# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios de Posgrado

## TEORIA DE DISPERSION PARA LA ECUACION DE ONDA CON PERTURBACIONES DE RANGO CORTO

T E S I S

Que para obtener el grado Académico de

DOCTORA EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

p r e s e n t a

FLOR DE MARIA ACEFF SANCHEZ



Director de Tesis: DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ

 / 1995

Esta tesis doctoral fue realizada con el apoyo de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México, a quien manifiesto mi agradecimiento.

Agradezco profunda y entrañablemente al Dr. Fernando Brambila Paz la dirección de esta tesis, su apoyo, sus muy apreciables consejos y amistad.

También quiero agradecer a todas las personas que me han brindado su apoyo, dándome palabras de aliento, no las nombro porque son demasiadas y podría omitir a alguien.

# TEORIA DE DISPERSION PARA LA ECUACION DE ONDA CON PERTURBACIONES DE RANGO CORTO

Flor de María Aceff Sánchez

Desde hace muchos años, la Teoría de Dispersión ha sido extensamente estudiada tanto las ecuaciones de Schrödinger como en las ecuaciones de onda. Tradicionalmente la ecuación de Schrödinger fue tratada con argumentos independientes del tiempo, mientras que la ecuación de onda fue tratada con argumentos dependientes del tiempo, al menos en la forma en que lo hicieron Lax y Phillips. Enss cambió todo esto en 1978 desarrollando un acercamiento dependiente del tiempo para la ecuación de Schrödinger, el cual es muy parecido al acercamiento de Lax-Phillips.

Phillips en 1982 y 1984 trató la ecuación de onda en $\mathbb{R}^n$ con una perturbación de rango corto tomando como marco teórico la teoría de Lax-Phillips, en el proceso utilizó un argumento de Enss. La ecuación perturbada que tomó fue

$$u_{tt} = \sum \partial_i a_{ij} \partial_j u - qu,$$

donde la matriz $(a_{ij})$ es $C^{(1)}$ y positiva casi dondequiera; $q$ está en $L_p(\mathbb{R}^n)$, donde $p = n/2$ para $n > 4$, $p > 2$ para $n = 4$, $p = 2$ para $n = 3$ y $q$ es localmente $L_2$ para $n = 1$ y $2$;

$$a_{ij} - \delta_{ij} = O\left(\frac{1}{r^\alpha}\right) = \partial a_{ij} \qquad \text{para alguna } \alpha > 1,$$
$$q = O\left(\frac{1}{r^\beta}\right) \qquad \text{para alguna } \beta > 2.$$

En este trabajo presentamos dos generalizaciones del resultado anterior de la Teoría de dispersión de Lax-Phillips. Primero lo hacemos para perturbaciones del tipo $\frac{\varphi(x)}{|x|^\beta}$, para $\beta = 2 - \frac{n}{s}$, $\varphi \in L^s$, $s > 2$, $s \geq \frac{n}{2}$; en este caso los espacios de la energía resultan ser equivalentes respecto a la norma, y se hace un tratamiento parecido al que hace Phillips. Este tipo de perturbaciones es más general que el de Phillips, y para probar la equivalencia de las normas utilizamos un resultado de Caffarelli-Kohn-Niremberg, ya que utilizando el método que aplica Phillips (desigualdades de Sobolev) no es suficiente. La existencia de los operadores de onda se muestra aplicando el método de Cook en dos regiones del espacio $\mathbb{R}^n$. Para ver que los operadores de onda son completos se trata igual que el caso de Phillips.

En la segunda generalización presentamos una teoría de dispersión para la ecuación de onda con perturbaciones de orden $\frac{1}{|x|^\beta}$, $\beta > 3/2$. En este caso los espacios de la energía $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_q$ no son equivalentes respecto a las normas, sin embargo se muestra que los operadores de onda $W_\pm : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}'_q$ existen y son completos (donde $\mathcal{H}'_q$ es el complemento ortogonal del subespacio generado por las eigenfunciones de $A_q$ en $\mathcal{H}_q$). Esto significa que a pesar de que los espacios no son equivalentes, el comportamiento de las señales en infinito son semejantes en ambos espacios.

Uno de los atractivos más importantes de hacer Teoría de dispersón al estilo de Lax-Phillips es que en general casi toda la información se obtiene a partir del espacio sin perturbar.

**Scattering Theory for the wave equation with short range perturbations**

Flor de María Aceff Sánchez

In 1982 and 1984 Phillips studied the wave equation on $\mathbb{R}^n$ with perturbations of short range, taking as theoretic frame the Lax-Phillips theory. In the process he used an argument of Enss. The perturbed equation that he studied was

$$u_{tt} = \partial_i a_{ij} \partial_j u - qu$$

where the matrix $(a_{ij})$ is $C^{(1)}$ and everywhere positive; $q$ is in $L_p(\mathbb{R}^n)$ where $p = n/2$ for $n > 4$, $p > 2$ for $n = 4$, $p = 2$ for $n = 3$ and $q$ in $L_2$ locally for $n = 1$ and $n = 2$; $\partial a_{ij} - \delta_{ij} = o(1/r^\alpha)$ for some $\alpha > 1$, $q = o(1/r^\beta)$ for some $\beta > 2$.

This work presents two generalizations of the above result. The first generalization is done for perturbations of the type $\varphi(x)/|x|^\beta$ with $\beta = 2 - n/s$, $\varphi$ in $L_s$, $s > n > 2$. In this case, the energy spaces are equivalent respect to the norm as in the Phillips case. These type of perturbations are more general than those of Phillips, and to prove the equivalence of the norms we used a result of Caffarelli-Kohn-Nirenberg. The existence of the wave operators is proved by applying the Cook's method in two regions of the space $\mathbb{R}^n$. The proof of the completeness of the wave operators is done as in Phillips work.

The second generalization presents a scattering theory for the wave equation with perturbations of the short range of order $1/|x|^\beta$, $\beta > 3/2$. In this case the energy spaces are not equivalent respect to the norms, but it shows that the wave operators exists and are complete. This means that the behavior of the signals at infinity are similar in both spaces.

**A Emilio.**

**A mi familia (abuelitas, papá, mamá, hermanos, tíos, sobrinos, suegros, primos, Mauri y Alexis).**

**Al Ing. Antonio Miguel Saad, q.p.d.**

# TEORÍA DE DISPERSIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA CON PERTURBACIONES DE RANGO CORTO

**FLOR DE MARIA ACEFF SANCHEZ**

# CONTENIDO

# INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos dos generalizaciones de la Teoría de dispersión de Lax-Phillips, en el capítulo II lo hacemos para perturbaciones del tipo $\frac{\varphi(x)}{|x|^\beta}$, para $\beta = 2 - \frac{n}{s}$, $\varphi \in L^s$, $s > n > 2$; en este caso los espacios de la energía resultan ser equivalentes respecto a la norma, y se hace un tratamiento parecido al que se hace en Phillips [2]. El tipo de perturbaciones que tratamos en el capítulo II es más general que el de Phillips [2], y para probar la equivalencia de las normas utilizamos un resultado de Caffarelli-Kohn-Niremberg, ya que utilizando el método que aplica Phillips (desigualdades de Sobolev) no es suficiente. La existencia de los operadores de onda se muestra aplicando el método de Cook en dos regiones del espacio $I\!R^n$. Para ver que los operadores de onda son completos se procede igual que en el caso de Phillips [2].

En el capítulo III presentamos una teoría de dispersión para la ecuación de onda con perturbaciones de orden $\frac{1}{|x|^\beta}$, $\beta > 3/2$, localmente en $L^n$. En este caso los espacios de la energía $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_q$ no son equivalentes respecto a las normas, sin embargo se muestra que los operadores de onda existen y son completos en el subespacio $\mathcal{H}'_q$ de $\mathcal{H}_q$ (el cual es el complemento ortogonal del subespacio generado por las eigenfunciones de $A_q$). Esto significa que a pesar de que los espacios no son equivalentes, el comportamiento de las señales en infinito son semejantes en ambos espacios.

En el capítulo I presentamos algunos resultados conocidos, pero que son importantes para el desarrollo de la teoría de dispersión que se hace en los capítulos II y III.

Uno de los atractivos más importantes de hacer Teoría de dispersión al estilo de Lax-Phillips es que en general casi toda la información se obtiene a partir del espacio sin perturbar.

La teoría de dispersión compara el comportamiento asintótico de un sistema cuando $t$ tiende a $-\infty$ con su comportamiento asintótico cuando $t$ tiende a $+\infty$. Es especialmente fructífera en el estudio de sistemas construidos a partir de un sistema simple con la imposición de una perturbación, probando que la influencia de la perturbación en movimientos para $|t|$ grande es casi imperceptible, es decir, cualquier movimiento del sistema perturbado para $|t|$ grande es indistinguible de un movimiento del sistema sin perturbar. Así, si $U(t)$ y $U_0(t)$ denotan los operadores que relacionan los estados de los sistemas perturbado y sin perturbar en el tiempo cero con sus respectivos estados en el tiempo $t$ entonces a cada estado $f$ del sistema perturbado le corresponden dos estados $f_-$ y $f_+$ del sistema sin perturbar tal que $U(t)f$ se comporta como $U_0(t)f_-$ cuando $t \longrightarrow -\infty$ y como $U_0(t)f_+$ cuando $t \longrightarrow +\infty$. El operador de dispersión está definido como:

$$S: f_- \longrightarrow f_+.$$

El propósito de la teoría de dispersión es probar la existencia de tal operador de dispersión y ligar sus propiedades a la naturaleza de la perturbación. En situaciones donde el operador de dispersión lo constituyen sólo los datos observables del movimiento, entonces el objetivo principal es, el problema inverso, reconstruir a la perturbación a partir del operador de dispersión.

Las referencias sin número romanos, se refieren al capítulo en cuestión.

A continuación presntamos un breve resumen del acercamiento de Lax-Phillips a la teoría de dispersión y mencionarеremos algunos de los resultados más importantes en esta área de 1967 a la fecha, y en este contexto enmarcaremos el resultado de esta tesis. Lax y Phillips consideraron en 1967 la ecuación acústica

$$u_{tt} = \Delta u \tag{1}$$

sobre un dominio exterior $G$, con datos iniciales

$$u(x,0) = f_1(x) \text{ y } \ u_t(x,0) = f_2(x) \quad x \in G \tag{2}$$

y condiciones de Dirichlet en la frontera $\partial G$. Con $\mathcal{H}$ denotaremos al espacio de Hilbert de todos los datos iniciales $f = (f_1, f_2)$ de energía finita, donde la norma de la energía es

$$||f||^2 = \int_G |\nabla f_1|^2 + |f_2|^2 \, dx. \tag{3}$$

Ahora elijamos $\rho$ suficientemente grande tal que el obstáculo O quede completamente dentro de la bola $B_\rho = \{x : |x| < \rho\}$. Una solución de (1) es llamada *saliente* si se anula para toda $x$ con $|x| \leq \rho + t$, $t \geq 0$, y *entrante* si se anula para toda $x$ con $|x| \leq \rho - t$, $t \leq 0$. El conjunto de todos los datos iniciales para las soluciones salientes (entrantes) es denotado con $D_+$ ($D_-$). Finalmente sea $U(t)$ el operador que manda los datos iniciales en los datos solución al tiempo $t$. Es claro que $\{U(t)\}$ forma un grupo uno-paramétrico de operadores unitarios (i.e. que preservan la energía) en $\mathcal{H}$.

Los espacios entrante y saliente tienen las siguientes propiedades:

i) $U(t)D_- \subset D_- \quad t \leq 0$ y $U(t)D_+ \subset D_+ \quad t \geq 0$
ii) $\bigcap U(t)D_- = \{0\} = \bigcap U(t)D_+$
iii) $\overline{\bigcup U(t)D_-} = \mathcal{H} = \overline{\bigcup U(t)D_+}$.

Cualquier subespacio que satisface la parte de $D_-$ (ó $D_+$) de las propiedades anteriores, corresponde a una representación de la translación entrante (o saliente) que transforma al espacio $\mathcal{H}$ en un espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, N)$ de funciones $k(s)$, que van de los vectores definidos en la recta real a un espacio de Hilbert auxiliar $N$, con la norma

$$||k||^2 = \int ||k(s)||_N^2 ds. \tag{4}$$

Esta transformación es unitaria y envía a $D_-$ (ó $D_+$) en $L^2((-\infty, -\rho), N)$ (ó $L^2((\rho, \infty), N)$) y $U(t)$ actúa como la translación derecha

$$U(t): k(s) \mapsto k(s-t). \tag{5}$$

Denotando con $k_-$ y $k_+$, respectivamente, las representaciones de la translación de $f \in \mathcal{H}$ dado, respectivamente el operador de dispersión es definido como

$$S: k_- \longrightarrow k_+. \tag{6}$$

Es claro que $S$ es unitario en $\mathcal{H}$ y conmuta con la translación.

Tomando la transformada de Fourier $\tilde{k}(\sigma)$ de un representante de la translación $k(s)$, obtenemos la representación espectral. La representación espectral es absolutamente continua. Como $S$ conmuta con la translación, se sigue que en la representación espectral del operador de dispersión toma la forma de un operador multiplicativo en $N$:

$$S(\sigma)\tilde{k}_-(\sigma) = \tilde{k}_+(\sigma), \tag{7}$$

donde $S(\sigma)$ es unitario en $N$ para cada real $\sigma$.

En general la teoría abstracta no va más allá de este punto para el caso en que $n$ es par (Lax-Phillips[1]). Además, en el caso de $n$ impar $D_-$ y $D_+$ son ortogonales, así que las proyecciones ortogonales $P_-$ y $P_+$ en el complemento ortogonal de $D_-$ y $D_+$ también son ortogonales. Esto y el hecho de que la propiedad (i) se satisface, implica que los operadores

$$Z(t) = P_+U(t)P_- \quad t \geq 0 \tag{8}$$

forman un semigrupo de operadores en el subespacio $K = \mathcal{H}(D_- \oplus D_+)$. El efecto de $P_-$ es el de quitar las señales que podrían venir de muy lejos, mientras que el efecto de $P_+$ es el de quitar parte de la señal que no interactúa muy lejos con el obstáculo. Como los datos en $D_-$ y $D_+$ se anulan dentro de la bola $B_\rho$ concluiremos que para datos $f$ con soporte en esta bola

$$[Z(t)f](x) = [U(t)f](x) \tag{9}$$

para toda $x \in B_\rho$. Denotando el generador infinitesimal de $Z$ con $B$, si $Z(2\rho)(\lambda I - B)^{-1}$ es compacto, como es el caso de la ecuación de onda ([12]), entonces $B$ tiene un espectro puramente puntual $\{\lambda_k\}$, estos $\lambda_k$ son también conocidos como las frecuencias de dispersión. Como los operadores $Z(t)$ son contracciones que tienden a cero fuertemente, vemos que $Re\lambda_k < 0$. Existe una relación muy cercana entre el semigrupo $\{Z(t)\}$ y la matriz de dispersión $S(\sigma)$ para la ecuación acústica. En este caso, $S(\sigma)$ tiene extensión meromórfa en el plano complejo con polos precisamente en los puntos $\{-i\lambda_k\}$ y espacios nulos en los puntos $\{i\lambda_k\}$. En consecuencia el semigrupo $\{Z(t)\}$ nos provee de una herramienta conveniente para el estudio de singularidades de la matriz de dispersión. Además esta relación también muestra que los valores propios $\{\lambda_k\}$ no dependen de la elección de $\rho$.

Cuando $Z(t_0)$ es compacto para algún $t_0 > 0$ (y por tanto para todo $t \leq t_0$) podemos afirmar que $\sup Re\lambda_k < 0$ y por tanto

$$||Z(t)|| \leq ce^{-\alpha t} \tag{10}$$

para alguna $\alpha > 0$. En este caso concluimos por (9) que la energía de la data con soporte en $B_\rho$ decae exponencialmente para $||f|| \leq const$. Finalmente si arreglamos los valores propios $\lambda_k$ de $B$ tal que sus partes reales estén en orden decreciente y denotamos con $P_k$ la proyección sobre el $k$-ésimo eigenespacio entonces para cada $\varepsilon > 0$

$$\left\| Z(t) - \sum_{k=1}^{m} \exp(\lambda_k(t) P_k \right\| \leq const \exp[(\lambda_{m+1} + \varepsilon)t]. \tag{11}$$

## Extensiones y Aplicaciones

Desde hace muchos años, en la Teoría de Dispersión han sido extensamente estudiada tanto las ecuaciones de Schrödinger como las ecuaciones de onda. Tradicionalmente la ecuación de Schrödinger fue tratada con argumentos independientes del tiempo, mientras que la ecuación de onda fue tratada con argumentos dependientes del tiempo, al menos en la forma en que lo hicieron Lax y Phillips. Enss [1] cambió todo esto en 1978 desarrollando un acercamiento dependiente del tiempo para la ecuación de Schrödinger, el cual es muy parecido al acercamiento de Lax-Phillips.

Phillips [2] en 1982 y 1984 trató la ecuación de onda en $\mathbb{R}^n$ con una perturbación de rango corto tomando como marco teórico la teoría de Lax-Phillips, en el proceso utilizó un argumento de Enss. La ecuación perturbada que tomó fue

$$u_{tt} = \sum \partial_i a_{ij} \partial_j u - qu, \tag{12}$$

donde la matriz $(a_{ij})$ es $C^{(1)}$ y positiva casi dondequiera; $q$ está en $L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $p = n/2$ para $n > 4$, $p > 2$ para $n = 4$, $p = 2$ para $n = 3$ y $q$ es localmente $L^2$ para $n = 1$ y 2;

$$\begin{aligned} a_{ij} - \delta_{ij} = O\left(\frac{1}{r^\alpha}\right) = \partial a_{ij} \qquad &\text{para alguna } \alpha > 1, \\ q = O\left(\frac{1}{r^\beta}\right) \qquad &\text{para alguna } \beta > 2. \end{aligned} \tag{13}$$

Para el caso de la ecuación de Schrödinger se sabe desde hace tiempo que existe una teoría de dispersión para perturbaciones de rango corto de orden $\beta > 1$.

Una pregunta natural es entonces si se puede hacer una teoría de dispersión para la ecuación de onda con perturbaciones de rango corto de orden $\beta > 1$.

En este trabajo presentamos dos generalizaciones del resultado anterior de la Teoría de dispersión de Lax-Phillips. Primero lo hacemos para perturbaciones del tipo $\frac{\varphi(x)}{|x|^\beta}$, para $\beta = 2-\frac{n}{s}$, $\varphi \in L^s$, $s > n > 2$; en este caso los espacios de la energía resultan ser equivalentes respecto a la norma, y se hace un tratamiento parecido al que hace Phillips. Este tipo de perturbaciones es más general que el de Phillips, y para probar la equivalencia de las normas utilizamos un resultado de Caffarelli-Kohn-Niremberg, ya que utilizando el método que aplica Phillips (desigualdades de Sobolev) no es suficiente. La existencia de los operadores de onda se muestra aplicando el método de Cook en dos regiones del espacio $I\!R^n$. Para ver que los operadores de onda son completos se trata igual que el caso de Phillips.

En la segunda generalización presentamos una teoría de dispersión para la ecuación de onda con perturbaciones de orden $\frac{1}{|x|^\beta}$, $\beta > 3/2$, localmante en $L^n$. En este caso los espacios de la energía $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_q$ no son equivalentes respecto a las normas, sin embargo se muestra que los operadores de onda $W_\pm : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_q'$ existen y son completos (donde $\mathcal{H}_q'$ es el complemento ortogonal del subespacio generado por las eigenfunciones de $A_q$ en $\mathcal{H}_q$). Esto significa que a pesar de que los espacios no son equivalentes, el comportamiento de las señales en infinito son semejantes en ambos espacios.

El patrón de la prueba de Phillips [2] es usado por Woo en su artículo [1] que después fue adaptado por de Phillips-Wisckott-Woo[1] para hacer teoría de dispersión sobre variedades hiperbólicas..

En 1973, Lax-Phillips investigaron sistemas perturbados disipativos tales como la ecuación de onda en un dominio exterior con una condición de frontera disipativa

$$u_{tt} + \alpha u_t = 0 \text{ con } \alpha > 0. \tag{14}$$

Para otras aplicaciones véase Majda[1]. Lax y Phillips supusieron que el sistema sin perturbar satisfacía las condiciones (i), (ii) y (iii) con $\mathcal{H}$ y $U$ reemplazadas por $\mathcal{H}_0$ y $U_0$. Después supusieron que el sistema perturbado estaba descrito por un semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de contracciones actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ el cual contenía $D_-$ y $D_+$. Finalmente supusieron que

$$\begin{array}{lll} & T(t)f = U_0(t)f & \text{para todo } f \in D_+ \text{ y todo } t \geq 0, \\ \text{(i')} & T^*(t)f = U_0(-t)f & \text{para todo } f \in D_- \text{ y todo } t \geq 0, \\ \text{(ii')} & \lim\limits_{t\longrightarrow\infty} P_+T(t)f = 0 \text{ y } & \lim\limits_{t\longrightarrow\infty} P_-T^*(t)f = 0 \text{ para todo } f \in \mathcal{H}, \end{array}$$

donde como antes $P_+$ ($P_-$) es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ en el complemento ortogonal de $D_+$ ($D_-$). La propiedad (i') implica (i) y (ii), mientras que (ii'), al igual que (iii) expresa el hecho que bajo la acción de $T$ (ó $T^*$) la data después de cierto tiempo llega a $D_+$ (ó $D_-$). Ahora el operador de dispersión es definido como

$$S = \operatorname*{s\,lim}_{t\longrightarrow 0} U_0(-t)J^*T(2t)JU_0(-t), \tag{15}$$

donde $J$ transforma linealmente a $\mathcal{H}_0$ en $\mathcal{H}$ y actúa como la identidad en $D_- + D_+$. Bajo las condiciones anteriores $S$ existe y conmuta con $U_0$, de lo cual se sigue que la representación espectral de la matriz de dispersión actúa como un operador multiplicativo $S(\sigma)$ para cada $\sigma$. Si $D_-$ y $D_+$ son ortogonales, entonces se puede demostrar que $S(\sigma)$ tiene una continuación analítica en el semiplano inferior; también se puede definir el semigrupo $Z$ con generador $B$:

$$Z(t) = P_+ T(t) P_-. \tag{16}$$

Cuando la resolvente de $B$ es meromorfa, entonces también lo es $S(z)$ y, como antes $-i$ veces los valores propios de $B$ son polos de $S(z)$ y corresponden a funciones propias generalizadas del generador $A$ de $T$. Más aún, los ceros de $S(z)$ corresponden a funciones propias generalizadas de $A$ y las que estan en el semiplano superior corresponden a funciones propias ordinarias.

En una serie de artículos, Cooper y Strauss [1] y [2] han intentado extender la Teoría de Lax-Phillips para la ecuación acústica con una clase adecuada y restringida de obstáculos en movimiento. La analogía es especialmente cercana para un obstáculo acotado que no queda atrapado bajo cambios periódicos de período $T$ (ver Cooper-Strauss [2]). Bajo estas condiciones, existe una sucesión $\lambda_k$ de números complejos, llamadas las frecuencias de dispersión, cuyas partes reales tienden a $-\infty$ y cuyas partes imaginarias son normalizadas para estar en el intervalo $[0, 2\pi/T)$. Para cada $\lambda_k$, existe una solución saliente de (1) de la forma $\exp(\lambda_k t)p_k(x,t)$, donde $p_k(x,t)$ es de período $T$ respecto al tiempo. En analogía con (11), toda solución de (1) tiene una expansión asintótica en estas soluciones propias de dispersión de la forma

$$u(x,t) \sim \sum c_k \exp(\lambda_k t) p_k(x,t). \tag{17}$$

La herramienta técnica principal es la evolución local del operador $Z(t,s)$, el cual generaliza al operador $Z(t)$ definido en (8).

Después Helton [1] y [2] desarrolló una versión abstracta de teoría de "realizabilidad" para el análisis de redes eléctricas, la cual se construye tanto en la teoría de Lax-Phillips como en la de Foias-Sz.- Nagy[1]. En la teoría de Helton, los operadores de onda están muy relacionados con los operadores de "control" y "observabilidad" de la teoría de redes.

El operador $T$ dependiente del tiempo de Eisenbud y Wigner encaja facilmente en el marco teórico de Lax-Phillips. Este operador mide la cantidad total de energía que la señal $U(t)f$ gasta en un subespacio, eligiendo en este caso a $K = \mathcal{H} \ominus (D_- \oplus D_+)$, suponiendo que $D_-$ es ortogonal a $D_+$. Entonces se define $T$ por medio de la relación

$$||Tf||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} ||P_+ P_- U(t) f||^2 dt, \tag{18}$$

de la cual se sigue, al menos formalmente, que

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} U(-t) P_+ P_-(t) U(t)\, dt. \tag{19}$$

Se puede mostrar que $T$ conmuta con el operador de dispersión $S$:

$$TS = ST \tag{20}$$

en el dominio de $T$, así que, en la representación espectral saliente de $U$, $T$ es un operador multiplicativo $T(\sigma)$; de hecho Lax-Phillips en [11] probaron que

$$T(\sigma) = -iS(\sigma)\partial_\sigma S^*(\sigma). \tag{21}$$

Para obstáculos que no quedan atrapados se puede mostrar que $T$ es un operador acotado.

En el mismo artículo (Lax-Phillips [11]) se establece una relación con la fórmula de la traza: Para cualquier $\phi$ en $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ para la cual

$$C = \int_0^\infty \phi(t)Z(t)\,dt \tag{22}$$

está en la clase de la traza,

$$trC = \frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\sigma)tr[S(\sigma)\partial_\sigma S^*(\sigma)]\,d\sigma. \tag{23}$$

Por la conexión entre las frecuencias de dispersión $\{\lambda_k\}$ y $Z$, se puede escribir también el teorema de Lidskii

$$trC = \sum \tilde{\phi}(i\lambda_k). \tag{24}$$

Lax-Phillips demostraron para la ecuación de onda con $\phi = \phi_i * \phi_2$, $\phi_i$ en $C_0^\infty(2\rho,\infty)$ que $C$ está en la clase de la traza y que (23) es aplicable en el exterior de obstáculos que no quedan atrapados. La expresión (23) también apareció en la forma de una fórmula de "mini-traza" en su tratamiento de la fórmula de la traza de Selberg (Lax-Phillips [9]). Denotando el operador solución del espacio libre con $U_0(t)$, Bardos, Guillot y Ralston [1] mostraron para $\phi$ en $C_0^\infty(2\rho,\infty)$ que

$$trC = tr\int \phi(t)[U(t) - U_0(t)]dt \tag{25}$$

y que de esta manera (23) y (24) valen cuando $n$ es impar, para todos los problemas con obstáculo acotado con condiciones de Dirichlet en la frontera. Finalmente Melrose [3] extendió estos resultados para todo $\phi$ en $C_0^\infty(0,\infty)$. Esta fórmula de la traza es utilizada en Bardos- Guillot-Ralston [1], Melrose [2], y Petkov-Popov [1].

# Capítulo I

# SISTEMAS SIN PERTURBACIÓN

En este capítulo desarrollaremos las propiedades del espacio libre, empleando como herramienta básica la representación de la translación.

El desarrolo empieza con la solución de la ecuación de onda en el espacio libre para data en $C_0^\infty$; esta solución conserva la energía y por lo tanto la clase de soluciones puede ser extendida por continuidad a cualesquiera datos iniciales de energía finita y las soluciones así extendidas definen un grupo de operadores unitarios $\{U_0(t)\}$ con generador $A_0$. Los subespacios $D_-$ y $D_+$ de data para las cuales las soluciones se anulan en $|x| < -t$ y $|x| < t$, respectivamente, son subespacios entrantes y salientes para $\{U_0(t)\}$. Las representaciones espectral y de la translación para $U_0(t)$ son construidas. La representación de la translación está muy relacionada con la transformada de Radon y tiene la propiedad adicional de ser una transformación unitaria de los datos iniciales.

## I.1 EL ESPACIO $\mathbf{H_0}$

Para la ecuación de onda no perturbada

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 \qquad\qquad x \in I\!R^n,\ t \in I\!R \\ u(x,0) &= f_0(x) \\ u_t(x,0) &= f_1(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, la norma de la energía se construye a partir de

$$E_0(f) = \int |\nabla f_0|^2 + |f_1|^2 dx \qquad \text{si } f = (f_0, f_1).$$

Iniciando con el espacio $C_0^\infty(I\!R^n) \otimes C_0^\infty(I\!R^n)$ completamos con respecto a $\|\ \|_0 = (E_0)^{1/2}$ para obtener el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_0$. El producto escalar en $\mathcal{H}_0$, está dado por

$$\langle\langle (f_0, f_1), (f_0', f_1') \rangle\rangle_0 = \int \nabla f_0 \overline{\nabla f_0'} + f_1 \overline{f_1'}\, dx. \tag{1.2}$$

**I.1.1 LEMA.** **Si la dimensión $n$ es mayor o igual que tres, entonces la primera componente de un elemento de $\mathcal{H}_0$ es una función localmente cuadrado integrable.**

La prueba de está basada en la siguiente desigualdad para funciones $f_1$ en $C_0^\infty$:

$$\int_{|x|\le R} |f_1|^2\, dx \le \frac{R^2}{2(n-2)} \int |\nabla f_1|^2 dx, \tag{1.3}$$

la cual se obtiene como sigue: Escribamos

$$f_1(x) = -\int_{|x|}^{\infty} \partial_r f_1\left(r\frac{x}{|x|}\right) dr$$

y tomemos $R = |x|$. Por la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned} |f_1(x)|^2 &\le \left(\int_{|x|}^{\infty} r^{1-n} dr\right)\left(\int_{|x|}^{\infty} r^{n-1}|\partial_r f_1|^2 dr\right) \\ &= \frac{|x|^{2-n}}{n-2}\int_{|y|\ge R} |\nabla f_1|^2 dy. \end{aligned}$$

Integrando con respecto a $\omega = x/|x|$ en la esfera unitaria obtenemos

$$\int |f_1(R\omega)|^2 d\omega \le \frac{R^{2-n}}{n-2}\int_{|y|\ge R} |\nabla f_1|^2 dy;$$

la desigualdad (1.3) se sigue de ésta después de multiplicar por $R^{n-1}$ e integrar respecto a $R$.∎

El siguiente resultado es clásico:

**I.1.2 TEOREMA.** Dado $f = (f_0, f_1)$ de clase $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$, los datos iniciales. El problema (1.1) tiene una única solución $C^\infty$ $u$, tal que la energía de $(u(x,t), u_t(x,t))$ no varía con $t$

**Demostración.** La construcción de una solución se lleva a cabo por medio de la transformada de Fourier (ver sección 2 de este capítulo). Para probar la conservación de la energía multiplicamos la ecuación de onda (1.1) por $u_t$ e integramos sobre $[0,T]\times I\!R^n$. Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^T \int_{I\!R^n} u_t(u_{tt} - \Delta u)dxdt &= \int_0^T \int_{I\!R^n} (u_t u_{tt} + \nabla u_t \nabla u)dxdt \\ &= \int_0^T \int_{I\!R^n} \frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2)_t dxdt \qquad (1.4) \\ &= \frac{1}{2}\int_{I\!R^n} (u_t^2 + |\nabla u|^2)dx\Big|_0^T, \end{aligned}$$

como afirmamos. La útima igualdad es una consecuencia de la velocidad finita de la señal la cual se sigue del siguiente

**I.1.3 TEOREMA.** Suponga que los datos $f$ son cero en la bola $|x - x_0| < R$, entonces la solución $u(x,T)$ del problema (1.1), es cero en la bola $|x - x_0| < R - T$.

La prueba de este teorema es similar a la de conservación de la energía, excepto que esta vez integramos sobre el cono truncado $|x - x_0| < R - t$, $0 \le t \le T$, y notamos que los términos en las fronteras laterales $0 < t < T$ son positivos.

El teorema anterior afirma que ninguna señal es transmitida con velocidad mayor que uno. El siguiente resultado afirma que ninguna señal es transmitida con velocidad menor que uno:

**I.1.4 TEOREMA.** Suponga que la data $f$ es cero para $|x - x_0| > R$, entonces la solución $u(x,t)$ del problema con valores iniciales es cero para $|x - x_0| < |t| - R$.

Una prueba de esto se da en la sección 2. Combinando los dos últimos resultados obtenemos

**I.1.5 TEOREMA. Principio de Huygens.** El valor de una solución $u$ de la ecuación de onda en el punto $(x,t)$ depende sólo de los valores de sus datos iniciales y de sus derivadas en los puntos de la esfera $|x - x_0| = t$.

Ahora, dada $u$ la solución de (1.1), definamos el operador $U_0(t)$ que manda a los datos iniciales de la ecuación de onda en la pareja $u(x,t), u_t(x,t)$, donde $u$ es solución de la ecuación en el tiempo $t$.

$$U_0(t)\colon \{f_0, f_1\} \longmapsto \{u(x,t), u_t(x,t)\}. \tag{1.5}$$

Se sigue de los teoremas 1.2 y 1.3 que el operador $U_0(t)$ forma un grupo uno-paramétrico y conserva la energía. Además puede extenderse por continuidad a todo $\mathcal{H}_0$, y define un grupo uno-paramétrico de operadores en $\mathcal{H}_0$.

Por el teorema de Stone todo grupo uno-paramétrico de operadores unitarios es de la forma $e^{itA}$ donde $A$ es un operador autoadjunto. Denotemos con $A_0$ el generador infinitesimal de $\{U_0(t)\}$. Claramente toda $f$ en $C_0^\infty$ pertenece al dominio de $A_0$, y para tales $f$

$$A_0 f = \frac{d}{dt} U_0(t) f \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_t \\ \Delta u \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \Delta f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} f.$$

Con mayor generalidad se puede mostrar que $A_0$ es la cerradura del operador diferencial matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

definido originalmente en $C_0^\infty$. Como las señales se propagan con velocidad finita, el problema con valores iniciales (1.1) puede resolverse para data en $C^\infty$, sin estar sujeto a alguna restricción en infinito. Aún para extensiones posteriores es posible admitir distribuciones como data inicial, por supuesto que en este caso las soluciones también son distribuciones:

**I.1.6 TEOREMA.** Dadas dos distribuciones $f_0$ y $f_1$, existe una única distribución $u(t)$ que es solución de la ecuación de onda con datos iniciales $f$, en el sentido de que para toda función $\phi(x)$ en $C_0^\infty$, $(u,\phi)$ es una función $C^\infty$ como función de $t$, igual a $(f_0,\phi)$ en $t=0$ y cuya derivada en $t=0$ es igual a $(f_1,\phi)$.

**Demostración.** Este teorema es dual al teorema 1.2 de la existencia de soluciones para data en $C_0^\infty$, la correspondencia es algo complicada. Primero supongamos que $f$ y $g$ pertenecen a $\mathcal{H}_0$; entonces de la propiedad de $\{U_0(t)\}$ de ser unitario vemos que

$$\langle U_0(t)f, g\rangle_0 = \langle f, U_0(-t)g\rangle_0$$

y para $g$ con $A_0 g$ en $C_0^\infty$ esto puede ser escrito como

$$\langle [U_0(t)f]_0, -\Delta g_0\rangle + \langle [U_0(t)f]_1, g_1\rangle = \langle f_0, -\Delta[U_0(-t)g]_0\rangle + \langle f_1, [U_0(-t)g]_1\rangle,$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto interno usual en $L^2(I\!R^n)$. Como $g$ está en el dominio de $A_0$, $A_0U_0(-t)g = U_0(-t)A_0g$; es decir

$$U_0(-t)(g_1, \Delta g_0) = ([U_0(-t)g]_1, \Delta[U_0(-t)g]_0).$$

Entonces la expresión de arriba puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}&\langle [U_0(t)f]_0, -\Delta g_)\rangle + \langle [U_0(t)f]_1, g_1\rangle\\ =&\langle f_0, -[U_0(-t)(g_1,\Delta g_0)]_1\rangle + \langle f_1, [U_0(-t)(g_1,\Delta g_0)]_0\rangle.\end{aligned}$$

Finalmente, notamos que para cualesquiera $(\varphi,\psi)$ en $C_0^\infty$ la solución $g_0$ de $\Delta g_0 = -\varphi$, es tal que $(g_0,\psi)$ está en el dominio de $A_0$. Entonces podemos definir las extensiones en distribuciones $U_0(t)f$ por

$$\begin{aligned}\langle [U_0(t)f]_0, \varphi\rangle &= \langle f_0, [U_0(-t)(0,\varphi)]_1\rangle - \langle f_1, [U_0(-t)(0,\varphi)]_0\rangle\\ \langle [U_0(t)f]_1, \psi\rangle &= -\langle f_0, [U_0(-t)(\psi,0)]_1\rangle + \langle f_1, [U_0(-t)(\psi,0)]_0\rangle.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Es fácil verificar que $u = [U_0(t)f]_0$ definida como en (1.7), es la distribución solución deseada de la ecuación de onda.

Sólo falta establecer la unicidad y para ello supondremos que $u$ es una distribución solución con datos iniciales nulos. Sea $\varphi(x,t)$ una solución $C^\infty$ arbitraria de la ecuación de onda con soporte compacto para cada $t$ y sea

$$I(t) = \langle u, \varphi_t\rangle - \langle u_t, \varphi\rangle.$$

Entonces
$$\frac{dl}{dt} = \langle u, \varphi_{tt}\rangle - \langle u_{tt}, \varphi\rangle = \langle u, \Delta\varphi\rangle - \langle u, \Delta\varphi\rangle = 0.$$
Como $l(0) = 0$ vemos que $l(t)$ es cero. Para cualquier $t_0$ y cualquier $\psi$ en $C_0^\infty$ podemos elegir $\varphi(x,t)$ tal que $\varphi(x,t_0) = 0$ y $\varphi_t(x,t_0) = \psi$. Entonces, $\langle u(t_0), \psi\rangle = 0$ para toda $\psi$ en $C_0^\infty$ y por lo tanto $u(t_0) = 0$.

El grupo de operadores $\{U_0(t)\}$ puede extenderse a distribuciones también. Denotaremos con $W$ al operador que asigna a la data $f$ la solución $u$ de la ecuación de onda con datos iniciales $f$.

## I.2 REPRESENTACIONES ESPECTRAL Y DE LA TRANSLACION DE $\{U_0(t)\}$

Denotemos con $D_+(D_-)$ al cojunto de $f \in \mathcal{H}_0$ con la propiedad de que las soluciones correspondientes $u = Wf$ de la ecuación de onda se anula en el cono
$$|x| < t \qquad (|x| < -t). \tag{2.1}$$
$D_+$ y $D_-$ son cerrados y satisfacen las siguientes condiciones (axiomas de Lax-Phillips) (véase Lax-Phillips [1]):

i) $U_0(t)D_+^0 \subset D_+^0$ para $t > 0$ y $U_0(t)D_-^0 \subset D_-^0$ para $t < 0$.

ii) $\bigcap\limits_t U_0(t)D_+^0 = \{0\} = \bigcap\limits_t U_0(t)D_-^0$

iii) $\overline{\bigcup\limits_t U_0(t)D_+^0} = \mathcal{H}_0 = \overline{\bigcup\limits_t U_0(t)D_+^0}$.

