

011738
29

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO.**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE
INGENIERÍA.**

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA.

TESIS:

**MODELADO CINEMÁTICO DE SISTEMAS MECÁNICOS DE
CADENA CERRADA.**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN INGENIERÍA,
PRESENTA :**

MAURICIO CIRILO MÉNDEZ CANSECO.

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. LUIS REYES ÁVILA.**

Ciudad Universitaria, junio de 1995

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

UNAM



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres
quienes siempre me han proporcionado su amor y apoyo

Arcelia
por ser una persona muy especial en mi vida

PRÓLOGO

Este trabajo tiene como objetivo fundamental mostrar el desarrollo de una nueva modelación de sistemas mecánicos de cadena cerrada para resolver los problemas de análisis y síntesis cinemática, a través de la utilización del Álgebra de Cuaterniones y con apoyo del lenguaje de cálculo formal Mathematica®. Este objetivo surge como una necesidad de asociar con claridad la modelación cinemática de los cuerpos rígidos y la física del sistema mecánico, para lograr una mejor interpretación y aplicación del modelo en los diversos problemas y situaciones que se presentan en la cinemática. Para lograrlo el trabajo se dividió en cuatro capítulos que se desarrollaron con un enfoque sistemático, abarcando un tema en especial.

En el Capítulo I se muestran las propiedades algebraicas fundamentales del espacio vectorial de los cuaterniones \mathbf{Q} . Las demostraciones de estas propiedades se encuentran en dos trabajos [1],[2] desarrollados con objeto de mostrar una representación paramétrica de las rotaciones.

En el Capítulo II se presenta la modelación de cuerpos acoplados en configuración no deformada y deformada, la cual será la base en la solución del análisis y síntesis cinemática.

En el Capítulo III se presenta la aplicación de la modelación en la solución del análisis de un sistema mecánico de cuatro barras, presentando además la resolución de un problema específico y la simulación de los resultados.

En el Capítulo IV se presenta la aplicación de la modelación al problema de síntesis de conducción de cuerpo rígido utilizando un sistema mecánico de cuatro barras.

resolviendo también un problema específico y simulando los resultados con objeto de verificar la solución encontrada.

Al final se presentan las conclusiones obtenidas durante el desarrollo del trabajo, y se agregan dos Apéndices para presentar al lenguaje Mathematica y el método de solución de sistemas de ecuaciones no lineales utilizado para resolver los modelos resultantes.

Así este trabajo demuestra que con esta modelación es posible resolver los problemas fundamentales de la cinemática de sistemas de mecánicos de cadena cerrada sin necesidad de utilizar modelaciones con enfoques diferentes como es usual en la forma tradicional.

Aprovecho la oportunidad para agradecer al Dr. Luis Reyes Ávila la supervisión y corrección de este trabajo, lo que le ha dado claridad al desarrollo del mismo. A la Universidad Anáhuac del Sur conjuntamente con su Director de Ingeniería M.C. Vicente Rivera Morás por facilitar la infraestructura para terminar este trabajo. También quiero agradecer la colaboración de mi amigo y compañero Mario Márquez Miranda en la realización del capítulo I.

Mauricio Cirilo Méndez Canseco

CONTENIDO

PRÓLOGO	3
INTRODUCCIÓN	7
CAPITULO I	
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	
I.1 Espacio vectorial de Quaterniones.	14
I.2 Representación paramétrica de rotaciones de un cuerpo rígido.	18
CAPITULO II	
MODELACIÓN CINEMÁTICA DE CUERPOS ACOPLADOS	
II.1 Isomorfismo de los vectores \mathfrak{R}^3 al espacio vectorial \mathbf{Q} .	21
II.2 Rotación de un sistema cartesiano de referencia.	22
II.3 Determinación del vector de posición de un punto en el espacio con respecto a un sistema global de referencia utilizando sistemas de referencia relativos.	25
II.4 Configuración no deformada de cuerpos acoplados.	28
II.5 Modelación deformada de cuerpos acoplados.	33

CAPÍTULO III.

APLICACIÓN DEL MODELADO AL ANÁLISIS CINEMÁTICO DE UN SISTEMA MECÁNICO DE CUATRO BARRAS.

III.1 Modelación del sistema mecánico de cuatro barras.	46
III.2 Código computacional.	53

CAPÍTULO IV.

APLICACIÓN DEL MODELO A LA SÍNTESIS DE SISTEMAS MECÁNICOS PARA CONDUCCIÓN DE CUERPO RÍGIDO.

IV.1 Planteamiento de la síntesis de conducción de cuerpo rígido.	65
IV.2 Código computacional.	69

CONCLUSIONES.	75
---------------	----

REFERENCIAS.	76
--------------	----

APÉNDICE A.	77
-------------	----

APÉNDICE B.	82
-------------	----

INTRODUCCIÓN

En Cinemática, el Análisis de Desplazamiento se refiere a la determinación de las posiciones ocupadas por algún punto o todos los puntos de un eslabón de un mecanismo que se mueve a través de su ciclo de operación. Tal análisis es necesario para determinar las posiciones angulares de cada eslabón para después usarla en el análisis de fuerzas y aceleración o para trazar la trayectoria de un punto del eslabón acoplador. El trazado de un punto acoplador es frecuentemente usado para comprobar el movimiento deseado de la máquina terminada.

Se dice que un mecanismo ha completado un ciclo de operación cuando después de moverse a través de todas sus posibles posiciones retorna a su configuración original. Cuando esto no se logra se denomina como una fase del mecanismo.

El Análisis de Desplazamiento asume que los eslabones son rígidos y sus longitudes son conocidas.

La palabra eslabón se utiliza para designar una pieza de máquina o un componente de un mecanismo.

Los eslabones de un mecanismo se deben conectar entre sí de una manera tal que transmitan movimiento del impulso, o eslabón de entrada, al seguidor, o eslabón de salida. Estas conexiones, articulaciones entre los eslabones, se llaman pares cinemáticos (o simplemente pares) por que cada articulación se compone de dos superficies parecidas, dos elementos, con cada superficie o elemento pareado formando parte de cada uno de los eslabones articulados. Por ende, un eslabón se puede definir también como la conexión rígida entre dos o más elementos de diferentes pares cinemáticos.

La suposición de rigidez indica que no puede haber movimiento relativo entre dos puntos arbitrariamente seleccionados en el mismo eslabón. En particular, no cambian las posiciones relativas de elementos pareados en cualquier eslabón; en otras palabras, el propósito de un eslabón es mantener una relación espacial constante entre los elementos de sus pares.

Como resultado de la hipótesis de rigidez, muchos de los detalles complicados que presentan las formas reales de las piezas carecen de importancia cuando se estudia la cinemática de una máquina o un mecanismo. Por esta razón, una de las prácticas más comunes es trazar diagramas esquemáticos muy simplificados que contengan las características más importantes de la forma de cada eslabón como, por ejemplo, las ubicaciones relativas de los elementos del par, pero en los que se reduce al mínimo la geometría real de las piezas fabricadas. Estas representaciones esquemáticas simplificadas son de gran utilidad por que eliminan factores que tienden a generar confusiones y que no tienen gran injerencia alguna en el análisis. No obstante, tienen también la desventaja de que muestran una semejanza muy limitada con el elemento real. Es preciso tener siempre presente que se pretende que estos diagramas simplificados sólo contengan la información mínima necesaria para que el tema en cuestión no oscurezca con todos los detalles sin importancia (para los fines de la cinemática) o con lo complejo de las piezas reales de la máquina.

Cuando varios eslabones están conectados móvilmente por medio de articulaciones, se dice que constituyen una cadena cinemática. Los eslabones que contienen sólo dos pares de conexiones de elementos se llaman eslabones binarios, los que tienen tres se clasifican como ternarios y así sucesivamente. Si cada eslabón de la cadena se conecta por lo menos con otros dos, ésta forma uno o más circuitos conectados y, en tal caso, recibe el nombre de cadena cinemática cerrada, de no ser así, la cadena se llama abierta. Cuando no se hace especificación alguna se supone que la cadena es cerrada. Si ésta se compone totalmente de

eslabones binarios es cerrada simple; sin embargo, las cadenas cerradas compuestas incluyen otros eslabones binarios y, en consecuencia, forman más de un circuito cerrado.

Un mecanismo es una combinación de cuerpos resistentes conectados por medio de articulaciones móviles para formar una cadena cinemática cerrada con un eslabón fijo, y cuyo propósito es transformar el movimiento. Esto fue definido por F. Reuleaux (1829-1905), especialista alemán en cinemática cuyo trabajo marcó el principio de un estudio sistemático de la cinemática.

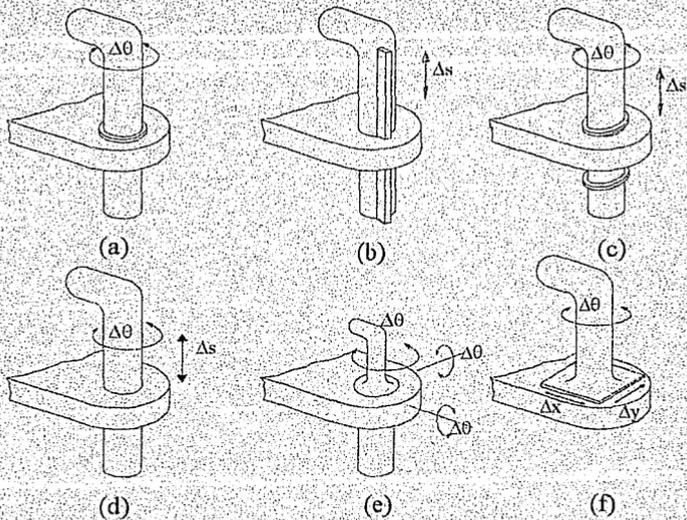
En esta definición, cuando se habla de que un eslabón está fijo se da a entender que se elige como marco de referencia para todos los demás eslabones, es decir, que los movimientos de todos los demás puntos del eslabonamiento se medirán con respecto a ese en particular, ya que se le considera como fijo. En una máquina real, ese eslabón es casi siempre una plataforma o base estacionaria (o una cubierta rigidamente sujeta a dicha base), y se le denomina eslabón marco o base. La cuestión de si este marco de referencia es verdaderamente estacionario (en el sentido de ser un marco de referencia inercial) no tiene importancia para el estudio de la cinemática; pero la adquiere en la investigación de la cinética, en donde deben considerarse las fuerzas. En cualquier caso, una vez que se designa el marco de referencia la cadena cinemática se convierte en mecanismo y conforme el impulsor se mueve pasando por varias posiciones denominadas fases, todos los demás eslabones manifiestan movimientos bien definidos con respecto al marco de referencia elegido.

Para que un mecanismo sea útil, los movimientos entre los eslabones no pueden ser completamente arbitrarios; éstos deben restringirse para producir los movimientos relativos adecuados, los que determine el diseñador para el trabajo que se deba desarrollar. Estos movimientos relativos deseados se obtienen mediante la elección correcta del número de eslabones y de los tipos de articulaciones utilizados para conectarlos.

Por consiguiente, esto lleva al concepto de que, además de las distancias entre articulaciones sucesivas, la naturaleza de ellas y los movimientos relativos que permitan son esenciales para determinar la cinemática de un mecanismo. Por esta razón es vital que se examine en forma minuciosa la naturaleza de las articulaciones, en términos generales y en forma particular, para varios de los tipos más comunes.

El factor que determina los movimientos relativos que permite una articulación dada es la forma que se tengan las superficies o elementos pareados. Cada tipo de articulación posee sus propias formas características para los elementos y cada una permite un tipo de movimiento específico, el cual es determinado por las maneras posibles en que las superficies elementales se puedan mover una en relación con otra.

Reuleaux dividió los pares cinemáticos en superiores e inferiores. En los pares inferiores los elementos del par hacen contacto en una superficie, en tanto que en los superiores el contacto entre las superficies elementales es en una línea o en un punto. En la fig. se ilustran los seis pares inferiores más utilizados.



- El par giratorio o de revoluta sólo permite rotación relativa y, por consiguiente, posee un grado de libertad.
- El par prismático sólo permite movimiento relativo de deslizamiento y, también tiene un grado de libertad.
- El par de tornillo o helicoidal cuenta con un sólo grado de libertad por que los movimientos de deslizamiento y rotación están relacionados por el ángulo de hélice de la rosca. Nótese que el par de tornillo se convierte en una revoluta si el ángulo de hélice se hace cero, y en un par prismático si dicho ángulo se hace de 90° .
- El par cilíndrico permite tanto rotación angular como movimiento de deslizamiento independiente. Y por consiguiente tiene dos grados de libertad.

- El par globular o esférico es una articulación de rótula. Posee tres grados de libertad, una rotación entorno a cada uno de los ejes coordenados.
- El par plano rara vez se encuentra en los mecanismos en su forma no disfrazada. Tiene tres grados de libertad.

Todos los demás tipos de articulaciones se conocen como pares superiores. Por ejemplo, los dientes de engranes acoplados, una rueda que va rodando sobre un riel, una bola que rueda sobre una superficie plana y una leva que hace contacto con su seguidor de rodillo. Puesto que hay una cantidad infinita de pares superiores no es práctico hacer un recuento sistemático de ellos.

Entre los pares superiores existe una subcategoría denominada pares envolventes. Por ejemplo, la conexión de una banda y una polea, entre una cadena y una catarina o entre un cable y un tambor. En cada caso, uno de los eslabones se caracteriza por rigidez unilateral.

Tal y como se definió antes, el término “mecanismo” se puede referir a una amplia variedad de dispositivos que incluyen tanto pares superiores como inferiores. No obstante, existe un término más descriptivo concerniente a los mecanismos que sólo tienen pares inferiores, y éste es el de *eslabonamiento*.

CAPITULO

I

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

I. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS.

I. 1: ESPACIO VECTORIAL DE QUATERNIONES.

El Álgebra de Cuaterniones fue desarrollada por Sir William Hamilton en el año de 1843, sin embargo no fue sino hasta los años 1960-1970, cuando se empezaron a aplicar en la dinámica de cuerpos rígidos. Es importante mencionar que tal aplicación no se realizaba de una manera sistemática, puesto que el álgebra de Cuaterniones utilizada, era una extensión formal no rigurosa del álgebra de los números complejos.

La manera sistemática de construir el Álgebra de Cuaterniones con el enfoque moderno del álgebra lineal, se presenta en [1]. Tal presentación simplifica y generaliza la aplicación de la misma en la representación paramétrica de rotaciones finitas de cuerpos rígidos. Y es la que utilizaremos en nuestras aplicaciones.

Sea el conjunto \mathfrak{R}^4 , sobre el cual se define las operaciones siguientes:

i). **una operación aditiva**, $\oplus : \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ definida como,

$$(a,b,c,d) \oplus (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (a+\alpha, b+\beta, c+\gamma, d+\delta) \quad (1.1)$$

ii). **una operación multiplicativa**, $*$: $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ definida por,

$$(a,b,c,d) * (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta, a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma, \\ a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta, a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha),$$

$$\forall (a,b,c,d), (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathfrak{R}^4, \quad (1.2)$$

por medio de las cuales la pareja (\mathfrak{R}^4, \oplus) y $(\mathfrak{R}^4, *)$, forman un grupo aditivo conmutativo y un grupo multiplicativo no conmutativo respectivamente, según se muestra en [1]. Las propiedades algebraicas de este conjunto se resumen en los siguientes resultados:

TEOREMA 1. La terna $(\mathfrak{R}^4, \oplus, *)$, es un campo no conmutativo.

