERMIONES
(TOMADO DE REF. 10)

Otra contribución que hay que considerar en este segundo rubro es debida a los campos de Higgs que representan partículas masivas llamadas bosones de Higgs, las cuales no se han encontrado aún. Si existen tendrían una fuerte contribución a ρ_{vac} . Se piensa que este tipo de campos da origen a la masa de las partículas. También hay que considerar en este segundo rubro la contribución a ρ_{vac} debida a la interacción entre campos.

3. Finalmente una contribución más se debe a partículas e interacciones desconocidas.

Todas esas contribuciones deben sumarse. Teorías indican que la suma de éstas no se cancela, y que el remanente es proporcional a $(m-susy)^4$, donde $m-susy$ es un parámetro de masa el cual describe la escala de rompimiento de la supersimetría. Según datos existentes $m-susy > 10^3$ GeV, dando un valor para ρ_{vac} mayor que 10^{42} (GeV)⁴ en franca contradicción con el límite observacional.

CAPITULO III

INFLACION COMO PROPUESTA DE UNA RÚPTURA DE SIMETRIA

1. INTRODUCCION

Como se mencionó anteriormente , en las teorías unificadas además de haber campos espinoriales y campos vectoriales , también hay campos escalares . El interés actual en los campos escalares surge de un problema de renormalización . Veamos el ejemplo de la interacción electrodébil .

El campo electromagnético está representado por el cuadrivector A_μ , con el cual se forma el tensor de Faraday $F_{\mu\nu} = A_\mu{}_\nu - A_\nu{}_\mu$. Si se efectúa una transformación de norma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f \quad , \quad (3.1)$$

donde f es un escalar , $F_{\mu\nu}$ queda igual , y las ecuaciones de campo son invariantes ante esta transformación . Gracias a esto se puede establecer la condición $\partial_\mu A^\mu = 0$, y las ecuaciones de campo se escriben $\partial^2 A_\mu = 4\pi J_\mu$, donde J_μ es el cuadrivector corriente eléctrica . Dado J_μ se obtiene A_μ . Se necesita además calcular el movimiento de las partículas cargadas en un campo electromagnético . Esto viene dado por el principio de invariancia de norma que implica invariancia ante la transformación 3.1 y ante una rotación de fase para el campo con carga e

$$\Psi \rightarrow \exp(i e f) \Psi \quad . \quad (3.2)$$

Esto se traduce en que la interacción electromagnética se puede introducir mediante un simple procedimiento de cambio de derivadas. Esto es, que en las ecuaciones de campo de ψ , se substituye la derivada por

$$\partial_m \rightarrow \partial_m - i e A_m \quad (3.3)$$

Una de las consecuencias de la invariancia de norma del campo electromagnético es que la masa del fotón es cero. También puede pensarse que la masa del fotón es cero, es una consecuencia de la observación experimental de que el radio de acción del campo electromagnético es prácticamente infinito (el alcance de una fuerza es inversamente proporcional a la masa de la partícula que se intercambia).

Para el caso de la dispersión electrón-electrón, hay más de un proceso contribuyendo a la amplitud de dispersión. La contribución en la amplitud de cada uno de los procesos es infinita, pero al sumarse da algo finito, y esa es la amplitud observable. De igual forma, debido a que la masa del fotón es cero, los infinitos pueden esconderse al calcular la masa del electrón, esto significa que las contribuciones para la masa del electrón son

$$m_{física} = m_0 + \alpha \delta m_1 + \alpha^2 \delta m_2 + \dots$$

donde m_0 y δm_1 son infinitos, pero la suma es finita. Similarmente para la carga y el momento magnético del electrón. A pesar de que el procedimiento no parece satisfactorio, su acuerdo con el experimento es mejor que 10^{-4} .

Las correcciones radiativas para la interacción débil no son tan importantes pues son menores que en la electrodinámica. La teoría es una teoría local, pues las funciones de onda de las partículas que interactúan se evalúan en un mismo punto. Esta teoría no es renormalizable. La razón es que las amplitudes locales crecen con la energía de la colisión de las partículas. Entonces, cuando uno calcula ordenes altos en la teoría de perturbaciones y uno tiene que integrar sobre las energías e impulsos de partículas virtuales, las integrales se vuelven más divergentes. Cuando un bosón intermedio es responsable de la interacción, la amplitud deja de crecer con la energía, como es el caso de la interacción electromagnética, en éste caso el que el fotón tenga masa 0, es esencial para la renormalización.

El problema es que en la interacción débil, el bosón es masivo y su amplitud contiene al factor $(E/m)^2$, o sea depende de la energía. La teoría vuelve a ser no renormalizable.

El problema se resuelve con un campo escalar. Empezamos con una teoría de norma de un campo vectorial sin masa γ , Z^0 , W^+ y W^- , donde γ es el fotón y Z^0 , W^+ , W^- son los bosones de la interacción débil. Luego mediante un mecanismo dinámico se introduce la masa de los bosones W^+ , W^- , Z^0 . Esto cambia las propiedades del vacío. La teoría permanece renormalizable pues los campos vectoriales no sienten las propiedades del vacío cuando la energía es alta.

El mecanismo que hace que los bosones W^+ , W^- y Z^0 adquieran masa tiene que ver con lo siguiente: en mecánica cuántica la fase de una función de onda es inobservable, nada puede depender de la elección de la fase. Entonces el lagrangiano debe ser invariante ante una transformación de la forma:

$$\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi, \quad (3.4)$$

θ es una función del espacio. Los términos con derivadas en el lagrangiano del campo rompen la invariancia ante la transformación 3.4. Para restaurar la invariancia, la derivada debe transformarse en una derivada covariante

$$\partial_m \rightarrow D_m = \partial_m - i e W_m. \quad (3.5)$$

Los términos $(\partial_m \phi)(\partial^m \phi)$ en el lagrangiano, se transforman en

$$|(\partial_m - i e W_m)\phi|^2. \quad (3.6)$$

Un término de esta expresión es $e^2 W^2 \phi^2$, si ϕ es distinto de cero, este término es equivalente a la masa del campo W_m . El bosón W adquiere masa debido a la interacción con ϕ . Entonces de alguna forma el campo ϕ adquiere un valor constante distinto de cero en el vacío.

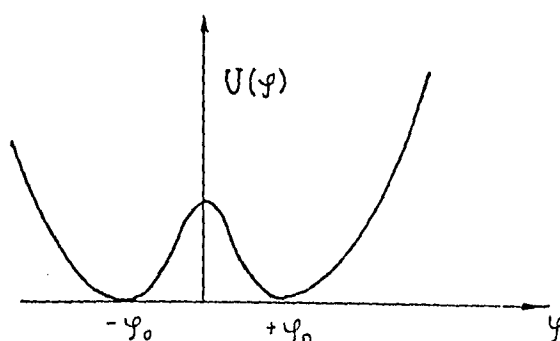


FIGURA 3 . ENERGIA POTENCIAL DEL CAMPO ϕ
ENERGIA POTENCIAL DE HIGGS

$$V(\phi) = \lambda/4 (\phi^2 - \phi_0^2)^2 \quad . \quad \lambda = \text{cte.}$$

(TOMADO DE REF. 10)

Si consideramos que la energía potencial del campo es como la que se muestra en la figura 3 , cuando $\phi = \pm \phi_0$ (distinto de cero) , el campo está en el estado más bajo de energía , es un estado de equilibrio estable . Son dos los estados de vacío estable . Si $\phi = 0$, el equilibrio es inestable , pequeñas fluctuaciones alrededor de cero hacen que el campo ruede hacia $\pm \phi_0$. Este es un estado de falso vacío . Cuando ϕ es distinto de cero se rompe la simetría .

2. ROMPIMIENTO ESPONTANEO DE LA SIMETRIA

Se ha mencionado el asunto de como un campo escalar al interactuar con un campo bosónico y al pasar de un estado simétrico a uno asimétrico, genera el mecanismo que le da masa al bosón y resuelve de algún modo el problema de la renormalización. Este mecanismo en sí es el rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil. Estos fenómenos de rompimiento de las simetrías conducen a las transiciones de fase en el plasma primitivo.

Analicemos el mecanismo de rompimiento de simetría para el caso de un campo escalar real. Su densidad lagrangiana es:

$$L = 1/2 (\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2 / 2 - \lambda \phi^4 / 4, \quad (3.7)$$

donde m es la masa de las partículas del campo escalar, y $\lambda > 0$ es una constante de acoplamiento. Si $\lambda \ll 1$ y ϕ es pequeño, podemos ignorar el último término de la 3.7, y el campo ϕ satisface la ecuación de Klein-Gordon. La solución general a esta ecuación se expresa como una superposición de ondas planas correspondientes a partículas de masa m y momento k

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3k (2k_0)^{-1/2} (e^{ikx} a^+(k) + e^{-ikx} a^-(k)), \quad (3.8)$$

donde $a^\pm(k) = (2k)^{-1/2} \phi^\pm(k)$; $k_0 = (k^2 + m^2)^{1/2}$ y $k \cdot x = k_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$.

Según esta ecuación el campo ϕ oscila alrededor del punto $\phi = 0$. La razón es que el mínimo en la densidad de energía potencial (potencial efectivo)

$$V(\phi) = m^2 \phi^2 / 2 + \lambda \phi^4 / 4$$

ocurre en $\phi = 0$.

Si en lugar de la densidad lagrangiana 3.7 se tiene

$$L = 1/2 (\partial_\mu \phi)^2 + \mu^2 \phi^2 / 2 - \lambda \phi^4 / 4, \quad (3.9)$$

en donde se ha sustituido el término de masa $m^2 > 0$ por el término

$$-\mu^2 = m^2 < 0 \quad , \quad (3.10)$$

entonces el potencial resultante tiene la forma del potencial de Higgs .

El significado físico de este cambio es que en lugar de que las oscilaciones sean alrededor de $\phi = 0$, la solución da modos que crecen exponencialmente cerca de $\phi = 0$ cuando $k^2 < \mu^2$. Esto se puede ver substituyendo la condición 3.10 en la solución 3.8 , esto es que

$$\delta\phi(k) = \exp(\pm(\mu^2 - k^2)^{1/2}t) \exp(\pm i k x) \quad . \quad (3.11)$$

Entonces $\phi = 0$ no es un punto de equilibrio , o equivalentemente el mínimo del potencial efectivo

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^2/2 + \lambda\phi^4/4 \quad (3.12)$$

no es en $\phi = 0$. El mínimo ϕ_0 lo encontramos mediante las condiciones $V' = 0$ y $V'' > 0$ (primera y segunda derivada respecto a ϕ) . Un cálculo simple conduce al siguiente resultado :

$$\phi_0 = \pm \mu/(\lambda)^{1/2} ; V(\phi_0) = -\mu^4/(4\lambda) ; V''(\phi_0) = 2\mu^2. \quad (3.13)$$

Hay dos mínimos simétricos alrededor del cero . Los dos mínimos son equivalentes , se puede elegir el + ó el - . Se observa que $V'(0) = 0$ y $V''(0) < 0$, lo que indica que $\phi = 0$ es un extremal inestable . Entonces si el campo ϕ inicialmente se encuentra en cero , este pronto sufre una transición a un estado estable $\phi_0 = \mu/(\lambda)^{1/2}$, este fenómeno se conoce como rompimiento espontáneo de la simetría .

Después del rompimiento espontáneo de la simetría , las oscilaciones del campo ϕ cerca de ϕ_0 se pueden describir mediante una solución de la forma 3.8 . Esto se observa mediante un cambio de variable :

$$\phi \rightarrow \phi + \phi_0 \quad . \quad (3.14)$$

Entonces la densidad lagrangiana 3.9 toma la forma

$$\begin{aligned}
 L(\phi+\phi_0) &= 1/2 (\partial_\mu(\phi+\phi_0))^2 + (\mu^2/2)(\phi+\phi_0)^2 - (\lambda/4)(\phi+\phi_0)^4 \\
 &= 1/2 (\partial_\mu\phi)^2 - (3\lambda\phi_0^2 - \mu^2)\phi^2/2 - \lambda\phi_0\phi^3 - \lambda\phi^4/4 \\
 &\quad + \mu^2\phi_0^2/2 - \phi(\lambda\phi_0^2 - \mu)\phi_0 .
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Cuando ϕ_0 es distinto de cero la masa al cuadrado efectiva del campo no es $-\mu^2$, su valor es

$$m^2 = 3\lambda\phi_0^2 - \mu^2 = 2\mu^2 > 0 , \tag{3.16}$$

lo que indica que hay una corrección de signo en la masa al cuadrado .

Como puede verse de la 3.13 el valor mínimo del potencial no es cero . Si sumamos al potencial el valor constante $+\mu^4/(4\lambda)$, esto no modifica en nada las ecuaciones cuánticas del campo , y el potencial adquiere la forma $V(\phi) = (\lambda/4)(\phi^2 - \phi_0^2)^2$, que es el potencial de Higgs anteriormente discutido . Al suceder el rompimiento espontáneo de la simetría también hay un cambio en la densidad de energía dado por

$$V(0) - V(\phi_0) = \mu^4/(4\lambda) = (\lambda/4)\phi_0^4 . \tag{3.17}$$

La presencia del campo escalar clásico ϕ_0 en todo el espacio no da lugar a un sistema de referencia preferencial asociado con ϕ_0 (la densidad lagrangiana 3.15 es covariante independientemente de la magnitud de ϕ_0) . Su aparición simplemente representa una reestructuración del estado de vacío . El punto importante es que el campo ϕ_0 cambia la masa de las partículas con las que interactúa . Los campos escalares pueden cambiar la masa de los fermiones y bosones . Veamos un modelo simple para cada caso .

El primer modelo se usa para describir fenomenológicamente las interacciones fuertes a alta energía . La densidad lagrangiana para este modelo es una suma , el primer término es una densidad lagrangiana como la 3.9 , es decir la de un campo escalar con un potencial de Higgs , más una densidad lagrangiana para fermiones sin masa ψ que interactúan con el campo ϕ con una constante de acoplamiento h :

$$L = 1/2(\partial_\mu\phi)^2 + \mu^2\phi^2/2 - \lambda\phi^4/4 + \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma_\mu - h\phi)\psi. \quad (3.18)$$

Después del rompimiento de la simetría, los fermiones adquieren una masa $m = h|\phi_0| = h\mu/(\lambda)^{1/2}$.

