

23
2E



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGORITMOS PARA LA EVALUACION DE LAS
FUNCIONES ELEMENTALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

PATRICIA

MATA

HOLGUIN



MEXICO, D. F.

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

1995

FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Baule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

ALGORITMOS PARA LA EVALUACION DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES
realizado por PATRICIA MATA HOLGUIN

con número de cuenta 5801511-7 , pasante de la carrera de MATEMATICO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Dr. PABLO BARRERA SANCHEZ
Propietario M. en C. Ma. ELENA GARCIA ALVAREZ
Propietario M. en C. JOSE LUIS NAVARRO URRUTIA
Propietario FIS. FRANCO TOLEDO DE LA CRUZ
Suplente M. en C. JOSE GUERRERO GRAJALES
Suplente

Consejo Departamental de Matemáticas

Dr. c. ISABEL PUGA ESPINOSA

D E D I C A T O R I A

**A MIS HIJOS,
A QUIENES TANTO AMO**

VIRGINIA

RICARDO

PATRICIA

**A MI FAMILIA:
TIOS, PRIMOS Y SOBRINOS.
A LA MEMORIA DE MIS PADRES
CARLOS Y ARMIDA
Y A LA DE
MI HERMANO CARLOS**



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Basile
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

ALGORITMOS PARA LA EVALUACION DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES
realizado por PATRICIA MATA HOLGUIN

con número de cuenta 5801511-7 , pasante de la carrera de MATEMATICO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Acatamiento

Director de Tesis Dr. PABLO BARRERA SANCHEZ
Propietario M. en C. Ma. ELENA GARCIA ALVAREZ
Propietario M. en C. JOSE LUIS NAVARRO URRUTIA
Propietario FIS. FRANCO TOLEDO DE LA CRUZ
Suplente M. en C. JOSE GUERRERO GRAJALES
Suplente

Consejo Departamental de Matemáticas

DR. ISABEL PUCA ESPINOSA

D E D I C A T O R I A

A MIS HIJOS,
A QUIENES TANTO AMO

V I R G I N I A

R I C A R D O

P A T R I C I A

A MI FAMILIA:
TIOS, PRIMOS Y SOBRINOS.
A LA MEMORIA DE MIS PADRES
CARLOS Y ARMIDA
Y A LA DE
MI HERMANO CARLOS

A G R A D E C I M I E N T O S

A mi amigo y condiscípulo PABLO BARRERA SANCHEZ, por su valiosa asesoría y dirección de tesis.

A mis maestros y compañeros de la Facultad, muy especialmente a RAFAEL PEREZ PASCUAL; quien me ayudó a tramitar mi historial académico.

A JOSE LUIS NAVARRO URRUTIA. por su apoyo moral, ayuda bibliográfica y por sus consejos en la elaboración de este trabajo.

A mi sobrino JESUS RUIZ MATA ; quien me prestó su computadora para realizar este trabajo.

A MARIA ELENA GARCIA ALVAREZ, FRANCO TOLEDO Y JOSE GUERRERO por fungir como síndacos en mi examen profesional y por sus consejos.

A HORTENSIA ORDOÑES RAMOS y GUILLERMO CORONEL ORTEGA por darme su apoyo moral para la realización de mi tesis.

Al señor JESUS SOLORZANO , quien me ayudó a tramitar el servicio social.

A la señora Ma. DE LA LUZ HERNANDEZ MANCILLA, quien se tomó la molestia de buscar mi historial académico.

A todas las personas que dieron su apoyo durante mi carrera y durante la realización de mi tesis.

I N D I C E

	pág.
INTRODUCCION	6
ALGORITMOS CLASICOS	
Método para evaluar x^n	10
Método para evaluar $ \sqrt{x} $, con $x > 0$	13
Método para evaluar $ \sqrt[3]{x} $, con $x > 0$	23
Método para evaluar $\log x$, con $x > 0$	35
Definiciones del logaritmo de	
Napier	35
Bürqi	36
Definición del número " e "	39
Definiciones del logaritmo de	
Brigs	40
Glasser	41
Propiedades de los logaritmos de	
Brigs	42
Glasser	45
Construcción de las tablas de	
Napier y Bürqi	51
Brigs	53
Newton	55
Uso de las tablas	58
Método para evaluar las Funciones trigonométricas	62
Definiciones de Euclides	62
Definición en el plano cartesiano	63

Propiedades	64
Algoritmos para la evaluación de las Funciones trigonométricas	71
Cálculo de las funciones para los ángulos de :	
0, $\pi/2$, π , $3\pi/2$ y 2π	71
30°, y 60°	71
45°	72
10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 80° y 90°	72
Ángulos en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$	74
Uso de las tablas	77
ALGORITMOS ARITMETICOS	81
Algoritmo para evaluar a^n	81
Algoritmo para evaluar \sqrt{x}	84
Método para cambiar decimales a racionales	90
Algoritmo para evaluar $\sqrt[3]{x}$	92
Algoritmo para evaluar $\sqrt[n]{x^m}$	95
Algoritmo para evaluar $\log x$	97
Algoritmo para evaluar $\text{sen } x$	105
Algoritmo para evaluar $\text{cos } x$	
1er. Método	109
2o. Método	110
3er. Método	113
Algoritmo para evaluar $\text{tan } x$	115
1er. Método	115
2o. Método	116
Algoritmo para evaluar las funciones recíprocas	117
CONCLUSIONES	119
BIBLIOGRAFIA	123

I INTRODUCCION

Las funciones elementales son:

Algebraicas:

$$f(x) = x^n, \text{ con } 0 \leq x \text{ y } n \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \text{ con } x > 0$$

Logarítmicas: con $x > 0$,

$$f(x) = \ln x,$$

$$f(x) = \log x,$$

$$f(x) = e^x, \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

Trigonométricas:

$$\text{Con } 0 \leq x \leq \pi,$$

$$f(x) = \text{sen} x$$

$$f(x) = \text{cos} x$$

$$f(x) = \text{tan} x$$

Y sus recíprocas:

$$f(x) = \text{cot} x$$

$$f(x) = \text{sec} x$$

$$f(x) = \text{csc} x$$

Las Instituciones docentes de Nivel Medio Superior contienen dentro sus programas de Matemáticas la enseñanza de las funciones elementales , sus definiciones , y cómo aplicarlas a la resolución de algunos problemas; cuyo planteo da lugar a este tipo de funciones; para encontrar las soluciones se consultan "tablas" especiales o se recurre a las calculadoras científicas de bolsillo.

Pero , con el auge de las corrientes constructivistas en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje y a que cada vez, mayor número de profesores han asumido las teorías epistemológicas. A grandes razgos citaré: Teoría de Piaget, sustenta que el alumno tiene una estructura cognitiva, que él construye a partir de desestructurar sus conocimientos, mediante la problematización, para crear condiciones que propicien el desarrollo de la estructura de conocimientos nuevos y lograr un equilibrio temporal, hasta que el estudiante accede a nuevos conocimientos. Las teorías de Vigotsky, que aseveran que no hay desarrollo sin apredizaje, y la de Ausubel, quien ha descubierto que no puede haber aprendizaje, si éste no es sigificativo.

Debido a que el profesor ha retomado estos conceptos como estrategias didácticas para sus cursos de Matemáticas, el estudiante moderno (Del 90 a la fecha) ya no se conforma con que le proporcionen los conocimientos "digeridos" a través de TABLAS prefabricadas o de apretar un botón en sus calculadoras científicas. Afortunadamente, el estudiante de hoy en día, desea conocer la forma en que se realizan los cálculos para evaluar las funciones elementales.

Para contestar estas preguntas el docente necesita recurrir a conocimientos más avanzados que el Álgebra Elemental y la Trigonometría, como son el Cálculo Diferencial e Integral y de una introducción al Análisis Numérico. Pero el nivel de los estudiantes, Medio o Medio Superior, no es suficiente, ya que, como se sabe, el conocimiento de las Matemáticas es progresivo y paulatino.

Ante tales inquietudes de los jóvenes y dilema de los profesores, decidí realizar esta tesis basada en un artículo del Doctor Pablo Barrera Sánchez, en el que propone algoritmos sencillos para la evaluación de las funciones elementales.

Con este propósito, incluí la forma usual en que se calcularon estas funciones, a las que llame "Algoritmos Clásicos", en seguida, propuse algunos algoritmos para evaluarlas, que por su sencillez, llame "Algoritmos Aritméticos". Y por último, una contrastación entre ambos métodos y las conclusiones de esta comparación.

II M E T O D O S C L A S I C O S
 P A R A E V A L U A R L A S
 F U N C I O N E S E L E M E N T A L E S

ALGORITMO P A R A E V A L U A R x^n

Para $0 \leq x$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Para evaluar x^n , se realizan $n - 1$ multiplicaciones , es decir :

$$x^1 = x_0$$

$$x^2 = x \cdot x_0 = x_1$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x_0 = x_1 \cdot x_0 = x_2$$

⋮

$$x^n = x \cdot x \cdot x \dots \cdot x = x_{n-1}$$

Y esto proviene directamente de la propiedad asociativa de la multiplicación de los números reales

EJEMPLO , para evaluar $(5.5)^5$

$$(5.5) = 5.5$$

$$(5.5)^2 = (5.5)(5.5) = 30.25$$

$$(5.5)^3 = (5.5)(5.5)(5.5) = (30.25)(5.5) = 166.375$$

$$(5.5)^4 = (5.5)(5.5)(5.5)(5.5) = (166.375)(5.5) = 915.0625$$

$$(5.5)^5 = 915.0625(5.5) = 5032.84375.$$

Si $0 \leq x$, con $x \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$(-x)^n = + x^n \text{ , si } n \text{ es par}$$

$$(-x)^n = - x^n \text{ , si } n \text{ es impar}$$

EJEMPLO:

$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$

$$(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243$$

Esto es claro de la regla de los signos para la multiplicación

Si n es un entero λ $n < 0$, entonces de la definición:

$$(x)^{-n} = 1/x^n = (1/x)(1/x)(1/x) \dots 1/x^n = 1/x_{n-1}$$

Con n-1 multiplicaciones.

Además. por la regla de los signos para el producto:

$$(-x)^{-n} = 1/x^n > 0 \text{ . si } n \text{ es par}$$

$$(-x)^{-n} = -(1/x)^n < 0 \text{ . si } n \text{ es impar}$$

EJEMPLO:

$$(1.2)^{-4} = 1/2.0736 > 0$$

EJEMPLO:

$$(1.7)^{-3} = -1/(4.913) < 0.$$

ALGORITMO PARA EVALUAR \sqrt{x} , con $x > 0$, número real.

$$|\sqrt{x}| = Y, \text{ con } Y \in \mathbb{R}$$

donde:

$$x = a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 b_1 b_2 \dots, \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

es la expansión decimal de x , dondè :

$$Y = y_0 \cdot y_1 y_2 \dots y_n (10)^{j/2}, \text{ con } j = k/2, j \in \mathbb{N}$$

es la expansión decimal de Y . (Si k es impar, se agrega un cero a la izquierda de x).

El algoritmo se aplica de la siguiente manera:

EJEMPLO:

$$\text{Evaluar } \sqrt{1034}$$

Como el número que vamos a evaluar tiene 4 dígitos, $k=4$; entonces el algoritmo se aplica separando las cifras de la parte entera de dos en dos:

Es decir:

$$\text{Sean : } w_0 = a_k a_{k-1}$$

$$w_1 = a_{k-2} a_{k-3}$$

$$w_{k/2} = a_2 a_1$$

Y , la parte decimal:

$$b_1 b_2 = w_{k+1/2}$$

$$b_3 b_4 = w_{k+2/2}$$

$$\text{Entonces } X = w_0 w_1 \dots w_k w_{k+1/2} \dots = w_0 \cdot w_1 \dots w_k \quad (10)^{k/2} = 10.34(10)^2$$

Entonces el algoritmo se aplica de la siguiente manera:

Primero buscamos un número dígito y_0 , cuyo cuadrado sea el máximo número

$$y_0^2 \leq w_0 < (y_0 + 1)^2$$

$$3^2 \leq 10 < 4^2$$

$$\text{Llamemos } x_0 = \frac{y_0}{10} = 3$$

$$w = w_0 w_1 = 10.34$$

Entonces buscamos un número dígito y_1

tal que sea el máximo dígito que cumpla la condición:

$$(x_0 + y_1/10)^2 \leq w < (x_0 + (y_1 + 1)/10)^2$$

$$9 + 6y_1/10 + y_1^2 / 100 \leq 10.34$$

$$2(60 + 2) = 124 \leq 134 < 3(63) = 189$$

Entonces el número buscado es $\underline{Y_1 = 2}$ Llamemos: $X_1 = Y_n + Y_1/10 = 3.2$

Ahora busquemos otro número, tal que su cuadrado sea el máximo número que cumpla la condición:

$$(X_1 + Y_2/10^2)^2 \leq W < (X_1 + (Y_2+1)/10^2)^2$$

$$(3.2)^2 + 2(3.2)Y_2/10^2 + Y_2^2/10^4 \leq 10.34$$

Multiplicando por 10^4 :

$$102400 + 640Y_2 + Y_2^2 \leq 103400$$

$$Y_2(640 + Y_2) \leq 1000$$

$$1(641) = 641 \leq 1000 < 2(642) = 1284$$

Entonces el número buscado es $\underline{Y_2 = 1}$

$$\text{Llamemos } X_2 = X_1 + Y_2/10 = 3.21$$

Ahora busquemos otro número, dígito, Y_3 , tal que elevado al cuadrado sea el máximo número que cumpla que:

$$(X_2 + Y_3/10^3)^2 \leq W < (X_2 + (Y_3 + 1)/10^3)^2$$

Entonces:

$$(3.21)^2 + 2(3.21)Y_3/10^3 + Y_3/10^6 \leq W$$

$$5(6425) = 32125 \leq 35700 < 6(6426) = 3856$$

Entonces el número buscado es $\underline{Y_3 = 5}$

$$Y = 3.215(10) = 32.15 \quad ; \quad X = 10.34(10)^2 = 1034$$

$$(3215)^2 = 1033.6225 \approx 1034$$

Si se requiere mayor precisión, el proceso continúa, ó si el residuo es cero, el algoritmo termina.

EJEMPLO:

Evaluar $\sqrt{535}$

Como X tiene 3 dígitos, k es impar, entonces para aplicar el algoritmo, agregamos un cero a la izquierda del número 0535, y procedemos a separar las cifras de dos en dos como en el ejemplo anterior:
Con $W = 05.35$; $X = W(10)^2$; $Y = Y_0, Y_1 \dots (10)$

Primero busquemos un número cuyo cuadrado sea el máximo número, tal que:

$$Y_0^2 \leq W_0 < (Y_0 + 1)^2$$

$$2^2 = 4 \leq 5 < 3^2 = 9$$

El primer número buscado es $Y_0 = 2$.

Ahora, busquemos otro dígito cuyo cuadrado sea el mayor número cuyo cuadrado cumple la condición:

$$(Y_0 + Y_1/10)^2 \leq W < (Y_0 + (Y_1 + 1)/10)^2$$

$$2^2 + 4Y_1/10 + Y_1^2/10^2 \leq 5.35$$

Multiplicando por 10^2 :

$$400 + 40Y_1 + Y_1^2 \leq 535$$

$$Y_1(40 + Y_1) \leq 535 - 400 = 135$$

$$3(43) = 129 \leq 135 < 4(44) = 176$$

Entonces el número buscado es $Y_1 = 3$.

Llamemos $X_1 = Y_0 + Y_1/10 = 2.3$.

Busquemos ahora otro número cuyo cuadrado sea el máximo:

$$(X_1 + Y_2/10^2)^2 \leq W < (X_1 + (Y_2 + 1)/10^2)^2$$

$$(2.3)^2 + 2(2.3)Y_2/10^2 + Y_2^2/10^4 \leq 5.35$$

Multiplicamos por 10^4 :

$$Y_2(460 + Y_2) \leq 53500 - 52900 = 600$$

Entonces, el número buscado es $Y_2 = 1$

$$1(461) = 461 \leq 600 < 2(462) = 924$$

Como $Y = 2.31(10)$; $X = 5.35(10)^2 = 535$

$$(23.1)^2 = 533.61 \approx 535$$

Si se requieren más decimales el procedimiento puede continuar o se termina si el residuo es cero.

ALGORITMO GENERAL:

En general, el algoritmo clásico se basa en las siguientes ideas:

Primero: Encontrar una sucesión $\{x_n\}$ que sea convergente a

$$|\sqrt{x}|, \text{ es decir: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = |\sqrt{x}|$$

Segundo: $\{Y_n\}$ debe ser seleccionada de tal manera que cada Y_n sea dígito de la serie decimal que representa a Y , como se indicó en los ejemplos:

$$\text{Si } X = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 \cdot b_1 b_2 \dots, \text{ con } k \text{ par.}$$

Entonces el algoritmo se aplica separando las cifras de X , de la siguiente manera:

$$W_0 = a_k a_{k-1} : W_{k+1/2} = b_1 b_2$$

$$W_1 = a_{k-2} a_{k-3} : W_{k+2/2} = b_3 b_4$$

$$\vdots$$

$$W_{k/2} = a_2 a_1 : W_{k+n/2}$$

Donde $X = W_0 \cdot W_1 \dots W_{k/2} \dots W_{k+n/2} \dots (10)^{k/2}$, con $k, n \in \mathbb{N}$

Y , ambos, k y n son pares, agregando un cero a la izquierda de X , si las cifras son impares $X = 0 a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 \cdot b_1 b_2 \dots$ y/ó un cero a la derecha, si las cifra dncial de X es impar.