Demostración: En efecto según se demuestra en [1],

i) La operación $*$: $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ es asociativa, ya que,

$$p * (q * s) = (p * q) * s. \quad (1.3)$$

$$\forall p, q, s \in \mathfrak{R}^4,$$

ii) El elemento $1 = (1, 0, 0, 0) \in \mathfrak{R}^4$ es tal que : $1 * p = p * 1 = p, \forall p \in \mathfrak{R}^4$. Éste es llamado el elemento neutro de la multiplicación en \mathfrak{R}^4 .

iii) $\forall p \in \mathfrak{R}^4, p \neq (0, 0, 0, 0)$; existe $p' \in \mathfrak{R}^4$ tal que $p * p' = 1$. El elemento p' es llamado el inverso de p para la multiplicación.

iv) La operación $*$: $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ no es conmutativa.

$$p * q \neq q * p$$

v) Las siguientes propiedades de distributividad se satisfacen:

$$a) (p \oplus q) * s = p * s \oplus q * s$$

$$b) p * (q \oplus s) = p * q \oplus p * s, \quad (1.4)$$

$$\forall p, q, s \in \mathfrak{R}^4.$$

Se presenta ahora la operación: $\bullet: \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$, definida por,

$$\alpha \bullet (a,b,c,d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d),$$

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathfrak{R}^4, \alpha \in \mathfrak{R} \quad (1.5)$$

la cual es una multiplicación escalar. Se observa con esto que, la terna $(\mathfrak{R}^4, \oplus, \bullet)$ es un espacio vectorial real. Además se sabe que la transformación $\langle \bullet, \bullet \rangle: \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$, definida por:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \sum_{i=0}^3 p_i q_i, \quad \in \mathfrak{R}, \quad (1.6)$$

es un producto interno en \mathfrak{R}^4 , y por lo tanto, $\mathbf{Q} = (\mathfrak{R}^4, \oplus, *, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ es un espacio vectorial real con producto interno, y la norma asociada a este producto interno es la siguiente:

$$\| \mathbf{p} \| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{\frac{1}{2}} = (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

por lo cual $\mathbf{Q} = (\mathfrak{R}^4, \oplus, *, \bullet, \| \bullet \|)$, es un espacio normado, al cual llamaremos espacio vectorial de Cuaterniones y a sus elementos serán llamados Cuaterniones.

Se utilizan también, isomorfismos apropiados entre el espacio vectorial de Cuaterniones, el espacio vectorial real y el espacio vectorial \mathfrak{R}^3 , para expresar un Cuaternion como la suma de un Cuaternion real y un Cuaternion vectorial. Esto es,

$$\mathbf{Q}_r = \{(a,0,0,0) : a \in \mathfrak{R}\} \subset \mathbf{Q}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{Q}_v = \{(0,b,c,d) : b,c,d \in \mathfrak{R}\} \subset \mathbf{Q}, \quad (1.9)$$

entonces, las transformaciones definidas por:

$$T_r(a,0,0,0) = a \quad \forall (a,0,0,0) \in \mathbf{Q}_r \quad (1.10)$$

$$T_v(0,b,c,d) = (b,c,d) \quad \forall (0,b,c,d) \in \mathbf{Q}_v \quad (1.11)$$

son isomórficas, por lo tanto, si $\mathbf{p} = (a,b,c,d) \in \mathbf{Q}$, entonces:

$$\mathbf{p} = T_r^{-1}(a) + T_v^{-1}(b,c,d) \quad (1.12)$$

De manera similar al álgebra de los números complejos, podemos definir un quaternion conjugado como:

$$\bar{\mathbf{p}} = (p_0 - p_1 - p_2 - p_3), \quad (1.13)$$

la definición (1.13) permite mostrar en el siguiente teorema, [1], algunas propiedades útiles para las aplicaciones.

TEOREMA 2. Dados $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ y $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbf{Q}$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{i) } \overline{\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}} &= \bar{\mathbf{p}} \oplus \bar{\mathbf{q}} \\ \text{ii) } \overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}} &= \bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{p}} \\ \text{iii) } \mathbf{p} * \bar{\mathbf{p}} &= \bar{\mathbf{p}} * \mathbf{p} \in \mathbf{Q}_r \end{aligned} \quad (1.14)$$

El álgebra presentada en esta sección, es de utilidad para las aplicaciones según se muestra en el siguiente párrafo.

1.2 REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA DE ROTACIONES DE UN CUERPO RÍGIDO

En esta sección se intenta unificar y por consecuencia, simplificar, las diferentes formas utilizadas en la mecánica, para representar paramétricamente las rotaciones finitas, de cuerpos rígidos, de forma similar a [1]. Para este hecho, se define una transformación lineal $\rho(p, \bullet) : Q \rightarrow Q$, $p \in Q$ está fijo, que preserva el producto interno, la norma y el ángulo, en la forma siguiente:

$$\rho(p, q) = p^* q^* p' = \frac{1}{\|p\|^2} \bullet (p^* q^* \bar{p}) \quad (1.15)$$

$$\forall q \in Q$$

El siguiente teorema demostrado en [1], estudia las propiedades de la transformación definida en (1.15).

TEOREMA 3. La transformación $\rho(p, \bullet) : Q \rightarrow Q$, es lineal, ortogonal y $\rho(p, q) \in Q_v$, para todo $q \in Q_v$.

Otro resultado importante en las aplicaciones es el siguiente, [1].

TEOREMA 4. Sea $\theta \in [0, n\pi]$, $n \in \mathbb{R}^+$, $w \in Q_v$, $\|w\|=1$; entonces, el quaternion $p \in Q$, con $p_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $p_v = \pm \text{Sen } \theta w$, es tal que, $\rho(p, w) = w$.

Por otra parte, p_0 satisface la ecuación:

$$4 p_0^{-4} - 4 p_0^{-2} \|p\|^2 \text{Cos } \theta - \|p\|^4 \text{Sen}^2 \theta = 0.$$

Por el teorema 4, el quaternion \mathbf{p} representa una rotación de ángulo $\theta \in [0, \pi]$, con eje $\mathbf{w} \in \mathbf{Q}_v$, esto es:

$$p_0 = \pm \|\mathbf{p}\| \operatorname{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.16)$$

$$\mathbf{p}_v = \pm \|\mathbf{p}\| \operatorname{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{w}, \quad (1.17)$$

En general la norma de \mathbf{p} , puede ser arbitraria. En este trabajo, se usan Quaterniones unitarios, esto es, $\|\mathbf{p}\| = 1$, y

$$p_0 = \pm \operatorname{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.18)$$

$$\mathbf{p}_v = \pm \operatorname{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{w}, \quad (1.19)$$

CAPÍTULO

II

MODELACIÓN CINEMÁTICA DE CUERPOS ACOPLADOS

II. MODELACIÓN CINEMÁTICA DE CUERPOS ACOPLADOS.

En este capítulo se muestra la modelación cinemática de sistemas mecánicos de cadenas cerradas con el álgebra de los Cuaterniones [1],[2], la cual resulta apropiada para trabajar en un ambiente computacional de manejo formal como es el de Mathematica®[3]. Tal modelación implica una representación de multicuerpos rígidos para determinar la posición de un punto del mecanismo con respecto a un sistema de referencia inercial.

II.1 ISOMORFISMO DE LOS VECTORES DE \mathfrak{R}^3 AL ESPACIO VECTORIAL \mathbf{Q} .

Como recordaremos de las propiedades de los Cuaterniones vistas en el capítulo anterior, existe una transformación isomórfica $T_v: \mathbf{Q}_v \rightarrow \mathfrak{R}^3$, entre el subespacio de los Cuaterniones vectoriales \mathbf{Q}_v y el espacio vectorial \mathfrak{R}^3 , tal que :

$$T_v (0,b,c,d) = (b,c,d) \quad \forall (0,b,c,d) \in \mathbf{Q}_v, \quad (2.1)$$

dado que esta transformación es un isomorfismo, existe una transformación inversa $T_v^{-1}: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathbf{Q}_v$, tal que:

$$T_v^{-1} (b,c,d) = (0,b,c,d) \quad \forall (b,c,d) \in \mathfrak{R}^3 \quad (2.2)$$

Con esto podemos considerar a cualquier vector dado en \mathfrak{R}^3 como un elemento del espacio vectorial de los Cuaterniones. Así al aplicarle el isomorfismo a la base canónica de \mathfrak{R}^3 ,

$$\mathbf{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \quad (2.3)$$

Obtenemos :

$$\mathbf{e}_2 = T_v^{-1}(1,0,0) = (0,1,0,0)$$

$$\mathbf{e}_3 = T_v^{-1}(0,1,0) = (0,0,1,0) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{e}_4 = T_v^{-1}(0,0,1) = (0,0,0,1)$$

Donde $\{\mathbf{e}_j\} \in \mathfrak{R}^4$, $j = 2,3,4$, son vectores de la base canónica de \mathfrak{R}^4 . La cual se completa con el vector $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$. Es importante resaltar que el isomorfismo anterior nos permitirá trabajar los elementos \mathfrak{R}^3 utilizando las propiedades algebraicas del espacio de los cuaterniones Q .

II.2 ROTACIÓN DE UN SISTEMA CARTESIANO DE REFERENCIA.

En esta parte presentaremos la forma de aplicar una rotación rígida con el álgebra de los cuaterniones, con el propósito de utilizarla después en rotaciones rígidas de vectores de \mathfrak{R}^3 . Una rotación es una transformación lineal, ortogonal, de determinante positivo de un espacio vectorial al mismo espacio vectorial, [4]. La transformación $\rho(\mathbf{p}_*) : Q \rightarrow Q$, con $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ fijo definida por :

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} * \mathbf{q} * \mathbf{p}^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} * (\mathbf{p} * \mathbf{q} * \bar{\mathbf{p}}) \quad \forall \mathbf{q} \in Q. \quad (2.5)$$

es una rotación en el espacio vectorial de los cuaterniones según se muestra en [1],[2].

Donde :

* es la operación multiplicativa de los Quaterniones.

$\|\cdot\| : Q \rightarrow \mathbb{R}^+$ es la norma en espacio vectorial Q.

• es la multiplicación escalar

$\bar{p} \in Q$ es el conjugado de p.

Los componentes de $p \in Q$ están relacionados con los parámetros físicos de la rotación, mediante las siguientes expresiones: [1],[2] :

$$p_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad p_i = \sin \frac{\theta}{2} w_i \quad (2.6)$$

donde :

θ es el ángulo de rotación

$w = (w_1, w_2, w_3)$ es el eje de rotación

Si $p \in Q$ es un quaternion unitario, entonces la rotación $\rho(p, \cdot) : Q \rightarrow Q$ se simplifica a la siguiente forma :

$$(p, q) = p * q * p^{-1} = p * q * \bar{p} \quad \forall q \in Q \quad (2.7)$$

Esta operación es muy útil en la cinemática cuando tenemos que relacionar un sistema de referencia a partir de otro, relacionando mediante rotaciones la base que forma a cada uno de estos sistemas. Esto lo mostraremos utilizando el álgebra de Cuaterniones y la base canónica $\{e_j\}$ que rotaremos para transformarla en la base $\{e'_j\}$, $j=1,2,3$, como se muestra en la figura 2.1.

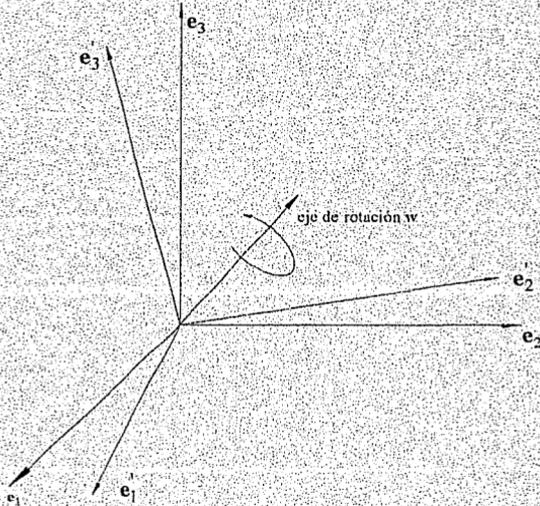


Figura 2.1: Sistemas de referencia.

Primero transformamos la base $\{e_j\}$, $j=1,2,3$, en un conjunto $\{e'_{j,i}\} \subset Q$, $j=1,2,3$, bajo la transformación

$$e'_{j,i} = T_v^{-1} e_j \quad (2.8)$$

Posteriormente se le aplica a $e'_{j,i}$ la transformación $\rho(p, \cdot): Q \rightarrow Q$ para obtener

$$\mathbf{a}_{j+1} = \rho(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{e}}_{j+1}), \quad j=2,3,4 \quad (2.9)$$

La base $\mathbf{a}_{j+1} \in \mathbf{Q}$, $j=2,3,4$, se completa al agregarle el vector $\mathbf{a}_1 = (1,0,0,0)$. Ahora para obtener la base rotada $\{\mathbf{e}_j\}$, $j=1,2,3$, basta aplicar a la base $\{\mathbf{a}_{j+1}\}$, $j=1,2,3,4$, la transformación $T_v: \mathbf{Q}_v \rightarrow \mathfrak{R}^3$,

$$\mathbf{e}_j = T_v \mathbf{a}_{j+1}, \quad (2.10)$$

Los componentes de $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ están dados por:

$$p_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \mathbf{p}_v = \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{w}, \quad (2.11)$$

observemos que los componentes de \mathbf{w} se conocen respecto a la base $\{\mathbf{e}_j\}$, $j=1,2,3$.

Esta es la forma de utilizar los isomorfismos de \mathfrak{R}^3 y el subespacio de los cuaterniones vectoriales, para rotar un vector cualesquiera en \mathfrak{R}^3 , utilizando el álgebra de los cuaterniones.