El segundo modelo es el modelo de Higgs el cual describe a un campo vectorial abeliano A_μ (análogo al campo electromagnético) que interactúa con un campo escalar complejo $X = (X_1 + iX_2)/2^{1/2}$. El lagrangiano es invariante ante una transformación de norma del campo escalar como la transformación 3.4, las derivadas se remplazan por derivadas covariantes (transformación 3.5) y el campo vectorial se transforma según la transformación 3.1. El lagrangiano invariante de norma es:

$$L = -1/4(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + (\partial_\mu + ieA_\mu)X^\dagger(\partial_\mu - ieA_\mu)X + \mu^2 X^\dagger X - \lambda(X^\dagger X)^2. \quad (3.19)$$

Si $\mu^2 < 0$ este lagrangiano describe a una partícula escalar cargada con masa μ , es decir, el campo X adquiere una componente clásica. Este efecto se describe mejor haciendo los siguientes cambios de variables:

$$\begin{aligned} X(x) &\rightarrow 2^{-1/2} \{ \phi(x) + \phi_0 \exp(i\zeta(x)/\phi_0) \} \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\zeta(x)/(e\phi_0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

El lagrangiano 3.19 se transforma en

$$L = -1/4(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + (e^2/2)(\phi + \phi_0)^2 A_\mu^2 + (\partial_\mu\phi)^2/2 - (3\lambda\phi_0^2 - \mu^2)\phi^2/2 - \lambda\phi_0\phi^3 - \lambda\phi^4/4 + \mu^2\phi_0^2/2 - \lambda\phi_0^4/4 - \phi(\lambda\phi_0^2 - \mu^2)\phi_0. \quad (3.21)$$

El campo ζ ha sido completamente cancelado del lagrangiano . Cuando $\mu^2 > 0$, sucede el rompimiento de la simetría , el campo $\phi_0 = \mu/(\lambda)^{1/2}$ aparece , y las partículas del campo vectorial A_μ adquieren una masa $m = e \mu/(\lambda)^{1/2}$. La aparición del campo clásico ϕ_0 rompe la simetría del lagrangiano 3.19 bajo las transformaciones :

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \zeta(x)/e \\ X &\rightarrow X \exp(i \zeta(x)) . \end{aligned}$$

Una de las ideas centrales en las teorías de unificación es que antes del rompimiento de la simetría los bosones vectoriales que median la interacción no tienen masa . Como resultado de ese rompimiento de simetría , algunos bosones vectoriales adquieren masa y su interacción correspondiente se vuelve de corto alcance destruyendo así la simetría entre las distintas interacciones . También cabe mencionar que antes de la aparición del campo escalar ϕ_0 las teorías unificadas son renormalizables , la aparición de ϕ_0 no destruye la renormalización original de la teoría . Según esta idea , antes del rompimiento de la simetría todos los bosones vectoriales que median las interacciones no tienen masa , no hay una diferencia fundamental entre las interacciones fuerte , débil y electromagnética . Los leptones pueden ser transformados en cuarks y viceversa . Después de la aparición de un campo clásico ϕ_0 cuyo valor es del orden de 10^{15} Gev , algunos de los bosones vectoriales (el X y el Y , responsables de la transformación de cuarks en leptones) adquieren una enorme masa $m_{x,y} = (5/3)^{1/2} g \phi_0 = 10^{15}$ Gev , donde $g^2 = 0.3$ es la constante de acoplamiento de SU(5) . Debido a esto , las transformaciones de cuarks en leptones se vuelven altamente inhibidas , y el protón se vuelve casi estable . La simetría original SU(5) se rompe en SU(3) x SU(2) x U(1) , esto es que las interacciones fuertes (SU(3)) son separadas de la electrodébil (SU(2) x U(1)) . Otro campo escalar clásico H hace su aparición (H = 100 Gev) , rompiendo la simetría entre la interacción débil y la electromagnética .

Como se ha visto cada rompimiento de simetría viene acompañado de una disminución en la densidad de energía para el estado de vacío , pues el campo escalar pasa de un estado de falso vacío a

un estado de vacío estable. De la ecuación 3.17 vemos que el cambio en la densidad de energía es proporcional a ϕ^4 , por lo que para el rompimiento de la simetría SU(5) se tiene que $\Delta\rho_{vac} = 10^{60} \text{ (Gev)}^4$; para el rompimiento de la simetría entre la simetría débil y electromagnética se tiene que $\Delta\rho = 10^8 \text{ (Gev)}^4$. Además se tiene como un hecho la transición de fase cuark-hadron donde $\Delta\rho_{vac} = 10^4 \text{ (Gev)}^4$. Si la densidad de energía del vacío originalmente tenía el valor $m_p^4 = 10^{76} \text{ (Gev)}^4$, después de todos los rompimientos de simetría debería tener un valor muy cercano a cero (10^{-46} (Gev)^4). Es claro que al sumar los cambios en la densidad de energía considerados aquí, no nos da el orden de magnitud de m_p^4 , es decir, el valor inicial de la constante cosmológica no se reduce a un posible valor actual. Si consideramos un valor inicial de la densidad de energía del vacío del orden de $(m_{euy})^4$, la suma considerada no cancela este valor.

3. INFLACION.

Veamos ahora como la evolución del campo escalar conduce a la inflación, es decir, a una expansión exponencial temprana. El tensor energía-momento para un campo escalar es

$$T_{mn} = \partial_m\phi \partial_n\phi - L \delta_{mn}, \quad (3.22)$$

donde L es la densidad lagrangiana dada por

$$L = (1/2) \partial_\mu\phi \partial^\mu\phi - V(\phi). \quad (3.23)$$

Para un campo escalar real homogéneo que sólo depende de t, sin interacción, el potencial es $V(\phi) = m^2\phi^2/2$ (campo de Klein-Gordon), y el tensor energía-momento está dado por

$$T_{00} = \rho = (\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)/2 \quad (3.24)$$

$$T_{ij} = p \delta_{ij} = \delta_{ij} (\dot{\phi}^2 - m^2 \phi^2) / 2 . \quad (3.25)$$

De estas ecuaciones se observa que si en un momento t el campo satisface las condiciones $\dot{\phi} = 0$ y $\phi \neq 0$, la relación $p = -\rho$ se satisface .

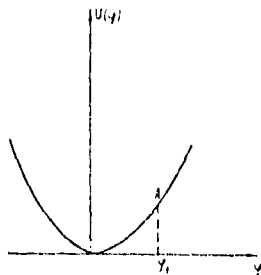


FIGURA 4 . POTENCIAL DEL CAMPO ESCALAR LIBRE.
(TOMADO DE REF. 10).

La ecuación de evolución de un campo homogéneo es

$$d^2\phi/dt^2 = - \partial V(\phi) / \partial \phi \quad (3.26)$$

Esta es idéntica a la ecuación de una partícula masiva en mecánica clásica . En el caso que nos concierne , el potencial es el del oscilador armónico . Las condiciones iniciales

$\dot{\phi} = 0$ y $\phi = \phi_1$ distinto de cero , significa que la partícula es desplazada una distancia ϕ_1 de la posición de equilibrio . En cuanto fuerzas externas dejan de sostener a la partícula en esa posición , empieza a oscilar . La solución a la ecuación 3.26 para este caso es :

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(mt + \theta) . \quad (3.27)$$

Las condiciones iniciales determinan la fase θ . Las condiciones iniciales se repiten cada periodo , y la relación $p = -\rho$ se satisface cada medio periodo . Se puede ver que cuando

$\phi = 0$ y $\dot{\phi}$ es distinto de cero (la partícula pasa por el punto de equilibrio) la relación $p = +\rho$ se satisface .

En general , el tensor energía-momento para un campo escalar homogéneo según las ecuaciones 3.22 y 3.23 está dado por :

$$T_{00} = \rho = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi) , \quad (3.28)$$

$$T_{ij} = p \delta_{ij} = \delta_{ij} (\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)) . \quad (3.29)$$

Analicemos la evolución del campo de Higgs con el diagrama de su potencial dado en la figura 5 .

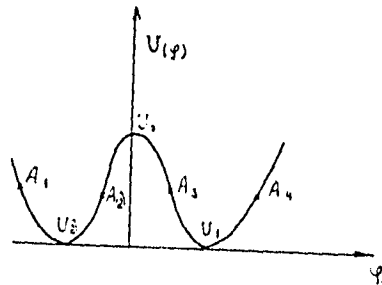


FIGURA 5 . POTENCIAL DE HIGGS .
(TOMADO DE REF. 16) .

Si el campo se encuentra inicialmente en uno de los puntos A_1 , A_2 , A_3 ó A_4 , su evolución será la misma que para el potencial del oscilador armónico, donde el punto de equilibrio será U_2 ó U_1 . Pero si elegimos como condición inicial $\phi = 0$, la posición inicial es el punto U_0 , en donde el valor inicial del potencial es $V(0) = \lambda \phi_0^4/4$ el cual es distinto de cero. Si pensamos que

inicialmente la condición $\dot{\phi} = 0$ se satisface, dada la condición de punto de equilibrio inestable del punto U_0 , las fluctuaciones cuánticas hacen que el campo tienda a un estado de equilibrio estable (U_2 ó U_1). De esta consideración se ve que de acuerdo con las ecuaciones 3.28 y 3.29, en el estado inicial considerado, es válida la relación $p = -\rho$. También se observa que cuando el campo pasa por su estado de equilibrio la relación $p = +\rho$ se satisface. Esto nos indica que estrictamente hablando no hay una ecuación de estado que nos permita calcular

$p(\phi, \dot{\phi})$ mediante $\rho(\phi, \dot{\phi})$. Pero si la variación del campo es suficientemente lenta, la noción de ecuación de estado tiene sentido.

Hasta ahora no se ha considerado el efecto de la gravitación en la evolución del campo. Esto quiere decir que hay que considerar el efecto de un espacio-tiempo curvo. Para eso, se sigue la regla de substituir las derivadas ordinarias por derivadas covariantes. Usando la métrica de Friedmann, la ecuación de onda del campo escalar libre queda

$$\ddot{\phi} - \nabla^2 \phi / R^2 + m^2 \phi + 3 H \dot{\phi} = 0$$

y ya que se están considerando campos homogéneos, esta ecuación se reduce a

$$\ddot{\phi} + 3 H \dot{\phi} + m^2 \phi = 0. \quad (3.30)$$

Aquí $H = \dot{R}/R$ es el parámetro de Hubble y R es el factor de escala. El término $3 H \partial\phi/\partial t$ representa la fricción. Necesitamos conocer $H(t)$ para resolver esta ecuación. El caso más simple es cuando $H = \text{cte.}$, que corresponde a una solución de De Sitter cuando $k = 0$. Para este caso la solución a la ecuación 3.30 se puede escribir como:

$$\phi(t) = \phi_0 \exp(z t), \quad (3.31)$$

donde z es un número complejo . Substituyendo la solución 3.31 en la ecuación 3.30 , es claro que z satisface la ecuación :

$$z^2 + 3 H z + m^2 = 0 \quad . \quad (3.32)$$

Las raíces de esta ecuación son :

$$z = - 3 H/2 \pm (9 H^2/4 - m^2)^{1/2} \quad . \quad (3.33)$$

Si $m > 3 H/2$, la solución es aproximadamente estacionaria con un transfondo homogéneo ($\propto \exp(imt)$) , pero su amplitud decrece adiabáticamente con decrecimiento $3 H/2$. El transfondo es el espacio el cual se expande a un ritmo H , que en este caso es menor que la frecuencia de oscilación del campo .

Otro caso es cuando $m \ll H$, lo que significa que el transfondo cambia mucho más rápido que el campo . Las raíces 3.33 se pueden aproximar como :

$$z_1 = - 3 H \quad ; \quad z_2 = - m^2/(3 H) \quad . \quad (3.34)$$

Entonces la solución completa se puede escribir :

$$\phi(t) = \phi_1 \exp(-3Ht) + \phi_2 \exp(-m^2 t/(3H)) \quad . \quad (3.35)$$

después de un tiempo , solo el segundo término sobrevive (cuando ϕ_2 es distinto de cero) .

Aplicando las fórmulas 3.24 y 3.25 para encontrar Γ_{mn} , tenemos :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} (3H\phi_1 \exp(-3Ht) + (m^2/(3H))\phi_2 \exp(-m^2 t/(3H)))^2 \\ &\quad + m^2/2 (\phi_1 \exp(-3Ht) + \phi_2 \exp(-m^2 t/(3H)))^2 \quad \rightarrow \\ &\rightarrow m^2 \phi_2^2 \exp(-2m^2 t/(3H)) (1 + m^2/(9H^2))/2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

ρ se obtiene similarmente , pero el término cuyo coeficiente es $m^2/2$ es de signo negativo , lo que implica que

$$\rho \rightarrow - m^2 \phi_2^2 \exp(-2m^2 t/(3H)) (1 - m^2/(9H^2))/2 \quad . \quad (3.37)$$

Se observa que $\rho \rightarrow -\rho$ con una precisión de $m^2/(9H^2)$.

Cuando el universo se contrae (H cambia de signo) , solo el primer término de la solución sobrevive y la ecuación de estado se aproxima a $p = +\rho$.

Si consideramos el problema de la evolución del campo más rigurosamente , además de considerar la ecuación 3.30 , también se tiene que considerar la ecuación del campo gravitacional generado por el tensor energía-momentum del campo escalar , más exactamente su componente puramente temporal :

$$H^2 + k/R^2 = 4\pi (\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2) / (3mp^2) . \quad (3.38)$$

La fricción puede hacer que ϕ varíe muy lentamente . Si es así , se puede hacer que $\ddot{\phi} = 0$ en la ecuación 3.30 y $\dot{\phi} = 0$ en la ecuación 3.38, también hacemos $k = 0$ en la 3.38 . De esto se obtiene un valor para H :

$$H = m \phi / (mp) (4\pi/3)^{1/2} . \quad (3.39)$$

Si se substituye este valor de H en la ecuación 3.30 y se resuelve la ecuación resultante , la solución es

$$\phi = \phi_0 - m mp t / (12\pi)^{1/2} . \quad (3.40)$$

Esta fórmula es válida entre $0 < t < (12\pi)^{1/2} \phi_0 / (m mp)$. De la ecuación 3.39 y pensando que $H(\phi)$ varía muy lentamente se puede escribir una solución para el factor de escala :

$$R(t) = R_0 \exp(H(\phi) t) , \quad (3.41)$$

la cual da una expansión casi exponencial durante el intervalo de tiempo señalado por la desigualdad anterior . Si se toma en cuenta la dependencia de ϕ con t según la fórmula 3.40 , el grado de expansión estará dado por $\int H dt$. Tomando como límites de integración los extremos del intervalo mencionado , se tiene que : $\int H dt = 2\pi (\phi_0/mp)^2$.

Esto significa que si ϕ_0 es suficientemente grande, la inflación durará un tiempo suficientemente largo. Como ejemplo, si $\phi_0 = 4m_p$, entonces, el grado de expansión será de aproximadamente 100, o sea que $R_f = R_0 \exp(100) = 10^{43} R_0$.

Se puede resolver el problema de autoconsistencia para la solución de la evolución del campo y del factor de escala variando la forma del potencial (en lugar del potencial del oscilador armónico se puede poner el potencial de Higgs). Algunos análisis muestran que la expansión exponencial se da para una amplia gama de condiciones iniciales del campo escalar.

Hasta ahora no se ha considerado el efecto de la temperatura en la evolución del campo, o más exactamente en el potencial del campo. Para un campo de Higgs se escribe:

$$V(\phi, T) = (bT^2 - \lambda\phi^2/2)\phi^2 + \lambda\phi^4/4 + \lambda\phi_0^2/4. \quad (3.42)$$

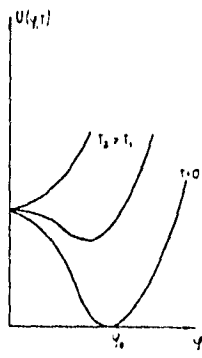


FIGURA 6 . POTENCIAL EFECTIVO PARA UN CAMPO ESCALAR A DIFERENTES TEMPERATURAS . (TOMADO DE REF. 16).