De los calculos hechos en la demostración del lema 1.1 se sigue que $D_+$ y $D_-$ son cerrados. La propiedad (i) es satisfecha ya que si $u(x,t) = Wf$ se anula en el cono (2.1) entonces para $s > 0$, $WU_0(s)f = u(x, t+s)$ se anula en el cono más grande $|x| < t + s$. Esto muestra que la data en $U_0(s)D_+$ son cero para $|x| < s$; y (ii) se sigue de esto. Para verificar (iii) usaremos el principio de Huygens para concluir que si $f$ es cero para $|x| < R$ entonces $u(x,t) = Wf$ es cero para $|x| < t - R$; esto implica que $U_0(R)f = g$ pertenece a $D_+$ y por lo tanto $U_0(-R)D_+$ incluye todas las data con soporte compacto en la bola $|x| \leq R$. Como $\mathcal{H}_0$ es la cerradura de las data con soporte compacto, concluimos (iii).

A cada subespacio de este tipo le corresponde una representación de la translación $f \longrightarrow k$, que transforma $\mathcal{H}_0$ unitariamente en $L^2(\mathbb{R}, S^{n-1})$ y tenemos la propiedad de que $U(t)f \mapsto k(s-t)$. En general habrá dos representaciones de la translación distintas $T_-$ y $T_+$ correspondientes a los subespacios $D_-^0$ y $D_+^0$ respectivamente. La representación $T_-$ manda a $D_-$ en $L^2(\mathbb{R}, S^{n-1})$ y $T_+$ manda a $D_+$ en $L^2(\mathbb{R}, S^{n-1})$. En el caso de la ecuación de onda no perturbada en un espacio de dimensión impar sucede que estas dos representaciones coinciden; es decir, hay una sola transformación $T$ que manda a $D_-$ en $L^2(\mathbb{R}, S^{n-1})$ y $D_+$ en $L^2(\mathbb{R}, S^{n-1})$. Las representaciones de la translación se obtienen mediante la transformada de Radon, tanto en el caso de dimensión par como impar.

De acuerdo con la teoría espectral general, la representación espectral de un $f$ en $\mathcal{H}_0$ dado puede darse como el producto escalar con eigenfunciones o eigenfunciones generalizadas $\varphi_\sigma$ del generador infinitesimal $A_0$ de $\{U_0(t)\}$:

$$\overline{f}(\sigma) = (f, \varphi_\sigma)_0,$$

donde $\varphi_\sigma$ satisface la ecuación

$$A_0\varphi_\sigma = i\sigma\varphi_\sigma. \tag{2.2}$$

En la sección 1 determinamos la forma de $A_0$. Este operador no tiene eigenfunciones (cuadrado integrables); además sus eigenfunciones impropias pero acotadas son las funciones

$$\varphi_{\sigma\omega} = \exp(-i\sigma x\omega)(1, i\sigma) \qquad (|\omega| = 1). \tag{2.3}$$

Hay una infinidad de eigenfunciones acotadas linealmente independientes para cada $\sigma$, indicando que la multiplicidad espectral de $A_0$ es infinita. Entonces $\overline{f}$ será una función de $\sigma$ y $\omega$; también podemos pensar a $\overline{f}$ como función de $\sigma$ cuyos valores están en el espacio auxiliar $N = L^2(S^{n-1})$. Denotaremos el producto escalar de $L^2$ sobre $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ con paréntesis cuadrados:

$$[\overline{f}, \overline{g}] = \int\int \overline{f}(\sigma,\omega)\overline{\overline{g}}(\sigma,\omega)d\sigma d\omega.$$

Para hacer la representación espectral unitaria, se les tiene que poner un peso adecuado a las eigenfunciones. Un cálculo fácil, nos muestra que los pesos son de la forma $\sigma^{(n-3)/2}$.

**I.2.1 TEOREMA.** La función $\overline{f}$ definida por

$$\overline{f}(\sigma,\omega) = \frac{(-i\sigma)^{(n-3)/2}}{(2\pi)^{n/2}}(f, \varphi_{\sigma,\omega})_0, \tag{2.4}$$

(donde $\varphi_{\sigma\omega}$ está dada por (2.3)), es una representación espectral unitaria de $\mathcal{H}_0$ para $\{U_0(t)\}$.

**Demostración.** Sea $f$ en $\mathcal{S}$, es decir $f \in C^\infty$ tal que todas las derivadas de $f$ tienden a cero en infinito más rápido que cualquier potencia de $|x|^{-1}$. Haciendo cálculos simples se sigue que $\overline{f}$ definida por (2.4) también está en $\mathcal{S}$. Denotemos con $\overline{h}$ el representante de $A_0 f$; como $\varphi$ es una eigenfunción de $A_0$, e integrando por partes obtenemos que

$$\overline{h} = (A_0 f, \varphi)_0 = -(f, A_0\varphi)_0 = i\sigma(f, \varphi)_0 = i\sigma\overline{f}.$$

Esto muestra que (2.4) es una representación espectral para $A_0$. De esto se sigue que (2.4) también define una representación espectral para $\{U_0(t)\}$.

Para probar que la representación es isométrica integramos por partes, lo cual convierte el producto escalar de la energía en el producto escalar en $L^2$;

$$(f\varphi)_0 = \int \nabla f_0 \overline{\nabla f y_0} + f_1\overline{\varphi}_1 dx = \int -f_0 \Delta \overline{\varphi}_0 + f_1 \overline{\varphi}_1 dx. \tag{2.5}$$

Usando la definición (2.3), vemos que

$$\overline{f} = -(-i\sigma)^{(n+1)/2}\overline{f}_0 + (-i\sigma)^{(n-1)/2}\overline{f}_1, \tag{2.6}$$

donde

$$\overline{f}_j(\sigma,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f_j(x) e^{i\sigma x\omega} dx \qquad (j = 0, 1). \tag{2.7}$$

La fórmula (2.7) muestra que las funciones $\overline{f}_j$ son funciones pares de $(\sigma,\omega)$; por esto las funciones del lado derecho de (2.6) tienen paridad opuesta y son ortogonales

$$||\overline{f}||^2 = ||\sigma^{(n+1)/2}\overline{f}_0||^2 + ||\sigma^{(n-1)/2}\overline{f}_1||^2. \tag{2.8}$$

Como las funciones $\overline{f}_j$ son pares,

$$\begin{aligned} ||\sigma^{(n+1)/2}\overline{f}_0||^2 &= 2\int_0^\infty |\overline{f}_0(\sigma,\omega)|^2 \sigma^{n+1} d\sigma d\omega \\ ||\sigma^{(n-1)/2}\overline{f}_1||^2 &= 2\int_0^\infty |\overline{f}_1(\sigma,\omega)|^2 \sigma^{n-1} d\sigma d\omega. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Las fórmulas (2.7) muestran que $\overline{f}_j$ puede expresarse en términos de la transformada de Fourier $\widehat{f}_j(\xi)$ de $f_j$ poniendo $\xi = \sigma\omega$; usando esto y la formula de Parseval en (2.9) obtenemos

$$||\sigma^{(n+1)/2}\overline{f}_0||^2 = \frac{1}{2}\int |\nabla f_0|^2 dx$$

$$||\sigma^{(n-1)/2}\overline{f}_1||^2 = \frac{1}{2}\int |\nabla f_1|^2 dx$$

las cuales cuando son sustituidas en (2.8), nos dan la isometría

$$||\overline{f}||^2 = |f|_0^2.$$

Para mostrar que la representación no sólo es isométrica sino también unitaria tenemos que ver que el conjunto de funciones $\overline{f}$ (las cuales representan data $f$ en $S$) es denso en $L^2(I\!R \times S^{n-1})$. Se sigue de las fórmulas (2.6), (2.7) y del hecho que los dos términos de la derecha de (2.6) son de paridad opuesta, que si $\overline{f}$ está en $C^\infty$ y se anula para $\sigma$ cerca de cero y cerca de infinito, entonces $\overline{f}_0$ y $\overline{f}_1$ son funciones $C^\infty$ con soporte compacto y por lo tanto $f_0$ y $f_1$ están en $S$. Como la clase de funciones $\overline{f}$ es densa en $L^2(I\!R \times S^{n-1})$, la prueba del teorema termina.∎

**I.2.2 TEOREMA.** Sea $k$ la representación de la translación de $f$ en $S$ derivada de la representación espectral (2.4) por la transformada de Fourier; entonces $k$ y $f$ son expresados en términos una de la otra de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$k(s,\omega) = -\partial_s^{(n+1)/2} M_0 + \partial_s^{(n-1)/2} M_1, \tag{2.10}$$

donde $M_j$, $j = 0, 1$ son definidos como las siguientes integrales sobre hiperplanos:

$$M_j(s,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{x\omega=s} f_j(x)dS, \tag{2.11}$$

(es decir, $M_j$ es la transformada de Radon de $f_j$).

Inversamente

$$f_0(x) = S(x), \qquad f_1(x) = S'(x), \tag{2.12}$$

donde $S$ y $S'$ son definidas como las siguientes integrales sobre esferas:

$$S(x) = \int h(x,\omega,\omega)d\omega, \qquad S'(x) = \int h'(x,\omega,\omega)d\omega. \tag{2.13}$$

Las funciones $h$ y $h'$ son las siguientes:

$$\begin{aligned} h(s,\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}(-\partial_s)^{(n-3)/2}k, \\ h'(s,\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}(-\partial_s)^{(n-1)/2}k, \end{aligned} \tag{2.14}$$

**Demostración.** Supongamos que $f \in \mathcal{S}$, empezaremos integrando en (2.7) primero en hiperplanos $x\omega = s$ y luego respecto a $s$; obtenemos

$$\tilde{f}_j(\sigma,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int M_j(s,\omega)e^{i\sigma s}ds \qquad (j = 0,1), \tag{2.15}$$

donde $M_j$ está dado por la fórmula (2.11).

Sustituyendo (2.15) en (2.6) se tiene

$$\tilde{f}(\sigma,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int [-M_0(s,\omega)(-i\sigma)^{(n+1)/2} + M_1(s,\omega)(-i\sigma)^{(n-1)/2}]e^{i\sigma s}ds. \tag{2.16}$$

Una integración por partes ahora muestra que $\tilde{f}$ es la transformada de Fourier de la función dada por la fórmula (2.10); esto prueba la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte tenemos que invertir (2.10); para ello usaremos el caracter unitario de la representación de la translación, de acuerdo a la cual

$$(f,g)_0 = [k,l] \tag{2.17}$$

para todo $f$ y $g$ en $\mathcal{H}_0$, $k$ y $l$ son los representantes de la translación de $f$ y $g$ respectivamente. Es suficiente suponer que $g$ pertenece a $\mathcal{S}$ y que $k$ es una función $C^\infty$ de $s$ y $\omega$ en $L^2(I\!R \times S^{n-1})$. Usando la fórmula (2.10) para expresar $l$ en el lado derecho de (2.16) tenemos

$$[k,l] = \int\int k(s,\omega)(-\partial_s^{(n+1)/2)}\overline{M}_0 + \partial_s^{(n-1)/2}\overline{M}_1)dsd\omega.$$

Integrando por partes con respecto a $s$ se tiene

$$[k,l] = (2\pi)^{(n-1)/2} \int\int h_0\overline{M}_0 + h_1\overline{M}_1 ds d\omega,$$

donde

$$h_0 = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}(-\partial_s)^{(n+1)/2}k \qquad h_1 = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}}(-\partial_s)^{(n-1)/2}k. \tag{2.18}$$

Sustituyendo la expresión explícita (2.11) por $M_0$ y $M_1$ en la de arriba y recombinando $dS$ y $ds$ otra vez como $dx$ en la integral múltiple resultaute, tenemos

$$\begin{aligned}[k,l] &= \frac{1}{2}\int\int h_0\left(\int_{x\omega=s}\overline{g}_0(x)dS\right)dsd\omega + \int\int h_1\left(\int_{x\omega=s}\overline{g}_1(x)dS\right)dsd\omega \\ &= \frac{1}{2}\int\int(h_0(x\omega,\omega)\overline{g}_0(x) + h_1(x\omega,\omega)\overline{g}_1(x))dxd\omega.\end{aligned}$$

Un intercambio en el orden de integración respecto a $x$ y $\omega$ nos da

$$[k,l] = \frac{1}{2}\int(S_0(x)\overline{g}_0(x) + S_1(x)\overline{g}_1(x)dx,$$

donde

$$S_j(x) = \int h_j(x\omega,\omega)d\omega. \tag{2.19}$$

Por otro lado usando (2.5), podemos escribir el lado izquierdo de (2.16) como

$$\langle f,g\rangle_0 = \frac{1}{2}\int(-\Delta f_0\overline{g}_0 + f_1\overline{g}_1)dx. \tag{2.20}$$

En vista que (2.16), (2.18) y (2.20) deben ser iguales para toda $g$ en $\mathcal{S}$. Como tales data forman un conjunto denso, los coeficientes de $g_0$ y $g_1$ en (2.18) y (2.20) son idénticos

$$-\Delta f_0 = S_0, \qquad f_1 = S_1; \tag{2.21}$$

esto prueba la segunda de las dos fórmulas dadas para $f$ en (2.12) del teorema 2.2. Para obtener la primera fórmula expresamos la función $S_0$ como la dada en (2.19) en términos de $S$ dado por (2.13):

$$S_0 = -\Delta S.$$

Combinando esta con la primera ecuación de (2.21) tenemos

$$\Delta(f_0 - S) = 0,$$

es decir, $f_1 - S$ es una función armónica definida en todo el espacio. Por otro lado si está en $\mathcal{S}$ entonces también $h$ y por lo tanto (2.13) muestra que $S$ tiende a cero cuando $|x| \longrightarrow \infty$, entonces por el principio del máximo, es cero. Luego $f_0 = S$ como se afirma en (2.12).

Aplicando (2.12) a $U_0(t)f$, y como $U_0(t)f$ es representado por la translación $k$ obtenemos el siguiente

**I.2.3 COROLARIO.** Sea $u(x,t) = Wf$ la solución de la ecuación de onda con datos iniciales $f$ y supongamos que el representante de la translación de $f$ es $C^\infty$. Entonces

$$u(x,t) = \int h(x\omega - t, \omega)d\omega, \tag{2.22}$$

$$u_t(x,t) = \int h'(x\omega - t, \omega)d\omega. \tag{2.22$'$}$$

La fórmula (2.22) es válida en un sentido más débil para todo tipo de data.

Supongamos que la data $f$ es $C^\infty$ e igual a cero para $|x| \geq R$; entonces se sigue de (2.10) y (2.11) que $k$ es cero para $|s| \geq R$. De esto, (2.14) y (2.22) se sigue que $u(x,t) = Wf$ es cero dentro de los conos $|x| < |t| - R$, por lo que $|x\omega - t| > R$ y luego el integrando en (2.22) es cero para toda $\omega$ en $S^{n-1}$. esto presenta una prueba del principio de Huygens, enunciado en la sección 1.

**I.2.4 TEOREMA.** Los subespacios $L^2((-\infty, o)\times S^{n-1})$ y $L^2((-\infty, o)\times S^{n-1})$ asociados con la representación de la translación determinados en el teorema 2.2 son los espacios $D_-$ y $D_+$, respectivamente.

**I.2.5 COROLARIO.** El subespacio generado por

$$F = [U_0(t)f; \operatorname{supp} f \subset \{|x| < t\}]$$

es denso en $D_+$.

**I.2.6 TEOREMA.** Sea $u(x,t)$ una solución de la ecuación de onda con energía finita, y sea $k$ la representación de la translación de los valores iniciales de $u$ construida en el teorema 2.2. Supongamos que $\partial_s^{(n-1)/2}k$ es continua y tiene soporte compacto. Entonces

$$\lim_{|t|\longrightarrow\infty} t^{(n-1)/2}u(x,t) = k(s,\theta) \tag{2.23}$$

a lo largo del rayo

$$x = (t+s)\theta. \tag{2.24}$$

Como veremos en los siguientes capítulos se tienen resultados análogos para la propagación de ondas con presencia de obtáculos. En este caso el límite (2.23) en la dirección positiva de $t$ da el valor de la representación de la translación saliente de los datos iniciales $u$, y el límite en la dirección negativa de $t$ da el valor de la representación de la translación entrante de esta data. El operador de dispersión entonces relaciona el comportamiento de soluciones a lo largo de rayos para tiempos positivos y negativos grandes.

Ahora veamos un resultado acerca de la resolvente de $A_0$

Consideramos conveniente usar varios espacios con peso en $L^2$. Para cualquier real $s$ denotaremos con $L^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ al espacio de las funciones en $\mathbb{R}^n$ valuadas en los complejos definidas por

$$L^{2,s}(\mathbb{R}^n) = \{u(x) : (1+|x|^2)^{s/2}u(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

con la norma

$$||u||_{0,s} = ||(1+|x|^2)^{s/2}u||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

También consideraremos espacios de Sobolev $H_{m,s}(\mathbb{R}^n)$ con peso en $L^2$ definidos, para cualquier entero $m$ y $s$ real, de la siguiente manera:

$$H_{m,s}(\mathbb{R}^n) = \{u(x) : D^\alpha u \in L^{2,s}(\mathbb{R}^n), \qquad 0 \le |\alpha| \le m\}.$$

Las derivadas $D^\alpha u$ son en el sentido de distribuciones. El espacio $H_{m,s}(\mathbb{R}^n)$ es de Hilbert bajo la norma:

$$||u||_{m,s} = \left( \sum_{|\alpha|\le m} ||D^\alpha u||_{0,s}^2 \right)^{1/2}.$$

Los espacios $H_{m,0}(\mathbb{R}^n)$, los cuales son los espacios de Sobolev $L^2$ usuales de orden $m$, también los denotaremos con $H_m(\mathbb{R}^n)$.

**I.2.7 TEOREMA.** Sea $R_0(z) = (A_0 - z)^{-1}$. Consideremos a $R_0(z)$ como una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ que toma valores en $B(H_{2,s} \otimes H_{2,s}, L^{2,s} \otimes L^{2,s})$ $s > 1/2$. Entonces

i) Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ los siguientes límites existen en la topología uniforme de operadores en $B(H_{2,s} \otimes H_{2,s}, L^{2,s} \otimes L^{2,s})$ $s > 1/2$.

$$\lim_{\substack{z \to \lambda \\ \pm Re z > 0}} R_0(z) = R_0^{\pm}(\lambda) \tag{2.25}$$

ii) Para cualquier $(f_0, f_1) \in H_{2,s} \otimes H_{2,s}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ la data $(u,v) = R_0^{\pm}(\lambda)(f_0, f_1)$ satisface la ecuación

$$A_0(u,v) - \lambda(u,v) = (f_0, f_1). \tag{2.26}$$

**Demostración.** Como $\lim\limits_{\substack{z\longrightarrow\lambda \\ \pm Re z>0}} (z^2 - H_0)^{-1}$ existe y es distinto de cero en la topología uniforme de operadores en $B(L^{2,s}, H_{2,s})$, entonces $\lim\limits_{\substack{z\longrightarrow\lambda \\ \pm Re z>0}} \dfrac{1}{z^2 - H_0}$ existe en la topología uniforme de operadores en $B(H_{2,s}, L^{2,s})$, por lo que $\lim\limits_{\substack{z\longrightarrow\lambda \\ \pm Re z>0}} R_0(z)$ existe en la toplogía uniforme de operadores en $B(H_{2,s} \otimes H_{2,s}, L^{2,s} \otimes L^{2,s})$.

Sea $(f_0, f_1) \in B(H_{2,s} \otimes H_{2,s})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(u, v) = R_0^{\pm}(\lambda)(f_0, f_1)$, entonces

$$
\begin{aligned}
A_q(u,v) - \lambda(u,v) &= (A_q - \lambda I) \lim_{\substack{z\longrightarrow\lambda \\ \pm Re z>0}} \begin{pmatrix} \frac{-z}{z^2-H_0} & \frac{-1}{z^2-H_0} \\ \frac{-H_0}{z^2-H_0} & \frac{-z}{z^2-H_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ H_0 & -\lambda \end{pmatrix} \lim_{\substack{z\longrightarrow\lambda \\ \pm Re z>0}} \begin{pmatrix} \frac{-z}{z^2-H_0} & \frac{-1}{z^2-H_0} \\ \frac{-H_0}{z^2-H_0} & \frac{-z}{z^2-H_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \\
&= \lim_{\substack{z\longrightarrow\lambda \\ \pm Re z>0}} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ H_0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-z}{z^2-H_0} & \frac{-1}{z^2-H_0} \\ \frac{-H_0}{z^2-H_0} & \frac{-z}{z^2-H_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \\
&= \lim_{\substack{z\longrightarrow\lambda \\ \pm Re z>0}} \begin{pmatrix} \frac{\lambda z-H_0}{z^2-H_0} & \frac{\lambda-z}{z^2-H_0} \\ \frac{\lambda H_0-zH_0}{z^2-H_0} & \frac{\lambda z-H_0}{z^2-H_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}. \blacksquare
\end{aligned}
$$

# Capítulo II
# UNA GENERALIZACION DE LA TEORIA DE DISPERSION DE LAX-PHILLIPS PARA PERTURBACIONES DE RANGO CORTO

En este capítulo desarrollaremos una teoría de dispersión para la ecuación de onda con perturbaciones del tipo

$$Q(x) = \frac{\varphi(x)}{|x|^{\beta}} \qquad \beta = 2 - \frac{n}{s}, \varphi \in L^{s}(\mathbb{R}^{n}), s > n > 2.$$

Las normas $\| \|_0$ y $\| \|_Q$ son equivalentes, para ello vease el lema 2.2

## II.1 EL OPERADOR PERTURBADO

Para la ecuación de onda perturbada

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + Qv = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n \quad t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = g_0 \\ v_t(x,0) = g_1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $Q$ es tal que $Q = \frac{\varphi(x)}{|x|^{\beta}}$ $\beta = 2 - \frac{n}{s}$, $\varphi \in L^{s}(\mathbb{R}^{n})$, $s > 2$, $s \geq \frac{n}{2}$ la forma de la energía si $g = (g_0, g_1)$ es

$$E_Q(g) = \int |\nabla g_0|^2 + Q|g_0|^2 + |g_1|^2 \, dx.$$

Iniciando con data en $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$, completamos con respecto a $\|\ \|_Q = (E_Q)^{1/2}$ y obtenemos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_Q$. El producto escalar en $\mathcal{H}_Q$, está dado por

$$\langle (f_0, f_1), (f_0', f_1') \rangle_Q = \int \nabla f_0 \overline{\nabla f_0'} + Q f_0 \overline{f_0'} + f_1 \overline{f_1'}\, dx. \tag{1.2}$$

Es conveniente escribir la ecuación (1.1) en forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix} - A_Q \begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

donde $A_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - Q & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} v(x,0) \\ v_t(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}$.

**II.1.1 TEOREMA.** El operador $A_Q$ es autoadjunto negativo en $\mathcal{H}_Q$.

**Demostración.** Veamos que $A_Q$ es antisimétrico en su dominio.

$$\begin{aligned} \langle A_Q f, g \rangle_Q &= \langle (f_1, (\Delta - Q) f_0), (g_0, g_1) \rangle_Q \\ &= \int \nabla f_1 \overline{\nabla g_0} + Q f_1 \overline{g_0} + (\Delta - Q) f_0 \overline{g_1}\, dx \end{aligned}$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} &= \int -f_1 \Delta \overline{g_0} + Q f_1 \overline{g_0} + \Delta f_0 \overline{g_1} - Q f_0 \overline{g_1}\, dx \\ &= \int -\nabla f_0 \overline{\nabla g_1} - Q f_0 \overline{g_1} - f_1 (\Delta - Q) \overline{g_0}\, dx \\ &= \langle (f_0, f_1), (g_1, -(\Delta - Q) g_0 \rangle_Q \\ &= \langle f, -A_Q g \rangle_Q. \blacksquare \end{aligned}$$

Probemos que rango de $\lambda - A_Q$ es denso en $\mathcal{H}_Q$ para $\lambda$ real distinta de cero. Para hacer esto resolvamos

$$(\lambda - A_Q) f = g \tag{1.4}$$

para toda $g = (g_0, g_1) \in C_0^\infty \otimes C_0^\infty$. Escribiendo (1.4) en sus componentes, tenemos

$$\lambda f_0 - f_1 = g_0, \qquad \lambda f_1 - (\Delta - Q) f_0 = g_1.$$

Combinando estas dos ecuaciones obtenemos

$$\lambda^2 f_0 - (\Delta - Q) f_0 = \lambda g_0 + g_1 \in C_0^\infty. \tag{1.5}$$

Usando la forma

$$\int \nabla f_0|^2 + \lambda^2 |f_0|^2 dx$$

es fácil obtener una solución débil $f_0$ de (1.5) mediante el teorema de representación de Riesz, para la cual $\|\partial^\alpha f_0\| < \infty$ para toda $|\alpha| \leq 1$. Definiendo $f_1 = \lambda f_0 - g_0$, es claro que $f = (f_0, f_1)$ es solución de (1.4), es decir, el rango de $\lambda - A_Q$ es $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$ que es denso en $\mathcal{H}_Q$, es decir $A_Q$ es autoadjunto negativo en $\mathcal{H}_Q$.∎

Como $A_Q$ es autoadjunto negativo el espectro de $iA_Q$ está contenido en reales. A continuación veremos que los reales están contenidos en el espectro de $iA_Q$. Por lo que $\sigma(iA_Q) = \mathbb{R}$.

El espectro de $H = \Delta - Q$ en $L^2$ es un conjunto discreto de reales negativos (con posible punto de acumulación en el cero) unión $[0, \infty)$. El espectro puramente puntual de $H$ es un conjunto discreto de reales con posibles puntos de acumulación el cero y $+\infty$. El espectro absolutamente continuo de $H$ es $[0, \infty)$ y el espectro singular continuo de $H$ es vacío (véase Agmon [1]).

Primero veamos cuáles son los valores propios de $A_Q$. Sea $A_Q(\varphi, \psi) = \lambda(\varphi, \psi)$ entonces

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\varphi \\ \lambda\psi \end{pmatrix} \\ \iff &\begin{pmatrix} \psi \\ H\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\varphi \\ \lambda\psi \end{pmatrix} \\ \iff &\psi = \lambda\varphi \qquad H\varphi = \lambda\psi = \lambda^2\varphi, \end{aligned}$$

es decir, $\lambda$ es valor propio de $A_Q$ si $\lambda^2$ es valor propio negativo de $H$ ($\lambda$ debe ser imaginario porque $A_Q$ es autoadjunto negativo). La data $(\varphi, \lambda\varphi)$ es un vector propio de $A_Q$ correspondiente al valor propio $\lambda$ si $\varphi$ es un vector propio de $H$ correspondiente al valor propio $\lambda^2$.

Entonces el espectro puramente puntual de $A_Q$ consta de las raíces cuadradas de los valores propios negativos de $H$.

Denotemos con $\sigma_{ac}(H)$ al espectro absolutamente continuo de $H$ en $L^2$ y con $R_H(z)$ a la resolvente en $z$ de $H$.

Si $z \in \sigma_{ac}(H)$ entonces $R_H(z) = (zI - H)^{-1}$ no es acotada, por lo que $(zI - H)$ tampoco es acotado y $\frac{1}{(zI-H)}$ si es acotado.

Sea $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda^2 \text{ es valor propio de } H\}$, queremos ver que $\alpha \in \sigma(A_Q)$. Es decir queremos ver que $R_{A_Q}(\alpha)$ es no acotada en $\mathcal{H}_Q$.

$$R_{A_Q}(\alpha) = (\alpha I - A_Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -H & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2 - H} & \frac{1}{\alpha^2 - H} \\ \frac{H}{\alpha^2 - H} & \frac{\alpha}{\alpha^2 - H} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\|R_{A_Q}(\alpha)(\varphi,\psi)\|_Q^2 = \int\left|\nabla\frac{\alpha\varphi}{\alpha^2\varphi-H\varphi}+\frac{\psi}{\alpha^2\psi-H\psi}\right|^2+Q\left|\frac{\alpha\varphi}{\alpha^2\varphi-H\varphi}+\frac{\psi}{\alpha^2\psi-H\psi}\right|^2$$
$$+\left|\frac{H\varphi}{\alpha^2\varphi-H\varphi}+\frac{\alpha\psi}{\alpha^2\psi-H\psi}\right|^2 dx$$
$$=\int\left|\frac{\alpha\varphi\nabla H\varphi-\alpha H\varphi\nabla\varphi}{(\alpha^2\varphi-H\varphi)^2}+\frac{\psi\nabla H\psi-H\psi\nabla\psi}{(\alpha^2\psi-H\psi)^2}\right|^2$$
$$+Q\left|\frac{\alpha\varphi}{\alpha^2\varphi-H\varphi}+\frac{\psi}{\alpha^2\psi-H\psi}\right|^2+\left|\frac{H\varphi}{\alpha^2\varphi-H\varphi}+\frac{\alpha\psi}{\alpha^2\psi-H\psi}\right|^2 dx.$$

El tercer sumando de $\|R_{A_Q}(\alpha)\|_Q^2$ es $\int\left|\frac{H\varphi}{\alpha^2\varphi-H\varphi}+\frac{\alpha\psi}{\alpha^2\psi-H\psi}\right|^2 dx$. Si la data es de la forma $(\varphi,\lambda\varphi)$ con $\lambda\neq 0$, el tercer sumando nos queda $\int\left|1-\frac{(\alpha^2+\alpha)\varphi}{\alpha^2\varphi-H\varphi}\right|^2$. Como $\frac{(\alpha^2+\alpha)\varphi}{\alpha^2\varphi-H\varphi}\in L^2$ y la constante $1\notin L^2$, entonces su diferencia no pertenece a $L^2$, es decir, $\int\left|1-\frac{(\alpha^2+\alpha)\varphi}{\alpha^2\varphi-H\varphi}\right|$ no es finita, por lo que no es acotado en $\mathcal{H}_Q$.

Por lo anterior tenemos que la resolvente de $A_Q$ en $\alpha$ no es acotada para $\alpha\in I\!I$ por lo que $I\!I$ está contenido en el espectro de $A_Q$. Entonces $\sigma(A_Q)=I\!I$.

Sea $U_Q(t)\colon\mathcal{H}_Q\longrightarrow\mathcal{H}_Q$ el operador que relaciona los datos iniciales $g$ con la pareja $(v,v_t)$, donde $v$ es solución de la ecuación (1.3) en el tiempo $t$.

$$U_Q(t)g=(v(x,t),v_t(x,t)). \tag{1.6}$$

Veamos que $U_Q(t)$ es unitario.

**II.1.2 LEMA.** Si $g\in C_0^\infty\otimes C_0^\infty$, entonces $\|U_Q(t)g\|_Q=\|g\|_Q$.

**Demostración.** Sea $v(x,t)$ solución de (1.3) con datos iniciales en $C_0^\infty\otimes C_0^\infty$ (es decir, $v(x,t)$ tiene soporte compacto respecto a $x$). Entonces

$$E_Q(t)(v,v_t)-E_Q(0)(v,v_t)=\int_0^t\partial_s E_Q(s)(v(x,s),v_s(x,s)\,ds$$
$$=\int_0^t\int_{I\!R^n}\partial_s|\nabla v(x,s)|^2+Q(x)|v(x,s)|^2+v_s(x,s)|^2\,dx\,ds$$

integrando por partes

$$=\int_0^t\int_{I\!R^n}\Delta v\overline{v_s}+v_s\overline{\Delta v}+Qv\overline{v_s}+v_sQ\overline{v}+v_{ss}\overline{v_s}+v_s\overline{v_{ss}}dxds$$
$$=\int_0^t\int_{I\!R^n}(v_{ss}+\Delta v+Qv)\overline{v_s}+v_s(\overline{v_{ss}}+\Delta\overline{v}+Q\overline{v})dxds$$
$$=\int_0^t\int_{I\!R^n}0\,dx\,ds=0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}||U_Q(t)g||_Q &= ||(v((x,t),v_t(x,t))||_Q \\ &= [E_Q(t)(v(x,t),v_t(x,t))]^{\frac{1}{2}} \\ &= [E_Q(t)(v(x,t),v_t(x,t))]^{\frac{1}{2}} \\ &= [E_Q(0)g]^{\frac{1}{2}} \\ &= ||g||_Q.\blacksquare\end{aligned}$$

**II.1.3 COROLARIO.** Conservación de la energía.

Si $g \in \mathcal{H}_Q$ entonces $||U_Q(t)g||_Q = ||g||_Q$.

**Demostración.** Sea $g_m$ una sucesión de funciones en $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$ que converge a $g \in \mathcal{H}_Q$. Como $U_Q(t)(f+g) = U_Q(t)f + U_Q(t)g$ para cualesquiera $f$ y $g \in \mathcal{H}_Q$, entonces

$$U_Q(t)g_m - U_Q(t)g = U_Q(t)(g_m - g) \tag{1.7}$$

y por lo tanto $|| \lim_{n\to\infty} U_Q(t)g_m - U_Q(t)g||_Q = 0$, lo cual implica $\lim_{n\to\infty} ||U_Q(t)g_m||_Q = ||U_Q(t)g||_Q$. Pero por el lema 1.2 tenemos que para cada $m$, $||U_Q(t)g_m||_Q = ||g_m||_Q$ y $\lim ||g_m||_Q = ||g||_Q$, por lo que podemos concluir $||U_Q(t)g)||_Q = ||g||_Q$.$\blacksquare$

Como $U_Q$ es un grupo unitario, utilizando el teorema de Stone, concluimos que existe un operador autoadjunto (negativo) $A$ con la propiedad de que si $g \in D(A)$ entonces

$$U_Q(t)g = e^{tA}g.$$

A continuación veremos que el operador $A$ es igual al operador $A_Q$.

Para $g \in D(A)$ tenemos que

$$\partial_t U_Q(t)g = Ae^{tA}g$$

pero, por otro lado, sabemos que

$$\begin{aligned}\partial_t U_Q(t)g &= (v_t, v_{tt}) \\ &= (v_t; (\Delta - Q)v) \\ &= A_Q U_Q(t)g\end{aligned}$$

de donde concluimos que $A = A_Q$. Entonces $A_Q$ es el generador infinitesimal de $U_Q$.

## II.2 EQUIVALENCIA DE LOS ESPACIOS $H_0$ Y $H_Q$

Veamos que las normas $\| \|_0$ y $\| \|_Q$ son equvalentes en $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$, lo cual nos lleva concluir por continuidad que los espacios $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_Q$ son equivalentes respecto a sus normas.

Primero recordemos el resultado de Caffarelli-Kohn-Niremberg [1].

**II.2.1 LEMA.** Sean $p$, $q$, $r$, $a$, $\alpha$, $\beta$, $\sigma$ y $\gamma$ números reales fijos, tales que $p$, $q \geq 1$, $r > 0$, $0 < a \leq 1$, $\gamma = a\sigma + (1-a)\beta$, $\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}$, $\frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}$, $\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} > 0$. Existe una constante positiva $c$ tal que la siguiente desigualdad es válida para $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\||x|^\gamma u\|_{L^r} \leq c\||x|^\alpha |Du|\|_{L^p}^a \||x|^\beta u\|_{L^q}^{1-a} \tag{2.1}$$

si y sólo si las siguientes relaciones se tienen

$$\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} = a\left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{n}\right) + (1-a)\left(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}\right)$$

$0 \leq \alpha - \sigma \leq 1$ y $\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{n}$

En el siguiente lema mostraremos que las normas de la energía $\| \|_0$ y $\| \|_Q$ son equivalentes

**II.2.2 LEMA.** Sea $u(x,t)$ una solución del sistema sin perturbar (I.1.1) y $Q(x) = \frac{\varphi(x)}{|x|^\beta}$, $\beta = 2 - \frac{n}{s}$, $\varphi \in L^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 2$, $s \geq \frac{n}{2}$ Entonces

$$\int Q(x)|u(x,t)|^2\,dx \leq k \int |\nabla u(x,t)|^2\,dx.$$

**Demostración.** Sea $s' = \frac{s}{s-1}$, entonces $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}\int Q(x)|u(x,t)|^2\,dx &= \int \frac{\varphi(x)}{|x|^\beta}|u(x,t)|^2\,dx \\ &\leq \left(\int |\varphi(x)|^s\right)^{\frac{1}{2s}} \left(\int \frac{|u(x,t)|^{2s'}}{|x|^{\beta s'}}dx\right)^{\frac{1}{2s'}} \\ &= \|\varphi\|_s^{\frac{1}{2}} \left(\int \frac{|u(x,t)|^{\frac{2s}{s-1}}}{|x|^{\frac{2s-n}{s-1}}}dx\right)^{\frac{s-1}{2s}}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Aplicando la desigualdad de Cafarelli-Kohn-Niremberg para los siguientes valores $r = \frac{2s}{s-1}$, $p = 2$, $\alpha = 0$, $\gamma = \frac{n-2s}{2s}$ y $a = 1$ obtenemos

$$\||x|^{\frac{n-2s}{2s}}u\|_{L^{\frac{2s}{s-1}}} \leq c\||Du|\|_{L^2} \tag{2.3}$$

sólo tenemos que constatar que

$$\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} = a\left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{n}\right) + (1-a)\left(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}\right),$$

$0 \leq \alpha - \sigma \leq 1$ y $\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha-1}{n}$ haciendo las sustituciones tenemos $\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} = \frac{s-1}{2s} + \frac{\frac{n-2s}{2s}}{n} = \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha-1}{n}$. Por lo anterior

$$\|(f_0, f_1)\|_Q \leq c\|f_0, f_1\|_0.$$

## II.3 EXISTENCIA DE LOS OPERADORES DE ONDA

Definamos los operadores de onda:

$$\begin{aligned} &W_\pm: \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_Q \\ &W_\pm f = \operatorname*{s\,lim}_{t \longrightarrow \pm\infty} U_Q(-t)U_0(t)f. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Preguntarse por la existencia de este límite tiene sentido ya que $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_Q$ son equivalentes, entonces podemos considerar que $U_0(t)f$ está en $\mathcal{H}_Q$.

Mostraremos que estos operadores existen y son isometrías. La prueba de esto está basada en el método de Cook y el siguiente lema.

**II.3.1 LEMA.** Sea $u(x,t)$ una solución de la ecuación de onda sin perturbar, tal $u(x,t) \in D_+^0$ y $Q(x) = \frac{\varphi(x)}{|x|^\beta}$, $\beta = 2 - \frac{n}{s}$ $\varphi \in L^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 2$, entonces

$$\lim_{r,s \longrightarrow \infty} \int_r^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Q(x)u(x,t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dt = 0. \tag{3.2}$$

**Demostración.** Sabemos que si $u(x,t)$ es solución de la ecuación de onda sin perturbar con data inicial en $C_0^\infty$,entonces por el método de fase estacionaria (véase Reed and Simon [1] vol. III pág 46) tenemos que para toda $\delta > 0$

a) Para cualquier $N$, existe $C_{N,\delta}$ tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{C_{N\delta}}{(1 + |t| + |x|)^N}$$

donde $|x| \geq (1+\delta)|t|$.

b) Existe $d$ tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{d}{(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}}$$

para toda $x$ y $t$.

