

011737  
201

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO.  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA.

NOMBRE DE LA TESIS:

**MODELADO CINEMÁTICO DE SISTEMAS  
MECÁNICOS DE CADENA ABIERTA.**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN  
INGENIERÍA MECÁNICA.

PRESENTA: MARIO MÁRQUEZ MIRANDA.

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS REYES ÁVILA.

JUNIO DE 1995.

FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# **CONTENIDO**

**PREFACIO.**

**INTRODUCCIÓN.** 5

## **Capítulo I.**

**Fundamentos Matemáticos.** 7

## **Capítulo II.**

**Cinemática Directa.** 12

## **Capítulo III.**

**Cinemática Inversa.** 44

## **Capítulo IV.**

**Conclusiones.** 55

**Referencias.** 56

**Apéndice.** 57

# PREFACIO.

---

Este texto está preparado con el objetivo de introducir el concepto de espacio vectorial de Cuaterniones a aquellos lectores que se inician en el modelado de Sistemas Mecánicos de Cadena Abierta. Especial atención y cuidado se ha prestado a las aplicaciones de esta álgebra a los problemas de la Cinemática Directa e Inversa .

Con la finalidad de desarrollar una comprensión amplia del tema, se emplea un proceso sistemático para aplicar el álgebra de Cuaterniones y modelar cadenas cinemática. Se presentan la simulación de los resultados para apoyar la comprensión.

Este texto nunca hubiera sido terminado sin la supervisión constante y entusiasta del Dr. Luis Reyes Avila, a quien deseo expresar mi total agradecimiento. Me siento agradecido con Mauricio Méndez Canseco por su apoyo de amigo y colaboración incondicional prestada para la realización de este trabajo; y también reconocer el apoyo de mi estimado hermano Fernando.

Un profundo agradecimiento a mi esposa Irma Salinas Pérez, que gracias a su apoyo he logrado finalizar este trabajo, por lo cual he adquirido una deuda para toda mi vida con ella. Aprovecho la oportunidad para agradecer a la UNIVERSIDAD ANÁHUAC DEL SUR, por el apoyo brindado al facilitar su infraestructura para culminar este trabajo, también un agradecimiento especial al M.C Vicente Rivera Morás, director de la Escuela de Ingeniería de U.A del Sur, por su apoyo entusiasta para realizar este trabajo.



Finalmente deseo expresar mi profundo reconocimiento a mi jurado calificador:

Dr. Luis Ferrer Argote.

Dr. Emilio Vargas Soto.

Dr. Rogelio González Oropeza.

M. C. Vicente Rivera Morás.

por darle el toque final a este trabajo.

Aceptaré con humildad las sugerencias y recomendaciones que sean para la mejora de este trabajo.

División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

México, D. F., junio de 1995.

Mario Márquez Miranda.

# INTRODUCCIÓN.

---

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar la aplicación sistemática del álgebra de Cuaterniones para modelar la cinemática directa e inversa de multicuerpos rígidos, conocidos como Cadenas Cinemáticas Abiertas. El álgebra antes mencionada, fue desarrollada por Sir William Hamilton en el año de 1843, sin embargo no fue sino hasta los años 1960-1970, cuando se empezaron a aplicar en la dinámica de cuerpos rígidos. Es importante mencionar que tal aplicación no se realizaba de una manera sistemática, puesto que el álgebra de Cuaterniones utilizada, era una extensión formal no rigurosa del álgebra de los números complejos.

La manera sistemática de construir el álgebra de Cuaterniones con el enfoque moderno del álgebra lineal, se presenta en [1]. Tal presentación simplifica y generaliza la aplicación de la misma en la representación paramétrica de rotaciones finitas de cuerpos rígidos. La primera aplicación de esta idea a la modelación de multicuerpos rígidos se presenta en [1, parte II], donde se hace una representación en términos de Cuaterniones de la simulación. Sin embargo, desde el punto de vista físico tal modelación no queda sistemáticamente construida, lo que impide interpretaciones apropiadas de las soluciones y el control de las mismas.

En este trabajo se presenta una simulación computacional de dos ejemplos sencillos y muy estudiados que permita, con la ayuda del lenguaje de cálculo formal, *Mathematica*<sup>®</sup>, [4], presentar una metodología para la cinemática directa e inversa de cadenas cinemática abiertas. Tal metodología será de uso general, esto es, deberá ser aplicado a todo tipo de sistemas mecánicos.

El desarrollo de la tesis tiene la siguiente continuidad:

En el Capítulo I, se estudia las propiedades algebraicas fundamentales del espacio vectorial de Cuaterniones  $Q$ , presentándose también a  $Q$  como un espacio vectorial normado, con producto interno.

En el Capítulo II, se presenta la aplicación del espacio vectorial de los Cuaterniones para modelar el problema de la Cinemática Directa en una Cadena Cinemática Abierta, la solución de este problema, es ilustrado usando dos manipuladores comunes: uno de dos grados de libertad y otro tipo PUMA, [7].

En el Capítulo III, se ilustra la solución del problema de la Cinemática Inversa, a partir de las ecuaciones generadas del problema de la Cinemática Directa, para los dos ejemplos de los manipuladores. También se presenta la simulación de una trayectoria recta del manipulador de dos grados de libertad, a partir de los resultados generados por la solución de sus ecuaciones.

También se presentan las conclusiones en el capítulo IV, obtenidas durante la realización de este trabajo, así como las referencias consultadas y un breve apéndice de los comandos del lenguaje *Mathematica*<sup>®</sup>, usados para la generación de las ecuaciones simbólicas de los respectivos modelos analizados.

# Capítulo I. Fundamentos Matemáticos.

---

## I. 1. ESPACIO VECTORIAL DE QUATERNIONES.

Los Cuaterniones fueron presentados en 1843, por el matemático inglés William Rowan Hamilton (1805-1865). El resultado del estudio de los Cuaterniones lo escribió en sus libros “Elements of Quaternions” [8], y “Lectures on Quaternions” [9]. El tratamiento de esta álgebra en las referencias citadas es puramente geométrico, sin embargo, en nuestras aplicaciones se utiliza la sistematización presentada en [1].

Sea el conjunto  $\mathfrak{R}^4$ , sobre el cual se define las operaciones siguientes:

i). **una operación aditiva**,  $\oplus : \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  definida como,

$$(a,b,c,d) \oplus (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (a+\alpha, b+\beta, c+\gamma, d+\delta) \quad (1.1.1)$$

ii). **una operación multiplicativa**,  $*$ ,  $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  definida por,

$$\begin{aligned} (a,b,c,d) * (\alpha,\beta,\gamma,\delta) &= (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta, a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma, \\ & a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta, a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha), \\ \forall (a,b,c,d), (\alpha,\beta,\gamma,\delta) &\in \mathfrak{R}^4, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

por medio de las cuales las parejas  $(\mathfrak{R}^4, \oplus)$  y  $(\mathfrak{R}^4, *)$ , forman un grupo aditivo conmutativo y un grupo multiplicativo no conmutativo respectivamente, según se muestra en [1].

Las propiedades algebraicas de este conjunto se resumen en los siguientes resultados.

**TEOREMA 1.** La terna  $(\mathfrak{R}^4, \oplus, *)$ , es un campo no conmutativo.

Demostración: En efecto según se demuestra en [1],

i) La operación  $*$   $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  es asociativa, ya que,

$$p * (q * s) = (p * q) * s, \quad (1.1.3)$$

$$\forall p, q, s \in \mathfrak{R}^4;$$

ii) El elemento  $\underline{1} = (1, 0, 0, 0) \in \mathfrak{R}^4$  es tal que  $\underline{1} * p = p * \underline{1} = p, \forall p \in \mathfrak{R}^4$ . Este es llamado el elemento neutro de la multiplicación en  $\mathfrak{R}^4$ .

iii)  $\forall p \in \mathfrak{R}^4, p \neq (0, 0, 0, 0)$ ; existe  $p' \in \mathfrak{R}^4$  tal que  $p * p' = \underline{1}$ . El elemento  $p'$  es llamado el inverso de  $p$  para la multiplicación.

iv) La operación  $*$   $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  no es conmutativa; puesto que,

$$p * q \neq q * p.$$

v) Las siguientes propiedades de distributividad se satisfacen:

$$\begin{aligned} \text{a) } (p \oplus q) * s &= p * s \oplus q * s \\ \text{b) } p * (q \oplus s) &= p * q \oplus p * s, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

$$\forall p, q, s \in \mathfrak{R}^4.$$

Se presenta ahora la operación:  $\bullet: \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ , definida por,

$$\alpha \bullet (a, b, c, d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d),$$

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathfrak{R}^4, \alpha \in \mathfrak{R} \quad (1.1.5)$$

la cual es una multiplicación escalar. Se observa con esto que, la terna  $(\mathfrak{R}^4, \oplus, \bullet)$  es un espacio vectorial real.



Además se sabe que la transformación  $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$ , definida por:

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^3 p_i q_i \in \mathfrak{R}, \quad (1.1.6)$$

es un producto interno en  $\mathfrak{R}^4$ , y por lo tanto,  $Q = (\mathfrak{R}^4, \oplus, *, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  es un espacio vectorial real con producto interno, y la norma asociada a este producto interno es la siguiente:

$$|p| = \langle p, p \rangle^{\frac{1}{2}} = (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.1.7)$$

por lo cual  $Q = (\mathfrak{R}^4, \oplus, *, \bullet, |\bullet|)$ , es un espacio normado, al cual llamaremos espacio vectorial de Cuaterniones y a sus elementos serán llamados Cuaterniones.

Se utilizan también, isomorfismos apropiados entre el espacio vectorial de Cuaterniones, el espacio vectorial real y el espacio vectorial  $\mathfrak{R}^3$ , para expresar un Cuaternion como la suma de un Cuaternion real y un Cuaternion vectorial. Esto es si,

$$Q_r = \{(a, 0, 0, 0) : a \in \mathfrak{R}\} \subset Q, \quad (1.1.8)$$

$$Q_v = \{(0, b, c, d) : b, c, d \in \mathfrak{R}\} \subset Q, \quad (1.1.9)$$

entonces, las transformaciones definidas por:

$$T_r(a, 0, 0, 0) = a \quad \forall (a, 0, 0, 0) \in Q_r \quad (1.1.10)$$

$$T_v(0, b, c, d) = (b, c, d) \quad \forall (0, b, c, d) \in Q_v \quad (1.1.11)$$

son isomórficas, por lo tanto, si  $p = (a, b, c, d) \in Q$ , entonces

$$p = T_r^{-1}(a) + T_v^{-1}(b, c, d) \quad (1.1.12)$$



De manera similar al álgebra de los números complejos, podemos definir un quaternion conjugado como:

$$\bar{p} = (p_0 - p_1 - p_2 - p_3), \quad (1.1.13)$$

la definición (1.1.13) permite mostrar en el siguiente teorema, [1], algunas propiedades útiles para las aplicaciones.

**TEOREMA 2.** Dados  $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  y  $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in Q$ , entonces:

$$\begin{aligned} \text{i) } \overline{p \oplus q} &= \bar{p} \oplus \bar{q} \\ \text{ii) } \overline{p * q} &= \bar{q} * \bar{p} \\ \text{iii) } p * \bar{p} &= \bar{p} * p \in \mathbb{Q} \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

El álgebra presentada en esta sección, es de utilidad para las aplicaciones según se muestra en el siguiente párrafo.

## I.2 REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA DE ROTACIONES DE UN CUERPO RÍGIDO.

En esta sección se intenta unificar y por consecuencia, simplificar, las diferentes formas utilizadas en la mecánica, para representar paramétricamente las rotaciones finitas de cuerpos rígidos, de forma similar a [1]. Para este hecho, se define una transformación lineal  $\rho(p, \bullet) : Q \rightarrow Q$ ,  $p \in Q$  está fijo, que preserva el producto interno, la norma y el ángulo, en la forma siguiente:

$$\rho(p, q) = p * q * p' = \frac{1}{|p|^2} \bullet (p * q * \bar{p}) \quad (1.2.1)$$

$$\forall q \in Q$$

El siguiente teorema demostrado en [1], estudia las propiedades de la transformación definida en (1.2.1).

**TEOREMA 3.** La transformación  $\rho(p, \bullet) : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , es lineal, ortogonal y  $\rho(p, q) \in \mathbb{Qv}$ , para todo  $q \in \mathbb{Qv}$ .

Otro resultado importante en las aplicaciones es el siguiente, [1].

**TEOREMA 4.** Sea  $\theta \in [0, n\pi]$ ,  $n \in \mathbb{R}^+$ ,  $\underline{w} \in \mathbb{Q}$ ,  $|\underline{w}|=1$ ; entonces, el quaternion  $p \in \mathbb{Q}$ , con  $p_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$  y  $p_v = \pm \text{Sen } \theta \underline{w}$ , es tal que,  $\rho(p, \underline{w}) = \underline{w}$ .