Entonces $Y_n = Y_0 \cdot Y_1 \dots Y_m \dots (10)^{j/2}$, con $j = k/2$; $j, m \in \mathbb{N}$

Entonces conviene seleccionar y_0 , tal que :

$$y_0 = \max \{ y \in \mathbb{N} \mid y^2 \leq x \}$$

Entonces:

$$y_0^2 \leq W_0 < (y_0 + 1)^2$$

$$\text{llamemos: } \begin{cases} y_0 = x_0 \\ W_0 - y_0^2 = z_0 \end{cases}$$

De la desigualdad:

$$y_0^2 \leq w \leq y_0^2 + 2y_0 + 1$$

obtenemos:

$$0 \leq z_0 < 2y_0 + 1$$

$$z_0 < r_0$$

$$\text{con } r_0 = 2y_0 + 1$$

Consideremos ahora la desigualdad:

$$(y_0 + y_1/10)^2 \leq w \leq [y_0 + (y_1 + 1)/10]^2$$

$$\text{entonces: } y_0^2 + 2y_0 y_1/10 + y_1^2/10 \leq w$$

$y_1 \in \mathbb{N}$, conforme a la selección de y_0 .

multiplicando por 10^2

$$y_0^2 10^2 + 2y_0 y_1 10 + y_1^2 \leq 10^2 w$$

factorizando:

$$y(2y_0 10 + y_1) \leq (w - y_0^2) 10^2$$

entonces, conviene seleccionar y_1 , tal que:

$$y_1 = \max \{ y \in \mathbb{N} \mid y(2y_0 10 + y) \leq 10^2 z_0 \}$$

con y_1 dígito

$$\text{llamemos: } \begin{cases} x_1 = y_0 + y_1/10 \\ z_1 = w - x_1^2 \end{cases}$$

De la desigualdad:

$$x_1^2 \leq w < [y_0 + (y_1 + 1)/10]^2 = (x_1 + \frac{1}{10})^2$$

se tiene que:

$$0 \leq w - x_1^2 < 1/10^2 (2x_1 10 + 1)$$

$$0 \leq w - x_1^2 < 2/10 (x_1 + 1/20)$$

$$z_1 < r_1$$

$$\text{con } r_1 = 2/10(x_1 + 1/20)$$

Consideremos la desigualdad:

$$(y_0 + y_1/10 + y_2/10^2)^2 = (x_1 + y_2/10^2)^2 \leq \\ \leq w < [x_1 + (y_2 + 1)/10^2]^2$$

De $(x_1 + y_2/10^2)^2 \leq w$, se tiene

$$x_1^2 + 2x_1 y_2/10^2 + y_2^2/10^4 \leq w < [x_1 + (y_2 + 1)/10^2]^2$$

multiplicando por 10^4 :

$$10^4 x_1^2 + 2x_1 y_2 10^2 + y_2^2 \leq 10^4 w$$

factorizando:

$$y_2(2x_1 10^2 + y_2) \leq 10^4 (w - x_1^2)$$

$$y_2(2x_1 10^2 + y_2) \leq 10^4 z_1$$

Entonces conviene elegir y_2 , tal que

$$y_2 = \max\{y \in \mathbb{N} \mid y(2x_1 10^2 + y) \leq 10^4 z_1\}$$

llamemos: $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 + y_2^2/10 \\ z_2 = w - x_2 \end{array} \right.$ con y dígito

De la desigualdad:

$$x_2^2 \leq w < (x_2 + 1/10^2)^2 = x_2^2 + 2x_2/10^2 + 1/10^4$$

implica que:

$$0 \leq w - x_2^2 < 1/10^2 (2x_2 \cdot 10^2 + 1/10^2)$$

$$0 \leq z_2 < 2/10^2 [x_2 \cdot 10^2 + 1/2(10)^2]$$

$$z_2 < r_2$$

$$\text{con } r_2 = 2/10 [x_2 \cdot 10^2 + 1/2 (10)^2]$$

En general, por inducción:

Consideremos la desigualdad:

$$(x_{n-1} + y_n/10^n)^2 \leq w < [x_{n-1} + (y_n + 1)/10^n]^2$$

con y_n dígito porque

$$(y_{n-1} + 1)^2 > w \quad \text{conforme a la selección de } y_{n-1}$$

De la desigualdad:

$$x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} y_n / 10^n + y_n^2 / 10^{2n} \leq w$$

multiplicando por 10^{2n} tenemos que:

$$x_{n-1}^2 \cdot 10^{2n} + 2x_{n-1} y_n \cdot 10^{2n} + y_n^2 \leq 10^{2n} w$$

$$2x_{n-1}y_n 10^2 + y_n^2 \leq 10^{2n} W - 10^{2n} x_{n-1}^2$$

factorizando:

$$y_n(2x_{n-1} 10^2 + y_n) \leq 10^{2n} (W - x_{n-1}^2)$$

$$y_n(2x_{n-1} 10^2 + y_n) \leq 10^{2n} z_{n-1}$$

Entonces conviene seleccionar y_n , tal que :

$$y_n = \max \{ y \in \mathbb{N} \mid y(2x_{n-1} 10^2 + y) \leq 10^{2n} z_{n-1} \}$$

$$\text{Llamemos: } \begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_n/10^n \\ z_n = W - x_n^2 \end{cases}$$

Entonces de la desigualdad:

$$x_n^2 \leq W < (x_n + 1/10^n)^2$$

$$x_n^2 \leq W < x_n^2 + 2x_n/10^n + 1/10^{2n}$$

$$0 \leq W - x_n^2 < 2/10^{2n} [x_n 10^n + 1/2(10^n)]$$

$$z_n < r_n \text{ con } r_n = 2/10^{2n} [10^n x_n + 1/2(10^n)]$$

Hasta aquí, se encontró una sucesión $\{y_n\}$ de tal manera que enéximo dígito es la expansión decimal de \sqrt{x}

Esto es: Como $X = W(10)^{k/2}$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) &= y_0 + y_1/10 + y_2/10^2 + \dots + y_n/10^n + \dots \\ &= y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k/10^k = X^* \end{aligned}$$

Es decir que $\{x_n\}$ tiende a un límite y ese límite es la expansión decimal de X^* .

$$x_k \leq x_{k-1} \leq x_{k-2} \leq \dots \leq X^*$$

Ahora demostraremos que la sucesión residual $\{r_n\} \rightarrow 0$

$$r_0 = 2y_0 + 1$$

$$r_1 = 1/10^2 (2x_1 10 + 1) = 2/10 [x_1 + 1/2(10)]$$

$$r_2 = 1/10^4 (2x_2 10 + 1) = 2/10^2 [x_2 + 2/10(x_2 + 1/2(10)^2)]$$

⋮

$$r_n = 1/10^{2n} (2x_n 10 + 1) = 2/10^n [x_n + 1/2(10^n)]$$

Vamos a ver que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ r_n \} \rightarrow 0$

Demostración:

$$r_n = 2/10^n [x_n + 1/2(10^n)]$$

además :

$$x_n = y_0 + y_1/10 + \dots + y_n/10^n < y_0 + 1$$

entonces:

$$r_n < 2/10^n [y_0 + 1 + 1/2(10^n)]$$

por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n) = 0 \quad \blacksquare$$

Además: $0 < z_n < r_n$

Pero: $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n) = 0$

por tanto: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x - x_n^2) = 0$

por tanto: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^2 = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2$

por tanto: $x = X^{*2} \Rightarrow |\sqrt{x}| = X^*$ \blacksquare

ALGORITMO PARA EVALUAR $\sqrt[k]{X}$, con $X > 0$, número real.

donde :

$X = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 . b_1 b_2 \dots$ es la expansión decimal de

X , con $k = 1, 2, \dots$

El algoritmo se aplica: 1^o)

Separando las cifras enteras de tres en tres

Esto es :

$$W_0 = a_k a_{k-1}$$

$$W_{(k+1)/3} = b_1 b_2 b_3$$

$$W_1 = a_{k-2} a_{k-3}$$

$$W_2 = a_{k-4} a_{k-5}$$

$$W_{(k+2)/3} = b_4 b_5 b_6$$

⋮

⋮

$$W_{k/3} = a_3 a_2 a_1$$

Entonces: $X = W_0 W_1 \dots W_{k/3} W_{k+1} \dots (10)^{k/3}$

Si W_0 tiene 1 ó 2 dígitos, entonces agregamos 1 ó 2 ceros, para completar la terna.

EJEMPLO:

$$\text{Si } X = 2\ 341 \Rightarrow W_0 = 003, W_1 = 341$$

$$\text{Si } X = 25687 \Rightarrow W_0 = 025, W_1 = 687$$

De tal modo que : $W = W_0 \cdot W_1 W_2 \dots$

Entonces: $X = W(10)^{k/3}$, y aplicamos al algoritmo a W , donde:

$$Y = Y_0 \cdot Y_1 Y_2 \dots Y_n \dots (10)^j, \text{ con } j = k/3.$$

EJEMPLO: El algoritmo usual para calcular $\sqrt[3]{93}$

Primero Examinamos los números cuyo cubo es menor o igual a 93:

$$3^3 = 27 < 93$$

$$4^3 = 64 < 93$$

$$5^3 = 125 > 93$$

Entonces seleccionamos $y_0 = 4$ como el primer dígito

Segundo: Observamos la desigualdad:

$$(4 + y/10)^3 < 93$$

$$64 + 3(4)^2 y_1/10 + 3(4)y_1^2/10^2 + y_1^3/10^3 < 93$$

$$64 + 48y_1/10 + 12y_1^2/10^2 + y_1^3/10^3 < 93$$

$$y_1/10 + 12y_1^2/10^2 + y_1^3/10^3 < 93 - 64$$

$$y_1(4800 + 120y_1 + y_1^2) < 29$$

Entonces buscamos un dígito que cumpla la condición anterior:

Si $y_1 = 5$

$$\begin{aligned} & 5[4\ 800 + 120(5) + (5)^2] = \\ & = 5[4\ 800 + 600 + 25] = 27\ 125 < 29\ 000 \end{aligned}$$

Si $y_1 = 6$

$$\begin{aligned} & 6[4\ 800 + 120(6) + 6^2] = \\ & = 6[4\ 800 + 720 + 36] = 33\ 336 > 29\ 000 \end{aligned}$$

Entonces el mayor dígito que cumple la condición es $y_1 = 5$

Entonces la desigualdad:

$$(4.5 + y_1/10^2)^3 < 93$$

$$(91.125 + 3(4.5)^2 y_2/10^2 + 3(4.5)y_2^2/10^4 + y_2^3/10^6) < 95$$

multiplicando por 10^6 . tenemos que:

$$91\ 125\ 000 + 607\ 500y_1 + 1\ 035y_2^2 + y_3^3 < 93\ 000\ 000$$

factorizando:

$$y_2(607\ 500 + 1\ 035y_2 + y_2^2) < 1\ 875\ 000$$

entonces buscamos un dígito que sea el mayor que cumpla la condición anterior:

$$\text{Si } y_2 = 3$$

$$3[607\ 500 + 1\ 035(3) + 3^2] =$$

$$= 3[607\ 500 + 3\ 105 + 9] = 1\ 831\ 842 = 1\ 875\ 000$$

$$\text{Si } y_2 = 4$$

$$4[607\ 500 + 1\ 035(4) + 4^2] =$$

$$= 4[607\ 500 + 4\ 140 + 16] = 2\ 446\ 624 > 1\ 975\ 000$$

Entonces el siguiente dígito que nos conviene elegir es 3, por tanto:

$$(4.53)^3 + 92.959677 \approx 93$$

Si se requiere mayor precisión, se puede seguir seleccionando más dígitos decimales siguiendo el mismo procedimiento.

ALGORITMO GENERAL:

Se basa en las siguientes ideas:

1^o) Seleccionar una sucesión de tal manera que sea convergente, esto es :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \sqrt[3]{X}$$

El algoritmo se aplica de la siguiente manera :

$$\text{Si } X = a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 . b_1 b_2 \dots$$

es la sucesión decimal de X, separemos X en ternas de dígitos:

Sean:

$$W_0 = a_k a_{k-1} a_{k-2}$$

$$W_1 = a_{k-2} a_{k-3} a_{k-4}$$

⋮

$$W_{k/3} = a_3 a_2 a_1$$

⋮

Donde $k \in \mathbb{N}$, k múltiplo de tres, porque si W_0 tiene uno ó dos dígitos, entonces agregamos uno ó dos ceros a la izquierda de W_0 , para que k sea múltiplo de 3; y entonces aplicamos el algoritmo a W, donde $W = W_0 W_1 \dots W_{k/2} \dots = X(10)^{-k/3}$

EJEMPLO:

Si $X = 1\ 001$, entonces hacemos $X = 001\ 001$

y aplicamos el algoritmo a W, donde $W = 001.001 = X10^{-k/3}$

Si llamamos $W = W_0 W_1 \dots 10^{k/3} = X$

2o Seleccionar la sucesión de tal manera que cada $\{y_n\}$ sea dígito de la serie decimal de Y .

Observemos la desigualdad:

$$y_0^3 \leq W_0 < (y_0 + 1)^3$$

con $y_0 \in \mathbb{N}$, dígito

Entonces conviene seleccionar y_0 \rightarrow

$$y_0 = \max \{ y \in \mathbb{N} \mid y^3 \leq W_0 \}$$

$$\text{Llamemos: } \begin{cases} y_0 = x_0 \\ z_0 = W_0 - y_0^3 \end{cases}$$

De la desigualdad:

$$y_0^3 \leq W_0 < (y_0 + 1)^3$$

$$0 \leq W_0 - y_0^3 < y_0^3 + 3y_0^2 + 3y_0 + 1$$

Obtenemos:

$$0 \leq z_0 < 3(y_0^2 + y_0 + 1/3)$$

$$z_0 < r_0, \text{ con } r_0 = 3(y_0^2 + y_0 + 1/3)$$

Consideremos ahora, la desigualdad:

$$(y_0 + y_1/10)^3 \leq W < [y_0 + (y_1 + 1)/10]^3$$

con y_1 dígito conforme a su selección

Observemos el primer miembro de la desigualdad:

$$(x_0 + y_1/10)^3 \leq W$$

$$x_0^3 + 3y_1x_0^2/10 + 3y_1^2x_0/10^2 + y_1^3/10^3 \leq W$$

factorizando y multiplicando por 10^3 :

$$y_1 [3(10^2)x_0^2 + 3(10)x_0y_1 + y_1^2] \leq 10^3 (W - x_0^3)$$

$$y_1 [3(10^2)x_0^2 + 3(10)x_0y_1 + y_1^2] \leq 10^3 z_0$$

Entonces conviene seleccionar y_1 , tal que:

$$y_1 = \max \{ y \in \mathbb{N} \mid y [3(10^2)x_0^2 + 3(10)x_0y + y^2] \leq 10^3 z_0 \}$$

con y_1 dígito.

$$\text{Llamemos: } \begin{cases} x_1 = (x_0 + y_1/10) \\ z_1 = W - x_1^3 \end{cases}$$

De la desigualdad:

$$x_1^3 \leq W < x_0 + y_1/10^1 + 1/10^3 = (x_1 + (y_1+1)/10)^3$$

Obtenemos:

$$0 \leq W - x_1^3 < 3x_1^2(1/10) + 3x_1(1/10)^2 + 1/10^3 =$$

$$= 3/10^3(x_1^2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + 1/3)$$

$$\Rightarrow 0 \leq z_1 < 3/10^3(x_1^2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + 1/3)$$

$$\Rightarrow z_1 < r_1$$

$$\text{con } r_1 = 3/10^3(x_1^2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + 1/3)$$

Observemos ahora la desigualdad:

$$(y_0 + y_1/10 + y_2/10^2)^3 \leq W < [y_0 + y_1/10 + (y_2 + 1)/10^2]^3$$

con y_2 dígito conforme a la selección de y_1

Del primer miembro de la desigualdad anterior tenemos :

$$(x_1 + y_2/10^2)^3 \leq W$$

$$x_1^3 + 3x_1^2 y_2/10^2 + 3x_1 y_2^2/10^4 + y_2^3/10^6 \leq W$$

$$\Rightarrow 3x_1 y_2 / 10^2 + 3x_1 y_2^2 / 10^4 + y_2^3 / 10^6 \leq w - x_1^3 = z_1$$

multiplicando por 10^6 :

$$3x_1 y_2 / 10^4 + 3x_1 y_2^2 / 10^2 + y_2^3 \leq 10^6 z_1$$

factorizando tenemos que:

$$y_2 (3x_1 10^4 + 3x_1 y_2 10^2 + y_2^2) \leq 10^6 z_1$$

Entonces conviene seleccionar y_2 , tal que :

$$y_2 = \max\{ y \in \mathbb{N} \mid y(3x_1 10^4 + 3x_1 y 10^2 + y^2) \leq 10^6 z_1 \}$$

Llamemos:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + y_2 / 10^2 \\ z_2 = w - x_2^3 \end{cases}$$

De la desigualdad:

$$x_2^3 \leq w < (x_1 + y_2 / 10^2 + 1/10)^3 = (x_2 + 1/10)^3$$

Obtenemos:

$$0 \leq w - x_2^3 < 3x_2^2 (1/10)^2 + 3x_2 (1/10)^2 + [1/10^3]^2 =$$

$$0 \leq z_2 = 3/10^6 (x_2^2 10^4 + x_2 10^2 + 1/3)$$

$$\Rightarrow 0 \leq z_1 < 3x_1^2(1/10)^2 + 3x_1 10^{-1} + 1/3 =$$

$$\Rightarrow z_1 < r_1$$

$$\text{con } r_1 = 3/10^3 (x_1^2 10^2 + x_1 10 + 1/3)$$

Observemos ahora la desigualdad :

$$(y_0 + y_1/10 + y_2/10^2)^3 \leq w < (y_0 + y_1/10 + (y_2 + 1)10^2)^3$$

con y_2 dígito conforme a la selección de y_1

Del primer miembro de la desigualdad anterior se tiene:

$$(x_1 + y_2/10^2)^3 \leq w$$

$$x_1^3 + 3x_1^2 y_2/10^2 + 3x_1 y_2^2/10^4 + y_2^3/10^6 \leq w$$

$$\Rightarrow 3x_1^2 10^4 + 3x_1 y_2^2/10^4 + y_2^3/10^6 \leq w - x_1^3 = z_1$$

multilicando por 10^6 :

$$3x_1^2 y_2/10^4 + 3x_1 y_2^2 10^2 + y_2^3 \leq 10^6 z_1$$

factorizando, tenemos que:

$$y_2 (3x_1^2 10^4 + 3x_1 y_2 10^2 + y_2) \leq 10^6 z_1$$

$$\text{Llamemos : } \begin{cases} x_2 = x_1 + y_2/10^2 \\ z_2 = w - x_2^3 \end{cases}$$