Como $u(x,t) \in D^0_+$, es decir, existe $T$ tal que $u(x,t) = 0$ si $|x| < t + T$.

Primero supongamos que $s < \infty$. Entonces usando la desigualdad de Hölder para $\frac{2}{s}$ y $\frac{s}{s-2}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r,s\longrightarrow\infty} \int_r^s \left( \int_{I\!R^n} |Q(x)u(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \lim_{r,s\longrightarrow\infty} \int_r^s \left( \int_{I\!R^n} \left| \frac{\varphi(x)u(x,t)}{|x|^\beta} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \lim_{r,s\longrightarrow\infty} \int_r^s \left( \int_{I\!R^n} |\varphi(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \left( \int_{I\!R^n} \left( \frac{|u(x,t)|^2}{|x|^{2\beta}} \right)^{\frac{s}{s-2}} dx \right)^{\frac{s-2}{2s}} dt \\
&= k \lim_{r,s\longrightarrow\infty} \int_r^s \left( \int_{I\!R^n} \left( \frac{|u(x,t)|^2}{|x|^{2\beta}} \right)^{\frac{s}{s-2}} dx \right)^{\frac{s-2}{2s}} dt
\end{aligned}
$$

donde $k = (\int_{I\!R^n} |\varphi(x)|^s dx)^{\frac{1}{s}}$.

Consideremos la siguiente descomposición

$$
\begin{aligned}
A(t) &= \{x \in I\!R^n : (1+\delta)|t| \leq |x|, \delta > 0\} \\
B(t) &= \{x \in I\!R^n : |t| + T \leq |x| \leq (1+\delta)|t|\}.
\end{aligned}
$$

Ahora calcularemos (3.2) en dos pasos, primero restringida a $A(t)$ y luego restringida a $B(t)$.

Elijamos $N > (1+n)(s-2)/s$ entonces

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r,s\longrightarrow\infty}\int_r^s \left(\int_{A(t)}\left(\frac{|u(x,t)|^2}{|x|^{2\beta}}\right)^{\frac{s}{s-2}}dx\right)^{\frac{s-2}{2s}}dt\\
\leq& k\int_r^s \left(\int_{A(t)}\left(\frac{C_{N\delta}^2}{|x|^{2\beta}(1+|t|+|x|)^{2N}}\right)^{\frac{s}{s-2}}dx\right)^{\frac{s-2}{2s}}\\
\leq& k\int_r^s \left(\int_{A(t)}\left(\frac{C_{N\delta}^2}{|x|^{2\beta+n}(|t|)^{2N-n}}\right)^{\frac{s}{s-2}}dx\right)^{\frac{s-2}{2s}}\\
=&\int_r^s \left(\int_{(1+\delta)|t|}\left(\frac{C_{N\delta}^2 r^{n-1}}{r^{2\beta+n}(|t|)^{2N-n}}\right)^{\frac{s}{s-2}}dx\right)^{\frac{s-2}{2s}}\\
=&\int_r^s \left((1+\delta)^{2\beta}|t|^{2\beta}C_{N\delta}^2(|t|)^{2N-n}\right)^{\frac{s}{s-2}\ \frac{s-2}{2s}}dt\\
\leq& \lim\int_r^s \frac{k}{|t|^{1+\varepsilon}}dt\\
=&0.
\end{aligned}
$$

Ahora calcularemos sobre $B(t)$. Si $T>0$ entonces $u(x,t)$ es cero en $B(t)$, así que supondremos que $T<0$. Como $\beta = 2-\frac{n}{s}$ y $s>2$, tenemos que $n+\frac{2s}{s-1} < (2\beta+n-1)\frac{s}{s-1}$.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r,s\longrightarrow\infty}\int_r^s k\left(\int_{B(t)}\left(\frac{|u(x,t)|^2}{|x|^{2\beta}}\right)^{\frac{s}{s-2}}dx\right)^{\frac{s-2}{2s}}dt\\
\leq& \lim_{r,s\longrightarrow\infty}\int_r^s k\left(\int_{B(t)}\left(\frac{d^2}{|x|^{2\beta}(1+|t|)^{n-1}}\right)^{\frac{s}{s-2}}dx\right)^{\frac{s-2}{2s}}dt\\
\leq& k_2\lim_{r,s\longrightarrow\infty}\int_r^s \frac{Vol(B(t))^{\frac{s-2}{2s}}}{|t|^{\beta+\frac{n-1}{2}}}dt\\
\leq& \lim_{r,s\longrightarrow\infty}\int_r^s \frac{|t|^{\frac{n}{2}-\frac{n}{s}}}{|t|^{\beta+\frac{n-1}{2}}}dt = 0.
\end{aligned}
$$

El lema anterior afirma que si $u$ es solución de la ecuación de onda sin pertubar entonces

$$\lim_{r,s\longrightarrow\infty}\int_r^s\left(\int_{I\!R^n}|Qu|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}dt = 0.$$

**II.3.2 LEMA.** Sean $u(x,t)$ y $Q(x)$ como en el lema 3.1. Entonces

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\int_{I\!R^n} Q(x)|u(x,t)|^2dx = 0.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}\int_{I\!R^n} Q(x)|u(x,t)|^2dx &\le \|\varphi\|_s\left(\int_{I\!R^n}\frac{|u(x,t)|^{\frac{2s}{s-1}}}{|x|^{\frac{\beta_s}{s-1}}}dx\right)^{\frac{s-1}{s}}\\ &\le \|\varphi\|_s\left(\int_{A(t)}\frac{|u(x,t)|^{\frac{2s}{s-1}}}{|x|^{\frac{\beta_s}{s-1}}}dx\right)^{\frac{s-1}{s}} + \|\varphi\|_s\left(\int_{B(t)}\frac{|u(x,t)|^{\frac{2s}{s-1}}}{|x|^{\frac{\beta_s}{s-1}}}dx\right)^{\frac{s-1}{s}}.\end{aligned}$$

Ahora veamos que pasa con cada uno de los sumandos anteriores

$$\begin{aligned}\int_{A(t)}\frac{|u(x,t)|^{\frac{2s}{s-1}}}{|x|^{\frac{\beta_s}{s-1}}}dx &\le \int_{A(t)}\frac{C_{N,\delta}^{\frac{2s}{s-1}}}{|x|^{\frac{\beta_s}{s-1}}(1+|x|+|t|)^{N\frac{2s}{s-1}}}dx\\ &\le \frac{c}{|t|^{2+\frac{\beta_s}{s-1}}} \qquad \text{si } N=\frac{(n+2)(s-1)}{2s}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{B(t)}\frac{|u(x,t)|^{\frac{2s}{s-1}}}{|x|^{\frac{\beta_s}{s-1}}}dx &\le \int_{B(t)}\frac{C_{\delta}^{\frac{2s}{s-1}}}{|x|^{\frac{\beta_s}{s-1}}(1+|t|)^{\frac{(n-1)s}{s-1}}}dx\\ &\le \frac{c|t|^{\frac{s-n}{s-1}}}{(|t|+T)^{\frac{2s-n}{s-1}}}.\end{aligned}$$

En ambas integrales el límite cuando $|t|$ tiende a infinito es cero. ∎

**II.3.3 TEOREMA.** Los operadores de onda $W_\pm$ existen y son isometrías de $\mathcal{H}_0$ en $\mathcal{H}_Q$.

**Demostración.** Haremos la prueba sólo para $W_+$ ya que el caso para $W_-$ es análogo. Sea $f \in (\bigcup U_0(t)D_+^0)$ (un conjunto denso en $\mathcal{H}_0$), definimos $W(t) = U_Q(-t)U_0(t)$. Como $\mathcal{H}_Q$ es completo, el límite que define a los operadores de onda existe si y sólo si $W(t)$ es de Cauchy cuando $t \longrightarrow \infty$.

Usando el método de Cook escribimos

$$\begin{aligned}||W(r)f - W(s)f||_Q &= \left\| \int_s^r \partial_t W(t) f dt \right\|_Q \\ &\leq \int_s^r ||\partial_t W(t) f||_Q dt \\ &= \int_s^r \left\| U_Q(-t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -Q & 0 \end{pmatrix} U_0(t) f \right\|_Q dt.\end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que $U_Q$ es unitario en $\mathcal{H}_Q$, podemos reescribir la útima integral como

$$\int_s^r \left( \int |Q(x)u(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt,$$

donde $u$ es solución de la ecuación de onda sin perturbar (I.1.1). Entonces por el lema 3.1

$$\lim_{r,s \longrightarrow \infty} ||W(r)f - W(s)f||_Q = 0.$$

Esto prueba que $W(t)$ es de Cauchy para un subconjunto denso de $\mathcal{H}_0$. La existencia para toda $f$ en $\mathcal{H}_0$ se sigue de

$$\begin{aligned}||U_Q(-t)U_0(t)f||_Q &= ||U_0(t)f||_Q \\ &\leq c||U_0(t)f||_0 \\ &= c||f||_0.\end{aligned}$$

Ahora veremos que $W_+$ es una isometría en $\bigcup U_0(t)D_+^0$, y por completación concluiremos para todo $f$ en $\mathcal{H}_0$. Como $U_Q$ y $U_0$ son operadores unitarios y la norma sin perturbar es equivalente a la norma perturbada tenemos

$$\begin{aligned}||U_Q(-t)U_0(t)f||_Q^2 &= ||U_0(t)f||_Q^2 \\ &= ||U_0(t)f||_0^2 + \int Q(x)|u(x,t)|^2 dx \\ &= ||f||_0^2 + \int Q(x)|u(x,t)|^2 dx,\end{aligned}$$

donde $u$ es solución de la ecuación de onda sin perturbar (I.1.1), el lema 3.2 afirma que $\lim_{t \longrightarrow \infty} \int Q(x)|u(x,t)|^2 dx = 0$ y por lo tanto podemos concluir que

$$||W_+(t)f||_Q = ||f||_0$$

para toda $f \in \mathcal{H}_0$.∎

Es fácil ver que los operadores de onda son intercambiables para $U_0$ y $U_Q$.

**II.3.4 TEOREMA.** $U_Q(t)W_\pm = W_\pm U_0(t)$.

## II.4 LOS OPERADORES DE ONDA SON COMPLETOS

En esta sección probaremos que los operadores de onda $W_\pm: \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_Q$ definidos como en (3.1) son tales que

$$RangoW_+ = RangoW_- = \mathcal{H}_Q.$$

En el caso del sistema no perturbado, definimos los espacios entrante $D_-^0$ y saliente $D_+^0$ como:

$$\begin{aligned} D_+^0 &= \{f \in \mathcal{H}_0 \mid U_0(t)f = 0 \quad \text{para } |x| \le t, \quad t > 0\} \\ D_-^0 &= \{f \in \mathcal{H}_0 \mid U_0(t)f = 0 \quad \text{para } |x| \le -t, \quad t < 0\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Los espacios entrantes y salientes del sistema perturbado están dados por

$$D_\pm^Q = W_\pm D_\pm^0. \tag{4.2}$$

Si $D_\pm^Q$ satisfacen los axiomas de Lax-Phillips

i) $U_Q(t)D_+^Q \subset D_+^Q$ para $t > 0$ y $U_Q(t)D_-^Q \subset D_-^Q$ para $t < 0$.

ii) $\bigcap_t U_Q(t)D_+^Q = \{0\} = \bigcap_t U_Q(t)D_-^Q$

iii) $\overline{\bigcup_t U_Q(t)D_+^Q} = \mathcal{H}_Q = \overline{\bigcup_t U_Q(t)D_+^Q}$.

se sigue directamente del tercer axioma, que el rango de $W_\pm$ es $\mathcal{H}_Q$, lo que significa que los operadores de onda $W_\pm$ son completos.

**II.4.1 LEMA.** Los subespacios $D_\pm^Q$ satisfacen los axiomas de Lax-Phillips (i) e (ii).

**Demostración.** Como los operadores de onda son intercambiables para $A_Q$ y $A_0$ se tiene $U_Q(t)W_\pm = W_\pm U_0(t)$. Utilizando (i) e (ii) para $D_\pm^0$ tenemos

i) $U_Q(t)D_\pm^Q = U_Q(t)W_\pm D_\pm^0 = W_\pm U_0(t)D_\pm^0 \subset W_\pm D_\pm^0 = D_\pm^Q$

ii) $\bigcap U_Q D_\pm^Q = \bigcap U_Q W_\pm D_\pm^0 = \bigcap W_\pm U_0 D_\pm^0 = W_\pm \bigcap U_0 D_\pm^0 = W_\pm\{0\} = \{0\}.\blacksquare$

El resto de esta sección lo dedicaremos a probar que $D_\pm^Q$ satisfacen el tercer axioma de Lax-Phillips. Es decir, probaremos que

$$\overline{\bigcup U_Q(t)D_+^Q}^{\|\ \|_Q} = \mathcal{H}_Q = \overline{\bigcup U_Q(t)D_-^Q}^{\|\ \|_Q}. \tag{4.3}$$

Supongamos que (4.3) no se cumple, entonces existe $f \in \mathcal{H}_Q$ distinto de cero tal que $f$ es perpendicular (respecto a $E_Q$) a $\bigcup U_Q(t)D_+^Q$ para toda $t$. Entonces $\langle f, U_Q(t)g\rangle_Q = 0$, para toda $t$ y para toda $g \in D_+^Q$, luego $\langle U_Q(t)f, g\rangle_Q = 0$, para toda $t$ y para toda $g \in D_+^Q$, por lo que $\langle \frac{U_Q(t+\varepsilon)f - U_Q(t)f}{\varepsilon}, g\rangle_Q = 0$, para toda $t$, para toda $g \in D_+^Q$ y para toda $\varepsilon$, entonces $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\langle \frac{U_Q(t+\varepsilon)f - U_Q(t)f}{\varepsilon}, g\rangle_Q = 0$, pero $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\langle \frac{U_Q(t+\varepsilon)f - U_Q(t)f}{\varepsilon}, g\rangle_Q = \langle \frac{\partial}{\partial t}U_Q(t)f, g\rangle_Q = \langle A_Q U_Q(t)f, g\rangle_Q = \langle U_Q(t)A_Q f, g\rangle_Q$, por lo que tenemos $0 = \langle U_Q(t)A_Q f, g\rangle_Q$ para toda $t$ y para toda $g \in D_+^Q$, luego $0 = \langle A_Q f, U_Q(t)g\rangle_Q$ para toda $t$ y toda $g \in D_+^Q$, entonces $A_Q f$ también es perpendicular a $\bigcup U_Q(t)D_+^Q$. Además $A_Q f \in D(A_0)$.

Probaremos que $A_Q f = 0$, y como estamos suponiendo que $A_Q$ no tiene espectro puntual en $\mathcal{H}_Q$, se sigue que $f = 0$.

Ahora, descompongamos $A_Q f$ en sus partes entrante y saliente.

Sea $T: \mathcal{H}_0 \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, S^{n-1})$ la representación de la translación

$$T(f_0, f_1) = -D_s^{\frac{n+1}{2}} R f_0 + D_s^{\frac{n-1}{2}} R f_1, \tag{4.4}$$

donde $R$ es la transformada de Radon $R(s, w) = \int_{\langle x, w\rangle = s} f(x)dH(x)$.

Entonces $T$ es una isometría tal que

$$\begin{aligned} TU_0(t)f &= k(s-t) \\ TA_0 &= \partial_s T. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Consideremos $TA_Q f$ y elijamos $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tales que

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & s > \frac{1}{2} \\ 0 & s < -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \psi = 1 - \varphi. \tag{4.6}$$

Denotemos con $g$ y $h$ a los elementos cuyos representantes son $\varphi TA_Q f$ y $\psi TA_Q f$ respectivamente

$$\begin{aligned} Tg &= \varphi TA_Q f \\ Th &= \psi TA_Q f \end{aligned} \tag{4.7}$$

En este caso $A_Q f = g + h$.

**II.4.2 LEMA.** Sean $g$ y $h$ como en (4.8), entonces $g \in D_+^0$, $A_Q g \in \mathcal{H}_Q$, $h \in D_-^0$ y $A_Q h \in \mathcal{H}_Q$.

**Demostración.** Como $TU_0(t)g(x) = k(s-t) = 0$ si $s-t < -\frac{1}{2}$ y $U_0(t)g(x) = 0$ para $|x| < t - \frac{1}{2}$, obtenemos que $g \in D_+^0$. De igual forma se demuestra que $h \in D_-^0$.

Por otro lado, como $TA_0 = \partial_s T$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|T(A_0 g)\|_{L^2} &= \|\partial_s(\varphi T A_Q f)\|_{L^2} \\
&= \|\varphi_s T A_Q f + \varphi \partial_s T A_Q f\|_{L^2} \\
&\leq \|\varphi_s T A_Q f\|_{L^2} + \|\varphi \partial_s T A_Q f\|_{L^2} \\
&\overset{(a)}{\leq} c\|T A_Q f\|_{L^2} + \|\varphi T A_0 A_Q f\|_{L^2} \\
&\leq c\|T A_Q f\|_{L^2} + c'\|T A_0 A_Q f\|_{L^2}
\end{aligned}$$

la desigualdad (a) se da porque $\varphi_s \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, y la última desigualdad se da porque $\varphi$ está acotada.

Entonces

$$\begin{aligned}
\|A_0 g\|_0 = \|T A_0 g\|_{L^2} &\leq c\|T A_Q f\|_{L^2} + c'\|T A_0 A_Q f\|_{L^2} \\
&\leq c\|A_Q f\|_0 + c'\|A_0 A_Q f\|_0
\end{aligned}$$

pero $A_Q f \in \mathcal{H}_0$, luego $\|A_Q g\|_0 < \infty$ entonces $g \in D(A_0)$, pero como $D(A_0) = D(A_Q)$ entonces $\|A_Q g\|_Q < \infty$. De la misma manera se prueba que $A_Q h \in \mathcal{H}_Q$.■

Ahora probemos que $\langle A_Q f, g\rangle_0 = 0$.

**II.4.3 LEMA.**

$$\begin{aligned}
\langle A_Q f, g\rangle_0 &= \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle U_0(t) A_Q f, U_0(t) g\rangle_0 \\
&\overset{(a)}{=} \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle U_Q(t) A_Q f, U_0(t) g\rangle_0 \\
&\overset{(b)}{=} \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle U_Q(t) A_Q f, U_0(t) g\rangle_Q \\
&\overset{(c)}{=} \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle U_Q(t) A_Q f, W_+ U_0(t) g\rangle_Q \\
&\overset{(d)}{=} 0.
\end{aligned}$$

**Demostración.** Como $g \in D_+^0$, tenemos que $W_+ U_0(t) g \in D_+^Q$, y por hipótesis $U_Q(t) A_Q f$ es $E_Q$-ortogonal a $D_+^Q$, entonces tenemos la igualdad (d).

Utilizando la propiedad intercambiable de $W_\pm$ obtenemos (c)

$$\begin{aligned}
\langle U_Q(t) A_Q f, W_+ U_0(t) g\rangle_Q &= \langle U_Q(t) A_Q f, U_Q(t) W_+ g\rangle_Q \\
&= \langle A_Q f, W_+ g\rangle_Q \\
&= \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle A_Q f, U_Q(-t) U_0(t) g\rangle_Q \\
&= \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle U_Q(t) A_Q f, U_0(t) g\rangle_Q.
\end{aligned}$$

Ahora probemos (b):

$$\begin{aligned}&\lim_{t\longrightarrow\infty}\langle U_Q(t)A_Qf, U_0(t)g\rangle_Q - \langle U_Q(t)A_Qf, U_0(t)g\rangle_0\\&= \lim_{t\longrightarrow\infty}\int Q(x)(U_Q(t)A_Qf)_o\overline{(U_0(t)g)_o}\,dx\end{aligned}$$

donde $(\ )_o$ significa la primera componente.

Ahora usando la desigualdad de Hölder y el lema 4.4

$$\begin{aligned}&\lim_{t\longrightarrow\infty}\int Q(x)(U_Q(t)A_Qf)_o\overline{(U_0(t)g)_o}\,dx\\&\le \lim_{t\longrightarrow\infty}\left(\int Q(x)|(U_Q(t)A_Qf)_o|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int Q(x)|(U_0(t)g)_o|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le \|A_Qf\|_Q \lim_{t\longrightarrow\infty}\left(\int Q(x)|(U_0(t)g)_o|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0.\end{aligned}$$

Ahora probemos (a):

$$\begin{aligned}&\lim_{t\longrightarrow\infty}\langle U_Q(t)A_Qf, U_0(t)g\rangle_0 - \langle U_0(t)A_Qf, U_0(t)g\rangle_0 = 0\\\Longleftrightarrow\ &\lim_{t\longrightarrow\infty}\langle U_Q(t)A_Qf - U_0(t)A_Qf, U_0(t)g\rangle_0 = 0\\\Longleftrightarrow\ &\lim_{t\longrightarrow\infty}\|U_Q(t)A_Qf - U_0(t)A_Qf\|_0 = 0.\end{aligned}$$

Notemos que $\|U_Q(t)A_Qf - U_0(t)A_Qf\|_0 = \|U_Q(t)A_Qf - U_0(t)A_Qf\|_0^{|x|<R} + \|U_Q(t)A_Qf - U_0(t)A_Qf\|_0^{|x|>R}$

Por el principio de Duhamel (véase Courant and Hilbert [1] vol. II pág 202)

$$U_Q(t)f - U_0(t)f = \int_0^t \left(U_0(t-s)\begin{pmatrix}0 & 0\\ Q(x) & 0\end{pmatrix}U_Q(s)f\right)ds \tag{4.8}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}&\|U_Q(t)A_Qf - U_0(t)A_Qf\|_0\\&= \left\|\int_0^t\left(U_0(t-s)\begin{pmatrix}0 & 0\\ -Q(x) & 0\end{pmatrix}U_Q(s)A_Qf\right)ds\right\|_0\\&\le \int_0^t\left\|\left(U_0(t-s)\begin{pmatrix}0 & 0\\ -Q(x) & 0\end{pmatrix}U_Q(s)A_Qf\right)\right\|_0 ds\\&= \int_0^t\left\|\left(U_0(t-s)\begin{pmatrix}0 & 0\\ -Q(x) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ \Delta+Q & 0\end{pmatrix}U_Q(s)f\right)\right\|_0 ds\\&= \int_0^t\left\|\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -Q(x)\end{pmatrix}U_Q(s)f\right)\right\|_0 ds\\&\le \int_0^t \|(0, -Q(x)v_s(x,s))\|_0 ds,\end{aligned}$$

donde $v$ es solución de $\square_Q$ y $v(x,s) = U_Q(s)f$.

Por otro lado

$$\int_0^t \|(0, -Q(x)v_s(x,s))\|_0 ds \le |t| \max_{|s|<|t|} \|(0, -Q(x)v_s(x,s))\|_0 ds$$
$$= |t| \max_{|s|<|t|} \left( \int_{|x|>R} |Q(x)v_s(x,s)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora dividiremos la prueba en dos partes:

i) cuando $|x| > R$ y

ii) cuando $|x| \le R$, donde $R > |t|^2$

En el caso (i):

$$|t| \max_{|r|<|t|} \left( \int_{|x|>R} |Q(x)v_r(x,r)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= |t| \max_{|r|<|t|} \left( \int_{|x|>R} \frac{|\varphi(x)|^2 |v_r(x,r)|^2}{|x|^{\frac{4s-2n}{s}}} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le |t| \max_{|r|<|t|} \|\varphi(x)\|_{L^s} \left( \int_{|x|>R} \frac{|v_r(x,r)|^{\frac{2s}{s-2}}}{|x|^{\frac{4s-2n}{s-2}}} \, dx \right)^{\frac{s-2}{2s}}$$
$$\le \|\varphi(x)\|_{L^s} |t| \max_{|r|<|t|} \left( \int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^{\frac{(4s-2n)A}{(s-2)(A-1)}}} dx \right)^{\frac{(s-2)(A-1)}{2sA}} \cdot \left( \int_{|x|>R} |v_r(x,r)|^{\frac{2sA}{s-2}} \, dx \right)^{\frac{s-2}{2sA}}$$

donde $A = \dfrac{n(s-2)}{s(n-2)}$

$$\le \|\varphi(x)\|_{L^s} |t| \max_{|r|<|t|} \left( \int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^{\frac{(4s-2n)A}{(s-2)(A-1)}}} dx \right)^{\frac{(s-2)(A-1)}{2sA}} \left( \int_{|x|>R} |\nabla v_r(x,r)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le c \|\varphi(x)\|_{L^s} |t| \left( \int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^{\frac{(4s-2n)A}{(s-2)(A-1)}}} dx \right)^{\frac{(s-2)(A-1)}{2sA}}$$
$$\le c' \|\varphi(x)\|_{L^s} |t| \left( \frac{1}{R^{\frac{(4s-2n)A}{(s-2)(A-1)} - n}} \right)^{\frac{(s-2)(A-1)}{2sA}}$$

$$=c'||\varphi(x)||_{L^s}|t|\frac{1}{R^{\frac{2s-n}{s}-n\frac{(s-2)(A-1)}{2sA}}}$$

$$\leq c'||\varphi(x)||_{L^s}|t|\frac{1}{|t|^{2\frac{2s-n}{s}-n\frac{(s-2)(A-1)}{sA}}}$$

$$=c'||\varphi(x)||_{L^s}\frac{1}{|t|^{\frac{(4-n)sA+n(s-2)}{sA}}}.$$

Como $\frac{(4-n)sA+n(s-2)}{sA} > 0$, entonces

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}||U_Q(t)A_Qf - U_0(t)A_Qf||_0^{|x|>R} = 0.$$

En el caso (ii), usando las desigualdades de Hölder y Sobolev tenemos

$$\int_{|x|<R}|Q(x)v_r(x,r)|^2dx \leq \left(\int_{|x|<R}|Q(x)|^n dx\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int_{|x|<R}|\nabla v_r(x,r)|^2dx\right)^2$$
$$\leq c\left(||A_QU_Q(t)||_0^{|x|<R}\right)^2.$$

Además por el lema 4.5 existe una sucesión $\{t_n\}$ tal que para toda $R > 0$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}||U_Q(t_n)A_Qf||_0^{|x|<R} = 0$$

por lo que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}||U_Q(t)A_Qf - U_0(t)A_Qf||_0 = 0.$$

Con esto terminamos la prueba del lema.∎

**II.4.4 LEMA.** Sea $Q(x)$ tal que $Q(x) = \frac{\varphi(x)}{|x|^\beta}$, donde $\beta = 2 - \frac{n}{s}$, $\varphi \in L^s(I\!R^n)$, $s > 2$, $s \geq \frac{n}{2}$ Entonces

(i) La funcional

$$Q(f_0, f_1) = \int Q|f_0|^2dx$$

es una transformación continua compacta de $\mathcal{H}_0$ en $I\!R$.

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, existe una constante $C_\varepsilon$ tal que para toda $f$ en $D(A_Q)$

$$\int_{I\!R^n}|Qf_0|^2dx \leq \varepsilon\int_{I\!R^n}|\Delta f_0|^2dx + C_\varepsilon\int_{I\!R^n}|\nabla f_0|^2dx.$$

**Demostración.** (i) Por el lema 2.2 $Q$ vista como funcional está bien definida y es continua en $\mathcal{H}_0$. Sea $u_m = (u_{m_0}, u_{m_1})$ una sucesión en $\mathcal{H}_0$ tal que

$$\sup_m ||u_m||_0^2 = M < \infty. \tag{4.9}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos $R > 0$ tal que

$$R^{\frac{n}{2s}-1} < \varepsilon(1+M)^{-1}. \tag{4.10}$$

Sea $\phi \in C_0^\infty(I\!R^n)$ tal que $0 \leq \phi = 1$ cuando $\|x\| \leq R$, $\phi(x) = 0$ cuando $\|x\| \geq 2R$, $\sup_{x \in I\!R^n} |\nabla\phi(x)| \leq 1$. Definimos $v_m = \phi u_m$. Por (4.10), el lema 2.2 y (4.9)

$$\begin{aligned}\int_{I\!R^n} |u_{m_0} - v_{m_0}|^2 Q(x)dx &\leq R^{\frac{n}{2s}-1} \int_{I\!R^n} |u_{m_0}|^2 \frac{\varphi(x)}{|x|^{1-\frac{n}{2s}}} dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M+1} \int_{I\!R^n} |\nabla u_{m_0}|^2 dx \leq \varepsilon.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Es claro que $v_m$ es acotado en $\mathcal{H}_0$. Como $s > \frac{n}{2}$, $\frac{2s}{s-1} < \frac{2n}{n-2}$. Entonces por el teorema de Rellich-Kondrachov (véase Adams [1], pag 144), existe una subsucesión $v_{m_k}$ de $v_m$ y $v \in \mathcal{H}_0$ tales que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \int_{B(0,R)} |v_{m_k 0} - v_0|^{\frac{2s}{s-1}} dx = 0.$$

Entonces por la desigualdad de Hölder y el lema 2.2, obtenemos

$$\begin{aligned}&\lim_{k \longrightarrow \infty} \int_{B(0,R)} |v_{m_k 0} - v_0|^2 |Q(x)| dx \\ &\leq \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\int_{B(0,R)} |Q(x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{B(0,R)} |v_{m_k 0} - v_0|^{\frac{2s}{s-1}} dx\right)^{1-\frac{1}{s}} = 0.\end{aligned} \tag{4.12}$$

De (4.10) y (4.11) obtenemos (i).

(ii) Sea $R > 0$ fijo. Por la sección 2 tenemos

$$\int_{|x|>R} |Qf_0|^2 dx \leq c \int_{I\!R^n} |\nabla f_0|^2 dx. \tag{4.13}$$

Si $n = 3$ el teorema de inmersión de Sobolev nos da

$$\begin{aligned}\int_{|x|>R} |Qf_0|^2 dx &\leq \left(\int_{|x|<R} |Q|^2 dx\right) \left(\sup_{|x|<R} |f_0(x)|\right)^2 \\ &\leq M \left(\int_{|x|<R} |Q|^2 dx\right) \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \int_{|x|<R} |D^\alpha f_0|^2 dx.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Si $n = 4$, ponemos $p = \frac{s}{s-2}$. Aplicando el teorema de Sobolev tenemos

$$\begin{aligned}\int_{|x|>R} |Qf_0|^2 dx &\leq \left(\int_{|x|<R} |Q|^s dx\right)^{\frac{2}{s}} \left(\int_{|x|<R} |f_0(x)|^{2p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M_1 \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \int_{|x|<R} |D^\alpha f_0|^2 dx.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Similarmente para $n > 4$. Usando el teorema 8.12 de Gilbarg and Trudinger [1] (pag 186) tenemos

$$\int_{|x|<R} \sum_{0\leq|\alpha|\leq 2} |D^\alpha f_0|^2 dx \leq M_2 \int_{|x|<R} |\triangle f_0|^2 ||f_0|^2 dx. \tag{4.16}$$

Ahora eligiendo $R$ suficientemente pequeña, de (4.13), (4.14), (4.15) y (4.19) obtenemos

$$\int_{I\!R^n} |Qf_0|^2 dx \leq \varepsilon \int_{I\!R^n} |\triangle f_0|^2 dx + M_3 \left( \int_{I\!R^n} |\nabla f_0|^2 dx + \int_{|x|<R} |f_0|^2 dx \right). \tag{4.17}$$

Aplicando el lema 2.2 (para la función característica en $|x| < R$) a la última integral en (4.17) obtenemos (ii).■

**II.4.5 LEMA.** Supongamos $f \in \mathcal{H}_Q \cap D(A_Q)$. Entonces existe una sucesión $\{t_n\}$ (con $t_n \longrightarrow \infty$) tal que para toda $R_0 > 0$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ||A_Q U_Q(t_n) f||^{|x|<R_0} = 0.$$

**Demostración.** Como $A_Q$ no tiene espectro puntual en $\mathcal{H}_Q$ existe una sucesión $t_n$ que tiende a infinito tal que

$$\lim_{t_n \longrightarrow \infty} \langle U_Q(t_n) A_Q f, g\rangle_0 = 0$$

para toda $g \in \mathcal{H}_0$. Por el criterio de compacidad de Rellich, el conjunto $f \in D(A_Q)$ es compacto en $\mathcal{H}_0(B_R)$. Esto implica que si el límite débil es cero entonces el límite fuerte es cero. Esto significa que existe una sucesión $t_n$ tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ||A_Q U_Q(t_n) f||^{|x|<R} = 0.■$$

# Capítulo III

# TEORIA DE DISPERSIÓN CON DOS ESPACIOS DE HILBERT PÀRA LA ECUACIÓN DE ONDA CON PERTURBACIONES DE RANGO CORTO DE ORDEN $1/|X|^{3/2+\varepsilon}$

En este capítulo estudiamos la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + qv = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad q = o\left(\frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}\right)$$
$$v(x,0) = g_0$$
$$v_t(x,0) = g_1$$

en $\mathbb{R}^n$ con perturbaciones de rango corto $|q(x)| \leq \frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}$ cuando $|x| \longrightarrow \infty$ y $q(x) \in L^n_{loc}$.

En el caso de la ecuación de Schrödinger, el problema ha sido estudiado ampliamente por Kato, Agmon y otros, y se tiene una teoría de dispersión para la ecuación de Schrödinger con perturbaciones de rango corto de orden $1+\varepsilon$, es decir, $|q(x)| \leq \frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}$ cuando $|x| \longrightarrow \infty$.

El caso de la ecuación de onda ha sido estudiado por Enss, Ikebe, Simon, Lax, Phillips y otros, pero sólo se había llegado a dar una teoría de dispersión para la ecuación de onda con perturbaciones de rango corto de orden mayor que 2, en este trabajo estudiaremos el caso con perturbaciones de rango corto de orden mayor que $\frac{3}{2}$.

Este estudio lo hacemos de la siguente manera:

Para la ecuación de onda no perturbada

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

con datos iniciales $u(x,0) = f_0$ y $u_t(x,0) = f_1$, la forma de la energía es

$$E_0(f_0, f_1) = \int_{I\!R^n} |\nabla f_0|^2 + |f_1|^2 dx.$$

Iniciando con datos en $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$ completamos respecto a $\|\ \|_0 = E_0^{\frac{1}{2}}$ y obtenemos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_0$.

La forma de la energía para la ecuación perturbada

$$u_{tt} - \Delta u + qu = 0$$

con datos iniciales $u(x,0) = f_0$ y $u_t(x,0) = f_1$, la forma de la energía es

$$E_q(f_0, f_1) = \int_{I\!R^n} |\nabla f_0|^2 + q|f_0|^2 + |f_1|^2 dx.$$

Iniciando con datos en $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$ completamos respecto a $\|\ \|_q = E_q^{\frac{1}{2}}$ y obtenemos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_q$.

Es conveniente escribir los sistemas de ecuaciones en forma vectorial:

$$f_t = A_0 f \quad \text{donde } A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \text{ y } f = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}$$

y

$$f_t = A_q f \quad \text{donde } A_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - q & 0 \end{pmatrix} \text{ y } f = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}.$$

Veremos que $A_0$ y $A_q$ generan grupos de operadores solución $U_0(t)$ y $U_q(t)$ los cuales son unitarios respecto a las formas de energía $E_0$ y $E_q$ respectivamente.

En el teorema 1.4 veremos que la parte singularmente continua de $A_q$ en $\mathcal{H}_q$ es nula.

Definimos los operadores de onda $W_\pm(A_q, A_0)\colon \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_q$ como operadores de onda entre dos espacios de Hilbert

$$W_\pm(A_q, A_0) = \operatorname*{s\,lim}_{t \longrightarrow \pm\infty} U_q(-t) J U_0(t),$$

donde $J\colon \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_q$ es el operador que envía a $C_0^\infty \otimes C_0^\infty \subset \mathcal{H}_o$ en $C_0^\infty \otimes C_0^\infty \subset \mathcal{H}_q$ entonces por abuso de notación nos olvidaremos de $J$; por lo que pensaremos a los operadores de onda como

$$W_\pm(A_q, A_0) = \operatorname{s\,lim} U_q(-t) U_0(t).$$

En el teorema 2.2 se prueba que los operadores de onda existen, para ello aplicamos el método de Cook en diferentes regiones y utilizamos cotas de soluciones de la ecuación de onda sin perturbar, obtenidas por el método de fase estacionaria. Las regiones donde vemos que se verifica el método de Cook son:

$$\begin{aligned}
&\Omega_1\{x \in I\!R^n : |x| \geq (1+\delta)|t|\}\\
&\Omega_2\{x \in I\!R^n : |x| \leq (1-\delta)|t|\}\\
&\Omega_3\{x \in I\!R^n : (1-\delta)|t| \leq |x| \leq (1+\delta)|t|\}.
\end{aligned}$$

En el caso del sistema no perturbado, definimos espacios entrantes y salientes $D_-^0$ y $D_+^0$ como

$$D_\pm^0 = \{f \in \mathcal{H}_0 : U_0(t)f = 0 \text{ para } |x| < \pm t \quad t > 0\}.$$

Se puede mostrar que estos subespacios tienen las siguientes propiedades:

(i) $U_0(t)D_+^0 \subset D_+^0$ $t > 0$; $U_0(t)D_-^0 \subset D_-^0$ $t < 0$

(ii) $\bigcap U_0(t)D_-^0 = \{0\} = \bigcap U_0(t)D_+^0$

(iii) $\overline{\bigcup U_0(t)D_-^0} = \mathcal{H}_0 = \overline{\bigcup U_0(t)D_+^0}$.

A cada subespacio de esta clase le corresponde una representación de la translación $f \mapsto k$, transformando de modo unitario a $\mathcal{H}_0$ en $L^2(I\!R, S^{n-1})$, con la propiedad que $U(t)f \mapsto k(s-t)$. En general habrá dos representaciones de la translación distintas $T_-$ y $T_+$ que corresponden a los subespacios $D_-^0$ y $D_+^0$ respectivamente. En el caso de la ecuación de onda sin perturbar en un espacio de dimensión impar estas dos representaciones coinciden. Pero tanto en el caso de dimensión par como impar las representaciones de la translación se pueden obtener de la transformada de Radon.

Existe una estructura similar en el sistema perturbado, pero es más difícil de ver.

Trabajamos en $\mathcal{H}'_q$ el complemento ortogonal del subespacio generado por los vectores propieos de $A_q$. Definimos los espacios entrante y saliente para $\mathcal{H}'_q$ como

$$D_\pm^q = W_\pm D_\pm^0.$$

Los subespacios $D_\pm^q$ satisfacen las propiedades (i), (ii) y (iii) relativas a $U_q$ en $H'_q$.

Como $U_q(t)D_\pm^q = W_\pm U_0(t)D_+^0$ se sigue directamente de la propiedad (iii) que el rango de $W_\pm$ es $\mathcal{H}'_q$, esto prueba que los operadores de onda son completos.