Por otra parte,  $p_0$  satisface la ecuación:

$$4 p_0^4 - 4 p_0^2 |p|^2 \text{Cos } \theta - |p|^4 \text{Sen}^2 \theta = 0.$$

Por el teorema 4, el quaternion  $p$  representa una rotación de ángulo  $\theta \in [0, n\pi]$ , con eje  $\underline{w} \in \mathbb{Q}$ , esto es:

$$p_0 = \pm |p| \text{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.2.2)$$

$$p_v = \pm |p| \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \underline{w}. \quad (1.2.3)$$

En general la norma de  $p$ , puede ser arbitraria. En este trabajo, se usan Quaterniones unitarios, esto es,  $|p|=1$ , y

$$p_0 = \pm \text{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.2.4)$$

$$p_v = \pm \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \underline{w}. \quad (1.2.5)$$

## Capítulo II. Cinemática Directa.

---

Existen dos diferentes aspectos para el estudio de los sistemas mecánicos: *análisis* y *síntesis* (diseño). Cuando un sistema mecánico es afectado por una excitación, por ejemplo, una fuerza externa, el sistema muestra una cierta respuesta. El proceso que nos permite estudiar esta respuesta conocida su excitación es llamado *análisis*, para esto, se requiere un conocimiento de las características físicas del sistema mecánico, tal como, la forma, arreglo de los elementos, etc. Por otra parte, la *síntesis* es el proceso de determinar las características físicas necesarias para que un Sistema Mecánico realice una tarea determinada. La *mecánica* es la rama del *análisis* la cual estudia el movimiento, y su relación con las fuerzas; a su vez, se divide en dos partes *estática* y *dinámica*. La *estática* considera el análisis de sistemas cuando las excitaciones y por lo tanto las respuestas no dependen del tiempo. La *dinámica* considera el análisis de sistemas que cambian su respuesta con respecto al tiempo, se divide en dos disciplinas: *Cinemática* y *Cinética*. *Cinemática* es el estudio del movimiento de un sistema mecánico sin importar las fuerzas que lo producen y *cinética*: es el estudio del movimiento y su relación con las fuerzas que producen ese movimiento.

El objetivo de este trabajo es estudiar la *cinemática*, de una cadena cinemática abierta, partiendo de una configuración no deformada, hasta modelar las rotaciones físicas que imprimen los actuadores a los elementos del manipulador, obteniéndose como resultado una sucesión de configuraciones deformada del cuerpo.

Cuando varios eslabones están conectados móvilmente por medio de pares cinemáticos o juntas<sup>1</sup>, se dice que constituye una *cadena cinemática*. Un *Sistema Mecánico* se define como un conjunto de cuerpos rígidos en el cual algunos o todos los cuerpos pueden tener movimiento relativo unos con respecto a otros y se puede clasificar de la siguiente manera:

a) *de cadena abierta*: Consiste de un conjunto de eslabones rígidos unidos por un conjunto de juntas, donde uno de los extremos es fijado a una base (tierra) y el otro extremo está libre y es equipado con alguna herramienta, como pinzas, tenazas, etc., con la finalidad de realizar alguna tarea. Un ejemplo de un sistema mecánico de este tipo es un robot-manipulador o un *robot* como más comúnmente se conoce en nuestro medio.

b) *de cadena cerrada*. Es la unión móvil de un conjunto de eslabones ( $\geq 3$ ) por medio de juntas, que forman lazos cerrados.

Un manipulador se puede modelar como una cadena cinemática de cuerpos rígidos unidos uno con otro por juntas rotacionales o prismáticas. En este capítulo, se estudia el procedimiento de modelar el problema de la cinemática directa, de una cadena cinemática utilizando el álgebra de Cuaterniones, [1].

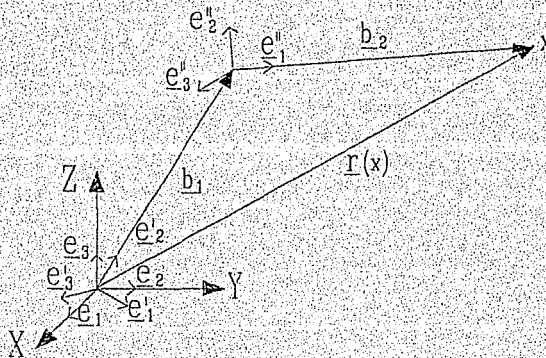
El objetivo del análisis de la Cinemática Directa de una cadena cinemática es determinar la posición y la orientación del punto final de la misma, encontrando la transformación que relacione el movimiento del la base móvil fijada al cuerpo con el Sistema de Referencia global, entonces el problema de la Cinemática Directa se puede establecer de la siguiente manera:

**Dadas las rotaciones y las longitudes de los eslabones de una cadena cinemática, determinar la posición y la orientación del punto final con respecto a un Sistema de Referencia global.**

---

<sup>1</sup> se usa junta en vez de par cinemático a partir de aquí.

Los ángulos de rotación de los ejes de las juntas son las variables, para las juntas rotacionales y el desplazamiento lineal para el caso de juntas prismáticas. Para desarrollar una formulación general sistemática de la solución del problema de la Cinemática Directa, se usan las propiedades del espacio vectorial de Cuaterniones, [1]. El  $n$ -ésimo quaternion, representa a la rotación de la  $n$ -ésima junta. Una base móvil se fija rigidamente a cada junta. Esto quiere decir, que para cualquier movimiento que el actuador del manipulador ejecute, las coordenadas de cada punto sobre el eslabón  $n$  estarán constantemente expresados en la  $n$ -ésima base móvil. Para describir la interacción de las rotaciones de los eslabones adyacentes, se fija una base móvil a cada junta de una Cadena Cinemática, como se muestra en la siguiente figura:



**Figura 2.1.** Manera de fijar bases móviles a las juntas.

Con la base canónica en  $\mathfrak{R}^4$  y a través del isomorfismo de  $\mathfrak{R}^4$  en  $\mathfrak{R}^3$ , mostrado en (1.1.10) y (1.1.11), se puede asociar a la referencia global XYZ, la base canónica  $\{e_j\}_{j=1}^3 \in \mathfrak{R}^3$ , como se muestra en la figura 2.1. Para hacer esto, de una manera sistemática, se describen algunas convenciones, que se describen en el presente capítulo.



Sea un manipulador de  $n$  juntas y  $n+1$  eslabones. Se representa a los eslabones con Cuaterniones en el subespacio  $Q_v$  y a las rotaciones de las juntas con Cuaterniones  $Q \in \mathcal{N}^4$ , iniciando la representación en la referencia global. Cada unión de dos eslabones, forma una junta; la rotación de esta junta está representada por un quaternion, éste a sus vez, caracteriza al ángulo y al eje de rotación. Por lo tanto, si existen  $n$  juntas, se definen  $n$  Cuaterniones para representarlas.

## II.1. MODELO DE LA CONFIGURACIÓN NO DEFORMADA.

En esta parte se presenta la cinemática de una cadena abierta, partiendo de bases asociadas a la configuración no deformada, las cuales posteriormente sufrirán rotaciones apropiadas para alcanzar una configuración deformada deseada. La base final  $\{e_i^n\}_{i=1}^3$ , de la cadena cinemática, se obtiene al aplicar rotaciones sucesivas a las  $n-1$  bases, según se muestra a continuación:

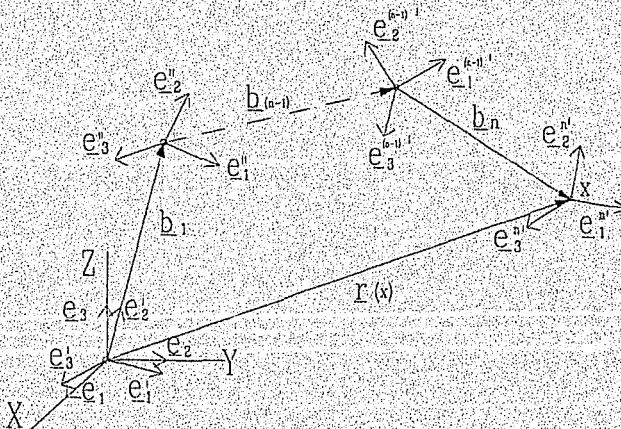


Figura 2.2.1  $n$  sistemas de referencias.



Sean los sistemas de referencia mostrados en la figura 2.2.1. La base  $\{\underline{e}_j\}_{j=1}^3$ , es una base global fija y las bases  $\{\underline{e}_j\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{e}_j^{\prime}\}_{j=1}^3$ , ...,  $\{\underline{e}_j^{(n)}\}_{j=1}^3$ , son móviles. Esto es, se deforman con el cuerpo. En la configuración no deformada, éstas pueden ser expresadas como rotaciones de la base global, esto es:

$$\underline{e}_j = \rho(p(1), \underline{e}_j), \quad \underline{e}_j^{\prime} = \rho(p(2), \underline{e}_j), \quad \dots, \quad \underline{e}_j^{(n)} = \rho(p(n), \underline{e}_j^{(n-1)}), \quad (2.1.1)$$

con los siguientes Cuaterniones unitarios asociados a cada una de las rotaciones:

$$p_0(1) = \text{Cos}\left(\frac{\varphi_1}{2}\right), \quad p_v(1) = \text{Sen}\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \underline{y}_1 \quad (2.1.2)$$

$$p_0(2) = \text{Cos}\left(\frac{\varphi_2}{2}\right), \quad p_v(2) = \text{Sen}\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \underline{y}_2 \quad (2.1.3)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_0(n) = \text{Cos}\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \quad p_v(n) = \text{Sen}\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \underline{y}_n \quad (2.1.4)$$

donde,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , y  $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n$ , representan los ángulos y los eje de rotación, respectivamente.

La posición del elemento final, de la cadena cinemática, se determina mediante la siguiente operación vectorial.

$$r(x) = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \dots + \underline{b}_n \quad (2.1.5)$$

donde los componentes de cada vector que caracterizan a cada eslabón, están expresadas con respecto a las base móviles, esto es:

$$\underline{b}_1 = d_1 \cdot \underline{e}_1 = d_1 \cdot [\rho(p(1), \underline{e}_1)] \quad (2.1.6)$$

$$\underline{b}_2 = d_2 \cdot \underline{e}_1 = d_2 \cdot [\rho(p(2), \underline{e}_1)] \quad (2.1.7)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\underline{b}_n = d_n \cdot \underline{e}_1^{(n)} = d_n \cdot [\rho(p(n), \underline{e}_1^{(n-1)})]$$

$$= d_n \cdot [p(n) * \underline{e}_1^{(n-1)} * \overline{p(n)}] \quad (2.1.8)$$

los cuales están referidos a la base global, mediante la ecuación (2.1.1).

## II.2 MODELO DE LA CONFIGURACIÓN DEFORMADA.

Partiendo de la configuración inicial del manipulador, se intenta modelar en esta parte una secuencia de deformaciones que imprimen los actuadores a cada una de las juntas. Se definen inicialmente los  $n$  Quaterniones que caracterizan las  $n$  rotaciones físicas de los ejes de las juntas, por:  $q(1), q(2), \dots, q(n)$ , donde los  $n$  Quaterniones unitarios asociados a las  $n$  rotaciones son:

$$q(1)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \quad q(1)_v = \text{Sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \underline{w}_1 \quad (2.2.1)$$

$$q(2)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\theta_2}{2}\right), \quad q(2)_v = \text{Sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \underline{w}_2, \quad (2.2.2)$$

.....

$$q(n)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\theta_n}{2}\right), \quad q(n)_v = \text{Sen}\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \underline{w}_n, \quad (2.2.3)$$

La secuencia de deformaciones, se asocian a las bases móviles y estarán definidas por lo siguiente:

a). Las bases  $\{\underline{e}_j^s\}_{j=1}^3, \{\underline{e}_j^r\}_{j=1}^3, \dots, \{\underline{e}_j^n\}_{j=1}^3$ , son rotadas como se indica a continuación:

$$\underline{a}(1)_j = \rho(q(1), \underline{e}_j), \underline{a}(1)_j^r = \rho(q(1), \underline{e}_j^r), \dots, \underline{a}(1)_j^n = \rho(q(1), \underline{e}_j^{(n-1)}), \quad (2.2.4)$$

b). Las bases  $\{\underline{a}(1)_j^s\}_{j=1}^3, \dots, \{\underline{a}(1)_j^n\}_{j=1}^3$ , son rotadas por:

$$\underline{a}(2)_j = \underline{a}(1)_j, \underline{a}(2)_j^r = \rho(q(2), \underline{a}(1)_j^r), \dots, \underline{a}(2)_j^n = \rho(q(2), \underline{a}(1)_j^{(n-1)}), \quad (2.2.5)$$

c). Las bases  $\{\underline{a}(2)_j^s\}_{j=1}^3, \{\underline{a}(2)_j^r\}_{j=1}^3, \dots, \{\underline{a}(2)_j^n\}_{j=1}^3$  se transforman en:

$$\underline{a}(3)_j^s = \rho(q(3), \underline{a}(2)_j^s), \underline{a}(3)_j^r = \rho(q(3), \underline{a}(2)_j^r), \dots, \underline{a}(3)_j^n = \rho(q(3), \underline{a}(2)_j^{(n-1)}) \quad (2.2.6)$$

d). Finalmente la base  $\{\underline{a}^{(n-1)}_j\}_{j=1}^3$  es rotada para obtener:

$$\underline{a}^{(n)}_j = \underline{a}^{(n-1)}_j, \quad \underline{a}^{(n)}_2 = \underline{a}^{(n-1)}_2, \quad \underline{a}^{(n)}_3 = \rho(q(n), \underline{a}^{(n-1)}_3) \quad (2.2.7)$$

La posición del elemento final de la cadena cinemática, es ahora expresado en términos de los  $n$  eslabones rotados, y la ecuación que los determina es:

$$\underline{r}(x) = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \dots + \underline{b}_n \quad (2.2.8)$$

donde, la posición de los eslabones después de estas rotaciones, quedan deformados por:

$$\underline{b}_1 = d_1 \cdot \underline{a}^{(1)}_1 \quad (2.2.9)$$

$$\underline{b}_2 = d_2 \cdot \underline{a}^{(2)}_1 \quad (2.2.10)$$

$$\underline{b}_n = d_n \cdot \underline{a}^{(n)}_1 \quad (2.2.11)$$

Observese que, las componentes del vector de posición,  $\underline{r}(x)$  están referidos al sistema de referencia global.

