11a
2aj.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ACATLAN

UN METODO PARA LA INVERSION DE MATRICES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

VERONICA LEDESMA CISNEROS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ACATLAN, 1994

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA
PROGRAMA DE ACTUARIA Y M.A.C.

SRITA. VERONICA LEDESMA CISNEROS
ALumna de la carrera de Actuaría,
P r e s e n t e .

Por acuerdo a su solicitud presentada con fecha 11 de julio de 1994, me complace notificarle que esta Jefatura tuvo a bien asignarle el siguiente tema de Tesis: "UN METODO PARA LA INVERSION DE MATRICES", el cual se desarrollará como sigue:

INTRODUCCION
CAP. I Fundamentos del Algebra Lineal
CAP. II El método de Gauss-Jordan
CAP. III Método Propuesto
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES
BIBLIOGRAFIA

Asimismo, fué designado como Asesor de Tesis el M.en C. LUCIO PEREZ RODRIGUEZ, profesor de esta Escuela.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá presentar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la Tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la tesis.

A T E N T A M E N T E
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Acatlán, Edo. Méx. noviembre 8 de 1994.

ACT. LAURA MA. RIVERA BECERRA
Jefe del Programa de Actuaría
y M.A.C.

PROGRAMA DE ... MATICAS ... COMPUTACION

cg'

Deseo aprovechar este espacio para agradecer a aquellos maestros, amigos y familiares que contribuyeron en la realización de uno de mis grandes anhelos: la consecución de mi licenciatura. Mención especial merecen:

Mis padres, por su amor y apoyo que han sido el ingrediente esencial en mi desarrollo personal y profesional;

Chucho Papá, Mami Emma y mis tíos Mario e Irma, por estar siempre a mi lado brindándome su cariño y sus cuidados;

Luis por su cariño, comprensión y constante ayuda, que son motivos suficientes para superarme día a día;

Fernando, Alberto y Adriana por sus invaluables consejos;

Ceci y Yadi, quienes son mis más fieles compañeritas.

A ustedes les dedico mi tesis.

Con respeto y cariño

Índice

Capítulo III
Método Propuesto

Glosario

Álgebra Lineal: se puede definir el Álgebra Lineal como aquella rama de la matemática que trata de las propiedades comunes de los sistemas algebraicos que constan de un conjunto más una noción razonable de "combinación lineal" de los elementos del conjunto.

Algoritmo: es la especificación detallada y, libre de ambigüedad, de un conjunto de pasos que hay que seguir para llegar a cierto fin medible y comprobable.

Análisis Numérico: es la rama de la matemática que diseña métodos para aproximar, de manera eficiente, las soluciones de problemas expresados matemáticamente. La eficiencia del método depende tanto de la precisión que se requiera como de la facilidad con la que pueda implementarse.

Campo (o Cuerpo): es un conjunto K, junto con dos operaciones llamadas adición y multiplicación que satisfacen las propiedades de cerradura, conmutatividad, asociatividad y distributividad; así como la existencia de elementos neutros e inversos para ambas operaciones.

Función: sean A y B dos conjuntos. Una función $f: A \rightarrow B$ es una relación R en $A \times B$ que satisface:

i) Para toda $x \varepsilon A$ existe una pareja $(x,y) \varepsilon R$
ii) Cada elemento $x \varepsilon A$ tiene asociado sólo uno de B.

Iteración: obtención de un valor por sustitución repetida, dentro del mismo sistema de cálculo, de una solución.

Matriz Diagonal: una matriz $A=(a_{ij})$ de $n \times n$ se llama diagonal si $a_{ij}=0$ para todo $i \neq j$.

Matriz Identidad: es una matriz de $n \times n$ definida por

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Matriz Transpuesta: la transpuesta de la matriz $A=(a_{ij})$, denotada como A', se define como

$$(A')_{ij} = a_{ji}$$

Matriz Nula o Cero de $m \times n$: es una matriz cuyos elementos son todos 0.

Métodos Directos: son aquellos métodos que producen una solución exacta en un número predeterminado de cálculos.

Relación: Sean A y B dos conjuntos. Una relación entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Solución Trivial: es el vector solución x de un sistema de ecuaciones lineales cuyos elementos son todos 0, en caso contrario recibe el nombre de **solución no trivial.**

Submatriz: si la matriz B se obtiene suprimiendo cualquier número de renglones y columnas de cierta matriz A se dirá que B es una *submatriz* de la matriz A.

Resumen

El presente trabajo expone un nuevo método de inversión de matrices. Dicho método se basa en una propiedad del Álgebra Lineal para obtener la inversa de una matriz a partir de la inversión sucesiva de sus submatrices.

En el capítulo III se presenta una exposición detallada del método, sustentada en las bases teóricas del Álgebra Lineal. Se presenta su algoritmo, una aplicación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales y, por último, se dan dos ejemplos numéricos.

Abstract

This document shows a new method of matrix inversion. The method gets the inverse of a matrix which consists of iteratively inverting sub-matrices of increasing size. The method is based on a characteristic of Linear Algebra.

The exposition of this method is made in chapter III. It is about the basis of the method , its algorithm, its application on the solution of linear equations and, finally, a numerical example is given.

Introducción

Los motivos que me impulsaron a elegir este tema fueron: en primer lugar, mi interés y gusto por la materia de Álgebra Lineal, y porque de esta manera muestro a mis compañeros de la carrera de Actuaría de Acatlán que el Álgebra Lineal es también un campo que puede ser explotado en la búsqueda de temas de tesis.

En segundo lugar, estoy consciente de la importancia que tiene, para un profesionista que se enfrenta con un problema, el contar con una amplia gama de métodos que le permitan resolverlo, eligiéndo aquél que, en base a sus habilidades y preferencias, sea el más eficiente en las condiciones y circunstancias que prevalezcan.

Por lo anterior y dado que el método de Gauss-Jordan es el único método directo invertir matrices; el propósito de la presente tesis es proponer una alternativa para esto. La principal característica del procedimiento propuesto son sus bases en la partición de matrices.

Para introducirse al método propuesto fue necesario el estudio de ciertas bases teóricas del Álgebra Lineal. El trabajo se recomienda para aquellas personas con conocimientos básicos en esta rama de la matemática, que estén interesados en los Métodos Numéricos.

En el capítulo I se presentan sobre los principios fundamentales del Álgebra Lineal, y se introducen conceptos referentes a sistemas de ecuaciones lineales, que son básicos para los desarrollos de los capítulos posteriores.

Se analiza en el capítulo II el método de Gauss-Jordan cuyo análisis da la pauta para evaluar la efectividad del método que se propone. En el capítulo III se desarrolla la exposición del nuevo método. Para ambos se presenta la teoría correspondiente, su aplicación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales y se ilustran sus procedimientos mediante dos ejemplos numéricos.

En la parte correspondiente a Conclusiones y Recomendaciones se analizan las ventajas que tendría el uso del método y se citan algunas sugerencias que en un momento dado podrían ser objeto de futuras investigaciones o mejoras.

Por último, en la sección de anexos se presentan los desarrollos a partir de los cuales se obtuvieron algunos de los resultados que se dieron en las secciones que le anteceden.

Quisiera agradecer al M. en C. Lucio Pérez Rodríguez por orientarme en la elaboración de esta tesis. Además, quiero expresar mi sincero agradecimiento al Fís. Manuel Valadez Rodríguez por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Verónica Ledesma Cisneros.

Acatlán, Edo. de Méx., 1994.

Capítulo I: Fundamentos del Álgebra Lineal

1) Álgebra Matricial

Sea K un campo y sea I_n el conjunto de los primeros n números enteros positivos, esto es, $I_n=\{1,2,...,n\}$. Una matriz A de m×n con elementos en K es una función definida sobre el conjunto $I_m \times I_n$, que asocia a cada par (i,j), donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, un escalar a_{ij} del cuerpo K, en símbolos:

$$A: I_m \times I_n \to K$$

Se acostumbra el símbolo $A=(a_{ij})$ para denotar a la matriz A, especificando que se trata de una matriz de m×n, y es también usual escribir A como el arreglo rectangular:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Para referirse al elemento ij-ésimo de la matriz A se utiliza la notación

$$(A)_{ij}=a_{ij}$$

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ dos matrices de mxn. Se dice que $A=B$ si $a_{ij}=b_{ij}$, para todo i y para todo j, y se define la suma de A y B, denotada por A+B, y el producto de λ y A, escrito como λA, por:

$$(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$
$$(\lambda A)_{ij}=\lambda a_{ij}$$

El conjunto de matrices de m×n, junto con estas dos operaciones, tiene estructura de espacio vectorial.