II.3 DETERMINACION DEL VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO EN EL ESPACIO CON RESPECTO A UN SISTEMA GLOBAL DE REFERENCIA UTILIZANDO SISTEMAS DE REFERENCIA RELATIVOS

Nuestro objetivo en esta parte es expresar los componentes del vector de posición $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ del punto $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^3$ con respecto a un sistema global de referencia fijo, utilizando las coordenadas de $\mathbf{r}(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^3$ con respecto a sistemas de referencia relativos. Para esto consideremos la siguiente figura:

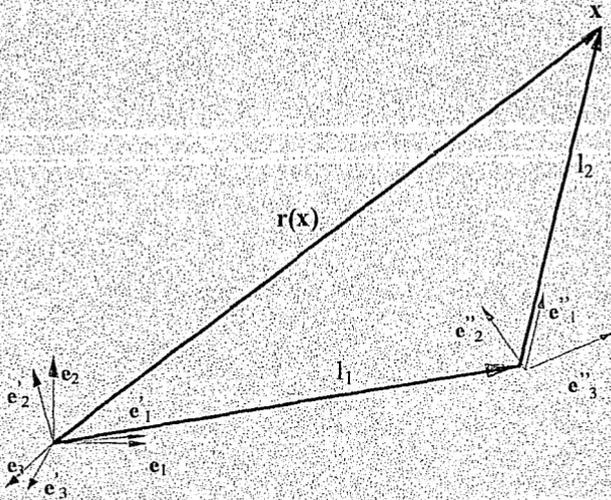


Figura 2.2 Suma de vectores en bases diferentes

Supongamos que los componentes l_1 y l_2 con respecto a las bases $\{e_j\}$ y $\{e'_j\}$, $j=1,2,3$ son conocidos. Deseamos entonces conocer los componentes del vector de posición $r(x)$ del punto $x \in \mathcal{R}^3$ con respecto a la base $\{e_j\}$, $j=1,2,3$, sabiendo además que las bases $\{e_j\}$ y $\{e'_j\}$ se relacionan de la forma siguiente:

$$e_j = T_v \rho(p, T_v^{-1} e_j) = T_v [p^* T_v^{-1} [e_j]^* \bar{p}] \quad (2.12)$$

$$e'_j = T_v \rho(q, T_v^{-1} e'_j) = T_v \rho(q, \rho(p, T_v^{-1} [e'_j])) = T_v [q^* T_v^{-1} [e'_j]^* \bar{q}] \quad (2.13)$$

donde:

$$p_0 = \cos \frac{\theta_1}{2}, \quad p_v = \sin \frac{\theta_1}{2} w$$

$$q_0 = \cos \frac{\theta_2}{2}, \quad q_v = \sin \frac{\theta_2}{2} u$$

Para esto observemos que el vector $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ puede expresarse como la suma de los vectores \mathbf{l}_1 y \mathbf{l}_2 después de transformarlos a la base $\{\mathbf{e}_j\}$, $j=1,2,3$, esto es

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 \quad (2.14)$$

o en términos de los componentes de \mathbf{l}_1 y \mathbf{l}_2

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = l_{1j} \cdot \mathbf{e}_j + l_{2j} \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.15)$$

$$= l_{1j} \cdot T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])] + l_{2j} \cdot T_v[\rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j]))] \quad (2.16)$$

$$= l_{1j} \cdot T_v[\mathbf{p}^* T_v^{-1}[\mathbf{e}_j] \cdot \bar{\mathbf{p}}] + l_{2j} \cdot T_v[\mathbf{q}^* \mathbf{p}^* T_v^{-1}[\mathbf{e}_j] \cdot \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{q}}] \quad (2.17)$$

$$= l_{1j} \cdot T_v[\mathbf{p}^* T_v^{-1}[\mathbf{e}_j] \cdot \bar{\mathbf{p}}] + l_{2j} \cdot T_v[\mathbf{q}^* \mathbf{p}^* T_v^{-1}[\mathbf{e}_j] \cdot \overline{\mathbf{q}^* \mathbf{p}}] \quad (2.18)$$

l_{1j} y l_{2j} son los componentes coordenados \mathbf{l}_1 y \mathbf{l}_2 respecto a las bases \mathbf{e}_j y \mathbf{e}_j^* respectivamente

Observemos que los componentes del vector de posición del punto $\mathbf{x} \in \mathfrak{N}^3$ con respecto a la base global fija se obtiene, según la ecuación (2.18), mediante la multiplicación de los cuaterniones. Además los componentes de los ejes de las rotaciones $\mathbf{w} \in \mathfrak{N}^3$ y $\mathbf{u}^* \in \mathfrak{N}^3$ son conocidos respecto a las bases $\{\mathbf{e}_j\}$ y $\{\mathbf{e}_j^*\}$, $j=1,2,3$, respectivamente. Sin embargo mediante la relación

$$\mathbf{u} = u_j \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.19)$$

$$= u_j \cdot T_v [p(T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])] \quad (2.20)$$

$$= T_v [((p^* T_v^{-1} [u_j \cdot \mathbf{e}_j] \cdot \bar{p}^{-1})] \quad (2.21)$$

los componentes de $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ con respecto a la base global son conocidos. Y esto es muy importante tenerlo en cuenta en el momento de programar la ecuación por que es este eje de rotación \mathbf{u} el que utilizamos al calcular q para rotar la base $\{\mathbf{e}_j\}$, $j=1,2,3$.

II.4 CONFIGURACIÓN NO DEFORMADA DE CUERPOS ACOPLADOS.

En esta parte mostraremos la metodología de modelar cuerpos acoplados no deformados, esto lo haremos utilizando dos eslabones I_1 y I_2 articulados entre sí con una junta esférica, donde uno de ellos está sujeto a una base fija en su extremo libre con una junta del mismo tipo (véase Figura 2.3). Este tipo de junta nos permitirá modelar un movimiento general de los eslabones articulados para después aplicarlo a los mecanismos.

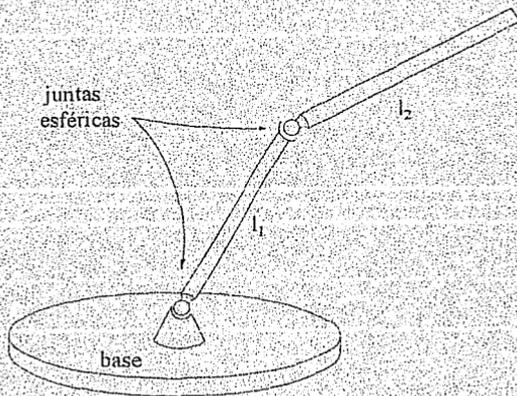


Figura 2.3: eslabones articulados

Para iniciar la modelación definiremos un sistema de referencia global y sistemas de referencia locales sobre los eslabones con el propósito de determinar el vector de posición del extremo final del eslabonamiento respecto al sistema de referencia global.

La definición de los sistema de referencia locales se hizo de tal manera que los componentes de los vectores de posición de los eslabones cumplen con la expresiones:

$$\begin{aligned}l_1 &= l_1 \bullet e_1 \\l_2 &= l_2 \bullet e_1\end{aligned}\tag{2.22}$$

Siendo l_1 y l_2 las longitudes de los eslabones.

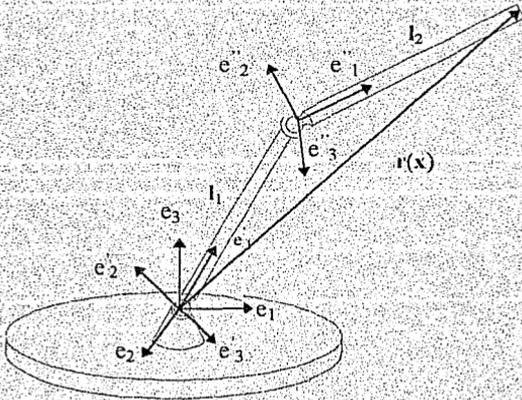


Figura 2.4 sistemas de referencia en los eslabones articulados

- El modelado consiste en determinar a través de los eslabones el vector de posición $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ del extremo final de los cuerpos acoplados a la base global $\{\mathbf{e}_j\}, j = 1,2,3$; esto es:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 = l_1 \bullet \mathbf{e}_1 + l_2 \bullet \mathbf{e}_1 \quad (2.23)$$

- Lo que a continuación haremos es transformar los elementos de las bases $\{\mathbf{e}_j\}$ y $\{\mathbf{e}_i\}$ a la base $\{\mathbf{e}_j\}, j = 1,2,3$ para que obtengamos el vector $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ en esta base. Esto puede hacerse de dos formas:

1. Considerando que los sistemas de referencia locales tienen relación sucesiva entre sí, con el sistema de referencia global. Entonces los elementos de estas bases estarán dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_i])] \quad \text{y} \\ \mathbf{e}_i &= T_v[\rho(\mathbf{q}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_i])] = T_v[\rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_i]))] \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (p_0, p_1, p_2, p_3) \\ p_0 &= \cos \frac{\theta_1}{2}, \quad \mathbf{p}_v = \sin \frac{\theta_1}{2} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (q_0, q_1, q_2, q_3) \\ q_0 &= \cos \frac{\theta_2}{2}, \quad \mathbf{q}_v = \sin \frac{\theta_2}{2} \cdot \mathbf{v}_j \bullet T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])] = \sin \frac{\theta_2}{2} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.26)$$

\mathbf{v} = es el eje de rotación de la base $\{\mathbf{e}_j\}, j=1,2,3$, transformado a la base $\{\mathbf{e}_j\}, j=1,2,3$.

2. Considerando que los sistemas de referencias locales tienen relación directa con el sistema de referencia global. En este caso los elementos de estas bases estarán dados por :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1])] \quad \text{y} \\ \mathbf{e}_i &= T_v[\rho(\mathbf{q}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_i])], \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde: $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$

$$p_0 = \cos \frac{\theta_1}{2}, \quad \mathbf{p}_v = \sin \frac{\theta_1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}, \quad (2.28)$$

$\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$

$$q_0 = \cos \frac{\theta_2}{2}, \quad \mathbf{q}_v = \sin \frac{\theta_2}{2} \mathbf{v} \quad (2.29)$$

El eje de rotación \mathbf{v} en este caso está dado en la base $\{\mathbf{e}_j\}, j=1,2,3$.

- Por último queda sustituir en la ecuación (2.23) las relaciones \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_i obtenidas.

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = I_1 \bullet T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1])] + I_2 \bullet T_v[\rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_i]))] \quad (2.30)$$

$$= I_1 \bullet T_v[\mathbf{p} \bullet T_v^{-1}[\mathbf{e}_1] \bullet \overline{\mathbf{p}}] + I_2 \bullet T_v[\mathbf{q} \bullet \mathbf{p} \bullet T_v^{-1}[\mathbf{e}_i] \bullet \overline{\mathbf{q}} \bullet \mathbf{p}] \quad (2.31)$$

De igual manera es fácil inducir el modelado de tres cuerpos acoplados sin tener que desarrollar el proceso antes expuesto. Por ejemplo, ésto estaría dado por la ecuación :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = l_1 \cdot T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1])] + l_2 \cdot T_v[\rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1]))] + l_3 \cdot T_v[\rho(\mathbf{r}, \rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1])))] \quad (2.32)$$

y $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ son los cuaterniones que nos transforman las bases $\{\mathbf{e}_j\}$, $\{\mathbf{e}_j'\}$ y $\{\mathbf{e}_j''\}$ a la base $\{\mathbf{e}_j\}$, $j=1,2,3$, para obtener la posición $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ referenciada en esta base.

Los componentes de dichos cuaterniones se calculan así :

$$\begin{aligned} p_0 &= \cos \frac{\theta_1}{2}, & p_v &= \sin \frac{\theta_1}{2} \mathbf{u} \\ q_0 &= \cos \frac{\theta_2}{2}, & q_v &= \sin \frac{\theta_2}{2} \mathbf{v}_j \cdot T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1])] \\ r_0 &= \cos \frac{\theta_3}{2}, & r_v &= \sin \frac{\theta_3}{2} \mathbf{w}_j'' \cdot T_v[\rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1]))] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 son las cantidades de rotación necesarias alrededor de los ejes \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w}'' para obtener las transformaciones de las bases.

Las operaciones las realizaremos con Mathematica® debido a la complejidad que presenta la multiplicación entre cuaterniones haciendo laborioso y susceptible de errores el proceso de cálculo. La forma de hacerlo en la computadora con dicho software lo mostraremos mas adelante con un ejemplo en particular.

II.5 CONFIGURACIÓN DEFORMADA DE CUERPOS ACOPLADOS.

La modelación que presentaremos en esta parte toma en cuenta una secuencia de deformaciones de cada eslabón de una cadena cinemática. Esta la desarrollaremos ejemplificando dos posibles secuencias de la cadena cinemática presentada en la fig. 2.3. las que denominaremos con Modelo I y Modelo II.

Modelo I

El primer modelo requiere conocer la posición del extremo final de la cadena cinemática mediante la secuencia de rotaciones mostrada en la figura 2.5.

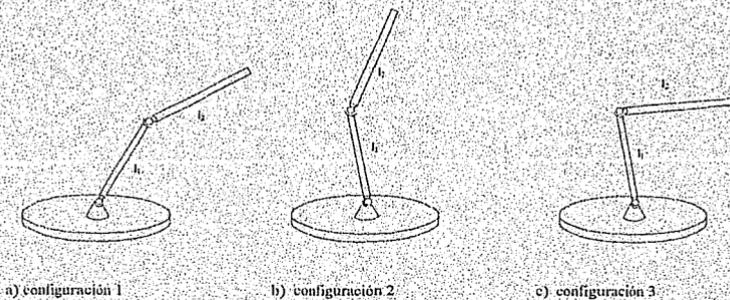


Figura 2.5 Configuraciones del movimiento de dos eslabones articulados.

En cada configuración identificaremos un vector de posición $r(x)$, $r(y)$ y $r(z)$ respectivamente, formados de la base al extremo final del eslabón l_2 .

a) La configuración I con la base global fija $\{e_j\}$, y las bases relativas $\{e'_j\}$, $\{e''_j\}$, $j=1,2,3$; se muestran en la figura 2.6.

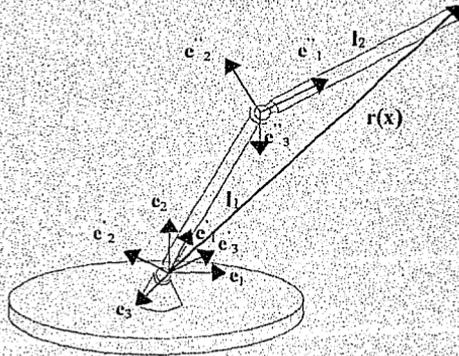


Figura 2.6 a) configuración inicial

El vector de posición $r(x) \in \mathbb{R}^3$ queda determinado como se muestra en (2.30):

$$r(x) = l_1 \cdot T_v[\rho(p, T_v^{-1}[e_1])] + l_2 \cdot T_v[\rho(q, \rho(p, T_v^{-1}[e_1]))] \quad (2.34)$$

Donde las relaciones de las bases están dadas como expusimos en (2.24):

$$\begin{aligned} e'_1 &= T_v[\rho(p, T_v^{-1}[e_1])] \quad \text{y} \\ e''_1 &= T_v[\rho(q, T_v^{-1}[e'_1])] = T_v[\rho(q, \rho(p, T_v^{-1}[e_1]))] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Con p y q dados por:

$$p_0 = \cos \frac{\theta_1}{2}, \quad p_v = \sin \frac{\theta_1}{2} \mathbf{u}$$

$$q_0 = \cos \frac{\theta_2}{2}, \quad q_v = \sin \frac{\theta_2}{2} \mathbf{v}' \cdot T_v [\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1} [\mathbf{e}_j])] \quad (2.36)$$

Los ángulos θ_1 y θ_2 son las rotaciones necesarias alrededor de los ejes \mathbf{u} y \mathbf{v}' para obtener las transformaciones de las bases.

b) La *configuración 2* mostrada en la figura (2.7) corresponde a una rotación ψ_1 del eslabón II respecto a su eje de rotación \mathbf{b}' definido en la base $\{\mathbf{e}_j\}, j=1,2,3$.