### II.3. SISTEMAS DE REFERENCIA DE LAS JUNTAS.

En problemas reales, se pueden definir Sistema de Referencia asociados a las juntas en forma arbitraria. La idea es presentar cuatro casos particulares, con los Cuaterniones correspondientes.

Caso 1. Si los ejes  $xyz$  son paralelos a los ejes  $XYZ$  global, como se muestra en la siguiente figura:

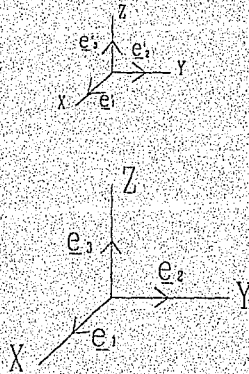


Figura 2.3.1. Orientación de Sistema de Referencia cuando  $xyz \parallel XYZ$ .

el quaternion  $p$ , está determinado por:

$$p = \{1,0,0,0\} \quad (2.3.1)$$

Caso 2. Si el eje  $x$  es paralelo al eje  $X$  y el ángulo de rotación es  $\varphi$ , como se muestra en la siguiente figura:

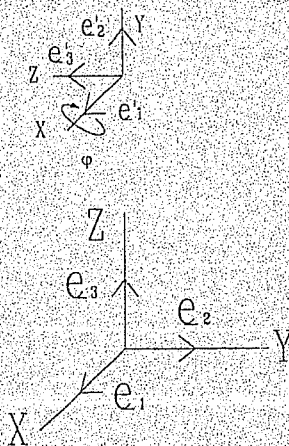


Figura 2.3.2. Orientación de Sistema de Referencia cuando  $x \parallel X$

entonces,  $p = \{p_0, p_1, 0, 0\}$ , con (2.3.2)

$$p_0 = \text{Cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad p_1 = \text{Sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) e_1$$

Caso 3. De la misma forma, para la orientación mostrada en la siguiente figura:

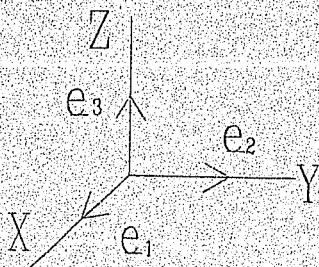
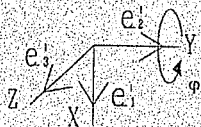


Figura 2.3.3. Orientación del Sistema de Referencia cuando  $y \parallel Y$ ,

se tiene que,  $p = \{p_0, 0, p_2, 0\}$ , con (2.3.3)

$$p_0 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad p_2 = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) e_2.$$



Caso 4. Finalmente para la siguiente figura:

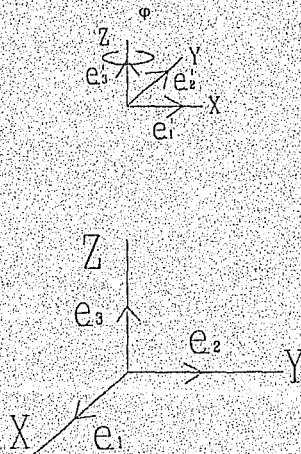


Figura 2.3.4. Orientación del Sistema de Referencia cuando  $z \parallel Z$

$$p = \{p_0, 0, 0, p_3\}, \text{ con} \quad (2.3.4)$$

$$p_0 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad p_3 = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) e_3,$$

Utilizando este tipo de convenciones, es posible reducir, en gran cantidad el número de operaciones, que se generan al modelar una cadena cinemática abierta. Para ilustrar la modelación, se presentan dos modelos típicos de manipuladores: uno de dos grados de libertad y otro manipulador de seis, conocido en la literatura [7] como manipulador PUMA, respectivamente.

## II.4. MANIPULADOR DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.

En esta parte se presenta el problema de un manipulador con dos eslabones unidos por dos juntas rotacionales, con el objeto de mostrar de manera simplificada la aplicación de la metodología, motivo de este trabajo. Sea la configuración inicial del manipulador como se muestra en la siguiente figura:

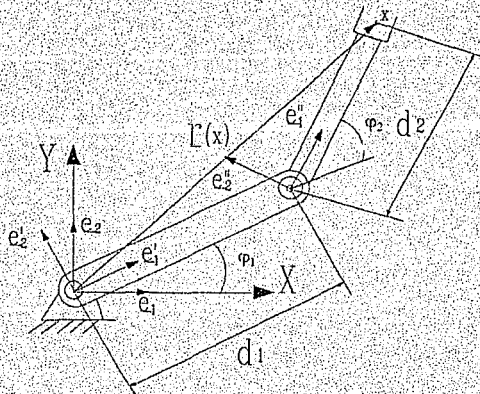


Figura 2.4.1. Sistemas de Referencia de un manipulador de 2 grados de libertad.

Se presenta la metodología los pasos siguientes:

a). MODELO DE LA CONFIGURACIÓN NO DEFORMADA.

Como se observa en la figura 2.4.1, el manipulador está compuesto de dos juntas y dos eslabones, (sin contar el eslabón de tierra), entonces, de acuerdo a la metodología, ecuación (2.1.1), se definen las bases móviles, mediante rotaciones de la base global. Esto se realiza construyendo primero la base  $\underline{e}_j$ , es decir:

$$\underline{e}_j = \rho(p(1), \underline{e}_j) = p(1) * \underline{e}_1 * \overline{p(1)}, \quad (2.4.1)$$

donde el Quaternion unitario asociado, es

$$p(1)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\varphi_1}{2}\right), \quad p(1)_v = \text{Sen}\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \underline{e}_3 \quad (2.4.2)$$

con  $\varphi_1$ , el ángulo de rotación y  $\underline{e}_3 = \{0,0,1\}$ , el eje de rotación. Por lo tanto, el Quaternion es:  $p(1) = (p(1)_0, 0, 0, p(1)_3)$ .

Posteriormente a la junta 2, se le asocia la base  $\underline{e}_j$ , la cual corresponde a la rotación de la base  $\underline{e}_j$ , siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{e}_j &= \rho(p(2), \underline{e}_j) = p(2) * \underline{e}_j * \overline{p(2)} \\ &= (p(2) * p(1)) * \underline{e}_j * \overline{(p(1) * p(2))} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

con el Quaternion unitario asociado, definido por:

$$p(2)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\varphi_2}{2}\right), \quad p(2)_v = \text{Sen}\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \underline{e}_3, \quad (2.4.4)$$

por lo tanto,  $p(2) = (p(2)_0, 0, 0, p(2)_3)$ .

Se observa que hasta aquí, se han definido la orientación de las bases en la configuración no deformada del manipulador. Ahora, al modelar la posición del punto final, de la siguiente manera:

$$r(x) = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 \quad (2.4.5)$$

donde,

$$\underline{b}_1 = d_1 \cdot \underline{e}_1 = d_1 \cdot [(p(1) * \underline{e}_1 * \overline{p(1)})] \quad (2.4.6)$$

$$\underline{b}_2 = d_2 \cdot \underline{e}_1 = d_2 \cdot [(p(2) * p(1)) * \underline{e}_1 * \overline{(p(1) * p(2))}] \quad (2.4.7)$$

se observa que las componentes del vector  $r(x) \in \mathfrak{R}^3$ , en la ecuación (2.4.5), están referidas a la base global.

Obsérvese que se ha determinado la orientación de las bases móviles y la posición del punto final, en la configuración inicial. Se modela a continuación las rotaciones físicas que imprimen los actuadores a las juntas 1 y 2.

## b). MODELO DE LA CONFIGURACION DEFORMADA.

El objetivo de esta parte es determinar la posición final del manipulador después de sufrir dos rotaciones consecutivas. Se muestran las deformaciones del primer eslabón y después la deformación del segundo eslabón. La primera deformación se muestra en la siguiente figura:

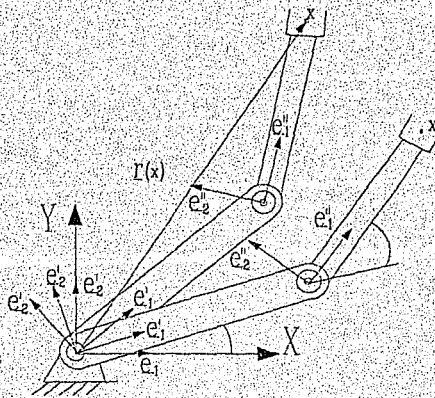


Figura 2.4.2. deformación del eslabón 1.

El movimiento de la base  $\{\underline{e}_j\}_{j=1}^3$ , y la base  $\{\underline{e}_j^*\}_{j=1}^3$ , que se asocian a las juntas 1 y 2 respectivamente, sufren una secuencia de rotaciones físicas, que se describe a continuación:

$$\begin{aligned} \underline{a}(l)_j &= \rho(q(1), \underline{e}_j) = (q(1) * \underline{e}_j * \overline{q(1)}) \\ &= (q(1) * p(1)) * \underline{e}_j * (\overline{p(1)} * \overline{q(1)}) \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

$$\begin{aligned} \underline{a}(l)_j^* &= \rho(q(1), \underline{e}_j^*) = (q(1) * \underline{e}_j^* * \overline{q(1)}) \\ &= (q(1) * (p(2) * p(1))) * \underline{e}_j^* * (\overline{p(1)} * \overline{p(2)}) * \overline{q(1)} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

donde,

$$q(1)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \quad q(1)_v = \text{Sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \underline{w}_1 \quad (2.4.10)$$

siendo  $\theta_1$  y  $\underline{w}_1 = \{0,0,1\}$ , el ángulo y eje de rotación. Entonces las componentes de  $q(1)$ , son:

$q(1) = (q(1)_0, 0, 0, q(1)_3)$ . Las bases  $\{\underline{a}(1)_j\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(1)'_j\}_{j=1}^3$ , serán llamadas las bases móviles.

Como segunda deformación consideremos la mostrada en la siguiente figura:

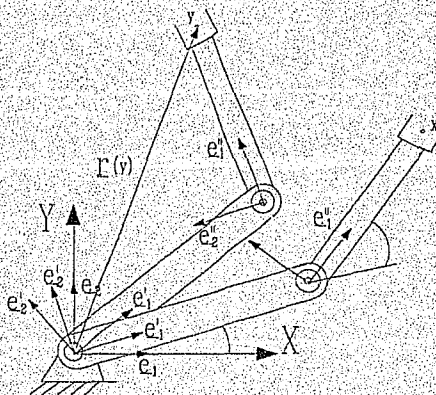


Figura 2.4.3. deformación del eslabón 2.

Se observa que la junta 2, sufre una rotación de ángulo  $\theta_2$ , y eje de rotación  $\underline{w}_2 = \{0,0,1\}$ , el eslabón 1 no se deforma, tal que, las bases móviles  $\{\underline{a}(2)_j\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(2)'_j\}_{j=1}^3$ , se construyen como:

$$\begin{aligned} \underline{a}(2)_j &= \underline{a}(1)_j, \\ \underline{a}(2)'_j &= \rho(q(2), \underline{a}(2)_j) = q(2) * \underline{e}_j * \overline{q(2)} \\ &= (q(2) * q(1)) * (p(2) * p(1)) * \underline{e}_j * \overline{(q(2) * q(1)) * p(2) * p(1)} \end{aligned} \quad (2.4.11)$$



por lo tanto, el Quaternion unitario correspondiente a esta rotación es:

$$q(2)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\theta_2}{2}\right), \quad q(2)_v = \text{Sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \mathcal{W}_2, \quad (2.4.12)$$

entonces las componentes de  $q(2)$ , son:  $q(2) = (q(2)_0, 0, 0, q(2)_3)$

La ecuación que modela la posición del órgano terminal en la configuración deformada referido al Sistema de Referencia global, es la siguiente:

$$r(2) = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 \quad (2.4.13)$$

siendo  $d_1, d_2$ , las longitudes de los eslabnes, donde,

$$\underline{b}_1 = d_1 \cdot \underline{a}(1)_1 = d_1 \cdot [(q(1) * p(1)) * \underline{e}_1 * \overline{(p(1) * q(1))}] \quad (2.4.14)$$

$$\begin{aligned} \underline{b}_2 &= d_2 \cdot \underline{a}(1)_1 \\ &= d_2 \cdot [(q(2) * q(1)) * (p(2) * p(1)) * \underline{e}_1 * \overline{(q(2) * q(1) * p(2) * p(1))}] \quad (2.4.15) \end{aligned}$$

## II.5. PROGRAMA COMPUTACIONAL.

En esta parte, se explicita la ecuación (2.4.13), utilizando para ello el lenguaje de cálculo simbólico *Mathematica*® [4]. Mediante el siguiente programa computacional:

$e01 = \{0, 1, 0, 0\};$

$p(1) = \{p(1)0, 0, 0, p(1)3\};$

$q(1) = \{q(1)0, 0, 0, q(1)3\}$ ; quaternion que determina la rotación física del actuador 1.

$e1j = \text{Ropq}[q(1), \text{Ropq}[p(1), e01]]; \text{Ropq}[\ ]$ , es la transformación de la bases móvil 1

$p(2) = \{p(2)0, 0, 0, p(2)3\};$

$q(2) = \{q(2)0, 0, 0, q(2)3\}$ ; quaternion que determina la rotación física del actuador 2.

$e2j = \text{Ropq}[q(2), \text{Ropq}[p(2), e1j]]; \text{rotación de la base móvil 2}$

Dimensiones de las barras

$d1, \quad d2;$

orientación de los eslabones

$b1 = d1 \cdot e1j;$

$b2 = d2 \cdot e2j;$

vector de posición  $r(x)$  del órgano terminal.