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz de m×n y $B=(b_{ij})$ es una matriz de n×p, ambas con elementos en el campo K, se define el producto de A y B, como la matriz AB de m×p cuyos elementos son:

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad 1\leq i\leq m \quad 1\leq j\leq p$$

Es importante observar que el producto de dos matrices sólo puede ser definido si el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda. Se debe aclarar también que el producto de matrices no es conmutativo, es decir, en general $AB\neq BA$, aún cuando ambos productos estén definidos.

Sea A una matriz de n×n, si existe una matriz B tal que

$$AB=BA=I$$

se dice que B es la inversa de A, y se denota por A^{-1}; esto es, $B=A^{-1}$. Si lo anterior se cumple, se dice que A es inversible.

Matrices Particionadas.

La partición de una matriz $A=(a_{ij})$ consistu en agrupar sus elementos en submatrices A_{ij} de tal forma que cada elemento a_{ij} de A perteneco a una sola submatriz. Las submatrices serán consideradas como los elementos de la matriz particionada.

El producto de dos matrices puede llevarse a cabo mediante la partición de los factores que intervienen en el mismo. Sea $A=(a_{ij})$ una matriz de tamaño m×p y $B=(b_{ij})$ una matriz de tamaño p×n, entonces si A y B se particionan de la forma:

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c}(m_1\times p_1) & (m_1\times p_2) & \cdots & (m_1\times p_s)\\ \hdashline (m_2\times p_1) & (m_2\times p_2) & \cdots & (m_2\times p_s)\\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hdashline (m_r\times p_1) & (m_r\times p_2) & \cdots & (m_r\times p_s)\end{array}\right) \quad \text{y} \quad B=\left(\begin{array}{c:c:c:c}(p_1\times n_1) & (p_1\times n_2) & \cdots & (p_1\times n_t)\\ \hdashline (p_2\times n_1) & (p_2\times n_2) & \cdots & (p_2\times n_t)\\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hdashline (p_s\times n_1) & (p_s\times n_2) & \cdots & (p_s\times n_t)\end{array}\right)$$

donde

$(m_i\times p_j)$ es la submatriz de tamaño $m_i\times p_j$ de la matriz A

$(p_i\times n_j)$ es la submatriz de tamaño $p_i\times n_j$ de la matriz B

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = m \qquad \sum_{i=1}^{s} p_i = p \qquad \sum_{i=1}^{t} n_i = n$$

Las expresiones particionadas para A y B se pueden escribir también como

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c:c}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hdashline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs}\end{array}\right) \quad \text{y} \quad B=\left(\begin{array}{c:c:c:c}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t}\\ \hdashline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t}\\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hdashline B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st}\end{array}\right)$$

En términos de matrices particionadas, el producto de A y B se puede definir como la matriz AB cuyo I,J-ésimo elemento, submatriz de tamaño $m_I \times n_J$, se determina por

$$(AB)_{IJ} = \sum_{k=1}^{s} A_{Ik} B_{kJ} \qquad \text{para} \quad I = 1, \ldots, r \quad y \quad J = 1, \ldots, t$$

Donde los productos parciales $A_{Ik}B_{kJ}$ se efectúan de acuerdo a la definición anterior de multiplicación de matrices; esto es,

$$(A_{IK}B_{KJ})_{ij} = \sum_{p=1} (A_{IK})_{ip} (B_{KJ})_{pj}$$

Sea $\Omega=(\omega_{ij})$ una matriz de n×n que puede ser expresada en forma particionada como:

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz inversible, B una matriz columna, C una matriz renglón y $D=\omega_{nn}$. Supongamos que Ω es inversible y que su inversa Ω^{-1} se presenta en la forma particionada:

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Si se realiza el producto $\Omega\Omega^{-1}$ y se iguala con la matriz identidad, se obtiene:

$$\Omega\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_{11}+BA_{21} & AA_{12}+BA_{22} \\ CA_{11}+DA_{21} & CA_{12}+DA_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix}$$

donde I_{n-1} es la matriz identidad de (n-1)×(n-1).

Lo anterior da lugar a las ecuaciones matriciales:

$$AA_{11}+BA_{21}=I_{n-1} \quad \ldots (1)$$
$$AA_{12}+BA_{22}=0 \quad \ldots (2)$$
$$CA_{11}+DA_{21}=0 \quad \ldots (3)$$
$$CA_{12}+DA_{22}=I_1 \quad \ldots (4)$$

De (1)

$$AA_{11}=I_{n-1} -BA_{21}$$
$$A_{11}=A^{-1}-A^{-1}BA_{21} \quad \ldots (1')$$

Al sustituir este resultado en (3) se tiene:

$$C(A^{-1}-A^{-1}BA_{21})+DA_{21}=0$$
$$DA_{21}-CA^{-1}BA_{21}=-CA^{-1}$$
$$(D-CA^{-1}B)A_{21}=-CA^{-1}$$

y de aquí, si la matriz de 1×1 $(D-CA^{-1}B)$ es no nula entonces

$$\boxed{A_{21}=-(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}}$$

Así, de (1') resulta:

$$\boxed{A_{11}=A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}}$$

y de (2) se obtiene:

$$AA_{12}=-BA_{22}$$
$$A_{12}=-A^{-1}BA_{22} \quad \ldots (2')$$

que al sustituir (2') en (4) da como resultado:

$$-CA^{-1}BA_{22}+DA_{22}=I_1$$
$$(D-CA^{-1}B)A_{22}=I_1$$

y por lo tanto

$$\boxed{A_{22}=(D-CA^{-1}B)^{-1}}$$

Luego volviendo a (2'):

$$\boxed{A_{12}=-A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}}$$

Si $\delta=D-CA^{-1}B$ entonces la inversa de Ω es:

$$\Omega^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1}+\delta^{-1}A^{-1}BCA^{-1} & -\delta^{-1}A^{-1}B \\ -\delta^{-1}CA^{-1} & \delta^{-1} \end{pmatrix}$$

como se vio antes, el único requerimiento para la existencia de Ω^{-1} es que el escalar δ sea diferente de cero.

2) Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial V consta de lo siguiente:

1.- Un cuerpo K de escalares
2.- Un conjunto de elementos llamados vectores
3.- Una operación llamada suma tal que para cada par $x,y \in V$, se construye un vector $x+y$, llamado suma de x y y de V, que tiene las siguientes propiedades:

    (a) $x+y=y+x$.
    (b) $x+(y+z)=(x+y)+z$.

(c) Existe un único vector $0 \varepsilon V$, llamado vector nulo, tal que $x+0=x$ para todo $x \varepsilon V$.

(d) para todo $x \varepsilon V$, existe un único vector $-x \varepsilon V$ tal que $x+(-x)=0$.

4.- Una operación llamada multiplicación escalar, tal que para todo $\lambda \varepsilon K$ y para todo $x \varepsilon V$ se determina un vector λx de V, llamado producto de λ y x, y que satisface las siguientes propiedades:

(a) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.
(b) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.
(c) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$.
(d) $1x=x$.

Sean V un espacio vectorial y W un subconjunto de V. Si junto con las operaciones definidas en V el conjunto W es un espacio vectorial en sí mismo se dice que W es un subespacio de V.

Se puede probar que W es un subespacio de V si dados dos vectores cualesquiera x y y de W y para toda escalar λ el vector $\lambda x+y$ pertenece a W.

Un vector $y \varepsilon V$ se dice combinación lineal de los vectores $x_1, x_2, ..., x_n \varepsilon V$, si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \varepsilon K$ tales que

$$y=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_1+ \dots +\lambda_n x_n$$

Si todo vector $x \varepsilon V$ es una combinación lineal de los vectores $x_1, x_2, ..., x_n \varepsilon V$ se dice que $x_1, x_2, ..., x_n$ generan el espacio V.

Un subconjunto S del espacio vectorial V se dice linealmente dependiente si existen vectores distintos $x_1, x_2, ..., x_n$ de S y escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de K, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_1+ \dots +\lambda_n x_n=0$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice linealmente independiente.