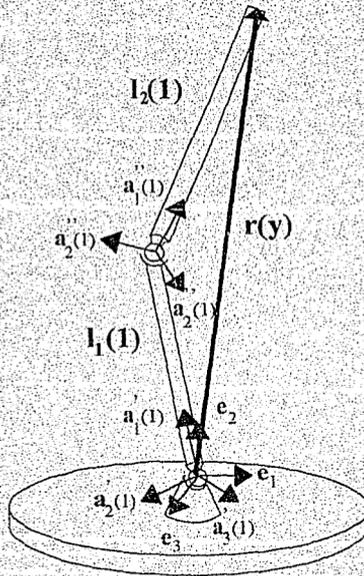


Figura 2.7 b). configuración 2

Por lo tanto las bases $\{\mathbf{e}_j\}, \{\mathbf{e}_j''\}, j=1,2,3$, están dadas por $\{\mathbf{a}_j(1)\}, \{\mathbf{a}_j(2)\}, j=1,2,3$, como mostramos a continuación

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j^{(1)} &= T_v[\rho(\mathbf{P}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])] \\ \mathbf{a}_j^{(1)} &= T_v[\rho(\mathbf{P}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Donde \mathbf{P} está constituido por :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (P_0, P_1, P_2, P_3) \\ P_0 &= \cos \frac{\psi_1}{2}, \quad \mathbf{P}_v = \sin \frac{\psi_1}{2} \mathbf{b}_j' \cdot T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])], \end{aligned} \quad (2.38)$$

Observemos que :

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1 &= l_1 \bullet \mathbf{a}_1^{(1)} \\ \mathbf{l}_2 &= l_2 \bullet \mathbf{a}_1^{(1)} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por lo tanto el vector de posición $\mathbf{r}(\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^3$ queda expresado por :

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}) = l_1 \bullet T_v[\rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1]))] + l_2 \bullet T_v[\rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1])))] \quad (2.40)$$

c) Ahora la *configuración 3* mostrada en la figura (2.8), corresponde a una rotación de ángulo ψ_2 del eslabón 12 respecto a su eje de rotación \mathbf{e}'' definido en la base $\{\mathbf{e}_j\}$, $j=1,2,3$.

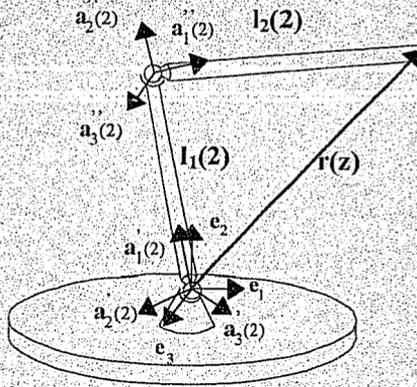


Figura 2.8 c) configuración 3

Por lo tanto las bases $\{\mathbf{a}_j^{(1)}\}$, $\{\mathbf{a}_j^{(2)}\}$, $j=1,2,3$; están dadas por $\{\mathbf{a}_j^{(2)}\}$, $\{\mathbf{a}_j^{(2)}\}$, $j=1,2,3$; como mostramos a continuación:

$$\mathbf{a}_j^{(2)} = \mathbf{a}_j^{(1)}$$

$$\mathbf{a}_j^{(2)} = T_v^{-1}[\rho(\mathbf{Q}, T_v^{-1}[\mathbf{a}_j^{(1)}])] \quad (2.41)$$

Donde el quaternion \mathbf{Q} está dado por:

$$\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$$

$$Q_0 = \cos \frac{\psi/2}, \quad \mathbf{Q}_v = \sin \frac{\psi/2} {2} \mathbf{c}_j \cdot T_v^{-1}[\rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])))] \quad (2.42)$$

Observemos que:

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{a}_1^{(2)}$$

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{a}_1^{(2)} \quad (2.43)$$

Por lo tanto el vector de posición $\mathbf{r}(z) \in \mathbf{R}^3$ queda expresado por :

$$\mathbf{r}(z) = l_1 \bullet T_v[\rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_i]))] + T_v[l_2 \bullet \rho(\mathbf{Q}, \rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_i]))))] \quad (2.44)$$

$$= l_1 \bullet T_v[(\mathbf{P} \star \mathbf{p}) \star T_v^{-1}[\mathbf{e}_i] \star (\overline{\mathbf{P} \star \mathbf{q}})] + l_2 \bullet T_v[(\mathbf{Q} \star \mathbf{P} \star \mathbf{q} \star \mathbf{p}) \star T_v^{-1}[\mathbf{e}_i] \star (\overline{\mathbf{Q} \star \mathbf{P} \star \mathbf{q} \star \mathbf{p}})] \quad (2.45)$$

El proceso es igual si se trata de tres cuerpos acoplados, y si se respeta la secuencia anterior puede deducirse y obtener la ecuación correspondiente, la cual resulta ser :

$$\mathbf{r}(\mathbf{f}) = l_1 \bullet T_v[\rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_i]))] + l_2 \bullet T_v[\rho(\mathbf{Q}, \rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_i]))))] + l_3 \bullet T_v[\rho(\mathbf{R}, \rho(\mathbf{Q}, \rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{r}, \rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_i])))))] \quad (2.46)$$

Donde los quaterniones están constituidos por:

$$\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2, P_3) \\ P_0 = \cos \frac{\psi_1}{2}, \quad \mathbf{P}_v = \sin \frac{\psi_1}{2} \mathbf{b}_j \bullet T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])], \quad (2.47)$$

$$\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \\ Q_0 = \cos \frac{\psi_2}{2}, \quad \mathbf{Q}_v = \sin \frac{\psi_2}{2} \mathbf{c}_j \bullet T_v[\rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])))] \quad , \text{ y} \quad (2.48)$$

$S = (S_0, S_1, S_2, S_3)$ es el quaternion que nos rota al eslabón 13.

$$S_0 = \cos \frac{\psi_3}{2}, \quad S_j = \sin \frac{\psi_3}{2} d_j''' \cdot T_v''' [\rho(Q, \rho(P, \rho(r, \rho(q, \rho(p, T_v^{-1}[e_j])))))] \quad (2.49)$$

El ángulo ψ_3 es la cantidad de rotación aplicada al eslabón 13 alrededor de un eje d''' definido sobre dicho eslabón, esto es sobre la base $\{e_j''\}$, $j=1,2,3$, que le afecta sólo al eslabón 13.

Modelo II

Este modelo requiere conocer la posición del extremo final de la cadena cinemática mediante la secuencia de rotaciones mostrada en la figura 2.9.

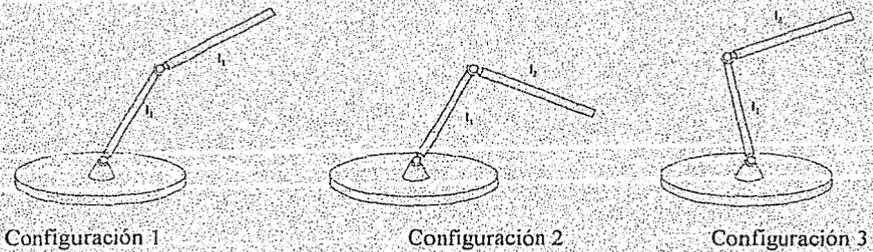


Figura 2.9 Configuraciones del eslabonamiento en el Modelado II.

En cada configuración identificaremos un vector de posición $r(x)$, $r(y)$ y $r(z)$ respectivamente, formados de la base al extremo final del eslabón I_2 .

a) La *configuración 1* con la base global fija $\{e_j\}$, y las bases relativas $\{e'_j\}$, $\{e''_j\}$, $j=1,2,3$, se muestran en la figura 2.10.

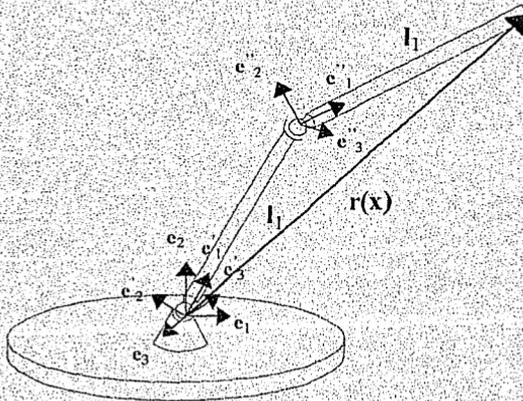


Figura 2.10 a) Configuración 1

En esta ocasión utilizaremos las relaciones entre bases expuestas en 2.27, esto es:

$$\begin{aligned} e_i &= T_v[\rho(p, T_v^{-1}[e_i])] \quad \text{y} \\ e''_i &= T_v[\rho(q, T_v^{-1}[e_i])] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Entonces el vector de posición $r(x) \in \mathbf{R}^3$ en la *configuración 1* está dado por:

$$r(x) = l_1 \bullet e'_1 + l_2 \bullet e''_1 \quad (2.51)$$

$$= l_1 \cdot T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1])] + l_2 \cdot T_v[\rho(\mathbf{q}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1])] \quad (2.52)$$

siendo evidente la diferencia con el vector de posición $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ del Modelo 1 mostrado en (2.34). Los cuaterniones $\mathbf{p}=(p_0, p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{q}=(q_0, q_1, q_2, q_3)$, tienen componentes que se calculan así:

$$\begin{aligned} p_0 &= \cos \frac{\theta_1}{2}, & \mathbf{p}_v &= \sin \frac{\theta_1}{2} \mathbf{u} \\ q_0 &= \cos \frac{\theta_2}{2}, & \mathbf{q}_v &= \sin \frac{\theta_2}{2} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.53)$$

b) La *configuración 2* mostrada en la Figura (2.11) corresponde a una rotación Ψ_2 del eslabón l2 respecto a su eje de rotación \mathbf{c} definido en la base $\{\mathbf{e}_j\}, j=1,2,3$.

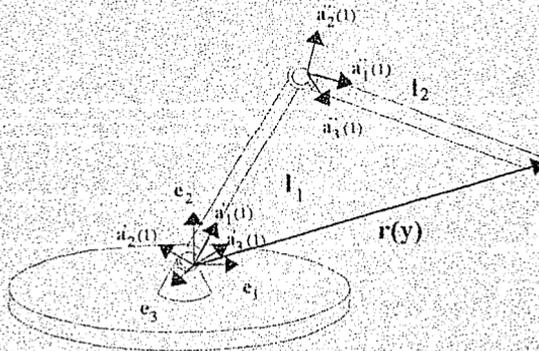


Figura 2.11 b) Configuración 2

Por lo tanto las bases $\{\mathbf{e}_j\}$, $\{\mathbf{e}_j''\}$, $j=1,2,3$, están dadas por $\{\mathbf{a}_j^{(1)}\}$, $\{\mathbf{a}_j^{(2)}\}$, $j=1,2,3$, como mostramos a continuación :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j^{(1)} &= \mathbf{e}_j \\ \mathbf{a}_j^{(2)} &= T_v[\rho(\mathbf{Q}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j''])] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Donde \mathbf{Q} está constituido por :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \text{ y} \\ Q_0 &= \cos \frac{\Psi_2}{2}, \quad Q_v = \sin \frac{\Psi_2}{2} \mathbf{e}_j \cdot T_v[\rho(\mathbf{q}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])], \end{aligned} \quad (2.55)$$

Observemos que :

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1 &= \mathbf{l}_1 \bullet \mathbf{a}_1^{(1)} \\ \mathbf{l}_2 &= \mathbf{l}_2 \bullet \mathbf{a}_1^{(1)} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Por lo tanto el vector de posición $\mathbf{r}(\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^3$ queda expresado por :

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{l}_1 \bullet T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])] + \mathbf{l}_2 \bullet T_v[\rho(\mathbf{Q}, \rho(\mathbf{q}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j]))] \quad (2.57)$$

c) Ahora la *configuración* 3 mostrada en la figura (2.12), corresponde a una rotación de ángulo Ψ_1 del eslabón 11 respecto a su eje de rotación \mathbf{b}' definido en la base $\{\mathbf{e}_j\}$, $j=1,2,3$.

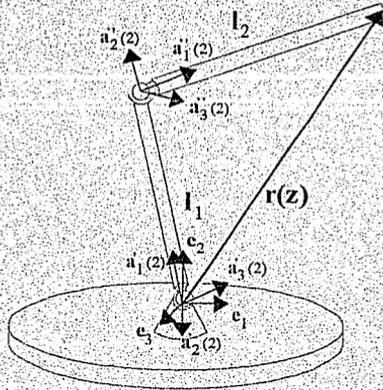


Figura 2.12 c) Configuración 3

Por lo tanto las bases $\{\mathbf{a}_j^{(1)}\}$, $\{\mathbf{a}_j^{(2)}\}$, $j=1,2,3$; están dadas por $\{\mathbf{a}_j^{(2)}\}$, $\{\mathbf{a}_j^{(1)}\}$, $j=1,2,3$; como mostramos a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j^{(2)} &= T_v[\rho(\mathbf{P}, T_v^{-1}[\mathbf{a}_j^{(1)}])] \\ \mathbf{a}_j^{(1)} &= T_v[\rho(\mathbf{P}, T_v^{-1}[\mathbf{a}_j^{(2)}])] \end{aligned} \quad (2.58)$$

Donde el quaternion \mathbf{P} está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (P_0, P_1, P_2, P_3) \quad y \\ P_0 &= \cos \frac{\Psi_1}{2}, \quad \mathbf{P}_v = \sin \frac{\Psi_1}{2} \mathbf{a}_j \cdot T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])] \end{aligned} \quad (2.59)$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1 &= l_1 \cdot \mathbf{a}_1^{(2)} \\ \mathbf{l}_2 &= l_2 \cdot \mathbf{a}_2^{(2)} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Por lo tanto el vector de posición $\mathbf{r}(\mathbf{z}) \in \mathbf{R}^3$ queda expresado por :

$$\mathbf{r}(\mathbf{z}) = \mathbf{l}_1 \bullet T_v[\rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1]))] + \mathbf{l}_2 \bullet T_v[\rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{Q}, \rho(\mathbf{q}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1])))] \quad (2.61)$$

Observemos la diferencia entre los modelos resultantes de las dos secuencias, las ecuaciones (2.61) y (2.44), dada a continuación :

$$\mathbf{r}(\mathbf{z}) = \mathbf{l}_1 \bullet T_v[\rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1]))] + T_v[\mathbf{l}_2 \bullet \rho(\mathbf{Q}, \rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1]))))] \quad (2.62)$$

Esta diferencia tiene que ver con el orden en la multiplicación de los cuaterniones \mathbf{P} y \mathbf{Q} , y dado que la multiplicación no es conmutativa ; esto resulta en ángulos diferentes durante el movimiento de los eslabones \mathbf{l}_1 y \mathbf{l}_2 .

En este capítulo desarrollamos la modelación general de eslabonamientos, que es aplicable a los sistemas mecánicos de cadena cerrada con la particularidad de que el vector de posición $\mathbf{r}(\mathbf{z})$ es igual al vector nulo $\mathbf{0}$, lo que hace necesario un planteamiento del modelado de los sistemas mecánicos de cadena cerrada de acuerdo al resultado que se quiera obtener. Esto lo observaremos en los siguientes capítulos donde veremos la aplicación del modelado planteado.

CAPÍTULO

III

APLICACIÓN DEL MODELADO AL ANÁLISIS CINEMÁTICO DE UN SISTEMA MECÁNICO DE CUATRO BARRAS.

III. APLICACIÓN DEL MODELADO AL ANÁLISIS CINEMÁTICO DE UN SISTEMA MECÁNICO DE CUATRO BARRAS.

III.1 MODELACIÓN DEL SISTEMA MECÁNICO DE CUATRO BARRAS.

El mecanismo que utilizaremos para realizar un análisis cinemático a través de su ciclo de operación, utilizando la modelación desarrollada en el capítulo II es un sistema mecánico plano de cuatro barras con juntas rotacionales, cuyo eslabón l_4 se mantiene fijo y a 16° respecto a la horizontal como lo muestra la figura 3.1.