$rp = \text{Simplify}[b1+b2]$

$$= \{0, d1 (q(1)0^2 p(1)0^2 - p(1)0^2 q(1)3^2 - 4 q(1)0 p(1)0 q(1)3 p(1)3 - q(1)0^2 p(1)3^2 + q(1)3^2 p(1)3^2) + d2 (q(1)0^2 p(1)0^2 q(2)0^2 p(2)0^2 - p(1)0 q(1)3^2 q(2)0^2 p(2)0^2 - 4 q(1)0 p(1)0 q(1)3 p(1)3 q(2)0^2 p(2)0^2 - q(1)0^2 p(1)3^2 q(2)0^2 p(2)0^2 + q(1)3^2 p(1)3^2 q(2)0^2 p(2)0^2 - 4 q(1)0 p(1)0^2 q(1)3 q(2)0 p(2)0^2 q(2)3 - 4 q(1)0^2 p(1)0 p(1)3 q(2)0 p(2)0^2 q(2)3 + 4 p(1)0 q(1)3^2 p(1)3 q(2)0 p(2)0^2 q(2)3 + 4 q(1)0 q(1)3 p(1)3^2 q(2)0 p(2)0^2 q(2)3 - q(1)0^2 p(1)0^2 p(2)0^2 q(2)3^2 + p(1)0^2 q(1)3^2 p(2)0^2 q(2)3^2 + 4 q(1)0 p(1)0 q(1)3 p(1)3 p(2)0^2 q(2)3^2 + q(1)0^2 p(1)3^2 p(2)0^2 q(2)3^2 - q(1)3^2 p(1)3^2 p(2)0^2 q(2)3^2 - 4 q(1)0 p(1)0^2 q(1)3 q(2)0^2 p(2)0 p(2)3 - 4 q(1)0^2 p(1)0 p(1)3 q(2)0^2 p(2)0 p(2)3 + 4 p(1)0 q(1)3^2 p(1)3$$

$$\begin{aligned}
& q(2)0^2 p(2)0 p(2)3 + 4 q(1)0 q(1)3 p(1)3^2 q(2)0^2 p(2)0 p(2)3 - 4 q(1)0^2 p(1)0^2 q(2)0 p(2)0 \\
& q(2)3 p(2)3 + 4 p(1)0^2 q(1)3^2 q(2)0 p(2)0 q(2)3 p(2)3 + 16 q(1)0 p(1)0 q(1)3 p(1)3 q(2)0 \\
& p(2)0 q(2)3 p(2)3 + 4 q(1)0^2 p(1)3^2 q(2)0 p(2)0 q(2)3 p(2)3 - 4 q(1)3^2 p(1)3^2 q(2)0 p(2)0 \\
& q(2)3 p(2)3 + 4 q(1)0 p(1)0^2 q(1)3 p(2)0 q(2)3^2 p(2)3 + 4 q(1)0^2 p(1)0 p(1)3 p(2)0 q(2)3^2 \\
& p(2)3 - 4 p(1)0 q(1)3^2 p(1)3 p(2)0 q(2)3^2 p(2)3 - 4 q(1)0 q(1)3 p(1)3^2 p(2)0 q(2)3^2 p(2)3 - \\
& q(1)0^2 p(1)0^2 q(2)0^2 p(2)3^2 + p(1)0^2 q(1)3^2 q(2)0^2 p(2)3^2 + 4 q(1)0 p(1)0 q(1)3 p(1)3 \\
& q(2)0^2 p(2)3^2 + q(1)0^2 p(1)3^2 q(2)0^2 p(2)3^2 - q(1)3^2 p(1)3^2 q(2)0^2 p(2)3^2 + 4 q(1)0 p(1)0^2 \\
& q(1)3 q(2)0 q(2)3 p(2)3^2 + 4 q(1)0^2 p(1)0 p(1)3 q(2)0 q(2)3 p(2)3^2 - 4 p(1)0 q(1)3^2 p(1)3 \\
& q(2)0 q(2)3 p(2)3^2 - 4 q(1)0 q(1)3 p(1)3^2 q(2)0 q(2)3 p(2)3^2 + q(1)0^2 p(1)0^2 q(2)3^2 p(2)3^2 \\
& - p(1)0^2 q(1)3^2 q(2)3^2 p(2)3^2 - 4 q(1)0 p(1)0 q(1)3 p(1)3 q(2)3^2 p(2)3^2 - q(1)0^2 p(1)3^2 \\
& q(2)3^2 p(2)3^2 + q(1)3^2 p(1)3^2 q(2)3^2 p(2)3^2, 2 d1 (q(1)0 p(1)0^2 q(1)3 + q(1)0^2 p(1)0 p(1)3 \\
& - p(1)0 q(1)3^2 p(1)3 - q(1)0 q(1)3 p(1)3^2) + 2 d2 (q(1)0 p(1)0^2 q(1)3 q(2)0^2 p(2)0^2 + \\
& q(1)0^2 p(1)0 p(1)3 q(2)0^2 p(2)0^2 - p(1)0 q(1)3^2 p(1)3 q(2)0^2 p(2)0^2 - q(1)0 q(1)3 p(1)3^2 \\
& q(2)0^2 p(2)0^2 + q(1)0^2 p(1)0^2 q(2)0 p(2)0^2 q(2)3 - p(1)0^2 q(1)3^2 q(2)0 p(2)0^2 q(2)3 - 4 \\
& q(1)0 p(1)0 q(1)3 p(1)3 q(2)0 p(2)0^2 q(2)3 - q(1)0^2 p(1)3^2 q(2)0 p(2)0^2 q(2)3 + q(1)3^2 \\
& p(1)3^2 q(2)0 p(2)0^2 q(2)3 - q(1)0 p(1)0^2 q(1)3 p(2)0^2 q(2)3^2 - q(1)0^2 p(1)0 p(1)3 p(2)0^2 \\
& q(2)3^2 + p(1)0 q(1)3^2 p(1)3 p(2)0^2 q(2)3^2 + q(1)0 q(1)3 p(1)3^2 p(2)0^2 q(2)3^2 + q(1)0^2 \\
& p(1)0^2 q(2)0^2 p(2)0 p(2)3 - p(1)0^2 q(1)3^2 q(2)0^2 p(2)0 p(2)3 - 4 q(1)0 p(1)0 q(1)3 p(1)3 \\
& q(2)0^2 p(2)0 p(2)3 - q(1)0^2 p(1)3^2 q(2)0^2 p(2)0 p(2)3 + q(1)3^2 p(1)3^2 q(2)0^2 p(2)0 p(2)3 - \\
& 4 q(1)0 p(1)0^2 q(1)3 q(2)0 p(2)0 q(2)3 p(2)3 - 4 q(1)0^2 p(1)0 p(1)3 q(2)0 p(2)0 q(2)3 p(2)3 \\
& + 4 p(1)0 q(1)3^2 p(1)3 q(2)0 p(2)0 q(2)3 p(2)3 + 4 q(1)0 q(1)3 p(1)3^2 q(2)0 p(2)0 q(2)3 \\
& p(2)3 - q(1)0^2 p(1)0^2 p(2)0 q(2)3^2 p(2)3 + p(1)0^2 q(1)3^2 p(2)0 q(2)3^2 p(2)3 + 4 q(1)0 p(1)0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q(1)3^2 p(1)3^2 p(2)0^2 q(2)3^2 p(2)3^2 + q(1)0^2 p(1)3^2 p(2)0^2 q(2)3^2 p(2)3^2 - q(1)3^2 p(1)3^2 p(2)0^2 \\
& q(2)3^2 p(2)3^2 - q(1)0^2 p(1)0^2 q(1)3^2 q(2)0^2 p(2)3^2 - q(1)0^2 p(1)0^2 p(1)3^2 q(2)0^2 p(2)3^2 + p(1)0^2 \\
& q(1)3^2 p(1)3^2 q(2)0^2 p(2)3^2 + q(1)0^2 q(1)3^2 p(1)3^2 q(2)0^2 p(2)3^2 - q(1)0^2 p(1)0^2 q(2)0^2 q(2)3^2 \\
& p(2)3^2 + p(1)0^2 q(1)3^2 q(2)0^2 q(2)3^2 p(2)3^2 + 4 q(1)0^2 p(1)0^2 q(1)3^2 p(1)3^2 q(2)0^2 q(2)3^2 p(2)3^2 + \\
& q(1)0^2 p(1)3^2 q(2)0^2 q(2)3^2 p(2)3^2 - q(1)3^2 p(1)3^2 q(2)0^2 q(2)3^2 p(2)3^2 + q(1)0^2 p(1)0^2 q(1)3^2 \\
& q(2)3^2 p(2)3^2 + q(1)0^2 p(1)0^2 p(1)3^2 q(2)3^2 p(2)3^2 - p(1)0^2 q(1)3^2 p(1)3^2 q(2)3^2 p(2)3^2 - q(1)0^2 \\
& q(1)3^2 p(1)3^2 q(2)3^2 p(2)3^2, 0)
\end{aligned}$$

(2.5.1)

Un caso particular en cuanto a configuración no deformada es ilustrado a continuación:

Si  $\varphi_1 = 30^\circ$  y  $\varphi_2 = 20^\circ$ , se sustituyen en (2.4.2) y (2.4.4) y  $d_1 = 3$  y  $d_2 = 2$ , se sustituyen estos en (2.5.1), esta ecuación, se reduce a:

$$\begin{aligned}
rp = \{ & 0, 3 (0.866025 q(1)0^2 - 1. q(1)0^2 q(1)3 - 0.866025 q(1)3^2) + 2 (0.642788 q(1)0^2 q(2)0^2 \\
& - 1.53209 q(1)0^2 q(1)3^2 q(2)0^2 - 0.642788 q(1)3^2 q(2)0^2 - 1.53209 q(1)0^2 q(2)0^2 q(2)3 - \\
& 2.57115 q(1)0^2 q(1)3^2 q(2)0^2 q(2)3 + 1.53209 q(1)3^2 q(2)0^2 q(2)3 - 0.642788 q(1)0^2 q(2)3^2 + \\
& 1.53209 q(1)0^2 q(1)3^2 q(2)3^2 + 0.642788 q(1)3^2 q(2)3^2), 6 (0.25 q(1)0^2 + 0.866025 q(1)0^2 \\
& q(1)3 - 0.25 q(1)3^2) + 4 (0.383022 q(1)0^2 q(2)0^2 + 0.642788 q(1)0^2 q(1)3^2 q(2)0^2 - 0.383022 \\
& q(1)3^2 q(2)0^2 + 0.642788 q(1)0^2 q(2)0^2 q(2)3 - 1.53209 q(1)0^2 q(1)3^2 q(2)0^2 q(2)3 - 0.642788 \\
& q(1)3^2 q(2)0^2 q(2)3 - 0.383022 q(1)0^2 q(2)3^2 - 0.642788 q(1)0^2 q(1)3^2 q(2)3^2 + 0.383022 \\
& q(1)3^2 q(2)3^2), 0)
\end{aligned}$$

(2.5.2)

Se observa que la ecuación (2.5.2), queda expresada en función de  $q(1)0$ ,  $q(1)3$ ,  $q(2)0$  y  $q(2)3$ .

## II.6. MODELADO DEL MANIPULADOR PUMA.

En esta parte se modela un manipulador de seis grados de libertad conocido como el PUMA [7], el cual consiste de cuatro cuerpos rígidos, unidos por 6 juntas rotacionales. El origen del manipulador es fijado en una base de referencia global, mientras que la parte final está libre y equipada con una herramienta para realizar alguna tarea. El PUMA tiene tres grados de libertad de movimiento para posicionamiento y tres grados de libertad de movimiento para su orientación, como se muestra en la siguiente figura.

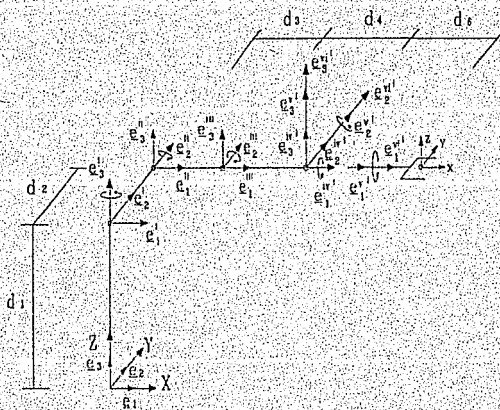


Figura 2.6.1. Sistemas de referencia global y móvil del PUMA.

El álgebra de Cuaterniones es usado para desarrollar una descripción sistemática y generalizada de la localización de los eslabones del manipulador con respecto a un sistema de referencia global (base). Para modelar el PUMA, se aplica el caso 1, es decir, todos los sistemas de referencia móviles, coinciden en la configuración no deformada, con la orientación del sistema de referencia global, como se muestra en la figura 2.6.1, por lo tanto, las rotaciones están caracterizadas por los Cuaterniones,  $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = (1, 0, 0, 0)$ . Tales Cuaterniones corresponden a la rotación trivial identidad.

A continuación se construyen las bases móviles que se asocian a cada una de las seis juntas. La secuencia de deformaciones, se asocian a las bases móviles y estarán definidas según el siguiente procedimiento:

a). Las bases  $\{\underline{e}_j\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{e}'_j\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{e}''_j\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{e}'''_j\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{e}^{IV}_j\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{e}^V_j\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{e}^{VI}_j\}_{j=1}^3$ , son rotadas un ángulo  $\theta_j$  alrededor del eje  $\underline{w}_j = (0,0,1)$ , donde, las componentes de este vector están referidos a la base  $\{\underline{e}_j\}_{j=1}^3$ , como se muestra en la siguiente figura:

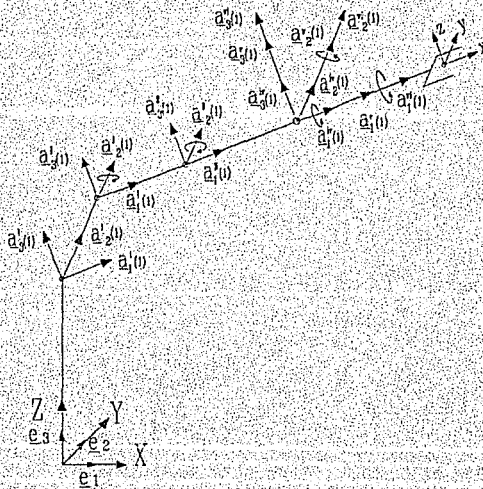


Figura 2.6.2. primera deformación.