3) Sistemas de Ecuaciones Lineales

Una ecuación lineal es una expresión de la forma

$$a_1x_1+ a_2x_2+ \dots +a_nx_n=b \qquad (5)$$

donde $a_i, b \varepsilon K$ y las x_i son las incógnitas. Los escalares a_i son los coeficientes de las x_i y b es el término independiente de la ecuación. Un conjunto de valores para las incógnitas $x_i=k_i$ $(i=1,\dots,n)$ es una solución para (5) si al sustituir estos valores en (5) la igualdad se cumple, esto es:

$$a_1k_1+ a_2k_2+ \dots +a_nk_n=b$$

Se dice que este conjunto de valores satisface la ecuación y puede ser representado en forma de n-tupla: $(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Se considera ahora un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+ a_{12}x_2+ \dots +a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \dots +a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ \dots +a_{mn}x_n=b_m \end{array} \qquad (6)$$

donde $a_{ij}, b_i \varepsilon K$. Si $b_1=b_2= \dots =b_m=0$ se dice que el sistema es homogéneo. Aplicando la definición de producto de matrices, este sistema puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o, abreviadamente

$$Ax=b$$

en donde A es la matriz de coeficientes del sistema. Es posible resumir un sistema de ecuaciones lineales en una sola matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

la cual contiene toda la información del sistema que es necesaria para determinar sus soluciones, dicha matriz se obtiene al agregarle a la matriz de coeficientes una columna con los términos independientes (b_i) y recibe el nombre de matriz aumentada.

La solución de un sistema de ecuaciones es un conjunto de valores de las incógnitas que satisfacen simultáneamente todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Un sistema se llama consistente, si admite solución; de otra forma se dice inconsistente.

Si a cada una de las ecuaciones del sistema (6) se multiplica por un escalar no nulo; por ejemplo, la primera por c_1,la segunda por c_2, etc. y luego se suma miembro a miembro todas las ecuaciones del sistema, se tendría como resultado la ecuación:

$$(c_1a_{11}+c_2a_{21}+\cdots+c_ma_{m1})x_1+\cdots+(c_1a_{1n}+c_2a_{2n}+\cdots+c_ma_{mn})x_n=c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_mb_m$$

A esta ecuación se le llama combinación lineal de las ecuaciones (6). Se observa que cualquier solución del sistema (6) es solución de esta nueva ecuación.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si cada ecuación de cada sistema es combinación lineal de las ecuaciones del otro sistema. Además, los sistemas equivalentes de ecuaciones lineales tienen exactamente las mismas soluciones.

Para la formación de combinaciones lineales de las ecuaciones del sistema $Ax=b$, se consideran las siguientes operaciones elementales de renglones en una matriz de $m\times n$, sobre el cuerpo K:

(1) Multiplicación de un renglón de A por un escalar c no nulo.
(2) Reemplazo del r-ésimo renglón de A por el renglón r más c veces el renglón s, donde c es cualquier escalar y $r\neq s$.
(3) Intercambio de dos renglones de A.

Una operación elemental de renglones es un tipo especial de función e que asocia a cada matriz A de $m\times n$, una matriz $e(A)$ de $m\times n$ de la forma:

(1) $e(A)_{ij}=a_{ij}$ si $i\neq r$, $e(A)_{rj}=ca_{rj}$
(2) $e(A)_{ij}=a_{ij}$ si $i\neq r$, $e(A)_{rj}=a_{rj}+ca_{sj}$
(3) $e(A)_{ij}=a_{ij}$ si i es diferente de r y s, $e(A)_{rj}=a_{sj}$, $e(A)_{sj}=a_{rj}$

Si A y B son dos matrices de $m\times n$ sobre el cuerpo K, se dice que B es equivalente por renglones a A si B se obtiene de A por una sucesión finita de operaciones elementales de renglones.

A continuación se enlistan algunos teoremas y definiciones que son antecedentes de los que se verán en el siguiente capítulo.[1]

[1] Las demostraciones de dichos teoremas pueden consultarse en Hoffman, págs. 7-20.

Teorema 1. A cada operación elemental e de renglones corresponde una operación elemental de renglones e_1, del mismo tipo de e, tal que $e_1(e(A))=e(e_1(A))=A$ para toda matriz A.

Teorema 2. Si A y B son matrices equivalentes por renglones, los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales $Ax=0$ y $Bx=0$ tienen exactamente las mismas soluciones.

Una matriz R de $m\times n$ se dice reducida por renglones si:

(a) el primer elemento no nulo de cada renglón no nulo de R es igual a 1;
(b) cada columna de R que tiene el primer elemento no nulo de algún renglón tiene todos sus otros elementos 0.

Teorema 3. Toda matriz de $m\times n$ sobre el cuerpo K es equivalente por renglones a una matriz reducida por renglones.

Una matriz R de $m\times n$ se llama matriz escalón reducida por renglón si:

(a) R es reducida por renglones;
(b) todo renglón de R que tiene todos sus elementos 0 está debajo de todos los renglones que tienen elementos no nulos.

Teorema 4. Toda matriz A de $m\times n$ es equivalente por filas a una matriz escalón reducida por renglones.

Si R es una matriz escalón reducida por renglones y si el número r de renglones no nulos de R es menor que el número n de incógnitas, entonces el sistema $Rx=0$ tiene una solución no trivial.

Teorema 5. Si A es una matriz de $m\times n$, con $m<n$, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $Ax=0$ tiene una solución no trivial.

Teorema 6. Si A es una matriz cuadrada, A es equivalente por renglones a la matriz identidad si y sólo si el sistema de ecuaciones $Ax=0$ tiene únicamente la solución trivial.

Una matriz $m \times m$ se dice matriz elemental si se puede obtener de la matriz identidad por medio de una sola operación elemental simple de renglones.

Teorema 7. Sea e una operación elemental de renglón y sea E la matriz elemental, $E=e(I)$. Entonces, para toda matriz A de $m \times n$

$$e(A)=EA$$

Capítulo II: Método de Gauss-Jordan

El capítulo II tiene como objetivo explicar el método de Gauss-Jordan mediante la exposición de la teoría que lo sustenta. Se resuelven dos ejemplos numéricos para ilustrar esto.

A continuación se enuncian dos corolarios y un teorema que son la base del método de Gauss-Jordan.[1]

Corolario 1. Sean A y B dos matrices m×n sobre el cuerpo F. Entonces B es equivalente por renglones a A sí y sólo sí, B=PA, donde P es un producto de matrices elementales.

Teorema 8. Si A es una matriz de n×n, los siguientes enunciados son equivalentes.

i) A es inversible.

ii) A es equivalente por renglones a la matriz identidad.

iii) A es un producto de matrices elementales.

[1] Las demostraciones pueden ser consultadas en Hoffman, págs. 20-23.

Corolario 2. Si A es una matriz inversible de n×n y si una sucesión de operaciones elementales de renglón reduce A a la identidad, entonces la misma sucesión de operaciones, cuando se aplica a I, da A^{-1}.

1) Descripción del método.

El método de Gauss-Jordan es el proceso de eliminación que reduce un sistema de ecuaciones lineales con una matriz de coeficientes cuadrada a un sistema equivalente con una matriz de coeficientes diagonal.

Analíticamente, el método de Gauss-Jordan resuelve la ecuación matricial

$$Ax=b \qquad (1)$$

multiplicando a la izquierda en ambos miembros la ecuación por una sucesión de matrices elementales $E_kE_{(k-1)}...E_2E_1$ la cual transforma la matriz A en la matriz identidad; es decir, $E_kE_{(k-1)}...E_2E_1A=I$. Al multiplicar a la izquierda la ecuación (1) por esta sucesión se tiene

$$E_kE_{(k-1)}...E_2E_1Ax=E_kE_{(k-1)}...E_2E_1b,$$

que se reduce a

$$Ix=E_kE_{(k-1)}...E_2E_1b;$$

de aquí que la solución de (1) es

$$x=E_kE_{(k-1)}...E_2E_1b.$$

Es común que en vez de aplicar el método a Ax=b se utilice la matriz aumentada de dicho sistema, es decir, se aplicará a la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{pmatrix}$$

la sucesión de operaciones elementales de renglón con lo que se obtendrá

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & b_2' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \vdots & b_n' \end{pmatrix}$$

donde la solución es $x_i = b_i'$ (i=1,..., n).

La siguiente tabla indica el número máximo de operaciones que se requieren en cada iteración para la determinación de la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas mediante Gauss-Jordan.

Iteración	Divisiones	Multiplicaciones
1	n+1	(n+1)(n-1)
2	n	(n)(n-1)
⋮	⋮	⋮
k	$(n-(k-2))$	$(n-(k-2))(n-1)$

Tabla 1. No. operaciones para la solución de sistemas de ecuaciones por Gauss-Jordan.

Esto es, son necesarias:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[n-(k-2)\right]=\frac{n^2+3n}{2}$$ divisiones, y

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(n-(k-2))(n-1)\right]=\frac{n^3+2n^2-3n}{2}$$ multiplicaciones

por lo que, en el peor de los casos, son necesarias $\frac{n^3+3n^2}{2}$ operaciones.

Como se vió en el capítulo anterior, A^{-1} es la inversa de la matriz A si:

$$AA^{-1}=I \qquad (2)$$

A^{-1} puede determinarse mediante el método de Gauss-Jordan, para ello es necesario plantear n sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$Ax=b_k \qquad k=1,\ldots,n$$

donde b_k es la matriz de $n\times1$ definida por $b_k=\delta_{ik}$ (i=1, ..., n).