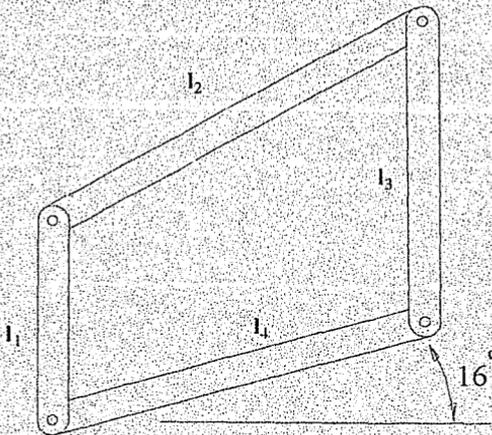


Figura 3.1 Sistema mecánico de cuatro eslabones.

En la figura 3.2 mostramos el sistema de referencia global $\{e_j\}$, $j=1,2,3$, y los sistemas de referencia locales $\{e_j^I\}$, $\{e_j^II\}$ y $\{e_j^{III}\}$, $j=1,2,3$, en cada eslabón. Además

observemos que el vector $r(x) \in \mathcal{R}^3$ mostrado en la misma figura puede expresarse mediante la siguiente forma vectorial:

$$r(x) = l_1 + l_2 = l_4 + l_3 \quad (3.1)$$

Por lo tanto, se obtiene que

$$l_1 + l_2 - l_4 - l_3 = 0 \quad (3.2)$$

Esta última ecuación se conoce como la ecuación de lazo del mecanismo.

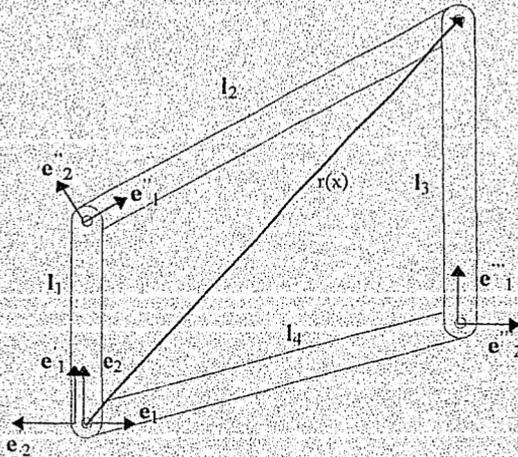


Figura 3.2. Sistemas global y locales definidos en el sistema mecánico de cuatro barras.

Al expresar la ecuación (3.2) en términos de los vectores con respecto a las bases locales mostradas en la figura, obtenemos:

$$l_1 \cdot \mathbf{e}_1 + l_2 \cdot \mathbf{e}_2 + l_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Los sistemas relativos $\{\mathbf{e}_j\}$, $\{\mathbf{e}'_j\}$ y $\{\mathbf{e}''_j\}$, $j=1,2,3$, serán obtenidos mediante una rotación de la base $\{\mathbf{e}_j\}$, $j=1,2,3$, como mostramos en (2.27). La rotación de la base $\{\mathbf{e}_j\}$, $j=1,2,3$, para obtener los sistemas relativos será una rotación en todos los casos de eje $\mathbf{e}_3 = (1,0,0)$ como observamos en la figura (3.2), por lo que cada quaternion tendrá sólo dos parámetros

Primeramente consideremos la rotación de ángulo θ_1 para obtener la base $\{\mathbf{e}'_j\}$, $j=1,2,3$, la cual estará dada por:

$$\mathbf{e}'_j = T_v[\rho(\mathbf{p}, T_v^{-1}[\mathbf{e}_j])] \quad (3.4)$$

El quaternion \mathbf{p} asociado en este caso está dado por:

$$p_0 = \cos \frac{\theta_1}{2} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_v = \sin \frac{\theta_1}{2} \mathbf{e}_3 \quad (3.5)$$

Posteriormente rotemos la base $\{\mathbf{e}'_j\}$, $j=1,2,3$, un ángulo θ_2 para obtener la base $\{\mathbf{e}''_j\}$, $j=1,2,3$, como se indica a continuación:

$$\mathbf{e}''_j = T_v[\rho(\mathbf{q}, T_v^{-1}[\mathbf{e}'_j])] \quad (3.6)$$

El quaternion q está dado por :

$$q_0 = \cos \frac{\theta_2}{2}, \quad q_v = \sin \frac{\theta_2}{2} e_3 \quad (3.7)$$

Finalmente la base global $\{e_j\}$, $j=1,2,3$, es rotada un ángulo θ_3 , esto es para obtener

$$e_j''' = T_v[r, T_v^{-1}[e_j]] \quad (3.8)$$

El quaternion r está dado por :

$$r_0 = \cos \frac{\theta_3}{2}, \quad r_v = \sin \frac{\theta_3}{2} e_3 \quad (3.9)$$

En la figura 3.3 mostramos al sistema mecánico de cuatro barras no deformado y una configuración deformada.

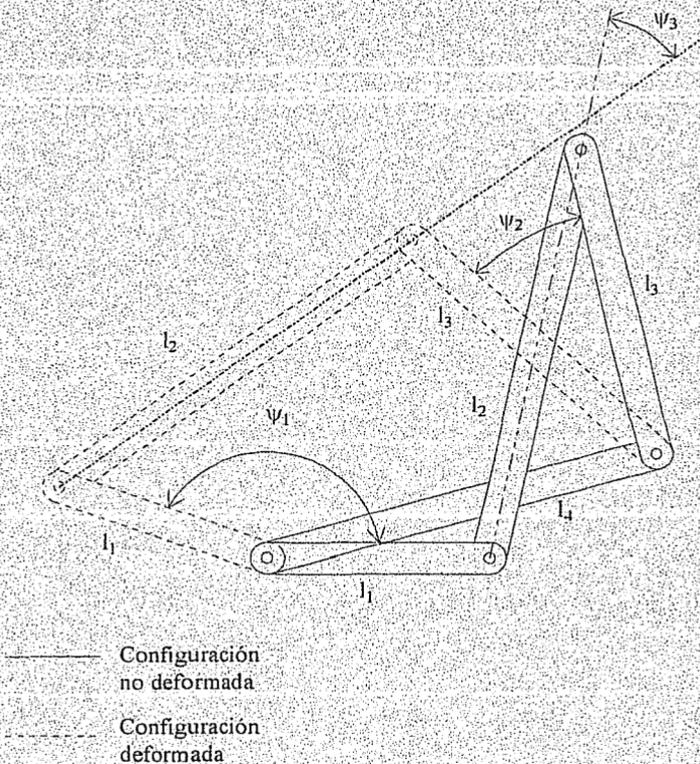


Figura 3.3 Deformación del sistema mecánico a partir de una posición inicial

Introduciendo en la ecuación la rotación de los eslabones l_1, l_2 y l_3 representado por los cuaterniones \mathbf{P} , \mathbf{Q} , y \mathbf{R} respectivamente; la ecuación de lazo del sistema mecánico de cuatro barras es:

$$\begin{aligned}
 & l_1 \cdot T_v[\rho(\mathbf{P}, \rho(p, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1]))] + l_2 \cdot T_v[\rho(\mathbf{Q}, \rho(q, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1]))] - \\
 & l_4 \cdot \mathbf{e}_j - l_3 \cdot T_v[\rho(\mathbf{R}, \rho(r, T_v^{-1}[\mathbf{e}_1]))] = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ésto es igual a :

$$l_1 \cdot T_v[\mathbf{P}^* \mathbf{p}^* T_v^{-1}[\mathbf{e}_i] * \overline{\mathbf{P}^* \mathbf{p}}] + l_2 \cdot T_v[\mathbf{Q}^* \mathbf{q}^* T_v^{-1}[\mathbf{e}_i] * \overline{\mathbf{Q}^* \mathbf{q}}] - l_{ij} \cdot \mathbf{e}_j - T_v[l_3 \cdot \mathbf{R}^* \mathbf{r}^* T_v^{-1}[\mathbf{e}_i] * \overline{\mathbf{R}^* \mathbf{r}}] = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Donde :

$$\mathbf{P} = (P_0, 0, 0, P_3), \mathbf{Q} = (Q_0, 0, 0, Q_3) \text{ y } \mathbf{R} = (R_0, 0, 0, R_3) \quad (3.12)$$

y

$$\begin{aligned} P_0 &= \cos \frac{\psi_1}{2}, & P_3 &= \sin \frac{\psi_1}{2} \mathbf{e}_3, \\ Q_0 &= \cos \frac{\psi_2}{2}, & Q_3 &= \sin \frac{\psi_2}{2} \mathbf{e}_3, \text{ y} \\ R_0 &= \cos \frac{\psi_3}{2}, & R_3 &= \cos \frac{\psi_3}{2} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Con esta ecuación de lazo y las normas de los cuaterniones formamos el siguiente sistema de ecuaciones no lineales.

$$l_1 \cdot T_v[\mathbf{P}^* \mathbf{p}^* T_v^{-1}[\mathbf{e}_i] * \overline{\mathbf{P}^* \mathbf{p}}] + l_2 \cdot T_v[\mathbf{Q}^* \mathbf{q}^* T_v^{-1}[\mathbf{e}_i] * \overline{\mathbf{Q}^* \mathbf{q}}] - l_{ij} \cdot \mathbf{e}_j - T_v[l_3 \cdot \mathbf{R}^* \mathbf{r}^* T_v^{-1}[\mathbf{e}_i] * \overline{\mathbf{R}^* \mathbf{r}}] = \mathbf{0}$$

$$\|\mathbf{P}\| = 1$$

$$\|\mathbf{Q}\| = 1$$

$$\|\mathbf{R}\| = 1$$

(3.14)

Ahora observemos la figura 3.4 para plantear el problema siguiente:

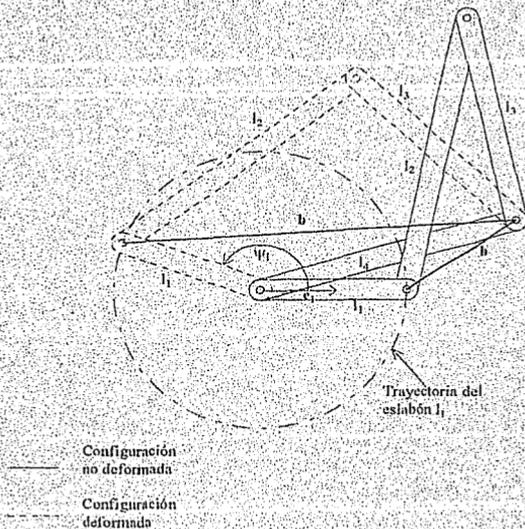


Figura 3.4 Planteamiento del análisis cinemático del sistema mecánico.

Dado $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^3$ y las dimensiones de los eslabones l_1, l_2, l_3 y l_4 ; encontrar $\mathbf{Q}=(Q_0,0,0,Q_3)$ y $\mathbf{R}=(R_0,0,0,R_3)$. Para esto es necesario tener conocido a $b = l_1 - l_4$, entonces el valor de $\mathbf{P}=(P_0,0,0,P_3)$ los proporcionaremos dentro del rango permitido de rotación como muestra el ángulo ψ_1 en la figura 3.4.

Con esto hemos planteado el análisis cinemático del sistema mecánico de cuatro barras, el cual se reduce a resolver un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas proveniente del sistema de ecuaciones mostrado en 3.14. Este problema lo resolveremos con un ejemplo en particular el cual esta determinado con los siguientes datos:

$$l_1 = 20 \text{ cm}, l_2 = 40 \text{ cm}, l_3 = 30 \text{ cm} \text{ y } l_4 = 35 \text{ cm}$$

la posición no deformada está determinada con

$$p_0 = 1, p_3 = 0;$$

$$q_0 = 0.827093, q_3 = 0.562065 \quad y$$

$$r_0 = 0.746608, r_3 = 0.665264.$$

Ahora que ya tenemos todo definido, vamos a calcular las ecuaciones resultantes del planteamiento y resolverlas de acuerdo a las condiciones que presentan. Esto lo realizaremos con Mathematica® donde indicaremos en cada paso lo que se está realizando. Los comandos utilizados son explicados brevemente en el Apéndice A.

II.2 CÓDIGO COMPUTACIONAL

En esta parte presentaremos el código computacional correspondiente al análisis del sistema mecánico de cuatro barras presentado en la sección anterior.

a) Primero definimos la operación de multiplicación de los cuaterniones y el conjugado de los mismos; la operación suma no se define ya que corresponde a la misma suma de vectores definida en Mathematica®:

In[1]

```
Quater[P_,Q_]:= { P[[1]] Q[[1]]-P[[2]] Q[[2]]-P[[3]] Q[[3]]-P[[4]] Q[[4]] ,  
P[[2]] Q[[1]]+P[[1]] Q[[2]]-P[[4]] Q[[3]]+P[[3]] Q[[4]] ,  
P[[3]] Q[[1]]+P[[4]] Q[[2]]+P[[1]] Q[[3]]-P[[2]] Q[[4]] ,  
P[[4]] Q[[1]]-P[[3]] Q[[2]]+P[[2]] Q[[3]]+P[[1]] Q[[4]] }
```

```
ConQ[R_]:= { R[[1]],-R[[2]],-R[[3]],-R[[4]] }
```

b) Definiremos en esta parte los cuaterniones y sus multiplicaciones de acuerdo a la ecuación 3.14. Observemos que las operaciones entre los cuaterniones las dividimos en dos partes aprovechando las propiedades de los mismos, para después operarlos y conjuntarlos totalmente. Por ejemplo la parte que le corresponde al eslabón l_1 hemos calculado primero $P * p$ referenciándolo con la variable Pp , a este resultado le aplicamos la operación $ConQ$ para obtener su conjugado, llamándolo $conPp$ y después operamos estas dos variables con el elemento $e1$ e identificándolo con la variable $nv1$, donde $nv1$ es igual a $Pp * e1 * conPp$.

In[3]

```
ClearAll[p0,p3,q0,q3,r0,r3,P0,P3,Q0,Q3,R0,R3]
```

```
p0=1,p3=0;
```

```
q0=0.827093; q3=-.562065;
```

```
r0= 0.746608; r3=0.665264;
```

```
p={p0,0,0,p3};q={q0,0,0,q3};r={r0,0,0,r3};
```

```
P={P0,0,0,P3};Q={Q0,0,0,Q3};R={R0,0,0,R3};
```

```
e1={0,1,0,0};
```

```
Pp=Quater[P,p];
```

```
conPp=ConQ[Pp];
```

```
Qq=Quater[Q,q];
```

```
conQq=ConQ[Qq];
```

```
Rr=Quater[R,r];
```

```
conRr=ConQ[Rr];
```

```
nv1= Quater[Pp,Quater[e1,conPp]];
```

```
nv2= Quater[Qq,Quater[e1,conQq]];
```

```
nv3= Quater[Rr,Quater[e1,conRr]];
```



c) A estas variables $nv1$, $nv2$ y $nv3$ sólo les falta aplicarles la dimensión del eslabón para obtener la representación matemática de cada eslabón que al conjuntarlos de acuerdo a la ecuación planteada anteriormente nos proporcionará el modelo del mecanismo de cuatro barras; la cual presentamos a continuación llamándola *pd* con el propósito de manipularla:

In[19]

```
LL1=0.2 ; LL2=0.4 ; LL3=0.3 ;
L4x=0.35; L4y=0.1; LL4={0,L4x,L4y,0};
```

```
pd=Simplify[LL1 nv1 + LL2 nv2-LL4-LL3 nv3]
```

Out[21]

```
{0. -0.35 + 0.2 P02 - 0.2 P32 + 0.147266 Q02 - 0.743808 Q0 Q3 - 0.147266 Q32 - 0.0344542 R02 +
0.59603 R0 R3 + 0.0344542 R32, -0.1 + 0.4 P0 P3 + 0.371904 Q02 + 0.294533 Q0 Q3 - 0.371904
Q32 - 0.298015 R02 - 0.0689084 R0 R3 + 0.298015 R32, 0}
```



d) El sistema de ecuaciones no lineales lo resolveremos con el método de Newton que se explica en el Apéndice B y que mostraremos a continuación programado en Mathematica®, pero es necesario primero calcular el *Jacobiano* del sistema y manipular las ecuaciones para aplicar dicho método.