Las bases mostradas en la figura 2.62, están determinadas por:

$$\begin{aligned} \underline{a}(t)_j &= \rho(q(t), \underline{e}_j), \\ &= q(t) * \underline{e}_j * \overline{q(t)} \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

$$\begin{aligned} \underline{a}(t)_j &= \rho(q(t), \underline{e}_j), \\ &= q(t) * \underline{e}_j * \overline{q(t)} \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

$$\begin{aligned} \underline{a}(t)_j &= \rho(q(t), \underline{e}_j), \\ &= q(t) * \underline{e}_j * \overline{q(t)} \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

$$\begin{aligned} \underline{a}(t)_j^{iv} &= \rho(q(t), \underline{e}_j^{iv}) \\ &= q(t) * \underline{e}_j^{iv} * \overline{q(t)} \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

$$\begin{aligned} \underline{a}(t)_j^v &= \rho(q(t), \underline{e}_j^v) \\ &= q(t) * \underline{e}_j^v * \overline{q(t)} \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

$$\begin{aligned} \underline{a}(t)_j^{vi} &= \rho(q(t), \underline{e}_j^{vi}) \\ &= q(t) * \underline{e}_j^{vi} * \overline{q(t)} \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

el Quaternion unitario asociado a esta rotación, está caracterizado por:

$$q(t)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \quad q(t)_v = \text{Sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \underline{w}_j \quad (2.6.12)$$

b). Las bases  $\{\underline{a}(1)_j\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(1)_{j'}\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(1)_{j''}\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(1)_{j'''}\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(1)_{j''''}\}_{j=1}^3$ , son rotadas por un Quaternion  $q(2)$ , de ángulo  $\theta_2$  y eje  $\underline{w}_2 = \{0,1,0\}$ , los componentes de este vector están referidos a la base  $\{\underline{a}(1)_j\}_{j=1}^3$ . La configuración deformada correspondiente a esta secuencia de rotaciones se muestra en la siguiente figura.

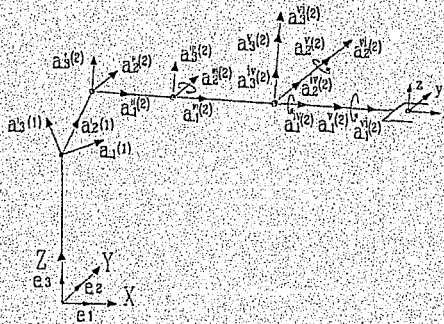


Figura 2.6.3. segunda deformación.

Entonces las base móviles se construyen como:

$$\underline{a}(2)_j = \underline{a}(1)_j, \tag{2.6.13}$$

$$\underline{a}(2)_{j'} = \rho(q(2), \underline{a}(1)_{j'}), \tag{2.6.14}$$

$$\underline{a}(2)_{j''} = \rho(q(2), \underline{a}(1)_{j''}), \tag{2.6.16}$$

$$\underline{a}(2)_{j'''} = \rho(q(2), \underline{a}(1)_{j'''}), \tag{2.6.17}$$

$$\underline{a}(2)_{j''''} = \rho(q(2), \underline{a}(1)_{j''''}), \tag{2.6.18}$$

$$\underline{a}(2)_{j'''''} = \rho(q(2), \underline{a}(1)_{j'''''}), \tag{2.6.19}$$

entonces, el Quaternion unitario correspondiente a esta rotación es:

$$q(2)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\theta_2}{2}\right), \quad q(2)_r = \text{Sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \underline{w}_2, \tag{2.6.20}$$

c). Las bases  $\{\underline{a}(2)_j\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(2)_j^{IV}\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(2)_j^V\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(2)_j^{VI}\}_{j=1}^3$ , son rotadas por un Quaternion  $q(3)$ , de ángulo  $\theta_3$  alrededor del eje  $\underline{w}_3 = \{0,1,0\}$ , donde los componentes de este vector están referidos a la base  $\{\underline{a}(2)_j\}_{j=1}^3$ , como se ilustra en la figura siguiente:

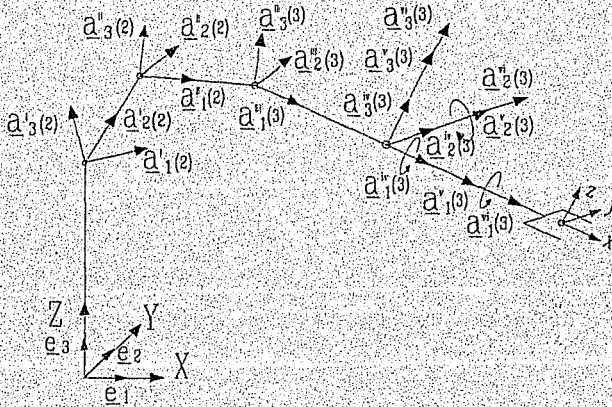


Figura 2.6.4. Tercera deformación.

De la figura 2.6.4. se obtiene:

$$\underline{a}(3)_j = \underline{a}(2)_j, \quad (2.6.21)$$

$$\underline{a}(3)_j^I = \underline{a}(2)_j^I, \quad (2.6.22)$$

$$\underline{a}(3)_j^{II} = \rho(q(3), \underline{a}(2)_j^{II}), \quad (2.6.23)$$

$$\underline{a}(3)_j^{IV} = \rho(q(3), \underline{a}(2)_j^{IV}), \quad (2.6.24)$$

$$\underline{a}(3)_j^V = \rho(q(3), \underline{a}(2)_j^V), \quad (2.6.25)$$

$$\underline{a}(3)_j^{VI} = \rho(q(3), \underline{a}(2)_j^{VI}) \quad (2.6.26)$$

entonces, el Quaternion unitario correspondiente a esta rotación es:

$$q(3)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\theta_3}{2}\right), \quad q(3)_v = \text{Sen}\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \underline{w}_3, \quad (2.6.27)$$

d). Las bases  $\{\underline{a}(3)_j^v\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(3)_j^v\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(3)_j^{vv}\}_{j=1}^3$ , son rotadas un ángulo  $\theta_4$ , con respecto al eje  $\underline{w}_4 = \{1,0,0\}$ ; las componentes de este eje están referidos a la base  $\{\underline{a}(3)_j^{vv}\}_{j=1}^3$ . La configuración deformada después de esta rotación se muestra en la siguiente figura:

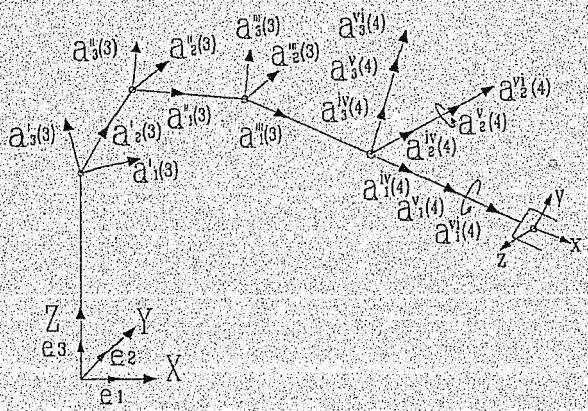


Figura 2.6.5. cuarta deformación.

Obteniéndose,

$$\underline{a}(4)_j = \underline{a}(3)_j, \tag{2.6.28}$$

$$\underline{a}(4)_j^v = \underline{a}(3)_j^v, \tag{2.6.29}$$

$$\underline{a}(4)_j^{vv} = \underline{a}(3)_j^{vv}, \tag{2.6.30}$$

$$\underline{a}(4)_j^{vvv} = \rho(q(4), \underline{a}(3)_j^{vvv}), \tag{2.6.31}$$

$$\underline{a}(4)_j^v = \rho(q(4), \underline{a}(3)_j^v), \tag{2.6.32}$$

$$\underline{a}(4)_j^{vv} = \rho(q(4), \underline{a}(3)_j^{vv}), \tag{2.6.33}$$

entonces, el Quaternion unitario correspondiente a esta rotación es

$$q(4)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\theta_4}{2}\right), \quad q(4)_v = \text{Sen}\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \underline{w}_4, \tag{2.6.34}$$

e). Las bases  $\{\underline{a}(t)^V\}_{j=1}^3$ ,  $\{\underline{a}(t)^{IV}\}_{j=1}^3$ , son efectuadas por una rotación de ángulo  $\theta_s$ , y eje  $\underline{w}_s = \{0,1,0\}$ , las componentes de este vector están dados en la base  $\{\underline{a}(t)^V\}_{j=1}^3$ . La configuración deformada después de esta rotación se muestra en la siguiente figura:

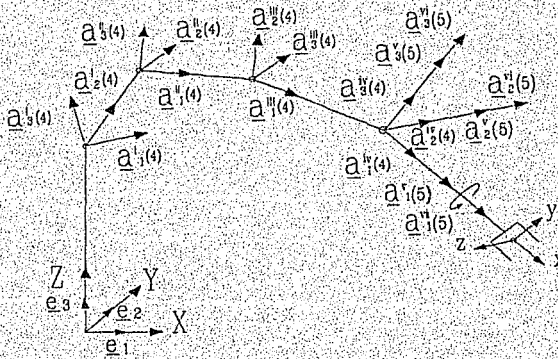


Figura 2.6.6. rotación de la base  $\{\underline{a}(t)^V\}_{j=1}^3$ .

Las bases móviles mencionadas se construyen de la siguiente manera:

$$\underline{a}(s)_j = \underline{a}(t)_j \quad (2.6.35)$$

$$\underline{a}(s)_j^{II} = \underline{a}(t)_j^{II} \quad (2.6.36)$$

$$\underline{a}(s)_j^{III} = \underline{a}(t)_j^{III} \quad (2.6.37)$$

$$\underline{a}(s)_j^{IV} = \underline{a}(t)_j^{IV} \quad (2.6.38)$$

$$\underline{a}(s)_j^V = \rho(q(s), \underline{a}(t)_j^V), \quad (2.6.39)$$

$$\underline{a}(s)_j^{VI} = \rho(q(s), \underline{a}(t)_j^{VI}) \quad (2.6.40)$$

entonces, el Cuaternión unitario correspondiente a esta rotación es:

$$q(s)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\theta_s}{2}\right), \quad q(s)_v = \text{Sen}\left(\frac{\theta_s}{2}\right) \underline{w}_s, \quad (2.6.41)$$

e). La base móvil  $\{\underline{a}(s)^{iv}\}_{j=1}^3$ , es rotada un ángulo  $\theta_6$  alrededor del eje  $\underline{w}_6 = \{1,0,0\}$ , las componentes de este eje están referidas en la base  $\{\underline{a}(s)^{iv}\}_{j=1}^3$ , como se muestra en la siguiente figura

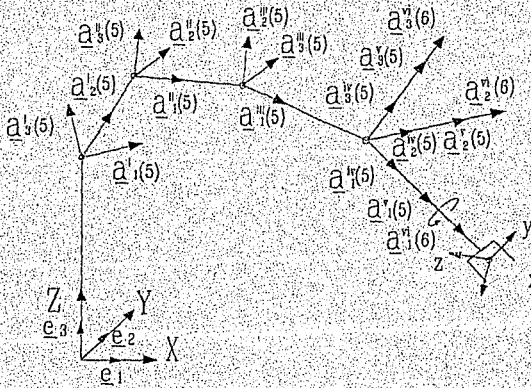


Figura 2.6.7. sexta deformación.

La base móvil se construye como:

$$\underline{a}(\phi)_j = \underline{a}(s)_j \quad (2.6.42)$$

$$\underline{a}(\phi)_j = \underline{a}(s)_j \quad (2.6.43)$$

$$\underline{a}(\phi)_j = \underline{a}(s)_j \quad (2.6.44)$$

$$\underline{a}(\phi)_j^{iv} = \underline{a}(s)_j^{iv} \quad (2.6.45)$$

$$\underline{a}(\phi)_j^v = \underline{a}(s)_j^v \quad (2.6.46)$$

$$\underline{a}(\phi)_j^{vi} = \rho(q(s), \underline{a}(s)_j^{vi}) \quad (2.6.47)$$

el Quaternion unitario correspondiente a esta rotación es:

$$q(6)_0 = \text{Cos}\left(\frac{\theta_6}{2}\right), \quad q(6)_v = \text{Sen}\left(\frac{\theta_6}{2}\right)\underline{w}_6 \quad (2.6.48)$$



Los eslabones al deformarse por las rotaciones, cambian de posición. En la configuración deformada final, el vector de posición del elemento final del manipulador está dado por:

$$r(x) = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3 + \underline{b}_4 + \underline{b}_6 \quad (2.6.49)$$

donde,

$$\underline{b}_1 = d_1 \cdot \underline{a}(1)'_1 \quad (2.6.50)$$

$$\underline{b}_2 = d_2 \cdot \underline{a}(2)'_1 \quad (2.6.51)$$

$$\underline{b}_3 = d_3 \cdot \underline{a}(3)''_1 \quad (2.6.52)$$

$$\underline{b}_4 = d_4 \cdot \underline{a}(4)'''_1 \quad (2.6.53)$$

$$\underline{b}_6 = d_6 \cdot \underline{a}(6)''''_1 \quad (2.6.54)$$

Las componentes del vector de posición están referidos al sistema de referencia global.