A cada una de las n matrices aumentadas $(A \,\vdots\, b_k)$ se les aplicará el método de Gauss-Jordan que, como se mencionó anteriormente, consiste en la reducción, mediante operaciones elementales, de estas matrices a $(I \,\vdots\, b_k^{*})$.

Pero esto nos llevaría a repetir en todas las matrices la misma secuencia de operaciones elementales. A fin de eliminar estas repeticiones se plantea mejor la matriz $(A \,\vdots\, b_1 \;\; b_2 \;\; \ldots \;\; b_n)$, o de manera equivalente $(A \,\vdots\, I)$, que el método reduce a $(I \,\vdots\, A^{-1})$.[2]

Para determinar el número máximo de operaciones que son necesarias para la obtención de la inversa de una matriz, se observa

Iteración	Divisiones	Multiplicaciones
1	2n	(2n)(n-1)
2	2n-1	(2n-1)(n-1)
⋮	⋮	⋮
k	$(2n-(k-1))$	$(2n-(k-1))(n-1)$

Tabla 2. No. operaciones para la inversión de una matriz por Gauss-Jordan.

[2] Corolario B.

entonces el número de operaciones es de

$$\sum_{k=1}^{n}[2n-(k-1)]=\frac{3n^2+n}{2} \qquad \text{Divisiones}$$

$$\sum_{k=1}^{n}[(2n-(k-1))(n-1)]=\frac{3n^3-2n^2-n}{2} \qquad \text{Multiplicaciones}$$

En total se requieren $\frac{3n^3+n^2}{2}$ operaciones (multiplicaciones y divisiones).

Supóngase que después de haber invertido la matriz A se quisiera invertir la matriz

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

Siguiendo un desarrollo similar al realizado en el capítulo I (págs. 6 y 7) se encuentra que la inversa de esta matriz es:

$$\left(\begin{array}{c|c} A^{-1}\left[I+B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}\right] & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ \hline -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{array}\right)$$

Entonces para determinar la inversa por Gauss-Jordan, es necesario:

1) Realizar los productos $A^{-1}B$, CA^{-1} y $CA^{-1}B$.

2) Aplicar el método de Gauss-Jordan a la matriz $D-CA^{-1}B$ para encontrar su inversa.

3) Por último, realizar los productos $A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}$, $(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$, y $A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$

2) Ejemplos numéricos

Ejemplo #1.

Supónga que se desea invertir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

utilizando el método de Gauss-Jordan, el procedimiento es entonces

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{12} & \frac{2}{3} & \frac{4}{12} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{12} & \frac{4}{6} & \frac{10}{12} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Por tanto, la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 10 & 8 & 4 & -2 \\ 8 & 16 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & 10 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si se desea resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales con el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_2 + 2x_3 \qquad &= 2 \\ x_2 \qquad + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

el procedimiento es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

y la solución es

$$x = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

El número de operaciones que se realizaron en este ejemplo para la inversión de la matriz A se pueden resumir en la siguiente tabla

Matriz	Divisiones	Multiplicaciones
1a.	3	—
2a.	5	5(3)
3a.	5	5(3)
4a.	5	5(3)
Total	18	45

y para la solución del sistema de ecuaciones Ax=b

Matriz	Divisiones	Multiplicaciones
1a.	2	—
2a.	4	4(3)
3a.	3	3(3)
4a.	2	2(3)
Total	11	27

OBSERVACIÓN:

Los números de operaciones que se realizaron son menores a los que realmente requeriría una computadora. Esta diferencia se debe a que, por la presencia de elementos nulos en la matriz, no hubo necesidad de realizar varias operaciones. Para este mismo ejemplo, una computadora tendría que realizar

- para encontrar la inversa de la matriz:

Matriz	Divisiones	Multiplicaciones
1a.	8	8(3)
2a.	7	7(3)
3a.	6	6(3)
4a.	5	5(3)
Total	26	78

- para la solución del sistema de ecuaciones:

Matriz	Divisiones	Multiplicaciones
1a.	5	5(3)
2a.	4	4(3)
3a.	3	3(3)
4a.	2	2(3)
Total	14	42

Ejemplo #2.

Supóngase que una vez que se obtuvo que la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se quisiera ahora invertir la matriz:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

entonces, el procedimiento con Gauss-Jordan es:

Paso 1. Cálculo de los productos:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$CA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$CA^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Paso 2. Aplicar el método Gauss-Jordan para encontrar $(D\text{-}CA^{-1}B)^{-1}$.

$$D - CA^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Paso 3. Realizar los productos:

$$A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces los elementos de la matriz inversa son:

$$A_{22} = \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_{21} = -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A_{12} = -A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Capítulo III: Método Propuesto

El capítulo III tiene como objetivo el de exponer el método propuesto para la inversión de matrices, que consiste en la inversión iterativa de submatrices cuyo tamaño irá aumentando; dando las bases teóricas que lo sustentan, su procedimiento y su aplicación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Por último, se ilustra el método con dos ejemplos numéricos.

1) Descripción del método

Antes de comenzar a describir el método de inversión es necesario conocer la siguiente:

Notación.

$A=(a_{ij})$	matriz de n×n de la que se desea obtener la inversa.
$A^{(k)}$	es la submatriz de A de tamaño k×k, donde $(A^{(k)})_{ij}=a_{ij}$ $1\leq i, j\leq k$ y $k<n$
$A^j(k)$	j-ésima columna de A considerando sólo a los k primeros elementos, esto es: $(A^j(k))_{ij}=a_{ij}$ $1\leq i\leq k$
$A_i(k)$	i-ésima fila de A considerando sólo a los k primeros elementos, es decir: $(A_i(k))_{ij}=a_{ij}$ $1\leq j\leq k$
A_{ij}	i, j-ésimo elemento de A.

Con el método se obtiene la inversa de la matriz A mediante la inversión iterativa de submatrices de A. El procedimiento inicia con el previo conocimiento de la inversa de la submatriz $A^{(k)}$, cuando ésta exista, a partir de la cual se determina $(A^{(k+1)})^{-1}$ y, cuando este sea el caso, a su vez, de ésta se determina $(A^{(k+2)})^{-1}$ y así sucesivamente hasta llegar a $(A^{(n)})^{-1}$ que es la inversa de la matriz original A.

Si la matriz A es inversible, siempre es posible iniciar con k=1, ya que hay al menos un elemento A_{1i}, i=1, ..., n, diferente de cero pues de no ser así A sería no inversible. Ahora bien, si $A_{11}=0$ y $A_{1i}\neq 0$ entonces se intercambian las columnas 1 e i.

Proposición: Supóngase que es una matriz A de n×n, inversible y que se conoce $(A^{(k)})^{-1}$. Entonces, existe al menos una columna, j=k+1, ..., n, tal que la matriz $A^{(k+1)}$ definida por

$$\left(\begin{array}{c:c} A^{(k)} & A^{j}(k) \\ \hdashline A_{k+1}(k) & A_{(k+1)j} \end{array}\right)$$

es inversible.

Demostración:

Se demuestra esta proposición por contradicción; esto es, se supone que la submatriz $A^{(k)}$ es inversible y no existe la columna $A^{j}(k+1)$, j=k+1, ..., n, tal que $A^{(k+1)}$ sea inversible. Ahora bien, se tiene que $A^{(k)}$ es inversible pero $A^{(k+1)}$ no lo es, entonces todas las columnas $A^{j}(k+1)$, j=k+1, ..., n, son combinaciones lineales de las columnas de la matriz

$$\left(\begin{array}{c} A^{(k)} \\ \hdashline A_{k+1}(k) \end{array}\right)$$

Así, por medio de operaciones elementales se eliminan todas las columnas Aj(k+1), a partir de la (k+1)-ésima, en la matriz inicial A lo que da por resultado la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{c:c:c} A^{(k)} & 0 & 0 \\ \hdashline A_{k+1}(k) & 0 & 0 \\ \hdashline A_{k+2}(k) & A'_{(k+2)j} & \\ \vdots & \vdots & L \\ A_n(k) & A'_{nj} & \end{array}\right)$$

donde L es la submatriz de (n-k-1)×(n-k-1) obtenida al aplicar las operaciones elementales a la submatriz correspondiente de A. Ahora si se recuerda que[1]

$$\det \begin{bmatrix} D & E \\ 0 & F \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} D' & 0 \\ E' & F' \end{bmatrix} = (\det D)(\det F)$$

donde D es una matriz de r×r, E una matriz de r×s, F una matriz de s×s y 0 representa la matriz nula s×r, entonces al particionar la matriz A, tomando r=k+1 y s=n-k-1, esto es

$$\left(\begin{array}{cc:c} A^{(k)} & 0 & 0 \\ A_{k+1}(k) & 0 & 0 \\ \hdashline A_{k+2}(k) & A_{(k+2)j} & \\ \vdots & \vdots & L \\ A_n(k) & A_{nj} & \end{array}\right)$$