Como notamos anteriormente a cada uno de los subespacios $D_-^q$ y $D_+^q$ le corresponde una representación de la translación de $U_q$ en $\mathcal{H}'_q$ denotada con $T'_-$ y $T'_+$ respectivamente; de hecho estas dos representaciones están dadas explicitamente por

$$T'_\pm W_\pm f = T_\pm f.$$

El operador de dispersión está dado por

$$T'_- f \xrightarrow{S} T'_+ f.$$

Los espacios de energía $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_q$ no tienen normas equivalentes, para $q$ con las condiciones antes dadas, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Sea $f_0(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{n-2}{2}+\varepsilon}}$ y $f_1 \in L^2(I\!R^n)$, la pareja $(f_0, f_1) \in \mathcal{H}_0$ ya que $\int |\nabla f_0|^2\, dx = \int \frac{1}{|x|^{n+2\varepsilon}} dx = c\int \frac{1}{r^{1+\varepsilon}} dr < \infty$. Pero $\int q|f_0|^2 dx \leq \int \frac{1}{|x|^{3/2+\varepsilon}} \frac{1}{|x|^{n-2+2\varepsilon}} dx = \int \frac{1}{|x|^{n-\frac{1}{2}+3\varepsilon}} dx = c \int \frac{1}{r^{1/2+\varepsilon}} dr > M$, $\forall M \in I\!R$, por lo tanto $(f_0, f_1) \notin \mathcal{H}_q$.

## III.1 EL OPERADOR PERTURBADO

Para la ecuación de onda perturbada

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + qv = 0 \qquad x \in I\!R^3 \quad t \in I\!R \quad q = o\left(\frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}\right) \\ &v(x,0) = g_0 \\ &v_t(x,0) = g_1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

la forma de la energía si $g = (g_0, g_1)$ es

$$E_q(g) = \int |\nabla g_0|^2 + q|g_0|^2 + |g_1|^2\, dx.$$

Iniciando con datos en $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$, completamos con respecto a $\|\ \|_q = (E_q)^{1/2}$ y obtenemos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_q$. El producto escalar en $\mathcal{H}_q$, está dado por

$$\langle (f_0, f_1), (f_0', f_1') \rangle_q = \int \nabla f_0 \overline{\nabla f_0'} + q f_0 \overline{f_0'} + f_1 \overline{f_1'}\, dx. \tag{1.2}$$

Es conveniente escribir la ecuación (6) en forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix} - A_q \begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

donde $A_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - q & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} v(x,0) \\ v_t(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}$.

**III.1.1 TEOREMA.** El operador $A_q$ es autoadjunto negativo en $\mathcal{H}_q$.

**Demostración.** Veamos que $A_q$ es antisimétrico en su dominio.

$$\begin{aligned}\langle A_q f, g\rangle_q &= \langle (f_1, (\Delta - q)f_0), (g_0, g_1)\rangle_q \\ &= \int \nabla f_1 \overline{\nabla g_0} + q f_1 \overline{g_0} + (\Delta - q) f_0 \overline{g_1}\, dx\end{aligned}$$

integrando por partes

$$\begin{aligned}&= \int -f_1 \Delta \overline{g_0} + q f_1 \overline{g_0} + \Delta f_0 \overline{g_1} - q f_0 \overline{g_1}\, dx \\ &= \int \nabla f_0 \overline{\nabla g_1} - q f_0 \overline{g_1} + f_1(-\Delta + q)\overline{g_0}\, dx \\ &= -\langle (f_0, f_1), (g_1, (\Delta - q) g_0\rangle_q \\ &= \langle f, -A_q g\rangle_q. \blacksquare\end{aligned}$$

Probemos que rango de $\lambda - A_q$ es denso en $\mathcal{H}_q$ para $\lambda$ real distinta de cero. Para hacer esto resolvamos

$$(\lambda - A_q) f = g \tag{1.4}$$

para toda $g = (g_0, g_1) \in C_0^\infty \otimes C_0^\infty$. Escribiendo (1.4) en sus componentes, tenemos

$$\lambda f_0 - f_1 = g_0, \qquad \lambda f_1 - (\Delta - q) f_0 = g_1.$$

Combinando estas dos ecuaciones obtenemos

$$\lambda^2 f_0 - (\Delta - q) f_0 = \lambda g_0 + g_1 \in C_0^\infty \tag{1.5}$$

es fácil obtener una solución débil $f_0$ de (1.5) mediante el teorema de representación de Riesz, para la cual $||\partial^\alpha f_0|| < \infty$ para toda $|\alpha| \leq 1$. Definiendo $f_1 = \lambda f_0 - g_0$, es claro que $f = (f_0, f_1)$ es solución de (1.4), es decir, el rango de $\lambda - A_q$ es $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$ que es denso en $\mathcal{H}_q$, es decir $A_q$ es autoadjunto en $\mathcal{H}_q$.$\blacksquare$

Como $iA_q$ es autoadjunto el espectro de $iA_q$ está contenido en los reales. A continuación veremos que los reales están contenidos en el espectro de $iA_q$. Por lo què $\sigma(iA_q) = I\!R$.

El espectro de $H = \Delta - q$ en $L^2$ es un conjunto discreto de reales negativos (con posible punto de acumulación en el cero) unión $[0, \infty)$. El espectro puramente puntual de $H$ es un conjunto discreto de reales con posibles puntos de acumulación el cero y $+\infty$. El espectro absolutamente continuo de $H$ es $[0, \infty)$ y el espectro singular continuo de $H$ es vacío (véase Agmon [1]).

Primero veamos cuáles son los valores propios de $A_q$. Sea $A_q(\varphi, \psi) = \lambda(\varphi, \psi)$ entonces

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ H & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\varphi \\ \lambda\psi \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow &\begin{pmatrix} \psi \\ H\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\varphi \\ \lambda\psi \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow &\ \psi = \lambda\varphi \qquad H\varphi = \lambda\psi = \lambda^2\varphi,\end{aligned}$$

es decir, $\lambda$ es valor propio de $A_q$ si $\lambda^2$ es valor propio negativo de $H$ ($\lambda$ debe ser imaginario porque $A_q$ es autoadjunto negativo). Los datos $(\varphi, \lambda\varphi)$ es un vector propio de $A_q$ correspondiente al valor propio $\lambda$ si $\varphi$ es un vector propio de $H$ correspondiente al valor propio $\lambda^2$.

Entonces el espectro puramente puntual de $A_q$ consta de las raíces cuadradas de los valores propios negativos de $H$.

Denotemos con $\sigma_{ac}(H)$ al espectro absolutamente continuo de $H$ en $L^2$ y con $R_H(z)$ a la resolvente en $z$ de $H$.

Si $z \in \sigma_{ac}(H)$ entonces $R_H(z) = (zI - H)^{-1}$ no es acotada, por lo que $(zI - H)$ tampoco es acotado y $\frac{1}{(zI-H)}$ si es acotado.

Sea $\alpha \in I\!I \backslash \{\lambda \in I\!I \mid \lambda^2$ es valor propio de $H\}$, queremos ver que $\alpha \in \sigma(A_q)$. Es decir queremos ver que $R_{A_q}(\alpha)$ es no acotada en $\mathcal{H}_q$.

$$R_{A_q}(\alpha) = (\alpha I - A_q)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -H & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2-H} & \frac{1}{\alpha^2-H} \\ \frac{H}{\alpha^2-H} & \frac{\alpha}{\alpha^2-H} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} ||R_{A_q}(\alpha)(\varphi,\psi)||_q^2 &= \int \left|\nabla \frac{\alpha\varphi}{\alpha^2\varphi - H\varphi} + \frac{\psi}{\alpha^2\psi - H\psi}\right|^2 + q\left|\frac{\alpha\varphi}{\alpha^2\varphi - H\varphi} + \frac{\psi}{\alpha^2\psi - H\psi}\right|^2 \\ &\quad + \left|\frac{H\varphi}{\alpha^2\varphi - H\varphi} + \frac{\alpha\psi}{\alpha^2\psi - H\psi}\right|^2 dx \\ &= \int \left|\frac{\alpha\varphi\nabla H\varphi - \alpha H\varphi\nabla\varphi}{(\alpha^2\varphi - H\varphi)^2} + \frac{\psi\nabla H\psi - H\psi\nabla\psi}{(\alpha^2\psi - H\psi)^2}\right|^2 \\ &\quad + q\left|\frac{\alpha\varphi}{\alpha^2\varphi - H\varphi} + \frac{\psi}{\alpha^2\psi - H\psi}\right|^2 + \left|\frac{H\varphi}{\alpha^2\varphi - H\varphi} + \frac{\alpha\psi}{\alpha^2\psi - H\psi}\right|^2 dx. \end{aligned}$$

El tercer sumando de $||R_{A_q}(\alpha)||_q^2$ es $\int \left|\frac{H\varphi}{\alpha^2\varphi - H\varphi} + \frac{\alpha\psi}{\alpha^2\psi - H\psi}\right|^2 dx$. Si los datos son de la forma $(\varphi, \lambda\varphi)$ con $\lambda \neq 0$, el tercer sumando nos queda $\int \left|1 - \frac{(\alpha^2+\alpha)\varphi}{\alpha^2\varphi - H\varphi}\right|^2$. Como $\frac{(\alpha^2+\alpha)\varphi}{\alpha^2\varphi - H\varphi} \in L^2$ y la constante $1 \notin L^2$, entonces su diferencia no pertenece a $L^2$, es decir, $\int \left|1 - \frac{(\alpha^2+\alpha)\varphi}{\alpha^2\varphi - H\varphi}\right|$ no es finita, por lo que no es acotado en $\mathcal{H}_q$.

Por lo anterior tenemos que la resolvente de $A_q$ en $\alpha$ no es acotada para $\alpha \in I\!I$ por lo que $I\!R$ está contenido en el espectro de $iA_q$. Entonces $\sigma(iA_q) = I\!R$.

**III.1.2 TEOREMA.** Sea $q(x)$ una función real en $I\!R^n$ tal que $(1 + |x|)^\delta q(x)$ pertenece a la clase $SR$ para alguna $\delta > 0$. Sea $(u, v) \in H_2^{loc} \otimes H_2^{loc}$ una solución de la ecuación diferencial

$$A_q(u,v) = i\lambda(u,v) \quad \text{en } I\!R^n, \tag{1.6}$$

$\lambda$ un número real. Supongamos que $(u,v) \in H_{2,s_0} \otimes H_{2,s_0}$ para alguna $s_0 > \frac{1}{2} - s$. Consideremos a $u$ y $v$ como distribuciones temperadas en $\mathcal{S}(I\!R^n)$ y sean $\widehat{u}$ y $\widehat{v}$ las transformadas de Fourier en distribuciones de $u$ y $v$ respectivamente $(\widehat{u}, \widehat{v} \in \mathcal{S}'(I\!R^n))$. Si $\widehat{u}, \widehat{v} \in L^1_{loc}(I\!R^n)$ entonces $(u,v) \in H_{2,s}(I\!R^n) \otimes H_{2,s}(I\!R^n)$ para cualquier real $s$.

**Demostración.** Como $A_q(u,v) = i\lambda(u,v)$ para $\lambda$ un número real si y sólo si $\Delta u - qu = -\lambda^2 u$ y $v = i\lambda u$, tenemos las condiciones del teorema 3.3 de Agmon [1], por lo tanto si $\widehat{u} \in L^1_{loc}(I\!R^n)$, entonces $u \in \mathcal{H}_{2,s}(I\!R^n)$, por lo que $(u,v) \in H_{2,s}(I\!R^n) \otimes H_{2,s}(I\!R^n)$.■

**III.1.3 TEOREMA.** Sea $A_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - q & 0 \end{pmatrix}$ un operador de onda con potencial $q$ de rango corto. Sea $R(z) = (A_q - zI)^{-1}$ la resolvente de $A_q$. Consideremos $R(z)$ como una función analítica en $\mathbb{C}\backslash\sigma(A_q)$ con valores en $B(H_{2,-s} \otimes H_{2,-s}, L^{2,s} \otimes L^{2,s})$ para cualquier $s > 1/2$. Sea $e(A_q)$ el conjunto discreto de valores propios de $A_q$ y sea $\lambda \in I\!I\backslash e(A_q)$. Entonces, los siguientes límites existen en la topología uniforme de operadores en $B(H_{2,-s} \otimes H_{2,-s}, L^{2,s} \otimes L^{2,s})$:

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow \lambda \\ \pm Rez > 0}} R(z) = R^{\pm}(\lambda). \tag{1.7}$$

Además, para cualquier $f \in H_{2,s}(I\!R^n) \otimes H_{2,s}(I\!R^n)$

$$R^{\pm}(\lambda)f = R_0^{\pm}(\lambda)f - R_0^{\pm}(\lambda)qR^{\pm}(\lambda)f. \tag{1.8}$$

En particular, $u^+ = R^+(\lambda)f$ es una solución $\sqrt{\lambda}$-saliente, y $u^- = R^-(\lambda)f$ es una solución $\sqrt{\lambda}$-entrante de la ecuación diferencial:

$$(A_q - \lambda)u = f \quad \text{en } I\!R^n. \tag{1.9}$$

En lo que sigue nos referiremos a $R^+(\lambda)$ como los valores frontera de $R(z)$ en el eje real. Claramente la función $R^{\pm}(\lambda)$ (con valores en $B(H_{2,-s} \otimes H_{2,-s}, L^{2,s} \otimes L^{2,s})$ para cualquier $s > 1/2$) es continua en $I\!R\backslash e(A_q)$ en la topología uniforme de operadores en $B(H_{2,-s} \otimes H_{2,-s}, L^{2,s} \otimes L^{2,s})$.

**Demostración.** Probaremos el teorema para $R^+(\lambda)$, la prueba para $R^-(\lambda)$ es similar. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $s$ restringida a algún intervalo $1/2 < s \leq 1/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Elijamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que el operador multiplicación $q$ es un operador compacto de $H_{2,-1/2-\varepsilon}(I\!R^n)$ en $L^{2,1/2+\varepsilon}(I\!R^n)$.

Para cualquier $z \in \overline{\mathbb{C}^+} = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^+$ definimos $T(z) \in B(H_{2,-s} \otimes H_{2,-s}, L^{2,s} \otimes L^{2,s})$ con

$$T(z)(u,v) = R_0^+(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} (u,v) \qquad \text{para } (u,v) \in H_{2,-s}(\mathbb{R}^n) \otimes H_{2,-s}(\mathbb{R}^n). \tag{1.10}$$

Aquí $R_0^+(z) = R_0(z) \in B(H_{2,s} \otimes H_{2,s}, L^{2,s} \otimes L^{2,s})$ si $Imz > 0$, mientras que $R_0^+(z)$ está definido por (I.2.26) si $z = \lambda \in \mathbb{R}$. Del teorema 1 y la compacidad de $q$ (considerado como un operador de $H_{2,-1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{2,1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, se sigue que $T(z)$ es un operador compacto para todo $z \in \overline{\mathbb{C}^+}$ y que además, el operador T(z) es continuo en $\overline{\mathbb{C}^+}$ en la topología uniforme de operadores en $B(H_{2,-s} \otimes H_{2,-s}, H_{2,-s} \otimes H_{2,-s})$.

Consideremos la pregunta de invertibilidad en $B(H_{2,-s} \otimes H_{2,-s}, H_{2,-s} \otimes H_{2,-s})$ del operador $I + T(z)$ donde $I$ es la identidad. Afirmamos que $(I + T(z))^{-1}$ existe si y sólo si $z \in \overline{\mathbb{C}^+} \backslash e(A_q)$. Primero supongamos que $Imz > 0$. Usando la ecuación resolvente

$$R(z) + R_0(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} R(z) = R_0(z), \tag{1.11}$$

y (1.6), se sigue que para cualquier $f \in H_{2,-s} \otimes H_{2,-s}$ y $u = R(z)f \in H_{2,-s} \otimes H_{2,-s}$, tenemos

$$(I + T(z))u = R_0(z)f. \tag{1.12}$$

Dejando variar a $f$ en $H_2 \otimes H_2$, se sigue de (1.11) que $H_2 \otimes H_2 \subset Ran(I + T(z))$, lo cual implica que $\overline{Ran(I + T(z))} = H_2 \otimes H_2$. De esto se sigue por un resultado bien conocido en operadores compactos en un espacio de Hilbert (la teoría de Fredholm–Riesz) que el inverso $(i + T(z))^{-1}$ existe en $B(H_{2,-s} \otimes H_{2,-s}, H_{2,-s} \otimes H_{2,-s})$.

Ahora, sea $z = \lambda \in \mathbb{R}$. Por la Teoría de Fredholm–Riesz $I + T(\lambda)$ es invertible si y sólo si $-1$ no es valor propio de $T(\lambda)$ y sea $u \in H_{2,-s}(\mathbb{R}^n)$ la función propia correspondiente. De (1.9) se sigue que $u = -R_0^+(\lambda)(qu)$, lo cual implica que $u$ es una solución $\sqrt{\lambda}$-saliente de la ecuación diferencial: $A_q u = \lambda u$. Aplicando el lema 4.2 de Agmon [1] se sigue que $u \in D(A_q)$, lo cual a su vez implica que $\lambda$ es un valor propio de $A_q$. Inversamente, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de $A_q$ con una función propia correspondiente $u \in D(A_q)$. Usando (1.10) encontramos que $u + R_=(z)(qu) = (\lambda - z)R_0(z)u$ para $z \in \mathbb{C}^+$. Entonces, dejando $z \longrightarrow \lambda$, usando el teorema 3, tenemos: $u + R_0^+(\lambda)(qu) = 0$, lo cual muestra que $-1$ es un valor propio de de $T(\lambda)$. Las consideraciones anteriores muestran que $(I + T(z))^{-1}$ existe para $z \in \overline{\mathbb{C}^+}$ si y sólo si $z \notin e(A_q)$.

Ahora, como $T(z)$ es continuo en $\overline{\mathbb{C}^+}$ en la topología de operadores uniformes de $B(H_{2,-s}, H_{2,-s})$, se sigue de consideraciones elementales que el operador $(I + T(z))^{-1}$ también es continuo en $\overline{\mathbb{C}^+} \backslash e(A_q)$ en la topología uniforme de operadores en $B(H_{2,-s}, H_{2,-s})$. De (1.10) y (1.9) se sigue que

$$R(z) = (I + T(z))^{-1} R_0(z) \qquad \text{para } Imz > 0. \tag{1.13}$$

Usando las propiedades de continuidad de $(I + T(z))^{-1}$ y $R_0(z)$ se sigue que, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}\backslash e(iA_q)$

$$\exists \lim_{\substack{z \longrightarrow \lambda \\ Im z>0}} R(z) = (I + T(\lambda))^{-1} R_0^+(\lambda) \tag{1.14}$$

en la topología de operadores uniformes de $B(L^{2,s}, H_{2,-s})$. Del último resultado obtenemos (1.7). Los otros resultados mencionados en el teorema se siguen inmediatamente de (1.7). Esto establece el teorema.■

**III.1.4 TEOREMA.** Sea $\mathcal{H}_{qac}$ el subespacio de continuidad absoluta de $\mathcal{H}_q$ con respecto a $A_q$. Sea $\mathcal{H}_{qp}$ el subespacio cerrado en $\mathcal{H}_q$ generado por las funciones propias de $A_q$, entonces

$$\mathcal{H}_q = \mathcal{H}_{qac} \oplus \mathcal{H}_{qp}. \tag{1.15}$$

Observación. Denotaremos con $\{E_\lambda\}$ la resolución espectral de la identidad asociada a $A_q$ y denotaremos con $E(\mathcal{B})$ la proyección asociada con un conjunto de Borel $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$. También denotaremos con $P_{ac}$ la proyección de $\mathcal{H}_q$ en $\mathcal{H}_{qac}$. Con esta notación el teorema afirma que

$$P_{ac} = E(\mathbb{R}\backslash e(iA_q)),$$

donde $e(iA_q) = \{\lambda \mid \lambda \text{ es un valor propio de } A_q\}$.

**Demostración.** Tenemos que mostrar que una condición necesaria y suficiente para que $\langle E_\lambda f, f\rangle_q$ sea absolutamente continua en $\mathbb{R}$ es que $f$ sea ortogonal a $\mathcal{H}_{qp}$. La parte de la necesidad de la condición es obvia. Para probar la suficiencia observemos que si $f \perp \mathcal{H}_{qp}$ entonces $\langle E_\lambda f, f\rangle_q$ es una función continua en $\mathbb{R}$. Por esto y porque $e(iA_q)$ es un conjunto discreto, para probar la suficiencia basta mostrar que la función $\langle E_\lambda f, f\rangle_q$ es absolutamente continua en cualquier intervalo compacto en $\mathbb{R}\backslash e(iA_q)$.

Entonces, consideremos un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}\backslash e(iA_q)$ usaremos la bien conocida fórmula

$$\langle [E_b - E_a]f, f\rangle = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \langle [R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)]f, f\rangle d\lambda \tag{1.16}$$

la cual es válida para cualquier $f \in \mathcal{H}_q$ (ver Dunford [1] pág 1202). Suponga que $f \in L^{2,s}(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$ para alguna $s > 1/2$. Se sigue de (1.15) y del teorema 1.3 que

$$\langle [E_b - E_a]f, f\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \langle [R^+(\lambda) - R^-(\lambda)]f, f\rangle d\lambda \tag{1.17}$$

Luego, se sigue de (1.16) que $\langle E_\lambda f, f\rangle$ es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}\backslash e(A_q)$ y que

$$\frac{d}{d\lambda}\langle E_\lambda f, f\rangle = \frac{1}{2\pi i}\langle [R^+(\lambda) - R^-(\lambda)]f, f\rangle \tag{1.18}$$

para cualquier $f \in L^{2,s}(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$ con $s > 1/2$. Como el conjunto de funciones $f$ para las cuales $\langle e_\lambda f, f\rangle$ es una función absolutamente continua respecto a $\lambda$ en $[a,b]$ es cerrado en $\mathcal{H}_q$ (ver Kato [1]), se sigue de (1.17) que $\langle E_\lambda f, f\rangle$ es absolutamente continua en todo intervalo compacto en $\mathbb{R}\backslash e(iA_q)$ para toda $f \in \mathcal{H}_q$, esto establece el teorema.■

Sea $U_q(t)\colon \mathcal{H}_q \longrightarrow \mathcal{H}_q$ el operador que relaciona los datos iniciales $g$ con la solución de la ecuación (1.1) en el tiempo $t$.

$$U_q(t)g = (v(x,t), v_t(x,t)). \tag{1.19}$$

Veamos que $U_q(t)$ es unitario.

**III.1.5 LEMA.** Si $g \in C_0^\infty \otimes C_0^\infty$, entonces $||U_q(t)g||_q = ||g||_q$.

**Demostración.** Sea $v(x,t)$ solución de (1.1) con datos iniciales en $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$ (es decir, $v(x,t)$ tiene soporte compacto respecto a $x$). Entonces

$$\begin{aligned} E_q(t)(v,v_t) - E_q(0)(v,v_t) &= \int_0^t \partial_s E_q(s)(v(x,s), v_s(x,s)\ ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \partial_s |\nabla v(x,s)|^2 + q(x)|v(x,s)|^2 + v_s(x,s)|^2\ dx\,ds \end{aligned}$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Delta v\overline{v_s} + v_s\overline{\Delta v} + qv\overline{v_s} + v_s q\overline{v} + V_{ss}\overline{v_s} + v_s\overline{v_{ss}}dxds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (v_{ss} + \Delta v + qv)\overline{v_s} + v_s(\overline{v_{ss}} + \Delta\overline{v} + q\overline{v})\ dx\,ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} 0\ dx\,ds = 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} ||U_q(t)g||_q &= ||(v((x,t), v_t(x,t))||_q \\ &= [E_q(t)(v(x,t), v_t(x,t))]^{\frac{1}{2}} \\ &= [E_q(t)(v(x,t), v_t(x,t))]^{\frac{1}{2}} \\ &= [E_q(0)g]^{\frac{1}{2}} \\ &= ||g||_q. \blacksquare \end{aligned}$$

**III.1.6 COROLARIO.** Conservación de la energía. Si $g \in \mathcal{H}_q$ entonces $||U_q(t)g||_q = ||g||_q$.

**Demostración.** Sea $g_m$ una sucesión de funciones en $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$ que converge a $g \in \mathcal{H}_q$. Como $U_q(t)(f+g) = U_q(t)f + U_q(t)g$ para cualesquiera $f$ y $g \in \mathcal{H}_q$, entonces

$$U_q(t)g_m - U_q(t)g = U_q(t)(g_m - g) \tag{1.20}$$

y por lo tanto $||\lim_{m\to\infty} U_q(t)g_m - U_q(t)g||_q = 0$, lo cual implica $\lim_{m\to\infty} ||U_q(t)g_m||_q = ||U_q(t)g||_q$. Pero por el lema 5 tenemos que para cada $m$, $||U_q(t)g_m||_q = ||g_m||_q$ y $\lim ||g_m||_q = ||g||_q$, por lo que podemos concluir $||U_q(t)g)||_q = ||g||_q$.∎

Como $U_q$ es un grupo unitario, utilizando el teorema de Stone, concluimos que existe un operador autoadjunto (negativo) $A$ con la propiedad de que si $g \in D(A)$ entonces

$$U_q(t)g = e^{tA}g.$$

A continuación veremos que el operador $A$ es igual al operador $A_q$.

Para $g \in D(A)$ tenemos que

$$\partial_t U_q(t)g = Ae^{tA}g$$

pero por otro lado, sabemos que

$$\begin{aligned} \partial_t U_q(t)g &= (v_t, v_{tt}) \\ &= (v_t, (\Delta - q)v) \\ &= A_q U_q(t)g \end{aligned}$$

de donde concluimos que $A = A_q$. Entonces $A_q$ es el generador infinitesimal de $U_q$.

**III.1.7 DEFINICION.** Sea $D(\overline{A_q}) = \{f \in \mathcal{H}_0 : A_q f \in \mathcal{H}_q$ en el sentido débil$\}$ y sea $D(A_0)$ el dominio de $A_0$ en $\mathcal{H}_0$, es decir, $D(A_0) = \{f \in \mathcal{H}_0 : A_0 f \in \mathcal{H}_0\}$.

**III.1.8 LEMA.** Los conjuntos $D(\overline{A_q})$ y $D(A_0)$ son iguales.

**Demostración.** Sea $f \in D(A_0)$, notemos que

a) $||f||_0^2 = \int |\nabla f_0|^2 + |f_1|^2 \, dx < \infty$ y

b) $||A_0 f||_0^2 = ||(f_1, \Delta f_0)||_0^2 = \int |\nabla f_1|^2 + |\Delta f_0|^2 \, dx < \infty$

para demostrar que $f \in D(\overline{A_q})$ basta probar que

$$||A_q f||_q = \int |\nabla f_1|^2 + q(x)|f_1|^2 + |(\Delta - q)f_0|^2 \, dx < \infty. \tag{1.21}$$

Como $q(x)$ es de orden $|x|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}$, entonces $|q(x)| \le M$ para $|x| > R$. Utilizando las desigualdades de Hölder y Sobolev y la suposición de que $q \in L^{\frac{2n}{3}}_{loc}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} q(x)|f_1|^2 \, dx &\le \int_{|x|<R} q(x)|f_1|^2 \, dx + \int_{|x|>R} q(x)|f_1|^2 \, dx \\ &\le \int_{|x|<R} q(x)|f_1|^2 \, dx + M \int_{|x|>R} |f_1|^2 \, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{|x|<R} q(x)|f_1|^2\,dx + M\|f\|_0^2 \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{|x|<R} |q|^{\frac{n}{2}}\,dx\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{|x|<R} |f_1|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} + M\|f\|_0^2 \\
&= \|q\|_{\frac{n}{2}}^{|x|<R} \left(\int_{|x|<R} |f_1|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} + M\|f\|_0^2 \\
&= \|q\|_{\frac{n}{2}}^{|x|<R} \|f_1\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 + M\|f\|_0^2 \\
&\overset{\text{Sobolev}}{\leq} c\|q\|_{\frac{n}{2}}^{|x|<R} \|\nabla f_1\|_2^2 + M\|f\|_0^2 \\
&= c\|q\|_{\frac{n}{2}}^{|x|<R} \int |\nabla f_1|^2\,dx + M\|f\|_0^2 \\
&\leq k\|A_0 f\|_0^2 + M\|f\|_0^2 < \infty.
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

Ahora veamos que $\int |(\Delta - q)f_0|^2\,dx < \infty$.

$$
\begin{aligned}
\int |(\Delta - q)f_0|^2\,dx &\leq \int |\Delta f_0|^2 + |qf_0|^2 + 2|\Delta f_0||qf_0|\,dx < \infty \\
&\leq \|A_0 f\|_0^2 + \int |qf_0|^2\,dx + 2\left(\int |-\Delta f_0|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |qf_0|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|A_0 f\|_0^2 + \int |qf_0|^2\,dx + \|A_0 f\|_0 \left(\int |qf_0|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

entonces basta probar que

$$\int |qf_0|^2\,dx < \infty.$$

Esto lo probaremos en dos partes:

i) Veamos que es cierto fuera de una esfera de radio $R$.

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>R} |qf_0|^2\,dx &\leq \int_{|x|>R} \frac{|f_0|^2}{|x|^{3+2\varepsilon}}\,dx \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{|x|>R} \left(|x|^{-3-2\varepsilon} dx\right)^{2/n}\right) \left(\int_{|x|>R} \left(|f_0|^2\right)^{n/n-2} dx\right) \\
&\overset{\text{Sobolev}}{\leq} C\int |\nabla f_0|^2\,dx \\
&\leq C\|f\|_0^2 < \infty.
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

ii) Demostremos que también es cierto en el interior de la esfera de radio $R$.

$$\int_{|x|<R} |qf_0|^2\,dx \leq \sup_{|x|<R} |f_0|^2 \int_{|x|<R} |q|^2\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(*)}{\leq} c\int_{|x|<R}|\Delta f_0|^2\,dx + \int_{|x|<R}|f_0|^2\,dx \\
&\leq \|A_0 f\|_0^2 + \int |\nabla f_0|^2\,dx \\
&\leq \|A_0 f\|_0^2 + \|f\|_0^2 < \infty,
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

donde la desigualdad $(*)$ está dada por el teorema de inmersión de Sobolev. Luego $\|A_q f\|_q < \infty$, entonces $f \in D(\overline{A_q})$.

Para demostrar la otra contensión, llamemos $A'$ a la restricción de $A_q$ en $D(A_0)$. Si $A_q$ fuera una extensión propia de $A'$, entonces para cada $\lambda$ tal que $Ran(\lambda - A_q) = \mathcal{H}_0$, vemos que $\lambda - A_q$ debe anularse para alguna $f$ no trivial

$$
\lambda f - A_q f = 0,
$$

esto es, $\lambda f_0 - f_1 = 0$ y $\lambda f_1 - (\Delta - q) f_0 = 0$ y por lo tanto $\lambda^2 f_0 - (\Delta + q) f_0 = 0$ como distribuciones.

Sea $\varphi \in C_0^\infty$, entonces

$$
0 = \int 0\,dx = \int 0\varphi\,dx = \int \lambda^2 f_1 \varphi - \Delta f_0 \varphi + q f_0 \varphi\,dx. \tag{1.25}
$$

Además, podemos aproximarnos con funciones en $C_0^\infty$ a $f_0$ porque está en $H^1$, y obtenemos

$$
\int \lambda^2 |f_0|^2 + |\nabla f_0|^2 + q|f_0|^2\,dx = 0
$$

y si $\lambda$ es tal que $\lambda^2 > M$, entonces

$$
\begin{aligned}
\int |q(x)||f_0|^2\,dx &\leq \int_{|x|<R} q(x)|f_0|^2\,dx + M\int_{|x|>R}|f_0|^2\,dx \\
&\leq \int \lambda^2|f_0|^2\,dx + \int |\nabla f_0|^2\,dx
\end{aligned}
$$

y por lo tanto $f_0 = 0$, pero como $f_1 = \lambda f_0$, entonces $f = (0,0)$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $D(\overline{A_q}) \supset D(A_0)$.■

**III.1.9 OBSERVACION.** $D(A_0)_{|x|<R} = D(A_q)_{|x|<R}$.

## III.2 EXISTENCIA DE LOS OPERADORES DE ONDA

**III.2.1 DEFINICION.** Definimos los operadores de onda

$$
W_\pm(A_q, A_0)\colon \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_q
$$

como operadores de onda entre dos espacios de Hilbert

$$W_{\pm}(A_q, A_0) = \operatorname*{s\,lim}_{t \longrightarrow \pm\infty} U_q(-t) J U_0(t),$$

donde $J\colon \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_q$ es el operador que envía a $C_0^\infty \otimes C_0^\infty \subset \mathcal{H}_o$ en $C_0^\infty \otimes C_0^\infty \subset \mathcal{H}_q$ entonces por abuso de notación nos olvidaremos de $J$; por lo que pensaremos a los operadores de onda como

$$W_{\pm}(A_q, A_0) = \operatorname{s\,lim} U_q(-t) U_0(t).$$

**III.2.2 TEOREMA.** Los operadores de onda $W_{\pm}(A_q, A_0)$ existen.

**Demostración.** Utilizaremos el método de Cook. Tenemos que probar que

$$\int_{T_0}^{\infty} \|(A_q - A_0)e^{tA_0}\varphi\|_q + \|(A_q - A_0)e^{-tA_0}\varphi\|_q \, dx < \infty. \tag{2.1}$$

Como $A_q - A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ y $e^{\pm tA_0} = \begin{pmatrix} 1 & e^{\pm t} \\ e^{\pm t\Delta} & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|(A_q - A_0)e^{\pm tA_0}\varphi\|_q &= \|(0, q\varphi + qe^{\pm t}\varphi_t)\|_q \\ &= \|q\varphi + qe^{\pm t}\varphi_t)\|_2 \\ &\leq \|q\varphi\|_2 + \|qe^{\pm t}\varphi_t)\|_2 \\ &= \|q\varphi\|_2 + \|q\varphi_t)\|_2. \end{aligned}$$

Como $\varphi$ es solución de la ecuación de onda sin perturbar, entonces $\varphi_t$ también lo es, por lo que basta probar que

$$\int_{T_0}^{\infty} \|q\varphi\|_2 \, dt < \infty.$$

Para cada $t \in I\!R$ y $\delta > 0$ definamos

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \{x \in I\!R^n \mid |x| \geq (1+\delta)|t|\} \\ \Omega_2(t) &= \{x \in I\!R^n \mid |x| \leq (1-\delta)|t|\} \\ \Omega_3(t) &= \{x \in I\!R^n \mid (1-\delta)|t| \leq |x| \leq (1+\delta)|t|\}. \end{aligned}$$

Si $\varphi$ es solución de la ecuación de onda sin perturbar con datos iniciales en $C_0^\infty$,entonces por el método de fase estacionaria (véase Reed and Simon [1] vol III pág 46) tenemos que para toda $\delta > 0$

$$|\varphi(x,t)| \leq \begin{cases} \dfrac{C_{N\delta}}{(1+|t|+|x|)^N} & x \in \Omega_1(t) \text{ para toda } N. \\ \dfrac{C_\delta}{(1+|t|)^{n-1}} & x \in \Omega_2(t) \\ \dfrac{d}{(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}} & x \in I\!R^n. \end{cases} \tag{2.2}$$

Si $x \in \Omega_1(t)$ entonces

$$\int_{\Omega_1} |q(x)|^2 |\varphi|^2 \, dx \leq \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi|^2}{|x|^{3+2\varepsilon}} \, dx$$
$$\leq \int_{\Omega_1} \frac{C_{N\delta}^2}{|x|^{3+2\varepsilon}(1+|t|+|x|)^{2N}} \, dx.$$

Como $|x| \leq 1 + |t| + |x|$ se tiene que $\frac{1}{(1+|t|+|x|)^{2N}} \leq \frac{1}{|x|^{2N}}$, lo cual implica

$$\int_{\Omega_1} \frac{C_{N\delta}^2}{|x|^{3+2\varepsilon}(1+|t|+|x|)^{2N}} \, dx \leq \int_{\Omega_1} \frac{C_{N\delta}^2}{|x|^{3+2\varepsilon}|x|^{2N}} \, dx$$
$$\leq Vol(B_1) C_{N\delta}^2 \int_{(1+\delta)|t|}^{\infty} \frac{1}{r^{2N+4+2\varepsilon-n}} dr$$
$$= \frac{Vol(B_1) C_{N\delta}^2}{(-2N-3-2\varepsilon+n)|t|^{2N+3+2\varepsilon-n}}$$
$$= \frac{C_1}{|t|^{2+2\varepsilon}} \qquad \text{si } N = \frac{n-1}{2}$$
$$= \frac{C_1}{|t|^{2+2\varepsilon}},$$

donde $Vol(B_1)$ es el volumen de la esfera de radio uno. Entonces

$$\left(\int_{\Omega_1} |q(x)\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_1}{|t|^{1+\varepsilon}}. \tag{2.3}$$

Notemos que $Vol(\Omega_2) = Vol(B_1)(1-\delta)^n |t|^n$. Si $x \in \Omega_2(t)$ entonces Si $n = 3$

$$\int_{\Omega_2} |q|^2 |\varphi|^2 \, dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\Omega_2} |q|^3 \, dx\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\Omega_2} |\varphi|^6 \, dx\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\leq (||q||_3^{\Omega_2(t)})^2 \left(\int_{\Omega_2} |\varphi|^6 \, dx\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Por otro lado

$$\int_{\Omega_2} |\varphi|^6 \, dx \leq \int_{\Omega_2} \frac{C_\delta}{(1+|t|)^{6(3-1)}} \, dx$$
$$\leq \frac{C_\delta Vol(\Omega_2)}{(1+|t|)^{12}}$$
$$\leq \frac{C_\delta Vol(B_1)(1-\delta)^n |t|^n}{(1+|t|)^{12}}$$
$$\leq \frac{C_\delta Vol(B_1)(1-\delta)^n}{|t|^9}.$$

Por lo que

$$\left(\int_{\Omega_2} |q|^2|\varphi|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int \Omega_2 |q|^3\, dx\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\Omega_2} |\varphi|^6\, dx\right)^{\frac{1}{6}}$$
$$\leq \frac{||q||_3^{\Omega_2} C_\delta Vol(B_1)(1-\delta)^{\frac{n}{3}}}{|t|^{\frac{9}{6}}}$$
$$\leq \frac{C_2}{|t|^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{para } n = 3. \tag{4}$$

Si $n \geq 3$

$$\int_{\Omega_2} |q|^2|\varphi|^2\, dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\Omega_2} |q|^{\frac{2n}{3}}\, dx\right)^{\frac{3}{n}} \left(\int_{\Omega_2} |\varphi|^{\frac{2n}{n-3}}\, dx\right)^{\frac{n-3}{n}}$$
$$\leq (||q||_{\frac{2n}{3}}^{\Omega_2(t)})^2 \left(\int_{\Omega_2} |\varphi|^{\frac{2n}{n-3}}\, dx\right)^{\frac{n-3}{n}}.$$

Por otro lado

$$\int_{\Omega_2} |\varphi|^{\frac{2n}{n-3}}\, dx \leq \int_{\Omega_2} \frac{C_\delta}{(1+|t|)^{\frac{2n(n-1)}{n-3}}}\, dx$$
$$\leq \frac{C_\delta Vol(\Omega_2)}{(1+|t|)^{\frac{2n(n-1)}{n-3}}}$$
$$\leq \frac{C_\delta Vol(B_1)(1-\delta)^n |t|^n}{(1+|t|)^{\frac{2n(n-1)}{n-3}}}$$
$$\leq \frac{C_\delta Vol(B_1)(1-\delta)^n}{|t|^{\frac{n^2+n}{n-3}}}.$$