## II.7. CÓDIGO COMPUTACIONAL.

En esta parte se generan simbólicamente las ecuaciones generales de la posición y la orientación para el PUMA, con la ayuda del lenguaje de cálculo formal *Mathematica*<sup>®</sup> [4], [5]

(\*MODELO DEL PUMA EN SU POSICIÓN INICIAL

definición del Sistema de Referencia Global \*)

e0={{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};

(\*definición de los Sistemas de Referencia Relativo al Sistema de Referencia Global \*)

e1=e0;e2=e1;e3=e2;e4=e3;e5=e4;e6=e5;

op0=e6;

(\*definición de la orientación de los eslabones\*)

b1=d1 e0[[4]]; b2=d2 e1[[3]]; b3=d3 e2[[2]]; b4=d4 e3[[2]];

b6=a6 e6[[2]];

(\*DIMENSIÓN DE LAS ESLABONES\*)

d1=5,d2=4;d3=3,d4=2;a6=1;

(\*POSICIÓN INICIAL DEL ÓRGANO TERMINAL \*)

rp0=b1+b2+b3+b4+b6

{6; 4; 5}

(\*ORIENTACIÓN DEL ÓRGANO TERMINAL\*)

op0

{{0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}

DEFINICIÓN DE LOS QUATERNIONES QUE MODELAN LAS CANTIDADES FÍSICAS QUE IMPRIMEN LOS ACTUADORES A LOS ELEMENTOS DEL MÁNIPULADOR.

(\*El quaternion q(1), describe la rotación del actuador 1.

donde q(1)0, cantidad de rotación y q(1)3 la dirección del eje \*)

q(1) = { q(1)0,0,0, q(1)3};

q(2) = { q(2)0,0,0, q(2)3};

Q(2)=Simplify[Ropq[q(1), q(2)]];

{q(2)0, -2 q(1)0 q(1)3 q(3)2, (q(1)0^2-q(1)3^2) q2, 0};

q(3)={q(3)0,0,q(3)2,0};

q(3)2=N[ $\text{Sin}[90 \text{ Pi}/360]$ ],q(3)3=0;\*)

q(3)=Simplify[Ropq[q(2),Ropq[q(1),q(3)]]];

{q(3)0, -2 q(1)0 q(1)3 q(3)2, (q(1)0^2-q(1)3^2) q(3)2, 0};

q(4)={q(4)0,q(4)1,0,0};

q(4)2=0,q(4)3=0;\*)

q(4)=Simplify[Ropq[q(3),Ropq[q(2),Ropq[q(1),q(4)]]];

S={q(4)0, (q(1)0^2 - q(1)3^2\*(q(2)0^2\*q(3)0^2 - q(2)2^2\*q(3)0^2 - 4\*q(2)0\*q(2)2\*q(3)0\*q(3)2 - q(2)0^2\*q(3)2^2 + q(2)2^2\*q(3)2^2)\*q(4)1, 2\*q(1)0\*q(1)3\*(q(2)0^2\*q(3)0^2 - q(2)2^2\*q(3)0^2 - 4\*q(2)0\*q(2)2\*q(3)0\*q(3)2 - q(2)0^2\*q(3)2^2 + q(2)2^2\*q(3)2^2)\*q(4)1, 2\*(-(q(2)0\*q(2)2\*q(3)0^2) - q(2)0^2\*q(3)0\*q(3)2 + q(2)2^2\*q(3)0\*q(3)2 + q(2)0\*q(2)2\*q(3)2^2)\*q(4)1};

$$q(5) = \{q(5)0, 0, q(5)2, 0\};$$

$$q(5) = \text{Simplify}[\text{Ropq}[q(4), \text{Ropq}[q(3), \text{Ropq}[q(2), \text{Ropq}[q(1), q(5)]]]]];$$

$$q(6) = \{q(6)0, q(6)1, 0, 0\};$$

$$q(6) = \text{Simplify}[\text{Ropq}[q(5), \text{Ropq}[q(4), \text{Ropq}[q(3), \text{Ropq}[q(2), \text{Ropq}[q(1), q(6)]]]]]]];$$

$$b1d = b1;$$

$$b2d = \text{Ropq}[q(1), b2];$$

$$b3d = \text{Ropq}[q(2), \text{Ropq}[q(1), b3]];$$

$$b4d = \text{Ropq}[q(3), \text{Ropq}[q(2), \text{Ropq}[q(1), b4]]];$$

$$b6d = \text{Ropq}[q(6), \text{Ropq}[q(5), \text{Ropq}[q(4), \text{Ropq}[q(3), \text{Ropq}[q(2), \text{Ropq}[q(1), b6]]]]]];$$

$$rp = b1d + b2d + b3d + b4d + b6d$$

$$op = \text{Simplify}[\text{Table}[\text{Ropq}[q(6), \text{Ropq}[q(5), \text{Ropq}[q(4), \text{Ropq}[q(3), \text{Ropq}[q(2), \text{Ropq}[q(1), op0[[i]]]]]]]]], \{i, 4\}]]$$

Ecuación de la posición

$$rp = \{0, -8 q(1)0 q(1)3 + 3 (q(1)0^2 - q(1)3^2) q(2)0^2 - 3 (q(1)0^2 - q(1)3^2) q(2)2^2 + 2 (q(1)0^2 - q(1)3^2)(q(2)0^2 q(3)0^2 - q(2)2^2 q(3)0^2 - 4 q(2)0 q(2)2 q(3)0 q(3)2 - q(2)0^2 q(3)2^2 + q(2)2^2 q(3)2^2), 4 q(1)0^2 - 4 q(1)3^2 + 6 q(1)0 q(1)3 q(2)0^2 - 6 q(1)0 q(1)3 q(2)2^2 + 4 q(1)0 q(1)3 (q(2)0^2 q(3)0^2 - q(2)2^2 q(3)0^2 - 4 q(2)0 q(2)2 q(3)0 q(3)2 - q(2)0^2 q(3)2^2 + q(2)2^2 q(3)2^2), 5 - 3 q(2)0 q(2)2 - 12 q(1)0^2 q(1)3^2 q(2)0 q(2)2 - 3 (q(1)0^2 - q(1)3^2)^2 q(2)0 q(2)2 + 4 (-(q(2)0 q(2)2 q(3)0^2) - q(2)0^2 q(3)0 q(3)2 + q(2)2^2 q(3)0 q(3)2 + q(2)0 q(2)2 q(3)2^2)\};$$

Posición en X:

$$posxi = \{0, (q(1)0^2 - q(1)3^2) (q(2)0^2 q(3)0^2 - q(2)2^2 q(3)0^2 - 4 q(2)0 q(2)2 q(3)0 q(3)2 - q(2)0^2 q(3)2^2 + q(2)2^2 q(3)2^2), -2 q(1)0 q(1)3 (q(2)0^2 q(3)0^2 - q(2)2^2 q(3)0^2 - 4 q(2)0 q(2)2 q(3)0 q(3)2 - q(2)0^2 q(3)2^2 + q(2)2^2 q(3)2^2), 2 (-(q(2)0 q(2)2 q(3)0^2) - q(2)0^2 q(3)0 q(3)2 + q(2)2^2 q(3)0 q(3)2 + q(2)0 q(2)2 q(3)2^2)\};$$

Posición en Y:

$$posyi = \{0, -2 q(1)0 q(1)3, q(1)0^2 - q(1)3^2, 0\};$$

Posición en  $Z$ :

$$\text{poszi}=\{0,2(-q(1)0^2+q(1)3^2) (- (q(2)0 q(2)2 q(3)0^2) -q(2)0^2 q(3)0 q(3)2+q(2)2^2 q(3)0 q(3)2+q(2)0 q(2)2 q(3)2^2), 4 q(1)0 q(1)3 (q(2)0 q(2)2 q(3)0^2+q(2)0^2 q(3)0 q(3)2-q(2)2^2 q(3)0 q(3)2-q(2)0 q(2)2 q(3)2^2), q(2)0^2 q(3)0^2-q(2)2^2 q(3)0^2-4 q(2)0 q(2)2 q(3)0 q(3)2 - q(2)0^2 q(3)2^2+q(2)2^2 q(3)2^2 \};$$

$$S=\text{Simplify}[N[\text{Ropq}[R,\text{Ropq}[Q,\text{Ropq}[p,s]]]]];$$

$$S=\{s0, (p0^2 - p3^2)*((q0^2-q2^2)*(r0^2-r2^2)-4*q0*q2*r0*r2)*s1, 2*p0*p3*((q0^2-q2^2)*(r0^2-r2^2)-4*q0*q2*r0*r2)*s1, 2*(-(r0^2-r2^2)*q0*q2-(q0^2-q2^2)*r0*r2)*s1\};$$

$$T=\text{Simplify}[\text{Ropq}[S,\text{Ropq}[R,\text{Ropq}[Q,\text{Ropq}[p,t]]]]];$$

$$(*T=\{t0,2*t2*(-p0*p3*(s0^2-s1^2)+2*q0*q2*s0*s1*(p0^2-p3^2)*(r0^2-r2^2)+2*r0*r2*s0*s1*(p0^2-p3^2)*(q0^2-q2^2)), t2*((p0^2-p3^2)*(s0^2-s1^2)+8*p0*p3*q0*q2*s0*s1*(r0^2-r2^2)+8*p0*p3*r0*r2*s0*s1*(q0^2-q2^2)), 2*s0*s1*t2*((q0^2-q2^2)*(r0^2-r2^2)-4*q0*q2*r0*r2)\};*)$$

Posición en Z:

$$\text{poszi} = \{0, 2(-q(1)0^2 + q(1)3^2) (-q(2)0 q(2)2 q(3)0^2) - q(2)0^2 q(3)0 q(3)2 + q(2)2^2 q(3)0 q(3)2 + q(2)0 q(2)2 q(3)2^2\}, 4 q(1)0 q(1)3 (q(2)0 q(2)2 q(3)0^2 + q(2)0^2 q(3)0 q(3)2 - q(2)2^2 q(3)0 q(3)2 - q(2)0 q(2)2 q(3)2^2), q(2)0^2 q(3)0^2 - q(2)2^2 q(3)0^2 - 4 q(2)0 q(2)2 q(3)0 q(3)2 - q(2)0^2 q(3)2^2 + q(2)2^2 q(3)2^2\};$$

$$S = \text{Simplify}[N[\text{Ropq}[R, \text{Ropq}[Q, \text{Ropq}[p, s]]]]];$$

$$S = \{s_0, (p_0^2 - p_3^2) * ((q_0^2 - q_2^2) * (r_0^2 - r_2^2) - 4 * q_0 * q_2 * r_0 * r_2) * s_1, 2 * p_0 * p_3 * ((q_0^2 - q_2^2) * (r_0^2 - r_2^2) - 4 * q_0 * q_2 * r_0 * r_2) * s_1, 2 * (-r_0^2 - r_2^2) * q_0 * q_2 - (q_0^2 - q_2^2) * r_0 * r_2 * s_1\};$$

$$T = \text{Simplify}[\text{Ropq}[S, \text{Ropq}[R, \text{Ropq}[Q, \text{Ropq}[p, t]]]]];$$

$$(*T = \{t_0, 2 * t_2 * (-p_0 * p_3 * (s_0^2 - s_1^2) + 2 * q_0 * q_2 * s_0 * s_1 * (p_0^2 - p_3^2) * (r_0^2 - r_2^2) + 2 * r_0 * r_2 * s_0 * s_1 * (p_0^2 - p_3^2) * (q_0^2 - q_2^2)), t_2 * ((p_0^2 - p_3^2) * (s_0^2 - s_1^2) + 8 * p_0 * p_3 * q_0 * q_2 * s_0 * s_1 * (r_0^2 - r_2^2) + 8 * p_0 * p_3 * r_0 * r_2 * s_0 * s_1 * (q_0^2 - q_2^2)), 2 * s_0 * s_1 * t_2 * ((q_0^2 - q_2^2) * (r_0^2 - r_2^2) - 4 * q_0 * q_2 * r_0 * r_2)\}; *)$$

## Capítulo III. Cinemática Inversa.

---

En el capítulo II, se desarrolló un procedimiento sistemático para determinar la posición y la orientación del punto final de una cadena cinemática, conocidos los ángulos y los ejes de rotación, (Quaterniones asociados equivalentes), de las juntas; es decir, el problema de la cinemática directa. Ahora se analiza el problema de la cinemática inversa, esto es, determinar los Quaterniones que caracterizan los ejes de las juntas, dado una posición y una orientación deseada del punto final, con respecto a una referencia global. La cinemática inversa es importante, ya que por lo general las tareas son formuladas en términos de la posición y la orientación del órgano terminal. Este problema cinemático se puede definir como:

Sea una posición y una orientación conocida de la parte terminal del manipulador, determinar los ángulo o los Quaterniones, de los ejes de las juntas que alcancen la posición y la orientación deseada con respecto a una referencia global.

Este problema de hecho presenta más dificultades que el problema directo, ya que, la solución al mismo, implica resolver un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales del tipo polinomial, en los componentes de los Quaterniones que caracterizan a las rotaciones.

Dentro de la modelación de Sistemas Mecánicos de Cadena Abierta, este problema es el más importante, ya que, por lo general interesa encontrar la variación de movimiento de cada actuador para realizar una tarea específica. Para ilustrar la solución a este problema, se presentan los ejemplos tratados en el capítulo anterior, sección II.5 y II.6. El método de resolución a utilizar es el de Newton-Raphson, el cual es descrito en la siguiente sección.