[1] Véase Hoffman, pág. 156.

se observa que en este caso det $A = \det A^{(k+1)} \det L = 0$, por lo tanto A resulta ser una matriz no inversible lo cual contradice la hipótesis. ∎

Para elegir la columna j a la que se refiere la proposición, es necesario examinar todas las columnas $j=k+1, \ldots, n$, y será elegida aquella para la cual:

$$\delta^{j}(k) = - A_{k+1}(k)\,(A^{(k)})^{-1} A^{j}(k) + A_{k+1j} \neq 0$$

Si una columna $j^* \in \{k+1, \ldots, n\}$ es elegida y $k+1 \neq j^*$, entonces se intercambian en A las columnas j^* y $k+1$. $\delta^{j^*}(k)$ es el pivote en la etapa k. La inversa de $A^{(k+1)}$ es[2]

$$\left(\begin{array}{c:c} \left(A^{(k)}\right)^{-1}\left(I + \dfrac{1}{\delta^{j(k)}(k)} A^{j(k)}(k)\, A_{k+1}(k) \left(A^{(k)}\right)^{-1}\right) & -\dfrac{1}{\delta^{j(k)}(k)} \left(A^{(k)}\right)^{-1} A^{j(k)}(k) \\ \hdashline -\dfrac{1}{\delta^{j(k)}(k)} A_{k+1}(k) \left(A^{(k)}\right)^{-1} & \dfrac{1}{\delta^{j(k)}(k)} \end{array}\right)$$

Por tanto, se ha invertido una matriz de $(k+1)\times(k+1)$ a partir de una submatriz de $k\times k$.

Si se realiza el producto[3]

$$\left(A^{(k+1)}\right)^{-1} A^{j}(k+1) = \left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} A^{j}(k) \\ \hdashline A_{(k+1),j} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A_{11}A^{j}(k) + A_{12}A_{(k+1),j} \\ \hdashline A_{21}A^{j}(k) + A_{22}A_{(k+1),j} \end{array}\right) \qquad (*)$$

donde

---

[2] Capítulo I, págs. 5-7.

[3] Nota: j^* es la columna que se seleccionó en la k-ésima iteración para encontrar $\left(A^{(k+1)}\right)^{-1}$ y j es cualquiera de las (n-k-1) columnas restantes

$$A_{11} = \left(A^{(k)}\right)^{-1}\left(I + \frac{1}{\delta^j} A^{j^T}(k) A_{k+1}(k) \left(A^{(k)}\right)^{-1}\right)$$

$$A_{12} = -\frac{1}{\delta^j}\left(A^{(k)}\right)^{-1} A^{j^T}(k)$$

$$A_{21} = -\frac{1}{\delta^j} A_{k+1}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1}$$

$$A_{22} = \frac{1}{\delta^j}$$

y si se tiene que

$$\delta^j = -A_{k+1}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1} A^j(k) + A_{(k+1),j}$$

entonces

$$A_{(k+1),j} = \delta^j + A_{k+1}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1} A^j(k).$$

Al sustituir lo anterior en (*) se obtiene

$$\begin{aligned}
A_{11}A^j(k) + A_{12}A_{(k+1),j} &= \left(A^{(k)}\right)^{-1}\left[1 + \frac{1}{\delta^j} A^{j^T}(k) A_{(k+1)}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1}\right] A^j(k) - \\
&\quad - \frac{1}{\delta^j}\left(A^{(k)}\right)^{-1} A^{j^T}(k)\left[\delta^j + A_{(k+1)}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1} A^j(k)\right] \\
&= \left(A^{(k)}\right)^{-1} A^j(k) + \frac{1}{\delta^j}\left(A^{(k)}\right)^{-1} A^{j^T}(k) A_{k+1}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1} A^j(k) - \\
&\quad - \frac{\delta^j}{\delta^j}\left(A^{(k)}\right)^{-1} A^{j^T}(k) - \frac{1}{\delta^j}\left(A^{(k)}\right)^{-1} A^{j^T}(k) A_{k+1}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1} A^j(k) \\
&= \left(A^{(k)}\right)^{-1} A^j(k) - \frac{\delta^j}{\delta^j}\left(A^{(k)}\right)^{-1} A^{j^T}(k)
\end{aligned}$$

$$A_{21}A^j(k) + A_{22}A_{(k+1),j} = -\frac{1}{\delta^{j^*}}A_{(k+1)}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^j(k) + \frac{1}{\delta^{j^*}}\left[\delta^j + A_{(k+1)}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^j(k)\right]$$

$$= -\frac{1}{\delta^{j^*}}A_{(k+1)}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^j(k) + \frac{\delta^j}{\delta^{j^*}} + \frac{1}{\delta^{j^*}}A_{(k+1)}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^j(k)$$

$$= \frac{\delta^j}{\delta^{j^*}}$$

esto es,

$$\left(A^{(k+1)}\right)^{-1}A^j(k+1) = \begin{pmatrix} \left(A^{(k)}\right)^{-1}A^j(k) - \frac{\delta^j(k)}{\delta^{j^*}(k)}\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^{j^*}(k) \\ \frac{\delta^j(k)}{\delta^{j^*}(k)} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Este resultado expresa el producto $\left(A^{(k+1)}\right)^{-1}A^j(k+1)$ en términos de los productos $\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^j(k)$ y los productos escalares $\delta^j(k)$ que se calcularon anteriormente. Esto permite una disminución en el número de cálculos.

2) Procedimiento

2.1 Inversa de una matriz

El procedimiento inicia con la elección de la submatriz $A^{(k)}$, cuya inversa $\left(A^{(k)}\right)^{-1}$ se conoce. Luego se calculan los productos $\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^j(k)$, j=k+1, ...,n. Entonces los pasos para la etapa k+1 son:

1. Se efectúan los productos escalares $\delta^j(k)$ y se elige la columna j^*. Si $j^* \neq k+1$, entonces se intercambian estas columnas.

2. Para el cálculo de $\left(A^{(k+1)}\right)^{-1}$, que como se vió en la sección precedente está dada por

$$\left(\begin{array}{c:c} \left(A^{(k)}\right)^{-1}\left(I+\frac{1}{\delta^{\Gamma}(k)}A^{\Gamma}(k)\,A_{k+1}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1}\right) & -\frac{1}{\delta^{\Gamma}(k)}\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^{\Gamma}(k) \\ \hdashline -\frac{1}{\delta^{\Gamma}(k)}A_{k+1}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1} & \frac{1}{\delta^{\Gamma}(k)} \end{array}\right),$$

y puesto que se conocen los productos $\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^{\Gamma}(k)$, se observa lo siguiente:

- Para obtener el elemento A_{12} sólo se requiere de multiplicar el vector columna $\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^{\Gamma}(k)$ por el inverso del escalar $\delta^{\Gamma}(k)$.
- Para el elemento A_{21}, es necesario efectuar el producto $-A_{k+1}(k)\left(A^{(k)}\right)^{-1}$ para después multiplicarlo por el inverso de $\delta^{\Gamma}(k)$.
- Para A_{11}, se le resta a $\left(A^{(k)}\right)^{-1}$ el resultado que se obtiene al multiplicar el vector columna $\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^{\Gamma}(k)$ por A_{21}.

3. Si k es igual a n se ha obtenido entonces $\left(A^{(n)}\right)^{-1}$ que es la inversa de A por lo que el procedimiento termina en este momento. De no ser así entonces:

- Se determinan los vectores $\left(A^{(k+1)}\right)^{-1}A^{j}(k+1)$ mediante la igualdad (1).
- Se incrementa k en una unidad; y se regresa al paso 1.

El número operaciones que se realizan en la k-ésima iteración en el procedimiento para la obtención de la inversa de una matriz son:

Paso	Divisiones	Multiplicaciones
1	—	k(n-k)
2	2k	$2k^2$
3	n-k-1	k(n-k-1)

Tabla 3. No. operaciones para la inversión de una matriz con el método propuesto.

Para encontrar el número máximo de operaciones, supóngase que se inicia con k=1, entonces para llevar a cabo el método son necesarias: una división para determinar $\left(A^{(1)}\right)^{-1}$ y (n-1) multiplicaciones para determinar los primeros productos $\left(A^{(1)}\right)^{-1}A^{j}(1)$, además, las (n-1) repeticiones de los pasos 1,2, y 3; lo que da un total de $\frac{2n^3-3n^2+3n-2}{2}$ multiplicaciones y $\frac{3n^2-5n+4}{2}$ divisiones.