A altas temperaturas el potencial tiene un mínimo en $\phi = 0$. El sistema está en un estado simétrico. A medida que T disminuye empieza a aparecer un mínimo cuya posición se va haciendo más baja en relación con la posición de $\phi = 0$ conforme T disminuye, entonces $\phi = 0$ se vuelve una posición inestable y el sistema tiende a un estado de equilibrio donde el valor promedio del campo es distinta de cero ($\langle \phi \rangle \neq 0$). La simetría se rompe instantáneamente, ésta es una transición de fase de segundo orden. Para evitar que el rompimiento de la simetría sea instantáneo se puede considerar que hay un mínimo en el potencial en $\phi = 0$ (figura 7). El campo tiene que atravesar una barrera de potencial para llegar al valor de más baja energía. Cuando $\langle \phi \rangle = 0$, el sistema está en una fase metaestable.

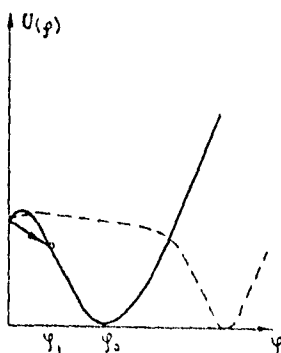


FIGURA 7. TRANSICION TUNEL PARA UN CAMPO ESCALAR .
(TOMADO DE REF. 16).

El sistema pueda permanecer largo tiempo en esa fase metaestable . La energía superficial de las burbujas de la nueva fase detiene la transición hacia un estado donde $\langle \phi \rangle \neq 0$. Esto implica una probabilidad pequeña para la transición tunel . El sistema permanece en $\phi = 0$ por un tiempo , en ese tiempo la densidad de materia decrece como T^3 mientras que la densidad de energía del campo permanece constante con un valor :

$$\rho_0 = \rho(\phi = 0) = \lambda \phi_0^4 / 4 . \quad (3.43)$$

Según las ecuaciones 3.28 y 3.29 , en ese tiempo se tiene que :

$$T_{mn} = (\lambda \phi_0^4 / 4) g_{mn} . \quad (3.44)$$

Este tensor energía-momento actúa como una constante cosmológica. Si el sistema permanezca en ese estado suficiente tiempo , la magnitud de otras formas de densidad de energía se vuelve despreciable . Debido a que el universo se expande exponencialmente , esto hace también que se vuelva tan isotrópico y homogéneo como el vacío puede ser . Después de la expansión , el espacio se vuelve prácticamente euclidiano . Esta expansión exponencial es producida por la densidad de energía del vacío . Una vez que el campo llega a ϕ_1 , entonces espontáneamente tiende a su valor de equilibrio , y el campo tiende a oscilar alrededor de este valor . La frecuencia de oscilación es igual a la masa del campo m_0 . Las oscilaciones del campo crean partículas con masa $m < m_0$. En las teorías unificadas de campo $m_0 > 10^{16}$ GeV . Si la expansión del universo es más lenta que el ritmo de producción de partículas , las partículas tienden al equilibrio térmico y sucede un recalentamiento . Es claro que en el estado simétrico existe una constante cosmológica con valor

$$\Lambda = \lambda \phi_0^4 / (32\pi m_0^2) .$$

Esta densidad de energía se transfiere a la materia . Es difícil poder decir que toda la energía se transfiere a la materia cancelando completamente el valor de la constante cosmológica , esto implica un problema de sintonización fina en el valor inicial de este parámetro .

Se han desarrollado modelos llamados modelos inflacionarios caóticos en donde la idea central es considerar una distribución inicial caótica del campo escalar ϕ , investigando su evolución, sin hacer la suposición de que el valor inicial del campo corresponde a un mínimo de su potencial. El escenario de una inflación caótica es mucho más general que los modelos inflacionarios en donde se supone que el universo al inicio estaba en estado de equilibrio termodinámico y que ϕ estaba en el mínimo de su potencial $V(\phi, T)$ el cual depende de la temperatura.

De hecho el modelo del potencial del oscilador armónico es un modelo caótico, pues la condición inicial del campo no tiene que tener un valor exacto. El valor inicial ϕ_i debe ser lo suficientemente grande como para que el término $3H \frac{\partial \phi}{\partial t}$ de la ecuación 3.30 que juega el papel de la fricción, sea suficientemente grande, y así, la variación de ϕ sea muy lenta. Una vez que la fricción se vuelve pequeña, el campo oscila rápidamente alrededor de su punto de equilibrio. Si el campo interactúa con otros campos de materia, esas oscilaciones conducen a una producción abundante de partículas y al calentamiento del universo.

La distribución caótica inicial del campo tiene algunas restricciones. Se piensa que a densidades de energía mayores que m_p^4 , las fluctuaciones cuánticas de la métrica son tan grandes que no tiene sentido hablar de un espacio-tiempo clásico. Entonces, cuando se habla de condiciones iniciales en una región espacio-temporal clásica, implica que la región tenga un tamaño mayor que la longitud de Planck (10^{-33} cm) y tenga densidad menor que m_p^4 . También $V(\phi)$ y los gradientes espaciales y temporales al cuadrado de ϕ son menores que m_p^4 (el campo es homogéneo).

Consideremos un universo cerrado que acaba de hacer su aparición de una singularidad. Su tamaño inicial será del orden de la longitud de Planck, y su densidad de energía inicial será del orden de m_p^4 . El gradiente de ϕ es menor que m_p^2 , por tanto el valor inicial de ϕ no puede diferir de algún valor promedio ϕ_i en más de m_p . Se esperaría que ϕ_i correspondiera al mínimo de $V(\phi)$, sin embargo las fluctuaciones en la densidad de energía en el momento de la creación son del orden de m_p^4 . Por lo tanto, el campo inicialmente "no sabe" donde está el mínimo del potencial, y posteriormente tiende hacia él lentamente. La única restricción sobre el valor inicial del campo ϕ_i es que $V(\phi_i)$ no

exceda m_p^4 , lo cual implica que $\dot{\phi}$ sea del orden de m_p^2/m , que es mucho mayor que cualquier variación de ϕ . En un universo infinito, si el valor inicial de ϕ es mucho mayor que m_p , ϕ se mantiene homogéneo a escalas mucho mayores que la longitud de Planck. Esto implicaría una correlación acausal entre los valores iniciales de ϕ en regiones causalmente desconectadas. Este problema conduce a pensar que de la singularidad (ó esa especie de "espuma" espacio-temporal) surgieron regiones de espacio-tiempo clásico de tamaño de la longitud de Planck. Estas regiones se ven como islas aisladas de espacio-tiempo clásico. Fuera de estas regiones el valor del gradiente de ϕ no está restringido a ser menor que m_p^2 , de ese modo no hay la relación acausal mencionada. Después, esas regiones se pueden conectar. En este caso el universo completo sería una agrupación de mini-universos isla, algunos de ellos inflacionarios. La condición para que un mini-universo sea inflacionario es la misma que para un universo cerrado ($\dot{\phi}$ del orden de m_p^2/m). De ese modo se ve que las condiciones iniciales del modelo inflacionario caótico son bastante naturales, y no requiere de condiciones iniciales exactas del campo.

CAPITULO IV

EFFECTOS OBSERVACIONALES DE UNA CONSTANTE COSMOLOGICA DISTINTA DE CERO

1. INTRODUCCION

Este capítulo pretende mostrar como las observaciones astronómicas ponen cotas superior e inferior, al valor de la constante cosmológica.

Primero se analiza la dinámica de la expansión. El introducir la constante cosmológica en las ecuaciones de campo permite modelos en donde el factor de escala sufre un "rebote", es decir, alcanza un mínimo en un instante específico, lo que equivale a la existencia de un corrimiento al rojo máximo. La existencia de cuasares con un corrimiento al rojo grande y la existencia de la radiación de fondo con un corrimiento al rojo mayor que 1000, permiten excluir estos modelos, lo que proporciona una primera cota superior positiva al valor de la constante cosmológica.

En segunda se analiza la edad del universo, en donde las

observaciones astronómicas ponen un límite inferior a la edad , lo cual a su vez proporciona una cota inferior negativa al valor de la constante cosmológica .

Después se analiza el conteo de galaxias , en donde se esperaría un efecto observable de una constante cosmológica distinta de cero . Hasta la fecha no se ha llegado a una conclusión al respecto .

Finalmente , se analiza el efecto de lentes gravitacionales . Se analiza la probabilidad de que un lente gravitacional galáctico produzca imágenes dobles de un cuasar . Este fenómeno permite una mejor cota superior positiva para la constante cosmológica .

2. DINAMICA DE LA EXPANSION

Como se ha señalado en el capítulo I , la dinámica de la expansión es gobernada por las ecuaciones de Einstein del campo gravitacional . Las condiciones de isotropía y homogeneidad se encuentran contenidas en la métrica de Friedmann.

La ley de conservación energía-momento $T_{\mu\nu} = 0$ para un fluido perfecto en un universo de Friedmann-Robertson-Walker se expresa como

$$d\rho/dt = -3 H (\rho(t) + p(t)) , \quad (4.1)$$

ρ es la densidad de energía , p la presión y H la constante de Hubble que en general depende de t .

Las observaciones astronómicas nos muestran una velocidad relativa promedio entre las galaxias de 300 km/seg , lo que equivale a $\langle v \rangle \cong 10^{-9}$ en unidades geometrizadas . Entonces La ecuación de estado para la materia bariónica que relaciona la presión con su densidad de energía se escribe como :

$$p_m = \rho_m \langle v^2 \rangle / 3 \cong 10^{-6} \rho_m .$$

De ahí que para el tiempo actual la ecuación de estado se pueda escribir :

$$p_m = 0 . \quad (4.2)$$

La ecuación 4.2 no necesariamente es válida para todo tiempo . En particular podemos pensar que para tiempos cercanos a la era del desacoplamiento entre materia y radiación , y para tiempos anteriores, esta ecuación ya no es válida pues en ese tiempo la materia y la radiación se encontraban en equilibrio térmico .

Usando la ecuación 4.2 en la ecuación 4.1 se obtiene :

$$\rho_m = \rho_{m0} R_0^3 / R(t)^3 . \quad (4.3)$$

(El subíndice 0 se refiere a la evaluación de los términos en

el tiempo actual) .

Para la radiación , la ecuación de estado es :

$$p_r = \rho_r/3 \quad , \quad (4.4)$$

la cual es válida en todo tiempo (sin considerar tiempos iguales ó anteriores al tiempo de Planck $t_{pl} \cong 10^{-43}$ seg , donde ya no es posible hablar de una evolución clásica del universo) . La ecuación 4.4 conduce a :

$$\rho_r = \rho_{r0} R_0^4 / R(t)^4 \quad . \quad (4.5)$$

Para evaluar el efecto de la constante cosmológica en la dinámica de expansión consideraremos tres casos :

- A) Universo dominado por la materia no relativista .
- B) Universo dominado por la materia no relativista y por la radiación .
- C) Universo dominado por la radiación .

Definimos :

$$\begin{aligned} \Omega_m &= 8\pi G \rho_{m0} / 3H_0^2 \quad ; \quad \Omega_r = 8\pi G \rho_{r0} / 3H_0^2 \quad ; \quad \Omega_\Lambda = \Lambda / 3H_0^2 \quad ; \\ \Omega_k &= -k / R_0^2 H_0^2 \quad . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para el caso general aquí tratado la ecuación 1.4 se reduce a

$$H^2 \equiv (dR/dt/R)^2 = 8\pi G/3 (\rho_{m0} R_0^3 / R^3 + \rho_{r0} R_0^4 / R^4) + \Lambda/3 - k/R^2, \quad (4.7)$$

que junto con las definiciones 4.6 implica

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k \quad . \quad (4.8)$$

Para integrar la ecuación 4.7 se hacen los siguientes cambios de variables : $A = R/R_0 = 1/(1+z)$ que es el factor de escala relativo al presente y z es el corrimiento al rojo . Entonces $R = (A)R_0$ y $dR/dt = (dA/dt)R_0$. Si $t = 0$ es la época actual es claro que $A(0) = 1$. También se introduce la variable adimensional $\tau = t H_0^{-1}$ que mide el tiempo en unidades de tiempo H_0^{-1} . Usando la ecuación 4.8 y haciendo los cambios de variables señalados la ecuación 4.7 se vuelve :

$$(dA/d\tau)^2 = \Omega_m(1/A - 1) + \Omega_r(1/A^2 - 1) + \Omega_\Lambda(A^2 - 1) + 1 . \quad (4.9)$$

De esta ecuación se observa que cuando $\tau = 0$, $dA/d\tau = 1$ (la raíz negativa se excluye pues implicaría una contracción en el momento actual) lo que es equivalente a que $(dR/dt/R)_0 = H_0$. La ecuación 4.9 contiene la condición de expansión actual .

Al considerar la segunda ecuación de campo (ecuación 1.5) , se tiene que analizar el término de la presión . Esto es :

$$p = p_m + p_r = p_r = \rho r/3 . \quad (4.10)$$

Usando los mismos cambios de variables y las ecuaciones 4.5 , 4.8 , 4.9 y 4.10 se obtiene :

$$d^2A/d\tau^2 = - \Omega_m/2A^2 - \Omega_r/A^3 + \Omega_\Lambda A . \quad (4.11)$$

La ecuación 4.9 es la primera integral de la ecuación 4.11 , en efecto , si se deriva la ecuación 4.9 con respecto a τ se obtiene la ecuación 4.11 . Si se multiplica la ecuación

4.11 por $dA/d\tau$ y se integra con respecto a τ considerando que $A(0) = 1$ y $(dA/d\tau)_0 = 1$, se obtiene la ecuación 4.9.

A) . Universo dominado por materia no relativista

En este caso se desprecia el efecto de la radiación en la dinámica de expansión. La ecuación 4.8 se vuelve :

$$1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k, \quad (4.8.1)$$

y la ecuación 4.9 se vuelve :

$$(dA/d\tau)^2 = \Omega_m(1/A - 1) + \Omega_\Lambda(A^2 - 1) + 1. \quad (4.12)$$

Se han estudiado las soluciones de esta ecuación para distintos valores de Ω_m y Ω_Λ (Feltman & Isaacman 1986). Los resultados obtenidos se encuentran en las gráficas siguientes para tres distintos valores de Ω_m .

- 1) $\Omega_m = 0.1$

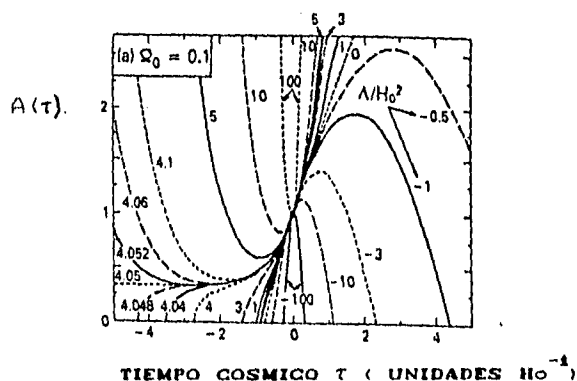


FIGURA 8. A VS. τ , $\Omega_m = 0.1$

Esta gráfica muestra cualitativamente lo siguiente :

Para $\Lambda/H_0^2 < 0$ el universo se recolapsa .

Para $\Lambda/H_0^2 > 0$ el universo tiende a una expansión exponencial ($\tau \rightarrow \infty$) que asintóticamente se vuelve un espacio-tiempo de De Sitter .

Se encuentra un valor crítico Λ_0 tal que si

$\Lambda/H_0^2 < \Lambda_0/H_0^2$ existe un $\tau < 0$ para el cual $A(\tau) = 0$, es decir que existe una Gran Explosión .

Para $\Lambda/H_0^2 > \Lambda_0/H_0^2$ los valores de $A(\tau)$ vienen de infinito cuando $\tau \rightarrow -\infty$, a medida que τ aumenta , $A(\tau)$ disminuye hasta un mínimo y luego se expande hacia infinito .