Por lo que

$$\left(\int_{\Omega_2} |q|^2|\varphi|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int \Omega_2 |q|^{\frac{2n}{3}}\, dx\right)^{\frac{3}{2n}} \left(\int_{\Omega_2} |\varphi|^{\frac{2n}{n-3}}\, dx\right)^{\frac{n-3}{2n}}$$
$$\leq \frac{||q||_{\frac{2n}{3}} C_\delta Vol(B_1)(1-\delta)^{\frac{n-3}{2}}}{|t|^{\frac{n+1}{2}}}$$
$$\leq \frac{C_2}{|t|^{\frac{n+1}{2}}} \qquad \text{para } n > 3. \tag{2.5}$$

Notemos que $Vol(\Omega_3) = Vol(B_1)[(1+\delta)^n - (1-\delta)^n]|t|^n$. Si $x \in \Omega_3(t)$ entonces

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_3} |q|^2|\varphi|^2\,dx &\le \int_{\Omega_3} \frac{|\varphi|^2}{|x|^{3+2\varepsilon}}\,dx\\ &\le \int_{\Omega_3} \frac{d}{(1-\delta)^{3+2\varepsilon}|t|^{3+2\varepsilon}(1+|t|)^{n-1}}dx\\ &\le \frac{Vol(\Omega_3)d}{(1-\delta)^{3+2\varepsilon}|t|^{n+2+2\varepsilon}}\\ &= \frac{Vol(B_1)[(1+\delta)^n-(1-\delta)^n]}{(1-\delta)^{3+2\varepsilon}|t|^{2+2\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega_3} |q|^2|\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} &\le \frac{(Vol(B_1)[(1+\delta)^n-(1-\delta)^n])^{\frac{1}{2}}}{(1-\delta)^{3+2\varepsilon}|t|^{1+\varepsilon}}\\ &= \frac{C_3}{|t|^{1+\varepsilon}}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Tenemos que por (2.3), (2.4), (2.5) y (2.6)

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^{\infty} \|q\varphi\|_2\,dt &\le \int_{T_0}^{\infty} \left(\int_{\Omega_1} |q(x)\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega_2} |q|^2|\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega_3} |q|^2|\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dt\\ &\le \int_{T_0}^{\infty} \frac{C_1}{|t|^{1+\varepsilon}} + \frac{C_2}{|t|^{\frac{3}{2}}} + \frac{C_3}{|t|^{1+\varepsilon}}\,dt\\ &= \frac{C_1+C_2+C_3}{\varepsilon|T_0|^{\varepsilon}} < \infty\end{aligned}$$

luego, por el método de Cook, obtenemos que los operadores de onda $W_{\pm}(A_q, A_0)$ existen. ∎

**III.2.3 LEMA.** Si $\varphi$ es solución de la ecuación de onda sin perturbar, entonces

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \int_{\mathbb{R}^n} q(x)|\varphi(x,t)|^2\,dx = 0. \tag{2.7}$$

**Demostración.** Si $\varphi$ es solución de la ecuación de onda sin perturbar con datos iniciales en $C_0^{\infty}$,entonces por el método de fase estacionaria (véase Reed and Simon [1] vol. III pág 46) tenemos que para toda $\delta > 0$

$$|\varphi(x,t)| \le \begin{cases} \dfrac{C_{N\delta}}{(1+|t|+|x|)^N} & x \in \Omega_1(t) \text{ para toda } N.\\ \dfrac{C_\delta}{(1+|t|)^{n-1}} & x \in \Omega_2(t)\\ \dfrac{d}{(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}} & x \in \mathbb{R}^n.\end{cases}$$

Si $x \in \Omega_1(t)$ entonces

$$\int_{\Omega_1} |q(x)||\varphi|^2\,dx \le \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi|^2}{|x|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}\,dx$$
$$\le \int_{\Omega_1} \frac{C_{N\delta}^2}{|x|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(1+|t|+|x|)^{2N}}\,dx.$$

Como $|x| \le 1+|t|+|x|$ se tiene que $\frac{1}{(1+|t|+|x|)^{2N}} \le \frac{1}{|x|^{2N}}$, lo cual implica

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \frac{C_{N\delta}^2}{|x|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(1+|t|+|x|)^{2N}}\,dx &\le \int_{\Omega_1} \frac{C_{N\delta}^2}{|x|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}|x|^{2N}}\,dx \\
&\le Vol(B_1)C_{N\delta}^2 \int_{(1+\delta)|t|}^{\infty} \frac{1}{r^{2N+\frac{5}{2}+\varepsilon-n}}dr \\
&= \frac{Vol(B_1)C_{N\delta}^2}{(-2N-\frac{3}{2}-\varepsilon+n)|t|^{2N+\frac{3}{2}+\varepsilon-n}} \\
&= \frac{C_1}{|t|^{2+\varepsilon}} \qquad \text{si } N=\frac{2n+1}{4} \\
&= \frac{C_1}{|t|^{2+\varepsilon}},
\end{aligned}$$

donde $Vol(B_1)$ es el volumen de la esfera de radio uno. Entonces

$$\int_{\Omega_1} q(x)|\varphi|^2 dx \le \frac{C_1}{|t|^{2+\varepsilon}}. \tag{2.8}$$

Notemos que $Vol(\Omega_2) = Vol(B_1)(1-\delta)^n|t|^n$. Si $x \in \Omega_2(t)$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} |q||\varphi|^2\,dx &\overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int_{\Omega_2} |q|^{\frac{2n}{3}}\,dx\right)^{\frac{3}{2n}} \left(\int_{\Omega_2} |\varphi|^{\frac{4n}{2n-3}}\,dx\right)^{\frac{2n-3}{2n}} \\
&\le (\|q\|_{\frac{2n}{3}} \left(\int_{\Omega_2} |\varphi|^{\frac{4n}{2n-3}}\,dx\right)^{\frac{2n-3}{2n}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} |\varphi|^{\frac{4n}{2n-3}}\,dx &\le \int_{\Omega_2} \frac{C_\delta}{(1+|t|)^{\frac{4n}{2n-3}(n-1)}}\,dx \\
&\le \frac{C_\delta Vol(\Omega_2)}{(1+|t|)^{\frac{4n}{2n-3}(n-1)}} \\
&\le \frac{C_\delta Vol(B_1)(1-\delta)^n|t|^n}{(1+|t|)^{\frac{4n}{2n-3}(n-1)}} \\
&\le \frac{C_\delta Vol(B_1)(1-\delta)^n}{|t|^{\frac{2n^2-n}{2n-3}}}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\int_{\Omega_2} |q||\varphi|^2\, dx \leq \|q\|_{\frac{2n}{3}} \left( \frac{c}{|t|^{\frac{2n^2-n}{2n-3}}} \right)^{\frac{2n-3}{2n}}$$
$$\leq \|q\|_{\frac{2n}{3}} \frac{c_2}{|t|^{\frac{2n-1}{2}}}. \tag{2.9}$$

Notemos que $Vol(\Omega_3) = Vol(B_1)[(1+\delta)^n - (1-\delta)^n]|t|^n$. Si $x \in \Omega_2(t)$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_3} |q||\varphi|^2\, dx &\leq \int_{\Omega_3} \frac{|\varphi|^2}{|x|^{\frac{3}{2}\epsilon}}\, dx \\
&\leq \int_{\Omega_3} \frac{d}{(1-\delta)^{\frac{3}{2}\epsilon}|t|^{\frac{3}{2}\epsilon}(1+|t|)^{n-1}} dx \\
&\leq \frac{Vol(\Omega_3)d}{(1-\delta)^{\frac{3}{2}\epsilon}|t|^{n+\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
&= \frac{Vol(B_1)[(1+\delta)^n - (1-\delta)^n]}{(1-\delta)^{\frac{3}{2}\epsilon}|t|^{\frac{1}{2}+\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_{\Omega_3} |q||\varphi|^2\, dx \leq \frac{c_3}{|t|^{\frac{1}{2}+\epsilon}}. \tag{2.10}$$

Entonces de (2.8), (2.9) y (2.10) concluimos que

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \int |q||\varphi|^2 dx = 0. \blacksquare$$

En el siguiente lema, veremos que el operador $W_\pm$ posee la propiedad de intercambio para $A_q$ y $A_0$.

**III.2.4 LEMA.** Sea $f \in \mathcal{H}_0$, entonces:

$$U_q(t)W_\pm f = W_\pm U_0(t)f. \tag{2.11}$$

**Demostración.** Como $U_q(t)$ y $U_0(t)$ son grupos, tenemos que:

$$\begin{aligned}
U_q(r)W_\pm f &= U_q(r)\left[ \operatorname*{s\,lim}_{t \longrightarrow \pm\infty} U_q(-t)U_0(t)f \right] \\
&= \operatorname*{s\,lim}_{t \longrightarrow \pm\infty} U_q(-t+r)U_0(t)f \\
&= \operatorname*{s\,lim}_{t \longrightarrow \pm\infty} U_q(-t)U_0(t+r)f \\
&= W_\pm U_0(r)f. \blacksquare
\end{aligned}$$

## III.3 LOS OPERADORES DE ONDA SON COMPLETOS

A partir de este momento trabajaremos en el espacio $\mathcal{H}'_q$, que es el complemento ortogonal del subespacio de $\mathcal{H}_q$ generado por los valores propios de $A_q$, y con la restricción de $A_q$ a este espacio.

En el caso del sistema no perturbado, definimos los espacios entrante $D^0_-$ y saliente $D^0_+$ como:

$$\begin{aligned} D^0_+ &= \{f \in \mathcal{H}_0 \mid U_0(t)f = 0 \qquad \text{para } |x| \leq t, \quad t > 0\} \\ D^0_- &= \{f \in \mathcal{H}_0 \mid U_0(t)f = 0 \qquad \text{para } |x| \leq -t, \quad t < 0\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Los espacios entrantes y salientes del sistema perturbado están dados por

$$D^q_\pm = W_\pm D^0_\pm. \tag{3.2}$$

Si $D^q_\pm$ satisfacen los axiomas de Lax-Phillips

i) $U_q(t)D^q_+ \subset D^q_+$ para $t > 0$ y $U_q(t)D^q_- \subset D^q_-$ para $t < 0$.

ii) $\bigcap_t U_q(t)D^q_+ = \{0\} = \bigcap_t U_q(t)D^q_-$

iii) $\overline{\bigcup_t U_q(t)D^q_+} = \mathcal{H}'_q = \overline{\bigcup_t U_q(t)D^q_+}$.

se sigue directamente del tercer axioma, que el rango de $W_\pm$ es $\mathcal{H}'_q$, lo que significa que los operadores de onda $W_\pm$ son completos.

**III.3.1 LEMA.** Los subespacios $D^q_\pm$ satisfacen los axiomas de Lax-Phillips (i) e (ii).

**Demostración.** Como los operadores de onda son intercambiables para $A_q$ y $A_0$ se tiene $U_q(t)W_\pm = W_\pm U_0(t)$. Utilizando (i) e (ii) para $D^0_\pm$ tenemos

i) $U_q(t)D^q_\pm = U_q(t)W_\pm D^0_+ = W_\pm U_0(t)D^0_\pm \subset W_\pm D^0_\pm = D^q_\pm$

ii) $\bigcap U_q D^q_\pm = \bigcap U_q W_\pm D^0_\pm = \bigcap W_\pm U_0 D^0_\pm = W_\pm \bigcap U_0 D^0_\pm = W_\pm\{0\} = \{0\}.\blacksquare$

El resto de esta sección lo dedicaremos a probar que $D^q_\pm$ satisfacen el tercer axioma de Lax-Phillips. Es decir, probaremos que

$$\overline{\bigcup U_q(t)D^q_+}^{\|\ \|_q} = \mathcal{H}'_q = \overline{\bigcup U_q(t)D^q_-}^{\|\ \|_q}. \tag{3.3}$$

Supongamos que (3.3) no se cumple, entonces existe $f \in \mathcal{H}'_q$ distinto de cero tal que $f$ es perpendicular (respecto a $E_q$) a $\bigcup U_q(t)D^q_+$ para toda $t$. Entonces $\langle f, U_q(t)g\rangle_q$

$= 0$, para toda $t$ y para toda $g \in D_+^q$, luego $\langle U_q(t)f, g\rangle_q = 0$, para toda $t$ y para toda $g \in D_+^q$, por lo que $\langle \frac{U_q(t+\varepsilon)f - U_q(t)f}{\varepsilon}, g\rangle_q = 0$, para toda $t$, para toda $g \in D_+^q$ y para toda $\varepsilon$, entonces $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\langle \frac{U_q(t+\varepsilon)f - U_q(t)f}{\varepsilon}, g\rangle_q = 0$, pero $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\langle \frac{U_q(t+\varepsilon)f - U_q(t)f}{\varepsilon}, g\rangle_q = \langle \frac{\partial}{\partial t} U_q(t)f, g\rangle_q = \langle A_q U_q(t)f, g\rangle_q = \langle U_q(t)A_q f, g\rangle_q$, por lo que tenemos $0 = \langle U_q(t)A_q f, g\rangle_q$ para toda $t$ y para toda $g \in D_+^q$, luego $0 = \langle A_q f, U_q(t)g\rangle_q$ para toda $t$ y toda $g \in D_+^q$, entonces $A_q f$ también es perpendicular a $\bigcup U_q(t)D_+^q$. Además $A_q f \in D(A_0)$, ya que $A_q^2 f$ y $A_q f \in \mathcal{H}_q$ entonces $A_q f \in D(A_q) \subset D(A_0)$.

En el caso de dimensión impar probaremos que $A_q f = 0$, y como estamos suponiendo que $A_q$ no tiene espectro puntual en $\mathcal{H}_q'$, se sigue que $f = 0$.

Para ello, descompongamos $A_q f$ en sus partes entrante y saliente.

Sea $T\colon \mathcal{H}_0 \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, S^{n-1})$ la representación de la translación

$$T(f_0, f_1) = -D_s^{\frac{n+1}{2}} R f_0 + D_s^{\frac{n-1}{2}} R f_1,$$

donde $R$ es la transformada de Radon $R(s,w) = \int_{\langle x,w\rangle = s} f(x)dH(x)$.

Entonces $T$ es una isometría tal que

$$\begin{aligned} TU_0(t)f &= k(s-t) \\ TA_0 &= \partial_s T. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Consideremos $TA_q f$ y elijamos $\varphi$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tales que

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & s > \frac{1}{2} \\ 0 & s < -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \psi = 1 - \varphi. \tag{3.5}$$

Denotemos con $g$ y $h$ a los elementos cuyos representantes son $\varphi T A_q f$ y $\psi T A_q f$ respectivamente

$$\begin{aligned} Tg &= \varphi T A_q f \\ Th &= \psi T A_q f. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En este caso $A_q f = g + h$.

**III.3.2 LEMA.** Sean $g$ y $h$ como en (3.6), entonces $g \in D_+^0$, $A_q g \in \mathcal{H}_q'$, $h \in D_-^0$ y $A_q h \in \mathcal{H}_q'$.

**Demostración.** Como $TU_0(t)g(x) = k(s-t) = 0$ si $s - t < -\frac{1}{2}$ y $U_0(t)g(x) = 0$ para $|x| < t - \frac{1}{2}$, obtenemos que $g \in D_+^0$. De igual forma se demuestra que $h \in D_-^0$.

Por otro lado, como $TA_0 = \partial_s T$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|T(A_0 g)\|_{L^2} &= \|\partial_s(\varphi T A_q f)\|_{L^2} \\
&= \|\varphi_s T A_q f + \varphi \partial_s T A_q f\|_{L^2} \\
&\leq \|\varphi_s T A_q f\|_{L^2} + \|\varphi \partial_s T A_q f\|_{L^2} \\
&\overset{(a)}{\leq} c\|T A_q f\|_{L^2} + \|\varphi T A_0 A_q f\|_{L^2} \\
&\leq c\|T A_q f\|_{L^2} + c'\|T A_0 A_q f\|_{L^2}
\end{aligned}$$

la desigualdad (a) se da porque $\varphi_s \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, y la última se da porque $\varphi$ está acotada.

Entonces

$$\begin{aligned}
\|A_0 g\|_0 = \|T A_0 g\|_{L^2} &\leq c\|T A_q f\|_{L^2} + c'\|T A_0 A_q f\|_{L^2} \\
&\leq c\|A_q f\|_0 + c'\|A_0 A_q f\|_0,
\end{aligned}$$

pero por hipótesis $A_q f \in \mathcal{H}_0$, luego $\|A_q g\|_0 < \infty$ entonces $g \in D(A_0)$, pero como $D(A_0) = D(\overline{A_q})$ entonces $\|A_q g\|_q < \infty$. De la misma manera se prueba que $A_q h \in \mathcal{H}_q'$.■

Ahora probemos que $\langle A_q f, g\rangle_0 = 0$.

**III.3.3 LEMA.**

$$\begin{aligned}
\langle A_q f, g\rangle_0 &= \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle U_0(t) A_q f, U_0(t) g\rangle_0 \\
&\overset{(a)}{=} \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle U_q(t) A_q f, U_0(t) g\rangle_0 \\
&\overset{(b)}{=} \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle U_q(t) A_q f, U_0(t) g\rangle_q \\
&\overset{(c)}{=} \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle U_q(t) A_q f, W_+ U_0(t) g\rangle_q \\
&\overset{(d)}{=} 0.
\end{aligned}$$

**Demostración.** Como $g \in D_+^0$, tenemos que $W_+ U_0(t) g \in D_+^q$, y por hipótesis $U_q(t) A_q f$ es $E_q$-ortogonal a $D_+^q$, entonces tenemos la igualdad (d).

Utilizando la propiedad intercambiable de $W_\pm$ obtenemos (c)

$$\begin{aligned}
\langle U_q(t) A_q f, W_+ U_0(t) g\rangle_q &= \langle U_q(t) A_q f, U_q(t) W_+ g\rangle_q \\
&= \langle A_q f, W_+ g\rangle_q \\
&= \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle A_q f, U_q(-t) U_0(t) g\rangle_q \\
&= \lim_{t\longrightarrow\infty} \langle U_q(t) A_q f, U_0(t) g\rangle_q.
\end{aligned}$$

Ahora probemos (b):

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \langle U_q(t) A_q f, U_0(t) g\rangle_q - \langle U_q(t) A_q f, U_0(t) g\rangle_0$$
$$= \lim_{t\longrightarrow\infty} \int q(x) (U_q(t) A_q f)_o \overline{(U_0(t) g)_o}\, dx.$$

donde ( $)_o$ significa la primera componente.

Ahora usando la desigualdad de Hölder y (37)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\longrightarrow\infty}\int q(x)(U_q(t)A_qf)_o\overline{(U_0(t)g)_o}\,dx\\
&\leq \lim_{t\longrightarrow\infty}\left(\int q(x)|(U_q(t)A_qf)_o|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int q(x)|(U_0(t)g)_o|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq ||A_qf||_q \lim_{t\longrightarrow\infty}\left(\int q(x)|(U_0(t)g)_o|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=0.
\end{aligned}
$$

Ahora probemos (a):

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\longrightarrow\infty}\langle U_0(t)A_qf,U_0(t)g\rangle_0-\lim_{t\longrightarrow\infty}\langle U_q(t)A_qf,U_0(t)g\rangle_0=0\\
\Longleftrightarrow&\lim_{t\longrightarrow\infty}\langle U_q(t)A_qf-U_0(t)A_qf,U_0(t)g\rangle_0=0\\
\Longleftrightarrow&\lim_{t\longrightarrow\infty}||U_q(t)A_qf-U_0(t)A_qf||_0=0
\end{aligned}
$$

por el lema 3.4 esto es cierto.■

**III.3.4 LEMA.** Sea $f\in\mathcal{H}_q'\cap D(A_q^j)$, $j=0,1,2$, entonces existe una sucesión $\{t_n\}$ ($t_n\longrightarrow\infty$) tal que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}||U_q(t)A_qf-U_0(t)A_qf||_0=0. \tag{3.7}$$

**Demostración.** Por el principio de Duhamel (véase Courant and Hilbert [1] vol. II pág 202)

$$U_q(t)f-U_0(t)f=\int_0^t\left(U_0(t-s)\begin{pmatrix}0&0\\q(x)&0\end{pmatrix}U_q(s)f\right)ds \tag{3.8}$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
||U_q(t)A_qf-U_0(t)A_qf||_0&=\left\|\int_0^t\left(U_0(t-s)\begin{pmatrix}0&0\\-q(x)&0\end{pmatrix}U_q(s)A_qf\right)ds\right\|_0\\
&\leq\int_0^t\left\|\left(U_0(t-s)\begin{pmatrix}0&0\\-q(x)&0\end{pmatrix}U_q(s)A_qf\right)\right\|_0ds\\
&=\int_0^t\left\|\left(U_0(t-s)\begin{pmatrix}0&0\\-q(x)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\\Delta+q&0\end{pmatrix}U_q(s)f\right)\right\|_0ds\\
&=\int_0^t\left\|\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&-q(x)\end{pmatrix}U_q(s)f\right)\right\|_0ds\\
&\leq\int_0^t||(0,-q(x)v_s(x,s))||_0ds,
\end{aligned}
$$

donde $v$ es solución de $\Box_q$ y $v(x,s) = U_q(s)f$.

Por otro lado

$$\int_0^t \|(0, -q(x)v_s(x,s))\|_0 ds \leq |t| \max_{|s|<|t|} \|(0, -q(x)v_s(x,s))\|_0 ds$$
$$= |t| \max_{|s|<|t|} \int |q(x)v_s(x,s)|^2 dx.$$

Ahora dividiremos la prueba en dos partes:

i) Cuando $|x| > R$ y

ii) cuando $|x| \leq R$

donde $R > |t|$ y $|q(x)| \leq \frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}$ si $|x| > R$.

En el caso (i):

$$\begin{aligned}
|t| \max_{|s|<|t|} \int_{|x|>R} |q(x)v_s(x,s)|^2\, dx &\leq |t| \max_{|s|<|t|} \int_{|x|>R} \frac{|v_s(x,s)|^2}{|x|^{3+2\varepsilon}}\, dx \\
&\leq |t| \max_{|s|<|t|} \frac{1}{|R|^{3+2\varepsilon}} \int |v_s(x,s)|^2\, dx \\
&\leq |t| \max_{|s|<|t|} \frac{\|U_q(s)f\|_0}{|R|^{3+2\varepsilon}} \\
&\leq \frac{|t|c}{|R|^{3+2\varepsilon}} \\
&\leq \frac{c}{|t|^{2+2\varepsilon}}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \|U_q(t)A_q f - U_0(t)A_q f\|_0^{|x|>R} \leq \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{c}{|t|^{2+2\varepsilon}} = 0.$$

Probemos el caso (ii). Usando las desigualdades de Hölder y Sobolev tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<R} |q(x)v_s(x,s)|^2\, dx &\leq \left(\int_{|x|<R} |q(x)|^n\, dx\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{|x|<R} |\nabla v_s(x,s)|^2\, dx\right)^2 \\
&\leq c\|A_q U_q(s)f\|_0^{|x|<R}
\end{aligned}$$

y por el lema 3.5 existe una sucesión $t_n$ tal que

$$\lim_{t_n\longrightarrow\infty} \|A_q U_q(t_n)f\|_0^{|x|<R} = 0. \blacksquare \tag{3.9}$$

**III.3.5 LEMA.** Si $f \in \mathcal{H}'_q \cap D(A_q^j)$, $j = 0,1,2$. Entonces existe una sucesión $t_n \longrightarrow \infty$ tal que para $R > 0$

$$\lim_{t_n \longrightarrow \infty} \|A_q U_q(t_n) f\|_0^{|x|<R} = 0. \tag{3.10}$$

**Demostración.** Como $f$, $A_q f$ y $A_q^2 f \in \mathcal{H}_q$, entonces $\|f\|_q$, $\|A_q f\|_q$ y $\|A_q^2 f\|_q$ son finitas, por lo que $\|U_q(t)A_q f\|_q$ y $\|U_q(t)A_q^2 f\|_q = \|A_q U_q(t) A_q f\|_q$ son finitas, entonces $U_q(t)A_q f \in D(\overline{A_q}) = D(A_0)$. Como $U_q(t)A_q f \in D(A_0)$ tenemos que $\|U_q(t)A_q f\|_0 < \infty$ y $\|U_0(s)U_q(t)A_q f\|_0 < \infty$ para cualquier $s \in I\!R$.

Supongamos que existe una constante $M > 0$ tal que $\|U_q(t_n)A_q f\|_0^{|x|<R} > M$, para toda $n \in I\!N$. Sea $0 < \varepsilon < M$. Como $D_+^0$ es denso en $\mathcal{H}_0$ y $U_q(t_n)A_q f \in D(A_0)$, existen $h_1$ y $h_2 \in D_+^0$ tales que $\|U_q(t_n)A_q f - h_1\|_0 < \varepsilon/2$ y $\|U_0(-s)U_q(t_n)A_q f - h_2\|_0 < \varepsilon/2$, pero

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \|U_q(t_n)A_q f - h_1\|_0 + \|U_0(-s)U_q(t_n)A_q f - h_2\|_0 \\
&= \|U_q(t_n)A_q f - h_1\|_0 + \|U_q(t_n)A_q f - U_0(s)h_2\|_0 \\
&= \|U_q(t_n)A_q f - h_1\|_0^{|x|<R} + \|U_q(t_n)A_q f - h_1\|_0^{|x|>R} \\
&\quad + \|U_q(t_n)A_q f - U_0(s)h_2\|_0^{|x|<R} + \|U_q(t_n)A_q f - U_0(s)h_2\|_0^{|x|>R} \\
&= \|U_q(t_n)A_q f - h_1\|_0^{|x|<R} + \|U_q(t_n)A_q f - h_1\|_0^{|x|>R} \\
&\quad + \|U_q(t_n)A_q f\|_0^{|x|<R} + \|U_q(t_n)A_q f - U_0(s)h_2\|_0^{|x|>R} \qquad \text{si } s > R \\
&\geq \|U_q(t_n)A_q f - h_1\|_0^{|x|>R} + \|U_q(t_n)A_q f\|_0^{|x|<R} + \|U_q(t_n)A_q f - U_0(s)h_2\|_0^{|x|>R} \\
&\geq \|U_q(t_n)A_q f\|_0^{|x|<R} + \|2U_q(t_n)A_q f - U_0(s)h_2 - h_1\|_0^{|x|>R} \\
&> M + \|2U_q(t_n)A_q f - U_0(s)h_2 - h_1\|_0^{|x|>R}
\end{aligned}$$

entonces $0 > \varepsilon - M > \|U_q(t_n)A_q f - h\|_0^{|x|>R}$, pero esto es una contradicción al hecho de que $\| \ \|_0^{|x|>R}$ es la integral de funciones positivas, luego existe una sucesión $t_n$ tal que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|U_q(t_n)A_q f\|_0^{|x|<R} = 0.$■

## El Caso de Dimensión Par

Para probar (3.3) en el caso de dimensión par empezaremos, igual que en el otro caso, suponiendo que es falso y obteniendo $f$ distinto de cero en $\mathcal{H}'_q \cap D(A_q^j)$ tal que $U(t)f$ es $E_q$-ortogonal a $D_+^q$ para toda $t$. Otra vez queremos mostrar que $A_q f = 0$ para $f \in D(A_q^j)$.

El problema de la dimensión par es que $D_-$ y $D_+$ no descomponen a $\mathcal{H}_0$. Sin embargo $D_- \cap D_+ = \{0\}$ y $D_- + D_+$ es denso en $\mathcal{H}_0$.

Para evitar esta dificultad, usaremos otra técnica de Enss, nos aproximaremos a $A_q f$ con datos de la forma $w(A_q)A_q f$ definida como sigue:

Elijamos $\omega \in C_0^\infty(I\!R)$ que se anule cerca de $\sigma = 0$. Denotemos con $\Omega$ la transformada de Fourier de $\omega$.

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\sigma t}\omega(\sigma)\, d\sigma,$$

definamos

$$w(A) = \int \Omega(t)U(t)\, dt. \tag{3.11}$$

Como en el caso de dimensión impar usaremos los lemas 3.4 y 3.5 para elegir una sucesión $\{t_m\}$ con $t_m \longrightarrow \infty$ tal que para $f_m = U(t_m)$ y $|s|, |t| \leq m$

$$||U_q(t+s)A_q f_m - U_0(t)U_q(s)A_q f_m||_0 \leq \frac{1}{m^\gamma}, \tag{3.12}$$

donde $\gamma > 1$.

**III.3.6 LEMA.** i) $\lim_{m\longrightarrow\infty} ||\omega(A_q)A_q f_m - \omega(A_0)A_q f_m||_0 = 0$ y
ii) $\lim_{m\longrightarrow\infty} ||U_q(\pm m)\omega(A_q)A_q f_m - U_0(\pm m)\omega(A_0)A_q f_m||_0 = 0.$

**Demostración.** Por (3.11) tenemos

$$\omega(A_q)A_q f_m - \omega(A_0)A_q f_m = \int_{-\infty}^{\infty}\Omega(t)\left(U_q(t)A_q f_m - U_0(t)A_q f_m\right) dt$$

y

$$\begin{aligned}
&U_q(\pm m)\omega(A_q)A_q f_m - U_0(\pm m)\omega(A_0)A_q f_m\\
=&U_q(\pm m)\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(t)U_q(t)A_q f_m\, dt - U_0(\pm m)\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(t)U_q(t)A_q f_m\, dt\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(t)\left[U_q(t\pm m)A_q f_m - U_0(\pm m)U_q(t)A_q f_m\right] dt.
\end{aligned}$$

Como $||A_q f||_0 \leq c||f||_q + ||A_q f||_q$, entonces

$$\begin{aligned}
||U_q(t\pm m)A_q f_m||_0 &= ||A_q U_q(t\pm m)f_m||_0\\
&\leq c((||f||_q + ||A_q f||_q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||U_0(\pm m)U_q(t)A_q f_m||_0 &= ||U_q(t)A_q f_m||_0\\
&\leq c(||f||_q + ||A_q f||_q).
\end{aligned}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}
&||\omega(A_q)A_q f_m - \omega(A_0)A_q f_m||_0\\
\leq&\int_{-m}^{m}|\Omega(t)|\, ||U_q(t)A_q f_m - U_0(t)A_q f_m||_0 dt + \int_{|t|>m}|\Omega(t)|dt
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
&||U_q(\pm m)\omega(A_q)A_q f_m - U_0(\pm m)\omega(A_0)A_q f_m||_0 \\
&\le \int_{-m}^{m} |\Omega(t)|\, ||U_q(\pm m)U_q(t)A_q f_m - U_0(\pm m)U_q(t)A_q f_m||_0 dt + c\int_{|t|>m} |\Omega(t)| dt.
\end{aligned}
$$

Como $|\Omega(t)|$ es acotado y $\gamma > 1$ la afirmación del lema se sigue directamente de (3.11).■

El lema muestra que $\omega(A_0)A_q f_m$ es una buena aproximación de $\omega(A_q)A_q f_m$. A continuación descompondremos $w(A_0)A_q f_m$ en sus partes entrante y saliente. Para esto necesitamos recordar algunas propiedades de la representación de la translación saliente $T_+$ para la ecuación de onda no perturbada en epacios de dimensión par (para las pruebas remitimos al lector a Lax-Phillips [6]).

En particular $[U_0(t)f]$ puede escribirse como

$$
u(x,t) = \int_{S^{2n-1}} m(x\cdot\theta,\theta)\, d\theta, \tag{3.13}
$$

donde $m(s,\theta) = c\partial^{n-\frac{3}{2}}T_+ f$ y $c = \frac{i^{n-1}}{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}$. El símbolo $\partial$ denota la derivada parcial respecto a $s$, y usaremos el símbolo $\Im$ para la semiderivada $\partial^{\frac{1}{2}}$

$$
\Im(\sigma) = \begin{cases} \sigma^{\frac{1}{2}} & \sigma > 0 \\ i|\sigma|^{\frac{1}{2}} & \sigma < 0, \end{cases}
$$

en otras palabras $\partial^{\frac{1}{2}}k = F^{-1}\Im Fk$ donde $F$ es la transformada de Fourier en una dimensión

$$
[Fk](\sigma,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\sigma s}k(s,\omega)\, ds.
$$

Notemos que $\partial^{\frac{1}{2}}$ es un operador convolución el cual deja invariante al conjunto de funciones con soporte en $\mathbb{R}^+$. Obviamente $(\partial^{\frac{1}{2}})^2 = \partial$.

Ahora escribamos

$$
\omega(A_q)A_q f_m = j_m + e_m \tag{3.14}
$$

donde $j_m = w(A_q)A_q f_m - \omega(A_0)A_q f_m$ y $e_m = \omega(A_0)A_q f_m$.

El operador $\omega(A_0)$ es acotado en $\mathcal{H}_0$, entonces

$$
||e_m||_0 = c||A_q f_m||_0 \le c'(||f||_q + ||A_q f||_q). \tag{3.15}
$$

Hagamos la descomposición de $e_m$ en sus partes entrante y saliente poniendo

$$
k_m = T_+ e_m. \tag{3.16}
$$

Si denotamos con $\ell_m$ a $T_+Af_m$, entonces por (3.11) se sigue que

$$k_m(s) = \int \Omega(t)\ell_m(s-t)dt.$$

Entonces el representante espectral saliente de $e_m$ es

$$Fk_m = \omega(\sigma)F\ell_m.$$

Por lo tanto $Fk_m$ se anula donde $\omega$ lo hace, digamos $|\sigma| < \delta$ y vemos que para cualquier $\nu \in I\!R$

$$||\sigma^\nu Fk_m|| \le c(\omega)|\frac{1}{\delta}|^{|\nu|}||k_m|| = c(\omega)|\frac{1}{\delta}|^{|\nu|}||e_m||_0. \tag{3.17}$$

Utilizando (3.13) y (3.15) tenemos

$$||\sigma^\nu Fk_m|| \le c(\omega)|\frac{1}{\delta}|^{|\nu|}(||f|| + ||A_q f||).$$

En particular cualquier derivada de cualquier orden o su inversa define un operador acotado en $k_m$ con cota independiente de $m$.

Utilizando las funciones $\varphi$ y $\psi$ de (3.5) definamos las partes entrante y saliente de $e_m$ como

$$\begin{aligned} T_+h_m &= \partial^{\frac{1}{2}}\psi\partial^{\frac{-1}{2}}k_m \\ T_+g_m &= \partial^{\frac{1}{2}}\varphi\partial^{\frac{-1}{2}}k_m \end{aligned} \tag{3.18}$$

respectivamente.

Como $\varphi + \psi = 1$ tenemos

$$e_m = g_m + h_m.$$

Aplicando (3.18) $||\psi\partial^{\frac{-1}{2}}k_m||$, $||\varphi\partial^{\frac{1}{2}}k_m||$ y $||\varphi\partial^{\frac{3}{2}}k_m||$ son acotadas uniformemente en $m$; y por lo tanto

$$\begin{aligned} ||\partial\varphi\partial^{\frac{-1}{2}}k_m|| &= ||\varphi\partial^{\frac{1}{2}}k_m + \varphi'\partial^{\frac{-1}{2}}k_m|| \\ &\le ||\partial^{\frac{1}{2}}k_m|| + c||\partial^{\frac{-1}{2}}k_m||, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\partial^2\varphi\partial^{\frac{1}{2}}k_m|| &= ||\varphi\partial^{\frac{3}{2}}k_m + 2\varphi'\partial^{\frac{1}{2}}k_m + \varphi''\partial^{\frac{-1}{2}}k_m|| \\ &\le ||\partial^{\frac{3}{2}}k_m|| + c||\partial^{\frac{1}{2}}k_m|| + c||\partial^{\frac{-1}{2}}k_m||. \end{aligned}$$

Por otro lado una simple interpolación nos da

$$\begin{aligned} ||\partial^{\frac{1}{2}}\varphi\partial^{\frac{-1}{2}}k_m &\le ||\varphi\partial^{\frac{-1}{2}}k_m|| + ||\partial\varphi\partial^{\frac{-1}{2}}k_m|| \\ ||\partial^{\frac{3}{2}}\varphi\partial^{\frac{-1}{2}}k_m &\le ||\partial\varphi\partial^{\frac{-1}{2}}k_m|| + ||\partial^2\varphi\partial^{\frac{-1}{2}}k_m||. \end{aligned}$$

Combinando las estimaciones anteriores vemos que

$$||g_m||, ||A_0 g_m||, ||h_m||, ||A_0 h_m|| \leq c$$

uniformenmente en $m$.

También notemos que

$$\operatorname{supp} \partial^{\frac{n-3}{2}} T_+ g_m = \operatorname{supp} \partial^{\frac{n-2}{2}} \varphi \partial^{\frac{1}{2}} k_m \subset \mathbb{R}^+ - \frac{1}{2}$$
$$\operatorname{supp} \partial^{\frac{n-3}{2}} T_+ h_m = \operatorname{supp} \partial^{\frac{n-2}{2}} \psi \partial^{\frac{1}{2}} k_m \subset \mathbb{R}^+ + \frac{1}{2}.$$

Se sigue que $U_0(m)g_m$ y $U_0(-m)h_m$ se anulan para $|x| < n - \frac{1}{2}$. Ahora podemos probar

(a) $\langle \omega(A_q) A_q f_m, g_m \rangle_0 \longrightarrow 0$
(b) $\langle \omega(A_q) A_q f_m, h_m \rangle_0 \longrightarrow 0$
(c) $\langle \omega(A_q) A_q f_m, j_m \rangle_0 \longrightarrow 0.$

Notemos que

$$||U_q(t)\omega(A_q)A_q f_m||_0 \leq c(||\omega(A_q)f||_q + ||A_q\omega(A_q)f||_q).$$

Por lo tanto (c) se concluye directamente del lema 3.5. Las pruebas de (a) y (b) son esencialmente las mismas de (a) y (b) del caso de dimensión impar.

Finalmente (a), (b) y (c) juntas implican

$$||\omega(A_q)A_q f_m||_0 \longrightarrow 0$$

luego, como antes $||\omega(A_q)A_q f||_q = 0$ y por lo tanto $\omega(A_q)A_q f = 0$ como se quería.■

## III.4 EL OPERADOR DE DISPERSIÓN

Sea $f \in D_+^0$ definamos

$$T_+ W_+ f = Tf$$

y extendamos por continuidad para todo $\mathcal{H}_0$. Analogamente lo hacemos para $T_- W_-$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_0 & \xrightarrow{W_\pm} & \mathcal{H}'_q \\ & T\searrow \quad \swarrow T_+ & \\ & L^2. & \end{array}$$

El operador de dispersión está dado por

$$\begin{aligned} S: L^2 &\longrightarrow L^2 \\ T_- f &\longmapsto T_+ f. \end{aligned}$$

También podemos definir el operador de dispersión en $\mathcal{H}_0$ como:

$$W_+^{-1} W_- = T^{-1} T_+ T_-^{-1} T.$$

Entonces hemos dado una teoría de dispersión para la ecuación de onda con perturbaciones $q(x)$, con $|q(x)| \leq \frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}$ cuando $|x| \longrightarrow \infty$, $q \in L^n_{loc}$, y para perturbaciones $Q(x)$, con $Q(x) = \dfrac{\varphi(x)}{|x|^{2-\frac{n}{s}}}$ cuando $|x| \longrightarrow \infty$, $\varphi \in L^s(\mathbb{R}^n)$, $s > n > 2$.