2.2 Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Considérese el sistema Ax=b cuya solución $x = A^{-1}b$ puede obtenerse por medio del siguiente procedimiento:

1. Se forma la matriz aumentada del sistema, esto es, se toma el vector b como la (n+1)-ésima columna de la matriz A. Una vez elegida la submatriz $A^{(k)}$, donde $\left(A^{(k)}\right)^{-1}$ es conocida, se calculan los productos $\left(A^{(k)}\right)^{-1}A^{j}(k)$, j=k+1, ..., n+1.
2. Se efectúan los productos escalares $\delta^{j}(k)$, j=k+1, ..., n+1; y se elige la columna $j^{*} \in \{k+1, ..., n\}$. De ser necesario, se intercambian las columnas j^{*} y k+1.

3. Se determinan los vectores $\left(A^{(k+1)}\right)^{-1}A^j(k+1)$ mediante la igualdad (1), j=k+2, ..., n+1. Si k≠n, se incrementa k en una unidad y se vuelve al paso 2. En caso contrario, como se ha efectuado el producto $\left(A^{(n)}\right)^{-1}A^{n+1}(n)$ [o lo que es lo mismo $A^{-1}b$], el procedimiento ha finalizado.

En cuanto al número de operaciones que el procedimiento necesita para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, iniciando con k=1, son:

Paso	Divisiones	Multiplicaciones
1	1	n
2	—	k(n+1-k)
3	n-k	k(n-k)

Tabla 4. No. operaciones para la solución de sistemas con el método propuesto.

dichos pasos se repiten n-1 veces por lo que en total se requieren de $\frac{n^2-n+2}{2}$ divisiones y $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ multiplicaciones.

Supóngase que después de haber invertido la matriz A se quisiera invertir la matriz

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

donde B,C y D son matrices de tamaño n×p, p×n y p×p; respectivamente. Entonces con este método, es suficiente calcular los vectores $A^{-1}B^j$, j=1, ..., p; lo que exige pn^2 multiplicaciones y el procedimiento puede continuar como si se hubiera tratado directamente con esta matriz.

3) Ejemplos Numéricos

Ejemplo #1.

Supóngase que se desea encontrar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si se inicia con k=1, entonces

$A^{(1)} = (2)$ $\qquad\qquad$ $\left(A^{(1)}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)$

j	$A^j(1)$	$\left(A^{(1)}\right)^{-1} A^j(1)$
2	-1	$(\frac{1}{2})(-1) = -\frac{1}{2}$
3	0	$(\frac{1}{2})(0) = 0$
4	0	$(\frac{1}{2})(0) = 0$

Hasta este momento se han realizado una división y tres multiplicaciones. De aquí en adelante, se expresará el número de operaciones, paso por paso, mediante el formato **(# divisiones, # multiplicaciones)**.

Paso 1.

j	$\delta^j(1) = -A_2(1)\left(A^{(1)}\right)^{-1}A^j(1) + A_{2j}$
2	$-(-1)(-\frac{1}{2}) + 2 = \frac{3}{2}$
3	$-(-1)(0) - 1 = -1$
4	$-(-1)(0) + 1 = 1$

(0 divisiones, 3 multiplicaciones)

Como $\delta^2(1) \neq 0$ se elige $j^*=2$.

Paso 2.

$$A_{12} = -\frac{1}{\delta^2(1)}\left(A^{(1)}\right)^{-1}A^2(1) = -\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$A_{21} = -\frac{1}{\delta^2(1)}A_2(1)\left(A^{(1)}\right)^{-1} = -\frac{(-1)(\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$A_{11} = \left(A^{(1)}\right)^{-1} - \left(A^{(1)}\right)^{-1}A^2(1)A_{21} = (\tfrac{1}{2}) - (-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

$$A_{22} = \frac{1}{\delta^2(1)} = \frac{2}{3}$$

(2 divisiones, 2 multiplicaciones)

$$\left(A^{(2)}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Paso 3.

$$\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^3(2) = \begin{pmatrix} \left(A^{(1)}\right)^{-1}A^3(1) - \frac{\delta^3(1)}{\delta^2(1)}\left(A^{(1)}\right)^{-1}A^2(1) \\ \frac{\delta^3(1)}{\delta^2(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{-1}{\frac{3}{2}}(-\frac{1}{2}) \\ \frac{-1}{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^{4}(2)=\begin{pmatrix}\left(A^{(1)}\right)^{-1}A^{4}(1)-\frac{\delta^{4}(1)}{\delta^{2}(1)}\left(A^{(1)}\right)^{-1}A^{2}(1)\\ \hdashline \frac{\delta^{4}(1)}{\delta^{2}(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-\frac{1}{3/2}\left(-\frac{1}{2}\right)\\ \hdashline \frac{1}{3/2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

(2 divisiones, 2 multiplicaciones)

Se hace k=2.

Paso 1.

j	$\delta^{j}(2)=-A_{3}(2)\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^{j}(2)+A_{3,j}$
3	$-(0\quad -1)\begin{pmatrix}-1/3\\ -2/3\end{pmatrix}+2=\frac{4}{3}$
4	$-(0\quad -1)\begin{pmatrix}1/3\\ 2/3\end{pmatrix}+0=\frac{2}{3}$

(0 divisiones, 4 multiplicaciones)

Como $\delta^{3}(2)\neq 0$ se elige $j^{*}=3$.

Paso 2.

$$A_{12}=-\frac{1}{\delta^{3}(2)}\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^{3}(2)=-\frac{1}{4/3}\begin{pmatrix}-1/3\\ -2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4\\ 1/2\end{pmatrix}.$$

$$A_{21} = -\frac{1}{\delta^3(2)} A_3(2)\left(A^{(2)}\right)^{-1} = -\frac{3/4}{3}\begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4 & 1/2\end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = \left(A^{(2)}\right)^{-1} - \left(A^{(2)}\right)^{-1} A^3(2) A_{21} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1/3\\ -2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/4 & 1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}9 & 6\\ 6 & 12\end{pmatrix}.$$

$$A_{22} = \frac{1}{\delta^3(2)} = \frac{3}{4}.$$

(4 divisiones, 8 multiplicaciones)

$$\left(A^{(3)}\right)^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}9 & 6 & 3\\ 6 & 12 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}.$$

Paso 3.

$$\left(A^{(3)}\right)^{-1} A^4(3) = \left(\frac{\left(A^{(2)}\right)^{-1} A^4(2) - \frac{\delta^4(2)}{\delta^3(2)}\left(A^{(2)}\right)^{-1} A^3(2)}{\frac{\delta^4(2)}{\delta^3(2)}}\right) = \left(\frac{\begin{pmatrix}1/3\\ 2/3\end{pmatrix} - \frac{1/4}{3/4}\begin{pmatrix}-1/3\\ -2/3\end{pmatrix}}{\frac{1/4}{3/4}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

(1 división, 2 multiplicaciones)

Se hace k=3.

Paso 1.

j	$\delta^j(3) = -A_4(3)\left(A^{(3)}\right)^{-1} A^j(3) + A_{4,j}$
4	$-\frac{1}{2}(0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 4 = 3$

(0 divisiones, 3 multiplicaciones)

Como $\delta^4(3) \neq 0$ se elige $j^*=4$.

Paso 2.

$$A_{12} = -\frac{1}{\delta^4(3)}\left(A^{(3)}\right)^{-1} A^4(3) = -\frac{1/2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

$$A_{21} = -\frac{1}{\delta^4(3)} A_4(3)\left(A^{(3)}\right)^{-1} = -\frac{1}{12}(0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 4 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = -\frac{1}{12}(2 \quad 4 \quad 2).$$

$$A_{11} = \left(A^{(3)}\right)^{-1} - \left(A^{(3)}\right)^{-1} A^{4}(3) A_{21} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 12 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 10 & 8 & 4 \\ 8 & 16 & 8 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \frac{1}{a^{4}(3)} = \frac{1}{3}.$$

(6 divisiones, 9 multiplicaciones)

Entonces A^{-1} es

$$\left(A^{(4)}\right)^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 10 & 8 & 4 & -2 \\ 8 & 16 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & 10 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

En total se realizaron para la inversión de la matriz A, 15 divisiones y 45 multiplicaciones.

Ahora, si se desea resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_2 + 2x_3 \qquad &= 2 \\ x_2 \qquad + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

entonces

Paso 1.

La matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right),$$

y si de nuevo se elige k=1

$$A^{(1)} = (2) \qquad\qquad (A^{(1)})^{-1} = (\tfrac{1}{2})$$

j	$A^j(1)$	$(A^{(1)})^{-1}A^j(1)$
2	-1	$(\frac{1}{2})(-1) = -\frac{1}{2}$
3	0	$(\frac{1}{2})(0) = 0$
4	0	$(\frac{1}{2})(0) = 0$
5	0	$(\frac{1}{2})(0) = 0$

(1 división, 4 multiplicaciones)

Paso 2.

j	$\delta^j(1) = -A_2(1)\left(A^{(1)}\right)^{-1}A^j(1) + A_{2,j}$
2	$-(-1)(-\frac{1}{2}) + 2 = \frac{3}{2}$
3	$-(-1)(0) - 1 = -1$
4	$-(-1)(0) + 1 = 1$
5	$-(-1)(0) + 1 = 1$

(0 divisiones, 4 multiplicaciones)

$j^* = 2$

Paso 3.

$$\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^3(2) = \begin{pmatrix} \left(A^{(1)}\right)^{-1}A^3(1) - \frac{\delta^3(1)}{\delta^2(1)}\left(A^{(1)}\right)^{-1}A^2(1) \\ \frac{\delta^3(1)}{\delta^2(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{-1}{3/2}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{-1}{3/2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^4(2) = \begin{pmatrix} \left(A^{(1)}\right)^{-1}A^4(1) - \frac{\delta^4(1)}{\delta^2(1)}\left(A^{(1)}\right)^{-1}A^2(1) \\ \frac{\delta^4(1)}{\delta^2(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{3/2}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{3/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^5(2) = \begin{pmatrix} \left(A^{(1)}\right)^{-1}A^5(1) - \frac{\delta^5(1)}{\delta^2(1)}\left(A^{(1)}\right)^{-1}A^2(1) \\ \frac{\delta^5(1)}{\delta^2(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{3/2}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{3/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(3 divisiones, 3 multiplicaciones)

Paso 2.

j	$\delta^j(2) = -A_3(2)\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^j(2) + A_{3j}$
3	$-(0 \quad -1)\begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} + 2 = \frac{4}{3}$
4	$-(0 \quad -1)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + 0 = \frac{2}{3}$
5	$-(0 \quad -1)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + 2 = \frac{8}{3}$

(0 divisiones, 6 multiplicaciones)

$j^*=2$.

Paso 3.

$$\left(A^{(3)}\right)^{-1}A^4(3) = \begin{pmatrix} \left(A^{(2)}\right)^{-1}A^4(2) - \frac{\delta^4(2)}{\delta^3(2)}\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^3(2) \\ \hdashline \frac{\delta^4(2)}{\delta^3(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - \frac{2/3}{4/3}\begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \\ \hdashline \frac{2/3}{4/3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{(3)}\right)^{-1}A^{5}(3)=\left(\frac{\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^{5}(2)-\frac{\delta^{5}(2)}{\delta^{3}(2)}\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^{3}(2)}{\frac{\delta^{5}(2)}{\delta^{3}(2)}}\right)=\left(\frac{\begin{pmatrix}1/3\\2/3\end{pmatrix}-\text{[illegible]}\begin{pmatrix}-1/3\\-2/3\end{pmatrix}}{\text{[illegible]}}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

(2 divisiones, 4 multiplicaciones)

Paso 2.

j	$\delta^{j}(3)=-A_{4}(3)\left(A^{(3)}\right)^{-1}A^{j}(3)+A_{4,j}$
4	$-\frac{1}{2}(0\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+4=3$
5	$-(0\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+3=1$

(0 divisiones, 6 multiplicaciones)

$j^{*}=4$.

Paso 3.

$$\left(A^{(4)}\right)^{-1}A^{5}(4)=\begin{pmatrix}\dfrac{\left(A^{(3)}\right)^{-1}A^{5}(3)-\frac{\delta^{5}(3)}{\delta^{4}(3)}\left(A^{(3)}\right)^{-1}A^{4}(3)}{\frac{\delta^{5}(3)}{\delta^{4}(3)}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}}{\frac{1}{3}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{5}{3}\\\frac{11}{6}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

(1 división, 3 multiplicaciones)

que es la solución al sistema.

$$\left(A^{(4)}\right)^{-1}A^{5}b=A^{-1}b=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{5}{3}\\\frac{11}{6}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

En total se realizaron 30 multiplicaciones y 7 divisiones.

Ejemplo #2.

Supóngase que una vez que se obtuvo que la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se quisiera encontrar la inversa de la matriz

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

entonces el procedimiento es:

Inicio: Cálculo de los productos $\left(A^{(2)}\right)^{-1} A^j(2)$

j	$A^j(2)$	$\left(A^{(2)}\right)^{-1} A^j(2)$
3	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Paso 1.

j	$\delta^j(2) = -A_3(2)\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^j(2)+A_{3j}$
3	$-(0\quad 0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1=1$
4	$-(0\quad 0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1=1$

Como $\delta^3(2)\neq 0$ se elige $j^*=3$.

Paso 2.

$$A_{12}=-\tfrac{1}{\delta^3(2)}\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^3(2)=-\tfrac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

$$A_{21}=-\tfrac{1}{\delta^3(2)}A_3(2)\left(A^{(2)}\right)^{-1}=-\tfrac{1}{1}(0\quad 0)\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=(0\quad 0).$$

$$A_{11}=\left(A^{(2)}\right)^{-1}-\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^3(2)A_{21}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}-\tfrac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\quad 0)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$A_{22}=\tfrac{1}{\delta^3(2)}=1.$$

$$\left(A^{(3)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Paso 3.

$$\left(A^{(3)}\right)^{-1}A^{4}(3)=\left(\begin{array}{c}\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^{4}(2)-\frac{\delta^{4}(2)}{\delta^{3}(2)}\left(A^{(2)}\right)^{-1}A^{3}(2)\\ \hline \frac{\delta^{4}(2)}{\delta^{3}(2)}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \hline \frac{1}{1}\end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Se hace k=3.

Paso 1.

j	$\delta^{j}(3)=-A_{4}(3)\left(A^{(3)}\right)^{-1}A^{j}(3)+A_{4j}$
4	$-(0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+1=1$

Como $\delta^{4}(3)\neq 0$ se elige j^{*}=4.

Paso 2

$$A_{12} = -\frac{1}{\delta^4(3)}\left(A^{(3)}\right)^{-1}A^4(3) = -\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = \left(A^{(3)}\right)^{-1} - \left(A^{(3)}\right)^{-1}A^4(3)A_{21} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \frac{1}{\delta^4(3)} = 1.$$

Entonces A^{-1} es

$$\left(A^{(4)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El propósito de presentar este nuevo método de inversión de matrices es el de dar una alternativa al método de Gauss-Jordan. A través de la teoría y los ejemplos expuestos anteriormente se puede concluir lo siguiente:

1) Complejidad algorítmica.

La manera de evaluar la eficiencia de un método es mediante la complejidad algorítmica del mismo. Esta la determina el número máximo de operaciones (multiplicaciones y divisiones) que se requieren para aplicar el método. Así, al comparar la complejidad algorítmica del método propuesto con la del de Gauss-Jordan (véase Anexo C), tanto para la inversión de matrices como para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, se observa que el número de operaciones del primero es siempre menor o igual que el número correspondiente al de Gauss-Jordan.

Por lo anterior se puede decir que este método aporta la misma eficiencia que el de Gauss-Jordan.

2) Programación.

Un punto que considero importante, es la ventaja que presenta el método propuesto en lo que a programación se refiere, ya que para la inversión de matrices éste ocuparía menos espacio en memoria que el de Gauss-Jordan.

Se afirma lo anterior porque mientras que con el método de Gauss-Jordan se necesita guardar en memoria tanto la matriz A como la matriz identidad, que hacen un total de $2n^2$ localidades; con el método propuesto sólo es necesario almacenar en memoria la matriz A, es decir, se requieren n^2 localidades.

La razón por la que este nuevo método ocupa la mitad de localidades, es que la matriz A es reemplazada paso a paso por la matriz inversa.

3) Matrices agrandadas[1].

Si una vez invertida la matriz A se quisiera invertir la matriz

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

se podrían utilizar indistintamente ambos métodos, puesto que los números de operaciones son aproximadamente iguales. Sin embargo considero que el método nuevo es más directo que el de Gauss-Jordan.

Quizás sería recomendable que en los cursos de Álgebra Lineal se analizaran otros métodos aparte del ya clásico de Gauss-Jordan, y que los algoritmos correspondientes a los otros métodos se tradujeran a lenguajes de alto nivel.