Cuando $\Lambda = \Lambda_0$ el universo procede de un estado cuasiestático para $\tau \rightarrow -\infty$, y luego cerca de $\tau = 0$ se expande . El valor numérico calculado para éste valor crítico es $\Lambda_0/H_0^2 = 4.05$.

2) $\Omega_m = 1$

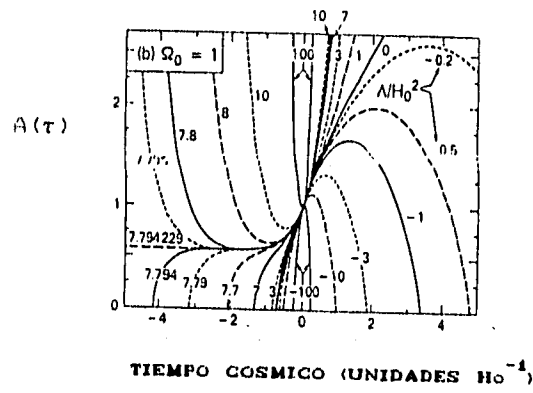


FIGURA 9. A VS. τ , $\Omega_m = 1$.

En este caso, de la gráfica se observa que valen las mismas consideraciones cualitativas que para el caso anterior. El valor crítico calculado ahora tiene el valor $\Lambda_0/H_0^2 = 7.794229$

3) $\Omega_m = 3$

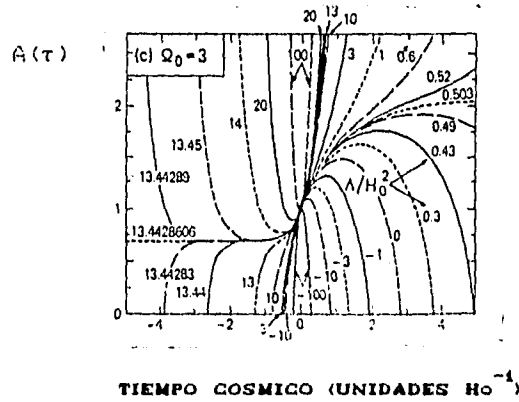


FIGURA 10 . A VS. τ , $\Omega_m = 3$

Aquí , debido a la alta densidad de materia , aún para valores positivos pequeños de Λ/H_0^2 el universo se recolapsa . En este caso hay dos valores críticos de Λ/H_0^2 . El primer valor crítico se refiere como en los casos anteriores a un periodo estático que proceda de $\tau \rightarrow -\infty$, cuyo valor es $\Lambda_c/H_0^2 = 13.4428606$. El segundo valor crítico es para cuando $A(\tau)$ tiende a un valor constante para $\tau \rightarrow \infty$, la magnitud de este valor es $\Lambda_c/H_0^2 = 0.503$. Para valores menores a este segundo valor , el universo se recolapsa .

En los tres casos podemos ver que para valores cercanos de Λ/H_0^2 a los valores críticos, la edad del Universo puede ser varias veces el tiempo de Hubble. Esta es una característica importante en los modelos cosmológicos.

Cálculo analítico de los valores críticos.

Las condiciones para obtener valores críticos son $d^2A/dt^2 = 0$ y $dA/dt = 0$, es decir, se busca un valor de Ω_Λ que tenga una solución estática cuando $t \rightarrow -\infty$. Para el caso de un universo dominado por la materia bariónica no relativista ($p = 0$), la ecuación 4.11 se vuelve:

$$d^2A/dt^2 = \Omega_\Lambda A - \Omega_m/2A^2. \quad (4.13)$$

Dadas estas condiciones, de la ecuación 4.13 se obtiene:

$$A_0 = (\Omega_m/2\Omega_\Lambda)^{1/3}. \quad (4.14)$$

Substituyendo la expresión para A_0 en la ecuación 4.12 e igualando a cero, se tiene que:

$$\Omega_m/2\Omega_\Lambda - (\Omega_m/\Omega_\Lambda + 1 - 1/\Omega_\Lambda)(\Omega_m/2\Omega_\Lambda)^{1/3} + \Omega_m/\Omega_\Lambda = 0. \quad (4.15)$$

Reescribiendo la ecuación 4.15 en términos de la variable

$x \equiv (\Omega_\Lambda/4\Omega_m)^{1/3}$ se obtiene la ecuación:

$$4x^3 - 3x = (1 - \Omega_m)/\Omega_m. \quad (4.16)$$

Solo nos interesan valores positivos de x . Para resolver esta ecuación, consideramos tres casos:

a) $(1 - \Omega_m)/\Omega_m \geq 1$ ó equivalentemente $0 < \Omega_m \leq 1/2$.

En este caso usamos la identidad

$$\cosh(3y) = 4 \cosh^3(y) - 3 \cosh(y) .$$

Si $x = \cosh(y)$, entonces la solución es :

$$x = \cosh(1/3 \operatorname{arcosh}((1 - \Omega_m)/\Omega_m)) . \quad (4.17)$$

b) $0 \leq (1 - \Omega_m)/\Omega_m \leq 1$ ó equivalentemente $1/2 \leq \Omega_m \leq 1$.

Ahora usamos la identidad

$$\cos(3y) = 4 \cos^3(y) - 3 \cos(y) ,$$

y similarmente , si $x = \cos(y)$ entonces la solución es

$$x = \cos(1/3 \arccos((1 - \Omega_m)/\Omega_m)) . \quad (4.18)$$

c) $\Omega_m > 1$.

Una solución está dada por la expresión 4.18 que como en los casos anteriores corresponde a un estado cuasiestático hacia el pasado . Además existe otra solución positiva más pequeña que corresponde a un estado cuasiestático hacia el futuro cuya expresión está dada por :

$$x_2 = \cos(1/3 \arccos((1 - \Omega_m)/\Omega_m) + 4\pi/3) . \quad (4.19)$$

Para valores de x más pequeños que x_2 , el universo se recolapsa . Mediante estas fórmulas se pueden calcular los valores críticos de Ω_Λ para los casos graficados , que corresponden a los valores dados de Λ/H_0^2 .

La dinámica de la expansión junto con la observación de objetos a un corrimiento al rojo grande, permite acotar positivamente el valor de la constante cosmológica. Esto se puede observar analizando los modelos en donde el factor de escala sufre un "rebote", es decir, en el pasado $A(\tau)$ era grande, disminuya hacia un mínimo y luego se expande hacia infinito. La posibilidad de un modelo con "rebote" implica la existencia de un factor de escala A^* mínimo ó equivalentemente un corrimiento al rojo z^* máximo. La existencia de cuasares con un alto corrimiento al rojo y la existencia de la radiación de fondo excluyen la posibilidad de los modelos con "rebote" (Eörner et al. 1988; Carroll et al. 1992).

Las condiciones para un mínimo son:

Cuando $A \rightarrow A^*$, $dA/dt \rightarrow 0$. De la ecuación 4.9 se obtiene

$$\Omega_\Lambda = (1 + \Omega_r(A^{*2} - 1) + \Omega_m(A^{*2} - 1)) / (1 - A^{*2}). \quad (4.20)$$

La segunda condición es: cuando $A \rightarrow A^*$, $d^2A/dt^2 \geq 0$. De la ecuación 4.11 se obtiene

$$\Omega_\Lambda \geq (2\Omega_r + A^* \Omega_m) / 2A^{*4}. \quad (4.21)$$

De la ecuación 4.20 y la desigualdad 4.21 se obtiene:

$$\Omega_r(1 - A^{*2})^2 + \Omega_m A^*(1/2 - 3A^{*2}/2 + A^{*4}) \leq A^{*4}. \quad (4.22)$$

Cada término del lado izquierdo de la desigualdad 4.22 es no negativo, entonces podemos obtener por separado dos desigualdades

$$\Omega_m \leq 2/(z^{*2}(z^* + 3)) \quad ; \quad \Omega_r \leq 1/(z^{*2}(z^* + 2)^2) \quad , \quad (4.23)$$

en donde se ha usado la relación $A^* = 1/(1+z^*)$.

Por otro lado las observaciones astronómicas han puesto un límite inferior al valor de Ω_m . Los análisis dinámicos estiman un límite inferior de $\Omega_m \geq 0.02$. Se han observado cuasares con un corrimiento al rojo $z > 4$. Usando estos datos y la primera desigualdad (4.23) encontramos que $0.02 \leq \Omega_m \leq 0.017$ lo cual es una contradicción . Los estudios de la nucleosíntesis primordial dan un límite inferior de $\Omega_m > 0.01$, sin embargo la existencia de la radiación de fondo termalizada con un corrimiento al rojo de $z > 1000$ y la primera desigualdad (4.23) implican que $\Omega_m \leq 2 \times 10^{-9}$ lo cual es imposible . De ese modo se puede excluir los modelos con "rebote" . Entonces resulta claro que el valor máximo para Ω_Λ es el valor crítico que depende de Ω_m . De las fórmulas obtenidas para los valores críticos y de la definición de x se obtiene :

$$\Omega_\Lambda \leq 4\Omega_m (\text{coss}(1/3 \arccos((1 - \Omega_m)/\Omega_m)))^3 \quad , \quad (4.24)$$

donde "coss" es definido como cosh cuando $\Omega_m \leq 1/2$, y como cos cuando $\Omega_m \geq 1/2$.

El comportamiento cualitativo de los modelos cosmológicos puede observarse en un diagrama de fase en el plano $(\Omega_{tot} \text{ vs } \Omega_m)$ donde $\Omega_{tot} \equiv \Omega_m + \Omega_\Lambda$ (Carroll et al. 1992) .

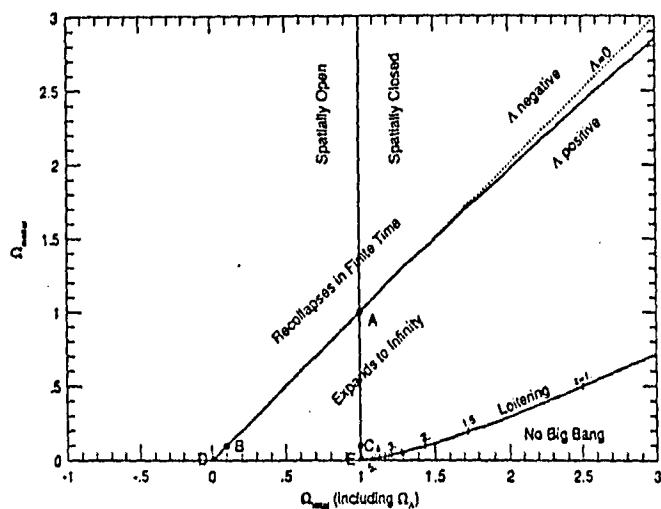


FIGURA 11 . COMPORTAMIENTO CUALITATIVO DE LOS MODELOS COSMOLOGICOS EN EL PLANO $(\Omega_{tot} ; \Omega_m)$.

Es claro de la ecuación 4.8.1 que la línea $\Omega_{tot} = 1$ corresponde a un espacio euclidiano y separa los universos espacialmente abiertos de los espacialmente cerrados . También se observa en el diagrama que la línea que separa los modelos que se recolapsan en un tiempo finito de los que se expanden hacia infinito no es la línea $\Lambda = 0$. Las dos líneas coinciden para valores pequeños de Ω_m , pero para valores grandes en la densidad de materia , aún para valores positivos pequeños de Λ el universo se recolapsa . La línea de ociosidad es la línea de los valores críticos de Ω_Λ , la cual separa los modelos de Gran Explosión en donde el universo tiene una edad finita de los

modelos en donde el universo tiene una edad infinita .

Usando la desigualdad 4.24 podemos calcular los valores críticos de Ω_{Λ} para algunos valores de Ω_m entre 0 y 1 . El poner $\Omega_m < 1$ se debe a las constricciones del modelo inflacionario que implica $k = 0$, lo cual implica $\Omega_{tot} = 1$.

TABLA DE VALORES CRITICOS DE Ω_{Λ} EN FUNCION Ω_m

Ω_m	$\Omega_{\Lambda_c} = 4\Omega_m(\cos(1/3 \arccos((1 - \Omega_m)/\Omega_m)))^3$
0.01	1.08
0.10	1.35
0.20	1.547
0.30	1.713
0.40	1.86
0.50	2.00
0.60	2.12
0.70	2.25
0.80	2.37
0.90	2.48
1.00	2.59

De la tabulación se puede poner

$$\Omega_{\Lambda} = \Lambda/3H_0^2 < 2.6 . \quad (4.25)$$

Despejando Λ y dividiendo la expresión entre $8\pi G$ se obtiene :

$$\Lambda/8\pi G < (2.6) \ 3H_0^2/8\pi G = 4.29 \times 10^{-20} h^2 \text{ gr/cm}^3 . \quad (4.26)$$

donde $0.4 < h < 1$.

B) Universo dominado por la materia no relativista y por la radiación.

El objetivo de esta sección es analizar el efecto que tiene la radiación en los valores críticos de Ω_Λ . Al considerar el efecto de la radiación solo se está considerando el efecto de los fotones .Entonces la densidad de energía de la radiación está dada por la temperatura actual de la radiación de cuerpo negro de 2.73 °K , esto nos da un valor para la densidad de energía de la radiación de fondo de $\rho_{ro} = 4.8 \times 10^{-34} \text{ gr/cm}^3$. El valor de la densidad crítica está dado por $\rho_c = 1.88 h^2 \times 10^{-20} \text{ gr/cm}^3$. Con estos valores se obtiene que :

$$2.5 \times 10^{-5} < \Omega_r < 1.6 \times 10^{-4} . \quad (4.27)$$

La ecuación de evolución es la 4.9 . Se integró esta ecuación para el caso de $\Omega_m = 0.2$ que representa los modelos con una densidad de materia baja . Es de esperarse que a medida que Ω_m aumenta , el efecto de Ω_r sea menor , pero si se varía a Ω_m en el intervalo (0.1 , 1) no se espera un cambio sustancial en las conclusiones . Se consideraron tres valores para Ω_Λ (-2 , 0 , 2) . El valor

considerado para Ω_r es de 2×10^{-5} . También se resolvió la ecuación 4.9 tomando los mismos valores para los parámetros Ω_m y Ω_Λ pero haciendo $\Omega_r = 0$, en este caso solo se resolvió la ecuación hacia el pasado. Los resultados se muestran en las gráficas 12, 13 y 14. Comparando las soluciones para los dos casos considerados se observa que las soluciones son prácticamente iguales entre si. De las gráficas también se puede inferir que cuando se incluye radiación, también existe un valor crítico de Ω_Λ que representa una solución cuasiestática hacia el pasado y que su valor difiere muy poco del valor crítico cuando $\Omega_r = 0$. Se volvió a graficar la solución considerando los mismos valores de los parámetros ($\Omega_r = 2 \times 10^{-5}$), incluyendo un valor más para Ω_Λ ($\Omega_\Lambda = 1.54$) que corresponde al valor crítico cuando $\Omega_m = 0.2$ según la tabla de valores críticos para un universo dominado por la materia bariónica (gráficas 15 y 16). Lo que se observa de las gráficas es que dicho valor corresponde a una solución cuasiestática hacia el pasado, es decir el valor crítico no se ve alterado por efecto de la radiación.