### III.1. MÉTODO NEWTON-RAPHSON.

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se considera el problema siguiente, encuentre  $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ . La solución se describe en el siguiente algoritmo:

Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$ , el término  $x_{i+1}, i=1, 2, \dots, n$ , se determina de  $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ , hasta la convergencia.

Para resolver un sistema  $n$  variables, del tipo:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) &= 0 \\ f_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

se procede de la siguiente manera. La ecuación (3.1.1) se expresa en notación vectorial como:  $f(\theta) = 0$ . El teorema de Taylor es aplicado, obteniéndose:  $f(\theta+h) \approx f(\theta) + J(\theta)h$ . Ahora, si se asume que  $\theta$  es la raíz y siendo  $f(\theta) = 0$ , entonces el error  $h$  se puede aproximar como:  $h = J^{-1}(\theta)f(\theta+h)$ . Como no se conoce  $\theta$ , no se puede determinar el inverso  $J^{-1}(\theta)$ , pero si aproximarlo con el vector inicial  $J^{-1}(\theta+h)$ . Generándose el siguiente esquema iterativo:

$$\theta_{i+1} = \theta_i - J^{-1}(\theta_i)f(\theta_i), \tag{3.1.2}$$

el cual es conocido como el método de Newton-Raphson para  $n$  variables. En la práctica sin embargo, invertir la matriz  $J^{-1}(\theta)$  es muy lento, una manera rápida de resolver las ecuaciones lineales, es plantearlas como:

$$J(\theta_i)h_i = f(\theta_i), \tag{3.1.3}$$

con  $h_i = \theta_i - \theta_{i-1}$

y usar el método de factorización LU, [6].

### III.2 MANIPULADOR DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.

En esta parte se resuelve y se simula la cinemática inversa del manipulador de dos grados de libertad, presentado en la sección II.5. Para esto, se observa que la posición del punto final del manipulador en la configuración deformada está determinada por la ecuación (2.5.2), este es el problema a resolver:

Encuentre  $q(1)0, q(1)3, q(2)0, q(2)3$ , de :

$$\begin{aligned} r_p = \{ & 0, 3 (0.866025 q(1)0^2 - 1 q(1)0 q(1)3 - 0.866025 q(1)3^2) + 2 (0.642788 q(1)0^2 q(2)0^2 \\ & - 1.53209 q(1)0 q(1)3 q(2)0^2 - 0.642788 q(1)3^2 q(2)0^2 - 1.53209 q(1)0^2 q(2)0 q(2)3 - \\ & 2.57115 q(1)0 q(1)3 q(2)0 q(2)3 + 1.53209 q(1)3^2 q(2)0 q(2)3 - 0.642788 q(1)0^2 q(2)3^2 + \\ & 1.53209 q(1)0 q(1)3 q(2)3^2 + 0.642788 q(1)3^2 q(2)3^2), 6 (0.25 q(1)0^2 + 0.866025 q(1)0 \\ & q(1)3 - 0.25 q(1)3^2) + 4 (0.383022 q(1)0^2 q(2)0^2 + 0.642788 q(1)0 q(1)3 q(2)0^2 - 0.383022 \\ & q(1)3^2 q(2)0^2 + 0.642788 q(1)0^2 q(2)0 q(2)3 - 1.53209 q(1)0 q(1)3 q(2)0 q(2)3 - 0.642788 \\ & q(1)3^2 q(2)0 q(2)3 - 0.383022 q(1)0^2 q(2)3^2 - 0.642788 q(1)0 q(1)3 q(2)3^2 + 0.383022 \\ & q(1)3^2 q(2)3^2), 0\} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

con:

$$q(1)0^2 + q(1)3^2 = 1 \quad (3.2.2)$$

$$q(2)0^2 + q(2)3^2 = 1 \quad (3.2.3)$$

Esta ecuación es un sistema algebraico de ecuaciones no lineales tipo polinomial.

El problema cinemático inverso aplicado a una trayectoria, se define de la siguiente manera.

**Dado la trayectoria que debe seguir el extremo final del manipulador, encuentre los ángulos y ejes de rotación correspondientes, tal que las ecuaciones (3.2.1) - (3.2.3), sean satisfechas.**

Para resolver este problema, se discretiza la trayectoria en un conjunto de  $n$  segmentos, cuyo extremo inicial es conocido y el extremo final es un punto de la trayectoria que se desea alcanzar. entonces, la solución de este problema se reduce a encontrar  $n$  soluciones del problema cinemático arriba mencionado.

Para ilustrar la solución, simularemos una trayectoria recta.

Sea el punto inicial  $p_i = \{3.6, 1.4\}$  y el punto final de una recta,  $p_f = \{1, 4\}$ , la trayectoria

está dada por la ecuación  $y = mx + b$ , y la pendiente  $m = \frac{(x_f - x_i)}{(y_f - y_i)} = \frac{(1 - 4)}{(4 - 1)} = -1$ ,

por lo tanto,

$$y(x) = -x + 5 \quad (3.2.4)$$

Discretizando (3.2.4), tan pequeño como sea necesario, se formula una lista de los puntos, según se muestra en la siguiente tabla:

x	y
1	4
1.2	3.8
1.4	3.6
1.6	3.4
1.8	3.2
2.0	3
2.2	2.8
2.4	2.6
2.6	2.4
2.8	2.2
3.0	2.0
3.2	1.8
3.4	1.6
3.6	1.4

Tabla 2.1.1. Puntos de la recta  $y = -x + 5$

La resolución numérica de este problema se realiza mediante el siguiente programa computacional, desarrollado con la ayuda de *Mathematica*®

PROGRAMA PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES 4x4 NO LINEALES.  
 PARA ENCONTRAR LOS QUATERNIONES  $q(1)$  Y  $q(2)$ .

Se asignan a  $f(\theta_i) = 0$  los elementos de la ecuación de posición, (3.2.1)

$$f[1] = N[rp[[2]] - px];$$

$$f[2] = N[rp[[3]] - py];$$

Las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.3) se asignan a  $f(\theta_i)$ , para completar el sistema de ecuaciones.

$$f[3] = N[q(1)0^2 + q(1)3^2 - 1];$$

$$f[4] = N[q(2)0^2 + q(2)3^2 - 1];$$

Se forma la matriz Jacobiana  $J$ , calculando las derivadas parciales con respecto a cada una de las cuatro incógnitas.

$$j[1] = \text{Table}[D[f[i], q(1)0], \{i, 4\}];$$

$$j[2] = \text{Table}[D[f[i], q(2)0], \{i, 4\}];$$

$$j[3] = \text{Table}[D[f[i], q(1)3], \{i, 4\}];$$

$$j[4] = \text{Table}[D[f[i], q(2)3], \{i, 4\}];$$

Se escribe  $f(\theta_i)$  como un vector en función de las cuatro ecuaciones.

$$f = \{f[1], f[2], f[3], f[4]\};$$

Se le aplica la traspuesta a la matriz del jacobiano, para manejar las ecuaciones como vectores

$$J = \text{Transpose}[\{j[1], j[2], j[3], j[4]\}];$$

vector de incógnitas,

$$h = \{q(2)0, q(2)3, q(1)3, q(2)3\};$$

Se formula el sistema de ecuaciones lineales de la forma:  $Ax = b$

$$b = J \cdot h - f;$$

Se toma como vector inicial, los ángulos de la configuración estática, para todos los casos.

$$p(1)0 = \text{Cos}[30 \text{ Pi}/360]; \quad q(1)3 = \text{Sin}[30 \text{ Pi}/360];$$

$$p(2)0 = \text{Cos}[20 \text{ Pi}/360]; \quad p(2)3 = \text{Sin}[20 \text{ Pi}/360];$$

De la tabla 1, se toman los puntos de la recta.

$$px = 1; \quad py = 4;$$

El siguiente programa es del tipo (3.2.2), usando el método de factorización LU, para encontrar los Cuaterniones  $q(1)$  y  $q(2)$ .

```

checa=0;ww=0;
While[checa<4,
  checa=0;
  For[i=1,i<5,i++,l[i,1]=J[[i,1]]];
  For[j=1,j<5,j++,u[1,j]=J[[1,j]]/l[1,1]];
  For[j=2,j<5,j++,
    For[i=j,i<5,i++,
      tl = 0;
      For[k=1,k<j,k++,tl = tl + l[i,k]*u[k,j] ];
      l[i,j]= J[[i,j]] - tl;
    ],
    u[j,j]=1;
    For[i=j+1,i<5,i++,
      tu = 0;
      For[k=1,k<j,k++,tu = tu + l[j,k]*u[k,i]];
      u[j,i] = ( J[[j,i]] - tu )/l[j,j];
    ],
  ];
];

v[1]=b[[1]]/l[1,1];
For[i=2,i<5,i++,
  s=0;
  For[k=1,k<i,k++,
    s=s+l[i,k]*v[k];
  ];
  v[i]=(b[[i]]- s)/l[i,i];
];
x[4]=v[4];

```

```

If[ Abs[N[x[4]]-N[h[[4]]]]<0.001,checa++];

For[j=3,j>0,j--,
  s=0;
  For[k=j+1,k<5,k++,s=s+u[j,k]*x[k ]];
  x[j]=v[j]-s;
  error=Abs[N[x[j]]-N[h[[j]]]];
  If[error<0.001,checa++];

];

q(1)0=N[x[1]];
q(1)0=N[x[2]];
q(1)3=N[x[3]];
q(2)3=N[x[4]];

ww++;

];

```

Impresión de resultados.

```

Print["q(1)0 = ",N[q(1)0]];
Print["q(1)3 = ",N[q(1)3]];
Print["q(2)0 = ",N[q(2)0]];
Print["q(2)3 = ",N[q(2)3]];

```



### II.3. SIMULACIÓN DE LA TRAYECTORIA DE $y = -x + 5$ .

En esta parte se simula la trayectoria que sigue el órgano terminal. Se toman los valores de los Cuaterniones  $q(1)$  y  $q(2)$  para cada uno de los puntos de la tabla 2.1.1, y se forma un arreglo de la siguiente manera:

```
Qq(1) = {{0.941214,-0.337812},{0.948878,-0.315642},  
{0.957272,-0.289191},{0.965926,-0.2588819},  
{0.974371,-0.224945},{0.98216,-0.188047},  
{0.988891,-0.148642},{0.994232,-0.107251},  
{0.997927,-0.064359},{0.999792,-0.020371},  
{0.999702,0.0244202},{0.997557,0.0698584},  
{0.993255,0.115948},{0.986645,0.162885}};
```

```
Qq(2) = {{0.862544,0.505982},{0.845054,0.534686},  
{0.830462,0.557075},{0.819152,0.573577},  
{0.811431,0.584448},{0.807514,0.589848},  
{0.807515,0.589849},{0.811431,0.584448},  
{0.819152,0.573576},{0.830462,0.557075},  
{0.845054,0.534681},{0.862544,0.505982},  
{0.882482,0.470346},{0.904348,0.426796}};
```

El siguiente programa genera la representación gráfica que simula la trayectoria, a partir de la lista  $Qq(1)$  y  $Qq(2)$ . El código es generado por el paquete *Mathematica*<sup>®</sup> [4].

```
For[j=1,j<15,j++,  
q(1)3 = Qq(1)[[j,1]]; q(1)3= Qq(2)[[j,2]]; q(2)0= Qq(2)[[j,1]]; q(2)3= Qq(2)[[j,2]],  
Punto[j]=Show[Graphics[{{PointSize[0],RGBColor[1,1,1],Point[{4,-1}]},  
{PointSize[0.03], RGBColor[0,1,0],Point[{1,0,4,0}]}],
```

```

{PointSize[0.03], RGBColor[0,1,0],Point[{3.6,1.4}]},
{AbsoluteThickness[0.6], RGBColor[1,0,0], Line[{{1,4},{3.6,1.4}}]},
{AbsoluteThickness[1.2], RGBColor[0,1,0], Line[{{0,0},{b1[[2]],b1[[3]]}}]},
{AbsoluteThickness[1], RGBColor[0,0,1], Line[{{b1[[2]],b1[[3]]},{rp[[2]],rp[[3]]}}]}},
Axes -> True];
ROBOT2GDL=Show[Table[Punto[i],{i,1,14}]]

```

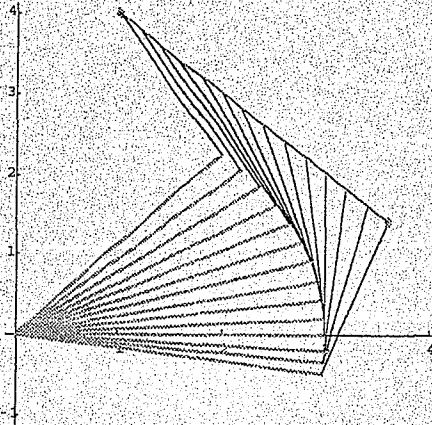


Figura 2.3.1. Generación de una trayectoria del manipulador de dos GDL.

## II.4. MANIPULADOR TIPO PUMA.

El problema cinemático inverso para el manipulador tipo PUMA, se intenta resolver por el métodos numérico tipo Newton, estos manipuladores tienen la siguiente particularidad: tres ejes de las juntas adyacente se intersectan, esto los hacen que tengan posibles soluciones únicas.