A fin de mejorar el método propuesto se podría considerar lo siguiente:

- Dar algunas sugerencias para la elección de la matriz $A^{(k)}$ de tal forma que se procurara encontrar la k lo más grande posible, ya que entre más grande sea la matriz con que se inicia el método, es menor el número de operaciones que se realiza.

- Establecer ciertos criterios para la elección de la columna j, entre aquellas columnas que cumplan con que la $\delta_{kj} \neq 0$, que faciliten más los cálculos o que permitan una disminución de tiempo-máquina.

[1] Entiéndase por matriz agrandada aquella matriz cuyo tamaño se incrementa al agregarle columnas y renglones.

ANEXOS

Anexo A: Complejidad Algorítmica de Gauss-Jordan

Obtención de la inversa de una matriz.

El número de operaciones por cada iteración es:

Iteración	Divisiones	Multiplicaciones
1	2n	2n(n-1)
2	2n-1	(2n-1)(n-1)
⋮	⋮	⋮
k	(2n-(k-1))	(2n-(k-1))(n-1)

y tomando en cuenta que son n iteraciones, el número máximo de divisiones es:

$$\sum_{k=1}^{n}[2n-(k-1)] = (2n+1)\sum_{k=1}^{n}1 - \sum_{k=1}^{n}k = (2n+1)n - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{4n^2+2n-n^2-n}{2} = \frac{3n^2+n}{2}$$

y el de multiplicaciones:

$$\sum_{k=1}^{n}[(2n-(k-1))(n-1)] = \sum_{k=1}^{n}\left[2n^2-nk+n-2n+k-1\right]$$

$$= \left(2n^2-n-1\right)\sum_{k=1}^{n}1 + (1-n)\sum_{k=1}^{n}k = \left(2n^2-n-1\right)n + (1-n)\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{4n^3-2n^2-2n+n^2-n^3+n-n^2}{2} = \frac{3n^3-2n^2-n}{2}$$

Solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Iteración	Divisiones	Multiplicaciones
1	n+1	(n+1)(n-1)
2	n	n(n-1)
⋮	⋮	⋮
k	(n-(k-2))	(n-(k-2))(n-1)

donde k=1, ..., n. El número máximo de divisiones es:

$$\sum_{k=1}^{n}[n-(k-2)]=(n+2)\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}k=n(n+2)-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{2n^2+4n-n^2-n}{2}=\frac{n^2+3n}{2}$$

y de multiplicaciones:

$$\sum_{k=1}^{n}[(n-(k-2))(n-1)]=\sum_{k=1}^{n}\left[n^2-nk+2n-n+k-2\right]$$

$$=(n^2+n-2)\sum_{k=1}^{n}1+(1-n)\sum_{k=1}^{n}k=n^3+n^2-2n+(1-n)\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{2n^3+2n^2-4n+n^2-n^3+n-n^2}{2}=\frac{n^3+2n^2-3n}{2}$$

Anexo B: Complejidad Algorítmica del Método Propuesto

Obtención de la inversa de una matriz.

Para k=1, ..., (n-1):

Etapa	Divisiones	Multiplicaciones
Inicio	1	n-1
Paso 1	—	k(n-k)
Paso 2	2k	2k²
Paso 3	n-k-1	k(n-k-1)

el número máximo de divisiones es:

$$\sum_{k=1}^{n-1}[2k+n-k-1]+1=\sum_{k=1}^{n-1}[k+n-1]+1=\sum_{k=1}^{n-1}k+(n-1)\sum_{k=1}^{n-1}1+1$$

$$=\frac{(n-1)n}{2}+(n-1)^2+1=\frac{n^2-n+2n^2-4n+2+2}{2}$$

$$=\frac{3n^2-5n+4}{2}$$

y el número máximo de multiplicaciones:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[k(n-k)+2k^2+k(n-k-1)\right]+n-1=\sum_{k=1}^{n-1}\left[nk-k^2+2k^2+nk-k^2-k\right]+n-1$$

$$=(2n-1)\sum_{k=1}^{n-1}k+n-1=(2n-1)\frac{(n-1)n}{2}+n-1$$

$$= \frac{2n^3 - 2n^2 - n^2 + n + 2n - 2}{2} = \frac{2n^3 - 3n^2 + 3n - 2}{2}$$

Solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Para k=1, ..., (n-1):

Etapa	Divisiones	Multiplicaciones
Paso 1	1	n
Paso 2	—	k(n+1-k)
Paso 3	n-k	k(n-k)

el número máximo de divisiones es:

$$\sum_{k=1}^{n-1}[n-k]+1 = n\sum_{k=1}^{n-1}1 - \sum_{k=1}^{n-1}k + 1 = n(n-1) - \frac{(n-1)n}{2} + 1 = \frac{2n^2 - 2n - n^2 + n + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

y el número máximo de multiplicaciones:

$$\sum_{k=1}^{n-1}[k(n+1-k) + k(n-k)] + n = \sum_{k=1}^{n-1}[nk + k - k^2 + nk - k^2] + n$$

$$= (2n+1)\sum_{k=1}^{n-1}k - 2\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + n = (2n+1)\frac{(n-1)n}{2} - 2\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n$$

$$= \frac{6n^3 + 3n^2 - 6n^2 - 3n - 4n^3 + 2n^2 + 4n^2 - 2n + 6n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Anexo C: Comparación de las Complejidades Algorítmicas

En este anexo se comparan los números de operaciones de cada uno de los métodos, así, para la inversión de matrices se tiene:

	Gauss-Jordan	**Método Propuesto**
Divisiones	$\frac{3n^2+n}{2}$	$\frac{3n^2-5n+4}{2}$
Multiplicaciones	$\frac{3n^3-2n^2-n}{2}$	$\frac{2n^3-3n^2+3n-2}{2}$

- Divisiones

$$\frac{3n^2-5n+4}{2} \leq \frac{3n^2+n}{2}$$

$$-5n+4 \leq n$$

$$4 \leq 6n.$$

Este resultado siempre es válido, puesto que se verifica para toda n≥1.

- Multiplicaciones

$$\frac{2n^3-3n^2+3n-2}{2} \leq \frac{3n^3-2n^2-n}{2}$$

$$4n-2 \leq n^3+n^2$$

$$-2 \leq n^3+n^2-4n.$$

Este resultado nos indica que las operaciones con el nuevo método son siempre menores o iguales a las de Gauss-Jordan, pues esta igualdad se satisface para n≥1.

En el caso para la solución de sistemas de ecuaciones lineales:

	Gauss-Jordan	Método Propuesto
Divisiones	$\frac{n^2+3n}{2}$	$\frac{n^2-n+2}{2}$
Multiplicaciones	$\frac{n^3+2n^2-3n}{2}$	$\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

- Divisiones

$$\frac{n^2-n+2}{2} \le \frac{n^2+3n}{2}$$

$$2 \le 4n$$

Del mismo modo, se concluye que el número de divisiones para el método propuesto nunca será mayor al de Gauss-Jordan, pues la desigualdad se verifica para n≥1.

- Multiplicaciones

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6} \le \frac{n^3+2n^2-3n}{2}$$

$$2n^3+3n^2+n \le 3n^3+6n^2-9n$$

$$0 \le n^3+3n^2-10n$$

En este caso, la desigualdad se satisface siempre que n>1.

BIBLIOGRAFÍA.

- Ayres, Frank. (1962)
  "Theory and Problems of Matrices"
  Schaums
  New York.

- Carbo, R. C. y J. A. H. Basora. (1976)
  "Introducción a la Teoría de Matrices."
  Alhambra.
  España.

- Fraleigh, John B. (1987)
  "Álgebra Abstracta."
  Addison-Wesley.
  USA.

- Gradshteyn, I. S. y L.M. Ryzhik. (1979)
  "Table of Integrals, Series and Products."
  Academic Press.
  USA.

- Hoffman, K. y R. Kunze. (1973)
  "Álgebra Lineal."
  Prentice Hall.
  México.

- Kostrikin, A. I. (1992)
  "Introducción al Álgebra."
  Mc. Graw-Hill.
  España.

- Lang, S. (1966)
"Linear Algebra."
Addison-Wesley.
Japan.

- Luthe, R., A. Olivera y F. Schutz. (1978)
"Métodos Numéricos."
Limusa.
México.

- Mc. Calla, R. T. (1967)
"Introduction to Numerical Methods."
John Wiley & Sons.
USA.

- Moore, J. T. (1968)
"Elements of Linear Algebra and Matrix Theory."
Mc. Graw-Hill.
USA.

- Noble, B. y J. W. Daniel. (1988)
"Álgebra Lineal Aplicada."
Prentice Hall.
México.

- Rodrlguez, F. G. (1985)
"Álgebra y Geometrla Analitica."
Mc. Graw-hill.
México.