Con éstos elementos se procedió a encontrar una solución algebraica al problema de los valores críticos de Ω_Λ . Para ese efecto se consideran las condiciones para una solución cuasiestática, es decir, $dA/dt = 0$ y $d^2A/dt^2 = 0$, que junto

con las ecuaciones 4.9 y 4.11 conducen a

$$\Omega_m(1/A - 1) + \Omega_r(1/A^2 - 1) + \Omega_\Lambda(A^2 - 1) + 1 = 0, \quad (4.28)$$

$$\Omega_\Lambda A - \Omega_r/A^3 - \Omega_m/2A^2 = 0. \quad (4.29)$$

Reescribiendo las ecuaciones 4.28 y 4.29 se obtiene :

$$A^4 - (\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - 1)A^2/\Omega_\Lambda + \Omega_m A/\Omega_\Lambda + \Omega_r/\Omega_\Lambda = 0, \quad (4.30)$$

$$A^4 - \Omega_m A/2\Omega_\Lambda - \Omega_r/\Omega_\Lambda = 0. \quad (4.31)$$

Si en estas ecuaciones se hace $\Omega_r = 0$, se encuentran las ecuaciones para el caso A).

A partir de las ecuaciones 4.30 y 4.31 se procede a buscar una solución numérica para Ω_Λ (todas las soluciones numéricas se obtuvieron utilizando el programa **MATHEMATICA**). Se hace del siguiente modo. De la ecuación 4.31 se obtiene una solución

$A_0 = A_0(\Omega_m/2\Omega_\Lambda, \Omega_r/\Omega_\Lambda)$. Se define :

$$g(\Omega_m/2\Omega_\Lambda, \Omega_r/\Omega_\Lambda) \equiv A_0^4 - (\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - 1)A_0/\Omega_\Lambda + \Omega_m A_0/\Omega_\Lambda + \Omega_r/\Omega_\Lambda$$

De esta expresión se busca el valor de Ω_Λ que la anule. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

TABLA DE VALORES CRITICOS DE Ω_Λ PARA UN UNIVERSO CON RADIACION Y MATERIA.

Ω_m	$\Omega_r = 2 \times 10^{-5}$	$\Omega_r = 2 \times 10^{-4}$
	Ω_Λ	Ω_Λ
0.2	1.547	1.5493
0.5	2.0	2.001
1.0	2.598	2.5985

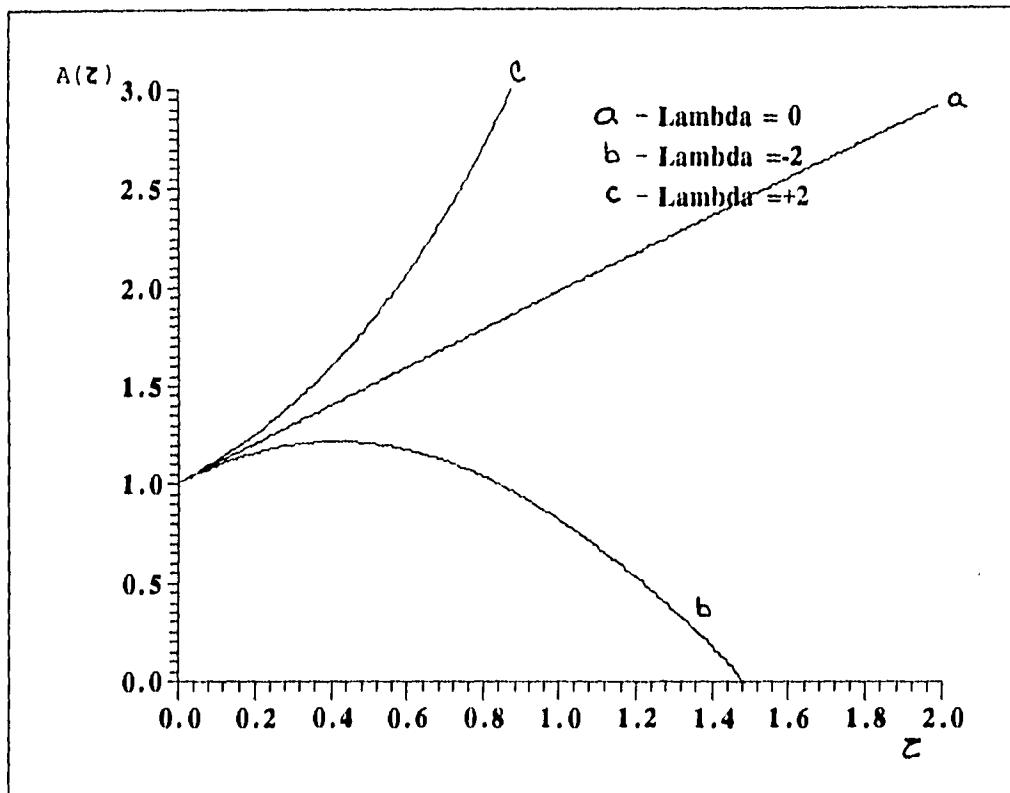


FIGURA 12. $A(z)$ vs. z , $\Omega_m = 0.2$ y $\Omega_r = 2 \times 10^{-5}$

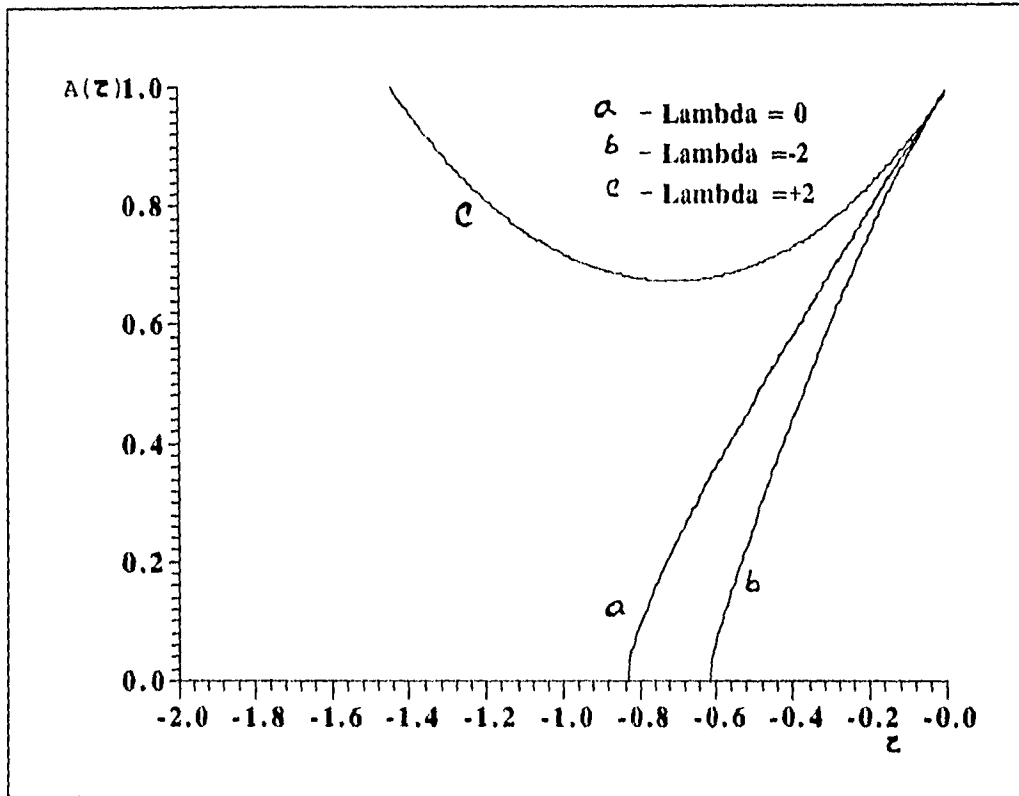


FIGURA 13. $A(z)$ vs. z , $\Omega_m = 0.2$ y $\Omega_r = 2 \times 10^{-5}$

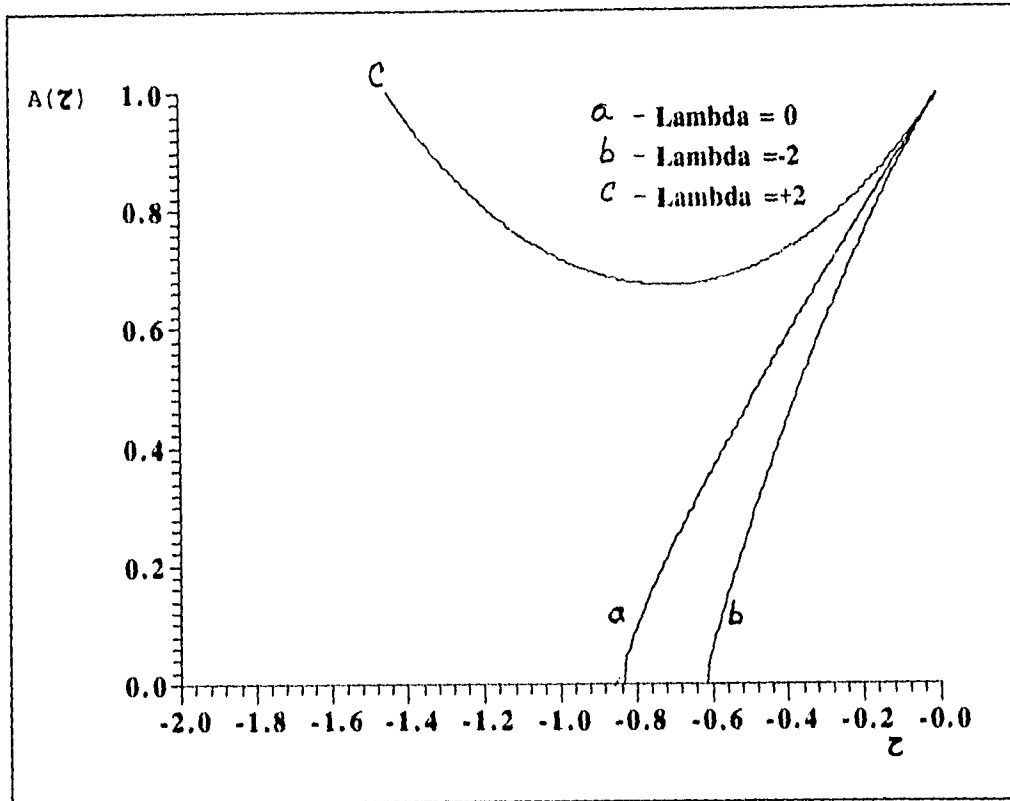


FIGURA 14 . $A(z)$ vs. z , $\Omega_m = 0.2$ y $\Omega_r = 0$

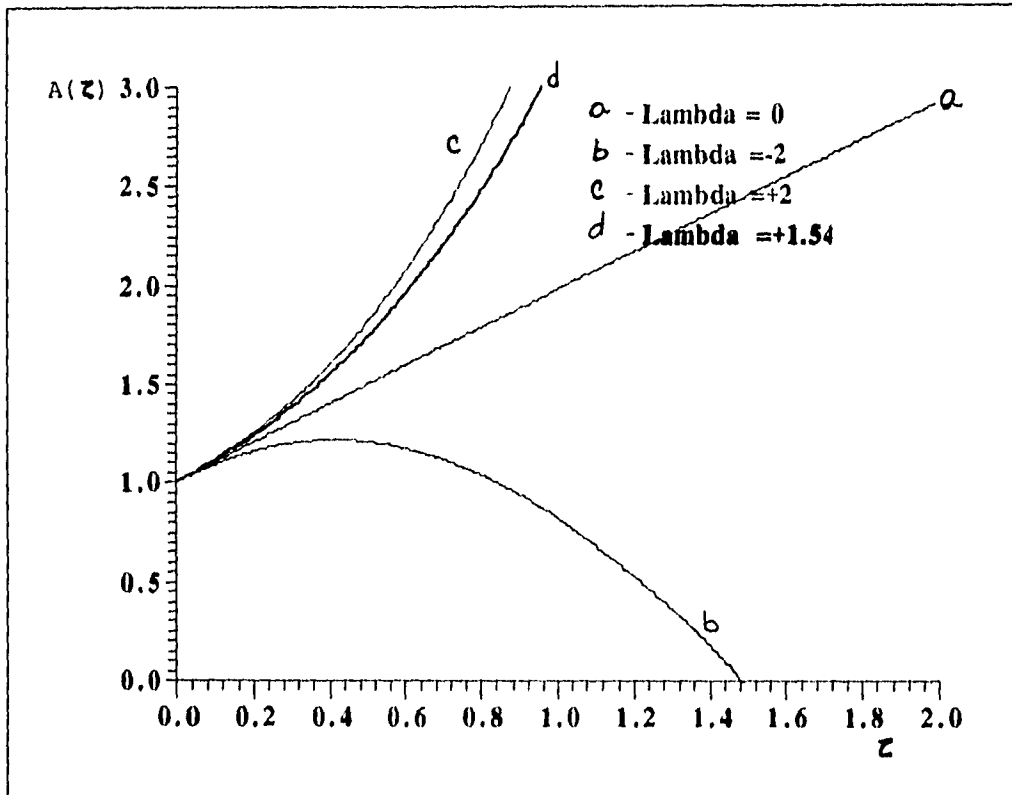


FIGURA 15 . $A(z)$ vs. z , $\Omega_m = 0.2$ y $\Omega_r = 2 \times 10^{-5}$

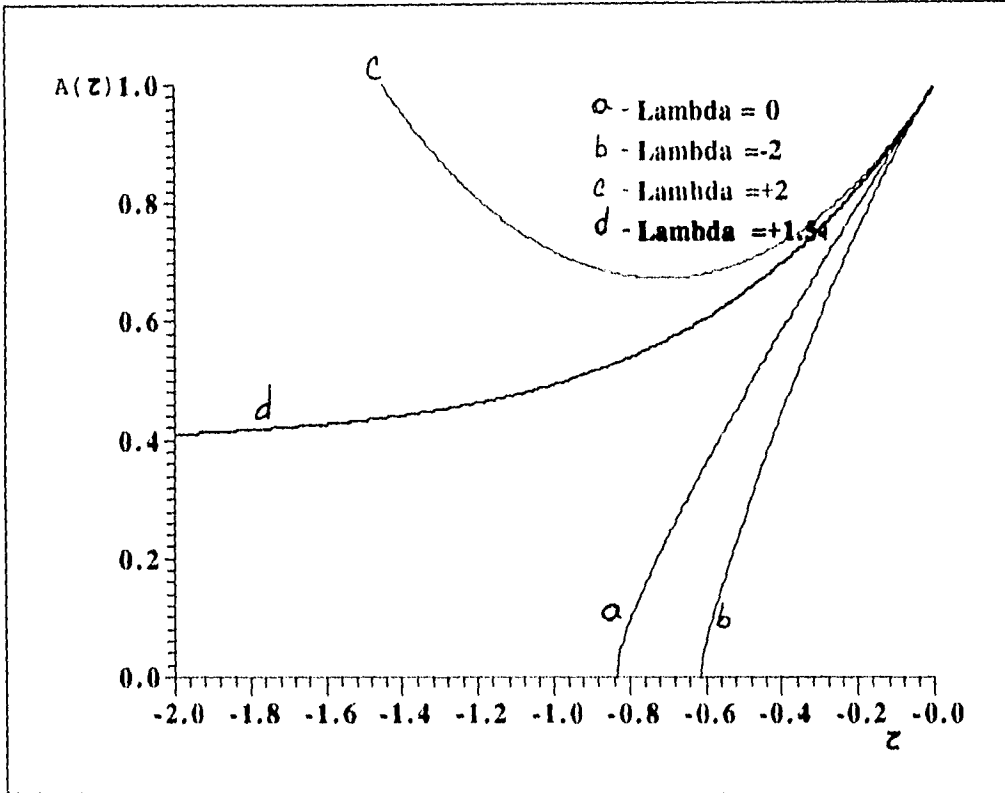


FIGURA 16. $A(z)$ vs. z , $\Omega_m = 0.2$ y $\Omega_r = 2 \times 10^{-5}$

De la tabla vemos que los valores críticos prácticamente no se alteran. Se altera hasta la tercera cifra decimal para el límite superior de Ω_r . También se observa que los valores críticos se alteran más a medida que Ω_m es menor.