Entonces, del segundo miembro de la desigualdad :

$$x_2^3 \leq w < (x_1 + y_2/10^2 + 1/10^2)^3 + (x_2 + 1/10^2)^3$$

$$0 \leq w - x_2^3 < (x_2 + 1/10^2)^3 - x_2^3$$

$$\Rightarrow 0 \leq z_2 < 3x_2^2(1/10^2) + 3x_2(1/10^4) + 1/10^6$$

$$\Rightarrow 0 \leq z_2 < 3[x_2^2/10^2 + x_2/10^4 + 1/3(10^{-6})]$$

$$\Rightarrow 0 \leq z_2 < 3/10^6 (x_2^2 10^4 + x_2 10^2 + 1/3)$$

$$z_2 < r_2$$

$$\text{con } r_2 = 3/10^6 (10^4 x_2^2 + 10^2 x_2 + 1/3)$$

EL ALGORITMO GENERAL , por inducción:

Considerando la desigualdad

$$(x_{n-1} + y_n/10^n)^3 \leq w < [x_{n-1} + (y_n + 1)/10^n]^3$$

con $0 \leq y_n < 10$

porque $(y_{n-1} + 1)^3 \leq w$, con $y_{n-1} \in \mathbb{N}$, $0 \leq y_n < 10$

De la desigualdad :

$$(x_{n-1} + y_n/10^n)^3 \leq w$$

Obtenemos:

$$x_{n-1}^3 + 3x_{n-1}^2 y_n/10^n + 3x_{n-1} y_n^2/10^{2n} + y_n^3/10^{3n} \leq w$$

de donde: multiplicando por 10^{3n} :

$$y_n (3x_{n-1}^2 10^{2n} + 3x_{n-1} y_n 10^n + y_n^2) \leq 10^{3n} z_{n-1}$$

Entonces conviene seleccionar y_n , tal que :

$$y_n = \max \{ y \in \mathbb{N} \mid y(3x_{n-1}^2 10^{2n} + 3x_{n-1} y 10^n + y^2) \leq 10^{3n} z_{n-1} \}$$

Llamemos:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_n/10^n \\ z_n = w - x_n^3 \end{cases}$$

Entonces de la desigualdad:

$$x_n^3 \leq w < (x_n^3 + 1/10^{3n})^3, \text{ obtenemos:}$$

$$0 \leq w - x_n^3 < x_n^3 + x_n^3 + 3x_n^2(1/10^{2n}) + 3x_n(1/10^{2n}) + 1/10^{3n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq z_n < 3/10^{3n} (x_n^2 10^{2n} + x_n 10^{2n} + 1/3)$$

$$z_n < r_n$$

$$\text{con } r_n = 3/10^{3n} (x_n^2 10^{2n} + x_n 10^{2n} + 1/3)$$

$$r_n = 3/10^{3n} [10^{2n} (x_n^2 + x_n/10^n) + 1/3(10^{2n})]$$

Además:

$$w_n = y_0 + y_1/10^2 + \dots + y_n/10^{2n} < y_0 + 1$$

Entonces:

$$r_n < 3/10^n [(y_0 + 1)^2 + (y_0 + 1)/10^n + 1/3(10^{4n})]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{r_n\} = 0$$

$$0 < z_0 < r_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = 0$$

Entonces: $x = w_{10}^{k/3}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x - x_n^3) = 0$$

$$\Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n^3\} = (\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\})^3$$

$$\Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n^3\} = (\lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\})^3$$

$$\Rightarrow x = x_n^{*3}$$

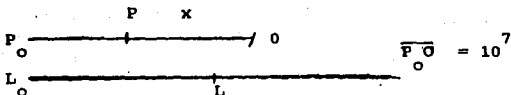
$$\Rightarrow |\sqrt[3]{x}| = x_n^*$$

F U N C I O N L O G A R I T M O

DEFINICION:

DEFINICION DE NAPIER : (Siglo XVI)

Esta definici3n incluye dos puntos movi3ndose en diferentes l3neas:



El punto P se mueve con velocidad inicial 10^7 a trav3s de \overline{PO} y con esta velocidad decrece. El punto L se mueve hacia la derecha con velocidad constante igual a 10^7 .

Entonces el segmento se define como $y = \overline{LO} = 10^7 t$, con t = intervalo de tiempo de manera que el logaritmo* de Napier se define como :

$$\text{Nog}x = n \quad , \quad \text{si } x = 10^7 (1 - 10^{-7})^n$$

La idea de Napier se bas3 en construir una tabla de valores de la progresi3n geom3trica :

$$x_k = 10^7 (1 - 10^{-7})^k \quad ; \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

El us3 las siguientes PROPIEDADES para n pequena :

- 1a $10^7 (1 - 10^{-7}) \approx n$
- 2a $(1 - 10^{-7})^{100} \approx (1 - 10^{-5})$
- 3a $(1 - 10^{-5})^{50} \approx (1 - 1/2000)$
- 4a $(1 - 1/200)^{20} \approx (1 - 1/100)$

Y as3 construye la tabla siguiente:

$$x_{pq} = 10^7 (1 - 1/200)^{p-1} (1 - 1/100)^{q-1}$$

El logaritmo de Napier tiene las siguientes propiedades:

$$i) x_m x_n = 10^7 x_{m+n}$$

$$ii) x_m / x_n = 10^{-7} x_{m-n}$$

Y además sí :

$$N\log(xy) = N\log x + N\log y + N\log 10^7$$

Demostración:

$$x = 10^7 (1 - 10^{-7})^m$$

$$y = 10^7 (1 - 10^{-7})^n$$

$$xy = 10^7 10^7 (1 - 10^{-7})^{m+n}$$

$$10^7 = (1 - 10^{-7})^q$$

$$xy = 10^7 (1 - 10^{-7})^{m+n+q}$$

$$N\log(xy) = m + n + q$$

$$= N\log x + N\log y + N\log 10^7$$

demostración:

$$m = 10^{-4} n, \quad n = 10^4 m$$

$$\begin{aligned} x &= (1 + 10^{-4})^n = (1 + 10^{-4})^{10^4 m} \\ &= \left(\left(1 + 10^{-4} \right)^{10^4} \right)^m \end{aligned}$$

2a

$$(1 + 10^{-4})^{10^4} \approx e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \approx e$$

Entonces, aplicando la idea anterior, proveniente de la definición de Búrgi a la definición de Napier, tenemos que :

$$\begin{aligned} x &= 10^7 (1 - 10^{-7})^n \\ &= 10^7 \left((1 - 10^{-7}) \right)^{10^7 (n/10^7)} \\ &= 10^7 \left((1 - 10^{-7})^{10^7} \right)^{n/10^7} \\ x &\approx 10^7 e^{-n/10^7} \end{aligned}$$

$$L x \approx L 10^7 - n/10^7$$

$$n/10^7 \approx -L x + L 10^7 - L(10^7/x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n \approx 10^7 L (10^7/x) \\ \text{Nog } x = 10^7 L(10^7/x) \end{array} \right\}$$

DEFINICION DE BÜRGI . (Siglo XVI)

Esta definición es similar a la anterior, solo que Bürgi utilizó como radio vector a: $1 + 10^{-4}$.

Entonces:

$$\text{Blog } x = 10^{-4} n \quad \text{si } x = (1 + 10^{-4})^n$$

Con las siguientes propiedades :

1a Si $\text{Blog } x = m$

$$x = \left((1 + 10^{-4})^{10^4} \right)^m$$

DEFINICION DEL NUMERO "e" . (Siglo XVII)

Para toda $x \in \mathbb{N}$, con $n \gg 1$, "e" es el enésimo término término de la sucesión:

$$e = \{ a_n \} = (1 + 1/n)^n = 2.71828\dots$$

El $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ existe y

por el Binomio de Newton :

$$\begin{aligned} (1 + 1/n)^n &= 1 + n(1/n) + [n(n-1)/2!](1/n)^2 + \\ &\quad [n(n-1)(n-2)/3!](1/n)^3 + \dots + \\ &\quad + [n(n-1)(n-2)\dots(2)(1/n!)](1/n)^n \\ &= 1 + 1 + [(n^2 - n)/2!](1/n)^2 + \frac{1}{3!}(n^3 - 2n^2 - n^2 + 2n)(1/n)^3 \\ &\quad + \dots + [(n!)/(n!)](1/n)^n \\ &= 1 + 1 + [(1)/(2!)](1 - 1/n) + [(1)/(3!)](1-1/n)(1-2/n) \\ &\quad + \dots + [(1/n!)](1 - 1/n)(1 - 2/n)\dots[1 - (n-1)/n](1/n) \end{aligned}$$

Para n distinto de 1 :

$$(1 + 1/n)^n < 2 + 1/2! + 1/3! + \dots + 1/n!$$

Ya que $n! < 1/2^{n-1}$, puesto que $2^{n-1} > n!$

Además, para $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \dots + 1/k! + \dots = 2.71828\dots$$

DEFINICION DE BRIGGS:

El esquema de la definición de Briggs, aún tiene vigencia y se enseña a los estudiantes de Nivel Medio y de Nivel Medio Superior.

$$\text{Si } b^x = A \quad \text{con } b > 0$$

El logaritmo del número A, con base $b > 0$, se define como el exponente x de la base b.

DEFINICION DE GLASSER (Siglo XX)

Con la moderna notación del Cálculo, Glasser , basado en el esquema de Brigs , definió el logaritmo como:

$$\log x = \int_1^x dt/t$$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS :

Según la definición de BRIGS :

$$\log_b A = x \Rightarrow A^x = b$$

Para todo $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$

1a Todo logaritmo es un exponente

Es claro de la definición. ■

2a Si $A \leq 0$, el logaritmo no existe

De la definición $b > 0$

Entonces

$$b^x > 0 , \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Pero $b^x = A \leq 0$, lo cual contradice la hipótesis ■

3a Si $0 < \log_b A < 1 \Rightarrow x < 0$

En efecto, si $A = b^{-x} = 1/b^x$

Como, por definición $b > 0$, entonces :

$$0 < 1/b^x < 1 \Rightarrow 0 < b^{-x} < 1$$
$$\Rightarrow \log_b A = -x$$
 ■

4a La unidad es el logaritmo de la base ,
En efecto, $b^1 = b$, para toda $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \log_b b = 1$

5a El cero es el logaritmo de la unidad.
En efecto, $b^0 = 1$, para toda $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \log_b 1 = 0$

6a $\log_b (AB) = \log_b A + \log_b B$

Si $\begin{cases} A = b^x & \Rightarrow \log_b A = x \\ B = b^y & \Rightarrow \log_b B = y \end{cases}$

Entonces:

$$AB = b^x b^y = b^{x+y}$$
$$\Rightarrow \log_b (AB) = x + y$$

7a $\log_b (A/B) = \log_b A - \log_b B$

Si $\begin{cases} A = b^x & \Rightarrow \log_b A = x \\ B = b^y & \Rightarrow \log_b B = y \end{cases}$

Entonces:

$$A/B = b^x/b^y = b^{x-y}$$

$$\Rightarrow \log_b(AB) = x - y$$

8a $\log_b(A)^m = m \log_b A$

Entonces

$$A^m = \left\{ (b^x) \right\}^m = b^{mx}$$

$$\Rightarrow \log_b A^m = mx$$

9a Si $\log_b \sqrt[n]{A}$, con $n \in \mathbb{N}$

Entonces: $\log_b \sqrt[n]{A} = (1/n) \log_b A$

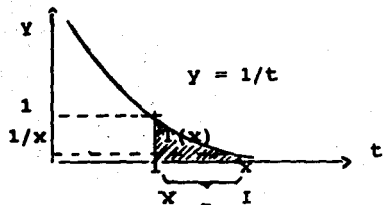
$$\text{Si } A = b^x \Rightarrow \log_b A = x$$

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{(b^x)} = (b)^{n/x} = (b^{1/n})^x$$

$$\Rightarrow \log_b (\sqrt[n]{A}) = (1/n) x$$

PROPIEDADES Según la definición de GLASSER :

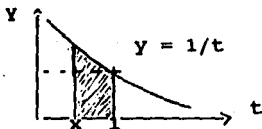
1a Todo logaritmo es el área bajo la curva $y = 1/t$, entre 1 y x , según la figura :



2a Si $x < 0$, el $\log x$, no existe.

Es claro, porque sólo está definida para $x > 0$

3a Si $x < 1 \Rightarrow \log x < 0$



De la figura: si $x < 1$, entonces:

$$\int_1^x dt/t = -\int_x^1 dt/t < 0$$

4a $\log 1 = 0$

Si $x = 1$, entonces :

$$\int_1^1 dx/x = 0$$

6a $\log(ab) = \log a + \log b$

Supongamos que $a < b$, según la figura, entonces:



$$\begin{aligned} \log(ab) &= \int_1^{ab} dx/x = \\ &= \int_1^a dx/x + \int_a^{ab} dx/x \end{aligned}$$

Pero :

$$\int_a^{ba} dx/x = \int_1^b dx/x$$

Demostración :

Si $t = 1 \Rightarrow w = a$

Si $t = b \Rightarrow w = ab$

Entonces:

$$\int_w^w \frac{dw}{w} = \int_t^t \frac{adt}{at} = \int_1^b \frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \int_a^{ab} \frac{dw}{w} = \int_1^b \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log(ab) = \int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x}$$

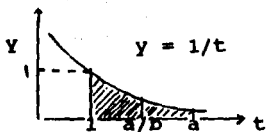
Pero de la definición :

$$\log a = \int_1^a \frac{dx}{x} \quad \text{y} \quad \log b = \int_1^b \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log ab = \log a + \log b \quad \blacksquare$$

7a $\log(a/b) = \log a - \log b$

Si $a < b$, con b distinto de 0, de la figura :



$$\log(a/b) = \int_1^{a/b} \frac{dx}{x} =$$

$$\log(a/b) = \int_1^a dx/x - \int_1^{a/b} dx/x$$

Pero:

$$\int_a^{a/b} dx/x = \int_1^{1/b} dx/x = - \int_1^b dx/x$$

Demostración :

Por la 6a propiedad, se vió que :

$$\int_a^{a/b} dx/x = \int_1^{1/b} dx/x \quad \text{Pero} \quad \int_1^{1/b} dx/x = - \int_1^b dx/x$$

Por la definición :

$$\log a = \int_1^a dx/x \quad \text{y} \quad \log b = \int_1^b dx/x$$

Por la 4a propiedad:

$$\log b = \int_1^b dx/x = - \int_1^{1/b} dx/x$$

Entonces :

$$\log(a/b) = \int_1^{a/b} dx/x = \int_1^a dx/x - \int_1^b dx/x$$

$$\Rightarrow \log(a/b) = \log a - \log b \quad \blacksquare$$

8a $\log a^m = m \log a$, para $m \in \mathbb{N}$

Por definición $\log a^m = \int_1^{a^m} dx/x$

Pero :

$$\int_1^{a^m} dx/x = \int_1^a dx/x + \int_a^{a \cdot a} dx/x + \int_{a \cdot a}^{a \cdot a \cdot a} dx/x + \dots + \int_{a^{m-1}}^{a^m} dx/x$$

Pero por la demostración anterior, dada en la propiedad 6a :

$$\int_1^b dx/x = \int_a^{ab} dx/x, \quad \text{si } a = b, \text{ entonces :}$$

$$\int_1^{a^m} dx/x = \int_1^a dx/x + \int_1^a dx/x + \dots + \int_1^a dx/x = m \int_1^a dx/x$$

$$\Rightarrow \int_1^{a^n} dx/x = n \int_1^a dx/x = n \log a = \log a^n$$

9a $\log \sqrt[n]{a} = (1/n) \log a$, con $n \in \mathbb{N}$

Sea $z = a^{1/n} \Rightarrow a = z^n$
 como $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_1^a dx/x = \int_1^{z^n} dx/x = n \int_1^z dx/x = n \int_1^a dx/x^{1/n}$$

$$\int_1^a dx/x^{1/n} = \int_1^a dx/x$$

$$\int_1^a dx/x^{1/n} = (1/n) \int_1^a dx/x$$

CONSTRUCCION DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS :

TABLAS DE NAPIER Y BÜRGI :

La idea central consistió en relacionar una serie geométrica con una aritmética.

Es decir, si $x, y > 0$ son tales que se desea calcular el producto xy , entonces como $x = ar^m$ y $y = ar^n$, son términos de las progresiones geométricas:

$$x = ar^m, \quad y = ar^n, \quad a \in \mathbb{Z},$$

$$\Rightarrow xy = ar^m ar^n = a^2 r^{m+n}$$

$$\Rightarrow xy/a = ar^{m+n}$$

El objeto fué sustituir las operaciones aritméticas de multiplicación y división, por las más sencillas de suma y resta.

En las tablas, "a" es una potencia de 10 y $b \in \mathbb{R}^+$, esto es:

Progresion aritmética	Progresion geométrica
b	ar
2b	ar ²
⋮	⋮
nb	ar ⁿ
⋮	⋮
(m+n)b	ar ^{m+n}

En la tabla de Napier		En la tabla de Bürgi	
$b = 1, a = 10, r = 1 - 10^{-7}$		$b = 10, a = 10, r = 1 + 10^{-4}$	
1	$10^0 (1 - 10^{-7})^1$	10x1	$10^8 (1 + 10^{-4})^1$
2	$10^0 (1 - 10^{-7})^2$	10x2	$10^8 (1 + 10^{-4})^2$
3	$10^0 (1 - 10^{-7})^3$	10x3	$10^8 (1 + 10^{-4})^3$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$10^0 (1 - 10^{-7})^n$	10xn	$10^8 (1 + 10^{-4})^n$
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

En la tabla de Bürgi para

$$10x23027 \quad \left\{ 10^8 (1 + 10^{-4}) \right\}^{23027} \approx 10^8 (1)$$

Puesto que n es el logaritmo de las bases $(1 - 10^{-7})^n$ y $(1 + 10^{-4})^n$ para Napier y Bürgi, respectivamente, para Bürgi, fué la tabla de antilogaritmos, excepto por el punto decimal.