Cada ecuación del sistema la identificaremos con *fffj*, donde $j=1,2,3,4$; y todas ellas se agruparán en un vector de ecuaciones llamado *vec*. Las ecuaciones *fffj* las derivaremos respecto a cada parámetro incógnita quedando identificadas con *mjjj*, $j=1,2,3,4$; las cuales forman al final el *Jacobiano*. La variable *dat* contiene a las incógnitas del sistema y la variable *h* calcula un arreglo que se expone en el Apéndice.

In[22]

```
ClearAll[P0,P3,Q0,Q3,R0,R3]
```

```
f[1]=N[pd[[2]]];  
f[2]=N[pd[[3]]];  
f[3]=N[Q0^2+Q3^2-1];  
f[4]=N[R0^2+R3^2-1];  
m[1]=Table[D[f[i],R3],{i,4}];  
m[2]=Table[D[f[i],Q3],{i,4}];  
m[3]=Table[D[f[i],Q0],{i,4}];  
m[4]=Table[D[f[i],R0],{i,4}];  
vec=N[{f[1],f[2],f[3],f[4]}];  
baj=N[{m[1],m[2],m[3],m[4]}];  
jab=Transpose[baj];  
dat={R3,Q3,Q0,R0};  
b= N[jab.dat-vec];
```

e) Ahora estamos posibilitados de calcular los parámetros $Q0$, $Q3$, $R0$ y $R3$ con el Método de Newton, pero necesitamos proponer valores iniciales de dichos parámetros para que este método que es iterativo pueda iniciar, en este caso calcularemos los parámetros iniciales considerando que las barras no han efectuado movimiento, siendo los ángulos ψ_2 y ψ_3 iguales a cero, recordemos que estos ángulos están referidos con respecto a la posición inicial dada. Entonces los parámetros son:

In[36]

```
Q0=N[Cos[0]];Q3=N[Sin[0]];  
R0=N[Cos[0]];R3=N[Sin[0]];
```

f) A continuación indicaremos el valor de los parámetros P_0 y P_3 , que son los parámetros que nos indican el ángulo y la orientación del eje de rotación del eslabón l_1 para los cuales queremos conocer los parámetros de las otras barras. En lo que se refiere a la orientación del eje de rotación, por las características físicas del mecanismo éste se encuentra siempre orientado paralelo al elemento e_3 de la base e_1 del sistema de referencia global; y por lo mismo queda indicado cuando declaramos sólo la existencia de los parámetros P_0 y P_3 ; entonces calcularemos los parámetros mencionados para cuando el ángulo ψ_1 del eslabón l_1 se encuentra a 20° con respecto a la horizontal.

In[38]

```
P0=N[Cos[20 Pi/360]];P3=N[Sin[20 Pi/360]];
```

g) El método de Newton arreglado como explicamos en el Apéndice B para utilizar una descomposición LU de la matriz del jacobiano del sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnita queda formado y programado en Mathematica® como mostramos a continuación :

In[39]

```
checa=0;ww=0;
While[checa<4,
checa=0;
For[i=1,i<5,i++,l[i,1]=jab[[i,1]]];
For[j=1,j<5,j++,u[j]=jab[[1,j]]/l[1,1]];
For[j=2,j<5,j++,
  For[i=j,i<5,i++,
    tl=0;
    For[k=1,k<j,k++,tl=tl+l[i,k]*u[k,j]];
    l[i,j]=jab[[i,j]]-tl;
  ];
u[j,j]=1;
```

```

For[i=j+1,i<5,i++,
  tu = 0;
  For[k=1,k<j,k++,tu = tu + 1/[j,k]*u[k,i],
    u[j,i] = (jab[[j,i]] - tu )/[j,j];
  ];
];
v[1]=b[[1]]/l[1,1],
For[i=2,i<5,i++,
  s=0;
  For[k=1,k<i,k++,
    s=s+1/[i,k]*v[k];
  ];
  v[i]=(b[[i]]- s)/l[i,i];
];
x[4]=v[4],
If[Abs[N[x[4]-dat[[4]]]]<0.001,checa++];
For[j=3,j>0,j--,
  s=0;
  For[k=j+1,k<5,k++,s=s+u[j,k]*x[k] ];
  x[j]=v[j]-s;
  error=Abs[N[x[j]-dat[[j]]]];
  If[error<0.001,checa++];
];

R3=N[x[1]];
Q3=N[x[2]];
Q0=N[x[3]];
R0=N[x[4]];
ww++;
];

```

h) Después de que termina la ejecución del programa podemos visualizar los resultados obtenidos por medio de la instrucción *Print[]*, así sean los parámetros a calcular o algún otro dato como el número de iteraciones efectuadas, o la sustitución de los resultados en la ecuación del mecanismo al invocar su variable, y verificar en cierta forma si se ha logrado un resultado correcto.

In[41]

```
Print[" R3 ",N[R3]];
Print[" R0 ",N[R0]];
Print[" Q3 ",N[ Q3]];
Print[" Q0 ",N[ Q0]];
Print["iteraciones      ",ww];
Print[N[pd]]
```

R3 -0.241322

R0 0.970446

Q3 -0.214607

Q0 0.976701

iteraciones 3

{0, -1.61466 10⁻⁷, 1.96087 10⁻⁷, 0}

i) Como comentamos anteriormente, los parámetros P0, P3 , R0 y R3 nos indican respectivamente la rotación realizada respecto a la posición inicial. Si lo que deseamos conocer es la orientación respecto al sistema de referencia global, y mas específicamente con respecto al elemento e_1 , entonces invoquemos a las variables nv1, nv2 y nv3 que contienen dicha información, ya que es el resultado de realizar el cambio de base y la rotación de cada barra respectivamente. Claro que si deseamos calcular el ángulo necesitamos involucrar los valores de los vectores utilizando el tangente inverso; además

tomemos en cuenta que este resultado está en radianes, necesitamos hacer el cambio a grados si queremos un resultado fácil de apreciar:

In[47]

nv1

nv2

nv3

$N[\text{ArcTan}[\text{nv2}[[3]]/\text{nv2}[[2]]] 180/\text{Pi}$

$N[\text{ArcTan}[\text{nv3}[[3]]/\text{nv3}[[2]]] 180/\text{Pi}+180]$

Out[47]

{0, 0.939693, 0.34202, 0}

Out[48]

{0, 0.593244, 0.805023, 0}

Out[49]

{0, 0.250788, 0.968043, 0}

Out[50]

53.6124

Out[51]

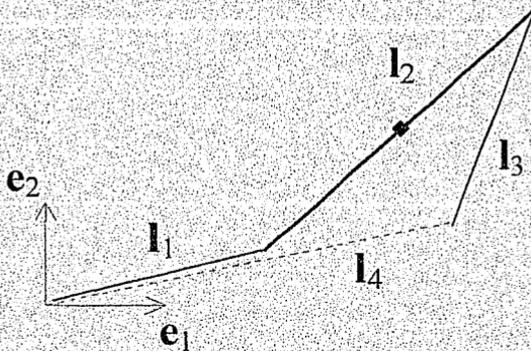
255.476



j) Podemos visualizar esquemáticamente al eslabonamiento si graficamos líneas entre los extremos de los eslabones; estos los calculamos sustituyendo los resultados en segmentos de la ecuación del mecanismo, de tal manera que al calcularlos y utilizar los comandos gráficos de Mathematica® obtengamos dicha representación. Así las siguientes instrucciones nos sirven para mostrar en Mathematica® el trazado de un punto que representa la mitad del eslabón l₂ y las tres líneas que representan a los eslabones móviles; estas líneas se han trazado separadamente con el propósito de cambiar su grosor en cualquier momento para resaltar una parte del mismo en cualquier momento. El eslabón l₁ no se dibujo queriendo dar atención con esto sólo a lo eslabones que cambian durante el ciclo de operación del mecanismo.

In[52]

```
v1=Show[Graphics[{
PointSize[0.1],Point[{{(LL1 nv1 + LL2/2 nv2)[[2]],
(LL1 nv1 + LL2/2 nv2)[[3]]}],
{AbsoluteThickness[1.2],Line[{{0,0},{LL1 nv1[[2]],LL1 nv1[[3]]}},
{AbsoluteThickness[1.5],Line[{{LL1 nv1[[2]],LL1 nv1[[3]],
(LL1 nv1 + LL2 nv2)[[2]],(LL1 nv1 + LL2 nv2)[[3]]}},
{AbsoluteThickness[1.2],Line[{{(LL1 nv1 + LL2 nv2)[[2]],
(LL1 nv1 + LL2 nv2)[[3]],{(LL1 nv1 + LL2 nv2-LL3 nv3)[[2]],
(LL1 nv1 + LL2 nv2-LL3 nv3)[[3]]}}}}
}}
```

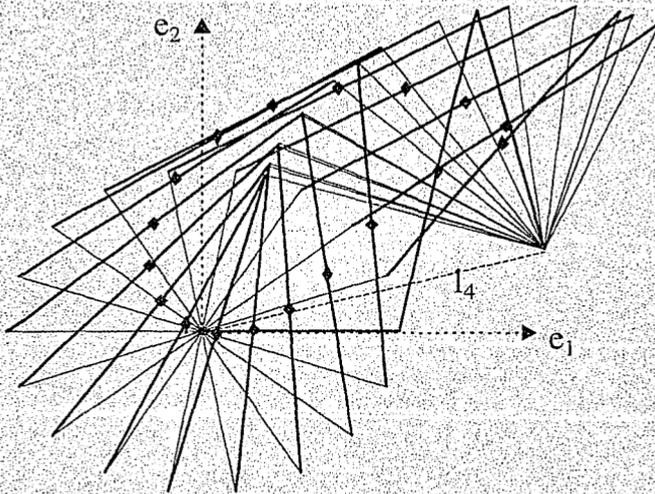


k) De esta forma se han calculado todos los parámetros a partir de que el eslabón se encuentra a 0° con respecto al eje x del sistema de referencia global hasta que haya dado una vuelta en períodos de 20° , quedando registrados los resultados del valor de los parámetros

Q0, Q3, R0, R3, ángulo de l_2 y l_3 respecto al eje x, y la posición del punto medio de la barra l_2 , en la siguiente tabla.

Ψ_1 en grados	Q0	Q3	R0	R3	\angle de l_2 en grados	\angle de l_3 en grados	Posición del punto medio de l_2 (x, y)
0	1	0	1	0	78	103.405	(24.025, 19.5913)
20	0.976701	-0.214607	0.970446	-0.241322	53.6123	75.476	(30.6588, 22.9408)
40	0.939175	-0.343438	0.94983	-0.312766	38.2245	66.953	(31.0327, 25.2306)
60	0.920047	-0.391809	0.964762	-0.263124	32.2632	72.894	(26.9121, 27.5967)
80	0.913021	-0.407914	0.986003	-0.166726	30.2497	84.21	(20.7497, 29.7716)
100	0.912449	-0.40919	0.998627	-0.052390	30.0895	97.3987	(13.8319, 29.7232)
120	0.916147	-0.400843	0.997791	0.066428	31.1356	111.023	(7.11893, 27.6618)
140	0.923467	-0.383679	0.983521	0.180796	33.274	124.237	(1.40026, 23.8286)
160	0.934354	-0.356346	0.959004	0.283393	36.645	136.331	(-2.74697, 18.7776)
180	0.948642	-0.316353	0.929769	0.368142	41.5124	146.607	(-5.02375, 13.25456)
200	0.965217	-0.26145	0.902306	0.431095	48.0852	154.479	(-5.43336, 8.04238)
220	0.981474	-0.191593	0.881875	0.471483	56.3059	159.666	(-4.2257, 3.78417)
240	0.993915	-0.110153	0.871053	0.491188	65.7491	162.242	(-1.78533, 0.914602)
260	0.999724	-0.023479	0.87033	0.492469	75.7066	162.411	(1.46479, -0.315272)
280	0.998205	0.059888	0.879713	0.475506	85.2642	160.19	(5.1242, 0.235564)
300	0.991693	0.128626	0.899853	0.436194	93.1778	155.128	(8.8913, 2.64874)
320	0.986245	0.165293	0.931948	0.362593	97.4259	145.924	(12.736, 0.97652)
340	0.990386	0.138329	0.97358	0.228346	94.2997	129.804	(17.2944, 13.1033)

l) De igual forma se han graficado cada resultado y agrupado en una sola figura todos estos datos, dando como resultado el ciclo de operación del mecanismo y la trayectoria del punto medio del eslabón l_2 .



- ◆ Trayectoria del punto medio del eslabón l_2



Con esto hemos mostrado la manera de realizar el análisis de un mecanismo en particular, siendo éste el mecanismo de cuatro barras, dejando en claro la utilización del modelado y la sencillez con la que se aplica y dejando abierto a la imaginación los diferentes tipos de cálculo que se pueden obtener de los resultados del análisis del mecanismo para pasar a plantear la utilización del modelado a la síntesis de conducción de cuerpo rígido.

CAPÍTULO

IV

APLICACIÓN DEL MODELADO A LA SÍNTESIS DE
SISTEMAS MECÁNICOS PARA CONDUCCIÓN DE
CUERPO RÍGIDO.

IV. APLICACIÓN DEL MODELADO A LA SÍNTESIS DE SISTEMAS MECÁNICOS PARA CONDUCCIÓN DE CUERPO RÍGIDO

Existen muchas situaciones en el diseño de dispositivos en los cuales es necesario guiar un cuerpo rígido a través de una serie de posiciones específicas, y esto, generalmente es resuelto con un sistema mecánico que al efectuar su movimiento cumple con las posiciones específicas. El diseño de estos sistemas mecánicos requiere resolver una síntesis cinemática para encontrar las dimensiones del sistema mecánico que cumpla las restricciones con un error muy pequeño. Lo que hace necesario plantear un método de síntesis de aplicación clara con operaciones acordes con la física del problema, y en este capítulo se expondrá la manera de realizar una síntesis de conducción de cuerpo rígido con un sistema mecánico de cuatro eslabones.

IV.1 PLANTEAMIENTO DE LA SÍNTESIS DE CONDUCCIÓN DE CUERPO RÍGIDO

Para iniciar una síntesis primero es necesario tener planteado el problema a resolver con sus datos completos. Entonces resolveremos la conducción de un cuerpo a través de tres posiciones en el espacio especificadas con las coordenadas de un punto x del cuerpo y el ángulo del cuerpo con respecto a la horizontal en las tres posiciones. Además se tiene también como dato las coordenadas de los puntos b y d donde rotarán los eslabones unidos al eslabón fijo; como puede verse en la figura 4.1.