C) Universo dominado por la radiación.

Es claro que se cumple la condición

$$\Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (4.32)$$

Las ecuaciones de campo son ahora :

$$(dA/dr)^2 = \Omega_r(A^{-2} - 1) + \Omega_\Lambda(A^2 - 1) + 1, \quad (4.33)$$

$$d^2A/dr^2 = \Omega_\Lambda A - \Omega_r/A^3. \quad (4.34)$$

Se integró numericamente la ecuación 4.33 tomando un valor para $\Omega_r = 2 \times 10^{-5}$ y considerando tres valores para Ω_Λ (-2,0,2). Los resultados se muestran en las gráficas 17 y 18. De la gráfica 18 se puede inferir que existe una solución cuasiestática hacia el pasado. Entonces se puede buscar una solución algebraica al problema de los valores críticos de Ω_Λ . Aplicando las condiciones para una solución cuasiestática ($d^2A/dr^2 = 0$ y $dA/dr = 0$) a las ecuaciones 4.33 y 4.34 se obtiene :

$$A_0 = (\Omega_r/\Omega_\Lambda)^{1/4}. \quad (4.35)$$

Substituyendo el valor de A_0 en la ecuación 4.33 se tiene que :

$$\Omega_r (\Omega_\Lambda / \Omega_r)^{1/2} + \Omega_\Lambda (\Omega_r / \Omega_\Lambda)^{1/2} - \Omega_\Lambda = \Omega_r - 1 . \quad (4.36)$$

Definiendo la variable $x \equiv (\Omega_\Lambda / \Omega_r)^{1/2}$ y describiendo la ecuación 4.36 en términos de x , se obtiene :

$$x^2 - 2x + (\Omega_r - 1)/\Omega_r = 0 . \quad (4.37)$$

La solución a ésta ecuación es :

$$x = 1 + (\Omega_r^{-1})^{1/2} . \quad (4.38)$$

La solución negativa se ha eliminado pues implica un valor de A_0 imaginario . Sustituyendo $\Omega_r = 10^{-4}$ y de la definición de x se obtiene un valor crítico :

$$\Omega_\Lambda = 1.0201 . \quad (4.39)$$

Este valor es muy cercano a 1 . Recordando la solución de De Sitter para un espacio plano en donde la solución tiende a un valor cuasiestático hacia el pasado ($t \rightarrow -\infty$) con $A_0 = 0$ y $H = H_0 = (\Lambda/3)^{1/2}$, lo que equivale a que $\Omega_\Lambda = 1$, podemos concluir que la radiación altera muy poco el valor crítico de Ω_Λ . Sin embargo el valor crítico (4.39) no es igual a 1 . De la condición 4.32 , substituyendo el valor crítico (4.39) y el valor de Ω_r resulta que $\Omega_k = -0.0202$, es decir se tiene un universo espacialmente cerrado con curvatura positiva ($\Omega_k = -k/R_0^2 H_0^2$) para el valor crítico de Ω_Λ .

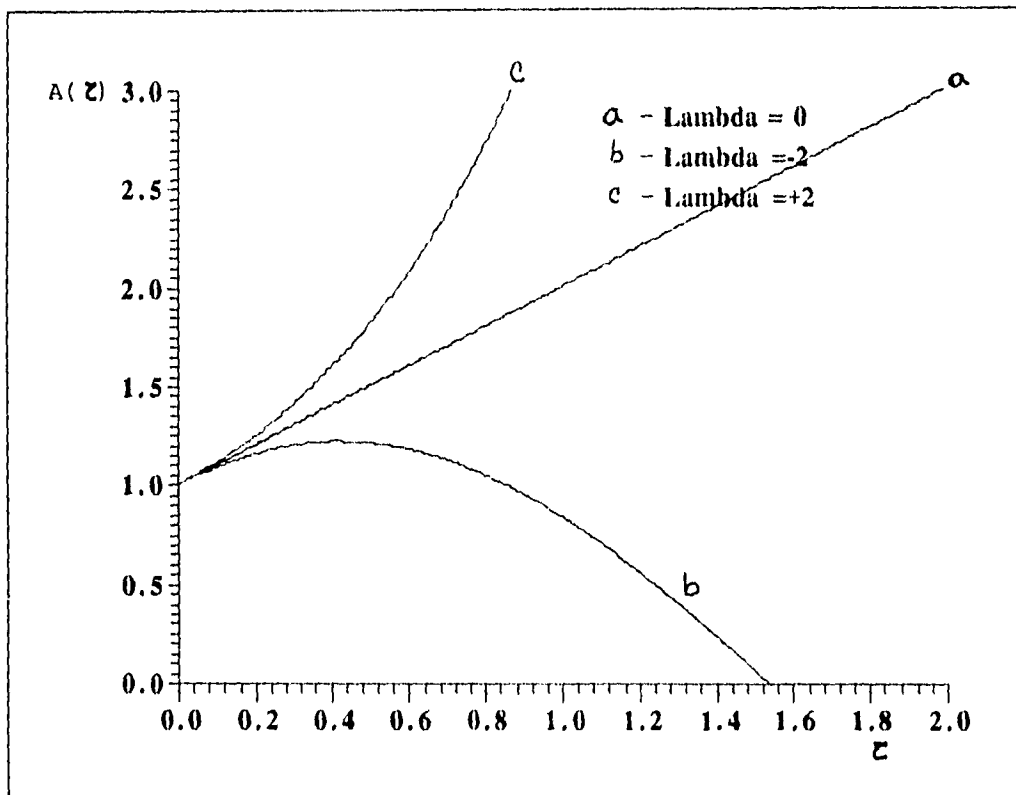


FIGURA 17 . $A(z)$ vs. z , $\Omega_m = 0$ y $\Omega_r = 2 \times 10^{-5}$

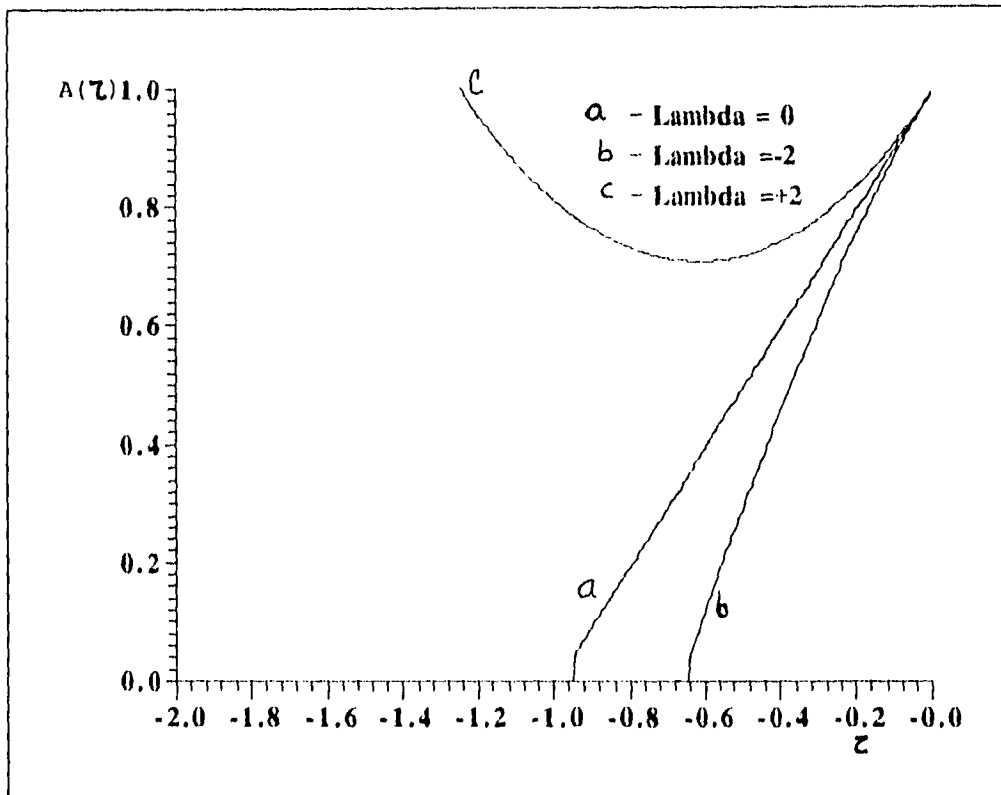


FIGURA 18 . $A(z)$ vs. z , $\Omega_m = 0$ y $\Omega_r = 2 \times 10^{-5}$

Como conclusión , se puede decir que en todos los casos considerados se encuentran valores críticos para Ω_Λ . La radiación altera poco los valores críticos . Cuando hay materia, la radiación altera los valores críticos hasta la tercera cifra decimal . Cuando hay pura radiación , el valor crítico se altera hasta la segunda cifra decimal . Esto significa que el efecto de la radiación en los valores críticos de Ω_Λ es mayor a medida que la densidad de materia sea menor . También se observa que en todos los casos $\Omega_{\Lambda_0} \geq 1$, y que $\Omega_{\Lambda_0} = 1$ en el límite cuando $\Omega_m \rightarrow 0$ y $\Omega_r \rightarrow 0$. Sin embargo si consideramos que $\Omega_{tot} = 1$, se concluye que $\Omega_\Lambda < 1 \leq \Omega_{\Lambda_0}$.

3. LA EDAD DEL UNIVERSO.

Como se ha señalado anteriormente, un efecto importante de la constante cosmológica es en relación a la posible edad del universo. Se observa del inciso anterior que el efecto de la radiación (cuando hay materia bariónica) en la edad del universo, es despreciable (gráficas 13 y 14). Entonces la ecuación a considerar es la 4.12. Haciendo los cambios de variables de r a t y de A a z se obtiene la integral

$$t_0 - t_1 = \int_0^{z_1} dz (1+z)^{-1} \left[(1+z)^2 (1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda \right]^{-1/2}. \quad (4.40)$$

En el límite cuando $z_1 \rightarrow \infty$, la integral tiende a la edad del universo. Es decir t_1 es el momento cuando z_1 es igual a infinito, o sea que $A(t_1) = 0$. Este límite existe cuando Ω_Λ es menor que el valor crítico correspondiente al valor de Ω_m dado. La gráfica 19 muestra las líneas isócronas en el plano $(\Omega_{tot}$ vs $\Omega_m)$ (Carrol et al. 1992).

Como se ve de la gráfica, la línea de valores críticos separa los modelos de universo con una edad finita de los modelos

con una edad infinita . Las líneas isócronas tienden a volverse rectas en la medida que se alejan de la línea de los valores críticos . En el intervalo $0 < \Omega_m \leq 1$, $0 < \Omega_{tot} \leq 1$ y lejos de la línea de valores críticos , la siguiente aproximación para la edad del universo es válida (6) :

$$t_0 = (2H_0^{-1}/3) \operatorname{arcsenn}(|1 - \Omega_a|/\Omega_a)^{1/2} / |1 - \Omega_a|^{1/2}, \quad (4.41)$$

donde $\Omega_a = \Omega_m - 0.3 \Omega_{tot} + 0.3$, $\operatorname{arcsenn} = \operatorname{arcsenh}$ si $\Omega_a \leq 1$ y $\operatorname{arcsenn} = \operatorname{arcsen}$ si $\Omega_a > 1$.

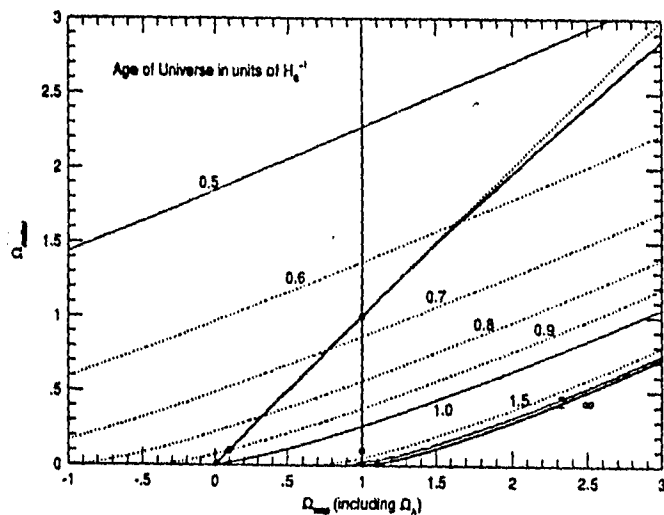


FIGURA 19 . LINEAS ISOCRONAS EN EL PLANO (Ω_{tot} VS Ω_m)

Se puede acotar inferiormente el valor de la constante cosmológica poniendo un límite inferior a la edad del universo, límite que proviene de estudios de evolución estelar y de cronómetros nucleares. Estos estudios dan como límite inferior 10^{10} años. Con esta información y considerando que $H_0 > 40 \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ lo cual implica que $H_0 t_0 > 0.4$, se puede usar la fórmula 4.41 para obtener una cota inferior negativa de Ω_Λ , respetando el intervalo de Ω_m donde la fórmula 4.41 es válida. Substituyendo los valores $H_0 t_0 = 0.4$ y $\Omega_m = 1$ en la fórmula 4.41 se obtiene que $\Omega_\Lambda = 1 - 0.3 \Omega_\Lambda$ y la ecuación para Ω_Λ es:

$$(1.5)(0.4)(0.3\Omega_\Lambda)^{1/2} = \arcsen(|0.3\Omega_\Lambda|/(1 - 0.3\Omega_\Lambda))^{1/2}. \quad (4.42)$$

Hemos tomado \arcsenn como \arcsen pues nos interesan las cotas negativas de Ω_Λ , entonces $\Omega_\Lambda > 1$. Aplicando la función \sin a ambos lados de la ecuación y desarrollando a primer orden la función \sin , la ecuación 4.42 resulta:

$$1 - 0.3\Omega_\Lambda = 2.77, \quad (4.43)$$

lo que conduce a una cota inferior negativa para Ω_Λ de

$$\Omega_\Lambda > -5.9. \quad (4.44)$$

Usando un valor para la densidad crítica correspondiente a

$H_0 = 40 \text{ km seg}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ se obtiene

$$\rho_{vac} = \Lambda/8\pi G > -1.56 \times 10^{-20} \text{ gr/cm}^3. \quad (4.45)$$

4. CONTEO DE GALAXIAS.

Mediante rastreos del cielo se cuenta el número de galaxias de un volúmen específico . Por lo general se supone que el número de galaxias por unidad de volúmen en co-movimiento es constante .

Si los objetos contados pueden ser identificados con objetos de una densidad conocida , se puede estimar el volúmen de una región . Midiendo volúmenes lejanos a nosotros (a un z grande) estamos determinando la relación entre distancia y volúmen a una escala muy grande y tiempos anteriores al nuestro pues la luz de los cuerpos lejanos tarda mucho en llegar . Entonces el conteo de galaxias es una forma de investigar la geometría del espacio-tiempo del universo y una oportunidad para aprender algo sobre Ω_m y Ω_Λ .