CONSTRUCCION DE TABLAS :

LOGARITMOS COMUNES (BRIGS) :

El logaritmo de BRIGS, En términos de NAPIER , está definido por la transformación:

$$\log 10^n x = n + \log x$$

$$G(x) = \frac{\text{Nog } 1 - \text{Nog } x}{\text{Nog } 1 - \text{Nog } 10}$$

Usando la relación de Napier :

$$\text{Nog } x \approx 10^7 L(10^7/x)$$

veremos que : $G(x) = \log x$

Demostración:

$$G(x) = \frac{10^7 L(10^7) - 10^7 L(10^7/x)}{10^7 L(10^7) - 10^7 \text{Nog } 10} = \frac{L(10^7) - L(10^7/x)}{L(10^7) - L(10^7)}$$

$$G(x) = \frac{L\left(\frac{10^7}{10^7/x}\right)}{L(10^7/10^7)} = \frac{Lx}{L10} = \underline{\underline{\log x}}$$

$$\Rightarrow \log 1 = 0 \quad y \quad \log 10 = 1$$

Esto es consecuencia de los logaritmos que difieren sólo por el punto decimal

$$\log 10^n x = n + \log x$$

EJEMPLO :

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0.3010 \\ \log 20 &= 1.3010 \\ \log 200 &= 2.3010 \end{aligned}$$

La tabla comienza calculando sucesivamente las raíces cuadradas de 10, empezando por $\log 10 = 1$.

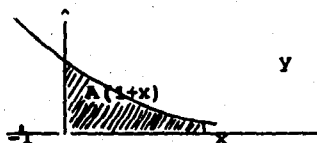
T A B L A D E B R I G S

NUMEROS		LOGARITMOS
10	10.000 000 000,...	1
30	3.162 277 660,...	0.5
40	1.778 279 410,...	0.25
50	1.333 321 432,...	0.125
60	1.154 781 984,...	0.0625
70	1.074 607 828,...	0.03125
80	1.036 632 920,...	0.015625
90	1.010 015 217,...	0.0078125
.	.	.
.	.	.
160	1.000 035 135,...	0.000015255876
.	.	.
.	.	.
540	1.000 000 000,...	0.00000000000000

CONSTRUCCION DE TABLAS DE LOGARITMOS.

METODO DE NEWTON:

Se basa en el cálculo de las integrales del área bajo la curva. De la figura:



$$y = \frac{1}{1+x} \quad \text{para } x > -1$$

El área bajo la curva hiperbólica $A(1+x)$ sobre el intervalo $[0, x]$ para $A(1+x) \geq 0$ es:

$$y = 1/(1+x)$$

Pero la serie:

$$y = 1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n} + x^{2n-1}$$

es el resultado de dividir 1 entre $1+x$:

Como:

$Lx = \int_1^x (1/t) dt$, tomando integrales término a término, se tiene que:

$$A(1+x) = L(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots - x^{2n}/2n + x^{2n-1}/(2n-1)$$

Por las propiedades de los logaritmos :

$$A [(1+x)^n] = A [n(1+x)] = n A (1+x)$$

$$A [(1+x)(1+y)] = A (1+x) + A (1+y)$$

$$A [(1+x)/(1+y)] = A (1+x) - A (1+y)$$

Newton construyó su tabla, primero para números enteros . El tomó $x = \pm 0.1$, ± 0.2 , y calculó $A(0.8)$, $A(0.9)$, $A(1.2)$ hasta con 57 lugares decimales y notó que :

$$\begin{aligned} 2 &= [(1.2)(1.2)]/[(0.8)0.9] \\ 3 &= [(1.2)(2)]/0.8 \\ 5 &= [(2)(2)/0.8] \\ 11 &= 10(1.1) \\ 10 &= 2(5) \\ 100 &= 10(10) \end{aligned}$$

Y así se obtiene :

$$\begin{aligned} A(2) &= 2A(1.2) - A(0.8) - A(0.9) \\ A(3) &= A(1.2) + A(2) - A(8) \\ A(5) &= 2A(2) - A(0.8) \\ A(10) &= A(2) + A(5) \\ A(11) &= A(2) + A(1.1) \\ A(100) &= A(10) + A(10) \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora $x \pm 0.02$, ± 0.01 , para
para calcular $A(0.98)$, $A(1.02)$, $A(0.999)$, $A(1.001)$,
esto le permite calcular los logaritmos de 7 , 13 y 17
porque :

$$7 = \sqrt{(100)(0.98)/2}$$

USO DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS :

El logaritmo se compone de un número real > 0 , tal que tiene una parte entera (c), que se llama **CARACTERISTICA** y una parte fraccionaria ($m < 0$) **MANTISA**, entonces : $\log x = c + m$

Las tablas proporcionan la mantisa ; es decir , el área hiperbólica del intervalo $[0,1]$.

EJEMPLO:

Evaluar $\log 3.28$
característica $c = 3$
mantisa $m = 28$

Los números comprendidos en el intervalo $(0,1)$ tienen por característica 0 ; sabemos que por definición

$$\begin{aligned} 10^0 &= 1 & \Rightarrow & \log 1 = 0 \\ 10^1 &= 10 & \Rightarrow & \log 10 = 1 \\ 10^2 &= 100 & \Rightarrow & \log 100 = 2 \\ &\vdots & & \\ 10^n &= 10^n & \Rightarrow & \log 10^n = n \end{aligned}$$

entonces: $c \leq \log x \leq c + 1$

Para calcular la característica si x está escrito en forma decimal , y c tiene d dígitos, se resta una unidad , i.e., $d - 1 \leq \log x \leq d$

EJEMPLO:
 $\log 3.28 = 0.51587$
 $\log 328 = 2.51587$

Las tablas proporcionan la mantisa de un número x , el cual no varía si se multiplica por una potencia de 10, como vimos anteriormente:
 En efecto, si $x = c + m$

$$\log (x 10^d) = \log x + d = (c + d) + m$$

con $c + d \in \mathbb{Z}$, $0 < m < 1$.

Si $m = .d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$, en la primera columna de las tablas se buscan los dígitos $d_1 d_2$, se encontrará el número buscado en la intersección de la fila donde se localiza la columna del dígito d_1 , el siguiente dígito d_2 se busca en la intersección de la Parte proporcional d_3 y se le sumará a los números encontrados .

EJEMPLO:

$\log .8727 = 0 + 9727 (10^{-1})$
 característica = 0 , mantisa 8727
 entonces :el número para la mantisa
 es $9405 + 3 = 9408$
 $\Rightarrow \log 0.8727 = -1.9408$

tablas de
LOGARITMOS DECIMALES CON CUATRO CIFRAS

N											Partes proporcionales								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0045	0090	0135	0178	0212	0255	0299	0344	0378	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0455	0497	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1901	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4685	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4981	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6051	6061	6071	6081	6091	6101	6111	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6120	6130	6140	6150	6160	6170	6180	6191	6201	6212	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6222	6232	6241	6251	6261	6271	6281	6291	6301	6311	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6321	6331	6341	6351	6361	6371	6381	6391	6401	6411	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6421	6431	6441	6451	6461	6471	6481	6491	6501	6511	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6521	6531	6541	6551	6561	6571	6581	6591	6601	6611	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6620	6630	6640	6650	6660	6670	6680	6691	6701	6711	1	2	3	4	5	6	7	8	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	6	7	8	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	5	6	7	8	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	3	3	4	5	6	7	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	7	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

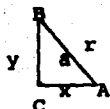
Logaritmos decimales con cuatro cifras

N										Partes proporcionales									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7417	7419	7437	7455	7465	7481	7499	7466	7474	1	2	3	4	5	5	6	7	
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7541	7551	1	2	3	4	5	5	6	7	
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	3	4	5	5	6	7	
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7804	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	4	4	5	6	7
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	4	4	5	6	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	4	4	5	6	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	4	4	5	6	7
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	4	4	5	6	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	4	4	5	6	7
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	4	4	5	6	7
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	4	4	5	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	4	4	5	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	4	4	5	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	4	4	5	6
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	4	4	5	6
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	4	4	5	6
81	9083	9089	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	4	4	5	6
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	4	4	5	6
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	4	4	5	6
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	4	4	5	6
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	4	4	5	6
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	4	4	5	6
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	4	4	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	4	4	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	4	4	5
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	4	4	5
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	4	4	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	4	4	5
93	9685	9690	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	4	4	5
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	4	4	5
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	4	4	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	4	4	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	4	4	5
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	4	4	5
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	4	4	5
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

DEFINICIONES:

EUCLIDES :



Sea ABC un triángulo rectángulo
x el cateto opuesto,
y el cateto adyacente,
r la hipotenusa

Las funciones trigonométricas se definen :

$$\text{sen } a = y/r$$

$$\text{cos } a = x/r$$

$$\text{tan } a = y/x$$

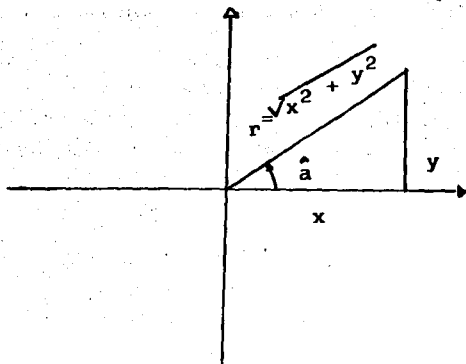
Y sus reciprocas como :

$$\text{cot } a = 1/\text{tan } a$$

$$\text{sec } a = 1/\text{cos } a$$

$$\text{csc } a = 1/\text{sen } a$$

definición de DESCARTES:



Entonces las definiciones en el plano cartesiano, son las mismas .

$$\text{sen } \hat{a} = y/r$$

$$\text{cos } \hat{a} = x/r$$

$$\text{tan } \hat{a} = y/x$$

Y sus recíprocos:

$$\text{cot } \hat{a} = 1/\text{tan } \hat{a} = r/y$$

$$\text{sec } \hat{a} = 1/\text{cos } \hat{a} = r/x$$

$$\text{csc } \hat{a} = 1/\text{sen } \hat{a} = x/y$$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Sólo se mencionarán las propiedades y las demostraciones que se utilizarán para evaluar las funciones.

1a $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

Por definición $\sin a = y/r$, $\cos a = x/r$

$$\Rightarrow \sin^2 a + \cos^2 a = (y/r)^2 + (x/r)^2 = (y^2 + x^2)/r^2$$

Pero por el teorema de Pitágoras , se tiene que :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)/r^2 = 1$$

Es claro que despejando :

$$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$$

■

2a $\tan a = \sin a / \cos a$

De la definición:

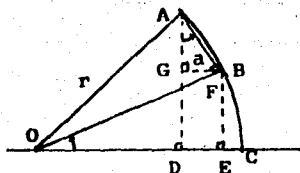
$$\sin a / \cos a = (y/r) / (x/r) = y/x = \tan a$$

Similarmente : $\cot a = \cos a / \sin a$

$$\cos a / \sin a = (x/r) / (y/r) = x/y = \cot a$$

■

$$3^a \quad \text{sea } (a + b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$$



Por construcción sea ABC un círculo unitario de radio r con centro en O .

$$\Rightarrow OA = OB = OC = r = 1$$

Sean $AD - OC$, $OB - AF$, $GF \parallel DC$ y $EF \parallel GD$

De aquí que, por construcción, los triángulos AFG , OEF , OAF y OAD son triángulos rectángulos, por lo que $OEF \cong AFG$ porque tienen un ángulo congruente y dos lados proporcionales, que son :

$OE \parallel GF$. $AG \parallel EF$, y el ángulo recto congruente; entonces se tiene que :

En el triángulo OEF :

$$\text{sen } a = EF/OE \Rightarrow EF = OE \text{ sen } a \quad \dots (1)$$

En el triángulo AFG :

$$\cos a = AG/AF \Rightarrow AG = AF \cos a \quad \dots (2)$$

En el triángulo OAF :

$$\widehat{\text{sen}} b = AF/r \quad \Rightarrow \quad \widehat{\text{sen}} b = AF \quad \dots (3)$$

$$\widehat{\text{cos}} b = OF/r \quad \Rightarrow \quad \widehat{\text{cos}} b = OF \quad \dots (4)$$

En el triángulo OAD :

$$\widehat{\text{sen}}(\hat{a} + \hat{b}) = AD/OA = AD = AG + GD, \\ \text{pero por construcción : } GD = EF$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\text{sen}}(\hat{a} + \hat{b}) = \overline{AG} + \overline{EF} \quad \dots (5)$$

Sustituyendo (1) , (2) , (3) y (4) en (5) :

$$\widehat{\text{sen}}(\hat{a} + \hat{b}) = AF \widehat{\text{cos}} a + OF \widehat{\text{sen}} a$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\text{sen}}(\hat{a} + \hat{b}) = \widehat{\text{sen}} b \widehat{\text{cos}} a + \widehat{\text{cos}} b \widehat{\text{sen}} a$$

De la misma figura :

$$\widehat{\text{cos}}(\hat{a} + \hat{b}) = \widehat{\text{cos}} a \widehat{\text{cos}} b - \widehat{\text{sen}} a \widehat{\text{sen}} b$$

En el triángulo OAD :

$$\widehat{\text{cos}}(\hat{a} + \hat{b}) = OD/r = OD = OE - DE$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\text{cos}}(\hat{a} + \hat{b}) = OE - GF$$

En el triángulo OAD :

$$\cos(\hat{a} + \hat{b}) = OD/r = OD = OE - DE \quad \dots (6)$$

pero como $DE = GF$, se tiene que :

$$\cos(\hat{a} + \hat{b}) = OE - GF$$

En el triángulo OEF :

$$\cos \hat{a} = OE/OF \Rightarrow OE = OF \cos \hat{a} \quad \dots (7)$$

En el triángulo OAF :

$$\cos \hat{b} = OF / r = OF \quad \dots (8)$$

$$\sin \hat{b} = AF / r = AF \quad \dots (9)$$

En el triángulo AFG :

$$\sin \hat{a} = GF/AF \Rightarrow GF = AF \sin \hat{a} \quad \dots (10)$$

Sustituyendo (7) , (8) , (9) y (10) en (6), se tiene que:

$$\sin(\hat{a} + \hat{b}) = OF \cos \hat{a} - AF \sin \hat{a}$$

$$\Rightarrow \cos(\hat{a} + \hat{b}) = \cos \hat{a} \cos \hat{b} - \sin \hat{a} \sin \hat{b}$$

■

De la propiedad anterior :

$$\text{sen}(2a) = 2 \text{ sen}a \text{ cos}a$$

Puesto que :

$$\begin{aligned} \text{sen}(2a) &= \text{sen}(a + a) = \text{sen}a \text{ cos}a + \text{sen}a \text{ cos}a = \\ &= 2 \text{ sen}a \text{ cos}a \end{aligned}$$

Y , también :

$$\text{cos}(2a) = \text{cos}^2a - \text{sen}^2a$$

$$\text{cos}(2a) = \text{cos}(a + a) = \text{cos}a \text{ cos}a - \text{sen}a \text{ sen}a$$

TEOREMA DE PTOLOMEO

4a Si $|a| < 1 \Rightarrow \text{sen}a \approx a$

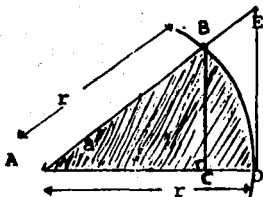


Figura :

Sea \widehat{BD} un arco de circunferencia unitaria de radio r tal que :

$$AB = AD = r$$

Los segmentos $BC \perp AD$

$$DE \perp AD$$

$$\Rightarrow BC \parallel ED$$

Triángulo ABC \approx triángulo AED

Entonces:

$$\text{área triángulo AED} \geq \text{área } A\widehat{BD} \geq \text{área triángulo ABC}$$

Como:

$$\begin{aligned}\text{área } \triangle AED &= \frac{1}{2} AC \cdot BC \\ \text{área } A^*BD &= \pi r^2 \left(\frac{A}{2\pi}\right) = \frac{1}{2} a \\ \text{área } \triangle AED &= \frac{1}{2} AD \cdot ED\end{aligned}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$\frac{1}{2} AC \cdot BC \geq \frac{1}{2} a \geq \frac{1}{2} AD \cdot ED$$

Además por definición:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= ED/AD = AD/r = ED, & \cos \alpha &= AC/AB = AC/r = AC \\ \text{sen } \alpha &= BC/AB = BC/r = BC\end{aligned}$$

Sustituyendo se tiene que:

$$\frac{1}{2}(1)\tan \alpha \geq \frac{1}{2}a \geq \frac{1}{2}\cos \alpha \cdot \text{sen } \alpha$$

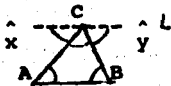
Dividiendo entre $\frac{1}{2}\text{sen } \alpha$ y utilizando la 2ª propiedad:

$$\frac{\text{sen } \alpha / \cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \geq a / \text{sen } \alpha \geq \cos \alpha \Rightarrow 1 / \cos \alpha \geq a / \text{sen } \alpha \geq \cos \alpha$$

Pero, para $a < 1$, $\alpha \rightarrow 0^\circ$, $\cos 0^\circ = 1$

$$\Rightarrow 1 \geq a / \text{sen } \alpha \geq 1 \Rightarrow \underline{\underline{a = \text{sen } \alpha}}$$

5a Los Angulos interiores de todo triángulo suman 180°



De la figura:

Si $\triangle ABC$ es un triángulo cualquiera
 a, b, c son los ángulos interiores

L es un recta que pasa por $C //$ al lado \overline{AB} ;

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{C}$ son ángulos suplementarios de L

$$\Rightarrow \hat{x} + \hat{y} + \hat{C} = 180^\circ$$

Pero $\hat{B} = \hat{y}, \hat{A} = \hat{x}$ por ser ángulos alternos internos

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

De esta propiedad se tiene que:

Si $\triangle ABC$ es equilátero \Rightarrow sus ángulos son de 60°

Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo isósceles \Rightarrow
 sus ángulos agudos son de 45° cada uno .