Ambos casos son más generales que el caso en que la perturbación es de orden mayor que 2.

# APENDICE

## A.1 DERIVADAS DÉBILES

Si queremos tener una teoria simple y general de ecuaciones diferenciales parciales, el cálculo clásico para funciones de varias variables es inadecuado. Por ejemplo, si pensamos en las dos ecuaciones diferenciales parciales $\partial^2 u/\partial x\partial y = 0$ y $\partial^2 u/\partial y\partial x = 0$ deberían ser equivalentes, la primera es satisfecha por cualquier función que sólo dependa de $x$ mientras que la segunda no siempre tiene sentido para tales funciones. Esto es poco natural e indica la necesidad de sustituir a las funciones por nuevos objetos, que llamaremos distribuciones, tales que la diferenciación sea siempre posible. Al hacer esto es importante conservar tantas propiedades de los espacios de funciones como sea posible.

Para motivar las definiciones formales, primero notemos que el dominio de definición de un operador diferencial puede ser extendido considerándolo como un operador adjunto. Por ejemplo, la ecuación $\partial^2 u/\partial y\partial x = f$ implica que $u$ es dos veces diferenciable, y que

$$\int\int u\partial^2\varphi/\partial x\partial y\, dx\, dy = \int\int f\varphi\, dx\, dy$$

para toda función $\varphi$ dos veces diferenciable que se anula fuera de un conjunto acotado. De hecho, la igualdad anterior se sigue de inmediato si integramos por partes el lado izquierdo, cambiando las derivadas de $\varphi$ a $u$. También es fácil ver que para cualquier $u$ dada, esa igualdad no es válida para una una función $f$ que tan sólo sea continua (vease sección 2). Esto hace natural definir que $\partial^2 u/\partial x\partial y = f$ en el *sentido débil* si la igualdad de arriba se mantiene. Obviamente las ecuaciones $\partial^2 u/\partial x\partial y = f$ y $\partial^2 u/\partial y\partial x = f$ se vuelven equivalentes en el sentido débil.

Además podemos dar otro paso y considerar la forma lineal

$$\varphi \longmapsto \int\int u\partial^2\varphi/\partial x\partial y\, dx\, dy$$

como una representación para $u\partial^2/\partial x\partial y$ aún si no existe una función continua $f$ que pueda ser escrita de la forma $\int\int f\varphi\, dx\, dy$. Para poder estudiar los operadores diferenciales de cualquier orden considerámos formas lineales en el conunto de funciones que se anulan fuera de un conjunto acotado y que tengan derivadas de todos lo órdenes. Estudiaremos esas funciones en la siguiente sección antes de dar una definición precisa de distribuciones.

## A.2 FUNCIONES PRUEBA

Sea $\Omega$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, y $u$ una función continua en $\Omega$. Definimos el *soporte de $u$* (en $\Omega$), denotado con supp $u$; a la cerradura de $\{x \mid x \in \Omega,\ u(x) \neq 0\}$. El soporte es el subconjunto cerrado más pequeño de $\Omega$, fuera del cual se anula $u$.

Denotaremos con $C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ al conjunto de todas las funciones u definidas en $\Omega$, cuyas derivadas parciales de orden menor o igual a $k$ existen y son continuas. Denotaremos con $C_0^k(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones en $C^k(\Omega)$ con soporte compacto en $\Omega$.

**A.2.1 TEOREMA.** Se puede identificar a $C_0^k(\Omega)$ con el conjunto de todas las $\varphi \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ con soportes contenidos en $\Omega$, i.e., $C_0^k(\Omega) = \{\ \varphi \mid \varphi \in C_0^k(\mathbb{R}^n),\ \text{supp}\ \varphi \subset \Omega\ \}$.

**Demostración.** Si $\varphi \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ y supp $\varphi \subset \Omega$ entonces supp $\varphi$ es un compacto contenido en $\Omega$, por lo que $\varphi \in C_0^k(\Omega)$.

Inversamente si $\varphi \in C_0^k(\Omega)$, definimos

$$\psi_\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

$\psi$ es continua y tiene derivadas parciales continuas de orden menor o igual que $k$, ya que los únicos puntos donde habría problema son los puntos de la frontera de $\Omega$, pero está contenida en $\Omega^c$,

Los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ son llamados *funciones prueba* en $\Omega$. Un ejemplo clásico de función prueba en $\mathbb{R}^n$ es:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{1/\,|x|^2-1} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1, \end{cases}$$

donde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

De hecho $f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$ es una función en $C^\infty(\mathbb{R})$ ya que todas sus derivadas existen y convergen a 0 cuando $t \longrightarrow 0$.

Sea $\psi(x) = \varphi(x)/c$, $x \in \mathbb{R}^n$ donde $c = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx$. Como $|x|^2 < 1$, luego, $\frac{1}{|x|^2-1} < 0$ y además como $e^t$ es covexa, $e^{1/\,|x|^2-1} \leq e^0 = 1$, por lo que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = \int_{|x|<1} \varphi(x)dx = \int_{|x|<1} e^{1/\,|x|^2-1}dx \leq \int_{|x|<1} 1dx = Vol(\,|x| < 1) = n(n+1)\pi$, entonces $c = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx < \infty$.

La función $\psi$ tiene las siguientes propiedades:

(i) $\psi(x) \geq 0$
(ii) $\psi(x) = \psi(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
(iii) $\psi \in C_0^\infty$
(iv) $\int \psi(x)dx = 1$
(v) $\text{supp}\,\psi = \overline{B_1(0)} = \{x \mid |x| \leq 1\}$

Iniciando con funciones que cumplan con las propiedades anteriores se pueden generar nuevas funciones prueba formando la convolución con una función integrable $u$.

$$u_\varepsilon(x) = \int u(x - \varepsilon y)\varphi(y)dy = \varepsilon^n \int u(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy. \tag{2.1}$$

La igualdad es dada por el cambio de variable $z = x - \varepsilon y$ cuyo jacobiano es el valor absoluto del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon. \end{pmatrix}$$

De hecho probaremos

**A.2.2 TEOREMA.** Sea $u$ una función integrable que se anula fuera de un subconjunto compacto $K$ de $\Omega$, entonces

(i) Si $\delta$ es la distancia de $K$ a $\Omega^c$ y $\varepsilon < \delta$, entonces $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$.
(ii) Si $u$ es continua, $u_\varepsilon \longrightarrow u$ uniformemente cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$
(iii) Si $u \in Lp$, $1 \leq p < \infty$, entonces $u_\varepsilon \longrightarrow u$ en norma $p$.

**Demostración.** La continuidad de $u_\varepsilon$ se sigue de la segunda igualdad en (2.1) y la continuidad de $\varphi$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}x &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\int u(y)\varphi(\frac{(x_1,\cdots,x_i+h,\cdots,x_n)-y}{\varepsilon})dy-\int u(y)\varphi(\frac{(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-y}{\varepsilon})dy}{h}\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int u(y)\varphi\left(\frac{(x_1,\cdots,x_i+h,\cdots,x_n)-y}{\varepsilon}\right)-u(y)\varphi\left(\frac{(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-y}{\varepsilon}\right)dy\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int u(y)\left[\varphi\left(\frac{(x_1,\cdots,x_i+h,\cdots,x_n)-y}{\varepsilon}\right)-\varphi\left(\frac{(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-y}{\varepsilon}\right)\right]dy\\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\int u(y)\left(\frac{1}{h}\right)\left[\varphi\left(\frac{(x_1,\cdots,x_i+h,\cdots,x_n)-y}{\varepsilon}\right)-\varphi\left(\frac{(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-y}{\varepsilon}\right)\right]dy\\
&= \int\lim_{h\longrightarrow 0}u(y)\left(\frac{1}{h}\right)\left[\varphi\left(\frac{x_1,\cdots,x_i+h,\cdots,x_n)-y}{\varepsilon}\right)-\varphi\left(\frac{(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-y}{\varepsilon}\right)\right]dy\\
&= \int u(y)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy
\end{aligned}
$$

y de esta manera podemos derivar cualquier número de veces respecto a $x_i$ para $i\in\{1,\ldots,n\}$, luego $u_\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega)$. Ahora si $u_\varepsilon(x)\neq 0$ entonces $u(x-\varepsilon y)\neq 0$ para alguna $|y|\leq 1$, tenemos que $u(x-\varepsilon y)\neq 0$, es decir, $x-\varepsilon y\in K$, así que el soporte de $u_\varepsilon$ es un subconjunto cerrado del conjunto de puntos con distancia a lo más $\varepsilon$ de $K$, y éste es un subconjunto compacto de $\Omega$ cuando $\varepsilon<\delta$. Por lo tanto $u_\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega)$.

(ii) Ahora supongamos que $u$ también es continua. Como $\int\varphi dy=1$, entonces $u(x)=u(x)\int\varphi(y)dy=\int u(x)\varphi(y)dy$, luego podemos escribir

$$u_\varepsilon(x)-u(x)=\int(u(x-\varepsilon y)-u(x))\varphi(y)dy.$$

Si $\varepsilon\longrightarrow 0$ por la continuidad uniforme de $u$ tenemos que $u_\varepsilon(x)\longrightarrow u(x)$ uniformemente.

(iii) Ahora sea $u\in L_p$. Como $0\leq\varphi\geq 1$ y $\int\varphi dx=1$, entonces $\varphi\in L_q$ y $\int|\varphi|^q\leq\int\varphi=1$, además la desigualdad de Minkowski nos da:

$$|u_\varepsilon(x)|=\left|\int u(x-\varepsilon y)\varphi(y)dy\right|=||u(x-\varepsilon y)||_p||\varphi||_q\leq||u(x-\varepsilon y)||.$$

Calculando $||u(x-\varepsilon y)||_p$ tenemos que:

$$||u(x-\varepsilon y)||_p=\left(\int|(x-\varepsilon y)|^p dy\right)^{1/p}$$

si hacemos el cambio de variable $z=x-\varepsilon y$, el jacobiano del cambio de variable es $\varepsilon^n$ como ya habíamos visto antes, luego

$$\left(\int|(x-\varepsilon y)|^p dy\right)^{1/p}=\left(\int|u(z)|^p\varepsilon^n dz\right)^{1/p}=\varepsilon^n\left(\int|u(z)|^p dz\right)^{1/p}=\varepsilon^n||u||_p.$$

Entonces

$$||u_\varepsilon||_p=\left(\int|u_\varepsilon|^p\right)^{1/p}\leq\left(\int\varepsilon^n||u||_p\right)^{1/p}=\varepsilon^n||u||_p Vol\,B_1(0),$$

por lo que si $\varepsilon<1/\sqrt[n]{Vol\,B_1(0)}$ entonces $||u_\varepsilon||_p\leq||u||_p$.

Para cualquier $\eta>0$ podemos encontrar $v\in C_0^0$ (función continua con soporte compacto) tal que $||u-v||_p<\eta$, y además $||u_\varepsilon-v_\varepsilon||_p<\eta$. Por tanto (por un teorema de convergencia uniforme),

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}||u_\varepsilon-u||_p\leq\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}||u_\varepsilon-v_\varepsilon||_p+||u-v||_p+\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}||v_\varepsilon-v||<2\eta,$$

lo cual prueba que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ en norma $L_p$.■

El teorema anterior no funciona para $p = \infty$, veamos un contraejemplo. Sea $K$ un compacto tal que $\int_K \varphi < 1$ definamos $u(x) = 1$ si $x \in K$ y $u(x) = 0$ si $x \notin K$, sea $\varepsilon < \int_K \varphi$, luego

$$u_\varepsilon(x) = \int u(x - \varepsilon y)\varphi(y)dy = \int_{K'} \varphi(y)dy < 1,$$

entonces $\|u_\varepsilon\|_\infty = \int_{K'} \varphi$ y $\|u\|_\infty = 1$, por lo tanto $u_\varepsilon \not\longrightarrow u$.

En particular mostramos en el teorema anterior que $C_0^\infty$ es denso en $L_p(\Omega)$. Lo cual es importante para la definición de distribución, una medida está únicamente determinada por su restricción a $C_0^\infty(\Omega)$.

Veamos los siguientes resultados acerca de la existencia de funciones prueba.

**A.2.3 TEOREMA.** Si $K$ es un subconjunto compacto de $\Omega$, existe una función $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ y $\psi = 1$ en una vecindad de $K$.

**Demostración.** Sea $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon + \varepsilon' < \delta$ donde $\delta$ es la distancia de $K$ a $\Omega^c$. Sea

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \in K_{\varepsilon'} = \{x : d(x, K) \leq \varepsilon'\} \\ 0 & x \notin K_{\varepsilon'}. \end{cases}$$

Es obvio que $u_\varepsilon$, definida por (2.1) tiene soporte en $K_{\varepsilon+\varepsilon'}$ y es igual a $K_{\varepsilon+\varepsilon'}$.

**A.2.4 TEOREMA.** Sean $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, conjuntos abiertos y $K$ un conjunto compacto tal que $K \subset \cup_{j=1}^n$. Entonces, existen funciones $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ tales que $\varphi_j \geq 0$ y $\sum_1^n \leq 1$ con igualdad en una vecindad de $K$.

**Demostración.** Para $j = 1, \ldots, n$ podemos elegir un conjunto compacto $K_j \subset \Omega_j$ tal que $K \subset \cup_1^n K_j$. Usando el teorema anterior encontramos $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ tal que $0 \leq \psi_j \leq 1$ y $\psi_j = 1$ en una vecindad de $K_j$. Definimos $\varphi_1 = \psi_1$; $\varphi_j = \psi_j(1 - \psi_1)\cdots(1 - \psi_{j-1})$, $j = 2, \ldots n$. Entonces tenemos:

$$\sum_1^n \varphi_j = 1 - (1 - \psi_1)\cdots(1 - \psi_n).\blacksquare$$

## A.3 DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS DE DISTRIBUCIONES

Primero introduciremos algunas notaciones para el cálculo en $n$-variables. Denotaremos con $\alpha$ multiíndices, es decir, listas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de números enteros no negativos. Denotaremos con $|\alpha|$ a su suma $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ y al producto $\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$ con $\alpha!$. Si $m$ es un entero mayor o igual que $|\alpha|$ escribiremos

$$\binom{m}{\alpha} = \frac{m!}{\alpha!(m - |\alpha|)!}.$$

Con $D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$. Aquí la $i$ es la unidad imaginaria. Similarmente escribiremos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$.

**A.3.1 DEFINICION.** Una *distribución* $u$ en $\Omega$ es una forma lineal en $C_0^\infty(\Omega)$ tal que para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ existen constantes $C$ y $k$ tales que:

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in C_0^\infty(K). \tag{3.1}$$

Al conjunto de todas las distribuciones en $\Omega$ es denotado con $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si el entero $k$ puede ser elegido independientemente de $K$, se dice que *la distribución u es de orden finito* en $\Omega$, y el entero $k$ más pequeño, es llamado el *orden de u en* $\Omega$. El conjunto de todas las distribuciones de orden finito en $\Omega$ es denotado con $\mathcal{D}'_F(\Omega)$.

**A.3.2 EJEMPLO.** Si $u \in L_p^{loc}(\Omega) = \{u \in L_p(K)$ con $K$ compacto en $\Omega\}$ y $\alpha$ es un multiíndice, una distribución de orden $\leq |\alpha|$ está definida por la forma lineal $u(\varphi) = \int uD^\alpha \varphi dx$ para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

**A.3.3 EJEMPLO.** Sea $n = 1$ y $\Omega = (0, 1)$. Entonces la forma lineal

$$u(\varphi) = \sum_1^\infty \varphi^{(j)}(1/j)$$

está en $\mathcal{D}'(\Omega)$ pero no en $\mathcal{D}'_F(\Omega)$.

Como $\varphi^{(j)}(1/j) = (-i)^j \frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j}(1/j) \leq |\frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j}(1/j)| \leq \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi|$ y $u(\varphi) = \sum \varphi^{(j)}(1/j)$, entonces $|u(\varphi)| \overset{(a)}{=} |\sum \varphi^{(j)}(1/j)| \leq \sum |\varphi^{(j)}(1/j)| \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \varphi|$.

Desde la igualdad (a) vemos que el orden no puede ser finito.

La razón para la notación $\mathcal{D}'(\Omega)$ es que Schwartz en [1] denota con $\mathcal{D}(\Omega)$ al espacio $C_0^\infty(\Omega)$ con una topología que hace a $\mathcal{D}'(\Omega)$ su espacio dual.

Una forma equivalente de la definición de distribución está dada por el siguiente teorema.

**A.3.4 TEOREMA.** Una forma lineal u en $C_0^\infty(\Omega)$ es una distribución si, y sólo si, $u(\varphi_j) \longrightarrow 0$ cuando $j \longrightarrow \infty$ para toda sucesión $\{\varphi_j\} \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que:

i) $D^\alpha \varphi_j \longrightarrow 0$ uniformemente cuando $j \longrightarrow \infty$ para todo multiíndice $\alpha$.

ii) existe un subconjunto compacto de $\Omega$ fijo, que contiene los soportes de todas las $\varphi_j$.

Una sucesión que satisface (i) y (ii) se dice que converge a 0 en $C_0^\infty(\Omega)$.

**Demostración.** Sea $u$ es distribución y $\{\varphi_j\}$ una sucesión en $C_0^\infty(\Omega)$ que converge a cero. Para todo compacto $K \subset \Omega$ existen $C_j$ y $k_j$ tales que

$$|u(\varphi_j)| \leq C_j \sum_{|\alpha| \leq k_j} \sup |D^\alpha \varphi_j|.$$

Sea $K$ un compacto que contiene a los soportes de todas las $\varphi_j$, sea $k = \max\{k_j,\ j = 1, ..., n\}$ y $C = \max\{C_j,\ j = 1, ..., n\}$, entonces para $\alpha$ fija tenemos que

$$|u(\varphi_j)| \leq C_j \sum_{|\alpha| \leq k_j} sup\, |D^\alpha \varphi_j| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha \varphi_j|.$$

La segunda desigualdad para $k = \max\{k_j,\ j = 1, \ldots n\}$ y $C = \max\{C_j\}$. Para $\alpha$ fija, tenemos

$$|u(\varphi_j)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha \varphi_j| \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \longrightarrow \infty.$$

Inversamente si $u$ es una forma lineal en $C_0^\infty(\Omega)$ tal que toda sucesión $\{\varphi_j\} \in C_0^\infty(\Omega)$ que converge a 0, $u(\varphi_j) \longrightarrow 0$. Supongamos que u no es distribución, es decir existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y un compacto $K$ tal que para cualesquiera constantes $C$ y $k$

$$|u(\varphi)| > C \sum_{\alpha \leq k} \sup |D^\alpha \varphi|.$$

Esto implica que $u$ es distinta de cero, por lo que podemos encontrar $\varphi_j \in C_0^\infty(K)$ tal que $u(\varphi_j) = 1$ y $\sup |D^\alpha \varphi_j| \leq 1/j$. Entonces $u(\varphi_j) \longrightarrow 1$ y $D^\alpha \varphi_j \longrightarrow 0$ cuando $j \longrightarrow \infty$ y $K$ contiene los soportes de las $\varphi_j$. Pero esto contradice la hipótesis de que $u(\varphi_j)$ debería tender a cero, por lo tanto no existe tal $\varphi$, entonces

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \varphi|,$$

por lo que $u$ es una distribución.∎

Ejemplo de distribución. Si $\mu$ es una medida en $\Omega$, la forma lineal

$$C_0^\infty(\Omega) \ni \varphi \longmapsto \int \varphi d\mu$$

es una distribución en $\Omega$ y por lo dicho después del teorema 2.1 a diferentes medidas corresponden diferentes distribuciones. Por lo tanto podemos identificar medidas con sus ditribuciones correspondientes. En vista de la identificación de una medida *absolutamente continua* con su función de densidad, significa en particular que una función $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ es identificada con la distribución

$$\varphi \longmapsto \int \varphi f dx.$$

Esta distribución será denotada con $f$ (nótese que identificamos funciones que son iguales casi dondequiera).

Veamos una definición alteranativa de distribución.

**A.3.5 TEOREMA.** Una forma lineal en $C_0^\infty(\Omega)$ es una distribución si, y sólo si, existe una familia de funciones $\rho_\alpha \in C^0(\Omega)$ tales que los conjuntos $\operatorname{supp}\rho_\alpha$ son localmente finitos (es decir, ningún compacto intersecta una infinidad de $\operatorname{supp}\rho_\alpha$) y

$$|u(\varphi)| \leq \sum_\alpha \sup|\rho_\alpha D^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.2}$$

Si $u$ es de orden menor o igual que $k$, entonces todas las $\rho_\alpha$ con $|\alpha| > k$ pueden elegirse igual a cero.

**Demostración.** Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Tomemos una sucesión creciente de compactos $K_j$ en $\Omega$ tal que todo subconjunto compacto de $\Omega$ pertenece a algún $K_j$ y sea $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\varphi_j = 1$ en $K_j$. Escribiendo

$$\psi_j = \begin{cases} \varphi_j - \varphi_{j-1} & \text{si } j > 1 \\ \varphi_1 & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

tenemos que $\varphi = \sum_1^\infty \psi_j \varphi$ si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Como $\varphi \in C_0^\infty$ sólo es no nula en algún compacto, entonces $\sum \varphi_j \varphi = \varphi$. Como el soporte de $\varphi_j \varphi$ está contenido en el de $\varphi_j$ y $\varphi_j \in \mathcal{D}'$ existen $C_j$ y $k_j$ tales que

$$|u(\varphi)| \leq \sum_1^\infty |u(\varphi_j \varphi)| \leq \sum_1^\infty C_j \sum_{|\alpha| \leq K_j} \sup|D^\alpha(\varphi_j \varphi)|. \tag{3.3}$$

Ahora, los conjuntos soportes de $\psi_j$ son localmente finitos porque $\psi_j = 0$ en $K_{j-1}$. Por la fórmula de Leibinitz tenemos $D^\alpha(\psi_j\varphi) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} D\psi_j^\beta \varphi^\gamma$; podemos entonces hacer que valga la fórmula 3.2. Si el orden de u es $k$, entonces podemos tomar $k_j = k$.∎

**A.3.6 OBSERVACION.** El teorema anterior significa que $C_0^\infty(\Omega)$ es un espacio vectorial localmente convexo con espacio dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ si la topología en $C_0^\infty(\Omega)$ está definida por las seminormas que aparecen del lado derecho de 3.2. ($\sum_\alpha \sup|\rho_\alpha D^\alpha \varphi|$). Obviamente $\mathcal{D}'(\Omega)$ es un espacio vectorial con las definiciones naturales de adición y multiplicación por escalares. $(a_1 u_1 + a_2 u_2)(\varphi) = a_1 u_1(\varphi) + a_2 u_2(\varphi)$, $u_1$, $u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Aquí $a_1$, $a_2$ denotan constantes complejas.

Siempre usaremos la topologia débil en $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir la topología definida por las seminormas $|u(\varphi)|$, con $u \in D'(\Omega)$ y $\varphi$ es un elemento fijo de $C_0^\infty(\Omega)$.

Dada una distribución u en $\Omega$, podemos definir su restricción a un conjunto abierto $\Omega' \subset \Omega$ simplemente restringiendo el dominio de definición de la forma lineal u a $C_0^\infty(\Omega')$. Diremos que dos distribuciones $u_1$ y $u_2$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ *son iguales en una vecindad de un punto* $x \in \Omega$ si las restricciones de $u_1$ y $u_2$ en alguna vecindad de $x$ son iguales.

El comportamiento local de una distribución la determina completamente, de hecho probaremos el siguiente

**A.3.7 TEOREMA.** Sean $u_1$ y $u_2$ dos distribuciones en $\Omega$ tales que todo punto de $\Omega$ tiene una vecindad donde $u_1 = u_2$. Entonces $u_1 = u_2$ en $\Omega$.

**Demostración.** Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $K = \operatorname{supp}\varphi$. Por hipótesis todo punto de $K$ tiene una vecindad donde $u_1 = u_2$. Como $K$ es compacto, podemos encontrar un número finito de vecindades $\Omega_j$ que cubren a $K$. Eligiendo a $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, de acuerdo al teorema 2.3., obtenemos $\varphi = \sum \varphi\varphi_j$, por tanto

$$u_1(\varphi) = \sum u_1(\varphi\varphi_j) = u_2(\varphi).$$

**A.3.8 DEFINICION.** Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, el *soporte de* $u$ está definido como el conjunto de puntos en $\Omega$ los cuales no tienen vecindad donde $u$ es igual a 0. El soporte de $u$ es denotado con $\operatorname{supp} u$.

Es claro que $\operatorname{supp} u$ es cerrado en $\Omega$, porque el complemento es abierto. Además, se sigue del teorema 3.7 que $u = 0$ en el complemento del soporte de $u$ en $\Omega$, es decir,

$$u(\varphi) = 0 \ si \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ y \ \operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset. \tag{3.4}$$

El complemento de $\operatorname{supp} u$ es el subconjunto abierto más grande de $\Omega$ donde $u = 0$. Por lo que esta definición de soporte coincide con la dada en la sección 2 si $u$ es una función continua.

**A.3.9 DEFINICION.** Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, el *soporte singular de* $u$, denotado con $\operatorname{singsupp} u$, está definido como el conjunto de puntos en $\Omega$ que no tienen vecindades, donde $u$ está en $C^\infty$.

Es claro también que supp u es un subconjunto cerrado en $\Omega$, y repetición de la prueba del teorema 3.7 muestra que $u \in C^\infty$ en el complemento de $\operatorname{supp} u$ en $\Omega$.

## A.4 DIFERENCIACIÓN DE DISTRIBUCIONES Y MULTIPLICACIÓN POR FUNCIONES.

Para motivar la definición de la derivada, primero supondremos que $u \in C^1(\Omega)$ y notaremos que la integración por partes da

$$\int (D_k u)\varphi dx = -\int u D_k \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.1}$$

(Esta es la forma de derivada débil discutida en la sección 1).

La siguiente definición coincide con la clásica para funciones en $C^1$.

**A.4.1 DEFINICION.** Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos

$$(D_k u)(\varphi) = -u(D_k\varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.2}$$

Es claro que $D_k u$ define una nueva distribución, y que $u \longmapsto D_k u$ es continua en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Además note que

$$D_k D_j u(\varphi) = D_k(-u(D_j\varphi)) = u(D_k D_j \varphi) = u(D_j D_k \varphi) = D_j(-u(D_k\varphi)) = D_j D_k u(\varphi).$$

En general, siempre tenemos

$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.3}$$

**A.4.2 EJEMPLO.** Sea $\varepsilon_a$ la medida de Dirac en $a \in \Omega$, definida por $\varepsilon_a(\varphi) = \varphi(a)$ Entonces tenemos

$$(D^\alpha \varepsilon_a)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\varepsilon_a(D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha\varphi)(a).$$

(La medida de Dirac es también denotada con $\delta_a$, y cuando $a = 0$ el índice puede ser omitido).

**A.4.3 EJEMPLO.** Si $H$ es la función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Obtenemos $D_1 H = \delta$.

A continuación probaremos que al menos localmente, $\mathcal{D}'(\Omega)$ es la extensión más pequeña posible de $L_\infty$ en la cual la diferenciación es siempre posible.

**A.4.4 TEOREMA.** Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\omega$ un conjunto tal que $\omega \Subset \Omega$ (es decir que $\overline{\omega}$ es compacto y $\overline{\omega} \subset \Omega$). Entonces existe una función $f \in L_\infty(\omega)$ y un entero $m$ tal que $u = D_1^m \cdots D_n^m f$ en $\omega$.

**Demostración.** Como $u$ es distribución, entonces

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \varphi|, \qquad \varphi \in C_0^\infty(\omega).$$

Por otro lado si $\psi \in C_0^\infty(\omega)$ y $|x_j| \leq a_j$ con $|x_j|$ en $\omega$, el teorema del valor medio nos dice que $\sup |\psi| \leq a_j \sup |D_j \psi|$, $\psi \in C_0^\infty(\omega)$. Reptiendo la aplicación de este teorema, encontramos una constante

$$\begin{aligned} \sup |D^\alpha \varphi| &\leq a_j \sup |D_j D^\alpha \varphi| \\ &\leq a_1 \sup |D_1 D^\alpha \varphi| \\ &\leq a_1^{k-\alpha_1} \sup |D_1^{k_1 - \alpha_1} D^\alpha \varphi| \\ &\leq a_1^{k-\alpha_1} a_2^{k-\alpha_2} \sup |D_2^{k-\alpha_2} D_1^{k_1-\alpha_1} D^\alpha \varphi| \\ &\leq a_1^{k-\alpha_1} \cdots a_n^{k-\alpha_n} \sup |D_n^{k-\alpha_n} \cdots D_1^{k_1-\alpha_1} D^\alpha \varphi| \\ &\leq a_1^{k-\alpha_1} \cdots a_n^{k-\alpha_n} \sup |D_1^k \cdots D_n^k \varphi|. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |u(\varphi)| &\leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \varphi| \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq k} a_1^{k-\alpha_1} \cdots a_n^{k-\alpha_n} \sup |D_1^k \cdots D_n^k \varphi| \\ &\leq C \sup |D_1^k \cdots D_n^k \varphi| \sum_{|\alpha| \leq k} a_1^{k-\alpha_1} \cdots a_n^{k-\alpha_n} \\ &\leq C' \sup |D_1^k \cdots D_n^k \varphi|. \end{aligned}$$

Encontramos una constante $C'$ que por abuso de notación escribiremos $C$ tal que

$$|u(\varphi)| \leq C \sup |D_1^k \cdots D_n^k \varphi|, \quad \varphi \in C_0^\infty(\omega). \tag{4.4}$$

Además, cuando $\psi \in C_0^\infty$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (-1)^n \int_{y<x} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \psi dy \\ &= (i^2)^n \int_{y<x} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \psi dy \\ &= i^n \int_{y<x} \frac{i\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{i\partial}{x_n} \psi dy \\ &= i^n \int_{y<x} D_1 \cdots D_n \psi dy, \end{aligned}$$

donde $y < x$ es el conjunto $x_1 > y_1, \cdots, x_n > y_n$.

Entonces $\sup|\psi| \leq \int |D_1 \cdots D_n \psi| dx$. Aplicando esta desigualdad a (4.4) tenemos que

$$|u(\varphi)| \leq C \sup |D_1^k \cdots D_n^k \varphi| \leq C \int_{y<x} |D_1^{k+1} \cdots D_n^{k+1} \varphi| dx.$$

$$\therefore \quad |u(\varphi)| \leq C \int_{y<x} |D_1^m \cdots D_n^m \varphi| dx.$$

La forma lineal $(-1)^{nm} D_1^m \cdots D_n^m \varphi \longrightarrow u(\varphi) \quad \varphi \in C_0^\infty(\omega)$ puede ser extendida a una forma lineal en $L_1(\omega)$ con norma $\leq C$, por el teorema de Hahn Banach. Pero como $L_\infty(\omega)$ es el espacio dual de $L_1(\omega)$, por el teorema de representación de Riez, esto significa que existe una función $f \in L_\infty(\omega)$ con $||f||_\infty \leq C$ tal que

$$u(\varphi) = (-1)^{nm} \int f D_1^m \cdots D_n^m \varphi dx \qquad \varphi \in C_0^\infty(\omega). \blacksquare$$

**A.4.5 OBSERVACION.** Si definimos $f = 0$ en $\omega^C$ y ponemos

$$g(x) = i^n \int_{y<x} f(y) dy,$$

tenemos $u = D_1^{m+1} \cdots D_n^{m+1} g$ en $\omega$ y $g$ es continua. Por lo que todas las distribuciones se pueden representar como la derivada de una función continua.

**A.4.6 DEFINICION.** Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $a \in C^\infty(\Omega)$ definiremos el producto de $u$ y $a$ con la fórmula

$$(au)(\varphi) = u(a\varphi) \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Es obvio que la forma lineal $au$ es una distribución y que la definición es equivalente a la multiplicación puntual cuando $u$ es una función. También note que:

$$\operatorname{supp}(au) \subset \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} u.$$

**A.4.7 OBSERVACION.** Schwartz probó que no puede ser definida una multiplicación asociativa de dos distribuciones arbitrarias.

La fórmula de Leibiniz para la diferenciación de un producto se mantiene válida, ya que:

$$\begin{aligned} D_k(au)(\varphi) &= -(au)(D_k\varphi) \\ &= -u(aD_k\varphi) \\ &= -u(D_k(a\varphi) - (D_k a)\varphi) \\ &= -u(D_k(a\varphi) + u((D_k a)\varphi) \\ &= D_k u(a\varphi) + (D_k a)u(\varphi) \\ &= a(D_k u)(\varphi) + (D_k a)u(\varphi). \end{aligned}$$

Después también necesitaremos la regla de Leibiniz para diferenciaciones de orden mayor en una forma más general. Sea $P(\xi)$ un polinomio en $n$ variables $\xi_1 \cdots \xi_n$ con coeficientes complejos, y denotaremos con $P(D)$ al operador diferencial obtenido de reemplazar a $\xi_j$ por $D_j$. Esto da una correspondencia uno a uno entre polinomios y operadores diferenciales con coeficientes constantes, para

$$P(D)e^{i\langle x,\xi\rangle} = P(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}.$$

Si $\langle x,\xi\rangle = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$ con componentes complejas $\xi_j$. Repitiendo el uso de la fórmula de Leibiniz tenemos una identidad de la forma

$$P(D)(au) = \sum_\alpha \xi^\alpha Q_\alpha(D)u \qquad a \in C^\infty(\Omega)\ u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

donde $Q_\alpha$ son operadores diferenciales. Estos pueden ser determinados tomando $a(x) = e^{i\langle x,\xi\rangle}$ y $u$ como la función $u(x) = e^{i\langle x,\eta\rangle}$, la cual da

$$P(\xi+\eta) = \sum_\alpha \xi^\alpha Q_\alpha(\eta).$$

Si escribimos

$$P^{(\alpha)}(\eta) = \frac{\partial^{|\alpha|}P(\eta)}{\partial^{\alpha_1}\eta_1\cdots\partial^{\alpha_n}\eta_n} = i^{|\alpha|}D^\alpha P(\eta).$$

Entonces, se sigue de la fórmula de Taylor que $Q_\alpha(\eta) = \dfrac{P^{(\alpha)}(\eta)}{\alpha!}$. Entonces hemos probado la fórmula general de Leibiniz

$$P(D)(au) = \sum_\alpha \frac{(D^\alpha a)P^{(\alpha)}(D)u)}{\alpha!}.$$

Finalmente probaremos un teorema concerniente a la conección entre diferenciabilidad en el sentido de distribuciones y el sentido clásico.

**A.4.8 TEOREMA.** Si $u$ y $f$ son funciones continuas en $\Omega$ y $D_j u = f$ en el sentido de distribuciones, entonces $D_j u = f$ en el sentido clásico también.

**Demostración.** Primero notemos que si $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces $\chi u$ y $D_j(\chi u) = (D_j\chi)u + \chi D_j u$ son funciones continuas con soporte compacto. Es suficiente probar el teorema cuando $u$ tiene soporte compacto en $\Omega$. Utilizando la notación del teorema 2.1 tenemos

$$\begin{aligned} D_j u_\epsilon(x) &= \epsilon^{-n}\int D_j u(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)dy \\ &= \epsilon^{-n}\int u(y)D_{x_j}\varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)dy \\ &= -\epsilon^{-n}\int u(y)D_{y_j}\varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)dy. \end{aligned}$$

Por otro lado $u_\epsilon(x) = \int u(x-\epsilon y)\varphi(y)dy$, por lo que

$$\begin{aligned} D_j(u_\epsilon(x)) &= \int u(x-\epsilon y)D_j\varphi(y)dy \\ &= \epsilon^{-n}\int u(x)D_j\varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)dy \\ &= \epsilon^{-n}\int f(x)\varphi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)dy \\ &= f_\epsilon(x). \end{aligned}$$

Por el teorema 2.1 $f_\epsilon \in C^\infty$ y $f_\epsilon \longrightarrow f$ uniformemente si $u_\epsilon \longrightarrow u$ uniformememte cuando $\epsilon \longrightarrow 0$, luego $D_j u_\epsilon \longrightarrow f$ uniformemente; por lo que $D_j u_\epsilon \longrightarrow D_j u$, entonces $D_j u = f$ en el sentido clásico. ∎

## A.5 DISTRIBUCIONES CON SOPORTE COMPACTO

Si $u \in L_1^{loc}(\Omega)$, la forma $u(\varphi) = \int u\varphi dx$ tiene sentido para toda $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi \Subset \Omega$, y $u(\varphi) = 0$ cuando $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi =$. Ahora probaremos, que el dominio de una distribución arbitraria puede ser extendido de esta manera.

**A.5.1 TEOREMA.** Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y sea $F$ un subconjunto cerrado de $\Omega$ que contiene al soporte de $u$. Entonces existe una y sólo una forma lineal $\overline{u}$ en $\{\varphi \mid \varphi \in C^\infty(\Omega),\ F \cap \operatorname{supp}\varphi \Subset \Omega\}$ tal que
(i) $\overline{u}(\varphi) = u(\varphi)$ si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,
(ii) $\overline{u}(\varphi) = 0$ si $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ y $F \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$.

El dominio de $\overline{u}$ es por supuesto más grande cuando $F = \operatorname{supp}\varphi$ pero necesitamos la unicidad también para otros conjuntos $F$.

**Demostración.** a) *Unicidad.* Sea $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ y sea $F \cap \operatorname{supp}\varphi = K$ un subconjunto compacto de $\Omega$. Por el teorema 2.2 podemos encontrar $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ en una vecindad de $K$. Entonces tenemos $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ donde $\varphi_0 = \psi\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $\varphi_1 = (1-\psi)\varphi$, así que $F \cap \operatorname{supp}\varphi_1 =$. Usando (i) e (ii), obtenemos

$$\overline{u}(\varphi) = \overline{u}(\varphi_0) + \overline{u}(\varphi_1) = u(\varphi_0). \tag{5.1}$$

lo cual prueba la unicidad de $\overline{u}$.

b) *Existencia.* Hemos visto en el inciso (a) que toda $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ con $F \cap \operatorname{supp}\varphi = K$ compacto puede ser escrita $\varphi - \varphi_0 + \varphi_1$ con $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ y $F \cap \operatorname{supp}\varphi_1 = \emptyset$. Si $\varphi = \varphi_0' + \varphi_1'$ es otra descomposición, entonces $\varphi_0 - \varphi_0' = \varphi_1' - \varphi_1$. Luego $\varphi_0 - \varphi_0' \in C_0^\infty(\Omega)$ y $F \cap \operatorname{supp}(\varphi_0 - \varphi_0') = F \cap \operatorname{supp}(\varphi_1' - \varphi_1) = \emptyset$, así, se sigue de (3.4) que $0 = u(\varphi_0 - \varphi_0') = u(\varphi_0) - u(\varphi_0')$. Poniendo $\overline{u}(\varphi) = u(fi_0)$ nos da una definición única de una forma lineal $\overline{u}$ la cual tiene las propiedades requeridas.