Para analizar el conteo de galaxias se requiere considerar la medición de distancias . Desde nuestra posición definida por la coordenada radial $r = 0$ y tiempo t_0 , observamos un objeto cuya coordenada radial es r_1 a un tiempo $t_1 < t_0$. Es claro que

$R(t_1) = R_1 < R_0$. Ninguna de las cantidades r_1 y R_1 es medible. Lo que podemos medir es el tamaño angular aparente θ . Si el objeto tiene un tamaño propio D conocido ó supuesto, es fácil ver que $D = R_1 r_1 \theta$ para $\theta \ll 1$. Se define la distancia diámetro angular $d_A \equiv D/\theta$. También se puede medir el movimiento angular aparente $d\theta/dt$. Si el objeto se mueve una distancia propia $\delta D = u \delta t_1 = u \delta t_0 R_1/R_0$ (por efecto de la expansión el tiempo se dilata, es decir $\delta t_0/R_0 = \delta t_1/R_1$) donde u es la velocidad transversal a la línea de observación la cual es conocida ó supuesta, en t_0 y $r = 0$ se observa un movimiento angular aparente $\delta\theta = \delta D/(R_1 r_1) = u \delta t_0/(R_0 r_1)$. Se define la distancia por movimiento propio $d_M \equiv u/d\theta/dt$. De lo anterior resulta claro que

$$d_A = R_1 r_1 ; d_M = R_0 r_1 ; d_M = (1+z)d_A. \quad (4.46)$$

Para obtener una relación para d_M en términos de los parámetros cosmológicos y del corrimiento al rojo, se considera un rayo luminoso que viaja por una geodésica nula con θ y ϕ constantes. Es decir $dr/dt = (1 - kr^2)^{1/2}/R$. Multiplicando ésta expresión por R_0 , de la definición de z y de las ecuaciones 4.40 y 4.46 se obtiene:

$$d_M = H_0^{-1} |\Omega_k|^{-1/2} \text{sen}^2 |\Omega_k|^{1/2} \int_0^{z_1} dz ((1+z)^2 (1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda)^{-1/2}. \quad (4.47)$$

donde $\text{senn} = \sinh$ si $\Omega_k > 0$ y $\text{senn} = \sin$ si $\Omega_k < 0$.

De esta ecuación se puede obtener una relación entre d_A y z . También se puede obtener una relación entre d_L (que es la distancia de luminosidad definida por la luminosidad absoluta y el flujo observado) y z , pues las tres distancias están relacionadas por la ecuación $d_L = (1+z)d_M$ y las ecuaciones 4.46. La distancia por movimiento aparente d_M es la menos accesible para su determinación directa, y sobre todo a nivel extragaláctico, es decir d_M no es adecuada para determinar la distancia a una galaxia, por lo que es más conveniente utilizar d_L ó d_A para este propósito. Pero dado que las tres distancias están relacionadas, una formulación en términos de d_M tiene su equivalente en términos de d_L ó d_A . Por simplicidad matemática, aquí se utiliza d_M .

El elemento de volumen en co-movimiento está dado por:

$$dV = R_0^3 r^2 dr d\omega / (1-kr^2)^{1/2} = dM^2 d(dM) d\omega / (1+H_0^2 \Omega_k dM^2)^{1/2}, \quad (4.48)$$

donde $d\omega$ es el elemento de ángulo sólido. De esta fórmula se observa que si d_M fuera directamente accesible, se podría determinar si el volumen V va como dM^3 ó presenta efectos determinados por el denominador de la ecuación 4.48. Esto significa que se podría determinar si el universo es abierto, cerrado ó plano, es decir se podría medir Ω_k y así obtener Ω_{tot} . Esto se podría hacer sin la medición de z , pero dado que d_M no es

accesible, al expresar dV en términos de dL aparece z , por lo que es necesario conocer el corrimiento al rojo de las galaxias en un elemento de volúmen comóvil. La ecuación 4.48 relaciona V con z mediante la ecuación 4.47.

Si al tiempo t que corresponde a un z hay $n(L_\lambda, z)dL_\lambda$ fuentes luminosas con luminosidad absoluta entre L_λ y $L_\lambda + dL_\lambda$ para una longitud de onda λ por unidad de volúmen en comovimiento, entonces el número de galaxias entre z y $z + dz$ con una luminosidad en el intervalo señalado, está dado por

$$dN = n(L_\lambda, z) (dV/dz) dL_\lambda dz. \quad (4.49)$$

Se sabe que cada tipo de galaxia tiene una luminosidad L_λ distinta, por lo que hay que considerar la contribución de cada tipo de galaxia y sumar todas las contribuciones. Se puede poner dN en función de la luminosidad aparente ó flujo observado en lugar de la luminosidad absoluta. Se hace una distinción entre los modelos que consideran la evolución en la luminosidad de las galaxias (modelos evolutivos) y los que no la consideran (modelos no evolutivos). Con este tipo de análisis se puede comparar las observaciones con los modelos teóricos. Algunos resultados se muestran en la gráfica 20 (Collin, 1993). Estos resultados son para la banda azul. De la gráfica se observa que el modelo que mejor ajusta las observaciones es un modelo evolutivo con

ESTADÍSTICA DE GALAXIAS
SALVADOREÑA DE 1977

-79-

$(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.38, 0.62)$. Un análisis similar para la banda k infraroja mostró que los modelos que mejor ajustan las observaciones son los no evolutivos . Los modelos con constante cosmológica producen un número excesivo de galaxias .

El que el conteo de galaxias pueda ayudar a resolver el problema de la constante cosmológica es una cuestión que aún no está cerrada pues los principales problemas que enfrenta este tipo de análisis son que se tienen que tomar en cuenta como datos , muestras de galaxias "fantasmas" que apenas son perceptibles y que además se tienen que considerar efectos de evolución galáctica que hoy son poco comprendidos .

Las referencias en la figura 20 se encuentran contenidas en la referencia 5 . La FLG es la función de luminosidad galáctica .

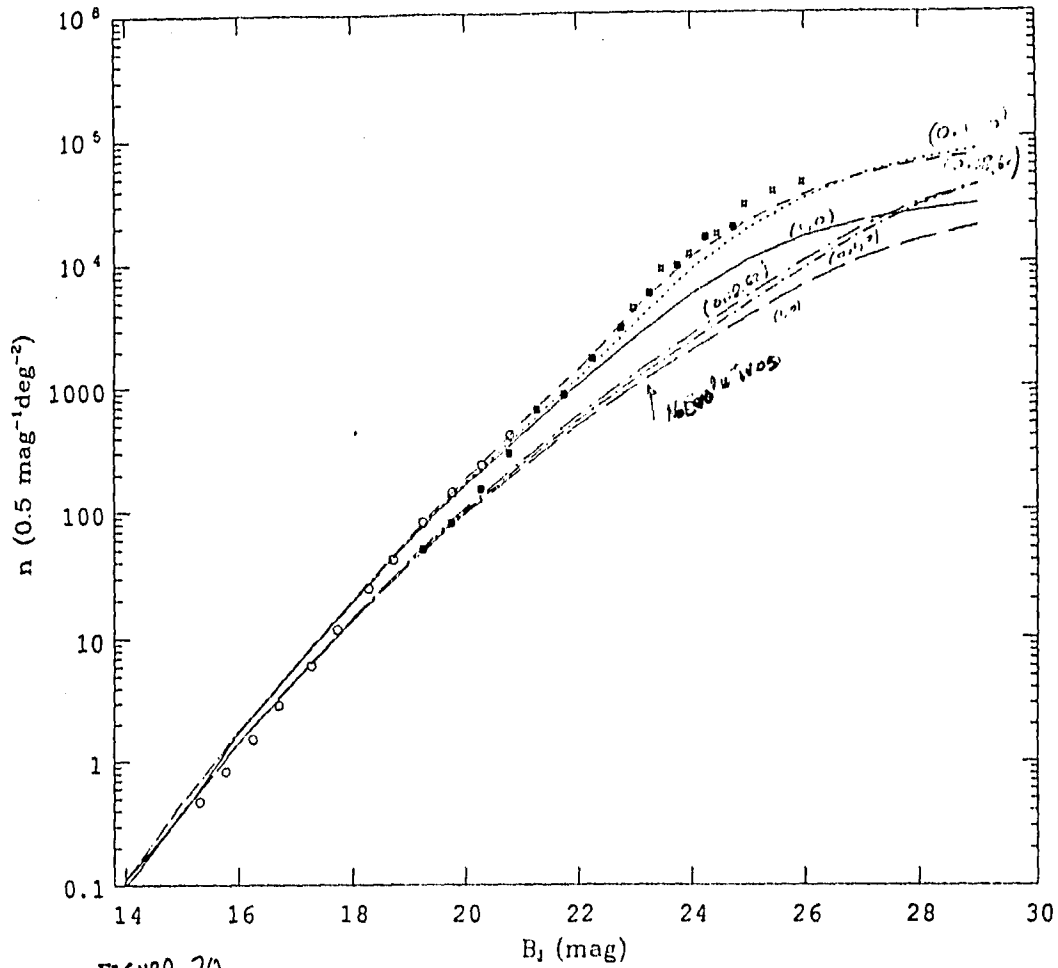


FIGURA 20.

Número de galaxias vs. magnitud aparente en el azul (B_J) suponiendo universalidad en la FLG. Las observaciones son de Maddox et al. (1990) (círculos), Metcalfe et al. (1990) (cuadros) y Lilly et al. (1991) (estrellas). Las diferentes líneas engloban los siguientes casos: i) modelos no-evolutivos, líneas de trazos largos, de puntos y trazos cortos y de puntos y trazos largos $[(\Omega_m, \Omega_\nu) = (1,0), (0.1,0) \text{ y } (0.38,0.2)]$, respectivamente; ii) modelos evolutivos, líneas continua, punteada y de trazos cortos bajo las mismas hipótesis cosmológicas que en (i), respectivamente.

5. LENES GRAVITACIONALES.

Este fenómeno se refiere a que un rayo luminoso procedente de un objeto lejano como un cuasar, en su trayecto pueda encontrarse con una estructura masiva que por efecto del campo gravitacional producido haga que el rayo desvie su trayectoria. Una lente gravitacional puede ser una galaxia, estrellas, hoyos negros, etc. Esas estructuras actúan como lentes generando varios efectos ópticos como amplificación de imágenes, imágenes múltiples, etc. Un efecto de Λ distinto de cero es cambiar la probabilidad de que un rayo procedente de un cuasar se encuentre con una lente gravitacional y sea desviado. Para calcular la probabilidad se necesita un modelo de lente, en la literatura aparecen básicamente dos, uno es el de lentes puntuales que representan hoyos negros y minilentes estelares, y el otro es el de esferas isotermicas que representan la distribución de materia en una galaxia.

La probabilidad diferencial dr de que un rayo luminoso sea desviado por una lente cuando recorre una distancia dl es

$$dr = nL \sigma dl ,$$

donde n_L es la densidad de lentes y σ es la sección transversal ó
Área efectiva de interacción . Si el número de lentes por unidad
de volúmen en comovimiento es constante se tiene que

$$n_L(z_L) = n_L(0) (1+z_L)^3 ,$$

donde z_L es el corrimiento al rojo de la lente .

Entonces la fórmula para dt es :

$$dt = n_L(0) (1+z_L)^3 \sigma c (dt/dz_L) dz_L . \quad (4.50)$$

dt/dz_L está dado por la ecuación 4.40 , pero se necesita una
expresión para σ . Esta se puede obtener por consideraciones
geométricas y por la fórmula de Einstein para la desviación de un
rayo luminoso por la acción de un campo gravitacional estático
con simetría esférica .

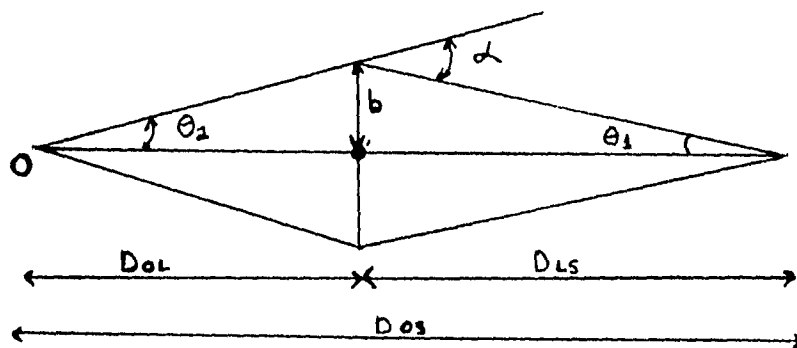


FIGURA 21 . GEOMETRIA DEL FENOMENO DE LENTES GRAVITACIONALES

A) LENTES PUNTUALES MASIVOS.

Como se observa de la figura 21 , $\theta_1 = b/DLS$,

$\theta_2 = b/DOL$, $DOS = DOL + DLS$.

Entonces el ángulo de desviación α está dado por :

$$\alpha = \theta_2 + \theta_1 = b \text{ Dos}/(DOL DLS) . \quad (4.51)$$

b recibe el nombre de parámetro de impacto y mide el tamaño efectivo de la lente .

Por otro lado , de la fórmula de Einstein para el ángulo de desviación de un rayo luminoso por efecto del campo gravitacional estático y con simetría esférica producido por una masa puntual M , se tiene que :

$$\alpha = 4 G M/(c^2 b) . \quad (4.52)$$

Igualando la ecuación 4.51 con la 4.52 y despejando b se obtiene :

$$b^2 = (4 G M/c^2) (DOL DLS/DOS) . \quad (4.53)$$

Las dos soluciones para b , corresponden a dos imágenes de la fuente vistas por el observador (cada una a cada lado de la masa M) . Se define la sección transversal o área efectiva de la lente como $\sigma = \pi b^2$. De ese modo la ecuación para dt queda

$$dt = n_L(0) (1+z_L)^3 \pi b^2 c (dt/dz_L) dz_L .$$

Usando las relaciones $n_L(0) = 8 \pi G M n_L(0)/(3 H_0^2)$ y $H_0 = c/R_0$

, la ecuación para dr finalmente queda como :

$$dr = (3/2)\Omega_L(0) (1+z_L)^3 (D_{OL} D_{LS}/R_0 D_{OS}) (c dt/R_0 dz_L) dz_L . \quad (4.54)$$

Las distancias que aparecen en la fórmula 4.54 son las distancias diámetro angular , es decir que si definimos $d(z_1, z_2)$ como la distancia diámetro angular entre los corrimientos al rojo z_1 y z_2 , se tiene que

$$D_{OL} = d(0, z_L) , \quad D_{LS} = d(z_L, z_S) , \quad D_{OS} = d(0, z_S)$$

donde z_L y z_S son los corrimientos al rojo de la lente y de la fuente respectivamente . La fórmula de la distancia diámetro angular se deduce de las fórmulas 4.46 y 4.47 .

B) ESFERAS ISOTERMAS SINGULARES.

La suposición de que las galaxias son esferas isotermas singulares es una buena hipótesis, pues el estudio de la profundidad óptica de la lente (la probabilidad de que se produzca un fenómeno de lente gravitacional) está enfocado a la producción de imágenes dobles, y esta no depende de la existencia o naturaleza de halos masivos extendidos , sino de la distribución de masa en las regiones internas (≤ 10 kpc) . La base empírica

para una función de distribución de densidad $\rho \propto r^{-2}$ extendida sobre un amplio intervalo de escalas en galaxias está bien establecido para galaxias espirales y es sugerido por la observación para galaxias elípticas .