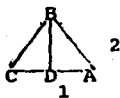
ALGORITMOS PARA EVALUAR LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS:

PARA LOS ANGULOS 0° , 90° , 180° , 270° y 360°

De acuerdo a la definición dada para el plano cartesiano, se pueden calcular directamente con radio $r = 1$, dadas en la siguiente tabla:

grados	0°	90°	180°	270°	360°	Rango de las funciones
función	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	
sen α	0	1	0	-1	0	$[-1, 1]$
cos α	1	0	-1	0	-1	$[-1, 1]$
tan α	0	$+\infty$	0	$-\infty$	0	$(-\infty, +\infty)$

PARA LOS ANGULOS DE 30° y 60° :



De la figura:

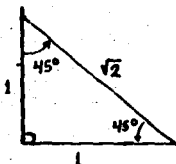
Sea ABC un triángulo equilátero cuyos lados sean = 2 y DB la altura. Por la 5ª propiedad, cada lado tiene 60° . Entonces DB es bisectriz del \hat{B} y

vale 30 . Además, por el Teorema de Pitágoras, se tiene que $BD = \sqrt{3}$.

Entonces, los valores de los ángulos son :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}30^\circ &= 1/2 & , & \quad \operatorname{cos} 30^\circ = \sqrt{3}/2 & , & \quad \operatorname{tan}30^\circ = \sqrt{3}/3 \\ \operatorname{sen}60^\circ &= \sqrt{3}/2 & , & \quad \operatorname{cos} 60^\circ = 1/2 & , & \quad \operatorname{tan}60^\circ = \sqrt{3} \end{aligned}$$

PARA EL ANGULO DE 45° :



De la figura :

Sea Δ ABC rectángulo isósceles de catetos = 1 . Por el Teorema de Pitágoras la hipotenusa = $\sqrt{2}$ Y por la 5ª los ángulos valen 45° .

Entonces por definición :

$$\operatorname{sen}45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\operatorname{cos}45^\circ = \sqrt{2}/2$$

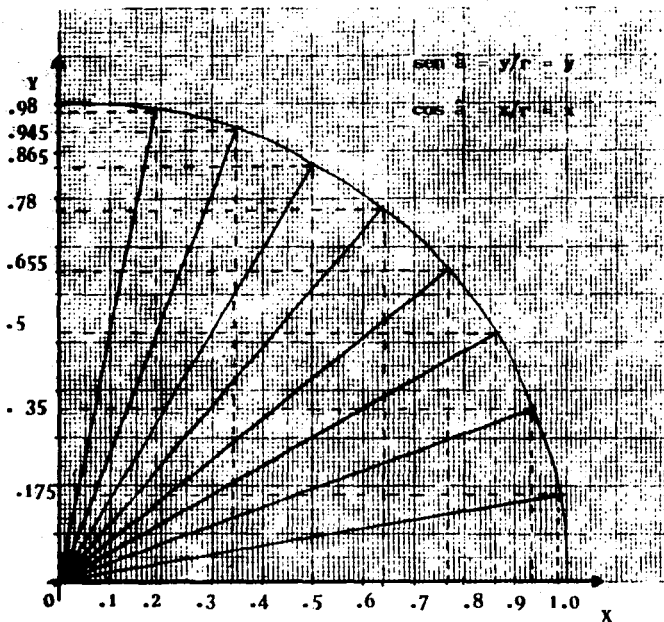
$$\operatorname{tan}45^\circ = 1$$

CALCULO DE LOS VALORES PARA LOS ANGULOS DE 10° , 20° , 30° , 40° , 50° , 60° , 70° , 80° y 90° .

METODO GEOMETRICO: De la figura:

Con ayuda del papel milimétrico, se traza un círculo

unitario y directamente de las definiciones se calculan los valores de las funciones trigonométricas.



$r = 1$

PARA LOS VALORES DE CUALQUIER ANGULO
(Método de Ptolomeo):

Con dominio $a \in (-\pi, \pi)$ si $n = 10$ y $a_0 = |a|/2^{10}$

$$\Rightarrow |\hat{a}_0| = |\hat{a}|/2^{10} \leq 2\pi/2^{11} < 1.54 \times 10^{-4}$$

Entonces por la propiedad 3a, se tiene que :

$$\text{sen}^2(2\hat{a}_0) = 4 \text{sen}^2 \hat{a}_0 (1 - \text{sen}^2 \hat{a}_0)$$

$$\text{sen}^2(2^2 \hat{a}_0) = 4 \text{sen}^2(2\hat{a}_0) (1 - \text{sen}^2(2\hat{a}_0))$$

$$\text{sen}^2(2^3 \hat{a}_0) = 4 \text{sen}^2(2^2 \hat{a}_0) (1 - \text{sen}^2(2^2 \hat{a}_0))$$

$$\text{sen}^2(2^9 \hat{a}_0) = 4 \text{sen}^2(2^8 \hat{a}_0) (1 - \text{sen}^2(2^8 \hat{a}_0))$$

$$\text{sen}^2(2^{10} \hat{a}_0) = 4 \text{sen}^2(2^9 \hat{a}_0) (1 - \text{sen}^2(2^9 \hat{a}_0))$$

$$\text{sen}^2(2^{10} \hat{a}_0) = \text{sen}^2 \hat{a}$$

$$\Rightarrow \text{sen } \hat{a} = \begin{cases} + \sqrt{\text{sen}^2(2^{10} \hat{a}_0)} , & \text{si } \hat{a} > 0 \\ - \sqrt{\text{sen}^2(2^{10} \hat{a}_0)} , & \text{si } \hat{a} < 0 \end{cases}$$

Demostración:

Por la propiedad 3a, se tiene que :

$$\begin{aligned}\sin^2(2a) &= (2\sin a \cos a)^2 = 2^2 \sin a \sqrt{1 - \sin^2 a} \\ \Rightarrow \sin^2(2a) &= 4 \sin^2 a (\sqrt{1 - \sin^2 a})^2 = 4 \sin^2 a (1 - \sin^2 a) \\ \sin^2(2^2 a) &= \sin^2(4a) = \sin^2(2a + 2a) = (2\sin^2 a \cos^2 2a)^2 \\ &= 4 \sin^2(2a) \cos^2(2a) = 4 \sin^2(a) (1 - \sin^2(2a)) \\ \sin^2(2^3 a) &= \sin^2(8a) = \sin^2(4a + 4a) = (2\sin^2 4a \cos^2 4a)^2 = \\ &= 4 \sin^2(2^2 a) [1 - \sin^2(2^2 a)] \\ &\vdots \\ \sin^2(2^9 a) &= 4 \sin^2(2^8 a) [1 - \sin^2(2^8 a)] \\ \text{Si } n = 10 \Rightarrow a_0 &= |a|/2^{10}\end{aligned}$$

Entonces :

$$\begin{aligned}\sin^2(2^{10} a) &= 4 \sin^2(2^9 a) [1 - \sin^2(2^9 a)] = \sin^2(2^{10} |a|/2^{10}) \\ &= \sin^2(|a|)\end{aligned}$$

Por inducción :

$$\sin^2(2^n a) = \sin^2(2^{n-1} a) [1 - \sin^2(2^{n-1} a)]$$

Entonces para $n+1$:

$$\sin^2(2^{n+1} a) = \sin^2(2^n a) [1 - \sin^2(2^n a)]$$

Si $a_0 = |a|/2^{n+1}$, entonces :

$$\begin{aligned}\sin^2(2^{n+1} a_0) &= \sin^2(2^{n+1} |a|/2^{n+1}) = \sin^2(a) \\ \Rightarrow \sin a &= \sqrt{\sin^2(2^{n+1} a_0)}\end{aligned}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \gg 1$, con $|a| \in (-\pi/2, \pi/2)$

Para evaluar las demás funciones, Ptolomeo tomó como base el cálculo del $\text{sen } \hat{a}$ con $a \in (\pi/2, 3\pi/2)$.

Entonces:

$$\cos \hat{a} = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \hat{a}}$$

$$\tan \hat{a} = \text{sen } \hat{a} / \cos \hat{a}$$

Pero:

$$\tan \hat{a} = \frac{\text{sen } \hat{a}}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \hat{a}}}$$

$$\cot \hat{a} = \frac{1/\text{sen } \hat{a}}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \hat{a}}} \quad \text{por definición de cota} = 1/\tan \hat{a}$$

Entonces:

$$\cot \hat{a} = \frac{1/\text{sen } \hat{a}}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \hat{a}}} = \frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \hat{a}}}{\text{sen } \hat{a}}$$

$$\sec \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \hat{a}}}, \quad \text{ya que por definición } \sec \hat{a} = 1/\cos \hat{a}$$

por definición $\text{csc } \hat{a} = 1/\text{sen } \hat{a}$, entonces:

$$\text{csc } \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \hat{a}}}$$

USO DE LAS TABLAS TRIGONOMETRICAS :

Las tablas contienen los valores para los ángulos de 0° a 90°, divididos de la siguiente manera

En la primera columna se indican los grados y los minutos para cada función trigonométrica, dada en la primera fila. En la segunda columna, se proporciona la conversión de grados a radianes, conforme a la definición :

$$1^\circ = \pi/180^\circ \text{ rad.}$$

$$x^\circ = x^\circ (\pi/180^\circ) \text{ rad.}$$

hasta 45°. A partir de 46°, la última columna de abajo hacia arriba indica tanto grados como su conversión en radianes en la penúltima columna y el valor de las funciones trigonométricas está dada en la última columna

EJEMPLO :

Calcular $\text{sen } 82^\circ 30'$

La tercera columna proporciona mas de 45°, así que hay que buscar la función seno en la última fila, de abajo hacia arriba donde diga 82° 30' y la intersección; el valor de la tabla es:

$$\text{sen } 82^\circ 30' = .9890$$

TABLA VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (GRADOS)

Grados	Radianos	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc		
0° 0'	.0000	.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.5708	90° 0'
10'	.0290	.0290	.9838	.0290	343.8	.000	.000	679	30'
20'	.0580	.0580	.9719	.0580	171.9	.000	.000	650	40'
30'	.0870	.0870	.9540	.0870	114.6	.000	1.0000	1.5621	30'
40'	.1160	.1160	.9305	.1160	85.94	.000	0.9999	592	20'
50'	.1450	.1450	.9018	.1450	68.75	.000	.9999	563	10'
1° 0'	.0175	.0175	.9730	.0175	57.29	1.000	.9998	1.5531	88° 0'
10'	.0044	.0044	.9991	.0044	22.82	.000	.999	504	30'
20'	.0088	.0088	.9961	.0088	11.46	.000	.997	475	40'
30'	.0132	.0132	.9914	.0132	7.50	1.000	.9997	1.5446	30'
40'	.0176	.0176	.9850	.0176	5.14	.000	.996	447	20'
50'	.0220	.0220	.9760	.0220	3.91	.001	.995	418	10'
2° 0'	.0349	.0349	.9866	.0349	28.64	1.001	.9994	1.5352	88° 0'
10'	.0088	.0088	.9961	.0088	11.46	.001	.993	330	50'
20'	.0176	.0176	.9914	.0176	7.50	.001	.992	301	40'
30'	.0264	.0264	.9850	.0264	5.14	1.001	.9900	1.5273	30'
40'	.0352	.0352	.9760	.0352	3.91	.001	.989	283	20'
50'	.0440	.0440	.9640	.0440	2.92	.001	.988	213	10'
3° 0'	.0524	.0524	.9812	.0524	19.08	1.001	.9986	1.5184	87° 0'
10'	.0132	.0132	.9914	.0132	7.50	.002	.985	155	50'
20'	.0264	.0264	.9850	.0264	5.14	.002	.983	126	40'
30'	.0396	.0396	.9760	.0396	3.91	1.002	.9981	1.5097	30'
40'	.0528	.0528	.9640	.0528	2.92	.002	.980	068	20'
50'	.0660	.0660	.9490	.0660	2.13	.002	.978	039	10'
4° 0'	.0698	.0698	.9414	.0698	14.34	1.002	.9976	1.5010	86° 0'
10'	.0220	.0220	.9760	.0220	5.14	.003	.974	14981	50'
20'	.0440	.0440	.9640	.0440	2.92	.003	.971	952	40'
30'	.0660	.0660	.9490	.0660	2.13	1.003	.9969	1.4923	30'
40'	.0880	.0880	.9305	.0880	1.56	.003	.967	893	20'
50'	.1100	.1100	.9018	.1100	1.14	.004	.964	864	10'
5° 0'	.0873	.0873	.9147	.0873	11.43	1.004	.9962	1.4835	85° 0'
10'	.0352	.0352	.9760	.0352	3.91	.004	.959	806	50'
20'	.0704	.0704	.9640	.0704	2.92	.004	.957	777	40'
30'	.1056	.1056	.9490	.1056	2.13	1.005	.9954	1.4748	30'
40'	.1408	.1408	.9305	.1408	1.56	.005	.951	710	20'
50'	.1760	.1760	.9018	.1760	1.14	.005	.948	690	10'
6° 0'	.1047	.1047	.9567	.1047	9.514	1.006	.9945	1.4661	84° 0'
10'	.0440	.0440	.9640	.0440	2.92	.006	.942	632	50'
20'	.0880	.0880	.9490	.0880	2.13	.006	.939	603	40'
30'	.1320	.1320	.9305	.1320	1.56	1.006	.9936	1.4573	30'
40'	.1760	.1760	.9018	.1760	1.14	.007	.932	544	20'
50'	.2200	.2200	.8680	.2200	.86	.007	.927	515	10'
7° 0'	.1223	.1223	.9796	.1223	8.144	1.008	.9923	1.4486	83° 0'
10'	.0528	.0528	.9760	.0528	3.91	.008	.922	457	50'
20'	.1056	.1056	.9640	.1056	2.92	.008	.918	428	40'
30'	.1584	.1584	.9490	.1584	2.13	1.009	.9914	1.4399	30'
40'	.2112	.2112	.9305	.2112	1.56	.009	.911	370	20'
50'	.2640	.2640	.9018	.2640	1.14	.009	.907	341	10'
8° 0'	.1396	.1396	.9785	.1396	7.115	1.010	.9905	1.4312	82° 0'
10'	.0628	.0628	.9760	.0628	3.91	.010	.909	283	50'
20'	.1256	.1256	.9640	.1256	2.92	.011	.904	254	40'
30'	.1884	.1884	.9490	.1884	2.13	1.011	.9890	1.4224	30'
40'	.2512	.2512	.9305	.2512	1.56	.012	.906	195	20'
50'	.3140	.3140	.9018	.3140	1.14	.012	.901	166	10'
9° 0'	.1571	.1564	.9732	.1564	6.114	1.012	.9877	1.4137	81° 0'
		Sen	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Radianos	Grados

TABLA VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (GRADOS) (Continuación)

Grados	Radiales	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc		
9° 0'	.1571	.1564	0.992	.1584	6.314	1.012	.9977	1.1137	81° 0'
10'	.1601	.593	.777	.614	.997	.013	.872	.108	50'
20'	.629	.632	.686	.614	6.084	.013	.868	.079	40'
30'	.1658	.1650	0.959	.1673	5.976	1.014	.9863	1.4050	30'
40'	.687	.679	5.955	.701	.871	.014	.858	1.4021	20'
50'	.716	.708	.855	.733	.779	.015	.854	1.3992	10'
10° 0'	.1745	.1746	5.759	.1761	5.671	1.015	.9848	.9953	80° 0'
10'	.774	.765	.665	.793	.576	.016	.843	.934	50'
20'	.804	.794	.575	.823	.485	.016	.838	.904	40'
30'	.1833	.1822	5.487	.1851	5.396	1.017	.9833	1.3875	30'
40'	.862	.851	.403	.891	.399	.018	.827	.846	20'
50'	.891	.880	.320	.914	.296	.018	.822	.817	10'
11° 0'	.1920	.1920	5.241	.1934	5.145	1.019	.9816	1.3788	79° 0'
10'	.949	.937	.164	.974	5.066	.019	.811	.759	50'
20'	.978	.965	.083	.994	4.989	.020	.805	.730	40'
30'	.2007	.1994	5.016	.2025	4.915	1.020	.9799	1.3701	30'
40'	.936	.922	.435	.955	.843	.021	.793	.672	20'
50'	.965	.951	.351	.985	.743	.022	.787	.643	10'
12° 0'	.2091	.2079	4.810	.2106	4.708	1.022	.9784	1.3611	78° 0'
10'	.121	.108	.745	.156	4.638	.023	.775	.581	50'
20'	.153	.136	.682	.196	.573	.024	.769	.553	40'
30'	.2182	.2164	4.620	.2217	4.531	1.024	.9763	1.3526	30'
40'	.211	.193	.560	.247	.449	.025	.757	.497	20'
50'	.240	.221	.502	.278	.399	.026	.750	.468	10'
13° 0'	.2207	.2250	4.445	.2309	4.341	1.026	.9744	1.3439	77° 0'
10'	.208	.228	.399	.339	.275	.027	.737	.410	50'
20'	.327	.306	.336	.379	.219	.028	.730	.381	40'
30'	.2356	.2334	4.284	.2401	4.165	1.028	.9724	1.3352	30'
40'	.385	.363	.232	.432	.153	.029	.717	.352	20'
50'	.414	.391	.182	.462	.061	.030	.710	.324	10'
14° 0'	.2343	.2419	4.134	.2493	4.011	1.031	.9703	1.3265	76° 0'
10'	.473	.447	.086	.521	.066	.031	.696	.295	50'
20'	.502	.476	4.039	.555	.014	.032	.689	.266	40'
30'	.2531	.2504	3.994	.2586	3.867	1.033	.9681	1.3177	30'
40'	.560	.532	.950	.617	.821	.034	.674	.238	20'
50'	.589	.560	.905	.648	.776	.035	.667	.210	10'
15° 0'	.2468	.2588	3.863	.2679	3.732	1.035	.9659	1.3089	75° 0'
10'	.617	.616	.822	.711	.689	.036	.652	.161	50'
20'	.676	.644	.782	.742	.647	.037	.644	.132	40'
30'	.2795	.2672	3.747	.2773	3.666	1.038	.9636	1.3003	30'
40'	.733	.700	.793	.805	.566	.039	.628	1.2924	20'
50'	.761	.728	.665	.836	.426	.039	.621	.915	10'
16° 0'	.2793	.2756	3.628	.2867	3.487	1.040	.9613	1.2915	74° 0'
10'	.827	.784	.592	.869	.359	.041	.605	.886	50'
20'	.851	.812	.556	.913	.296	.042	.596	.857	40'
30'	.2880	.2840	3.521	.2962	3.376	1.043	.9588	1.2828	30'
40'	.929	.868	.487	.961	.249	.041	.586	.799	20'
50'	.958	.896	.353	.992	.195	.045	.572	.770	10'
17° 0'	.2967	.2924	3.470	.3057	3.271	1.045	.9564	1.2731	73° 0'
10'	.996	.952	.488	.989	.247	.047	.555	.712	50'
20'	.3025	.3029	.357	.324	.201	.048	.549	.684	40'
30'	.3051	.3007	3.326	.3154	3.172	1.048	.9547	1.2651	30'
40'	.981	.935	.295	.985	.190	.049	.528	.625	20'
50'	.113	.067	.265	.217	.108	.050	.520	.595	10'
18° 0'	.3122	.3089	3.246	.3219	3.078	1.051	.9541	1.2567	72° 0'
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Radiales	Grados