Se usa la instrucción del lenguaje *Mathematica*<sup>®</sup> [4], [5], FindRoot[ ], el cual está diseñado bajo el mismo principio que el usado para reolver el sistema de ecuaciones no lineales del manipulador de dos grados de libertad. Se realiza el procedimiento para hecer el arreglo según la ecuación (3.1.3) de la siguiente manera:

$$f[1]=N[rp[[2]]-px];$$

$$f[2]=N[rp[[3]]-py];$$

$$f[3]=N[rp[[4]]-pz];$$

$$f[4]=N[op[[2,2]]-1];$$

$$f[5]=N[op[[2,3]]];$$

$$f[6]=N[op[[2,4]]];$$

$$f[7]=N[op[[3,2]]];$$

$$f[8]=N[op[[3,3]]-1];$$

$$f[9]=N[op[[3,4]]];$$

$$f[10]=N[op[[4,2]]];$$

$$f[11]=N[op[[4,3]]];$$

$$f[12]=N[op[[4,4]]-1];$$

$$m[1]=Table[D[f[i],q(1)0],{i,12}];$$

$$m[2]=Table[D[f[i],q(2)0],{i,12}];$$

$$m[3]=Table[D[f[i],q(3)0],{i,12}];$$

$$m[4]=Table[D[f[i],q(4)0],{i,12}];$$

$$m[5]=Table[D[f[i],q(5)0],{i,12}];$$

```

m[6]=Table[D[f[i],q(6)0],{i,12}];
m[7]=Table[D[f[i],q(1)3],{i,12}];
m[8]=Table[D[f[i],q(2)2],{i,12}];
m[9]=Table[D[f[i],q(3)2],{i,12}];
m[10]=Table[D[f[i],q(4)1],{i,12}];
m[11]=Table[D[f[i],q(5)2],{i,12}];
m[12]=Table[D[f[i],q(6)1],{i,12}];

```

```
vec=N[{f[1],f[2],f[3],f[4],f[5],f[6]},f[7],f[8],f[9],f[10],f[11],f[12]}];
```

Después de haber hecho el arreglo como en la ecuación (3.1.3), se resuelve:

```
FindRoot[vec, {q(1),0.0}, {q(2),0.0}, {q(3),0.0}, {q(4),0.0}, {q(5),0.0}, {q(6),0.0},
{DampingFactor->1}, {WorkingPrecision->8}, {MaxIterations->50}, {AccuracyGoal->7}]
```

```
q(1)0 = 0.986645 q(3)3 = 0.162885
```

```
q(2)0 = 0.904348 q(2)3 = 0.426796
```

```
teta1 = 18.7488
```

```
teta2 = 50.5288
```

```
Número de iteraciones = 4
```

```
prueba de la posición rp = {1., 4., 0}
```

## Capítulo IV. Conclusiones.

---

Se ha presentado la utilización de un marco teórico algebraico riguroso para simular de manera sistemática la cinemática directa e inversa de los multicuerpos rígidos, conocidos como cadenas cinemática abiertas. El modelo matemático resultante, la simulación computacional y la solución de los sistemas algebraicos no lineales se ha realizado computacionalmente con el lenguaje de cálculo formal Mathematica<sup>®</sup>, puesto que la forma de las ecuaciones y el programar el álgebra de Cuaterniones en tal ambiente, simplifica la obtención de los resultados y evita cometer errores en los desarrollos algebraicos. La resolución de los sistemas de ecuaciones se ha realizado mediante el método de Newton-Raphson y se recomienda el desarrollo y aplicación de otros métodos numéricos para obtener comparaciones, desde el punto de vista computacional.

La metodología aquí presentada, es una generalización para simular la cinemática de otros tipos de sistemas mecánicos, tal como las plataformas en paralelo. El control de estos sistemas también están basados en esta metodología.

# Referencias.

---

- [1]. Reyes, A. L. 1990. "Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies"  
Partie 1: Le Cadre Theorique.  
Partie 2: Quelques Applications.  
Rapport de Recherche Inria - Rocquencourt, France.
- [2]. Gurtin, M. E. 1981. "An Introduction a Continuum Mechanics".  
Academic New York.
- [3]. Nkravesh, P. E. 1988. "Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems".  
Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [4]. Wolfram, S. 1992. "*Mathematica*: A System for Doing mathematica by Computer".  
Adison - Wesley Publishing Co., Redwood City, California.
- [5]. W. Gray T, Glynn, J. 1992. "The Beginner's Guide To *Mathematica*® , ver. 2."  
Bloomington, Illinois
- [6]. L. Bentley, Donald, L. Cooke, Kennethl. 1973. "Linear Algebra with Diferential Equation". Hold Rine Hart and Winston, Inc., New-York.
- [7]. C. S. Lee. 1982. "Robot Arm Kinematics, Dynamics, And Control". IEEE, Inc. Vol. 15, Number 12, Dec. 1982, Pages 62-82. University of Michigan, Ann Arbor.
- [8]. W. R. Hamilton. 1853. "Elements of Quaternions". Dublin: Hodges and Smith.
- [9]. W. R. Hamilton. 1969. "Lectures on Quaternions". 3rd ed. New York: Chelsea.



## Apéndice. El lenguaje *Mathematica*<sup>®</sup>.

---

Este apéndice contiene una breve descripción del paquete *Mathematica*<sup>®</sup>, como un lenguaje de programación de alto nivel, en el cual se pueden escribir programas tan grandes como sea necesario. Los programas en *Mathematica*<sup>®</sup>, pueden crear y manipular arbitrariamente símbolos y estructuras de datos. Se puede también programar:

- a) *Procedimientos*, bloc de estructuras, condiciones, iteraciones y recurciones.
- b) *Funciones*, operadores, ecuaciones.
- c) *Reglas lógicas y algebraicas*, con patrones y orientado a objetos.

Ló fundamental en *Mathematica*<sup>®</sup>, es el uso de reglas de transformación, el cual especifica como, algunas expresiones simbólicas deberán ser transformadas en expresiones diferentes. Las transformaciones son de forma general y natural para representar muchos tipos de información, particularmente relaciones matemáticas.

Este apéndice se presenta de la siguiente manera:

- a) Caracteres comunes usados en *Mathematica*<sup>®</sup>, y su significado.
- b) Cálculos numéricos.
- c) Gráficas.
- d) Listas.
- e) Programación.

A continuación se describe los incisos anteriores:

- a)
  - ^ indica exponenciación.
  - / significa división.
  - \* indica multiplicación, un espacio en blanco también es válido para la multiplicación.
  - ( ) se usa para indicar el orden de evaluación.

[ ] se usa con funciones y comandos, es decir, Sen[x].

{ } indica una lista, es decir, {1, 3, 5}.

% representa el cálculo anterior.

< <=, > >=, representan condiciones.

b). En esta sección, se presenta la manera de hacer aritmética con *Mathematica*<sup>®</sup>, por ejemplo:

```
in[1]:= 5+3
```

```
out[1] = 8
```

```
in[2]:= 3^100
```

```
out[2] = 515377520732011331036461129765621272702107522001
```

```
in[3]:= N[%]
```

```
out[3] = 5.15378 1047
```

```
in[4]:= N[Sqrt[10],30]
```

```
out[4] = 3.162277660168379331998893544433
```

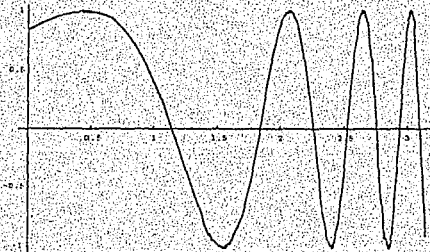
c). Gráficas se presenta algunos comandos y su sintaxis de las funciones.

Gráficas en dos dimensiones.

`Plot[f, {x, xmin, xmax}]` genera una gráfica de  $f$  como una función de  $x$  de  $x_{\min}$  hasta  $x_{\max}$ . `Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]` grafica  $n$  funciones  $f$ .

ejemplo:

`Plot[Sin[Exp[x]], {x, 0, Pi}]`

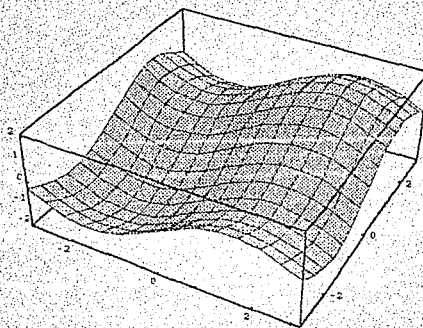


Gráficas en tres dimensiones.

`Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]` genera una gráfica en tres-dimensiones de  $f$  como una función de  $x$  y  $y$ .

ejemplo:

`Plot3D[Sin[x]+Sin[y], {x,-3,3}, {y,-3,3}]`



ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

c). Listas. En *Mathematica*<sup>®</sup>, son elementos encerrados con llaves. una manera de ilustrar la generación de listas es con ejemplos:

Se puede sumar un número a cada elemento de la lista:

in[1]:= 5 + {10, 20, 30}

out[1] = {15, 25, 35}

Se puede multiplicar un número a cada elemento de la lista:

in[2]:= 5 \* {10, 20, 30}

out[2] = {50, 100, 150}

Se puede generar una lista con la siguiente ecuación:

in[3]:= Table[(-x+5), {x, 1, 3.6, 0.2}]

out[3] = {4, 3.8, 3.6, 3.4, 3.2, 3., 2.8, 2.6, 2.4, 2.2, 2., 1.8, 1.6, 1.4}

d). Programación. Esta parte cubre un procedimiento de programación básica. Como ejemplo, se empieza definiendo una función:

f[x\_] := x^2

aplicando esta ecuación para algún valor de n, tenemos:

in[1]:= f[5]

out[1] = 25

in[2]:= f[x+a]

out[2] = (x+a)^2

otras funciones son:

función que multiplica dos Cuaterniones P, Q; ver la ecuación 1.1.1

MpQ[P\_, Q\_] := {P[[1]] Q[[1]] - P[[2]] Q[[2]] - P[[3]] Q[[3]] - P[[4]] Q[[4]],

P[[2]] Q[[1]] + P[[1]] Q[[2]] - P[[4]] Q[[3]] + P[[3]] Q[[4]],

P[[3]] Q[[1]] + P[[4]] Q[[2]] + P[[1]] Q[[3]] - P[[2]] Q[[4]],

P[[4]] Q[[1]] - P[[3]] Q[[2]] + P[[2]] Q[[3]] + P[[1]] Q[[4]]};

la siguiente función define el conjugado de un Quaternion, P, Q, R, ... ,etc (ver ecuación 1.1.13).

```
Conjugado[P_]:= {P[[1]],-P[[2]],-P[[3]],-P[[4]]}
```

La siguiente función define una rotación, ver ecuación (2.2.1)

```
Ropq[P_Q]:= Mpq[P,Mpq[Q,Conjugado[P]]]
```

Los siguientes comandos son de mucha importancia para el desarrollo de programas en *Mathematica*<sup>®</sup>, **Expand**, **Factor**, **Collect** y **Simplify**, ejemplo:

**Expand**[expr] expande los productos y las potencias enteras positivas de la expresión, escribe el resultado como una suma de términos.

```
in[1]:= Expand[(a+b)^2]
```

```
out[1] = a2 + 2 a b + b2
```

**Factor**[expr] escribe la expresión con el mínimo de factores.

```
in[2]:= Factor[%]
```

```
out[2] = (a + b)2
```

**Collect**[expr, x] agrupa los términos que tienen la misma potencia que x.

**Collect**[expr, {x1, x2, ...}] agrupa los términos que tienen la misma potencia que x1, x2, ...

```
in[3]:= e=Expand[(a+b+x)^2+(x+y)^3]
```

```
out[3] = a2 + 2 a b + b2 + 2 a x + 2 b x + x2 + x3 + 3 x2 y + 3 x y2 + y3
```

```
in[4]:= Collect[e, {a,x}]
```

```
out[4] = a2 + b2 + x3 + a(2b + 2x) + y3 + x2 (1 + 3y) + x (2b + 3y2).
```

El siguiente programa, se usó para generar una gráfica donde se ilustra la simulación de una trayectoria que sigue un manipulador de dos grados de libertad.

```
For[j=1,j<15,j++,
```

```
q(1)3= Qq(1)[[j,1]]; q(2)3= Qq(2)[[j,2]]; q(2)0= Qq(2)[[j,1]]; q(2)3= Qq(2)[[j,2]];
```

```
Punto[j]=Show[Graphics[{ {PointSize[0],RGBColor[1,1,1],Point[{4,-1]}},
```

```
{PointSize[0.03], RGBColor[0,1,0],Point[{1.0,4.0}]},
```

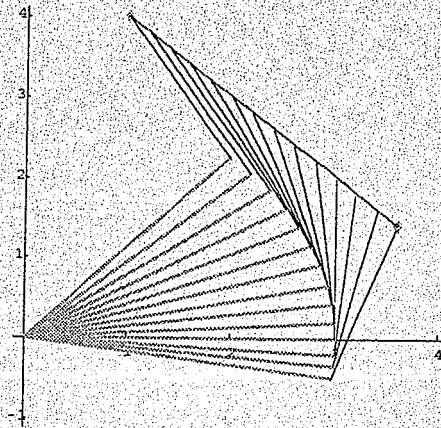
```
{PointSize[0.03], RGBColor[0,1,0],Point[{3.6,1.4]}},
```

```
{AbsoluteThickness[0.6], RGBColor[1,0,0], Line[{ {1,4},{3.6,1.4} }]}],
```

```

{AbsoluteThickness[1.2], RGBColor[0,1,0], Line[{{0,0},{b1[[2]],b1[[3]]}}]},
{AbsoluteThickness[1], RGBColor[0,0,1], Line[{{b1[[2]],b1[[3]]},{rp[[2]],rp[[3]]}}]}},
Axes -> True]],
ROBOT2GDL=Show[Table[Punto[i],{i,1,14}]]

```



**Figura A.** Generación de una trayectoria del manipulador de dos GDL.

Para mayor información consultar [4], [5].