La geometría para el caso de lentes esféricas isotermas es similar a la del caso de lentes puntuales . La diferencia radica en que para este tipo de lentes la masa $M(r)$ está distribuida con simetría esférica , produciendo una velocidad independiente del radio , es decir una curva de velocidad vs. radio "plana" , esto implica que $M(r) \propto r$ ó equivalentemente que $\rho(r) \propto 1/r^2$, ($\rho(r)$ es la densidad de masa) . Esto también se expresa en términos de una densidad superficial de masa que puede ser interpretada como debida a la masa proyectada en la sección transversal . Para una esfera isotérmica la densidad superficial de masa es :

$$\Sigma(r) = v^2 / (2Gr) , \quad (4.55)$$

donde v es la velocidad de rotación ó dispersión de la materia en la galaxia . La masa contenida hasta un radio igual a b es :

$$M(b) = 2\pi \int_0^b \Sigma(r) r dr = \pi v^2 b / G . \quad (4.56)$$

De acuerdo con la fórmula 4.56 y la fórmula estándar para el ángulo de desviación de un rayo luminoso se tiene que :

$$\alpha = 4 G M(\leq b) / (b c^2) = 4\pi v^2 / c^2 , \quad (4.57)$$

La condición para que se produzcan imágenes dobles es que el parámetro de impacto sea menor que b_{cr} . Usando la fórmula 4.53 para lentes puntuales donde se cambia M por $M(b_{cr})$ y la fórmula 4.56 se tiene que :

$$b_{cr} = 4\pi(v^2/c^2)(D_{OL} D_{LS}/D_{OS}) . \quad (4.58)$$

También se define el ángulo crítico β_{cr} como

$$\beta_{cr} = b_{cr}/D_{OL} = \alpha D_{LS}/D_{OS} .$$

Se puede decir que la lente produce dos imágenes si la fuente (el cuasar) tiene una posición angular menor que β_{cr} con respecto a las imágenes. La separación angular promedio entre las imágenes es $\langle \Delta\theta \rangle = 2\alpha D_{LS}/D_{OS}$.

La sección transversal o área efectiva queda definida como :

$$\sigma = \pi b_{cr}^2 = 16\pi^3(v/c)^4(D_{OL} D_{LS}/D_{OS})^2 . \quad (4.59)$$

Aplicando este resultado a la fórmula general 4.50 se tiene que :

$$d\tau = F(1+z_L)^3(D_{OL} D_{LS}/R_0 D_{OS})^2(1/R_0)c(dt/dz_L)dz_L , \quad (4.60)$$

donde F mide la efectividad de la materia para producir una doble imagen y está dado por

$$F = 16\pi^3 n_0(v/c)^4 R_0^3 . \quad (4.61)$$

Existen ambigüedades en la fórmula de la distancia y por tanto en las propiedades predichas de los lentes. La fórmula estandar de distancia considera un universo en donde la materia está distribuida uniformemente, sin embargo, el efecto de lentes gravitacionales tiene lugar en un universo en donde hay grupos de

materia y los rayos de luz de galaxias distantes se propagan a través de el espacio intergaláctico cuya densidad es mucho menor que la densidad promedio . Se ha obtenido una fórmula de distancia en donde se toma en cuenta este efecto (distancia de Dyer-Roeder) , es decir se supone que una fracción α de toda la masa está distribuida uniformemente , mientras que el resto está formando galaxias . Se ha desarrollado un formalismo en donde se usa la fórmula de Dyer-Roeder y se hacen consideraciones en relación a la aleatoriedad de la dirección de la línea entre el observador y la fuente . Este formalismo se debe a Ehlers y Schneider . Eligiendo la posición de la fuente sobre una esfera con $z = z_s$ como una variable aleatoria , ellos proponen una nueva derivación de la probabilidad .

Se ha mostrado (Fukigita et al. 1992) que la profundidad óptica τ es fuertemente afectada por Λ así como también la probabilidad diferencial dr/dz , esto es que la dependencia de la probabilidad de un evento de lente gravitacional con Λ es mucho mayor que las incertidumbres debidas a la elección de la fórmula de distancia y de la probabilidad . y del modelo de la lente .Esto se observa en las gráficas siguientes , en donde se distinguen los siguientes casos:

- caso A: $\Omega_m = 1$ y $\Omega_\Lambda = 0$; caso B: $\Omega_m = 0.1$ y $\Omega_\Lambda = 0$
caso C: $\Omega_m = 0.1$ y $\Omega_\Lambda = 0.9$; caso D: $\Omega_m = 0$ y $\Omega_\Lambda = 1$.

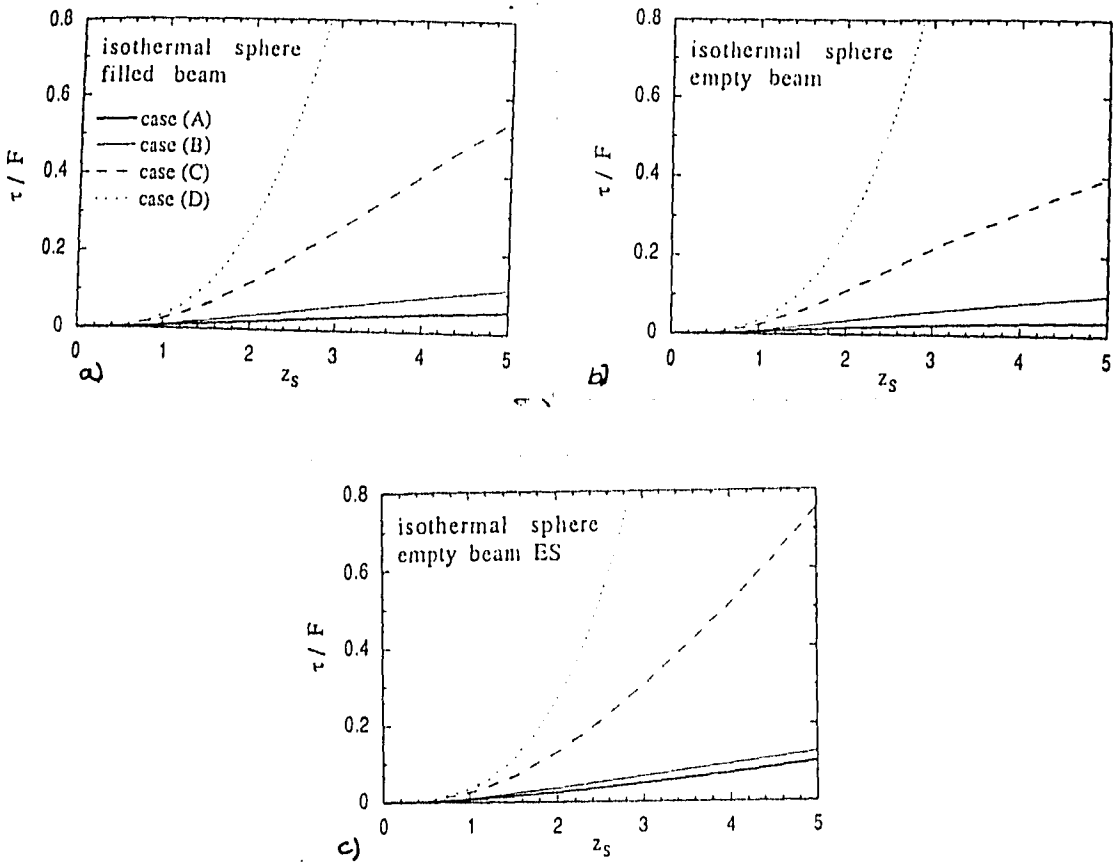


FIGURA 22. Probabilidad de que un rayo se encuentre con un lente gravitacional (profundidad óptica) para una fuente a z_s normalizada por el parámetro de eficiencia F . El lente es modelado por una esfera isotérmica. a) rayo lleno y distancia estándar. b) rayo vacío con la distancia DR. c) Probabilidad de Ehlers-Schneider con rayo vacío.

(TOMADO DE REF. B).

Estas gráficas nos muestran que la profundidad óptica es una cantidad adecuada para probar la existencia de la constante cosmológica .

Se consideró una muestra de cuasares dada por Hewitt & Burbidge (1987;1989) de 4250 cuasares (muestra HB) , y se calculó el número de lentes esperados el cual está dado por

$$N_L = \int dz_e \tau(z_e) dN_Q(z_e)/dz_e$$

donde $dN_Q(z_e)/dz_e$ es la distribución de los cuasares según el corrimiento al rojo . La distribución aumenta hasta un corrimiento al rojo $z_e = 2.3$ y luego decae abruptamente . El cálculo consideró correcciones (radio finito para el núcleo galáctico , efectos de resolución angular y efectos de amplificación) . La siguiente tabla nos muestra los resultados para la muestra mencionada (Fukigita et al. 1992) .

TABLA DE EL NUMERO DE LENTES ESPERADOS INCLUYENDO CORRECCIONES Y EFECTOS DE SELECCION.

	caso A	caso B	caso C	caso D
Rayo lleno				
distancia estandar	9.7	5.2	24.5	64.8
Rayo vacío				
distancia DR	2.1	4.8	10.5	64.8
Rayo vacío				
probabilidad ES ✓	9.6	5.2	24.0	64.8

Las observaciones indican que la muestra HB contiene nueve candidatos razonablemente convincentes como sistemas de lentes , pero que solo cuatro de ellos pueden ser contados como la clase de eventos que se ha venido formulando en esta sección , y de estos cuatro dos son por galaxias espirales . Entonces se puede argumentar que el número relevante de lentes para la muestra HB está entre dos y nueve . Por otro lado se espera que el catálogo HB no es completo y que un tercio de los lentes no se han observado . Los datos de la tabla contienen un error de

± 50 %. Con estas consideraciones se puede concluir que $\Omega_{\Lambda} > 0.95$ está probablemente excluido, y que el caso $\Omega_m = 0.1$ y $\Omega_{\Lambda} = 0.9$ (caso C) está marginalmente permitido.

Este resultado es una mejor cota superior para Ω_{Λ} . Además está en acuerdo con las constricciones del modelo inflacionario que implica $\Omega_{\Lambda} < 1$.

COMENTARIOS FINALES

Al parecer , la dinámica de la expansión es dominada por dos efectos . El primero es el de la materia (relativista o no) , el cual se manifiesta como una fuerza de atracción que desacelera la expansión . El segundo es el de la constante cosmológica que depende en forma creciente de la distancia , la cual si es positiva acelera la expansión , y si es negativa colabora en la desaceleración y el universo finalmente se colapsaría .

Las observaciones astronómicas han permitido acotar el valor de la constante cosmológica . Un valor negativo parece menos probable , pues los estudios para determinar la densidad de masa dan un valor de $\Omega_m \leq 1$, y tomando en cuenta el modelo inflacionario que implica $\Omega_{tot} = 1$, esto a su vez implica $\Omega_\Lambda \geq 0$. Los estudios de lentes gravitacionales indican que $\Omega_\Lambda < 0.95$, lo cual no contradice al modelo inflacionario .

Un valor de $\Omega_\Lambda \neq 0$ resuelve el problema de la edad si se considera un valor de H_0 alrededor de 80 km/(seg Mpc) , pero un valor de H_0 de 40 ó 50 km/(seg Mpc) resuelve ese problema sin

necesidad de una constante cosmológica distinta de cero .

El punto es que si $\Omega_m < 1$ (incluyendo materia oscura "exótica") , entonces $\Omega_\Lambda > 0$, si queremos mantener el esquema inflacionario .

El problema de determinar Ω_m está ligado con el problema del valor de H_0 . Una mejor determinación de estos parámetros , puede en el futuro ayudar considerablemente a resolver el problema de la constante cosmológica . En relación a este mismo asunto está el problema de la materia oscura fría "exótica" . Algunos análisis indican que es necesaria para la formación de estructuras . El que sea exótica es para no contradecir las predicciones de la nucleosíntesis primigenia . El que la teoría de la nucleosíntesis sea una buena teoría no quiere decir que en el futuro no sufra de modificaciones que alteren sus predicciones actuales . También se espera que en el futuro se aclare la naturaleza de la materia oscura así como su papel en la evolución cósmica . Nos es claro entonces , la importancia de mejores observaciones astronómicas a nivel extragaláctico en el futuro .

Los modelos inflacionarios son lo mejor que tenemos a nuestro alcance para la solución de difíciles problemas que plantea el modelo clásico de Friedmann . Estos proponen una expansión exponencial producida por una constante cosmológica primitiva de

un valor grande , después de la expansión suceden las transiciones de fase , donde la energía del vacío se transfiere a las partículas . Después de esto , la densidad de energía dominante es la de la radiación y la de la materia y las condiciones son las requeridas por el modelo estandar . Es poco probable que se haya transferido toda la energía del vacío a las partículas . Según el modelo que se describe en el texto las tres transiciones de fase mencionadas no alcanzan a anular una densidad de energía de m_p^4 . Sin embargo , hasta hoy no se ha podido incorporar con éxito a la interacción gravitacional en una teoría unificada de supersimetría . Es posible que al incorporar la interacción gravitacional , la supersimetría inicial no sea la $SU(5)$, y los cambios en la densidad de energía no sean los mencionados . De cualquier manera se puede pensar que la teoría de partículas es una teoría incompleta , y que posibles cambios en la teoría puedan dar una respuesta al problema de la constante cosmológica .

BIBLIOGRAFIA .

- 1 . Abbott, L . 1988 . Sci. Am. 258(5): 106 .
- 2 . Berry, M. 1978. Principles of cosmology and gravitation.
Cambridge: Cambridge University Press.
3. Bjorken, J. , Drell, S. 1965. Relativistic Quantum Fields.
New York: McGraw-Hill.
4. Börner, G. , Ehlers, J. 1988. Astron. Astrophys. 204: 1 .
5. Collin, P. 1993. Tesis Doctoral . Instituto de Astronomía
UNAM . México D.F.
6. Carrol, S. , Press, W. 1992. Ann. Rev. Astron. Astrophys.
30:499.
7. Felten, J.E. , Isacoman, R. 1986. Rev. Mod. Phys. 58:689.
8. Fukigita, M. , Futamase, T. , Turner, E.L. 1992. Ap.J.
393:3.
9. Kolb, E.W. , Turner, M.S. 1990. The Early Universe .
Redwood City, CA: Addison Wesley.
10. Lahav, O. , Lilje, P.B. , Primack, J.R. , Rees, M.J. 1991.
MNRAS 251:128.

11. Linde, A.D. 1990. Inflation and Quantum Cosmology. London: Academic Press, Inc.
12. Linde, A.D. 1990. Particle Physics and Inflationary Cosmology. New York: Academic Publishers.
13. Misner, C.W. , Thorne, K.S. , Wheeler, J.A. 1973. Gravitation. San Francisco: Freeman And Company.
14. Turner, E.L. , Ostriker, J.P. , Gott, J.R. 1984. Ap.J. 284:1.
15. Turner, M.S. 1992. Inflation after COBE. Lectures on Inflationary Cosmology. Chicago, IL:Fermilab.
16. Zeldovich, Ya.B. , Dolgov, A.D. , Sazhin, M.V. 1990. Basics of Modern Cosmology. Singapore: Fong and Sons Printers Pte. Ltd.