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

TABLA VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (GRADOS) (Continuación)

Grados	Radianes	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc		
18° 0'	.3142	.3090	3.236	.3249	3.078	1.051	.9511	1.2566	72° 0'
10'		171	118	207	281	047	052	502	50'
20'		300	145	179	314	3.018	053	492	40'
30'	.3139	.3173	3.152	.3346	2.989	1.054	.9483	1.2479	30'
40'		258	201	124	378	960	056	474	20'
50'		287	228	998	411	932	057	465	10'
18° 0'	.3116	.3256	3.072	.3443	2.904	1.058	.9455	1.2392	71° 0'
10'		345	283	046	476	877	059	446	50'
20'		374	311	3.021	508	850	060	436	40'
30'	.3403	.3338	2.996	.3541	2.824	1.061	.9426	1.2305	30'
40'		432	365	971	574	798	062	417	20'
50'		462	393	947	607	773	063	407	10'
18° 0'	.3191	.3420	2.024	.3640	2.747	1.064			70° 0'
10'		520	401	673	723	065			50'
20'		549	478	706	699	066			40'
30'	.3578		855	.3739	2.675				30'
40'				772	651				20'
50'				805	627				10'
18° 0'				1830					
				453					
			.16	.6194					0'
20'			828	536	5.				50'
30'			820	577	520				40'
40'	.5.	.319	1.812	.6619	1.511	1.		.9861	30'
50'		876	544	804	661	501	202	812	20'
50'		905	568	796	703	1.492	204	803	10'
34° 0'	.5914	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	.9271	56° 0'
10'		963	616	781	787	473	209	745	50'
20'		992	640	773	830	464	211	716	40'
30'	.6021	.5664	1.766	.6873	1.455	1.213	.8241	.9687	30'
40'		050	688	758	916	446	216	225	20'
50'		080	712	751	959	437	218	208	10'
34° 0'	.6119	.5736	1.743	.7002	1.428	1.221	.8192	.9599	55° 0'
10'		138	760	736	046	419	223	175	50'
20'		167	783	729	099	411	226	158	40'
30'	.6196	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141	.9512	30'
40'		225	831	715	177	393	231	124	20'
50'		254	854	708	221	385	233	107	10'
34° 0'	.6283	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8099	.9425	54° 0'
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Radianes	Grados

I I I M E T O D O S
A R I T M E T I C O S

ALGORITMO PARA EVALUAR a^n :

La idea se basa en lo siguiente :

Primero : si n es par , entonces :

$$a^n = (a^2)^{n/2}$$

Segundo : si n es impar , entonces :

$$a^n = a a^{n-1}$$

Es decir, necesitamos dos números naturales que $a^n = bc^m$, con $m \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$, donde b y c conviene seleccionarlos de la siguiente manera:

$$b_0 = 1, \quad c_0 = a, \quad m_0 = n$$

hasta obtener c_k , para alguna $k \in \mathbb{N}$, tal que $m_k = 0$.

Sea m_0 impar : entonces hacer :

$$\left\{ \begin{matrix} a & b \\ o & o \end{matrix} \right\}^{m_0} = \left\{ \begin{matrix} a & b \\ o & o \end{matrix} \right\}^{m_0-1} = \left(\begin{matrix} a & b \\ o & o \end{matrix} \right) b_o^{m_0-1} = a_1 b_1^{m_1}$$

donde $a_o = a_1$, $b_o = b_1$ y $m_o - 1 = m_1$

Sea m_o es par , entonces hacer :

$$\left\{ \begin{matrix} a & b \\ o & o \end{matrix} \right\}^{m_o} = a_o \left\{ \begin{matrix} b \\ o \end{matrix} \right\}^{(m_o)/2} = \left\{ \begin{matrix} a & b \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\}^{m_1}$$

donde $a_o = a_1$, $b_1 = b_o^2$, $m_1 = m_o/2$

EN GENERAL , si $m_k > 0$, m_k es impar , hacer :

$$\left\{ \begin{matrix} a & b \\ k & k \end{matrix} \right\}^{m-k} = a_k b_k \left\{ \begin{matrix} b \\ k \end{matrix} \right\}^{m-k-1} = a_{k+1} b_{k+1} \left\{ \begin{matrix} b \\ k+1 \end{matrix} \right\}^{m_{k+1}}$$

donde : $a_{k+1} = a_k b_k$, $b_{k+1} = b_k$, $m_{k+1} = m_k - 1$

Y si $m_k > 0$. m_k es par , hacer :

$$\left\{ \begin{matrix} a & b \\ k & k \end{matrix} \right\}^{m-k} = a_k b_k \left(\begin{matrix} b \\ k \end{matrix} \right)^{m_k/2} = \left\{ \begin{matrix} a & b \\ k+1 & k+1 \end{matrix} \right\}^{m_{k+1}}$$

donde : $a_k = a_{k+1}$, $b_k^2 = b_{k+1}$, $m_{k+1} = m_k/2$

EJEMPLO :

CALCULAR $(345)^4$

$$(345)^4 = (345)^2 (345)^2, \quad \text{donde } (345)^2 = 119\,025$$

$$\rightarrow (345)^4 = (119\,025)(119\,025) = 141\,666\,950\,625$$

EJEMPLO : Calcular x^{17}

$$x = (x) \quad x^8 = (x^2 x^2)(x^2 x^2)x$$

Entonces

$$x x = x^2$$

$$x^2 x^2 = x^4$$

$$x^4 x^4 = x^8$$

$$x^8 x^8 = x^{16}$$

$$x^{16} x = x^{17}$$

ALGORITMO PARA EVALUAR \sqrt{x} , con $x > 0$

El cálculo está basado en las siguientes ideas :
Si $a_k, b_k > 0$ son una pareja de números reales ,
con $k \in \mathbb{N}$. seleccionados de tal manera que :

$$b_k = x / a_k \quad \text{y} \quad a_{k+1} = (a_k + b_k) / 2$$

Seleccionamos primero $a_0 > 0$ arbitrariamente y $b_0 = x/a_0$

Entonces $\sqrt{x} - |b_n| = |a_n|$ para alguna $k = n$

donde :

$$(a_n, b_n) \subset (a_{n-1}, b_{n-1}) \subset \dots \subset (a_1, b_1) \subset (a_0, b_0)$$

y cada a_k es intervalo abierto .

Demostración :

Sea $L_0 = |b_0 - a_0|$ la longitud del intervalo (a_0, b_0)

y supongamos que $b_0 > 0$, puesto que $b_0, a_0 > 0$ y que b_0 es distinto de a_0 .

$$\text{Entonces} \quad L_0 = b_0 - a_0 \geq$$

Sea $a_1 = (a_0 + b_0) / 2 \Rightarrow a_2 < a_1 < b_0$ por ser punto medio.

$$\Rightarrow 1/a_0 < (a_0 + b_0)/2 < b_0$$

$$\Rightarrow 1/a_0 > \frac{1}{(a_0 + b_0)/2} > 1/b_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x/a_0 > \frac{x}{(a_0 + b_0)/2} > x/b_0, \quad x > 0$$

Como $b_0 = x/a_0$; $x/a_1 = a_1$; $x/b_0 = a_0$:

$$\Rightarrow b_0 > a_1 > a_0 \Rightarrow b_0 > b_1 > a_1 > a_0 \Rightarrow L_1 C L_0$$

Sea $L_2 = |b_2 - a_2|$; con $b_2 - a_2 \geq 0 \Rightarrow b_2 \geq a_2$

Entonces :

$$a_1 < (a_1 + b_1)/2 < b_1 ; \text{ por ser punto medio de } (a_1, b_1)$$

$$\Rightarrow a_1 < a_2 < b_1 \Rightarrow 1/a_1 < 1/a_2 < 1/b_1 \Rightarrow x/a_1 < x/a_2 < x/b_1$$

con $x > 0$;

$$\Rightarrow b_1 > b_2 > a_2 > a_1 \Rightarrow L_2 C L_1 C L_0$$

En GENERAL, por inducción :

Sea $L_{n-1} C L_{n-2} C \dots C L_2 C L_1 C L_0$

Entonces : $L_n C L_{n-1}$

Si a_n, b_n son seleccionadas de tal manera que :

$$a_n = \left\{ a_{n-1} b_{n-1} \right\} / 2 \quad \text{y} \quad b_n = x / a_n$$

$\Rightarrow a_n < (a_{n-1} b_{n-1}) / 2 < b_n$ por ser el punto medio del intervalo (a_{n-1}, b_{n-1})

Sea : $L_n = |b_n - a_n| \geq 0$ la longitud del intervalo y supongamos que $b_n - a_n \geq 0$, esto es, $b_n \geq a_n$

Entonces :

$$a_{n-1} < (a_{n-1} + b_{n-1}) / 2 < b_{n-1}$$

$$\Rightarrow a_{n-1} < a_n < b_{n-1} \Rightarrow 1/a_{n-1} > 1/a_n > 1/b_{n-1}$$

$$\Rightarrow x/a_{n-1} < x/a_n < x/b_{n-1} ; \text{ para toda } x > 0$$

$$\Rightarrow b_{n-1} > b_n > a_n ; \text{ como } b_n \geq a_n$$

$$\Rightarrow b_{n-1} > b_n \geq a_n > a_{n-1} \Rightarrow L_n \leq L_{n-1} \leq \dots \leq L_0$$

$$\text{Adem\u00e1s } \forall x \in L_n \leq L_{n-1} \leq \dots \leq L_1 \leq L_0 ; x > 0$$

Demostraci\u00f3n:

Demostraremos tambi\u00e9n que $\sqrt{x} = |b_n| - |a_n|$ para alguna $k = n$.

b_0 se escogió, de manera que $b_0^2 = x / a_0$
 con $L_0 = b_0 - a_0 \geq 0$, para $a_0 > 0$, arbitrario
 $\Rightarrow b_0 \geq a_0 \Rightarrow b_0 b_0 \geq b_0 a_0 = x \Rightarrow b_0^2 \geq x$
 $\Rightarrow b_0 \geq \sqrt{x} \geq a_0 \Rightarrow \sqrt{x} \in (a_0, b_0)$

Además, como a_1, b_1 fueron seleccionadas tal que :

$a_1 = (a_0, b_0)$, $b_1 = x/a_1$ con $L_1 = b_1 - a_1 \geq 0 \Rightarrow b_1 \geq a_1$
 debido a que a_1 es punto medio de $L_0 = (a_0, b_0)$
 $\Rightarrow a_0 < a_1 < b_0$

Entonces :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (a_0, b_0) = (a_0 + x/a_0)/2 = (a_0^2 + x)/2a_0 \\
 &= (a_0^2 + 2a_0\sqrt{x} - 2a_0\sqrt{x})/2a_0 = (a_0 - \sqrt{x})^2 + \sqrt{x} > \sqrt{x}
 \end{aligned}$$

puesto que : $(a_0 - \sqrt{x})^2 > 0$, $a_0 > 0$, $x > 0$

$$\Rightarrow a_1 > \sqrt{x} \Rightarrow a_0 \leq \sqrt{x} < a_1 \leq b_1 \leq b_0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \in (a_1, b_1) \subset (a_0, b_0)$$

En general, por inducción:

$$L_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1} \geq 0, \text{ para } k = n-1. \text{ con } b_{n-1} \geq a_{n-1},$$

$$\text{y } \sqrt{x} \in (a_{n-1}, b_{n-1})$$

Sea $L_n = b_n - a_n \geq 0$, para alguna $n \Rightarrow a_n$ es el punto

Entonces: $\left[\begin{array}{l} \text{medio del intervalo } L_n; \end{array} \right.$

$$a_n = (a_{n-1} + b_{n-1}) / 2 = (a_{n-1} - \sqrt{x})^2 / 2a_{n-1} + \sqrt{x} > \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow a_n > \sqrt{x} \Rightarrow a_0 < a_1 < \dots < \sqrt{x} < a_n = b_n < b_{n-1} < \dots < b_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \in L_n.$$

Pero como a_n es el punto medio para alguna $k = n$, suficientemente grande: $b_n - a_n = 0$.

$$\Rightarrow b_n \geq \sqrt{x} \geq a_n, \text{ con } b_n = a_n$$

$$\text{Entonces } \sqrt{x} = b_n = a_n$$

EJEMPLO: Evaluar $\sqrt{19}$

Primero seleccionamos un número entero cuyo cuadrado se acerque a 19: $4^2 = 16$ ó $5^2 = 25$, entonces

$4^2 = 16$ es el más cercano, esto es :

$$|19 - 16| = 4 \quad \text{y} \quad |19 - 25| = 6$$

Seleccionamos $4 = b_0$

$$a_0 = x/b_0 = 19/4 = 4.75 \quad \text{y} \quad b_1 = 19/4.75 = 4$$

$$a_1 = (4 + 4.75)/2 = 8.75/2 = 4.375; \quad b_2 = 19/4.375 = 4.342857$$

$$a_2 = (4.375 + 4.342857)/2 = 4.35892857; \quad b_3 = 4.145885416$$

$$a_3 = 4.3602325 \quad ; \quad b_4 = 4.468065$$

$$a_4 = 4.358902895 \quad ; \quad b_5 = 4.358894992$$

$$a_5 = 4.35889894354 \quad ; \quad b_6 = 4.35889945168$$

$$a_6 = 4.35889919761 \quad ; \quad b_7 = 4.35889868947$$

$$a_7 = 4.35889894354 \quad ; \quad b_8 = 4.35889894354$$

Entonces $\sqrt{19} = a_7 = b_8 = 4.35889894354$
con 11 decimales de aproximación .

$$\text{Comprobación: } (\sqrt{19})^2 = a_7^2 = a_8^2 = 18.9999999999... \approx 19$$

EJEMPLO: Evaluar $\sqrt{.5454...} = \sqrt{x}$

\sqrt{x} puede convertirse a racional mediante el siguiente

ALGORITMO PARA CAMBIAR X DECIMAL A RACIONAL

Sea $x_0 = a/b \in \mathbb{Q}$, con b distinto de cero, tal que $x = x_0$.

Multiplicamos por 10^n , donde n es el número de cifras de la serie decimal de $x = 0.d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n d_{n+1} d_{n+2} \dots$

$10^n x_0 = x_1 10^n = x_2 + x_1 10^{-n}$ donde $x_2 \in \mathbb{N}$, $x_1 = x_0$ con $x_2 = d_1 d_2 \dots d_n$, cada d_k es dígito y $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Entonces $10^n x_0 = x_2 + x_1$

restando $x_0 = x_1$

$$10^n x_0 - x_0 = x_2$$

=> $x_0 (10^n - 1) = x_2$

$$x_0 = x_2 / (10^n - 1) = a/b \text{ con } b = 10^n - 1 \text{ con } b \text{ distinto de cero}$$

Del ejemplo: $x_0 = .545454\dots$

$n = 2$ cifras decimales que se repiten, entonces multiplicamos por 10^n

$$\begin{array}{r} 10^n x_0 = 10^n (.5454\dots) = 54.5454\dots \\ - x_0 = = - 0.5454\dots \end{array}$$

Entonces : $x_0 (100 - 1) = 54$

$$99x_0 = 54$$

$$x_0 = 54/99 = 6/11$$

Entonces resulta mas sencillo evaluar $\sqrt{5/\sqrt{11}} = \sqrt{.5454\dots}$.

Con el procedimiento anterior :

$$\sqrt{5/\sqrt{11}} = 2.449489766278/3.316624790355 = 0.7385489519$$

donde $(0.7385489519)^2 = .54545455435 \approx .5454\dots$

con siete decimales de aproximación.

ALGORITMO PARA EVALUAR $\sqrt[n]{x^m}$, con $x \in \mathbb{R}$.