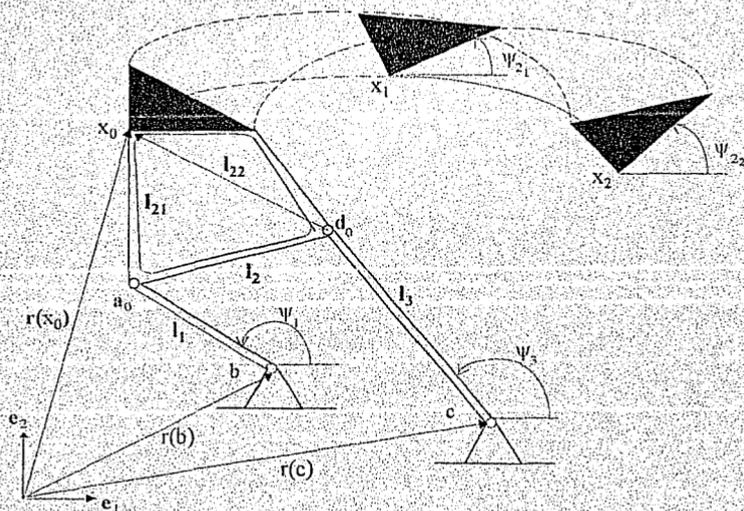


Figura 4.1 Síntesis de conducción de cuerpo rígido.

Primero observemos que en la posición inicial del mecanismo obtendremos dos relaciones del punto x_0 , dadas por

$$\mathbf{r}(b) + \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_{21} = \mathbf{r}(x_0) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{r}(c) + \mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_{22} = \mathbf{r}(x_0) \quad (4.2)$$

Después esta posición se deformará para alcanzar al punto x_1 . La deformación se realiza a través de las rotaciones caracterizadas por los cuaterniones $\mathbf{P}[\mathbf{l}_1]$, $\mathbf{Q}[\mathbf{l}_1]$ y $\mathbf{R}[\mathbf{l}_1]$, de los vectores \mathbf{l}_1 , \mathbf{l}_2 y \mathbf{l}_{21} , y \mathbf{l}_3 respectivamente, como puede verse en la figura 4.2.

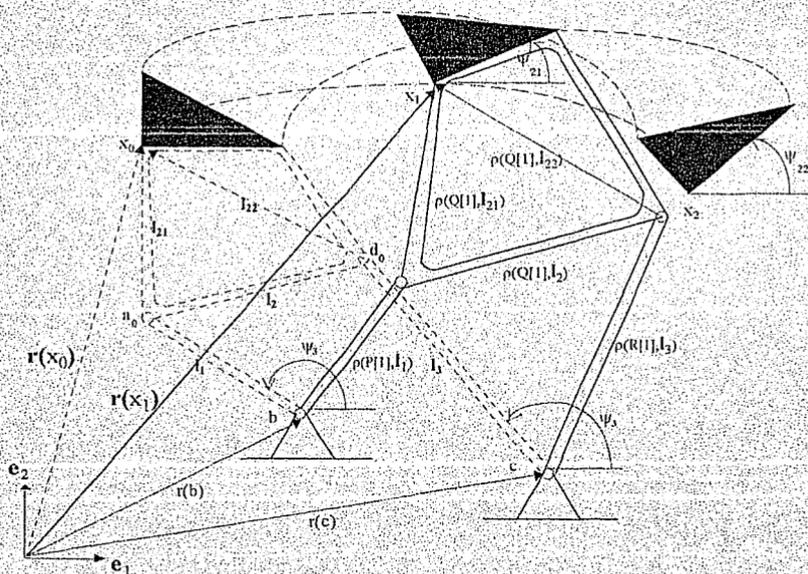


Figura 4.2: Primera deformación del sistema mecánico.

Por lo tanto, las relaciones respecto al punto x_1 están dadas por:

$$r(b) + T_v[\rho(P[1], T_v^{-1}[I_1])] + T_v[\rho(Q[1], T_v^{-1}[I_{21}])] = r(x_1) \quad (4.3)$$

$$r(c) + T_v[\rho(R[1], T_v^{-1}[I_3]) + T_v[\rho(Q[1], T_v^{-1}[I_{22}])] = r(x_1) \quad (4.4)$$

Por último el mecanismo se deformará hasta el punto r_2 a través de las rotaciones caracterizadas por $P[2]$, $Q[2]$ y $R[2]$, de los mismos vectores mencionados anteriormente, como se muestra en la figura 4.3:

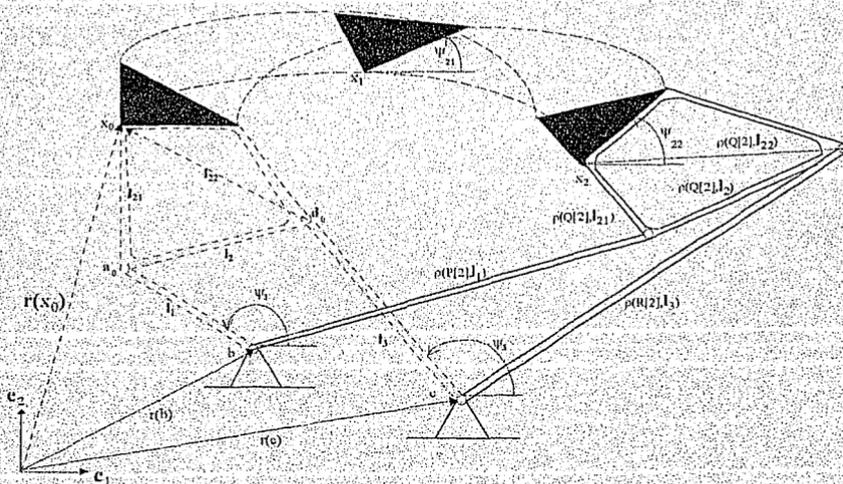


Figura 4.3. Segunda deformación del sistema mecánico.

Entonces las relaciones respecto al punto x están dadas por:

$$r(b) + T_v[\rho(P[2], T_v^{-1}[I_{11}])] + T_v[\rho(Q[2], T_v^{-1}[I_{21}])] = r(x_2) \quad (4.5)$$

$$r(c) + T_v[\rho(R[2], T_v^{-1}[I_3]) + T_v[\rho(Q[2], T_v^{-1}[I_{22}])] = r(x_2) \quad (4.6)$$

Con las relaciones (4.4), (4.5), (4.6) y (4.7) y las normas de los cuaterniones $P[1]$, $P[2]$, $R[1]$ y $R[2]$, y observando las relaciones de la figura 4.1, $I_1 = (a_0-b)$, $I_{21} = r_0 - a_0$, $I_3 = (d_0-c)$ y $I_{22} = (r_0-d_0)$, formaremos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$r(b) + T_v[\rho(P[1], T_v^{-1}[a_0-b])] + T_v[\rho(Q[1], T_v^{-1}[r_0 - a_0])] = r(x_1)$$

$$r(c) + T_v[\rho(R[1], T_v^{-1}[d_0-c]) + T_v[\rho(Q[1], T_v^{-1}[r_0-d_0])] = r(x_1)$$

$$r(b) + T_v[\rho(P[2], T_v^{-1}[a_0-b])] + T_v[\rho(Q[2], T_v^{-1}[r_0 - a_0])] = r(x_2)$$

$$r(c) + T_v[\rho(R[2], T_v^{-1}[d_0-c])] + T_v[\rho(Q[2], T_v^{-1}[r_0-d_0])] = r(x_2)$$

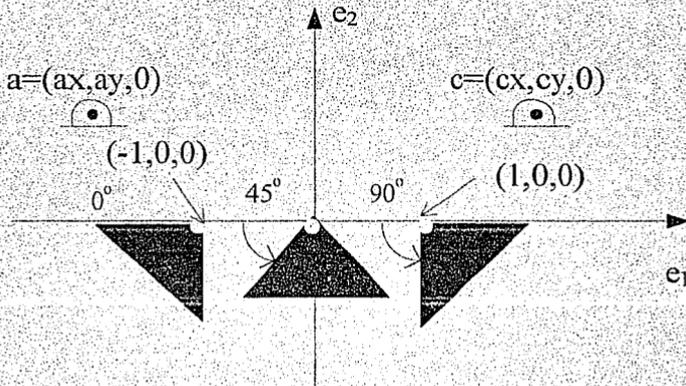
$$\|P[1]\| = 1$$

$$\|P[2]\| = 1$$

$$\|R[1]\| = 1$$

$$\|R[2]\| = 1 \quad (4.7)$$

Este es un sistema de doce ecuaciones con doce incógnitas. Las incógnitas son los componentes de los puntos a_0 , d_0 , y los componentes de los cuaterniones $P[1]$, $R[1]$, $Q[2]$ y $R[2]$. Las doce ecuaciones se forman con los componentes de las primero cuatro expresiones del sistema (4.7), que suman ocho ecuaciones, más las normas de los cuaterniones. Así el sistema de ecuaciones está listo para sustituirle los datos del problema de conducción de cuerpo rígido que nos interese trabajar y resolverlo con el método de Newton. Para mostrar como realizar esto, presentaremos y resolveremos el problema de síntesis de conducción de cuerpo rígido mostrado en la figura 4.1.



IV.2 CÓDIGO COMPUTACIONAL

En esta parte presentaremos el código computacional correspondiente a la síntesis de conducción de cuerpo rígido presentado en la sección anterior.

a) Primero definimos la operación de multiplicación de los cuaterniones y el conjugado de los mismos.

In[1]

```
Quater[P_,Q_]:=
{P[[1]] Q[[1]]-P[[2]] Q[[2]]-P[[3]] Q[[3]]-P[[4]] Q[[4]],
 P[[2]] Q[[1]]+P[[1]] Q[[2]]-P[[4]] Q[[3]]+P[[3]] Q[[4]],
 P[[3]] Q[[1]]+P[[4]] Q[[2]]+P[[1]] Q[[3]]-P[[2]] Q[[4]],
 P[[4]] Q[[1]]-P[[3]] Q[[2]]+P[[2]] Q[[3]]+P[[1]] Q[[4]]}
```

```
ConQ[R_]:= {R[[1]],-R[[2]],-R[[3]],-R[[4]]}
```



b) Definimos a continuación las posiciones y los ángulos del cuerpo a satisfacer.

In[3]

```
angulos={0,Pi/4,Pi/2};
x[1]=-1,x[2]=0;x[3]=1;y[1]=0;y[2]=0;y[3]=0;
```

c) Para realizar el sistema de ecuaciones mostrado en (4.7) primero definimos los cuaterniones $P[j]$, $Q[j]$, $R[j]$ los cuales contienen sólo dos parámetros por tener eje de rotación e_3 , el quaternion $Q[j]$ es calculado con los ángulos que se tienen de dato, ya que son las rotaciones que se desea que ejecute el eslabón acoplador. La rotación de los vectores (a_0-b) , (r_0-a_0) y (r_0-d_0) , y (d_0-c) se han definido con las variables $bas1[j]$, $bas2[j]$, $bas3[j]$ y $bas4[j]$, y las ecuaciones con la variable $pd[j]$.

In[5]

```
ClearAll[LL1,LL2,cxx,cyy,LL3,bxx,byy,dd2,P,R,p0,p3,q0,q3,r0,r3,bas1,bas2,pd,ppr,rrp]
```

```
For[j=1,j<3,j++,
q0[j]=N[Cos[angulos[[j+1]]/2]];
q3[j]=N[Sin[angulos[[j+1]]/2]];
P[j]={p0[j],0,0,p3[j]};Q[j]={q0[j],0,0,q3[j]};
R[j]={r0[j],0,0,r3[j]};
bas1[j]=Quater[P[j],Quater[{0,ax-bxx,ay-byy,0},ConQ[P[j]]]];
bas2[j]=Quater[Q[j],Quater[{0,x[1]-ax,y[1]-ay,0},ConQ[Q[j]]]];
bas3[j]=Quater[R[j],Quater[{0,dx-cxx,dy-cyy,0},ConQ[R[j]]]];
bas4[j]=Quater[Q[j],Quater[{0,x[1]-dx,y[1]-dy,0},ConQ[Q[j]]]];
pd[j]=Simplify[{0,bxx,byy,0}+bas1[j]+bas2[j]-
{0,x[j+1],y[j+1],0}];
pd[j+2]=Simplify[{0,cxx,cyy,0}+bas3[j]+bas4[j]-
{0,x[j+1],y[j+1],0}];
pd[j+4]=p0[j]^2+p3[j]^2-1;
pd[j+6]=r0[j]^2+r3[j]^2-1;
]
```

d) Las ecuaciones $pd[j]$ se separan en sus componentes para obtener las doce ecuaciones del sistema que se acomodan en un vector vec . Este vector vec lo mostraremos para dar una idea del sistema de ecuaciones a resolver.

In[7]

```
For[i=1,i<3,i++,
f[i]=pd[i][[2]];
f[i+2]=pd[i][[3]];
f[i+4]=pd[i+2][[2]];
f[i+6]=pd[i+2][[3]];
]
```

```
f[9]=pd[5];
f[10]=pd[6];
f[11]=pd[7];
f[12]=pd[8];
vec={f[1],f[3],f[5],f[7],f[9],f[11],f[2],f[4],f[6],f[8],f[10],f[12]}
```

Out[13]

```
{ -0.707107 - 0.707107 ax + 0.707107 ay + bxx + ax p0[1]^2 - bxx p0[1]^2 - 2 ay p0[1] p3[1] + 2
byy p0[1] p3[1] - ax p3[1]^2 + bxx p3[1]^2, -0.707107 - 0.707107 ax - 0.707107 ay + byy + ay
p0[1]^2 - byy p0[1]^2 + 2 ax p0[1] p3[1] - 2 bxx p0[1] p3[1] - ay p3[1]^2 + byy p3[1]^2,
-0.707107 + cxx - 0.707107 dx + 0.707107 dy - cxx r0[1]^2 + dx r0[1]^2 + 2 cyy r0[1] r3[1] - 2 dy
r0[1] r3[1] + cxx r3[1]^2 - dx r3[1]^2, -0.707107 + cyy - 0.707107 dx - 0.707107 dy - cyy r0[1]^2
+ dy r0[1]^2 - 2 cxx r0[1] r3[1] + 2 dx r0[1] r3[1] + cyy r3[1]^2 - dy r3[1]^2, -1 + p0[1]^2 + p3[1]^2
, -1 + r0[1]^2 + r3[1]^2, -1 + 1. ay + bxx + ax p0[2]^2 - bxx p0[2]^2 - 2 ay p0[2] p3[2] + 2
byy p0[2] p3[2] - ax p3[2]^2 + bxx p3[2]^2, -1 - 1. ax + byy + ay p0[2]^2 - byy p0[2]^2 + 2 ax
p0[2] p3[2] - 2 bxx p0[2] p3[2] - ay p3[2]^2 + byy p3[2]^2, -1 + cxx + 1. dy - cxx r0[2]^2 + dx
r0[2]^2 + 2 cyy r0[2] r3[2] - 2 dy r0[2] r3[2] + cxx r3[2]^2 - dx r3[2]^2, -1 + cyy - 1. dx - cyy
r0[2]^2 + dy r0[2]^2 - 2 cxx r0[2] r3[2] + 2 dx r0[2] r3[2] + cyy r3[2]^2 - dy r3[2]^2, -1 + p0[2]^2 +
p3[2]^2, -1 + r0[2]^2 + r3[2]^2 }
```



e) Definiremos ahora los puntos b y c pivote de los eslabones del sistema mecánico y resolveremos el sistema de ecuaciones con la instrucción `FinRoot[]` la cual utiliza el mismo método de Newton mostrado en el capítulo anterior.