Desde ahora escribiremos $u(\varphi)$ en lugar de $\overline{u}(\varphi)$ y se considera $u(\varphi)$ como se definió para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y toda $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ con $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi \Subset \Omega$. En vista de la simetría de (5.1) algunas veces escribiremos $\langle u, \varphi\rangle$ en lugar de $u(\varphi)$. Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\varphi$, $\psi \in C^\infty(\Omega)$ cuando (5.1) es válido tenemos

$$\langle \psi u, \varphi\rangle = \langle u, \psi\varphi\rangle, \tag{5.2}$$

$$\langle D_j u, \varphi\rangle = \langle u, D_j\varphi\rangle. \tag{5.3}$$

De hecho, las formas lineales en $\varphi$ en los dos lados de las igualdades anteriores coinciden cuando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y se anulan cuando $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$, así las igualdades anteriores se siguen de la unicidad probada en el teorema 5.1.

Ahora examinaremos más de cerca el caso particular cuando $u$ tiene soporte compacto. La condición (5.1) es entonces nula, así que $u(\varphi)$ está definida para toda $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Si $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $\psi = 1$ en una vecindad de $\operatorname{supp} u$, tenemos

$$u(\varphi) = u(\psi\varphi) + u((1-\psi)\varphi) = u(\psi\varphi), \quad \varphi \in C^\infty(\Omega),$$

así que de la definición de distribución y la fórmula de Leibiniz se sigue que

$$|u(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|\le k} \sup_K |D^\alpha\varphi|, \qquad \varphi \in C^\infty(\Omega). \tag{5.4}$$

donde $K$ es el soporte de $\psi$ y $C$ y $k$ son constantes. Inversamente, supongamos que tenemos una forma lineal $v$ en $C^\infty(\Omega)$ tal que algunas constantes $C$ y $k$ y algún conjunto compacto $L \subset \Omega$

$$|v(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|\le k} \sup_L |D^\alpha\varphi|, \qquad \varphi \in C^\infty(\Omega). \tag{5.5}$$

Entonces la restricción de $v$ a $C_0^\infty(\Omega)$ es una distribución $u$ con soporte contenido en $L$. Como se sigue de (5.5) que $v(\varphi) = 0$ si $L \cap \operatorname{supp}\varphi = 0$, obtenemos del teorema 5.1 con $F = L$ que $v(\varphi) = u(\varphi)$ para toda $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Por tanto hemos probado

**A.5.2 TEOREMA.** El conjunto de distribuciones en $\Omega$ con soporte compacto es el espacio dual de $C^\infty(\Omega)$ con la topología definida por, las seminormas

$$\varphi \longmapsto \sum_{|\alpha|\le k} \sup_K |D^\alpha\varphi|,$$

donde $K$ varía sobre todos los subconjuntos compactos de $\Omega$ y $k$ sobre todos los enteros mayores o iguales que 0.

Schwartz denota con $\mathcal{E}(\Omega)$ al espacio $C^\infty(\Omega)$ dotado con esta topología. El espacio de distribuciones con soporte compacto es denotado con $\mathcal{E}'(\Omega)$. – De la prueba del teorema 5.2 también se sigue que $\mathcal{E}'(\Omega)$ se puede identificar con el conjunto de distribuciones en $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ con soportes contenidos en $\Omega$. (Podríamos usar la notación $\mathcal{E}'(A)$ también cuando $A$ es un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$ para denotar el conjunto de distribuciones en $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ con soportes contenidos en $A$.)

**A.5.3 TEOREMA.** Si $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ y es de orden $\leq k$, entonces $u(\psi) = 0$ para toda $\psi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $D^\alpha\psi(x) = 0$ cuando $x \in \operatorname{supp} u$ y $|\alpha| \leq k$.

**Demostración.** Sea $K_\varepsilon$ el conjunto de todos los puntos con distancia $\leq \varepsilon$ de $\operatorname{supp} u$. Para $\varepsilon$ suficientemente pequeño tenemos $K_\varepsilon \subset \Omega$, y $K_\varepsilon$ es una vecindad compacta de $K$ para todo $\varepsilon > 0$. Con $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $\int \varphi dx = 1$, $\varphi \geq 0$ y $\operatorname{supp}\varphi = \{x : |x| \leq 1\}$, como en 2.2 formamos

$$\chi_\varepsilon(x) = \int_{K_{2\varepsilon}} \frac{\varphi((x-y)}{\varepsilon} \frac{dy}{\varepsilon^n}. \tag{5.6}$$

Es claro que $\chi_\varepsilon = 1$ en $K_\varepsilon$, que $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty$ y que $\operatorname{supp}\chi_\varepsilon \subset K_{3\varepsilon}$. (Vease la prueba del teorema 2.2) Entonces $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ si $\varepsilon$ es suficientemente pequeño, y obtenemos

$$u(\psi) = u(\psi\chi_\varepsilon) \tag{5.7}$$

como $\psi(1-\chi_\varepsilon) = 0$ en una vecindad de $\operatorname{supp} u$. Entonces

$$|u(\psi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup |D^\alpha(\psi\chi_\varepsilon)|. \tag{5.8}$$

Para estimar el lado derecho primero probaremos que

$$\sup_{K_{3\varepsilon}} |D^\alpha\psi| = 0(\varepsilon^{k+1-|\alpha|}) \text{ cuando } \varepsilon \longrightarrow 0 \text{ y } |\alpha| \leq k. \tag{5.9}$$

Para hacerlo notemos que para todo $x \in K_{3\varepsilon}$, podemos encontrar $y \in K$ con $|x-y| \leq 3\varepsilon$. Como las derivadas de $\psi$ de orden $\leq k$ se anulan en $y$, entonces se sigue de la fórmula de Taylor que

$$|\psi(x)| \leq \frac{1}{(k+1)!} \sup\left\{\left|\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\psi(y+t(x-y))\right| : 0 < t < 1\right\},$$

lo cual implica (5.9) cuando $\alpha = 0$ como $|y-x| \leq 3\varepsilon$ y las derivadas de $\psi$ son uniformemente acotadas en $K_{3\varepsilon}$. Aplicando este resultado a $D^\alpha\psi$ con $k$ reemplazado por $k-|\alpha|$, obtenemos (5.9) para cualquier $\alpha$ con $|\alpha| \leq k$.

A continuación notemos que se sigue de la diferenciación de $\chi_\varepsilon$, que para toda $\alpha$ se tiene

$$\sup |D^\alpha\chi_\varepsilon| = 0(\varepsilon^{-|\alpha|}). \tag{5.10}$$

Entonces la estimación

$$|D^\alpha(\psi\chi_\varepsilon| = 0(\varepsilon), \quad \varepsilon \longrightarrow 0, \quad |\alpha| \leq k,$$

se sigue de la fórmula de Leibiniz en vista de (5.9) y (5.10), y de (5.8) ahora se sigue que $u(\psi) = 0$.∎

**A.5.4 OBSERVACION.** Una consecuencia trivial es que el teorema es también válido si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Note además que no se puede tomar en general $K' = \operatorname{supp} u$ en 5.3. Vease el ejemplo en la páginas 94-95 de Schwartz [1].

**A.5.5 TEOREMA.** Una distribución cuyo soporte sólo contiene un punto $y$ es una combinación lineal finita de la medida de Dirac en $y$ y sus derivadas.

**Demostración.** Sea $\{y\}$ el soporte de la distribución $u$ y $k$ el orden de $u$. Si $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ formamos la expansión de Taylor de orden $k$, entonces

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{(iD)^\alpha \varphi(y)}{\alpha!}(x-y)^\alpha + \psi(x),$$

donde el residuo $\psi(x)$ se anula hasta el orden $k+1$ cuando $x = y$. Entonces $u(\psi) = 0$, en vista del teorema 5.3 obtenemos

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha \varphi(y),$$

donde $a_\alpha = \dfrac{i^{|\alpha|}u(x-y)^\alpha)}{\alpha!}$.∎

## A.6 CONVOLUCIÓN DE DISTRIBUCIONES

La convolución $u * \varphi$ de dos funciones continuas $u$ y $\varphi$, con una de ellas con soporte compacto está definida por

$$(u*\varphi)(x) = \int u(x-y)\varphi(y)dy = \int u(y)\varphi(x-y)dy = (\varphi * u)(x).$$

Esto nos lleva a la siguiente definición.

**A.6.1 DEFINICION.** Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, denotamos con $u*\varphi$ a la función definida por

$$(u*\varphi)(x) = u_y(\varphi(x-y)). \tag{6.1}$$

(Esta notación significa que $u$ opera en $\varphi(x-y)$ como función de $y$ para $x$ fija.)

Para enunciar los hechos básicos concernientes al producto convolución, primero definiremos la suma vectorial de dos conjuntos $A$ y $B$ en $\mathbb{R}^n$:

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

**A.6.2 PROPOSICION.** Si $A$ es cerrado y $B$ compacto, entonces $A+B$ es cerrado.

**Demostración.** Sea $\{x_n + y_n\}_1^\infty$ una sucesión convergente a $z$ con $x_n \in A$ y $y_n \in B$. Como $B$ es compacto, existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$ que converge a $y$ en $B$, luego la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ converge a $z-y$, pero como $A$ es cerrado, entonces $z-y \in A$. Por tanto $z \in A+B$, entonce $A+B$ es cerrado.∎

**Nota.** Si $A$ es cerrado y $B$ también lo es, $A+B$ no necesariamente es cerrado. Por ejemplo Sea $A = \{(x,1/x) : x \in \mathbb{R}-\{0\}\}$ y $B = \{(x,-1/x) : x \in \mathbb{R}-\{0\}\}$.Entonces $A+B = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}-\{0\}, -1/x \le y \le 1/x\}$. El conjunto $A+B$ no es cerrado, ya que por puntos en él podemos aproximarnos a la recta $x=0$ pero no la contiene.

**A.6.3 PROPOSICION.** Si $A$ y $B$ son conjuntos compactos, entonces $A+B$ también lo es.

**Demostración.** Por la proposición 6.2 sabemos que $A+B$ es cerrado, entonces basta encontrar una cota para los elementeos de $A+B$. Sea $z = x+y \in A+B$, luego $|z| = |x+y| \le |x| + |y| \le C_1 + C_2$ donde $C_1$ y $C_2$ son cotas de $A$ y $B$ respectivamente.∎

**A.6.4 TEOREMA.** Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $u*\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\operatorname{supp}(u*\varphi) \subset u + \operatorname{supp}\varphi$. Las derivadas de la convolución están dadas por

$$D^\alpha(u*\varphi) = (D^\alpha u)*\varphi = u*(D^\alpha\varphi). \tag{6.2}$$

**Demostración.** Si $x_j \longrightarrow x$, es claro que $\varphi(x_j - y) \longrightarrow \varphi(x-y)$ en $C_0^\infty$ como función de $y$. Por lo que $u * \varphi$ es continua. En vista de (3.4), tenemos que $(u*\varphi)(x) = 0$ a menos que el soporte de $u$ interseque al de $\varphi(x-y)$ (como función de $y$), es decir, a menos que exista un punto $y \in \operatorname{supp} u$ tal que $x - y \in \operatorname{supp}\varphi$, en tal caso $x \in \operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\varphi$. Para completar la prueba sólo tenemos que probar la igualdad de las derivadas cuando $|\alpha| = 1$, caso del cual se sigue inductivamente para toda $\alpha$. Sea $e_k$ un vector unitario en el eje $x_k$ y considere

$$\begin{aligned}(ih)^{-1}\left((u*\varphi)(x+he_k-y)-(u*\varphi)(x)\right)\\ = u_y\left((\varphi(x+he_k-y)-\varphi(x-y)/ih\right).\end{aligned}$$

Cuando $k \longrightarrow 0$, $(\varphi(x+he_k-y)-\varphi(x-y))/ih$ converge a $(D_k\varphi)(x-y) = -D_{y_k}\varphi(x-y)$, se sigue de la definición de derivada de una distribución que

$$u*(D_k\varphi) = (D_k u)*\varphi, \tag{6.3}$$

y esto completa la prueba.∎

Ahora probaremos que el producto convolución es asociativo.

**A.6.5 TEOREMA.** Si $\varphi$ y $\psi$ están en $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ y $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_n)$, entonces

$$(u*\varphi)*\psi = u*(\varphi*\psi).$$

**Demostración.** Para cada $\varepsilon > 0$ formamos la suma de Riemann

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \sum_g \varphi(x-g\varepsilon)\psi(g\varepsilon),$$

donde $g$ corre sobre todos los puntos con coordenadas enteras. Entonces, tenemos $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\psi$, el cual es un conjunto compacto, y para toda $\alpha$ tenemos

$$D^\alpha f_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \sum D^\alpha\varphi(x-g\varepsilon)\psi(g\varepsilon) \longrightarrow ((D^\alpha\varphi)*\psi)(x) = (D^\alpha(\varphi*\psi))(x)$$

uniformemente cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Por tanto

$$\begin{aligned}(u*(\varphi*\psi))(x) &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}(u*f_\varepsilon)(x)\\ &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\varepsilon^n\sum(u*\varphi)(x-g\varepsilon)\psi(g\varepsilon)\\ &= ((u*\varphi)*\psi)(x),\end{aligned}$$

y el teorema se ha probado.∎

Como una aplicación probaremos un teorema análogo al teorema 2.1 para la regularización de distribuciones. Denotamos con $\varphi$ a una función que pertenezca a $C_0^\infty$ tal que $\operatorname{supp}\varphi = \overline{B}_1(0)$, $\varphi \geq 0$ y $\int\varphi = 1$; y escribiremos $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$.

**A.6.6 TEOREMA.** Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tenemos $u*\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$\operatorname{supp}(u*\varphi_\varepsilon) \subset \operatorname{supp} u + \{x; |x| \leq \varepsilon\}.$$

Además, $u*\varphi_\varepsilon r$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

**Demostración.** En vista del teorema 6.4 sólo necesitamos probar la última parte. Sea $\psi$ un elemento arbitrario en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y definamos $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$. Como $u(\psi) = (u*\check{\psi})(0)$, lo que necesitamos probar es que

$$((u*\psi_\varepsilon)*\check{\psi})(0) \longrightarrow (u*\check{\psi})(0) \quad \text{si } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Pero en vista del teorema anterior, el lado izquierdo es igual a $(u*(\varphi_\varepsilon*\check{\psi}))(0)$, y como se sigue del teorema 2.1 que $\varphi_\varepsilon*\check{\psi} \longrightarrow \check{\psi}$ en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$, hemos terminado.∎

**Nota.** Nos referiremos a las funciones $u_\epsilon = u * \varphi_\epsilon$ como *regularizaciones* de $u$. En general, probaremos el siguiente

**A.6.7 TEOREMA.** Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ existe una sucesión $u_j \in C^\infty(\Omega)$ tal que $u_j \longrightarrow u$ en la topología débil en $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir, para toda $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tenemos que $\int u_j\psi dx \longrightarrow u(\psi)$.

**Demostración.** Sea $K_j$ una sucesión creciente de subconjuntos compactos de $\Omega$ tal que todo subconjunto compacto de $\Omega$ esté contenido en algún $K_j$. Elijamos $\chi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\chi_j = 1$ en una vecindad de $K_j$ y usando la notación de la prueba del teorema anterior

$$u_j = (\chi_j u) * \varphi_{\frac{1}{j}}.$$

Si $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}\int u_j\psi dx &= \int((\chi_j u) * \varphi_{\frac{1}{j}})\psi dx\\ &= \chi_j u(\varphi_{\frac{1}{j}}(x-y))\psi(x)dx\\ &= \chi_j u(\varphi_{\frac{1}{j}}) * \psi\\ &= (\chi_j u * \check{\varphi}_{\frac{1}{j}}) * \psi\\ &= \chi_j u * (\check{\varphi}_{\frac{1}{j}} * \psi).\end{aligned}$$

Como $(\check{\varphi}_{\frac{1}{j}} * \psi) \longrightarrow \psi$ en $C_0^\infty(\Omega)$ y $\chi_j = 1$ en cualquier subconjunto compacto de $\Omega$ para $j$ suficientemente grande, se sigue que

$$\int u_j\psi dx \longrightarrow u(\psi),$$

lo cual completa la prueba.■

**A.6.8 OBSERVACION.** Que $C^\infty(\Omega)$ sea denso en $\mathcal{D}'(\Omega)$ también se sigue del teorema de Hahn Banach como el espacio dual de $\mathcal{D}'(\Omega)$ (con la topología débil) es $C_0^\infty(\Omega)$ en virtud de un hecho elemental concerniente a topologías débiles. También note que las reglas formales de cálculo tal como la fórmula de Leibiniz sigue teniendo sentido para distribuciones si lo tienen para funciones.

Se sigue inmediateamente de la fórmula para las derivadas de la convolución que $u*\varphi_j \longrightarrow 0$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ si la sucesión $\varphi_j$ converge a 0 en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $h \in \mathbb{R}^n$ y definimos el operador translación $\tau_h$ con

$$(\tau_h\varphi)(x) = \varphi(x-h),$$

es claro que

$$u * (\tau_h\varphi) = \tau_h(u * \varphi).$$

Inversamente, podemos probar

**A.6.9 TEOREMA.** Sea $U$ una transformación lineal de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ la cual conmuta con las translaciones y es continua en el sentido de que $U\varphi_j \longrightarrow 0$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ si la sucesión $\varphi_j \longrightarrow 0$ en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una y sólo una distribución $u$ tal que $U\varphi = u * \varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

**Demostración.** Por hipótesis la forma lineal

$$C_0^\infty \ni \check{\varphi} \longmapsto (U\varphi)(0)$$

es una distribución $u$, entonces $(U\varphi)(0) = u(\check{\varphi}) = (u * \varphi)(0)$. Reemplazando $\varphi$ por $\tau_h\varphi$ y usando el hecho de que las translaciones conmutan con $U$ y con el operador convolución, obtenemos $(U\varphi)(h) = (u * \varphi)(h)$, lo cual prueba el teorema.■

Si $u$ es una distribución con soporte compacto, es claro que $\varphi \longmapsto u * \varphi$ transforma continuamente a $C_0^\infty$ en sí mismo. (Por continuidad entendemos continuidad secuencial.) También es claro que la definición de $u * \varphi$ puede ser extendida a $\varphi \in C^\infty$ y da una transformación continua de $C^\infty$ en sí mismo.

Ahora podemos definir la convolución de dos distribuciones $u_1$ y $u_2$, una de las cuales tiene soporte compacto. De hecho, la transformación

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \longmapsto u_1 * (u_2 * \varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

es lineal, invariante bajo translaciones y continua. Entonces por el teorema 6.5. existe una distribución única $u$ tal que

$$u_1 * (u_2 * \varphi) = u * \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{6.4}$$

Para conservar la asociatividad del producto convolución hemos hecho la siguiente definición.

**A.6.10 DEFINICION.** La *convolución* de las distribuciones $u_1$ y $u_2$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, una de las cuales tiene soporte compacto, está definida como la distribución $u$ que satisface la igualdad anterior, y es denotada con $u_1 * u_2$.

La convolución definida así, es obviamente asociativa,

$$u_1 * (u_2 * u_3) = (u_1 * u_2) * u_3$$

si todas las $u_j$ excepto una tienen soporte compacto.

Note que se sigue del teorema 6.5 que esta definición coincide con la definición 6.1 si $u_2$ es una función prueba. Similarmente, si $u_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ y $u_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, una modifrcación del teorema 6.5 muestra que la definición coincide con la anterior.

**A.6.11 EJEMPLO.** Para toda $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tenemos $u * \delta = u$.

**A.6.12 TEOREMA.** a) La convolución es conmutativa, es decir, $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$, si una de las distribuciones $u_1$ y $u_2$ tiene soporte compacto.

b) Tenemos que $\operatorname{supp}(u_1 * u_2) \subset \operatorname{supp} u_1 + \operatorname{supp} u_2$.

**Demostración.** a) Primero note que dos distribuciones son iguales si $v_1 * (\varphi * \psi) = v_2 * (\varphi * \psi)$ para $\varphi, \psi \in C_0^\infty$. Entonces consideremos

$$\begin{aligned}
(u_1 * u_2) * (\varphi * \psi) &= u_1 * (u_2 * (\varphi * \psi)) \\
&= u_1 * ((u_2 * \varphi) * \psi) \\
&= u_1 * (\psi * (u_2 * \varphi)) \\
&= (u_1 * \psi) * (u_2 * \varphi) \\
&= (u_2 * \varphi) * (u_1 * \psi) \\
&= u_2 * (\varphi * (u_1 * \psi)) \\
&= u_2 * ((u_1 * \psi) * \varphi) \\
&= u_2 * (u_1 * (\psi * \varphi)) \\
&= (u_2 * u_1) * (\psi * \varphi) \\
&= (u_2 * u_1) * (\varphi * \psi).
\end{aligned}$$

Hemos utilizado el hecho que la convolución de funciones es conmutativo, por lo que la convolución de distribuciones es conmutativa..

b)Elijamos $\varphi_\epsilon$ como en el teorema 6.6 y notemos que como

$$(u_1 * u_2) * \varphi_\epsilon = u_1 * (u_2 * \varphi_\epsilon),$$

se sigue del teorema 6.4 que el soporte de $(u_1 * u_2) * \varphi_\varepsilon$ está contenido en supp $u_1$ + supp $u_2$ + $\{x; |x| \leq \varepsilon\}$. Si dejamos $\varepsilon \longrightarrow 0$, ahora se sigue que supp $u_1$ + supp $u_2$ contiene a supp $(u_1 * u_2)$.■

Una diferenciación puede ser escrita como una convolución. De hecho,

$$D^\alpha u = (D^\alpha \delta) * u,$$

donde $\delta$ es la medida de Dirac en 0. Para probar esto usaremos la fórmula de derivacón dos veces,

$$(D^\alpha u) * \varphi = u(D^\alpha \varphi) = u * (D^\alpha \varphi) * \delta = u * (d^\alpha \delta) * \varphi,$$

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, lo cual implica (6.5).

Ahora obtengamos $D^\alpha(u_1 * u_2) = (D^\alpha u_1) * u_2 = u_1 * (D^\alpha u_2)$ usando la igualdad anterior, la asociatividad y la conmutatividad de la convolución, es claro.

## A.7 TRANSFORMADA DE FOURIER

**A.7.1 DEFINICION.** Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La transformada de Fourier de $f$, denotada con $\widehat{f}$, dada por

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi\rangle} f(x)\, dx,$$

donde $\langle x, \xi\rangle$ es el producto interior usual en $\mathbb{R}^n$ ($\langle x, \xi\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$).

Como toda función en el espacio de Schwartz está en $L_1(\mathbb{R}^n)$, la integral anterior tiene sentido.

**A.7.2 LEMA.** a) $\widehat{D_j \varphi} = \xi_j \widehat{\varphi}$

b) $\widehat{x_j \varphi} = -D_j \widehat{\varphi}$

c) $\widehat{D^\alpha \varphi} = \xi^\alpha \widehat{\varphi}$

d) $\widehat{x^\alpha \varphi} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\varphi}$

**Demostración.** a) Por definición $\widehat{D_j \varphi} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi\rangle} D_j \varphi(x)\, dx$, integrando por partes en la variable $x_j$ tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} D_j e^{-i\langle x, \xi\rangle} \varphi(x)\, dx &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (-i)(-i)\xi_j e^{-i\langle x, \xi\rangle} \varphi(x)\, dx \\ &= \xi_j \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi\rangle} \varphi(x)\, dx = \xi_j \widehat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

b) Como $-D_{\xi_j} e^{-\langle x \xi\rangle} = x_j e^{-\langle x \xi\rangle}$ entonces $\widehat{x_j \varphi} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi\rangle} x_j \varphi(x)\, dx$ $= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} -D_{\xi_j} e^{-i\langle x, \xi\rangle} \varphi(x)\, dx$ y ya que la integral es respecto a $x$, entonces se pueden intercambiar los signos de integral y $D_{\xi_j}$, por lo que la anterior es igual a

$$-D_{\xi_j} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi\rangle} \varphi(x)\, dx = -D_j \widehat{\varphi}(\xi).$$

c) $\widehat{D^\alpha \varphi} = \widehat{D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \varphi} = \xi_1^{\alpha_1} \widehat{D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} \varphi} = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n} \widehat{\varphi} = \xi^\alpha \widehat{\varphi}$

d) $\widehat{x^\alpha \varphi} = \widehat{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \varphi} = (-1)^{\alpha_1} D_1^{\alpha_1} \widehat{x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \varphi} = (-1)^{\alpha_1} D_1^{\alpha_1} (-1)^{\alpha_2} D_1^{\alpha_2} \cdots (-1)^{\alpha_n} D_n^{\alpha_n} \widehat{\varphi}$ $= (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\varphi}$.

**A.7.3 LEMA.** La transformada de Fourier es una funcional lineal continua de $\mathcal{S}$ en sí mismo.

**Demostración.** La linealidad de la transformada está dada por la linealidad de la integral, para probar la continuidad basta ver que $\widehat{\ }: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ es acotada.

Sea $\varphi \in \mathcal{S}$, $\|\widehat{\varphi}\|_{\alpha,\beta} = \sup_\xi |\xi^\alpha D^\beta \widehat{\varphi}(\xi)|$ aplicando las propiedades del lema anterior $= \sup |D_x^\alpha \widehat{(-i)^\beta x^\beta \varphi(x)}(\xi)| = \sup \left|\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\alpha x^\beta \varphi(x)\, dx\right| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\alpha x^\beta \varphi(x)|\, dx$ $\le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha x^\beta \varphi(x)| dx < \infty$ ya que $\varphi \in \mathcal{S} \implies D_x^\alpha x^\beta \varphi(x) \in \mathcal{S} \subset L_1$. Así que $\|\widehat{\varphi}\|_{\alpha,\beta} < \infty$ por lo que $\widehat{\ }$ envía a $\mathcal{S}$ en sí mismo. Además si $k$ es suficientemente grande $\int_{\mathbb{R}^n} (1+x^2)^{-k} dx < \infty$ así que:

$$\|\widehat{\varphi}\|_{\alpha,\beta} \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+x^2)^{-k}}{(1+x^2)^{-k}} |D_x^\alpha x^\beta \varphi(x)| dx$$
$$\le \sup_x \{(1+x^2)|D_x^\alpha (-ix)^\beta \varphi(x)\} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+x^2)^{-k} dx\right)$$

usando la regla de Leibinitz, es fácil concluir que existen multiíndices $\alpha_j$ $\beta_J$ y constantes $c_j$ tales que

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} \le \sum_{i=1}^{M} c_j \|\varphi\|_{\alpha_j \beta_j}.$$

Por tanto $\widehat{\varphi}$ está acotada, por lo que es continua.∎

**A.7.4 EJEMPLO.** La transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-\alpha|x|^2/2}$ es $\alpha^{-n/2} e^{-|\xi|^2/2\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Demostración.** $\widehat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} e^{-\alpha|x|^2/2}\, dx$ si hacemos el cambio de variable $t = \sqrt{\frac{\alpha}{2}x}$, el jacobiano es $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n/2}$ por lo que la integral anterior es igual a

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\sqrt{\frac{2}{\alpha}}t,\xi\rangle} e^{-|t|^2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-n/2} dt$$
$$= \frac{1}{(\pi\alpha)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\sqrt{\frac{2}{\alpha}}t,\xi\rangle} e^{-|t|^2} dt$$
$$= \frac{1}{(\pi\alpha)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\sqrt{\frac{2}{\alpha}}t,\xi\rangle} e^{-|t|^2} e^{\langle i\xi/\sqrt{2\alpha}, i\xi/\sqrt{2\alpha}\rangle} e^{-\langle i\xi/\sqrt{2\alpha}, i\xi/\sqrt{2\alpha}\rangle}\, dt$$
$$= \frac{1}{(\pi\alpha)^{n/2}} e^{-|\xi|/2\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle t,t\rangle - i\langle 2t/\alpha,\xi\rangle + \langle i\xi/\sqrt{2\alpha}, i\xi/\sqrt{2\alpha}\rangle} dt$$
$$= \frac{1}{(\pi\alpha)^{n/2}} e^{-|\xi|/2\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle t,t\rangle - 2\langle t, i\xi/\alpha\rangle + \langle i\xi/\sqrt{2\alpha}, i\xi/\sqrt{2\alpha}\rangle} dt$$
$$= \frac{1}{(\pi\alpha)^{n/2}} e^{-|\xi|/2\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle t - i\xi/\sqrt{2\alpha}, t - i\xi/\sqrt{2\alpha}\rangle} dt$$
$$= \frac{1}{(\pi\alpha)^{n/2}} e^{-|\xi|/2\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|t - i\xi/\sqrt{2\alpha}|^2} dt,$$

haciendo el cambio de variable $x = t - i\xi\sqrt{2\alpha}$ el jacobiano es 1, entonces la integral anterior es igual a

$$= \frac{1}{(\pi\alpha)^{n/2}} e^{-|\xi|/2\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} dx$$
$$= \frac{1}{(\pi\alpha)^{n/2}} e^{-|\xi|/2\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^n$$
$$= \frac{1}{(\pi\alpha)^{n/2}} e^{-|\xi|/2\alpha} (\pi)^{n/2}$$
$$= \alpha^{-n/2} e^{-|\xi|^2/2\alpha}.$$

En el ejemplo anterior si $\alpha = 1$ tenemos que $\widehat{e^{-|x|^2/2}}(\xi) = e^{-|x|^2/2}$ es decir, es una función invariante bajo la transformada de Fourier.

**A.7.5 TEOREMA.** La fórmula inversa de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{i(x,\xi)} \widehat{f}(\xi)| \, d\xi$$

es válida en $\mathcal{S}$.

**Demostración.** Sea $f \in \mathcal{S}$. Calculemos

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{i(x,\xi)} \widehat{f}(\xi)| \, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{(x,\xi)} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\xi)} f(y) \, dy \, d\xi.$$

Como la doble integral no converge absolutamente, no se puede invertir el orden de integración. Pero si introducimos un factor $\psi(\varepsilon\xi)$, donde $\psi \in \mathcal{S}$ y $\varepsilon > 0$, obtenemos convergencia absoluta y podemos invertir el orden de integración.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{(x,\xi)} \psi(\varepsilon\xi) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\xi)} f(y) \, dy \, d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y-x,\xi)} \psi(\varepsilon\xi) f(y) \, dy \, d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y-x,\xi)} \psi(\varepsilon\xi) f(y) \, d\xi \, dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y-x,\xi)} \psi(\varepsilon\xi) \, d\xi \, dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y+x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y,\xi)} \psi(\varepsilon\xi) \, d\xi \, dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y+x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\frac{y}{\varepsilon},\varepsilon\xi)} \psi(\varepsilon\xi) \, d\xi \, dy \\
&= \varepsilon^{-n} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y+x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\frac{y}{\varepsilon},\varepsilon\xi)} \psi(\varepsilon\xi) \, d(\varepsilon\xi) \, dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\varepsilon y+x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y,\xi)} \psi(\xi) \, d(\xi) \, dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\varepsilon y+x) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y,\xi)} \psi(\xi) \, d(\xi) \, dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\varepsilon y+x) \widehat{\psi}(y) \, dy.
\end{aligned}$$

Como $\widehat{f}$ y $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}$, son itegrables, además son continuas y acotadas, entonces podemos pasar el límite bajo los signos de integral cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ y esto nos da:

$$\begin{aligned}
\psi(0) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{i(x,\xi)} \widehat{f}(\xi)| \, d\xi &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{i(x,\xi)} \psi(\varepsilon\xi) \widehat{f}(\xi)| \, d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\varepsilon y + x) \widehat{\psi}(y) \, dy \\
&= \frac{f(x)}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(y) \, dy.
\end{aligned}$$

Si tomamos $\psi(x) = e^{\frac{-|x|^2}{2}}$ tenemos que $\psi(0) = 1$, $\widehat{\psi}(y) = \psi(y)$ y además $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(y) \, dy = (2\pi)^{n/2}$. Por lo tanto

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{i(x,\xi)} \widehat{f}(\xi)| \, d\xi = \frac{f(x)}{(2\pi)^{n/2}} (2\pi)^{n/2} = f(x).$$

**A.7.6 COROLARIO.** La transformada de Fourier es un isomorfismo bicontinuo de $\mathcal{S}$ en sí mismo. Ahora es fácil probar las siguientes propiedades fundamentales de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}$.

**A.7.7 TEOREMA.** Si $\varphi$ y $\psi$ están en $\mathcal{S}$, tenemos:

a) $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\widehat{\psi} \, dx$

b) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\psi} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}} \, dx$ (fórmula de Parseval)

c) $\widehat{\widehat{\varphi}}(x) = \varphi(-x)$

d) $(\widehat{\varphi * \psi}) = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}$

e) $(\widehat{\varphi\psi}) = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$

**Demostración.** El inciso (a) es el caso particular de *, cuando $x = 0$.

b) Sea $\chi = \overline{\widehat{\psi}}$ $\chi(\xi) = \overline{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)}\varphi(x)\, dx} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}\overline{\psi}(x)\, dx = \overline{\widehat{\psi}}(\xi)$ por lo que $\widehat{\chi} = (\overline{\widehat{\psi}} = \overline{\psi}$,
entonces $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\psi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\widehat{\chi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\chi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}}\, dx$

c) $\widehat{\widehat{\varphi}}(\xi) = \inf \widehat{\varphi} x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,-\xi)}\widehat{\varphi}(x)\, dx = \check{\varphi}(x)(\xi) = \varphi(-\xi)$

d) $(\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\, dy$

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi * \psi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int e^{-i(x,\xi)}\varphi(x-y)\psi(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int e^{-i(x,\xi)}\varphi(x-y)\psi(y)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \int e^{-i(x+y,\xi)}\varphi(x)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \int e^{-i(x,\xi)}e^{-i(y,\xi)}\varphi(x)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)e^{-i(y,\xi)} \int e^{-i(x,\xi)}\varphi(x)\, dx\, dy \\
&= \widehat{\varphi} \int e^{-i(y,\xi)}\psi(y)\, dy \\
&= (2\pi)^{n/2}\widehat{\varphi}\widehat{\psi}.
\end{aligned}$$

e) $\widehat{\widehat{\varphi\psi}} \stackrel{c}{=} \varphi(-x)\psi(-x) = \widehat{\widehat{\varphi}}(x)\widehat{\widehat{\psi}}(x) \stackrel{d}{=} \widehat{\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}} \Longrightarrow \widehat{\varphi\psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}.$ ∎

**A.7.8 TEOREMA.** $||f||_{L_2} = ||\widehat{f}||_{L_2}$.

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
||\widehat{f}||_{L_2}^2 &= \int_r n|\widehat{f}|^2\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\overline{\widehat{f}}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\widehat{f}}\overline{\widehat{\widehat{f}}}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\overline{f(-x)}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(-x)|^2\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx \\
&= ||f||_{L_2}^2.
\end{aligned}$$

Supongamos que $f \in C_0^\infty(I\!R^n)$. Entonces para toda $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ la integral

$$\widehat{f}(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{-i\langle \zeta, x\rangle} f(x)\, dx$$

está bien definida, donde $\langle \zeta, x\rangle = \langle \lambda, x\rangle + \langle \eta, x\rangle$ si $\zeta = \lambda + i\eta$ con $\lambda,\, \eta \in I\!R^n$.

Además $\widehat{f}(\zeta)$ es una función analítica entera de $n$ variables complejas, ya que

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\zeta) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{-i\langle \lambda, x\rangle + \langle \eta, x\rangle} f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \cos(\langle \lambda, x\rangle) - i e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \sin(\langle \lambda, x\rangle)\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \cos(\langle \lambda, x\rangle)\, dx + \frac{i}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} -e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \sin(\langle \lambda, x\rangle)\, dx \\
&= u(\zeta) + i v(\zeta).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial \lambda} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \cos(\langle \lambda, x\rangle)\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \cos(\langle \lambda, x\rangle)\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} -e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \sin(\langle \lambda, x\rangle) x_1 \cdots x_n\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} \frac{\partial}{\partial \eta} - e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \sin(\langle \lambda, x\rangle)\, dx \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} -e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \sin(\langle \lambda, x\rangle)\, dx \\
&= \frac{\partial v}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial \eta} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \cos(\langle \lambda, x\rangle)\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} \frac{\partial}{\partial \eta} e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \cos(\langle \lambda, x\rangle)\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \cos(\langle \lambda, x\rangle) x_1 \cdots x_n\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} -\frac{\partial}{\partial \lambda} (-e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \sin(\langle \lambda, x\rangle))\, dx \\
&= -\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{I\!R^n} -e^{\langle \eta, x\rangle} f(x) \sin(\langle \lambda, x\rangle)\, dx \\
&= -\frac{\partial v}{\partial \lambda}.
\end{aligned}$$

Por lo anterior $\widehat{f}(\zeta)$ es analítica, y como siempre se puede derivar respecto a $\zeta$, es entera. Además si el soporte de $f$ está contenido en la esfera de radio $R$, entonces

$$\begin{aligned}
(i\zeta_j)^\alpha \widehat{f}(\zeta) &= (i\zeta_j)^\alpha \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x| \le R} e^{-i\langle \zeta, x\rangle} f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x| \le R} (i\zeta_j)^\alpha e^{-i\langle \zeta, x\rangle} f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x| \le R} D_x^\alpha e^{-i\langle \zeta, x\rangle} f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x| \le R} e^{-i\langle \zeta, x\rangle} D_x^\alpha f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Tomando valor absoluto de ambos lados, tenemos

$$
\begin{aligned}
|\zeta|^{\alpha}|\widehat{f}(\zeta)| &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left|\int_{|x|\le R} e^{-i\langle\zeta,x\rangle}D^{\alpha}f(x)\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{|x|\le R}\left|e^{-i\langle\zeta,x\rangle}D^{\alpha}f(x)\right|\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{|x|\le R}\left|e^{-i\langle\lambda,x\rangle+\langle\eta,x\rangle}D^{\alpha}f(x)\right|\,dx \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{|x|\le R}\left|e^{\langle\eta,x\rangle}\right||D^{\alpha}f(x)|\,dx \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{R|\eta|}\int_{|x|\le R}|D^{\alpha}f(x)|\,dx.
\end{aligned}
$$

**Si $|\alpha|\le N$, como $f\in C_0^{\infty}$, entonces $C_{Nf}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{|x|\le R}|D^{\alpha}f(x)|\,dx<\infty$., luego, entonces $\forall N\in\mathbb{N}$, $(1+|\zeta|)^N|\widehat{f}(\zeta)|\le e^{R|Im\zeta|}C_{Nf}$, por lo tanto**

$$
|\widehat{f}(\zeta)|\le\frac{e^{R|Im\zeta|}C_{Nf}}{(1+|\zeta|)^N}.
$$

**Lo interesante de éstos cálculos es que no sólo son necesarios, sino también suficientes para que $f$ pertenezca a $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.**

**A.7.9 TEOREMA.** **(Paley-Wiener). Una función analítica $f(\zeta)$ de $n$ variables complejas es la transformada de Fourier de una función $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ con soporte en la esfera $\{x\mid |x|\le R\}$ si y sólo si para cada $N$ natural existe una constante $C_N$ tal que**

$$
|f(\zeta)|\le\frac{C_N e^{R|Im\zeta|}}{(1+|\zeta|)^N}\quad\forall\zeta\in\mathbb{C}^n. \tag{$*$}
$$

**Demostración.** **Hemos probado la necesidad. Supongamos que $g$ es entera y $|g(\zeta)|\le\frac{C_N e^{R|Im\zeta|}}{(1+|\zeta|)^N}$. Sea $\zeta=\lambda+i\eta$ con $\lambda$ y $\eta\in\mathbb{R}^n$. Para cada $\eta$ $g(\lambda+i\eta)$ está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como función de $\lambda$, ya que las derivadas decaen polinomialmente por $(*)$.**

**Sea $f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\lambda\rangle}g_{\eta}(\lambda)\,d\lambda$. Entonces por el teorema de la fórmula inversa de Fourier $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $f(\lambda)=\widehat{g}(\lambda)$. Queremos mostrar que $f$ tiene soporte en la esfera de radio $R$.**

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{i\langle\lambda+i\eta,x\rangle}g(\lambda+i\eta)\right|\,d\lambda \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{i\langle\lambda+i\eta,x\rangle}\right|\frac{C_N e^{R|\eta|}}{(1+|\zeta|)^N}\,d\lambda \\
&\le \frac{C_N e^{R|\eta|}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{i\langle\lambda,x\rangle-\langle\eta,x\rangle}\right|\frac{1}{(1+|\lambda+i\eta|)^N}\,d\lambda \\
&\le \frac{C_N e^{R|\eta|}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-\langle\eta,x\rangle}\right|\frac{1}{(1+|\lambda+i\eta|)^N}\,d\lambda \\
&\le \frac{C_N e^{R|\eta|-\langle\eta,x\rangle}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|\lambda|)^N}\,d\lambda.
\end{aligned}
$$

**Si $N>n$, entonces $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|\lambda|)^N}\,d\lambda<\infty$, luego**

$$
f(x)\le Ce^{R|\eta|-\langle\eta,x\rangle},
$$

donde $C = \frac{C_N}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\lambda|)^N}\, d\lambda$. Como $f$ no depende de $\eta$, si $\eta = sx$, $s \in \mathbb{R}$, entonces $|f(x)| \leq \lim_{s\to\infty} Ce^{Rs|x|-s|x|^2} = 0$ si $|x| > R$, (ya que $Rs|x| - s|x|^2 < 0$), por lo tanto $|f(x)| = 0$ si $|x| > R$, entonces el soporte de $f$ está contenido en la esfera $\{x \mid |x| \leq R\}$.∎

**A.7.10 DEFINICION.** Una forma lineal continua $u$ en $\mathcal{S}$ es llamada ***distribución temperada.*** El conjunto de todas las distribuciones temperadas es denotado con $\mathcal{S}'$.