Está basado en las siguientes propiedades de los exponentes:

$$x^0 = 1, \text{ por definición.}$$

$$x^m x^n = x^{m+n}, \text{ por la propiedad asociativa de los } \mathbb{R}.$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}, \text{ por definición.}$$

$$\left(x^m\right)^n = x^{mn}, \text{ por la propiedad asociativa de los números } \mathbb{R}.$$

El algoritmo consiste en seleccionar los números: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$, de la siguiente manera:

1o) Escoger un número $x_0 > 0$, tal que $x_0^3 \approx x$, $x_0^3 < x$,

Entonces multiplicamos x por x_0^3/x_0^3 :

$$x = x \left(x_0^3/x_0^3\right) = (x/x_0^3) \left(x_0^3\right)$$

$$x^{1/3} = x_0 \left(x/x_0^3\right)^{1/3}$$

2o) Seleccionar otro número $x_1 = x/x_0^3$

entonces se tiene que:

$$x^{1/3} = (x_1)^{1/3} x_0 = x_0 (x_1^{1/3})^{2/2} = x_0 (x_1^{1/2})^{2/3}$$

Ahora seleccionemos $x_2 = x_1^{1/2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^{1/3} &= x_{\circ} x_2^{2/3} = x_{\circ} x_2^{(2/3)(2/2)} = x_{\circ} (x_2^{1/2})^{4/3} \\ &= x_{\circ} (x_2^{1/2})^{3/3} (x_2^{1/2})^{1/3} \end{aligned}$$

Ahora seleccionemos $x_3 = x_2^{1/2}$

$$\Rightarrow x^{1/3} = x_{\circ} x_3^{2/3} = x_{\circ} x_3^{(1/3)(2/2)} = x_{\circ} x_3^{1/3}$$

Ahora seleccionemos: $x_4 = x_3^{1/2}$

$$\Rightarrow x^{1/2} = x_{\circ} x_4^{2/3}$$

Por inducción, seleccionando sucesivamente se tiene:

$$x_n = (x_{n-1})^{1/2}$$

De donde: $x^{1/3} = x_{\circ} x_3^{2/3} \dots (x_{3k})^{1/3} (x_{2k})^{2/3} \dots$

Pero $x_n = (x_1)^{1/(2^k)}$, porque así se seleccionó

Entonces para una k suficientemente grande:

$1/2^k \rightarrow 0$, $x_k^0 = 1$, para alguna $k \in \mathbb{N}$.

$$x^{1/3} = x_0 x_3 x_6 \dots x_k^0 = x_0 x_3 x_6 \dots \quad (1)$$

EJEMPLO: Evaluar $\sqrt[3]{279}$

$x = 6$, porque $x_0^3 = 216 < 279 = x_0$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } \sqrt[3]{279} &= 6(\sqrt{1.2916})^{2/3} = 6(1.1232393)^{2/3} \\ &= 6(1.259801)^{4/3} = 6(1.02948)(1.02948)^{1/3} \\ &= (6.17688)(1.02948)^{1/3} = (6.17688)(1.014633)^{2/3} \\ &= (6.1768)(1.0073)^{4/3} = (6.5219)(1.0073)^{1/3} \\ &= (6.5219)(1.00182)^{1/3} = (6.5333)(1.000182)^{1/3} \\ &= (6.5333)(1.00009)^{2/3} = (6.53389)(1.00004499)^{4/3} \\ &= (6.534183959)(1.00002249)^{1/3} = (6.534283959)(1.00001)^{2/3} \\ &= (6.534257)(1.0000055)^{1/3} \approx 6.534257 \\ &= (6.534257)^3 = 278.98999902 \end{aligned}$$

Si se requiere mayor aproximación , el proceso puede continuar hasta que alguna x_k sea ≈ 1 .

ALGORITMO PARA EVALUAR $\sqrt[m]{x^n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$, $x > 0$.

$\sqrt[m]{x^n} = x^{n/m}$, con m distinto de 0. $n/m = m_0 < 1$.

Entonces: $\left\{ x \right\}^{m_0} = \left\{ x^{1/2} \right\}^{2m_0} = \left\{ x_1 \right\}^{m_1}$;
 con $x_1 = \sqrt{x}$; $m_2 = 2m_1$

Si $m_1 > 1$, hacer:

$\left\{ x_1 \right\}^{m_1} = x_1 \left\{ x_1 \right\}^{m_1 - 1} = y_1 \left\{ x_1 \right\}^{m_2}$; con $y_1 = x_1$;
 $x_2 = x_1$; $m_2 = m_1 - 1$

EN GENERAL:

Si $x^m = y_k \left\{ x_k \right\}^{m_k}$, $m_k < 1$

Entonces:

$x^m = y_k \left\{ x_k^{1/2} \right\}^{2m_k} = y_{k+1} \left\{ x_{k+1} \right\}^{m_{k+1}}$; con $y_{k+1} = y_k$;
 $x_{k+1} = \sqrt{x_k}$; $m_{k+1} = 2m_k$

Si $m_k > 1$, entonces se tiene que:

$$x^m = y_k x_k \left\{ x_k \right\}^{m-k} = y_{k+1} \left\{ x_{k+1} \right\}^{m-k+1}$$

con $y_{k+1} = y_k x_k$; $x_{k+1} = x_k$; $m_{k+1} = m_k - 1$;

El algoritmo da un resultado muy próximo, cuando x_k se aproxima a 1 y la solución es:

$$x^m \approx y_k$$

EJEMPLO: Evaluar $(.327)^{.32}$

$$\begin{aligned} (.327)^{.32} &= (.5718391)^{.64} = (.7562)^{1.28} = (.7562)(.7562)^{.28} = y_1 (.7562)^{.28} \\ &= y_1 (.7562)^{.28} = y_1 (.86695978353)^{.56} = y_1 (.93252232)^{1.12} \\ &= y_2 (.93252232)^{1.12} = y_2 (.96567195)^{.24} = y_2 (.98268609)^{.48} \\ &= y_2 (.99130524563)^{.96} = y_2 (.99564313166)^{1.92} \\ &= y_3 (.99564314)^{.92} = y_3 (.99781918785)^{1.68} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- & Y_5 (.9989)^{.68} & - & Y_5 (.99945435)^{1.36} \\
- & Y_6 (.999455435)^{.36} & - & Y_6 (.99945435)^{.86} \\
- & Y_6 (.999727138)^{1.72} & - & Y_7 (.999727138)^{.72} \\
- & Y_7 (.9998635597)^{1.44} & = & Y_8 (.9998635597)^{.44} \\
- & Y_8 (.99993177752)^{.88} & = & Y_8 (.999965888)^{1.76} \\
- & Y_9 (.999965888)^{.76} & = & Y_9 (.999982944)^{1.52} \\
- & Y_{10} (.999982944)^{.52} & = & Y_{10} (.99999147196)^{1.04} \\
- & Y_{11} (.99999147196)^{.04} & = & Y_{12} (.99999573597)^{.08} \\
- & Y_{12} (.999997866798)^{.16} & = & Y_{13} (.999989)^{.32} - Y_{13} (1)
\end{aligned}$$

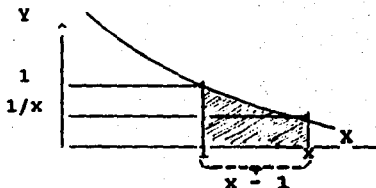
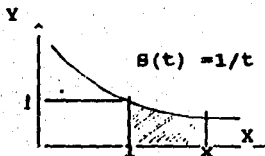
$$\begin{aligned}
=> (.327)^{.32} \approx Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6 Y_7 Y_8 Y_9 Y_{10} Y_{11} Y_{12} = \\
& = .75131796322
\end{aligned}$$

Si se requiere mayor precisión ,
se puede continuar con el procedimiento.

ALGORITMO PARA EVALUAR LN X , X > 0 .

El método se basa en la interpretación geométrica de que $S(x) = 1/t$, es la función que determina el área bajo la curva igual $\log x$; (Es uno de los métodos clásicos utilizado por GREGORY).

Y se trata de calcular el área por aproximaciones sucesivas, de acuerdo a las siguientes figuras :



El Área del trapecio A(T) de dimensiones :

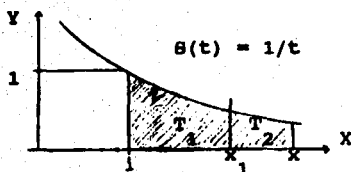
altura $x - 1$,
base mayor 1 ,
base menor $1/x$
es :

$$A(T) = 1/2(1 + 1/x)(x - 1) = 1/2(x - 1 + 1 + 1/x) = 1/2(x + 1/x) = L_1$$

Para una mayor aproximación , se toma un punto intermedio entre 1 y x . Sea x_1 ese punto, entonces :

$$1 < x_1 < x$$

De acuerdo a la figura :



$$\begin{aligned}
 A(T) &= A(T_1) + A(T_2) = L_2 \\
 &= 1/2(1 + x_1)(x_1 - 1) + \\
 &+ 1/2(1/x_1 - 1/x)(x - x_1)
 \end{aligned}$$

Pero por las propiedades de los logaritmos que se vieron en el Capitulo anterior, se tiene que :

$$(1/2) \log x = \log x^{1/2} = \log \sqrt{x}$$

Entonces, para desarrollar el logaritmo, nos conviene elegir $\sqrt{x} = x_1$:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow L_2 &= 1/2(1 + 1/\sqrt{x})(\sqrt{x} - 1) + 1/2(1/\sqrt{x} + 1/x)(x - \sqrt{x}) \\
 &= 1/2(\sqrt{x} + 1 - 1/\sqrt{x}) + 1/2(x/\sqrt{x} + 1 - 1 + \sqrt{x}/x) \\
 &= 1/2(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}) + 1/2(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}) \\
 &= \sqrt{x} - 1/\sqrt{x} = (x - 1)/\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso para una mayor aproximación,

$$A(T) = 1/2(x - 1/x) = L_1$$

$$L_2 = (\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})$$

$$L_3 = 2(\sqrt[4]{x} - 1/\sqrt[4]{x})$$

...

$$L_{n-1} = 2^{n-3} \left(x^{(1/2)^{n-2}} - 1/x^{(1/2)^{n-1}} \right)$$

$$L_n = 2^{n-2} \left(x^{(1/2)^{n-1}} - 1/x^{(1/2)^n} \right)$$

Simplificando el proceso para obtener $\ln x$, a partir de $\ln x - 1$:

$$L_2 = L_1/c_1(x) \quad \text{con } c_1(x) = 1/2(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}}{1/2(x - 1/x)} = \frac{(x - 1)/\sqrt{x}}{1/2(x^2 - 1)/x} = \frac{(x - 1)x}{1/2(x^2 - 1)\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(x - 1)}{1/2(x^2 - 1)} = \frac{\sqrt{x}}{1/2(x + 1)} = \frac{2\sqrt{x}}{1/2(x^2 - 1)\sqrt{x}}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{2\sqrt{x}}{x + 1} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1/2(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})}$$

$$\Rightarrow L_2 = L_1/c_1 \quad \text{con } c_1 = 1/2(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})$$

$$\begin{aligned}
\frac{L_3}{L_2} &= \frac{2(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})}{\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x} - 1)/\sqrt{x}}{(x - 1)/\sqrt{x}} \\
&= \frac{2(\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}}{(x - 1)\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}}{x - 1} = \frac{2(\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \\
&= \frac{2(\sqrt{x})/2(\sqrt{x})}{(\sqrt{x} + 1)/2(\sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)/2(\sqrt{x})} = \frac{1}{1/2(\sqrt{x} + 1)/\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{1/2\left\{(\sqrt{x} + 1)/\sqrt{x}\right\}} = \frac{1}{1/2\left\{\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}\right\}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_3 = L_2/c_2, \quad \text{con } c_2 = 1/2(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})$$

Observemos que $c_1 = c_2$, entonces:

$$\begin{aligned}
c_2^2 &= 1/4(\sqrt{x} + 2 + 1/\sqrt{x}) = 1/4\left\{2 + (\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})\right\} = \\
&= 1/4(2 + c_1) \\
&= 1/2(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}) = (1 + c_1)/2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{(1+c_1)/2}$$

EN GENERAL :

$$c_{n+1} = \sqrt{(1+c_n)/2}$$

De aquí, se puede proponer el algoritmo simplificado para evaluar $\ln x$, con $x > 0$.

PROCEDIMIENTO SIMPLIFICADO PARA EVALUAR $\ln x$, $x > 0$:

Sean:

$$L_1 = 1/2(x - 1/x)$$

$$c_0 = 1/2(x + 1/x)$$

$$L_2 = L_1/c_1$$

$$c_1 = \sqrt{(1+c_0)/2}$$

$$L_3 = L_2/c_2$$

$$c_2 = \sqrt{(1+c_1)/2}$$

⋮

$$L_n = L_{n-1}/c_{n-1}$$

$$c_{n-1} = \sqrt{(1+c_{n-2})/2}$$

Cuando $c_{n-1} \approx 1$, entonces

$$\ln x = L_n = L_{n-1}/c_{n-1} = L_{n-1}$$

EJEMPLO:

Evaluar $\ln 4$

$$c_0 = 1/2(4 + 1/4) = 2.125$$

$$L_1 = 1/2(4 - 1/4) = 1.875, \quad c_1 = \sqrt{(1 + 2.125)/2} = 1.5625$$

$$L_2 = (1.875)/c_1 = 1.2, \quad c_2 = \sqrt{(1 + 1.5625)/2} = 1.28125$$

$$L_3 = 1.2/c_2 = .93658, \quad c_3 = \sqrt{(1 + .93658)/2} = .984017276$$

$$L_4 = .93658/c_3 = .876927, \quad c_4 = \sqrt{(1 + .876927)/2} = 1.068$$

$$L_5 = .876927/c_4 = .862387, \quad c_5 = \sqrt{(1 + .862387)/2} = 1.01686$$

$$L_6 = .862387/c_5 = .85518, \quad c_6 = \sqrt{(1 + .85518)/2} = 1.00843$$

$$L_7 = .85518/c_6 = .85338788, \quad c_7 = \sqrt{(1 + .85338788)/2} = 1.0021$$

$$L_8 = .85338788/c_7 = .8529358, \quad c_8 = \sqrt{(1 + .8529358)/2} = 1.00052$$

$$L_9 = .8529358/c_8 = .8528249, \quad c_9 = \sqrt{(1 + .8528249)/2} = 1.00013$$

$$L_{10} = .8528249/c_9 = .8527976, \quad c_{10} = \sqrt{(1 + .8527976)/2} = 1.000032$$

$$L_{11} = .8527976/c_{10} = .85279, \quad c_{11} = \sqrt{(1 + .85279)/2} = 1.000008$$

$$L_{12} = .85279/c_{11} = .852788, \quad c_{12} = \sqrt{(1 + .852788)/2} = 1.000002$$

$$L_{13} = .852788/c_{12} = .85278758, \quad c_{13} = \sqrt{(1 + .85278758)/2} = 1.00000049$$

$$\Rightarrow \ln 4 \approx .85278758$$

Si se requiere mayor aproximación, se puede continuar.

Demostración:

Sea $| \sqrt{x} |$ para $x > 0$

$$s_1(x) = x^{1/2}$$

$$s_2(x) = x^{1/4}$$

$$s_3(x) = x^{1/8}$$

\vdots

$$s_n(x) = x^{1/2^n}$$

Entonces la sucesión $\{x_n\} = \{x^{1/2}, x^{1/4}, \dots, x^{1/2^n}, \dots\}$

tiende a uno, para alguna n .

$$1/2^n \rightarrow 0 \text{ para } n > 0$$

$$\Rightarrow c_n = \sqrt{(1+c_{n-1})/2} = \sqrt{x^{1/2^n}} \approx \sqrt{x^0} = \sqrt{1} = 1$$

ALGORITMO PARA EVALUAR $\text{SEN } a$.

Para desarrollar el procedimiento, se usa el método de Ptolomeo, visto en el capítulo anterior:

Sea a tal que $a = |a|/2^n$ donde $a \in (-\pi/2, \pi/2)$

para $n > 0$, como a es muy pequeño, por la propiedad

vista en el Capítulo anterior , se tiene que :
 $\text{sen } a \approx a$

Además, por las propiedades vistas en el mismo Capítulo para calcular el seno del ángulo duplo, se tiene lo siguiente :

$$\begin{aligned} \cos^2(a) &= 1 - \text{sen}^2 a \Rightarrow \cos a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a} \\ \text{sen}(2a) &= 2 \text{sen} a \cos a \end{aligned}$$

Entonces :

$$\begin{aligned} \text{sen}(2a) &= 2 \text{sen} a \cos a = 2 \text{sen} a (1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2 a}) \\ \text{sen}(2a) &= 4 \text{sen}^3 a (1 - \text{sen}^2 a) \end{aligned}$$

Para $n = 10$, con $a \in (-\pi/2, \pi/2)$, se tiene :

$$|a| = |a|/2^{10} \leq (\pi/2)/2^{10} \leq \pi/2 < 1.54(10)^{-4}$$

Por lo tanto se tiene lo siguiente :

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(2a) &= 4 \text{sen}^2 a (1 - \text{sen}^2 a) \\ \text{sen}^2(2^2 a) &= 4 \text{sen}^2(2a) [1 - \text{sen}^2(2a)] \end{aligned}$$

$$\sin^2(2^3 a_0) = 4 \sin^2(2^2 a_0) [1 - \sin^2(2^2 a_0)]$$

$$\sin^2(2^9 a_0) = 4 \sin^2(2^8 a_0) [1 - \sin^2(2^8 a_0)]$$

$$\sin^2(2^{10} a_0) = 4 \sin^2(2^9 a_0) [1 - \sin^2(2^9 a_0)]$$

$$\Rightarrow \sin^2(a^{10} a_0) = \sin^2 a$$

$$\Rightarrow \sin a \approx \begin{cases} + \sqrt{\sin^2(2^{10} a_0)} & , \text{ si } a < 0 \\ - \sqrt{\sin^2(2^{10} a_0)} & , \text{ si } a > 0 \end{cases}$$

EJEMPLO:

Evaluar $\sin 37^\circ$

$$\sin 37^\circ = \sin(37^\circ \pi / 180^\circ) = \sin(0.645771277)$$

$$\sin a_0 = a/2^{10} = (.644771277)/1024 = 6.305246 (10)^{-4}$$

$$\sin^2(a_0) = 3.97555 (10)^{-7}$$

$$\sin^2(2a_0) = 1.580499 (10)^{-6}$$

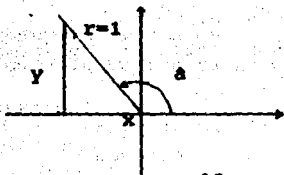
$$\begin{aligned} \text{sen}^2(2^2 a) &= 2.497997 (10)^{-6} \\ \text{sen}^2(2^3 a) &= 6.239889 (10)^{-6} \\ \text{sen}^2(2^4 a) &= 3.893662 (10)^{-5} \\ \text{sen}^2(2^5 a) &= 1.516027 (10)^{-4} \\ \text{sen}^2(2^6 a) &= 2.298337 (10)^{-4} \\ \text{sen}^2(2^7 a) &= 5.282356 (10)^{-4} \\ \text{sen}^2(2^8 a) &= 2.790328 (10)^{-2} \\ \text{sen}^2(2^9 a) &= 7.78593 (10)^{-2} \\ \text{sen}^2(2^{10} a) &= 6.016807 (10)^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{sen } a \approx 0.6016807$$

EJMPLO : Evaluar $\text{sen } 132^\circ$

Como $a \in (3\pi/2, \pi/2)$, $a > 90^\circ$, entonces :

$\text{sen } a = | \text{sen}(a - 90^\circ) |$, puesto que a está en
 en el tercer cuadrante del plano cartesiano \mathbb{R}^2 :



$$\text{sen } a = y/r = y$$

Entonces hagamos :

$$a = 132^\circ - 90^\circ = 43$$

$$\text{Sea } a_0 = a_1 / 2^{10} = (42^\circ \pi / 180^\circ) / 2^{10} = (.7330377) / 1024$$

Siguiendo el procedimiento anterior ,

$$\Rightarrow \text{sen } a_0 = \text{sen } a \approx .6691752961$$

ALGORITMO PARA EVALUAR COS a :

PRIMER METODO :

Como $\cos a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a}$, por la propiedad vista en el capítulo anterior. Se puede calcular el coseno usando la fórmula para evaluar el seno y después esta propiedad.