In[14]

```
bxx=-2;byy=1;cxx=2;cyy=1;
```

```
FindRoot[vec,{ax,1.1},{p0[1],.97},{p3[1],.24},{dx,1.2},{r0[1],-.98},{r3[1],.23},
{ay,3},{p0[2],.97},{p3[2],.24},{dy,1.2},{r0[2],-.97},{r3[2],-.24},{DampingFactor->1},
{WorkingPrecision->8},
{MaxIterations->100},{AccuracyGoal->7}]
```

Out[15]

```
{ax -> -0.103553, p0[1] -> 0.996586, p3[1] -> 0.0825599,  
dx -> 0.103553, r0[1] -> -0.990602, r3[1] -> 0.136774,  
ay -> 1.10355, p0[2] -> 0.998513, p3[2] -> -0.0545227,  
dy -> 0.896447, r0[2] -> -0.998513, r3[2] -> 0.0545227}
```

f) Para poder trabajar con el resultado necesitamos definir estas variables directamente.

In[16]

```
ax=-0.103553; p0[1]=0.996586; p3[1]=0.0825599;  
dx=0.103553; r0[1]=-0.990602; r3[1]=0.136774;  
ay=1.10355; p0[2]=0.998513; p3[2]=-0.0545227;  
dy=0.896447; r0[2]=-0.998513; r3[2]=0.0545227;
```

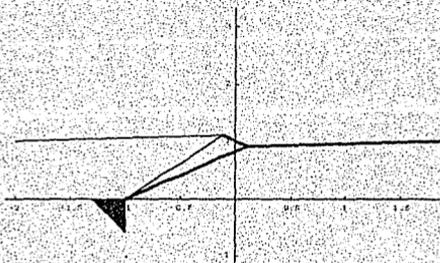
g) Con los resultados es fácil dibujar el sistema mecánico que nos va a generar las posiciones que se pidieron. Esto se hace primero generando los trazos de la posición inicial con las coordenadas de los puntos encontrados, como puede observarse con la variable $v[0]$; después se trazan las otras configuraciones utilizando las ecuaciones de sistema mecánico, con un For[], quedando guardadas las figuras en las variables $v[1]$ y $v[2]$.

In[24]

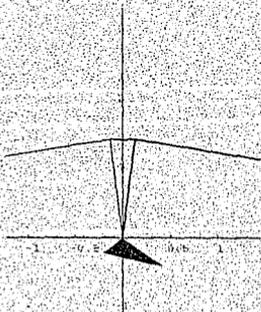
```
tran[P_]:= {P[[2]],P[[3]]}  
v[0]= Show[ Graphics[{  
{Polygon[{{-1.3,0},{-1.0},{-1,-0.6}}]},  
{PointSize[.001],Point[{3.2,3.2}]},{PointSize[.005],  
Point[{-1,-1}]},  
{AbsoluteThickness[1.3],Line[{{ax,ay},{dx,dy}}]},  
{AbsoluteThickness[1],Line[{{bxx,byy},  
{ax,ay},{x[1],y[1]}]},  
{AbsoluteThickness[1.6],Line[{{cxx,cyy},  
{dx,dy},{x[1],y[1]}]}},Axes->True  
]]
```

```
For[j=1,j<3,j++,
```

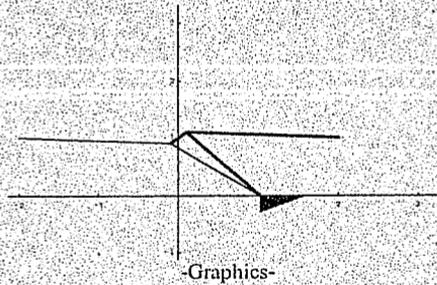
```
v[j]=Show[Graphics[ {
{PointSize[.001],Point[{3.2,3.2}]},{PointSize[.005],
Point[{-1,-1}]},
{AbsoluteThickness[1],Line[{{bxx,byy},
tran[{0,bxx,byy,0}+ bas1[j] ],tran[{0,bxx,byy,0}+ bas1[j]
+ bas2[j]}]},
{AbsoluteThickness[1.6],Line[{{cxx,cyy},
tran[{0,cxx,cyy,0}+ bas3[j] ],tran[{0,cxx,cyy,0}+ bas3[j]+bas4[j]}]},
{Polygon[{{x[j+1],y[j+1]}+tran[Quater[Q[j],Quater[{0,-.3,0,0},
ConQ[Q[j]]]]]],
{x[j+1],y[j+1]}, {x[j+1],y[j+1]}+tran[Quater[Q[j],
Quater[{0,0,-.6,0},ConQ[Q[j]]]]]}]},
{AbsoluteThickness[1.3],Line[ { tran[{0,bxx,byy,0}+bas1[j] ],
tran[{0,cxx,cyy,0}+ bas3[j] ] }]}
}.Axes->True]]]
```



-Graphics-



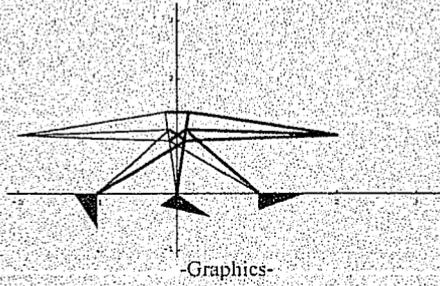
-Graphics-



h) Por último graficaremos las tres figuras juntas para que presenten la misma escala y observar con claridad el proceso que realiza el sistema mecánico para cumplir con las posiciones del cuerpo.

In[27]

Show[v[0],v[1],v[2]]



En este capítulo presentamos la síntesis de conducción de un cuerpo rígido de una forma clara y comprensible, con el objeto de mostrar que la utilización del álgebra de cuaterniones permite mayor sencillez en la solución de los problemas planteados en la cinemática de sistemas mecánicos de cadena cerrada.

CONCLUSIONES

La modelación cinemática es fundamental en el análisis de los sistemas mecánicos de cadena cerrada, cuando deseamos estudiar las configuraciones o las trayectorias que realiza el sistema en el transcurso de su ciclo operativo; ya sea para verificar un diseño en proceso o para evaluar el funcionamiento de un sistema mecánico para su rediseño. Y la misma importancia tiene en la síntesis, que es cuando deseamos encontrar las dimensiones del sistema mecánico para que nos realice una trayectoria o una conducción de cuerpo rígido específica. Lo que hace necesario contar con una modelación cinemática sistemática asociada con la física del sistema mecánico, para que el diseñador tenga una herramienta capaz de ser aplicable en todos los casos con los que se enfrenta.

La modelación cinemática que en este trabajo se ha presentado logra reunir todas las características antes mencionadas, por que además de estar basada en un marco teórico algebraico riguroso como es el Álgebra de los Cuaterniones, su aplicación es sistemática y acorde con la deformación que sufren los sistemas mecánicos, lo que posibilita que su utilización abarque los diferentes problemas que se estudian en la cinemática.

Los modelos matemáticos resultantes son sistemas de ecuaciones no lineales que son resueltos aceptablemente con el Método de Newton, aunque ahí queda un área de estudio virgen para aplicar un método acorde al tipo de sistemas de ecuaciones generadas.

Los ejemplos resueltos en este trabajo se calcularon y se simularon sus resultados computacionalmente con el lenguaje de cálculo formal Mathematica® lo que simplifica el trabajo y evita los errores en los desarrollos algebraicos.

Finalmente, comentaremos que esta modelación no sólo abarcará a los sistemas mecánicos de cadena cerrada, sino que también a los manipuladores conocidos como sistemas de cadena abierta y en el estudio de plataformas.

REFERENCIAS.

- [1] Reyes Ávila Luis 1990. Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies.
Partie 1: Le Cadre Theorique.
Rapport de Recherche Inria No.1303 - Rocquencourt, France.

- [2] Reyes Ávila Luis 1990. Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies.
Partie 2: Quelques Aplications.
Rapport de Recherche Inria No.1454 - Rocquencourt, France.

- [3] Wolfram, S. 1992. Mathematica: A System for Doing mathematica by Computer.
Adison - Wesley.

- [4] Gurtin, M. E. 1981. An Introduction a Continuum Mechanics.
Academic New York.

- [5] B. P. Demidovich, I. A. Maron. 1976. Computational Mathematics.
Mir Publishers- Moscow.

Mathematica es un sistema para hacer matemáticas por computadora. Soporta computación numérica, simbólica y gráfica. Y además es un lenguaje de programación de alto nivel.

En Mathematica los caracteres como \wedge , (, [, {, *, %, etc. tienen un significado definido:

- \wedge indica exponenciación: 2^3 es dos a la tercera potencia.
- / significa división.
- * significa multiplicación: $34*89$ es treinta y cuatro veces ochenta y nueve. Un espacio también puede ser usado para indicar multiplicación: $34\ 89$ es lo mismo que $34*89$. Sin embargo, en ocasiones los espacios no significan nada; $\text{Sin}[x]$ y $\text{Sin } [x]$ es lo mismo que $\text{Sin}[x]$.
- () Estos paréntesis son utilizados solamente para indicar el orden de evaluación. Otro tipo de paréntesis para este fin sólo nos dará como resultado una salida de error.
- [] Estos paréntesis son usados con funciones y comandos; $\text{Sin}[x]$ es el seno de x. Y por ejemplo $\text{Sin}(x)$ no trabaja.
- { } Indica que lo que se encuentra dentro de ellos es una lista; $\{1,3,5,7\}$ es una lista de cuatro números.
- % Representa el resultado de la última operación. Por ejemplo:
 $3*7$
 21
 $\%^2$
 441
- ! Significa factorial.
- = Significa asignación. $a = 5$ es la asignación de cinco a la variable a.
- = También significa asignación y la diferencia la veremos más adelante.

$==$ es una evaluación de igualdad. $a == 5$ da como resultado True si a es igual a 5.

$!=$ evalúa una desigualdad. Con $a != 5$ regresa True si a no es igual a 5.

$<$, $<=$, $>$, $>=$ se utiliza como ya es esperado.

CÁLCULO NUMÉRICO Y SIMBÓLICO.

Mathematica puede hacer álgebra, cálculo y muchas otros tipos de cálculos simbólicos. No es un trick, no es una shallow simulation, y no es un conjunto de ejemplos preprogramados.

Mucho programas pueden hacer cálculos numéricos como estos:

$$27 + 8$$

$$35$$

Mathematica va más allá de esto: Puede hacer cálculos algebraicos, donde la respuesta no es un número.

$$27x + 8x$$

$$35x$$

Con una calculadora podemos obtener el valor de la siguiente expresión:

$$(3 + 8)^5$$

$$161051$$

En Mathematica, podemos usar variables en lugar de los números 3 y 8:

$$(a + b)^5$$

$$(a + b)^5$$

Y podemos obtener los resultados de forma expandida:

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR FUERA DE LA INSTITUCIÓN

Expand[(a + b)^5]

$$a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$$

Podemos integrar la expresión respecto a a

Integrate[(a + b)^5, a]

$$\frac{a^6}{6} + a^5 b + \frac{5 a^4 b^2}{2} + \frac{10 a^3 b^3}{3} + \frac{5 a^2 b^4}{2} + a b^5$$

Un principio general en Mathematica es que no hace aproximaciones a menos que se le pida. Por ejemplo, al evaluar la raíz cuadrada de 12, nos regresa un resultado simbólico:

Sqrt[12]

$$2 \text{ Sqrt}[3]$$

Si queremos una aproximación numérica, podemos usar la función N:

N[Sqrt[12]]

$$3.464$$

DEFINICIÓN DE CONSTANTES Y FUNCIONES

Para definir una constante se utiliza simplemente un signo igual:

$$a = 5$$

Cuando se define una función, hay sólo dos cosas importantes que recordar:

- Usar un carácter subrayado en el nombre del argumento del lado derecho (no en el lado izquierdo).
- Colocar := en medio.

Por ejemplo:

$$f[\underline{x}] := x^2$$

A esta función se le puede aplicar diferentes tipos de argumentos. Podemos usar un simple número:

$$f[5]$$

$$25$$

Podemos usar una expresión simbólica:

$$f[a+b]$$

$$(a+b)^2$$

O también podemos operar dicha función; como derivandola:

$$D[f[x], x]$$

$$2x$$

INTEGRACIÓN Y DIFERENCIACIÓN

Dos comandos básicos para hacer para hacer Cálculo en Mathematica son **I** (para derivar) y **D** (para integrar). La manera de integrar una función es la siguiente:

```
Integrate [x^2 , x]
```

```
x3/3
```

- El primer argumento, x^2 , es la expresión a ser integrada.
- El segundo argumento, x , es la variable respecto a la cual se va integrar la expresión.

La diferenciación con el comando **D** tiene la misma forma que la integración.

```
D[x^2 , x]
```

```
2 x
```

MÉTODO DE NEWTON [5]

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Este sistema lo escribiremos compactado agrupando el conjunto de variables en un vector n-dimensional:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

De igual forma el conjunto de funciones f_1, f_2, \dots, f_n queda en un vector n-dimensional:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el sistema (B.1) puede escribirse brevemente como:

$$f(x) = 0 \quad (\text{B.2})$$

A (B.2) lo resolveremos por el método de aproximaciones sucesivas. Ahora supongamos que encontramos la p -ésima aproximación

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$$

de una de las raíces $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ del sistema (B.2). Entonces la raíz exacta puede representarse como:

$$x = x^{(p)} + \varepsilon^{(p)} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{Donde } \varepsilon^{(p)} = (\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)}, \dots, \varepsilon_n^{(p)})$$

Sustituyendo (B.3) en (B.2) tenemos

$$f(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Asumiendo que la función $f(x)$ es continuamente diferenciable en algún dominio convexo conteniendo x y $x^{(p)}$, expandemos a (B.4) en potencias a una aproximación,

$$f(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}) = f(x^{(p)}) + f'(x^{(p)})\varepsilon^{(p)} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Ordenando y sustituyendo $\varepsilon^{(p)}$

$$f(x^{(p)}) + f'(x^{(p)})(x - x^{(p)}) = 0$$

$$f'(x^{(p)})x = -f(x^{(p)}) + f'(x^{(p)})x^{(p)}$$

$$f'(x^{(p)})x^{(p+1)} = -f(x^{(p)}) + f'(x^{(p)})x^{(p)} \quad (\text{B.6})$$

Donde $f'(x^{(p)}) = \left[\frac{\delta f_i}{\delta x_j} \right]$ es el Jacobiano del sistema

Para calcular la $x^{(n+1)}$ aproximación es necesario resolver un sistema de ecuaciones lineales $A x^{(n+1)} = b$, que se forma con la $x^{(n)}$ aproximación; siendo $A = f'(x^{(n)})$ y $b = -f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)}) \cdot x^{(n)}$. La forma aceptable de resolver este sistema de ecuaciones es utilizando un método exacto como el LU, cuya base de solución puede encontrarse en cualquier libro de Métodos Numéricos.