La restricción de una distribución temperada a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es obviamente, una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. De hecho, podemos identificar a $\mathcal{S}'$ con un subespacio de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, como el siguiente lema nos muestra que una distribución $u \in \mathcal{S}'$ la cual se anula en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ también debe anularse en $\mathcal{S}$.

Consideraremos a $\mathcal{S}'$ con la topología débil, i.e., si $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}$, $\varphi_n \longrightarrow \varphi \in \mathcal{S} \Longrightarrow u(\varphi_n) \longrightarrow u(\varphi)$ en $\mathbb{R}$.

**A.7.11 LEMA.** $C_0^\infty$ es denso en $\mathcal{S}$.

**Demostración.** Sean $\varphi \in \mathcal{S}$ y $\psi \in C_0^\infty$ tales que $\psi(x) = 1$ cuando $|x| \leq 1$. Defina $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)\psi(\varepsilon x)$. Es claro que $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty$, y como $\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x) = \varphi(x)(\psi(\varepsilon x) - 1) = 0$ si $|x| < 1/\varepsilon$, es fácil ver que $\varphi_\varepsilon \longrightarrow \varphi$ en $\mathcal{S}$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$.∎

**A.7.12 DEFINICION.** Si $u \in \mathcal{S}'$, la transformada de Fourier $\widehat{u}$ está definida por

$$\widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

**A.7.13 TEOREMA.** $\widehat{\ }: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es biyectiva y continua.

**Demostración.** Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, queremos mostrar que $\widehat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_n \longrightarrow \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por demostrar que $\widehat{u}(\varphi_n) \longrightarrow \widehat{u}(\varphi)$.

Por definición $\widehat{u}(\varphi_n) = u(\widehat{\varphi}_n)$ por el corolario 6 $\widehat{\varphi}_n \longrightarrow \widehat{\varphi}$, entonces $\widehat{u}(\varphi_n) \longrightarrow u(\widehat{\varphi}) = \widehat{u}(\varphi) \Longrightarrow \widehat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sea $u_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_n \longrightarrow u \in \mathcal{S}'$, queremos ver que $\widehat{u}_n \longrightarrow \widehat{u} \in \mathcal{S}'$. La sucesión $u_n$ converge en $\mathcal{S}'$ a $\widehat{u} \in \mathcal{S}'$ si y sólo si $\forall\varphi \in \mathcal{S}$ $u_n(\varphi) \longrightarrow u(\varphi)$. Entonces $\widehat{u}_n(\varphi) \longrightarrow \widehat{u}(\varphi)$ $\forall\varphi \in \mathcal{S}$ si y sólo si $u_n(\widehat{\varphi}) \longrightarrow u(\widehat{\varphi})$ $\forall\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ si y sólo si $u_n \longrightarrow u$ en $\mathcal{S}'$. Por lo tanto $\widehat{\ }$ es un operador continuo y es biyectivo, ya que su inverso es el operador definido por $\check{u} = u(\check{\varphi})$, y $\check{\widehat{u}}(\varphi) = u(\widehat{\check{\varphi}}) = u(\varphi)$ $\widehat{\check{u}}(\varphi) = u(\check{\widehat{\varphi}}) = u(\varphi)$.∎

**A.7.14 EJEMPLO.** Calculemos la transformada de Fourier de las derivadas de $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

a) $\widehat{\delta}(\varphi) = \delta(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,0)}\varphi(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1(\varphi)$ $\therefore$ $\widehat{\delta} = 1$.

b) $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$, $\widehat{\delta_a}(\varphi) = \widehat{\delta}(a) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,a)}\varphi(x)\, dx = e^{-i(x,a)}(\varphi)$.

(a)
$$\begin{aligned}
\widehat{\delta_a'}(\varphi) &= \delta_a'(\widehat{\varphi}) \\
&= \delta_a(-\frac{d}{d\xi}\widehat{\varphi}) \\
&= \delta_a\left(-\frac{d}{d\xi}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)}\varphi(x)\, dx\right) \\
&= \delta_a(i\widehat{x\varphi}) \\
&= \widehat{\delta_a}(ix\varphi) = \left(e^{-i(x,a)}ix\right)(\varphi).
\end{aligned}$$

Si $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Fourier de $\widehat{u}$ también está en $L_2(\mathbb{R}^n)$ y la fórmula de Parseval es válida

$$\int |\widehat{u}|^2\, dx = \int |u|^2\, dx.$$

Si $u \in L_2(I\!R^n)$ entonces $u(\varphi) = \int u(x)\varphi(x)\,dx$, por lo que $|\widehat{u}(\varphi)| = |u(\widehat{\varphi})| \leq ||u||_2||\widehat{\varphi}||_2 = ||u||_2||\varphi||_2$ $\varphi \in C_0^\infty$, luego $||\widehat{u}(\varphi)||_2 = \sup ||u||_2||\varphi||_2 = ||u||_2$.

**A.7.15 TEOREMA.** La transformada de Fourier de una distribución $u \in \mathcal{E}'$ es la función

$$\widehat{u}(\xi) = u_x\left(e^{-i(x,\xi)}\right),$$

(es decir, $u$ aplicado a $e^{-i(x,\xi)}$ como fnción de $x$).

Nota. El lado derecho también está definido para todo vector complejo $\xi \in \mathbb{C}^n$ yes una función analítica entera de $\xi$, llamada la *transformada de Fourier-Lapalace de u*.

**Demostración.** Si $u$ es una función $\widehat{u}(\xi) = U_x(e^{-i(x,\xi)}) = \int u(x)e^{-i(x,\xi)}\,dx = \widehat{u}$. Para probarlo en general, sea $\varphi \in C_0^\infty$ tal que $\int \varphi = 1$, $\varphi \geq 0$, $\operatorname{supp}\varphi = \{|x| \leq 1\}$, sea $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, entonces $u * \varphi_\varepsilon \longrightarrow u$ en la topología débil de $\mathcal{E}'$ por el teorema 6.3, por lo tanto converge en $\mathcal{S}'$, entonces $\widehat{u * \varphi_\varepsilon} \longrightarrow \widehat{u}$ en $\mathcal{S}'$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Por otro lado la tansformada de Fourier- Laplace de $u * \varphi_\varepsilon$ es la función anaítica

$$\begin{aligned}
u * \varphi_\varepsilon)(e^{-i(x,\xi)}) &= \int (u * \varphi_\varepsilon)(x)e^{-i(x,\xi)}\,dx \\
&= \int u_y(\varphi_\varepsilon(x-y))e^{-i(x,\xi)}\,dx \\
&= ((u * \varphi_\varepsilon) * (e^{-i(x,\xi)})(0) \\
&= u * (\varphi_\varepsilon * e^{-i(x,\xi)})(0) \\
&= u(\check{\varphi}_\varepsilon * e^{-i(x,\xi)}) \\
&= u(\int \check{\varphi}_\varepsilon(x)e^{-i(x-y,\xi)}\,dx) \\
&= u(\varphi_\varepsilon e^{-i(y,x\xi)}).
\end{aligned}$$

El teorema de Paley-Wiener tiene una generalización natural en las distribuciones con soporte compacto.

**A.7.16 TEOREMA.** Una función analítica entera $U9\zeta)$ es la transformada de Fourier-Lapalace de una distribución con soporte en la esfera $\{|x| \leq R\}$ si y sólo si para algunas constantes $C$ y $N$ tenemos

$$|U(\zeta)| \leq C(1+|\zeta|)^N e^{R|Im\zeta|}. \tag{$*$}$$

**Demostración.** Si $U(\zeta)$ es entera y satisface (*), entonces $U(\lambda + i0) \in \mathcal{S}'(I\!R^n)$, por lo que existe $u \in \mathcal{S}'(I\!R^n)$ tal que $\widehat{u} = U$. Sea $\varphi \in C_0^\infty$ con soporte en la esfera unitaria y $\int \varphi = 1$, sea $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ donde $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, luego $\widehat{u}_\varepsilon = \widehat{u * \varphi_\varepsilon} = \widehat{u}\widehat{\varphi}_\varepsilon = U(\lambda + i0)\widehat{\varphi}_\varepsilon$. Como $\varphi_\varepsilon$ tiene soporte compacto (la bola de radio $\varepsilon$), sabemos por el teorema de Paley-Wiener, que para cada $M$ podemos encontrar una constante $C_M$ tal que

$$|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta)| \leq \frac{c_M}{(1+|\zeta|)^{N+M}}e^{\varepsilon|Im\zeta|},$$

entonces

$$\begin{aligned}
|\widehat{u * \varphi_\varepsilon}| &= |\widehat{u}\widehat{\varphi}_\varepsilon| = |U(\zeta)\widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta)| \\
&\leq \frac{C_M e^{\varepsilon|Im\zeta|}}{(1+|\zeta|)^{N+M}}C(1+|\zeta|)^N e^{R|Im\zeta|} \\
&= \frac{C_M C e^{(R+\varepsilon)|Im\zeta|}}{(1+|\zeta|)^M},
\end{aligned}$$

lo cual implica por el teorema de Paley-Wiener que el soporte de $\varphi_\varepsilon * u$ está contenido en la esfera de radio $R+\varepsilon$. Como $\varepsilon$ es arbitrario y $u * \varphi_\varepsilon) \longrightarrow u$ débilmente, concluimos que el soporte de $u$ está en la esfera de radio $R$.

Supongamos que $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que es igual a 1 en el soporte de $u$. Definimos $F(\zeta) = u(e^{-i\langle\zeta,x\rangle}\varphi(x))$, $F(\lambda + i0) = \widehat{u}$, además $F$ es entera ya que si $\zeta = \lambda + i\eta$

$$\begin{aligned}
F(\zeta) &= u(e^{-i\langle\lambda,x\rangle+\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)) \\
&= u\left(e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\cos(\langle\lambda,x\rangle) - ie^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\sin(\langle\lambda,x\rangle)\right) \\
&= u\left(e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\cos(\langle\lambda,x\rangle)\right) + iu\left(-e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\sin(\langle\lambda,x\rangle)\right).
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\lambda}u\left(e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\cos(\langle\lambda,x\rangle)\right) \\
&\qquad= u\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\cos(\langle\lambda,x\rangle)\right) \\
&\qquad= u\left(-e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\sin(\langle\lambda,x\rangle)x_1\cdots x_n\right) \\
&\qquad= u\left(\frac{\partial}{\partial\eta} - e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\cos(\langle\lambda,x\rangle)\right) \\
&\qquad= \frac{\partial}{\partial\eta}u\left(-e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\sin(\langle\lambda,x\rangle)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\eta}u\left(e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\cos(\langle\lambda,x\rangle)\right) \\
&\qquad= u\left(\frac{\partial}{\partial\eta}e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\cos(\langle\lambda,x\rangle)\right) \\
&\qquad= u\left(e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\cos(\langle\lambda,x\rangle)x_1\cdots x_n\right) \\
&\qquad= u\left(-\frac{\partial}{\partial\lambda} - e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\sin(\langle\lambda,x\rangle)\right) \\
&\qquad= -\frac{\partial}{\partial\lambda}u\left(-e^{\langle\eta,x\rangle}\varphi(x)\sin(\langle\lambda,x\rangle)\right).
\end{aligned}$$

Luego, $F$ es analítica, como podemos derivar indefinidamente, $F$ es entera. Además, como $u \in \mathcal{E}'$ por (5.4) existen $C$ y $N$ tales que

$$|u(\varphi)| \leq C\sum_{|\alpha\leq N}\sup|D^\alpha\varphi|, \quad \varphi \in C_0^\infty.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|F(\zeta)| = |\widehat{u}(\zeta)| &= |u(e^{-i\langle\zeta,x\rangle}\varphi(x)| \\
&\leq C\sum_{|\alpha\leq N}\sup|D_x^\alpha e^{-i\langle\zeta,x\rangle}\varphi(x)| \\
&= C\sum_{|\alpha\leq N}\left(\sum_{|\beta|\leq|\alpha|}\sup\left|(i\zeta)^\beta e^{-i\langle\zeta,x\rangle}D^{\alpha-\beta}\varphi(x)\right|\right) \\
&= C\sum_{|\alpha\leq N}\left(\sum_{|\beta|\leq|\alpha|}\sup|\zeta|^\beta e^{R|Im\zeta|}|D^{\alpha-\beta}\varphi(x)|\right) \\
&\leq CC'e^{R|Im\zeta|}\left(\sum_{|\alpha\leq N}\sum_{\beta\leq\alpha}|\zeta|^\beta\right) \\
&\leq CC'e^{R|Im\zeta|}(1+|\zeta|)^N.
\end{aligned}$$

## A.8 FAMILIAS ESPECTRALES

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y suponga que existe una familia no decreciente $\{M(\lambda)\}$ de subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ que depende un parámetro real $\lambda$, $(-\infty < \lambda < \infty)$ tal que la intersección de todos los $M(\lambda)$ es 0 y su unión es densa en $\mathcal{H}$. Por no decreciente se entiende que $M(\lambda) \subset M(\lambda')$ para $\lambda < \lambda'$.

$$M(\lambda+0) = \bigcap_{\lambda<\lambda'} M(\lambda')$$
$$M(\lambda-0) = \overline{\bigcup_{\lambda<\lambda'} M(\lambda')}.$$

La familia $M(\lambda)$ es continua por la derecha si $M(\lambda+0) = M(\lambda)$ y es continua por la izquierda si $M(\lambda-0) = M(\lambda)$. La familia $\{M(\lambda+0)\}$ tiene las mismas propiedades que $\{M(\lambda)\}$ y además es continua por la derecha. Estas propiedades pueden transladarse a propiedades de la familia $\{E(\Lambda)\}$ de las proyecciones ortogonales asociadas a los $M(\lambda)$. Tenemos:

(1) $E(\Lambda)$ es no decreciente, es decir, $E(\Lambda)E(\mu) = E(\mu)E(\Lambda) = E(\min(\lambda,\mu))$.

(2) $s - \lim_{\lambda\to-\infty} E(\Lambda) = 0$ y $s - \lim_{\lambda\to\infty} E(\Lambda) = 1$.

Una familia de proyecciones ortogomales con las propiedades (1) y (2) es llamada una *familia espectral* o una *resolución de la identidad.*

Las proyecciones $E(\lambda \pm 0)$ en $M(\lambda \pm 0)$ están dadas por

$$E(\lambda \pm 0) = s \lim_{\varepsilon\to+0} E(\lambda \pm \varepsilon). \tag{3}$$

Así $\{M(\lambda)\}$ es continua por la derecha (izquierda) si y sólo si $\{E(\Lambda)\}$ es fuertemente continua por la derecha (izquierda). Usualmente una familia espectral se supone continua por la derecha en todas partes

$$E(\lambda+0) = E(\Lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty \tag{4}$$

y nosotros seguiremos esta convención. En cualquier caso, la familia $\{E(\lambda+0)\}$ es continua por la derecha en todas partes.

Se dirá que $\{E(\Lambda)\}$ es *acotada por abajo* si $E(\mu) = 0$ para alguna $\mu$ finita (entonces $E(\Lambda) = 0$ para $\lambda < \mu$ forzosamente), la mínima cota superior de tales $\mu$ es la *cota inferior* de $\{E(\Lambda)\}$. Similarmente, $\{E(\Lambda)\}$ está *acotada por arriba* si $E(\mu) = 1$ para alguna $\mu$ finita, y la cota superior está definida análogamente. Note que $E(\Lambda)$ no necesariamente es cero cuando $\lambda$ es igual a la cota inferior, mientras que $E(\Lambda) = 1$ si $\lambda$ es igual a la cota superior, esto es debido a la convención (4).

Para cualquier intervalo semicerrado $I = (\lambda;, \lambda'']$ de la recta real ponemos

$$E(I) = E(\lambda'') - E(\lambda'), \tag{5}$$

$E(I)$ es la proyección en el subespacio $M(I) = M(\lambda'') \ominus M(\lambda')$ (es decir en el complemento ortogonal de $M(\lambda')$ en $M(\lambda'')$). Si dos intervalos así $I_1, I_2$ no tienen puntos en común, $M(I_1)$ y $M(I_2)$ son ortogonales; para el caso de que $I_1$ está a la izquierda de $I_2$

$$M(I_2) = M(\lambda_2'') \ominus M(\lambda_2') \perp M(\lambda_2') \supset M(\lambda_1'') \supset M(I_1).$$

La relación correspondiente para la proyección es

$$E(I_1)E(I_2) = E(I_2)E(I_1) = 0 \tag{6}$$

para $I_1, I_2$ disjuntos, la cual puede ser verificada usando (1).

La proyección en $M(\lambda) \ominus M(\lambda - 0)$ es

$$P(\lambda) = E(\Lambda) - E(\lambda - 0). \tag{7}$$

Como arriba tenemos

(8) $$P(\lambda)P(\mu) = P(\mu)P\lambda) = 0 \text{ para } \lambda \neq \mu.$$

$P(\mathrm{L}) \neq 0$ si y sólo si $E(\Lambda)$ es discontinua en $\lambda$.

Si $\mathcal{H}$ es separable, un conjunto ortogonal de proyecciones diferentes de cero es a lo más numerable. Por lo tanto hay a lo más una cantidad numerable de puntos de discontinuidad de $E(\Lambda)$ en un espacio separable.

Si $S$ es la unión de un número finito de intervalos (abiertos, cerrados o semicerrados) en la recta real, $S$ puede ser expresado como la unión disjunta de conjuntos de la forma $I = (\lambda, \lambda']$ o $\{\lambda\}$. Si definimos $E(S)$ como la suma de los $E(i)$ o $P(\lambda)$ correspondientes, es fácil ver que $E(S)$ tiene la propiedad de que $E(S')E(S'') = E(S' \cap S'')$. Llamamos a $E(S)$ una *medida espectral* en la clase de todos los conjuntos $S$ de la clase descrita. La medida $E(S)$ puede extenderse a los borelianos $S$ de la recta real.

Para cualquier $u \in \mathcal{H}$, $\langle E(\Lambda)u, u\rangle$ es una función de $\lambda$ no negativa, no decreciente y tiende a cero para $\lambda \to -\infty$ y tiende a $\|u\|^2$ para $\lambda \to +\infty$. Para cualesquiera $u$, $v \in \mathcal{H}$, la forma polar $\langle E(\Lambda)u, v\rangle$ $(= \frac{1}{4}[\langle E(\Lambda)(u+v), u+v\rangle - \langle E(\Lambda)(u-v), u-v\rangle + i\langle E(\Lambda)(u+iv), u+v\rangle \quad -i\langle E(\Lambda)(u-v), u-v\rangle])$ como función de $\lambda$, valuada en los complejos es de variación acotada. Esto se puede ver directamente como sigue: Para cualquier $I = (\lambda', \lambda'')$ tenemos

(10) $$\begin{aligned} |\langle E(\lambda'')u, v\rangle - \langle E(\lambda')u, v\rangle| &= \langle E(i)u, v\rangle| \\ &= |\langle E(i)u, E(I)v\rangle| \\ &\leq \|E(I)u\|\,\|E(I)v\|. \end{aligned}$$

Si $I_1, \ldots, I_n$ son intervalos disjuntos de la forma de anterior, tenemos

(10) $$\begin{aligned} \sum_j |\langle E(I_j)u, v\rangle| &\leq \sum \|E(I_j)u\|\,\|E(I_j)v\| \\ &\leq \left(\sum \|E(I_j)u\|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \|E(I_j)v\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum \langle E(I_j)u, u\rangle\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum \langle E(I_j)v, v\rangle\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle \sum E(I_j)u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \langle \sum E(I_j)v, v\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\|\,\|v\|. \end{aligned}$$

Así, la variación total de $\langle E(\Lambda)u, v\rangle$ no excede a $\|u\|\,\|v\|$. Diremos que $\alpha$ es un *punto de constancia* repecto a $\{E(\Lambda)\}$ si $E(\Lambda)$ es constante en una vecindad de $\alpha$. El conjunto de los puntos que no son puntos de constancia es llamado el *soporte* de $\{E(\Lambda)\}$ (o de la medida espectral $E(S)$).

## A.9 EL OPERADOR AUTOADJUNTO ASOCIADO A UNA FAMILIA ESPECTRAL

Para cualquier familia espectral $\{E(\Lambda)\}$ existe un operador autoadjunto asociado $H$, expresado por

(11) $$H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\Lambda).$$

El dominio de $H$ es el conjunto de todas las $u \in \mathcal{H}$ tales que

(12) $$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d\langle E(\Lambda)u, u\rangle < \infty.$$

Para tales $u$, $\langle Hu, v\rangle$ está dado por

(14) $$\langle hu, v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\langle E(\Lambda)u, v\rangle, \quad v \in \mathcal{H}.$$

La convergencia de la integral (14) se sigue de la estimación (10), la cual puede ser escrita $|d(E(\Lambda)u,v)| \leq d(E(\Lambda)u,u)d(E(\Lambda)v,v)^{\frac{1}{2}}$ y de (13) por medio de la desigualdad de Schwartz. Es obvio que $H$ es simétrico. Que $H$ sea autoadjunto se probará a continuación.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\|Hu\|^2 = \langle Hu, Hu\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(E(\Lambda)Hu, Hu) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mu\, d_\mu \langle E(\Lambda)u, E(\mu)u\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} \mu\, d(E(\mu)u, u) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\, d(E(\Lambda)u, u)
\end{aligned}$$

para $u \in D(H)$ donde (3) ha sido usado.

Si $u \in \mathcal{H}$, definimos $u_n = E(n)u - E(-n)u$ para toda $n$ natural, luego $u_n$ converge a $u$ ya que $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = \lim \|E(n)u - E(-m)u - u\| \leq \lim \|E(n)u - u\| + \|E(-n)u\| = 0$. Además $u_n \in D(H)$ ya que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\, \langle E(\Lambda)u_n, u_n\rangle &= \int_{-n}^{n} \lambda^2\, d(E(\Lambda)u, u) \\
&\leq n^2 \int_{-\infty}^{\infty} d(E(\Lambda)u, u) \\
&= n^2 \|g\| < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $D(H)$ es denso en $\mathcal{H}$.

Hemos mostrado que cualquier familia espectral $\{E(\Lambda)\}$ determina un operador autoadjunto $H$. ahora veamos que el inverso también se vale.

**A.9.1 TEOREMA.** (Espectral). Todo operador autoadjunto $H$ admite una expresión

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\Lambda)$$

por medio de una familia espetral $\{E(\Lambda)\}$ la cual está determinada únicamente por $H$.

**Demostración.** Definamos $E(\Lambda) = 1 - \frac{1}{2}[U(\lambda) - U(\lambda)^2]$, donde $U(\lambda)$ es el operador parcialemnte isométrico que aparece en la descomposición polar $H - \lambda = U(\lambda)|H - \lambda|$ de $H - \lambda$. Tenemos que mostrar que los $E(\Lambda)$ forman una familia espectral y que la $H$ determinada por (11) coincide con la $H$ dada.

(i) $E(\Lambda)$ es una proyección, ya que $\mathcal{H} = M_\lambda^+ \oplus M_\lambda^- \oplus M_\lambda^0$

$$E(\Lambda)u = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in M_\lambda^+ \\ u & \text{si } u \in M_\lambda^- \\ u & \text{si } u \in M_\lambda^0. \end{cases}$$

Luego $E(\Lambda)$ es una proyección y su rango es $M_\lambda^- \oplus M_\lambda^0 = (M_\lambda^+)^\perp$, que denotaremos con $M(\lambda)$.

(ii) $E(\Lambda)$ es monótona. Para $u \in D(H) \cap M(\lambda)$ tenemos $\langle (H-\lambda)u, u\rangle \leq 0$. Si $\mu > \lambda$, $\langle (H-\mu)u, u\rangle \leq 0$ para tales $u$. Como $M(\lambda)$ reduce a $H$ se sigue del lema 2 del apéndice que $M(\lambda) \subset M(\mu)$. Esto es equivalente a que $E(\Lambda)$ sea monótona.

(iii) Como $\{E(\Lambda)\}$ es una familia monótona de proyecciones, los límites fuertes $E(\pm\infty) = s - \lim_{\lambda\to\pm\infty} E(\Lambda)$ existen. Como todos los $M(\lambda)$ reducen a $H$, $M(\pm\infty = \text{rango } E(\pm\infty))$ también reduce a $H$ y $D(H) \cap M(\pm\infty)$ es denso en $M(\pm\infty)$. Sea $u \in D(H) \cap M(-\infty)$. Entonces $u \in M(\lambda)$ para toda $\lambda$ y así $\langle (H-\lambda)u, u\rangle \leq 0$ para toda $\lambda < 0$ y $u$ debe ser 0. Esto prueba que $M(-\infty) = \{0\}$ o $E(-\infty) = 0$. Sea $u \in D(H) \cap M(\infty)$, entonces $u = \lim_{\lambda\to\infty} E(\Lambda)v$. Sea $u_n = E(N)v$, $n \in \mathbb{N}$. Luego $E(\infty)(u_n) =$

$\lim_{\lambda\to\infty} E(\Lambda)u_n = \lim_{\lambda\to\infty}(E(n)v = u_n$, lo cual implica $\lim_{n\to\infty} E(\infty)u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = u$ por lo tanto $u \in M(\infty)$ y $E(\infty)u = u$, luego $E(\infty) = 1$

(iv) $E(\lambda+0)$ es la proyección en $M(\lambda+0)$, la cual es la intersección de todos los $M(\mu)$ para $\mu > \lambda$. Como $M(\mu)$ reduce a $H$, también $M(\lambda+0)$. Para toda $u \in D(H) \cap M(\lambda+0)$, tenemos $\langle Hu, u\rangle \leq \mu(u,u)$ $\forall\mu > \lambda$ tal que $\langle Hu, u\rangle \leq \lambda(u,u)$. Se sigue del lema 2 del apéndice que $M(\lambda+0) \subset M(\lambda)$. Esto muestra que $E(\lambda+0) \leq E(\Lambda)$. Como la desigualdad opuesta es verdadera, se sigue que $E(\lambda+0) = E(\Lambda)$.

(v) Finalmente tenemos que mostrar que el operador autoadjunto $H' = \int \lambda\, dE(\Lambda)$ coincide con $H$. Como $H$ y $H'$ son autoadjuntos y como la unión de los rangos $M(\lambda,\mu) = M(\mu) \ominus M(\lambda)$ de $E(\mu) - E(\Lambda)$ es un centro de $H'$ (vease apéndice), es sufiente porbar que $M(\lambda,\mu) \subset D(H)$ y $Hu = H'u$ para $u \in M(\lambda,\mu)$. Para terminar esto, primero notemos que $M(\lambda,\mu)$ reduce a $H$ y que $\lambda(u,u) \leq \langle Hu,u\rangle \leq \mu(u,u)$ para $u \in D' = M(\lambda, mu) \cap D(H)$. Así $H$ es acotado en el último subconjunto y, como $D'$ es denso en $M(\lambda,\mu)$, $D'$ debe coincidir con $M(\lambda,\mu)$ por la cerradura de $H$. En otras palabras tenemos $M(\lambda,\mu) \subset D(H)$. Como $H$ tiene cota superior $\mu$ y cota inferior $\lambda$ en $M(\lambda,\mu)$, $H - \dfrac{(\lambda+\mu)}{2}$ tiene cota $\dfrac{(\mu-\lambda)}{2}$.
Ahora dividadmos el intervalo $I = (\lambda,\mu]$ en $n$ subintervalos iguales $I_1,\ldots,I_n$ y sea $\lambda_k$ el punto intermendio de $I_k$, $K = 1,\ldots,n$. Defina $E(I_k)$ como en (6) y sea $U - k = E(I_k)u$. Tenemos $u = u_1 + \cdots + u_n$ y los $u_k$ son mutuamente ortogonales. Como cada $E(I_k)\mathcal{H}$ reduce a $H$, $Hu_k$ pertenece a $E(I_k)\mathcal{H}$ y así los vectores $(h-\lambda)u_k$ son también mutuamente ortogonales. Además, tenemos $||(H-\lambda_k)u_k|| \leq (\mu-\lambda)||u_k||/2n$ por la observación hecha antes. Así

$$
\begin{aligned}
||Hu - \sum \lambda_k u_k||^2 &= ||\sum_k (H-\lambda_k)u_k||^2 \\
&= \sum_k ||(H+\lambda_k)u_k||^2 \\
&\leq \frac{(\mu-\lambda)}{4n^2}\sum_k ||u_k||^2 \\
&= \frac{\mu-\lambda)^2}{4n^2}||u||^2.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Dejando que $n \to \infty$ obtenemos $\lim \sum_k \lambda_k E(I_k)u = Hu$. Esto implica que $\langle h'u, v\rangle = \int \lambda\, dE(\Lambda)u, v\rangle = \lim \sum \lambda_k \langle E(I_k)u, v\rangle = \langle hu, v\rangle$ para toda $v \in \mathcal{H}$, entonces $H'u = Hu$ como queríamos mostrar.■

## A.10 EL ESPECTRO DE UN OPERADOR AUTOADJUNTO

Sea $H$ un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tenemos la representación espectral

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, deE(\Lambda),$$

donde $\{E(\Lambda)\}$ es la familia espectral continua por la derecha asociada a $H$. Ponemos

$$P(\lambda) = E(\Lambda) - E(\lambda - 0) \tag{16}$$

$P(\lambda) \neq 0$ si y sólo si $\lambda$ es un eigenvalor de $H$;en este caso $P(\lambda)$ es la proyección ortognal al eigenespacio asociado. Las $P(\lambda)$ para $\lambda$ diferentes son mutuamente ortogonales: $P(\lambda)P(\mu) = 0$ para $\lambda \neq \mu$.

El conjunto de todos los eigenvalores de $H$ es llamado el *espectro puntual* de $H$, $\Sigma_p(H)$ en símbolo.Si $H$ es separable es un conjunto a lo más numerable.

Sea $\mathcal{H}_p$ la variedad lineal cerrada generada por todos los $P(\lambda)\mathcal{H}$. Si $|H_p = \mathcal{H}$, se dice que $H$ tiene espectro puntual puro (esto no implica que el espetro de $H$ sea igual a su espectro puntual, ya que el espectro es un conjunto cerrado pero el espectro puntual no necesariamente es cerrado.

# BIBLIOGRAFÍA


Adams, R.

[1] Sobolev spaces. Academic Press, New York, 1975.

Agmon, S.

[1] Spectral Properties of Schrödinger Operators and Scattering Theory. Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV Vol. II n.2 (1975).

[2] On the spectral theory of the laplacian on non compact, hyperbolic manifolds, in "Proc. P.D.E. Conference, St. Jean de Montes", pp. 1-16 1987

Bardos , C. Guillot, J.C., and Ralston J.V.

[1] La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la thérie de la diffusion, Comm. Partial Differential equations 7, 905-958 (1982).

Bardos, C., Lebeau G. and Rauch,J.

[1] Scattering frecuencies and grevey 3 singularities, Invent. Math. 90 77-114 (1987).

Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L.

[1] First order interpolation inequalities with weights. Compositio Math. 53, 259-275 (1984).

Cooper, J., and Strauss, W.

[1] Representations of the scattering operator for moving obstacles. Indiana Univ. Math. J. 28, 643-671 (1979).

[2] Scattering of waves by periodically moving bodies. J. Funct. Anal. 47, 180-229 (1982).

Courant and Hilbert.

[1] Methods of Mathematical Physics. Wiley.

Dunford, N. and Schwartz, J.T.

[1] Linear Operators. Interscience Publishers.

Enss, V.

[1] Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering. Comm. Math. Phys. 65 285-291 (1978).

Foias, C., and Sz-Nagy,B.

[1] "Harmonic Analysis of operators on a Hilbert Space". North Holland, Amsterdam, 1970.

Friedlander, F. G.

[1] Introduction to the theory of distributions. Cambridge University Press. 1982.

Gilbarg, D., Trudinger, N.

[1] Elliptic Partial differential equations of second order. Springer Verlag, 1983.

Helton, J.W.

[1] Discrete time systems, operator models, and scattering theory. J. Funct. Anal. 16 15-38 (1974).

[2] Systems with infinite dimensional state space; the Hilbert space approach. Proc. IEEE 64, 145-159 (1976).

Hörmander L.

[1] Linear Partial Differential Operators. Springer Verlag.

Kato, T.

[1] Perturbation Theory for linear Operators. Springer Verlag Vol 132 (1966).

[2] Scattering Theory with two Hilbert Spaces.

Lax, P. D., and Phillips, R.S.

[1] " Scattering theory". Academic Press, New York, 1967.

[2] The acoustic equation with indefinite energy form and Schrödinger equation. J. Funct. Anal. 1, 37-83 (1967).

[3] Decaying modes for the wave equation in the exterior of an obstacle. Comm. Pure Appl. Math. 22. 737-787 (1969).

[4] A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering operator. Arch. Rat. Mech. Anal. 40 268-280 (1971).

[5] Scattering theory. Rocky Mountain J. Math. 1, 173-223 (1971).

[6] Scattering theory for the acoustic equation in an even number of space dimensionbs, Indiana Univ. Math. J. 22, 101-134 (1972).

[7] On the scattering frequencies of the laplace operator for exterior domains, Comm. Pure Appl. Math. 25, 85-101 (1972).

[8] Scattering theory for dissipative hyperbolic systems, J. Funct. Anal. 14, 172-235 (1973).

[9] "Scattering Theory for automorphic functions". Ann. of Math. Studies No. 87. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[10] The scattering of sound waves by an obstacle. Comm. Pure Appl. Math. 30, 195-233 (1977).

[11] The time delay operator and a relates trace formula in "Topics in Functional Analysis" (I. Gohberg and M. Kac eds), pp. 197-215. Academic Press, New York, 1978.

[12] Scattering Theory for domains with non-smooth boundaries. Arch. Rat. Mech. Anal. 68. 93-98 (1978).

[13] Scattering Theory for automorphic functions, Bull. Amer. Math. Soc. 2. 261-295 (1980).

[14] Translation representations for the solution of the non-Euclidean wave equation, I and II, Comm. Pure Appl. Math. 32, 617-667 (1979); 34, 347-358 (1981).

[15] Translation representation theorem. Integral Equations Operator Theory 4. 416-421 (1981).

[16] A local Paley Wiener theorem for the Radon transform of $L^2$ functions in a non Euclidean setting. Comm. Pure Appl. Math. 35, 531-554 (1982).

Lax, P. D., Morawetz, C.S. and Phillips, R. S.

[1] Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle. Comm. Pure Appl. Math. 16, 477-486 (1963).

Majda, A.

[1] Coercive inequalities for nonelliptic symetric systems. Comm. Pure Appl. Math. 28, 49-89 (1975).

Melrose, R. B.

[1] Singularities and energy decay in acoustacle scattering. Duke Math. J. 46, 43-59 (1979).

[2] Scattering Theory and the trace of de wave group. J. Funct. Anal. 45 29-40 (1982).

[3] Polynomial bound on the number of scattering poles. J. Funct. Anal. 53 287-303 (1983).

Morawetz, C. S., Ralston, J. V., and Stauss W.

[1] Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles. Comm. Pure Appl. Math. 30, 447-508 (1977).

Petkov, V. and Popov, G.

[1] asymptotic behavior of the scattering phase for non trapping obstacles. Ann. Inst. Fourier (grenoble) 32, 111-149 (1982).

Phillips, R. S.

[1] A remark on the proceding paper of C. S. Morawetz and D. Ludwig. Comm. Pure Appl. Math. 22, 207-211 (1969).

[2] Scattering Theory for the wave equation with short range perturbation I and II, Indiana Univ. Math. J. 31, 609-639 (1982); 33, 831-846 (1984).

Phillips, R. S., Wiscott, B., and Woo, A. C.

[1] Scattering theory for the wave equation on a hyperbolic manifold. J. Funct. Anal. 74, 346-398 (1987)

Reed, M. and Simon, B.

[1] Methods of Modern Mathematical Physiscs. Vol. I, II, III, IV. Academic Press.

Schwartz, L.

[1] Théorie des distributions. Hermann, Paris 1966.

Wiskott, B.

[1] Scattering theory and spectral representation of short range perturbations in hyperbolic space. Dissertation, Stanford University, 1982.

Woo, A.C.

[1] Scattering theory on real hyperbolic spaces and their compact perturbations. Dissertation, Stanford University, 1980.