EJEMPLO : Evaluar $\cos 18^\circ$

$$\text{Entonces } \cos 18^\circ = \sqrt{1 - \text{sen}^2(18)}$$

$$\text{sen}18^\circ = \text{sen } 18 \pi/180^\circ = \text{sen}(.314159)$$

$$\text{Sea } a_0 = a_1/2^{10} = 3.05660214 (10)^{-4}$$

Usando el procedimiento anterior :

$$\text{sen}18^\circ = .0954808$$

$$\Rightarrow \cos 18^\circ = \sqrt{1 - .0954808} = \sqrt{.9045192}$$

$$\cos 18^\circ = .95106214$$

FALTA PAGINA

No. 110 a la 111

$$a_0 = 1.159 (10)^{-3}$$

$$\begin{aligned} \cos a_0 &= 1 - [1.159(10)^{-3}]^2 = 1 - 6.716405(10)^{-6} = \\ &= .9999993 \end{aligned}$$

$$\cos(2a_0) = 1 - 2(.9999993)^2 = .9999972$$

$$\cos(2^2 a_0) = 1 - 2(.9999972)^2 = .9999888$$

$$\cos(2^3 a_0) = 1 - 2(.9999888)^2 = .9999552$$

$$\cos(2^4 a_0) = 1 - 2(.9999552)^2 = .9998205$$

$$\cos(2^5 a_0) = 1 - 2(.9998205)^2 = .9992832$$

$$\cos(2^6 a_0) = 1 - 2(.9992632)^2 = .9971341636$$

$$\cos(2^7 a_0) = 1 - 2(.9971341636)^2 = .98855308042$$

$$\cos(2^8 a_0) = 1 - 2(.98855308042)^2 = .09544743856$$

$$\cos(2^9 a_0) = 1 - 2(.09544743856)^2 = .82204270552$$

$$a_0 = 1.159 (10)^{-3}$$

$$\cos a_0 = 1 - [1.159(10)^{-3}]^2 = 1 - 6.716405(10)^{-6} = .9999993$$

$$\cos(2a_0) = 1 - 2(.999993)^2 = .9999972$$

$$\cos(2^2 a_0) = 1 - 2(.9999972)^2 = .9999888$$

$$\cos(2^3 a_0) = 1 - 2(.9999888)^2 = .9999552$$

$$\cos(2^4 a_0) = 1 - 2(.9999552)^2 = .9998205$$

$$\cos(2^5 a_0) = 1 - 2(.9998208)^2 = .9992832$$

$$\cos(2^6 a_0) = 1 - 2(.9992632)^2 = .9971341636$$

$$\cos(2^7 a_0) = 1 - 2(.9971341636)^2 = .98855308042$$

$$\cos(2^8 a_0) = 1 - 2(.98855308042)^2 = .09544743856$$

$$\cos(2^9 a_0) = 1 - 2(.09544743856)^2 = .82204270552$$

$$\cos(2^{10} a) = 1 - 2(.82204270552)^2 = .35150841938$$

$$\cos(2^{10} a) = \cos a = 0.35150841938$$

TERCER METODO :

Como $\cos a = \sin(\pi/2 - a)$
 con $a \in (0, \pi)$.

$$\Rightarrow \sin(\pi/2 - a) = \sin a \Rightarrow a \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Entonces, se puede usar el algoritmo para evaluar el seno.

Demostración:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo y sean \hat{x} , \hat{y} los ángulos agudos del triángulo; $\hat{C} = 90^\circ = \pi/2$.



Entonces por la propiedad de que todos los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180°

$$\hat{x} + \hat{y} + \pi/2 = 180^\circ = \pi$$

$$\Rightarrow \hat{x} + \hat{y} = \pi/2$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \pi/2 - \hat{y} \quad \text{ó} \quad \hat{y} = \pi/2 - \hat{x}$$

$$\cos \pi/2 \cos(-x) - \sin \pi/2 \sin(-x)$$

Como $\cos \pi/2 = 0$, $\text{sen } \pi/2 = 1$

$$\Rightarrow \cos(\pi/2 - \hat{x}) = \text{sen}(-\hat{x})$$

$$\Rightarrow \hat{x} \in (0 - \pi/2, \pi - \pi/2) = (-\pi/2, \pi/2)$$

ALGORITMO PARA EVALUAR TAN a

PRIMER METODO

Como $\tan a = \text{sen} a / \text{cos} a$, con $a \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Se puede evaluar $\text{sen} a$ con el método descrito y sustituir $\text{cos} a$ con alguno de los métodos descritos anteriormente :

EJEMPLO:

Evaluar $\tan 32^\circ$

$$a = 32^\circ \pi / 180^\circ = .5585$$

$$a_{\circ} = a/2^{10} = .5585 / 1024 = 5.4541 (10)^{-4}$$

$$\text{sen}^2(a_{\circ}) = 2.9747 (10)^{-4}$$

$$\text{sen}^2 2a_{\circ} = 8.84884 (10)^{-7}$$

$$\text{sen}^2 2^2 a_{\circ} = 7.83019709383 (10)^{-6}$$

$$\text{sen}^2 2^3 a_{\circ} = 6.13119865282 (10)^{-5}$$

$$\text{sen}^2 2^4 a_{\circ} = 3.75915969203 (10)^{-4}$$

$$\text{sen}^2 2^5 a_{\circ} = 1.41312815901 (10)^{-3}$$

$$\text{sen}^2 2^6 a_{\circ} = 1.99693119378 (10)^{-2}$$

$$\text{sen}^2 2^7 a_{\circ} = 3.98765728732 (10)^{-2}$$

$$\text{sen}^2 2^8 a_{\circ} = 1.59020239915 (10)^{-1}$$

$$\text{sen } 2^{\circ} = 2.32874367026 (10)^{-1}$$

$$\text{sen } 10^{\circ} = 5.30455804253 (10)^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{sen } 2^{\circ} = .530155804253$$

Usando, por ejemplo, la fórmula trigonométrica para el coseno:

$$\cos a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a}$$

$$\cos 32^{\circ} = \sqrt{1 - (.530155804253)^2}$$

$$= \sqrt{1 - .28102509392} = \sqrt{.718974907} = .8479238763$$

$$\Rightarrow \tan 32^{\circ} = .530155802 / .8479238763 = .62498982526$$

SEGUNDO METODO :

En el ejemplo anterior, se substituyó el valor del seno por el coseno, una variante sería :

$$\text{Como } \text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a \Rightarrow \text{sen} a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

$$\Rightarrow \tan a = [\sqrt{1 - \cos^2 a}] / \cos a$$

Y evaluar el coseno por cualquiera de los métodos descritos anteriormente .

EJEMPLO : Evaluar $\tan 32^{\circ}$

$$\cos 32^{\circ} = .84801532697$$

$$\text{sen } 32^{\circ} = \cos(90^{\circ} - 32^{\circ}) = .62498925387$$

$$\tan 32^{\circ} = .62498925387$$

PROCEDIMIENTO PARA EVALUAR LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS

El procedimiento consiste en evaluar cualquiera de las funciones trigonométricas con los métodos descritos anteriormente y, después tomar el recíproco, esto es:

Si el dominio de $f(\theta)$ está definida en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, existe y es distinto de cero, entonces :
 $1/f(\theta)$ también existe .

Por definición las funciones trigonométricas están definidas en el intervalo de $(-\pi/2, \pi/2)$, para los valores del rango se vio en el capítulo anterior, y por la definición de funciones trigonométricas recíprocas se tiene por consiguiente :

$$\tan \theta = 1/\cot \theta$$

$$\sec \theta = 1/\cos \theta$$

$$\csc \theta = 1/\sin \theta$$

EJEMPLO: Evaluar $\cot 32^\circ$

Como $\tan \theta = 1/\cot \theta$, se puede evaluar $\tan \theta$ por cualquiera de los métodos anteriores:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan 32^\circ &= .62498982526 & \Rightarrow \cot 32^\circ &= 1/.62498982526 \\ & & \Rightarrow \cot 32^\circ &= 1.6000260475 \end{aligned}$$

EJEMPLO : Evaluar $\sec 32^\circ$

Como $\sec \theta = 1/\cos \theta$, se puede calcular el coseno por cualquiera de los métodos anteriores :

$$\sec 32^\circ = 1/\cos 32^\circ = 1/.8479238763 = 1.179351161$$

EJEMPLO :
Evaluar $\csc 32^\circ$

Como $\operatorname{sen} \alpha = 1/\operatorname{csc} \alpha \Rightarrow \operatorname{csc} \alpha = 1/\operatorname{sen} \alpha$, para $\operatorname{sen} \alpha$ distinto de cero.

$$\Rightarrow \csc 32^\circ = 1/.530155802 = 1.88623796292$$

Las variantes para calcular las funciones trigonométricas, pueden determinarse utilizando cualquiera de los métodos de cálculo propuestos.

C O N C L U S I O N E S

Los algoritmos Clásicos tienen la ventaja de proporcionar el origen y desarrollo de las funciones elementales.

En la Grecia Clásica, los métodos para evaluar las funciones trigonométricas, se realizaba a base de regla y compás; Euclides explica este método en su "Elementos", pero conforme se fué desarrollando la Geometría; Ptolomeo propone un método a base de relacionar el arco con el radio de la circunferencia, y los teoremas que usamos en ambos capítulos; el método euclideano, interpretado en coordenadas cartesianas, resulta de utilidad para enseñar a los jóvenes estudiantes de secundaria, como se pueden construir las tablas de las funciones trigonométricas, no sólo por su sencillez, sino para proporcionarles una visualización mas completa que los introduzca a la comprensión de los conceptos trigonométricos básicos, y que puedan acceder, de manera natural a la Geometría Analítica. En el nivel Medio Superior, es esta materia, la que cuenta con mayor reprobación escolar, y la que constituye el cuello de botella propio para la deserción escolar; y el principal motivo es -

esa falta de percepción geométrica de la que se habló. Consideramos que el estudio del origen y desarrollo de las funciones trigonométricas, puede ayudarles a que incorporen en sus estructuras cognoscitivas el acceso a la abstracción requerida para el estudio de las Matemáticas.

Los algoritmos para evaluar las funciones $f(x) = x^n$, $f(x) = \sqrt{x}$, con $x > 0$, y $f(x) = \sqrt[n]{x}$ que son lentos y las operaciones que se deben realizar son cuantiosas, resultan indispensables para la comprensión de su primer curso de Algebra, paso ineludible para incorporar sus conocimientos a su vida académica, en la resolución de problemas de Matemáticas y de otras asignaturas.

Durante el descubrimiento de América, las operaciones para calcular las nuevas rutas de los viajeros resultaban excesivas y suamente largas; pero los pioneros del análisis numérico, inventaron los logaritmos, Napier dedicó su vida entera (25 años) en construir tablas que facilitarían los cálculos; al sustituir una progresión geométrica por una aritmética; al idear un cambio de operaciones de multiplicación y división, por otras más sencillas como son adición y sustracción; utilizando para ello una -

curiosa definición que desencadenó una serie de repercusiones que dieron inicio al Cálculo Integral, desde las Conexiones realizadas por Búrgi, Brigs, Gregory, - Newton, Leibnitz y otros hasta la moderna definición de Glasser en el Siglo Pasado.

Es muy importante dar a conocer a los estudiantes del nivel medio superior un panorama del desarrollo de las Matemáticas, porque como dice Ausubel, uno de los pedagogos más importantes de nuestra década, "el conocimiento solo se aprende cuando es significativo". Los alumnos deben conocer el origen de la evaluación de las funciones elementales para que valoren el trabajo que le costado a la humanidad avanzar hasta las estructuras matemáticas que se les muestran, y al mismo tiempo, es importante que observen que hay otras opciones para evaluar las funciones elementales, que no son tan laboriosas y que les pueden ayudar a resolver sus problemas cuando requieren hacer cálculos con estas funciones, si no disponen de computadoras o calculadoras científicas. Lo cual es usual en el bachillerato.

Los algoritmos Clásicos, desde luego, resultan útiles para que el alumnado obtenga un grado cognoscitivo mas avanzado, pero no resultan prácticos para evaluar las

funciones elementales cuando se requieren cálculos muy laboriosos. Para ello, se presentaron los algoritmos aritméticos, que aunque no son muy rápidos, son más sencillos de ejecutar que los clásicos y más eficientes; además, tienen la ventaja que están bien sustentados en una base matemática sólida, no solo los clásicos ; de comprender mas sencillos, puesto que no recurren a conocimientos muy avanzados.

Por último los algoritmos aritméticos pueden ser utilizados por estudiantes de Nivel Medio y Medio Superior , que no tengan conocimientos de Cálculo , y constituyen un medio introductorio , tanto a la Geometría Analítica como al Cálculo; y una herramienta para resolver problemas, cuyo planteo , involucra la evaluación de las funciones elementales.

Para finalizar, pueden enseñarse durante los cursos elementales de Algebra , para explicar a los alumnos como se calculan las funciones elementales.

B I B L I O G R A F I A

BARRERA, S.P.; " Algoritmos Sencillos para la Evaluación de las Funciones Elementales"; Revista Matemática y... algo más "; Facultad de Ciencias, UNAM; ART. 4, págs. 47 a 74; México, C.U., 1991.

BOSH, G. y HERNANDEZ, O.; "Cálculo Diferencial e Integral"; Publicaciones Cultural; Capítulo 6, Función logaritmo natural, pás. 197 a 228; México, D.F.; 1992.

EDWARDS, C.H.; "The Historical Development of the Calculus"; Springer-Verlang New York Inc.; Capítulos 6 a 10; págs. 142 a 276; Universidad de Georgia, E.U.A.; 1979.

GUZMAN, H. A.; "Geometría y Trigonometría"; Publicaciones Cultural, S. A. de C.V. ; Tabla 4, Valores de las Funciones Trigonómicas, págs. 185 a 189; México, D. F., 1979.

GOLDSTINE, H. H.; "A History of Numerical Analysis. From the 16th. thoug the 19th. Century"; Springer - Verlang New York Inc.; Capítulos I y II; págs. 1 a 117 ; E. U. A., 1977.

KEPLER, D. y RAMSEY, N.; "Curso Rápido de Cálculo Diferencial e Integral"; Apéndices A1, A3 y A8; Págs.: 267, 272 , 278; México, D.F.; 1982.

PHILLIPS, E.P. et. al.; "Algebra con Aplicaciones"; Editorial Harla ; Capítulo II, Series Aritméticas y Geométricas; págs. 649 a 660 ; Mexico, D. F.; 1988.

PULSKAMP, R.J. y DELANEY, J.A.; "Of Elementary Function" Dept. of Math. y Comp. Csience; Xavier University ; COMAP; Arlington, England, 1991.

SPIEGEL, M.R.; "Estadística y Probabilidad"; Schawms Series Outline, McGraw - Hill de México, S.A. de C.V.; Apéndice V; Logaritmos decimales con cuatro cifras; págs. 346 y 347. México, D.F. ; 1961.

SHIVELY, L. S.; "Introducción a la Geometría Moderna"; Cia Editorial Continental; Cap.II, Construcciones con regla y compás; págs. 148 y 151; México, D. F.; 1961.

ZUBIETA, R. F.; "Algebra Elemental"; Cap. XIII, Exponentes y Logaritmos"; págs. 225 a 242; 1966.

Wenzelburger, G.E.; Recopilación de Matemáticas III; Art.2;

ESTRADA, M. J. M.; uacyp - CCH , UNAM y C. DE B. "Construcciones con regla y compás, una Introducción Histórica a la Geometría"; págs. 34 a 84; México, 1994.

Este tesis fue elaborada
en su totalidad en los talleres de:
IMPRESOR FRANCO MOYA
Rep. de Cuba NP 99 Despacho 23 Bis
Centro México, D.F.

PRESUPUESTOS DE 8:30AM A 7:00 PM.
TEL. 512-10-30
DE 9:00 PM A 11:00 PM.
TEL. 667-34-74
SR. SALVADOR MOYA FRANCO